

Міністерство освіти і науки України
Івано-Франківський національний технічний
університет нафти і газу
Інститут інженерної механіки та робототехніки
Кафедра фізико-математичних наук



**МАТЕРІАЛИ
XXXVIII НАУКОВО ТЕХНІЧНОЇ КОНФЕРЕНЦІЇ
СТУДЕНТІВ 2025-2026 навчального року**

Секція фізико-математичні науки

19 березня (фізика), 7 квітня (математика) 2026 року

Верстка Бандура А.І., Тимків І.Р.

*Рекомендовано для розміщення в електронних сервісах ІФНТУНГ
вченою радою інституту інженерної механіки та робототехніки
(протокол №9 від 20.04.2026)*

Матеріали XXXVIII Науково технічної конференції студентів 2025-2026 навчального року, м.Івано-Франківськ, 19 березня (фізика), 7 квітня (математика) 2026 року, Івано-Франківськ, 2026- с. 101.

Викладено матеріали доповідей учасників XXXVIII Науково технічна конференції студентів 2025-2026 навчального року, секція фізико-математичні науки, яка відбулась 19 березня (фізика), 7 квітня (математика) 2026 року в місті Івано-Франківську.

Зміст

<i>Вайда Христина Володимирівна, Семенчук Андрій Васильович</i> КУБІЧНІ РІВНЯННЯ ТА ІРРАЦІОНАЛЬНОСТІ.....	5
<i>Волошин Данило Євгенович, Тимків Іван Романович</i> ДОСЛІДЖЕННЯ НА ЕКСТРЕМУМ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ В СЕРЕДОВИЩІ MAPLE	6
<i>Грицуляк Віталій Миколайович, Бандура Андрій Іванович</i> ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ АРГІРОСА-ШАХНА-ЯРМОЛИ ДО ВІДШУКАННЯ НУЛІВ ПОХІДНИХ ЦІЛОЇ ФУНКЦІЇ, ЗОБРАЖЕНОЇ НЕСКІНЧЕННИМ ДОБУТКОМ.....	8
<i>Гуріненко Вікторія Володимирівна, Витвицька Оксана Миколаївна</i> МАТЕМАТИЧНІ ПІДХОДИ ДО МОДЕЛЮВАННЯ СИТЕМ ІЗ НЕПЕРЕДБАЧУВАНОЮ ДИНАМІКОЮ.....	13
<i>Давидок Софія Ігорівна, Витвицька Оксана Миколаївна</i> МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ У ФІНАНСОВІЙ СФЕРІ: ВІДСОТКИ, АНУЇТЕТИ ТА ОПТИМАЛЬНІ ІНВЕСТИЦІЙНІ СТРАТЕГІЇ.....	17
<i>Дем'ячук Богдан Юрійович, Бандура Андрій Іванович</i> МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПЕРЦЕТРОНА.....	20
<i>Дмитрів Денис Володимирович, Гураль Інеса Михайлівна</i> МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ОБРОБКИ ЦИФРОВИХ ЗОБРАЖЕНЬ.....	23
<i>Жара Богдана Іванівна, Мазур Тетяна Михайлівна</i> СУЧАСНІ ТЕПЛОІЗОЛЮЮЧІ МАТЕРІАЛИ ДЛЯ ШВИДКОГО І ДОВГОВІЧНОГО ВІДНОВЛЕННЯ ЖИТЛА	25
<i>Жара Богдана Іванівна, Тирлич Володимир Васильович</i> ПОБУДОВА ЛІНІЙНОЇ РЕГРЕСІЙНОЇ МОДЕЛІ ДЛЯ ОПИСУ ДЕФОРМАЦІЙНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ЦЕМЕНТНОГО КАМЕНЮ НА ОСНОВІ ЦЕМЕНТУ ПЦТ-ІГ.....	29
<i>Жарська Аліна Богданівна, Тирлич Володимир Васильович</i> МОДЕЛЮВАННЯ ПРУЖНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ЦЕМЕНТНОГО КАМЕНЮ ПЦТ-ІГ В СЕРЕДОВИЩІ MS EXCEL НА ОСНОВІ ЛІНІЙНОЇ РЕГРЕСІЙНОЇ МОДЕЛІ.....	31
<i>Зима Артем Русланович, Шегда Любов Михайлівна</i> ПСЕВДООБЕРНЕНА МАТРИЦЯ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ	33
<i>Ллюк Марія Юрївна, Тимків Іван Романович</i> ІНТЕГРАЛ ПУАССОНА ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ В ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧАХ.....	39
<i>Князевич Антон Миколайович, Гураль Інеса Михайлівна</i> ПАРАДОКСИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ.....	41
<i>Кобринський Олександр Дмитрович, Григорчук Галина Василівна</i> АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ У FRONTEND-ІНЖЕНЕРІЇ:ВІД МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДО РЕНДЕРИНГУ	44
<i>Коваль Віталій Володимирович, Тирлич Володимир Васильович</i> МЕТОДИ ОЦІНКИ ЗНОСОТРИВКОСТІ МАТЕРІАЛІВ ЗА УМОВ УДАРНО-АБРАЗИВНОГО ЗНОШУВАННЯ.....	47
<i>Коляджин Тетяна Іванівна, Мазур Тетяна Михайлівна</i> ВПЛИВ РЕЛЬЄФУ, ГЕОГРАФІЧНИХ ТА КЛІМАТИЧНИХ УМОВ НА ЕФЕКТИВНІСТЬ СОНЯЧНИХ ПАНЕЛЕЙ.....	50
<i>Крамар Євген Олександрович, Семенчук Андрій Васильович</i> ПАРАФУНКЦІЇ ТРИКУТНИХ МАТРИЦЬ.	55
<i>Крицький Владислав Андрійович, Гураль Інеса Михайлівна</i> МОДЕЛІ ЛАНЧЕСТЕРА.....	56

<i>Нумайко Тарас Григорович, Шегда Любов Михайлівна</i> АНАЛІЗ І СИНТЕЗ ЗМІННИХ СТАНУ ЕЛЕКТРИЧНИХ СИСТЕМ ЗА ДОПОМОГОЮ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ.....	60
<i>Ольхов Борис Олександрович, Галушак Мар'ян Олексійович</i> ТЕРМОЕЛЕКТРИЧНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТЕПЛОВОЇ ЕНЕРГІЇ СОНЦЯ В ЕЛЕКТРИЧНУ	63
<i>Петрів Олександр Михайлович, Гураль Інеса Михайлівна</i> ШУМ ПЕРЛІНА.....	66
<i>Петриків Денис, Чернова Мирослава Євгеніївна</i> СИНІЙ СВІТЛОДІОД: ВИНАХІД, ЩО ЗМІНИВ СВІТ.....	67
<i>Погребняк Катерина, Мазур Мирослав</i> РОЗВИТОК МЕТАНОЛОВИХ ПАЛИВНИХ КОМІРОК У КОНТЕКСТІ ДЕКАРБОНІЗАЦІЇ.....	71
<i>Приймачук Неля Іванівна, Григорчук Галина Василівна</i> МАРКОВСЬКІ ЛАНЦЮГИ ПРИ АНАЛІЗІ КОРИСТУВАЦЬКОЇ ПОВЕДІНКИ У СОЦІАЛЬНИХ МЕРЕЖАХ.....	74
<i>Приплюцький Олег Олегович, Григорчук Галина Василівна</i> КРИПТОГРАФІЯ ТА ТЕОРІЯ ЧИСЕЛ: МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ БЕЗПЕКИ ЦИФРОВОГО СВІТУ.....	78
<i>Сверίδα Богдан Ігорович, Гураль Інеса Михайлівна</i> ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИКИ В ОБРОБЦІ ПРИРОДНОЇ МОВИ.....	80
<i>Свиридова Галина, Чернова Мирослава Євгеніївна</i> ОГЛЯД РОЗВИТКУ ДЕЯКИХ СУЧАСНИХ ТЕХНОЛОГІЙ, ТА ШЛЯХИ ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ У ПРОМИСЛОВОСТІ.....	82
<i>Сеньків Владислав-Марко Романович, Мокляк Володимир Володимирович</i> МОДЕЛЮВАННЯ «РОМБООДРИЗАЦІЇ» КУБІЧНОЇ ГРАТКИ В ЕПІТАКСІЙНИХ СЕНДВІЧ-СТРУКТУРАХ НА ОСНОВІ XRD АНАЛІЗУ	86
<i>Сидорук Юрій, Чернова Мирослава Євгеніївна</i> БРОНЕЖИЛЕТИ – ЇХ МИНУЛЕ, ТЕПЕРІШНЄ І ПЕРСПЕКТИВИ В МАЙБУТНЬОМУ.....	90
<i>Стахів Юрій, Григорчук Галина Василівна</i> ЗАСТОСУВАННЯ МОДУЛЬНОЇ АРИФМЕТИКИ ТА ЛОГАРИФМІЧНИХ РОЗПОДІЛІВ У ВЕРИФІКАЦІЇ ДАНИХ: АЛГОРИТМ ЛУНА ТА ЗАКОН БЕНФОРДА..	93
<i>Уграк Назарій Вікторович, Семенчук Андрій Васильович</i> ТРИКУТНІ МАТРИЦІ. ДІЇ НАД НИМИ.....	95
<i>Чуйко Назарій Михайлович, Шегда Любов Михайлівна</i> РОЗВ'ЯЗУВАННЯ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ 3-ГО СТЕПЕНЯ ЗА ФОРМУЛАМИ КАРДАНО ТА 4-ГО СТЕПЕНЯ МЕТОДОМ ФЕРАРІ.....	96
<i>Ярош Владислав, Басараб Анастасія, Бандура Андрій Іванович</i> ОПТИМАЛЬНЕ УПРАВЛІННЯ У ЗАДАЧІ АНАЛІЗУ РІШЕНЬ ТАКТИЧНОЇ ЛОГІСТИКИ: МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ.....	99

КУБІЧНІ РІВНЯННЯ ТА ІРРАЦІОНАЛЬНОСТІ

Вайда Христина Володимирівна

АКП-24-1, ФАЕ

khrystyna.vaida-akp241@nung.edu.ua

Науковий керівник: Семенчук Андрій Васильович <https://orcid.org/0000-0002-6910-1868>, к.ф.-м.н, доц. кафедри ФМН, andrii.semenchuk@nung.edu.ua

В доповіді розглядаються кубічні рівняння та ірраціональності.

Вивченню (n, m) -форм $s_0 + s_1 \sqrt[n]{m} + \dots + s_{n-1} \sqrt[n]{m^{n-1}}$ числового поля $Q(m)$ степеня n присвячено чимало робіт. При цьому основна увага аналітиків була зосереджена на вивченні їх цілочислових базисів та одиниць. Випадок $n = 2$ в основному досліджений Валлісом в *Commercium aepistolicum* (1657 р.) Проте окремі аспекти досліджень у цьому напрямку проводяться і нині. Випадок $n = 3$ більш складний. Його досліджували Якобі, Пуанкаре, Гурвіц. Вороний проводив свої дослідження на основі узагальнень неперервних дробів. Техніці роботи з $(3, m)$ -формами, які Делоне та Фадеев називають кубічними числами у їх роботі присвячено цілий розділ. Алгоритми обчислення степенів (n, m) -форм корисні при дослідженні структури множини фундаментальних одиниць у кільці цілих чисел полів. У доповіді, при допомозі апарату числення трикутних матриць [1] побудовано рекурсивні алгоритми роботи із (n, m) -формами третього та четвертого порядку та наведено ряд прикладів, що ілюструють їх ефективність у порівнянні з алгоритмами, запропонованими у [2].

Література

- [1] Заторський Р. А. Числення трикутних матриць та його застосування. Івано-Франківськ: Сімик, 2010, 508 с.
- [2] Семенчук А. В. Про деякі алгоритми обчислень для кубічних полів та полів четвертого степеня // Карпатські математичні публікації. — 2011. — Т.3, №1. — С. 130–138.

ДОСЛІДЖЕННЯ НА ЕКСТРЕМУМ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ В СЕРЕДОВИЩІ MAPLE

Волошин Данило Євгенович

ПМІ-25-1 Інститут інженерної механіки та робототехніки

danylo.voloshyn-pmi251@nung.edu.ua

Науковий керівник: Тимків Іван Романович, к.ф.-м.н., доцент кафедри фізико-математичних наук, ivan.tymkiv@nung.edu.ua

Діяльність людини під час розв'язування різних практичних і теоретичних задач переважно пов'язана з пошуком найбільш ефективного або оптимального варіанта. Для вибору найкращого варіанту необхідно досліджувати задачі на знаходження найбільших і найменших значень певних величин, тобто задачі на максимум і мінімум. Ці поняття об'єднують загальним терміном «екстремум».

Методи знаходження екстремумів широко застосовуються у різних галузях науки, та техніки. В інженерії та техніці екстремуми використовуються для проектування оптимальних конструкцій. Інженери прагнуть мінімізувати витрати матеріалів, вагу або енергоспоживання, зберігаючи при цьому необхідну міцність і надійність. В економіці підприємства визначають такі обсяги виробництва, витрати ресурсів або ціни, при яких прибуток є максимальним, а витрати — мінімальними. Також задачі пов'язані з дослідженням на екстремум виникають в медицині та екології. В екології вони використовуються для оптимального управління ресурсами та зменшення негативного впливу на довкілля, наприклад, шляхом мінімізації викидів або раціонального використання енергії.

Для дослідження функцій багатьох змінних $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на екстремум важливу роль відіграє критерій Сільвестра, який використовується для визначення знаковизначеності квадратичної форми, пов'язаної з матрицею Гессе – матриця других похідних (гессіан)

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

Саме за допомогою цієї матриці можна встановити характер критичної точки функції: чи є вона точкою максимуму, мінімуму або сідловою точкою. Критерій дослідження на екстремум дозволяє встановити характер критичної точки без безпосереднього дослідження поведінки функції в околі точки. Якщо всі головні мінори матриці Гессе додатні, то квадратична форма є додатно визначеною, а отже функція має локальний мінімум. Якщо знаки головних мінорів чергуються, то матриця є від'ємно визначеною і функція має локальний максимум. Особливо цікавим випадком є сідлова точка. У такій точці функція не має ні максимуму, ні мінімуму, хоча всі перші похідні дорівнюють нулю. Це пояснюється тим, що в одних напрямках значення функції зростають, а в інших – спадають. Геометрично поверхня поблизу такої точки нагадує

сідло для вершника: вздовж одного перерізу поверхня вигнута вгору, а вздовж іншого – вниз. Саме сідлові точки часто виникають у задачах економіки, механіки, теорії ігор та оптимізації, де вони характеризують нестійкі стани системи або точки рівноваги.

Із розвитком сучасних інформаційних технологій та появою універсальних математичних пакетів, таких як Maple, Mathematica, Mathcad, MATLAB, Maxima та інших, значно розширилися можливості застосування комп'ютерної техніки для розв'язування задач на пошук екстремумів. Ці програмні засоби мають зручний інтерфейс і дозволяють виконувати як стандартні, так і спеціалізовані математичні операції. Крім того, вони оснащені потужними засобами графічної візуалізації, власними мовами програмування, інструментами для підготовки математичних текстів та підтримують обмін даними з іншими програмами, зокрема текстовими редакторами, електронними таблицями й графічними застосунками.

Використання математичних пакетів відкриває широкі можливості для виконання математичних досліджень, що потребують аналітичних перетворень і чисельних обчислень;

- створення та аналізу алгоритмів чисельних методів розв'язування задач;
- проведення математичного моделювання і комп'ютерних експериментів;
- аналізу та обробки експериментальних результатів;
- візуалізації отриманих даних і підготовки наукових та інженерних досліджень.

Середовище Maple [2] є одним із найпотужніших сучасних математичних пакетів, який широко використовується для дослідження функцій багатьох змінних на екстремум. Завдяки поєднанню аналітичних, чисельних та графічних методів Maple дозволяє значно спростити процес розв'язування складних задач математичного аналізу та оптимізації. Особливо ефективним це середовище є під час роботи з функціями трьох і більше змінних, коли обчислення вручну стають громіздкими та потребують значних затрат часу.

За допомогою Maple можна автоматично знаходити стаціонарні точки функції, обчислювати частинні похідні першого та другого порядків, будувати матрицю Гессе та застосовувати критерій Сільвестра для визначення характеру критичних точок. Програма дозволяє досліджувати функції як аналітично, так і чисельно, що особливо важливо у прикладних задачах економіки, механіки, фізики, інженерії та математичного моделювання. Наприклад, при дослідженні функції кількох змінних Maple здатний не лише знайти точки максимуму чи мінімуму, а й визначити сідлові точки та побудувати тривимірне зображення поверхні для наочного аналізу поведінки функції.

Важливою перевагою Maple є потужні графічні можливості. Система дозволяє будувати поверхні, лінії рівня, контурні графіки та тривимірні моделі, що допомагає краще зрозуміти геометричний зміст екстремумів. Візуалізація результатів значно полегшує аналіз складних математичних моделей та дає можливість швидко оцінити поведінку функції в околі критичних точок.

Окрім стандартних математичних команд, Maple має власну вбудовану мову програмування, яка дозволяє створювати алгоритми для автоматизації обчислень. Ця мова підтримує використання циклів, умовних операторів, процедур, функцій та рекурсії. Завдяки цьому користувач може розробляти власні програми для дослідження екстремумів, реалізовувати чисельні методи оптимізації та виконувати серії обчислювальних експериментів. Вбудована мова програмування Maple особливо корисна при роботі з великими обсягами даних або складними математичними моделями. За її допомогою можна автоматизувати пошук стаціонарних точок, формування матриці Гессе, перевірку умов екстремуму та побудову графіків. Це значно підвищує ефективність наукових досліджень і дозволяє використовувати

Maple не лише як математичний пакет, а і як потужне середовище для програмування та комп'ютерного моделювання.

Література

1. Жалдак М.І., Триус Ю.В. Основи теорії і методів оптимізації. Навчальний посібник. – Черкаси: Брама-Україна, 2005. – 608 с.
2. Білоусова Л. І. Курс вищої математики у середовищі Maple / Л. І. Білоусова, М. М. Горонескуль. – Х. : УЦЗУ, КП «Міська друкарня», 2009. – 412 с

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ АРГІРОСА-ШАХНА-ЯРМОЛИ ДО ВІДШУКАННЯ НУЛІВ ПОХІДНИХ ЦІЛОЇ ФУНКЦІЇ, ЗОБРАЖЕНОЇ НЕСКІНЧЕННИМ ДОБУТКОМ

Грицуляк Віталій Миколайович
ІП-25-3 Факультет інформаційних технологій
vitalii.hrytsuliak-ip253@nung.edu.ua

Науковий керівник: : Бандура Андрій Іванович, д.ф.-м.н, проф. кафедри ФМН, andriy.bandura@nung.edu.ua

У роботі розглядаються нижні та верхні оцінки другої похідної деякого класу цілих функцій, відомих як функції Ліндельофа. Ці функції допускають таке представлення у вигляді нескінченного добутку:

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n^a}\right), \quad a > 1, z \in \mathbb{C}. \quad (1)$$

Клас цих функцій містить як підмножину класичні тригонометричні функції як синус та косинус, або похідні від них Наприклад, таку відому рівність можна отримати при підставлянні $a = 2$ у (1)

$$f(z^2) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = \frac{\sin \pi z}{\pi z}.$$

Ця рівність впливає з теореми Адамара [6] про зображення цілих функцій скінченного порядку, за якою якщо ціла функція має нулі a_k , упорядковані за зростанням модулів, то вона допускає таке зображення у вигляді нескінченного добутку

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1z^2}{2a_n^2} + \dots + \frac{1z^p}{pa_n^p}},$$

де m – кратність нуля у точці $z=0$, $g(z)$ – многочлен деякого степеня, а параметр p – найменше невід'ємне ціле число таке, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^p} = +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{p+1}} < +\infty$$

(це число p називається родом функції).

У 1968 році Лепсон [7] ввів поняття обмеженого індексу для вивчення локальної та асимптотичної поведінки цілих функцій однієї комплексної змінної. У 1972 році Кінг та Шах [1] дослідили обмеженість індексу для функцій Ліндельофа. Як часткове доведення однієї теореми, необхідно було апроксимувати нижню та верхню межі для нулів першої похідної цих функцій. Пізніше Кінг та Паттерсон [2] зазначили, що ці методи були повільними та громіздкими через брак комп'ютерних можливостей, доступних авторам на той час. Вони представили новий метод визначення меж, який не тільки є точним до кількох знаків після коми, але й значно покращує

попередні значення, отримані для цих меж.

Для оцінок похідних вищого порядку було написано [2, 1], що міркування, наведені в обґрунтуванні оцінок нулів першої похідної для функцій Ліндельофа, можуть бути використані для доведення оцінок похідних вищого порядку. Автори стверджували, що деталі подібні, і їх опустили.

Метою цієї роботи є заповнення відповідної прогалини та представлення нижніх та верхніх оцінок другої похідної для функцій Ліндельофа, а також схеми можливого застосування цих оцінок до деяких задач механіки.

2 Допоміжні результати

Сформулюємо теорему Лагера про відокремлення нулів[3]: Якщо $f(z)$ — ціла функція, відмінна від сталої, яка набуває дійсних значень для дійсних чисел і має лише дійсні нулі, і має рід 0 або 1, тоді нулі першої похідної також є дійсними і відокремлені між собою нулями початкової функції.

Наступні результати були отримані Кінгом та Патерсоном [2] і надають нижні та верхні оцінки для похідної першого порядку функцій Ліндельофа. Нехай $H_1(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$, де f визначено формулою (1), $x \in \mathbb{R}$ та

$$H_{1l}(x) = \sum_{n=1}^k \frac{1}{x-n^a} - \frac{a+k-1}{(a-1)(k+1-x)^a},$$

$$H_{1u}(x) = \sum_{n=1}^k \frac{1}{x-n^a} - \frac{1}{(a-1)(k+1-x)^{a-1}}.$$

Якщо $k \in \mathbb{N}$ вибрано так, що, то для кожного з маємо $k \in \mathbb{N}$ $x < k + 1, a > 1, nn^a < x < (n + 1)^a$, то

$$H_{1l} < H < H_{1u}$$

Функції H_{1u}, H_{1l} є спадними функціями від x у кожному інтервалі.

Отже, застосовуючи теорему Лагера до похідної першого порядку функцій Ліндельофа, ми робимо висновок, що нулі похідної другого порядку також є дійсними, і вони розділені нулями похідної першого порядку.

3 Основний результат

Нехай $H_2(x) = \frac{f''(x)}{f'(x)}$, де f — функція Ліндельофа, визначена в (1), $x \in \mathbb{R}$, x_n — n -й нуль похідної першого порядку функції Ліндельофа, та

$$H_{2l}(x) = \sum_{j=1}^k \frac{1}{x-x_j} - \frac{a+k-1}{(a-1)(k+1-x)^a},$$

$$H_{2u}(x) = \sum_{j=1}^k \frac{1}{x-x_j} - \frac{1}{(a-1)(k+1)^{a-1}}.$$

Якщо $k \in \mathbb{N}$ вибрано так, що $x < k + 1, a > 1$, то для кожного $n \in \mathbb{N}$ з $x \in (x_n, x_{n+1})$, $x_n \in (n^a, (n + 1)^a)$, $x_{n+1} \in ((n + 1)^a, (n + 2)^a)$ маємо

$$H_{2l} < H_2 < H_{2u} \tag{2}$$

Функції H_{2u}, H_{2l} є спадними функціями від x у кожному інтервалі.

Доведення.

Наше доведення аналогічне доведенню відповідної теореми в [2].

Нехай y_n — n -й нуль другої похідної f'' функції Ліндельофа. З огляду на Теорему 2, ми матимемо, що нулі y_n функції $f''(z)$ є дійсними та розділені відповідними дійсними нулями $f'(z)$. Зауважимо, що за теоремою Лагера n -й нуль x_n функції f' належить інтервалу $(n^a, (n + 1)^a)$, тому ці нулі функції $f''(z)$ знаходяться в діапазоні

$$y_n n f'' y_n f''(z) f'(z) n x_n f'(n^a, (n + 1)^a) f''(z)$$

$$n^a < x_n < y_n < x_{n+1} < (n + 2)^a.$$

Оскільки $H_2(x) = f''(x)/f'(x)$, взявши логарифмічні похідні, спостерігається, що

$$H_2(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{x-x_j}$$

Таким чином, нулі функції $f''(x)$ ідентичні нулям $H_2(x)$ та будуть індексуватися нижнім індексом n . $H_2(x)$ є спадною функцією x на кожному дійсному інтервалі диференційовності, оскільки $f''(x)H_2(x) < 0$

$$H_2'(x) = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(x-x_n)^2} < 0.$$

Таким чином, справедливість нерівності $H_2(x) = f''(x)/f'(x) > 0$ означає, що $x \in (x_n, y_n)$, і $H_2(x) = f''(x)/f'(x) < 0$ має на увазі, що $x \in (y_n, x_{n+1})$.

Нагадаємо, що якщо функція є f неперервною, спадною та невід'ємною на $[1, +\infty)$, а також якщо $\int_1^{\infty} f(x)dx$ збігається, то

$$\int_1^{\infty} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \leq f(1) + \int_1^{\infty} f(x)dx. \quad (3)$$

Щоб довести ліву частину (2), встановимо, що

$$(j-x)^a \leq j^a - x \leq x_j - x \text{ for } j \geq k+1 > x.$$

Нехай $y = j - x$. Тоді $y > 0$, і оскільки $x > 1$, і $j = x + y$ ми бачимо що $(y+x)^a > y^a + x^a > y^a + x$. Тут ми використали $(1+v)^a > 1+v^a$ це для будь-якого $v > 0$, $a > 1$, і підставили $v = \frac{x}{y}$.

$$\text{Отже } j^a > (j-x)^a + x, \text{ або } x_j - x > j^a - x > (j-x)^a \quad (4)$$

Крім того, функція $g(j) = \frac{1}{(j+k-x)^a}$ є спадною невід'ємною неперервною функцією від j , тому згідно з (3) та (4) маємо

$$\begin{aligned} \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{(j-x)^a} &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(j+k-x)^a} \leq \\ &\leq \frac{1}{(1+k-x)^a} + \int_1^{\infty} \frac{dt}{(t+k-x)^a} = \\ &= \frac{1}{(1+k-x)^a} + \frac{1}{(a-1)(k+1-x)^{a-1}} = \\ &= \frac{a+k-x}{(a-1)(k+1-x)^a}. \end{aligned} \quad (5)$$

Згідно з (4) та (5), ми можемо зробити висновок, що

$$\begin{aligned} H(x) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{x-x_j} = \sum_{j=1}^k \frac{1}{x-x_j} - \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{x_j-x} \geq \\ &\geq \sum_{j=1}^k \frac{1}{x-x_j} - \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{j^a-x} \geq \\ &\geq \sum_{j=1}^k \frac{1}{x-x_j} - \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{(j-x)^a} \geq \\ &\geq \sum_{j=1}^k \frac{1}{x-x_j} - \frac{(a+k-x)}{(a-1)(k+1-x)^a} = H_{2l}. \end{aligned}$$

Це доводить ліву частину (2).

Щоб завершити це доведення, позначимо

$$\frac{1}{x_j-x} > \frac{1}{j^a-x} > \frac{1}{j^a} \quad (6)$$

оскільки $j > k+1 > x$, $x > 1$, і $a > 1$. Отже, функція $h(j) = \frac{1}{(k+j)^a}$ є спадною, невід'ємною, неперервною функцією від j , тому, згідно з (3) та (6), маємо

$$\begin{aligned} H_2 &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{x-x_j} = \sum_{j=1}^k \frac{1}{x-x_j} - \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{x_j-x} \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^k \frac{1}{x-x_j} - \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{j^a-x} \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^k \frac{1}{x-x_j} - \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{j^a} = \sum_{j=1}^k \frac{1}{x-x_j} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(k+j)^a} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{j=1}^k \frac{1}{x-x_j} - \int_1^{\infty} \frac{dt}{(k+t)^a} = \\ &= \sum_{j=1}^k \frac{1}{x-x_j} - \frac{1}{(a-1)(k+1)^{a-1}} = H_{2,u}. \end{aligned}$$

Таким чином, (2) перевірено.

Для доведення другої частини теореми легко перевірити, що $H_{2,u}$ є спадною функцією від x , оскільки другий член взагалі не містить x .

Тепер нехай

$$H_{2,l} = \sum_{j=1}^k \frac{1}{x-x_j} - \frac{(a+k-x)}{(a-1)(k+1-x)^a} = S_1 + S_2,$$

тобто,

$$S_2 = \frac{-(a+k-x)}{(a-1)(k+1-x)^a}.$$

Прямий розрахунок дає

$$\frac{dS_2}{dx} = \frac{(k+1-x)^{a-(a+k-x)} \cdot a \cdot (k+1-x)^{a-1}}{(a-1)(k+1-x)^{2a}}.$$

Оскільки хтось має $a > 1$,

$$k+1-x < k+a-x < a(k+a-x), \quad (7)$$

Нагадаємо, що $x < k+1$. Помноживши кожен член нерівності на додатний множник $(k+1-x)^{a-1}$, ми бачимо, що

$$(k+1-x)(k+1-x)^{a-1} < a(k+a-x)(k+1-x)^{a-1}.$$

Таким чином, чисельник dS_2/dx є від'ємним, тому $dS_2/dx < 0$. Очевидно, що $dS_1/dx < 0$, тому ми повинні мати, $dH_1/dx < 0$ і.е. є спадною функцією від x .

Це завершує доведення теореми.

4 Комп'ютерний метод

Ми опишемо комп'ютерну реалізацію обчислення нулів для другої похідної функцій Ліндельофа.

Аргірос, Шахно, Ярмола [5] запропонували двоетапну модифікацію методу Курчатова для розв'язання рівняння $f(x) = 0$. Їхня схема ітерацій така:

$$\begin{aligned} z_k &= x_k - \frac{2x_k - 2x_{k-1}}{f(2x_k - x_{k-1}) - f(x_{k-1})} \cdot f(x_k), \\ x_{k+1} &= z_k - \frac{2z_k - 2x_k}{f(2z_k - x_k) - f(x_k)} \cdot f(z_k), \quad k \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

Ми модифікуємо його для нашої мети. Початковими значеннями є параметр a , точності ε та кількість N нулів другої похідної функції Ліндельофа, яку ми хочемо обчислити. Було обґрунтовано, що

$$n^a < x_n < y_n < x_{n+1} < (n+2)^a$$

у доведенні Теореми 3, де x_n, y_n є нулі першої та другої похідних функцій Ліндельофа відповідно. З огляду на це, для наближення y_N спочатку потрібно знайти $N+1$ нулі x_n .

Початкові значення для верхніх оцінок $x_n \in \bar{x}_n^{(0)} = n^a, \bar{x}_n^{(1)} = (n+1)^a$. Покладемо $k = [(n+1)^a - 1] + 1$. Наступні ітерації обчислюються за такими формулами для $i \geq 1$:

$$\bar{z}_n^{(i)} = \bar{x}_n^{(i)} - \frac{2\bar{x}_n^{(i)} - 2\bar{x}_n^{(i-1)}}{H_{1,u}(2\bar{x}_n^{(i)} - \bar{x}_n^{(i-1)}) - H_{1,u}(\bar{x}_n^{(i-1)})} \cdot H_{1,u}(\bar{x}_n^{(i)}), \quad (8)$$

$$\bar{x}_n^{(i+1)} = \bar{z}_n^{(i)} - \frac{2\bar{z}_n^{(i)} - 2\bar{x}_n^{(i)}}{H_{1,u}(2\bar{z}_n^{(i)} - \bar{x}_n^{(i)}) - H_{1,u}(\bar{x}_n^{(i)})} \cdot H_{1,u}(\bar{z}_n^{(i)}), \quad i \in \mathbb{Z}_+. \quad (9)$$

Умова розриву для цих розрахунків є $|\bar{x}_n^{(i+1)} - \bar{x}_n^{(i)}| < \varepsilon$.

Початкові значення для нижніх оцінок x_n такі ж, як і вище:

$\bar{x}_n^{(0)} = n^a, \bar{x}_n^{(1)} = (n+1)^a$. Покладемо $k = [(n+1)^a - 1] + 1$. Наступні ітерації обчислюються за такими формулами для $j \geq 1$:

$$\underline{z}_n^{(j)} = \underline{x}_n^{(j)} - \frac{2\underline{x}_n^{(j)} - 2\underline{x}_n^{(j-1)}}{H_{1,l}(2\underline{x}_n^{(j)} - \underline{x}_n^{(j-1)}) - H_{1,l}(\underline{x}_n^{(j-1)})} \cdot H_{1,l}(\underline{x}_n^{(j)}), \quad (10)$$

$$\underline{x}_n^{(j+1)} = \underline{z}_n^{(j)} - \frac{2\underline{z}_n^{(j)} - 2\underline{x}_n^{(j)}}{H_{1,l}(2\underline{z}_n^{(j)} - \underline{x}_n^{(j)}) - H_{1,l}(\underline{x}_n^{(j)})} \cdot H_{1,l}(\underline{z}_n^{(j)}), \quad j \in \mathbb{Z}_+. \quad (11)$$

Умова розриву для цих обчислень така $|\underline{x}_n^{(i+1)} - \underline{x}_n^{(i)}| < \varepsilon$. Тоді ми покладемо $x_n = \frac{\overline{x}_n^{(i+1)} + \underline{x}_n^{(j+1)}}{2}$.

Після обчислення $n + 1$ нулів похідної першого порядку функції Ліндельофа, ми будемо використовувати ті ж формули (8)-(11) з H_2 , замість H_1 , для оцінки y_n . Початкові значення для верхніх оцінок дорівнюють y_n are $\overline{y}_n^{(0)} = x_n$, $\overline{y}_n^{(1)} = x_{n+1}$. Покладемо $[x_{n+1} - 1] + 1$.

У роботі отримано нижні та верхні оцінки нулів другої похідної функцій Ліндельофа, що заповнює прогалину, залишену попередніми дослідниками. Було адаптовано і модифіковано двоетапний метод Аргіроса–Шахна–Ярмоли для ефективного обчислення нулів другої похідної нескінченного добутку та підтверджено його працездатність на прикладах. Крім того, подано схему можливого застосування отриманих оцінок у задачах механіки, де поведінка згинальних коливань може залежати від величин, що пов'язані з другою похідною функції Ліндельофа.

Література

- [1] Amy C. King, S. M. Shah, Indices of Lindelöf functions and their derivatives, Rocky Mountain Journal of Mathematics. – 1972. – V. 2, №4. – P. 579–593. <https://doi.org/10.1216/RMJ-1972-2-4-579>
- [2] Amy C. King, J. D. Patterson, A computer method for approximating the zeros of certain entire functions. Rocky Mountain Journal of Mathematics. – 1987. – V. 17, №1. – P. 135–140. <https://doi.org/10.1216/RMJ-1987-17-1-135>
- [3] R.P. Boas, Entire Functions, Academic Press, Inc., 1954, p. 23.
- [4] B. Ya. Levin, Lectures on entire functions. Translations of mathematical monographs, AMS. 1996, p. 28.
- [5] I. K. Argyros, S. M. Shakhno, H. P. Yarmola. On the convergence of Kurchatov-type methods using recurrent functions for solving equations, Mat. Stud. – 2022. – V. 58, №1. – P. 103–112. <https://doi.org/10.30970/ms.63.1.88-97>
- [6] A.A. Goldberg, I.V. Ostrovskii, Value distributions of meromorphic functions. With an appendix by A. Eremenko and J. K. Langley. AMS, Providence, RI, 2008.
- [7] B. Lepson, *Differential equations of infinite order, hyper-Dirichlet series and entire functions of bounded index*, Proc. Sympos. Pure Math., **2**, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island (1968), p.~298–307. <https://doi.org/10.1090/pspum/011/0237788>
- [8] Y. Striletskyi, L. Ropyak, and A. Bandura, Method of oscillation excitation for investigation of inconsistency of coating deposition on long parts, Vibroengineering Procedia, Vol. 57, pp. 25–31, Dec. 2024, <https://doi.org/10.21595/vp.2024.24567>

МАТЕМАТИЧНІ ПІДХОДИ ДО МОДЕЛЮВАННЯ СИТЕМ ІЗ НЕПЕРЕДБАЧУВАНОЮ ДИНАМІКОЮ

Гуріненко Вікторія Володимирівна
СІ-24-1 Факультет інформаційних технологій
viktoriiia.hurinenko-si241@nung.edu.ua

Науковий керівник: Витвицька Оксана Миколаївна,

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8722-5450>, к.е.н, доц. кафедри ФМН,
oksana.vytvytska@nung.edu.ua

У сучасних умовах воєнного стану системи забезпечення критичними ресурсами — наприклад, паливо, продовольство чи медикаменти — функціонують у середовищі підвищеної нестабільності. Ці системи залежать від багатьох факторів: логістичних обмежень, коливань попиту, ризиків порушення інфраструктури. У зв'язку з цим виникає проблема: навіть при детермінованих правилах система може поводитися непередбачувано. Саме такі явища вивчає теорія динамічних систем і хаосу.

Динамічна система — це модель, у якій стан змінюється з часом за певним правилом. Вони виникають у різних галузях: фізиці, біології, економіці, техніці та навіть соціальних процесах. У багатьох прикладних задачах — від кліматичних моделей до економічних систем — спостерігається складна, нерегулярна поведінка, яку важко передбачити. Незважаючи на детермінованість таких систем, їх динаміка може бути чутливою до початкових умов, що робить класичні методи аналізу недостатніми. Саме такі системи вивчає теорія хаосу.

У математиці непередбачуваність не означає випадковість. Навпаки, хаотичні системи є детермінованими, тобто їх поведінка повністю визначається початковими умовами та законами еволюції. Однак навіть незначні зміни початкових умов можуть призводити до кардинально різних результатів. Це явище отримало назву чутливості до початкових умов.

Нижче наведено приклади класичних хаотичних моделей.

1. Логістичне відображення

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n),$$

де $r \in [0; 4]$, $x_n \in [0; 1]$.

2. Біфуркаційний каскад передбачає послідовність подвоєння періоду:

$$2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow \dots$$

3. Система Лоренца:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = x(\rho - z) - y, \\ \dot{z} = xy - \beta z. \end{cases}$$

4. Показники Ляпунова:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln |f'(x_k)|$$

де x_k — точки траєкторії,

$f'(x_k)$ — похідна,

λ — показник Ляпунова.

5. Фрактальна геометрія хаосу:

$$D = \frac{\ln N}{\ln \frac{1}{r}}$$

де N – кількість самоподібних частин, r – коефіцієнт масштабування

Постановка задачі: в умовах воєнного стану стабільність постачання критичних ресурсів (палива, продовольства, медикаментів) залежить від різних факторів: логістичних обмежень, змін попиту, ризиків порушення інфраструктури.

Розглянемо математичну модель динаміки забезпечення ресурсом.

Нехай $x_n \in [0; 1]$ – нормований рівень забезпечення ресурсу на n -му кроці (день/тиждень). Інтерпретація забезпеченості ресурсом наведена у таблиці 1.

Таблиця 1

Значення	Інтерпретація
$(x = 0)$	повний дефіцит
$(0 < x < 1)$	часткове забезпечення
$(x = 1)$	повністю забезпечено
$(x > 1)$	надлишок (зазвичай не розглядаємо)

Динаміка описується логістичним відображенням: $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$

де параметр r відображає сукупний вплив ефективності логістики та нестабільності середовища (порушення логістики, панічний попит тощо). $r \in [0; 4]$

Завдання:

1. Знайти рівноважні стани системи.
2. Дослідити їх стійкість залежно від параметра r .
3. Визначити значення параметра r , при яких система переходить у хаотичний режим.
4. Проаналізувати чутливість до початкових умов (на прикладі двох близьких значень).
5. Інтерпретувати отримані результати в контексті стабільності постачання ресурсів.

Математичний аналіз моделі

1. Спочатку знайдемо рівноважні стани (рівновага – це коли система не змінюється з часом)

Вони визначаються з умови:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n \\ x &= rx(1 - x) \\ x(r(1 - x) - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Звідси отримуємо два рівноважні стани:

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 1 - \frac{1}{r}$$

2. Далі дослідимо їх стійкість.

Для цього використаємо критерій: рівноважна точка стійка, якщо: $|f'(x^*)| < 1$

Похідна функції: $f'(x) = r(1 - 2x)$

Для $x_1 = 0$ $f'(0) = r$

Отже, вона стійка при: $0 < r < 1$

Фізичний зміст: при $x=0$ (відсутності ресурсу) $0 < r < 1$ – система не здатна підтримувати себе.

Для точки $x_2 = 1 - \frac{1}{r}$ $f'(x_2) = r(1 - 2(1 - \frac{1}{r})) = 2$

Стійкість виконується при $|2 - r| < 1$,

$1 < r < 3$.

3. Біфуркації та хаос. Біфуркація — це момент, коли при зміні параметра система різко змінює тип поведінки.

Як змінюється поведінка при зростанні r :

- 1) $0 < r < 1$ система прямує до нуля – ресурс зникає
- 2) $1 < r < 3$ одна стабільна точка – стійке забезпечення
- 3) $r = 3$ перша біфуркація – одна точка стає нестійкою, з'являється цикл із 2 значень.
- 4) $3 < r < 3.45$ система коливається між 2 значеннями
- 5) Далі спостерігається каскад біфуркацій: $2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16$ – кожного разу період подвоюється.
- 6) $r \approx 3.57$ перехід до хаосу – система стає непередбачуваною.

4. Чутливість до початкових умов

Однією з ключових ознак хаосу є чутливість до початкових умов.

Розглянемо два близькі початкові значення:

$$x_0 = 0,5 \quad x_0' = 0,5001$$

При $r = 3.8$ (висока нестабільність) вже через кілька ітерацій їх значення суттєво відрізняються. В таблиці 2 наведено значення при $n = 0, 1, \dots, 5$.

Таблиця 2

n	x_n	x_n'
0	0.5000	0.5001
1	0.9500	0.9500
2	0.1805	0.1806
3	0.5621	0.5624
4	0.9353	0.9348
5	0.2298	0.2313

На першій ітерації значення різко зростає до 0.95, а на другій — падає до 0.18. Така сильна зміна значень вже демонструє нелінійність і є передумовою хаотичної поведінки. Уже на 5-му кроці значення помітно відрізняються.

5. Інтерпретація результатів. Отримані результати мають важливе прикладне значення.

- При ($0 < r < 1$): система деградує (не здатна підтримувати себе) \rightarrow дефіцит ресурсу – економічно це означає розрив логістики, критичний дефіцит.
- При ($1 < r < 3$): система стабільна \rightarrow передбачуване постачання – економічно це означає кероване постачання, баланс попиту і пропозиції.
- При ($r > 3$): виникають коливання \rightarrow нестабільність – економічно це означає перебої: то надлишок, то дефіцит.
- При ($r > 3.57$): хаос \rightarrow неможливість довгострокового прогнозування – економічно це означає панічні закупівлі, різкі провали і піки, неможливість планування.

Наприклад:

Низький r : зруйновані дороги, затримки постачання – $r \approx 0.8 \rightarrow$ дефіцит

Середній r : стабільна логістика – $r \approx 2 \rightarrow$ рівновага

Високий r : різкі зміни попиту, паніка – $r \approx 3.8 \rightarrow$ хаос

6. Управлінський висновок. Мета управління: тримати r в області (1,3). Для цього слід:

1) впроваджувати постійне спостереження за показниками, що формують r : продуктивність виробництва, темпи приросту популяції/системних одиниць, інтенсивність витрат чи інвестицій

2) вживати управлінські заходи: при швидкому рості (r наближається до 3) \rightarrow сповільнити темпи: обмежити ресурси, контролювати витрати, вводити квоти, плавно нарощувати виробництво, при занепаді (r наближається до 1) \rightarrow стимулювати розвиток: інвестиції, мотиваційні програми, підтримка технологій

3) обмежити зовнішні впливи: контролювати фактори, які можуть раптово збільшити або знизити r : фінансові шоки, різкі зміни попиту/пропозиції, нестача кадрів або ресурсів; для цього використовувати такі механізми: страховки, буферні запаси, диверсифікація ресурсів.

Висновки.

1. Навіть проста нелінійна модель може описувати складну поведінку системи.
2. Непередбачуваність виникає внаслідок чутливості до початкових умов.
3. Хаос є детермінованим, але практично непрогнозованим.
4. Для ефективного управління необхідно підтримувати систему в області стабільності.

Література

- [1] Бевз Г.П., Бевз В.Г., Владімірова Н.Г. Вища математика : підручник. Київ : ВЦ «Академія», 2017. 400 с.
- [2] Кушнір Р.М., Микитюк І.І. Теорія динамічних систем і хаосу : навчальний посібник. Львів : ЛНУ ім. Івана Франка, 2020. 256 с.
- [3] Самойленко А.М., Перестюк М.О. Диференціальні рівняння в прикладних задачах : навчальний посібник. Київ : Либідь, 2019. 320 с.
- [4] Lorenz E.N. Deterministic Nonperiodic Flow, Journal of the Atmospheric Sciences. 1963. Vol. 20(2). P. 130–141. doi:10.1175/1520-0469(1963)020<0130:DNF>2.0.CO;2
- [5] May R.M. Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamics, Nature. 1976. Vol. 261. P. 459–467. doi:10.1038/261459a0
- [6] Feigenbaum M.J. Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations, Journal of Statistical Physics. 1978. Vol. 19(1). P. 25–52. doi:10.1007/BF01020332

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ У ФІНАНСОВІЙ СФЕРІ: ВІДСОТКИ, АНУЇТЕТИ ТА ОПТИМАЛЬНІ ІНВЕСТИЦІЙНІ СТРАТЕГІЇ

Давидок Софія Ігорівна

ПТМС-25-1 Інститут економіки та менеджменту

sofia.davydok-ptms251@nung.edu.ua

Науковий керівник: Витвицька Оксана Миколаївна,

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8722-5450>, к.е.н, доц. кафедри ФМН,

oksana.vytytska@nung.edu.ua

В доповіді проаналізовано математичні моделі фінансової сфери, зокрема моделі нарахування відсотків, портфельного інвестування та ануїтети, для оцінки дохідності та ризику фінансових інструментів і обґрунтування ефективних інвестиційних рішень в умовах невизначеності економіки України. Розглянуто приклад застосування моделей Марковіца та CAPM для визначення очікуваної дохідності портфеля.

До найбільш застосованих моделей у фінансовій сфері відносяться:

1. Моделі нарахування відсотків:

- *простий відсоток* – застосовується для короткострокових фінансових операцій і обчислюється за формулою:

$$S = P(1 + rt) ,$$

де P – початкова сума, r – відсоткова ставка, t – час.

Ця модель не враховує ефекту капіталізації, тому її застосування обмежене.

- *складний відсоток* враховує нарахування відсотків на вже накопичені відсотки, що призводить до експоненційного зростання капіталу:

$$S = P(1 + r)^n$$

де n – кількість періодів нарахування.

У випадку частішої капіталізації формула набуває вигляду:

$$S = P \left(1 + \frac{r}{m} \right)^{mt}$$

де m – кількість нараховань на рік.

Також використовується безперервна капіталізація:

$$S = Pe^{rt}$$

Важливим показником є ефективна річна ставка (EAR), яка дозволяє порівнювати різні фінансові продукти.

Складний відсоток завжди забезпечує більший дохід порівняно з простим за однакових умов, що робить його базовою моделлю у фінансах.

2. Моделі ануїтетів.

Ануїтет – це послідовність рівних платежів через однакові проміжки часу. Розрізняють:

- звичайний ануїтет (платежі в кінці періоду),
- випереджальний ануїтет (платежі на початку періоду),
- сталі та змінні ануїтети.

Майбутня вартість ануїтету:

$$FV = A \frac{(1 + r)^n - 1}{r}$$

Теперішня вартість:

$$PV = A \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r}$$

Ці формули використовуються для побудови амортизаційних графіків при кредитуванні.

Ануїтетні моделі широко застосовуються в іпотечному кредитуванні, пенсійних накопиченнях, страхових виплатах.

3. Оптимальні інвестиційні стратегії: модель Марковіца, модель портфельного інвестування дозволяє мінімізувати ризик шляхом диверсифікації. Основна ідея полягає у формуванні ефективної границі — множини портфелів з мінімальним ризиком для заданого рівня дохідності.

4. Модель CAPM дозволяє визначити очікувану дохідність активу:

$$E(R) = R_f + \beta(R_m - R_f)$$

$E(R)$ — очікувана дохідність активу;

R_f — безризикова ставка (risk-free rate);

β — міра систематичного ризику активу;

$R_m - R_f$ — ринкова премія за ризик (різниця між дохідністю ринку та безризиковою ставкою)

Застосовується для розрахунку вартості власного капіталу для оцінки інвестиційних проектів та вартості компаній.

5. Стохастичні моделі. Фінансові ринки моделюються за допомогою випадкових процесів. Зокрема: геометричний броунівський рух, модель Блека–Шоулза для оцінки опціонів.

Математичні моделі застосовуються для розрахунку майбутньої вартості інвестицій, порівняння кредитних пропозицій, оптимізації портфелів, оцінки ризику.

Розглянемо задачу : в умовах нестабільної економіки України інвестор формує портфель із трьох активів:

1. Банківський депозит: дохідність: 12%, ризик (σ): 2%
2. ОВДП (державні облігації), дохідність: 10%, ризик: 5%
3. Акції українських компаній: очікувана дохідність невідома, ризик: 20%, $\beta = 1.3$

Додаткові дані: безризикова ставка $R_f = 8\%$, ринкова дохідність $R_m = 14\%$

Інвестор розподіляє кошти так: 40% — депозит, 30% — ОВДП, 30% — акції.

Завдання:

1. Знайти дохідність акцій.
2. Обчислити очікувану дохідність портфеля.
3. Оцінити ризик портфеля.
4. Зробити висновок щодо ефективності.

1. Дохідність акцій визначається за допомогою CAPM:

$$E(R) = R_f + \beta(R_m - R_f)$$

$$E(R) = 0.08 + 1.3(0.14 - 0.08) = 0.08 + 1.3 \cdot 0.06 = 0.08 + 0.078 = 0.158$$

Відповідь: Очікувана дохідність акцій 15.8%

2. Очікувана дохідність портфеля (Марковіц):

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^n \omega_i R_i$$

ω_i — частка i -го активу в портфелі

R_i — очікувана дохідність i -го активу

$$E(R_p) = 0.4 \cdot 0.12 + 0.3 \cdot 0.10 + 0.3 \cdot 0.158 = 0.048 + 0.03 + 0.0474 = 0.1254$$

Відповідь: Очікувана дохідність портфеля = 12.54%

3. Оцінка ризику портфеля:

$$\sigma_p \approx \sum_{i=1}^n \omega_i \sigma_i$$

$$\sigma_p = 0.4 \cdot 0.02 + 0.3 \cdot 0.05 + 0.3 \cdot 0.20 = 0.008 + 0.015 + 0.06 = 0.083$$

Відповідь: Ризик портфеля $\approx 8.3\%$

4. Інтерпретація (ідея Марковіца)

Показник	Значення
Дохідність	12.54%
Ризик	8.3%

Аналіз:

- Депозит: низький ризик, але нижча дохідність
- Акції: висока дохідність, але великий ризик
- ОВДП: баланс між ними

Для побудови ефективної границі розглядаються різні комбінації активів (див. табл.), обчислюються для кожної дохідність і ризик, після чого на площині 'ризик-дохідність' виділяється множина домінуючих портфельів. Саме вони утворюють ефективну границю, яка показує найкращі інвестиційні рішення (рис.1).

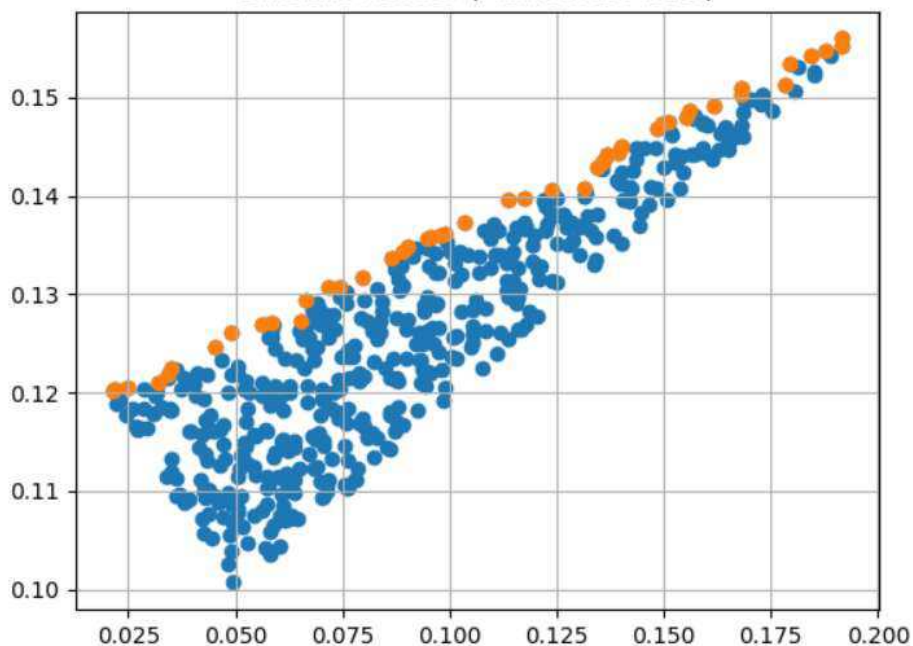


Рис.1 Ефективна границя інвестиційних рішень

Це і є суть моделі Марковіца – оптимальний портфель лежить ближче до ефективної границі. Комбінація активів дає зниження ризику (диверсифікація), збереження достатньої дохідності.

Таким чином, CAPM дозволяє оцінити дохідність ризикових активів через β -коефіцієнт, модель Марковіца показує переваги диверсифікації.

Висновки: математичні моделі є невід'ємною складовою сучасних фінансів. Вони дозволяють ефективно управляти ресурсами, оцінювати ризики та приймати оптимальні рішення. Перспективи розвитку фінансової математики пов'язані з використанням великих даних, штучного інтелекту та більш складних стохастичних моделей.

Поєднання теоретичних підходів і практичного застосування відкриває нові можливості для підвищення ефективності фінансових систем.

Література

- [1] Бланк І.О., Фінансовий менеджмент, Ніка-Центр, Київ, 2012.
- [2] Ковальчук К.Ф., Фінансова математика, Центр учбової літератури, Київ, 2018.
- [3] Олійник А.В., Інвестиційний аналіз, КНЕУ, Київ, 2016.
- [4] Савчук В.П., Управління фінансами підприємств, КНЕУ, Київ, 2019.
- [5] Шелудько В.М., Фінансовий ринок, Знання, Київ, 2015.
- [6] W.F. Sharpe, Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk, *Journal of Finance* 19 (1964), 425–442. doi: 10.1111/j.1540-6261.1964.tb02865.x
- [7] J. Mossin, Equilibrium in a Capital Asset Market, *Econometrica* 34 (1966), 768–783. doi: 10.2307/1910098

Використання ШІ: для побудови ефективної границі інвестиційних рішень використано NotebookLM.

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПЕРЦЕТРОНА

Дем'янчук Богдан Юрійович

ІП-25-1 Факультет інформаційних технологій

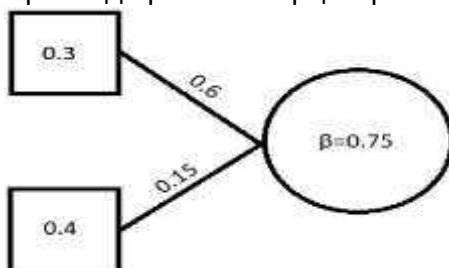
bohdan.demianchuk-ip251@nung.edu.ua

Науковий керівник: : Бандура Андрій Іванович, д.ф.-м.н, проф. кафедри ФМН, andriy.bandura@nung.edu.ua

В доповіді ітиме мова про модель перцептрона, яка стала першою в історії моделлю машинного навчання, що здатна класифікувати вхідні дані. В основі її функціонування лежить принцип роботи простої біологічної нейронної системи. Це відкриття стало фундаментальним кроком у розвитку алгоритмів штучного інтелекту. Дана архітектура заклала міцну наукову базу для всіх подальших досліджень у галузі нейронних мереж.

Базова модель нейрона є фундаментальним структурним елементом обчислювальних систем цього типу. Кожен такий нейрон виконує математичне сумування за загальним алгоритмом $x*w+b$. Після цього спеціальна функція активації перетворює отриманий сигнал у фінальний вихід y .

Приклад простого перцептрона з двома входами та одним нейроном



Для початку треба знайти зважену суму $(x_1 * w_1) + (x_2 * w_2) + \beta = (0,3 * 0,6) + (0,4 * 0,15) + 0,75 = 0,99$. Після цього зважена сума пропускається через функцію активації. Для прикладу

візьмемо \tanh : $\tanh(0,99) = \frac{e^{0,99} - e^{-0,99}}{e^{0,99} + e^{-0,99}} = 0,7574$

Після того як зважена сума було пропущена через функцію активації ми получили число 0,7574. Це і є вихідне число нейрона y , яке буде передане в наступні шари.

Попередній приклад це був одношаровий перцептрон, тобто коли один шар є і входом і виходом. Його недоліками є те, що він не може вловити складні закономірності. Наприклад, він не зможе відтворити логічну функцію XOR. Для цього використовуються багатшарові перцептрони. Така нейронна мережа складається з вхідних даних, мінімум одного прихованого шару та шару вихідних нейронів

Універсальна теорема про апроксимацію каже, що функція з всього лиш одним прихованим шаром, при достатній кількості нейронів може обчислити будь-яку неперервну функцію, яка тільки існує. На практиці це використовують, наприклад, у фізичних симуляціях, адже один прохід даних через нейромережу в сотні разів швидший за класичне відтворення симуляції шляхом моделювання фізики.

Один прохід даних через всі шари нейромережі, від входу до результату який видав вихідний шар називається *forward pass*. Але як дізнатися наскільки модель дала точну відповідь. Для цього потрібно використати функцію втрат. Для цього потрібно порівняти вектор який був передбачений моделлю та істинний вектор, який береться з навчального набору даних

Під час створення ваги моделі є випадковими числами, отже модель нічого не вміє. Для цього її параметри треба звести до тих що виконують бажану задачу.

Для цього використовується *back propagation* (зворотне поширення похибки). На відміну від *forward pass* де дані йдуть від початку нейромережі до кінця, під час зворотного поширення похибки дані йдуть від кінця до початку, паралельно шукаючи, які ваги вплинули на збільшення похибки та наскільки їх треба змінити, щоб вона зменшилася.

Першим кроком, при якому виконується *forward pass*, запам'ятовується результат кожного шару до і після використання функції активації і записується вектор який передбачила модель, і за допомогою вищезгаданої крос-ентропії порівняти і істинним вектором та знайти похибку

Другим кроком починається *backward pass*

За допомогою математичного правила ланцюга (*chain rule*) алгоритм послідовно обчислює градієнт похибки для кожного шару мережі, починаючи з вихідного шару і рухаючись у зворотному напрямку до першого. Для цього використовуються збережені під час прямого проходу значення кожного шару до використання функції активації (z), на основі яких обчислюються похідні функцій активації. Це дозволяє визначити локальну похибку кожного шару (δ), яка відображає міру відповідальності конкретних нейронів за загальну помилку моделі.

Маючи значення похибки δ для кожного шару, алгоритм переходить до знаходження градієнтів. Градієнт демонструє напрямок і величину необхідних змін: він розраховується шляхом множення локальної похибки шару на вихідні дані попереднього шару після використання функції активації (збережені значення x). Це дозволяє математично точно визначити, як зміна кожної окремої ваги або зміщення вплине на фінальний результат.

Фінальним кроком є безпосереднє оновлення параметрів моделі алгоритмом градієнтного спуску SGD. Отримані градієнти множаться на спеціальний який контролює розмір кроку оновлення.

Формула $w = w - \delta * lr$

Останньою змінною є ϵ learning rate який зменшує градієнт для уникнення надто різкої зміни параметрів. Зазвичай це мале число, наприклад 0,0001

Розраховане значення віднімається від поточних ваг та зміщень. Завдяки цьому процесу, з кожною новою епохою параметри мережі поступово адаптуються, а загальна похибка моделі зменшується, наближаючи її до правильного виконання задачі.

Приклад Back propagation

Для прикладу візьмемо матрицю W

$$\begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ -0,1 & 0,0 \end{pmatrix}$$

Та градієнт δ

$$\begin{pmatrix} 0,02 & -0,1 \\ 0,0 & 1,0 \end{pmatrix}$$

A learning rate 0,1

Помножимо градієнти на learning rate

$$0,1 * \begin{pmatrix} 0,02 & -0,1 \\ 0,0 & 1,0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,002 & -0,01 \\ 0,0 & 0,1 \end{pmatrix}$$

Тоді нова матриця W виглядатиме

$$\begin{pmatrix} 0,1 - 0,002 & 0,2 - (-0,01) \\ -0,1 - 0,0 & 0,0 - 0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,098 & 0,21 \\ -0,1 & -0,1 \end{pmatrix}$$

Для початку нам потрібний базовий клас шару перцептронів

Він буде вміти

- Ініціалізовуватися з випадковими вагами
- Мати функцію forward яка пропускає вхід через себе
- Вихід пропустити через функцію активації

Повернути результат. Фінальним етапом буде тренування моделі на справжніх даних.

Тренування буде відбуватися на 1000 чорнобілих зображень з датасету mnist що є рукописними цифрами 0-9 розміров 28x28 пікселів

Вибрана архітектура є такою:

Вхід – масив 784 чисел, що це перетвореним в одновимірний вектор зображення;

Прихований шар розміров 128 нейронів з функцією активації ReLu;

Вихідний шар 10 нейронів, кожен з який відповідатиме за ймовірність однієї цифри з функцією; активації softmax, що перетворює вихідні дані нейронів в масив ймовірностей, де сума всіх його елементів є 1,0;

Індекс найбільшого з елементів i є передбаченою цифрою, наприклад [0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0] означає що модель вважає зображення цифрою 2 Learning rate був вибраний 0,001

Багатошаровий перцептрон є потужною моделлю, що дозволяє моделювати складні залежності між вхідними даними завдяки композиційній структурі. Алгоритм backpropagation забезпечує ефективний спосіб тренування такої мережі. Представлені формули описують forward і backward проходи, що становлять основу навчання будь-якої нейронної мережі.

Література

[1] Du K.-L., Leung C.-S., Mow W. H., Swamy M. N. S. Perceptron: Learning, Generalization, Model Selection, Fault Tolerance, and Role in the Deep Learning Era // *Mathematics*. 2022. Vol. 10. No. 24. P. 4730.

[2] Haykin S. *Neural Networks and Learning Machines*. 3rd ed. New York : Pearson Education, 2009. 936 p.

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ОБРОБКИ ЦИФРОВИХ ЗОБРАЖЕНЬ

Дмитрів Денис Володимирович

КІ-24-1 Факультет інформаційних технологій

denys.dmytriv-ki241@nung.edu.ua

Науковий керівник: Гураль Інеса Михайлівна, к.ф.-м.н., доцент кафедри ФМН, inesa.hural@nung.edu.ua

Математика є фундаментальною основою цифрової обробки зображень, оскільки кожне цифрове зображення в комп'ютері — це набір чисел (матриця), а будь-яка маніпуляція з ним — це математична операція [1,2].

Монохромне зображення (від грец. $\mu\acute{o}\nu\omicron\varsigma$ — «один» та $\chi\rho\acute{\omega}\mu\alpha$ — «колір») — це зображення, що містить лише один колір, який може мати різну інтенсивність або яскравість. Найпоширеніший вид монохромії складається з відтінків сірого (від чорного до білого). Монохромне зображення у математичному сенсі визначається через функцію інтенсивності $f(x, y)$, де x і y - координати на площині зображення, а амплітуда f представляє інтенсивність або яскравість зображення в точці з цими координатами. Кольорові зображення формуються комбінацією декількох монохромних зображень. Наприклад, в колірній системі RGB зображення складається з трьох окремих монохромних компонент (червоної, зеленої і синьої) і може бути представлено вектором з трьох інтенсивностей $(f_r(x, y), f_g(x, y), f_b(x, y))$. З цієї причини методи і способи, розроблені для монохромних зображень, можуть бути поширені на кольорові зображення шляхом послідовної обробки трьох монохромних компонент.

Первинне зображення має неперервні x та y координати, а також неперервну амплітуду f . Основні процеси перетворення неперервного зображення в цифровий формат — це дискретизація та квантування. Дискретизація розбиває зображення на сітку пікселів, а квантування замінює безперервні значення яскравості або кольору кожного пікселя на обмежений набір дискретних рівнів (глибина кольору). З математичної точки зору результатом дискретизації та квантування монохромного зображення є матриця чисел.

Розглянемо деякі математичні методи обробки цифрових зображень.

До лінійних точкових операцій відносять перетворення, де кожне значення пікселя змінюється за лінійним законом незалежно від сусідніх точок. Для всієї матриці зображення A розміром $m \times n$ перетворення записується як лінійна комбінація вихідної матриці та матриці одиниць U :

$$G = \alpha \cdot A + \beta \cdot U,$$

де α — коефіцієнт контрастності, β — зміщення яскравості. При $\alpha > 1$ різниця між світлими та темними ділянками зростає, при $0 < \alpha < 1$ — зображення стає більш однорідним. При $\beta > 0$ зображення стає світлішим, при $\beta < 0$ — темнішим.

Окремим випадком лінійної операції є інверсія зображення (негатив), яка реалізується при параметрах $\alpha = -1$ та $\beta = 255$. У матричному вигляді: $G = 255 \cdot U - A$.

Математичні методи обробки зображень включають афінні перетворення, які дозволяють здійснювати масштабування, обертання, віддзеркалення та переміщення зображення. Афінне перетворення — це відображення площини або простору в себе, при якому паралельні прямі переходять у паралельні прямі, пересічні — в пересічні, мимобіжні — в мимобіжні. Зазвичай лінійна алгебра використовує матриці для представлення лінійних перетворень, і векторну суму для представлення паралельних перенесень. Щоб представити всі

перетворення як множення на матрицю використовують однорідні координати. Ця техніка вимагає розширити всі вектори додаванням «1» в кінці, всі матриці розширюються додаванням рядка нулів знизу, і колонки — вектора переноса — справа, а також одиниці в нижній правий кут. Тоді паралельне перенесення на площині може бути обчислене за допомогою матричного множення:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + a \\ y + b \\ 1 \end{pmatrix}$$

Перевагою використання однорідних координат є те, що це дає можливість комбінувати будь-яку кількість перетворень в одне шляхом перемноження матриць. Покажемо на прикладі знаходження матриці третього порядку, яка відповідає композиції перетворень: масштабування з коефіцієнтом 0,5, повороту на 90° і паралельного перенесення на вектор $(-3; 2)$. Якщо $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то $\sin \varphi = 1$ і $\cos \varphi = 0$. Відповідні матриці перетворень матимуть вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

де A — матриця масштабування, B — матриця повороту, C — матриця паралельного перенесення. Тоді матриця композиції цих перетворень дорівнює їх добутку

$$CBA = \begin{pmatrix} 0 & -0,5 & -3 \\ 0,5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для фільтрації, розмиття, підвищення різкості, виявлення меж використовується матрична операція згортки. Це процес, при якому нове значення кожного пікселя розраховується як зважена сума інтенсивностей його сусідів. Математично цей процес описується переміщенням малого оператора — ядра (kernel) — по всій площині вихідної матриці зображення.

Для вихідної матриці A та ядра згортки K , значення результуючого пікселя в позиції (x, y) обчислюється за формулою:

$$(A * K)(x, y) = \sum_i \sum_j A(x - i, y - j) \cdot K(i, j).$$

У формулі згортки змінні i, j — це індекси елементів матриці ядра. Вони визначають зміщення відносно центрального пікселя (для ядра 3×3 $i \in \{-1; 0; 1\}, j \in \{-1; 0; 1\}$).

Наприклад, якщо вхідна матриця A має розмір 3×3 і ядро K також 3×3 , то в результаті ми отримаємо лише одне число — матрицю розміру 1×1 , оскільки ядру нікуди зсуватися. Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 9 \\ 1 & 4 & 0 \\ 7 & 3 & 8 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

За формулою для центрального пікселя отримаємо: $5 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 9 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 4 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 7 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 8 \cdot 1 = 37$

Одним із важливих етапів аналізу зображень є пошук контурів об'єктів. Математично це реалізується через обчислення наближення градієнта яскравості зображення. Оператор Собеля використовує дві матриці 3×3 (ядра), які апроксимують похідні по горизонталі та вертикалі.

Матричні ядра Собеля:

$$G_x = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G_y = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Обчислюючи результуючу амплітуду градієнта як $G = \sqrt{G_x^2 + G_y^2}$, алгоритм дозволяє виділити чіткі контури, що є основою для систем розпізнавання номерів авто, облич та дорожньої розмітки.

Одним із найпотужніших інструментів лінійної алгебри для аналізу структури даних є сингулярний розклад (SVD - Singular Value Decomposition) матриці $A_{m \times n}$ який описується формулою $A = U\Sigma V^T$, де U – ортогональна матриця розміру $m \times m$, стовпці якої є власними векторами матриці AA^T (ліві сингулярні вектори), Σ – діагональна матриця розміру $m \times n$, на головній діагоналі якої знаходяться сингулярні числа σ_i (невід'ємні, впорядковані за спаданням), V – ортогональна матриця розміру $n \times n$, стовпці якої є власними векторами матриці $A^T A$ (праві сингулярні вектори). SVD дозволяє ефективно зменшувати обсяг даних зображення, зберігаючи його ключові структури через вибір головних сингулярних компонентів.

Замість використання всіх значень, ми зберігаємо лише перші k (де k менше рангу) найбільших сингулярних чисел та відповідні їм вектори. Зберігання k компонентів потребує значно менше місця, ніж зберігання повної матриці пікселів, при цьому зображення зберігає свою структуру та основні деталі.

В розглянутих методах обробки цифрових зображень математика перетворює візуальні дані на мову матриць та векторів, забезпечуючи інструментарій, що робить обробку зображень точним, автоматизованим та високоефективним процесом.

Література

[1] Szeliski, Richard. Computer Vision: Algorithms and Applications. 2nd ed., Springer Nature, 2022.

[2] Кобилін О. А. Методи цифрової обробки зображень : навч. посіб. / О. А. Кобилін, І. С. Творошенко ; М-во освіти і науки України, Харків. нац. ун-т радіоелектроніки. – Харків : ХНУРЕ, 2021. – 124 с.

СУЧАСНІ ТЕПЛОІЗОЛЮЮЧІ МАТЕРІАЛИ ДЛЯ ШВИДКОГО І ДОВГОВІЧНОГО ВІДНОВЛЕННЯ ЖИТЛА

Жара Богдана Іванівна

Б-25-1, Інститут архітектури та будівництва "ІФНТУНГ-ДОННАБА"

bohdana.zhara-b251@nung.edu.ua

Науковий керівник: Мазур Тетяна Михайлівна^{0000-0002-4047-832X}, доктор філософії, доц. кафедри ФМН, tetiana.mazur@nung.edu.ua

У доповіді розглядається аналіз теплових характеристик та екологічної безпеки найбільш популярних сьогодні утеплювачів. Питання енергоефективності є критичним, оскільки статистика показує величезні втрати енергії в існуючих будівлях (рис. 1). Зокрема, через стіни втрачається до 37–40% тепла, через дах – близько 20%, а через систему вентиляції та вікна – до 45%. Ефективна теплоізоляція дозволяє суттєво знизити ці показники, що є життєво важливим в умовах дефіциту енергоресурсів [1].

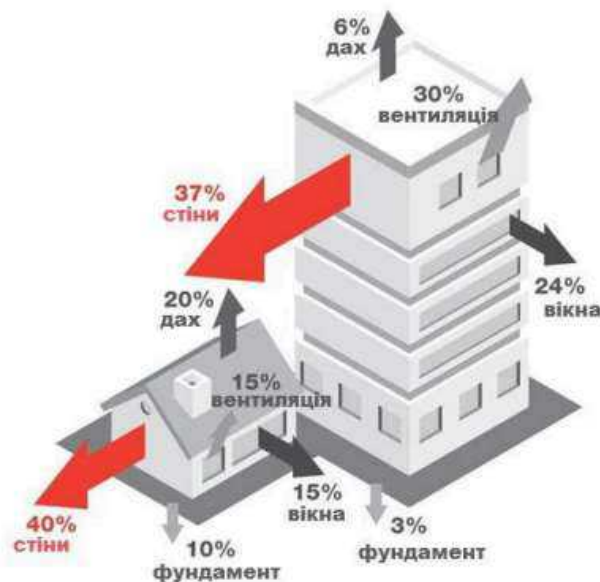


Рис. 1. Втрати енергії в будівлях.

Метою нашого дослідження є комплексний аналіз матеріалів для утеплення, щоб визначити, які з них найкраще підходять для швидкої відбудови житлового фонду, враховуючи їхню довговічність та екологічність. Ефективність будь-якого утеплювача визначається показником термічного опору R . Він розраховується за формулою [2]:

$$R = \delta / \lambda,$$

де δ – товщина матеріалу [м], а λ – коефіцієнт теплопровідності [Вт/(м·К)], одиниця вимірювання – (м²·К)/Вт.

Важливо пам'ятати: чим менший коефіцієнт теплопровідності (λ), тим краще матеріал утримує тепло. Наше завдання при виборі матеріалів для утеплення – максимізувати термічний опір, обираючи відповідну якість матеріалу.

Сучасні утеплювачі розділені на три групи: мінеральна вата (кам'яна та скляна), полімерні матеріали (пінополістирол та пінополіуретан) та екологічні матеріали (ековата) [2]. Мінеральна вата виготовляється з розплавів гірських порід. Її головні переваги – вона абсолютно не горить, забезпечує чудову звукоізоляцію та є екологічно безпечною. Проте вона потребує ретельного захисту від вологи, оскільки при намоканні втрачає свої ізоляційні властивості.

Полімерні утеплювачі, такі як пінополістирол, дуже популярні через свою легкість та низьку ціну. Екструдований пінополістирол (XPS) є міцнішим і майже не вбирає воду, що робить його ідеальним для утеплення фундаментів. Головним недоліком цієї групи є низька вогнестійкість. Особливої уваги заслуговує пінополіуретан (ППУ). Це один із найбільш технологічних методів, який наноситься методом наплення. Це дозволяє уникнути швів та «містків холоду». ППУ має чи не найнижчий коефіцієнт теплопровідності та дуже тривалий термін експлуатації.

Для тих, хто надає перевагу природним матеріалам, оптимальним вибором є ековата. Вона виготовляється з целюлози, обробленої природними антисептиками. Вона «дихає», стійка до гризунів і плісняви, а при монтажі заповнює найдрібніші щілини. Порівнюючи показники теплопровідності (рис. 2), ми бачимо, що лідером є пінополіуретан. Мінеральна вата та ековата

мають дещо вищі показники, що означає, що для досягнення однакового теплового ефекту шар цих матеріалів має бути товстішим [3]. Щодо довговічності, то термін служби більшості сучасних матеріалів складає від 30 до 50 років (рис. 2).

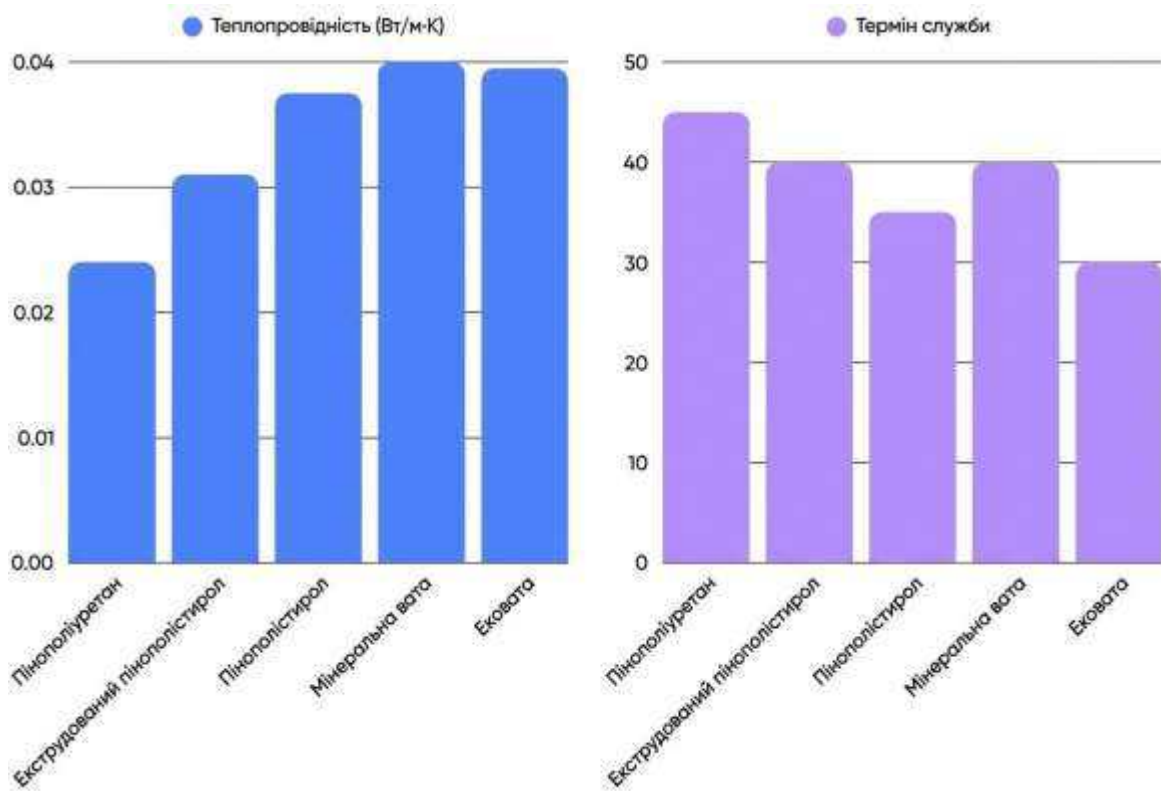


Рис. 2. Характеристики теплопровідності та терміну служби утеплюючих матеріалів.

До переваг сучасних теплоізоляційних матеріалів відносяться зменшення тепловтрат, енергоефективність та економія, довговічність, екологічна безпека та простота монтажу.

Сучасні утеплювачі ефективно знижують втрати тепла через стіни, покрівлю та підлогу, що дозволяє підтримувати комфортну температуру всередині будівлі. Високі теплоізоляційні властивості матеріалів сприяють зменшенню витрат на опалення та кондиціонування, що робить житло більш економічним у довгостроковій перспективі [4-6]. Якісні утеплювачі здатні зберігати свої властивості до 50 років, не руйнуючись під впливом температурних коливань, вологи чи механічних навантажень. Більшість сучасних матеріалів, зокрема мінеральна вата та ековата, не виділяють токсичних речовин і є безпечними для людини та довкілля. Значна частина утеплювачів легко встановлюється навіть у складних конструкціях, що дозволяє швидко модернізувати, або відновлювати житло.

Серед недоліків сучасних теплоізоляційних матеріалів можна виділити чутливість до вологи, обмежену вогнестійкість полімерів, необхідність додаткових бар'єрів та високу вартість окремих матеріалів.

Деякі матеріали, особливо волокнисті, втрачають свої властивості при намоканні, що може спричинити утворення грибка або плісняви. Пінополістирол та інші полімерні утеплювачі є горючими та потребують додаткового протипожежного захисту. Частина утеплювачів потребує використання гідро- та пароізоляції для запобігання пошкодженню та втраті ефективності. Інноваційні утеплювачі, такі як пінополіуретан або аерогель, залишаються дорогими, що

обмежує їх широке застосування [5,6].

Порівнюючи сучасні утеплювачі (таблиця 1), варто виділити їхні основні характеристики. Пінополіуретан має один із найнижчих коефіцієнтів теплопровідності, забезпечуючи максимальне утримання тепла. Водночас його висока вартість і складність монтажу обмежують широке використання. Мінеральна вата вирізняється високою вогнестійкістю, екологічною безпечністю та хорошими теплоізоляційними властивостями, що робить її універсальним вибором. Пінополістирол та екструдований пінополістирол забезпечують оптимальний баланс між ефективністю, вартістю та простотою монтажу, проте потребують додаткових заходів протипожежного захисту. Водночас важливо враховувати особливості сучасних матеріалів: мінеральна вата чутлива до вологи, а полімерні матеріали потребують захисту від ультрафіолетового випромінювання та вогню [6,7].

Таблиця 1.

Теплопровідність матеріалів	
Матеріал	Теплопровідність λ (Вт/м·К)
Пінополіуретан	0.020–0.025
Екструдований пінополістирол	0.028–0.032
Пінополістирол	0.030–0.040
Мінеральна вата	0.035–0.045
Ековата	0.038–0.042

Питання екологічної безпеки сьогодні є особливо актуальним. У цьому аспекті лідирують мінеральна вата та ековата, які не виділяють шкідливих речовин. Полімерні матеріали безпечні в повсякденному використанні, проте під час горіння можуть виділяти токсичний дим.

Для Західних областей України найкращим варіантом ми вважаємо мінеральну вату. Вона стійка до нашого клімату з перепадами температур, є пожежобезпечною та довговічною. Водночас для прифронтових зон, де на першому місці стоїть швидкість відбудови, ми рекомендуємо комбінований підхід. Пінополіуретан – для миттєвої герметизації пошкоджень та швидкого утеплення, а мінеральна вата – як зовнішній шар для забезпечення надійності та пожежної безпеки.

На завершення підкреслимо: вибір конкретного матеріалу повинен ґрунтуватися на балансі між швидкістю монтажу, безпекою та ціною. Якісне утеплення сьогодні – це енергетична незалежність нашої країни в майбутньому.

Література

- [1] A. Papadopoulos, *State of the art in thermal insulation materials and aims for future developments*, Energy and Buildings. **37** (2005), 77–86. 10.1016/j.enbuild.2004.05.006
- [2] Б. М. Дацюк, *Будівельна теплофізика: підручник*. Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2012, 312 с.
- [3] B. Jelle, *Traditional, state-of-the-art and future thermal building insulation materials and solutions, Properties, requirements and possibilities*, Energy and Buildings. **43** (2011), 2549–2563. 10.1016/j.enbuild.2011.05.015K.
- [4] В. Дешко, *Енергоефективність будівель: навч. посіб.* Київ: КНУБА, 2018, 156 с.

[5] О. М. Пшінько, Сучасні теплоізоляційні матеріали та їх застосування у будівництві. Дніпро: ПДАБА, 2019, 198 с.

[6] О. Ю. Березюк, Енергоощадні технології в будівництві. Вінниця: ВНТУ, 2020, 220 с.


[7] І. М. Карп, Основи енергоз

ПОБУДОВА ЛІНІЙНОЇ РЕГРЕСІЙНОЇ МОДЕЛІ ДЛЯ ОПИСУ ДЕФОРМАЦІЙНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ЦЕМЕНТНОГО КАМЕНЮ НА ОСНОВІ ЦЕМЕНТУ ПЦТ-ІГ

Жара Богдана Іванівна

Б 25-1/ІАБ “ІФНТУНГ-ДонНАБА”

bohdana.zhara-b251@nung.edu.ua

Науковий керівник: Тирлич Володимир Васильович , к.т.н, доцент кафедри ФМН,

volodymyr.tyrylych@nung.edu.ua

У роботі розглянуто побудову багатофакторної лінійної регресійної моделі для опису повзучості цементного каменю на основі цементу ПЦТ-ІГ, що застосовується при цементуванні нафтових і газових свердловин [8]. Запропонований підхід дозволяє кількісно оцінити вплив основних фізико-механічних параметрів на деформаційні характеристики матеріалу та підвищити обґрунтованість інженерних рішень. Отримані результати можуть бути використані для прогнозування поведінки цементного каменю в реальних умовах експлуатації свердловин.

Актуальність дослідження зумовлена необхідністю забезпечення довготривалої герметичності та надійності свердловин в умовах підвищених температур і тисків [2, 8]. Цементний камінь виконує функцію основного ізоляційного елемента, забезпечуючи механічну стійкість конструкції та запобігаючи міжпластовим перетокам флюїдів [3, 8].

Однією з ключових характеристик цементного каменю є повзучість — здатність матеріалу до поступового накопичення деформацій у часі під дією сталих навантажень [4]. Надмірний розвиток повзучості призводить до зміни геометрії цементного кільця та зниження надійності свердловини [4, 8].

Мета роботи — побудова багатофакторної лінійної регресійної моделі для кількісного опису повзучості цементного каменю з урахуванням його фізико-механічних характеристик.

Для досягнення мети вирішено такі завдання:

- аналіз фізичної сутності повзучості [4];
- систематизація експериментальних даних;
- визначення факторних ознак;
- проведення кореляційного та регресійного аналізу [5];
- оцінка адекватності моделей.

Об’єкт дослідження — цементний камінь на основі цементу ПЦТ-ІГ.

Предмет дослідження — повзучість цементного каменю та її залежність від фізико-механічних параметрів.

Як факторні параметри було обрано:

- вік цементного каменю;
- призмову міцність;
- модуль пружності;
- залишкові та максимальні деформації.

Методика дослідження базується на застосуванні методів математичної статистики, зокрема кореляційного (коефіцієнт Пірсона) та багатофакторного регресійного аналізу [5].

Обробку даних виконано в середовищі Microsoft Excel.

Результати кореляційного аналізу показали наявність тісного зв'язку між повзучістю та деформаційними характеристиками. Найбільший вплив мають залишкові та максимальні деформації, що узгоджується з відомими закономірностями деформування цементних матеріалів [4]. При температурі 20 °С спостерігається майже функціональна залежність між параметрами. Модуль пружності та призма міцності мають обернений вплив.

Підвищення температури до 40 °С не змінює структури залежностей, однак впливає на їх інтенсивність. При температурі 75 °С спостерігається ускладнення деформаційних процесів, що пов'язано з термочутливістю цементного каменю та зміною його мікроструктури [6].

На основі експериментальних даних побудовано регресійні моделі для температур 20 °С, 40 °С і 75 °С. Встановлено, що:

- при 20 °С визначальним фактором є залишкові деформації;
- при 40 °С зростає вплив максимальних деформацій і міцності;
- при 75 °С домінують залишкові деформації [3].

Дослідження мультиколінеарності показало наявність тісного зв'язку між факторними параметрами, що обумовлено їх спільною природою формування. Незважаючи на це, модель зберігає адекватність і може бути використана для практичних розрахунків [5].

Коефіцієнт детермінації становить понад 99 % для температур 20 °С і 40 °С та близько 89 % для 75 °С, що свідчить про високу точність моделей .

Практичне значення роботи полягає у можливості прогнозування повзучості цементного каменю, зменшенні обсягу експериментальних досліджень та підвищенні надійності цементування свердловин [8].

Висновки

1. Встановлено, що повзучість цементного каменю є визначальною характеристикою, яка впливає на довготривалу надійність та герметичність свердловин [4, 8].
2. Доведено, що найбільший вплив на величину повзучості мають деформаційні параметри цементного каменю.
3. Виявлено, що температура істотно впливає на характер деформаційних процесів, зокрема спричиняє ускладнення поведінки матеріалу [6].
4. Побудовані регресійні моделі адекватно описують повзучість та можуть використовуватися для інженерних розрахунків [5].
5. Найвища точність моделей досягається при температурах 20–40 °С, тоді як при 75 °С спостерігається її зниження.
6. При високих температурах необхідне врахування нелінійних ефектів.

Література

- [1] Neville A.M. Properties of Concrete. 5th ed. Pearson, 2011. 844 p.
- [2] Mehta P.K., Monteiro P.J.M. Concrete: Microstructure, Properties, and Materials. 4th ed. McGraw-Hill, 2014. 729p.
- [3] Aïtcin P.C. High Performance Concrete. CRC Press, 1998. 620 p.
- [4] Mindess S., Young J.F., Darwin D. Concrete. 2nd ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2003.
- [5] Montgomery D.C., Peck E.A., Vining G.G. Introduction to Linear Regression Analysis. 5th ed. Hoboken: Wiley, 2012.
- [6] Scrivener K., Snellings R., Lothenbach B. A Practical Guide to Microstructural Analysis of


Cementitious Materials. Boca Raton: CRC Press, 2016.

[7] Thomas J.J., Jennings H.M., Allen A.J. The role of C-S-H gel in cement systems. Cement and Concrete Research. 2018. Vol. 107. P. 261–274.

[8] Nelson E.B., Guillot D. *Well Cementing*. 2nd ed. Sugar Land: Schlumberger, 2006.

МОДЕЛЮВАННЯ ПРУЖНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ЦЕМЕНТНОГО КАМЕНЮ ПЦТ-ІГ В СЕРЕДОВИЩІ MS EXCEL НА ОСНОВІ ЛІНІЙНОЇ РЕГРЕСІЙНОЇ МОДЕЛІ

Жарська Аліна Богданівна
Б 25-1/ІАБ “ІФНТУНГ-ДонНАБА”
alina.zharska-b251@nung.edu.ua

Науковий керівник: Тирлич Володимир Васильович , к.т.н, доцент кафедри ФМН,
volodymyr.tyrlych@nung.edu.ua

В доповіді розглядається вплив температури твердіння на пружні властивості цементного каменю ПЦТ-ІГ та можливість їх прогнозування на основі лінійних регресійних моделей. Особливу увагу приділено встановленню статистичних залежностей між основними фізико-механічними параметрами матеріалу. Отримані результати дозволяють оцінити ступінь впливу температурного фактору на формування структури та обґрунтувати використання спрощених моделей для інженерних розрахунків.

1. Актуальність дослідження

Цементний камінь на основі тампонажного портландцементу ПЦТ-ІГ широко застосовується при цементуванні нафтових і газових свердловин. Його експлуатація відбувається в умовах значних температурних коливань, що безпосередньо впливає на механічні та деформаційні характеристики матеріалу. Одним із ключових параметрів є модуль пружності, який визначає здатність цементного каменю протидіяти деформаціям і забезпечувати цілісність цементного кільця [1, 6].

Температура твердіння істотно впливає на процеси гідратації, формування мікроструктури та кінцеві фізико-механічні властивості матеріалу [2, 3]. В умовах глибинних свердловин підвищена температура може як прискорювати набір міцності, так і спричиняти структурні дефекти [4].

У зв'язку з цим актуальним є застосування математичного моделювання, зокрема лінійної регресії, для прогнозування пружних властивостей цементного каменю [5].

2. Мета та завдання роботи

Метою дослідження є побудова лінійних регресійних моделей для прогнозування модуля пружності цементного каменю ПЦТ-ІГ при різних температурах твердіння (20°C, 40°C, 75°C).

Основні завдання:

- провести кореляційний аналіз параметрів;
- побудувати багатофакторні регресійні моделі;
- перевірити статистичну значущість моделей;
- виконати діагностику залишків;
- порівняти моделі для різних температур;
- сформулювати практичні рекомендації.

3. Матеріали та методи дослідження

Експериментальні дослідження проводилися на зразках цементного каменю ПЦТ-ІG при різних температурних режимах відповідно до міжнародних стандартів випробування цементів [7].

Підходи до оцінки деформаційних характеристик узгоджуються з сучасними дослідженнями цементних матеріалів [8].

Визначалися такі параметри:

- модуль пружності;
- вік зразка;
- призмova міцність;
- повзучість;
- залишкові та максимальні деформації.

Обробка даних виконувалася в середовищі MS Excel із застосуванням:

- кореляційного аналізу (коефіцієнти Пірсона);
- множинної лінійної регресії;
- статистичних критеріїв (R^2 , t-критерій, F-критерій);
- діагностики залишків.

4. Основні результати дослідження

4.1. Кореляційний аналіз

Встановлено, що:

- призмova міцність має найсильніший позитивний зв'язок з модулем пружності ($r \approx 0,967-0,985$);
- деформаційні характеристики мають сильний негативний зв'язок;
- між деформаційними параметрами існує висока міжкореляція (до 0,994).

Це свідчить, що саме міцність є ключовим фактором формування пружних властивостей[1].

4.2. Регресійні моделі

Побудовані моделі показали високу точність:

- $R^2 > 0,978$ для всіх температур;
- стандартна похибка: 0,7–0,98 ГПа.

Основні висновки:

- найбільш значущі фактори — призмova міцність і вік зразка;
- деформаційні параметри мають низьку статистичну значущість;
- вплив температури проявляється через зміну коефіцієнтів регресії.

4.3. Вплив температури

Встановлено такі закономірності:

- при 40°C вплив міцності є максимальним;
- при 75°C знижується вплив віку зразка;
- при високих температурах збільшується варіабельність результатів.

Отримані результати також підтверджують сучасні дослідження щодо впливу температури на структуру цементних матеріалів [4].

4.4. Діагностика моделей

Аналіз залишків показав:

- приблизну нормальність розподілу;
- відсутність суттєвої гетероскедастичності;
- відсутність автокореляції;
- наявність окремих викидів при високих температурах.

Отже, моделі є адекватними для практичного використання.

5. Обговорення результатів

Отримані результати підтверджують, що модуль пружності визначається переважно міцністю матеріалу, тоді як деформаційні характеристики відіграють другорядну роль [2, 5]:

- модуль пружності визначається переважно міцністю матеріалу;
- деформаційні характеристики мають другорядний вплив;
- температура змінює не саму залежність, а її параметри.

При підвищенні температури змінюється мікроструктура цементного каменю, що впливає на його механічні властивості [3, 4]:

- прискорюється гідратація;
- формується більш пориста структура;
- зростає невизначеність прогнозування.

Це особливо важливо для глибоких свердловин, де температурний градієнт значний.

6. Практичне значення

Результати можуть бути використані для:

- прогнозування властивостей цементного каменю;
- оптимізації складу тампонажних розчинів;
- підвищення герметичності цементного кільця;
- зменшення ризику міжколонних перетоків.

Рекомендовано застосовувати спрощені моделі з двома змінними:

- призмове міцність;
- вік зразка.

Це значно спрощує інженерні розрахунки.

7. Висновки

Отримані результати узгоджуються з сучасними уявленнями про вплив температури твердіння на структуру та властивості цементного каменю [2]:

1. Побудовані регресійні моделі адекватно описують залежність модуля пружності від основних параметрів.
2. Призмове міцність є ключовим фактором формування пружних властивостей.
3. Температура твердіння суттєво впливає на структуру та механізми формування властивостей.
4. Деформаційні характеристики мають обмежену роль через мультиколінеарність.
5. Найбільш ефективними є спрощені моделі для практичного застосування.
6. Для різних температур необхідно використовувати окремі моделі.

Література

[1] Neville A.M. Properties of Concrete. 5th ed. Pearson, 2011. 844 p.

[2] Mehta P.K., Monteiro P.J.M. Concrete: Microstructure, Properties, and Materials. McGraw-Hill, 2014. 729 p.

[3] Scrivener K., Snellings R., Lothenbach B. A Practical Guide to Microstructural Analysis of Cementitious Materials. CRC Press, 2016. 540 p.

[4] Emmanuel A., Oladipupo O., Olawuyi B. Influence of curing temperature on hydration and microstructural development of ordinary Portland cement // *Construction and Building Materials*. 2022. Vol. 327. Art. 127070. DOI: [10.1016/j.conbuildmat.2022.127070](https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2022.127070).

- [5] Li V.C. Engineered Cementitious Composites. McGraw-Hill, 2008. 430 p.
 [6] Nelson E.B., Guillot D. Well Cementing. 2nd ed. Schlumberger, 2006. 773 p.
 [7] ISO 10426-2:2019. Petroleum and natural gas industries — Cements and materials for well cementing — Part 2: Testing of well cements. Geneva: International Organization for Standardization, 2019. 58 p.
 [8] Гаращенко Д.П. Деформативність і усадка цементного каменю при різних умовах твердіння: дис. ... канд. техн. наук. Одеса: ОДАБА, 2020. 210 с.

ПСЕВДООБЕРНЕНА МАТРИЦЯ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Зима Артем Русланович

студент групи ET-25-2, факультет автоматизації та енергетики

artem.zyma-et252@nung.edu.ua

Науковий керівник: Шегда Любов Михайлівна, к. ф.-м. н., доцент кафедри ФМН, liubov.shehda@nung.edu.ua

У лінійній алгебрі однією з основних задач є розв'язування систем лінійних рівнянь, які виникають у різних галузях науки та техніки. Такі системи широко використовуються у фізиці, економіці, інженерії та комп'ютерних науках. Однак на практиці часто виникають ситуації, коли система не має точного розв'язку. Це пов'язано з тим, що матриця коефіцієнтів може бути прямокутною або виродженою. У таких випадках виникає потреба у знаходженні наближеного розв'язку, який найбільш точно задовольняє систему. Одним із найефективніших інструментів для цього є псевдообернена матриця Q^+ .

У 1920 році Г. Мур узагальнив поняття перетворення для довільних прямокутних і в тому числі квадратних, але вироджених матриць, ввівши поняття псевдооберненої матриці. Незалежно від досліджень Мура до цієї ж матриці прийшов Р. Пенроуз в 1955 році. Тому Q^+ називають псевдооберненою матрицею за Муром-Пенроузом [1, 2]. Псевдообернена матриця є узагальненням поняття оберненої матриці, тобто коли матриця не квадратна, або визначник дорівнює нулю (тобто звичайної оберненої не існує).

Матриця Q^+ називається *псевдооберненою* до матриці Q , якщо виконуються умови Мура-Пенроуза:

$$\begin{aligned} 1) \quad QQ^+Q &= Q; & 2) \quad Q^+QQ^+ &= Q^+; \\ 3) \quad (QQ^+)^* &= QQ^+; & 4) \quad (Q^+Q)^* &= Q^+Q. \end{aligned}$$

Ці умови забезпечують узгодженість та коректність узагальненого обернення.

Псевдообернена матриця існує для будь-якої матриці та є єдиною.

Псевдообернена матриця будується за допомогою так званого скелетного розкладу матриці Q .

Скелетним розкладом матриці Q називається добуток $Q = RS$, де матриця R – $m \times n_1$ -вимірна і матриця S – $n_1 \times n$ -вимірна. Обидві матриці R та S повного рангу: $\text{rank } Q = \text{rank } R = \text{rank } S = n_1$ [3].

Тоді псевдообернена матриця обчислюється за формулою:

$$Q^+ = S^+ R^+ = S^* (SS^*)^{-1} (R R^{-1} R) \quad (1)$$

Матриці SS^* та R^*R є квадратними і невідродженими. Тому їх обернені матриці існують.

Скелетний розклад дозволяє представити матрицю через добуток двох матриць повного рангу і працювати з матрицями меншого розміру. Це особливо важливо для великих систем.

Розглянемо метод побудови псевдооберненої матриці до матриці Q , який ґрунтується на понятті *матриці-ортопроектора* [3, 4, 5].

$$Q^+ = (Q^*Q + P_Q)^{-1}Q^* = Q^*(QQ^* + P_{Q^*})^{-1}, \quad (2)$$

при цьому

$$\begin{aligned} QQ^+ &= I_m - P_{Q^*}, & Q^+Q &= I_n - P_Q, \\ P_Q &= P_{N(Q)} = I_n - Q^+Q; & P_{Q^*} &= P_{N(Q^*)} = I_m - QQ^+. \end{aligned}$$

де I_m, I_n – одиничні матриці,

P_Q та P_{Q^*} ($n \times n$)- і ($m \times m$)-вимірні матриці-ортопроектори, які проєктують R^n та R^m на нуль-простори $N(Q)$ та $N(Q^*)$ матриць Q та Q^* .

Ортопроектори є важливим інструментом у дослідженні лінійних систем. Ортопроектори здійснюють проєкцію векторів на відповідні підпростори. Вони дозволяють виділяти компоненти, що належать нуль-просторам матриць.

Нуль-простір матриці Q складається з усіх векторів, для яких виконується рівність: $Qc = 0$. Цей простір позначається як $N(Q)$. Аналогічно визначається нуль-простір матриці Q^* .

$N(Q)$ та $N(Q^*)$ – нуль-простори матриць (ядра операторів) Q та $Q^* = Q^T$ відповідно:

$$N(Q) := \{c : c \in R^n, Qc = 0\} = \ker Q,$$

$$N(Q^*) := \{s : s \in R^m, Q^*s = 0\} = \ker Q^* = \text{coker} Q.$$

Ортопроектором P_Q для ($m \times n$)-вимірної матриці Q називається ($n \times n$)-вимірна матриця, яка задовольняє наступним умовам:

$$QP_Q = 0, \quad P_Q^2 = P_Q = P_Q^*.$$

Ортопроектором P_{Q^*} для ($m \times n$)-вимірної матриці Q^* називається ($m \times m$)-вимірна матриця, яка задовольняє наступним умовам:

$$Q^*P_{Q^*} = 0, \quad P_{Q^*}^2 = P_{Q^*} = P_{Q^*}^*.$$

Псевдообернену матрицю можна також побудувати за формулами [6]

$$Q^+ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (Q^*Q + \varepsilon I_n)^{-1}Q^* = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Q^*(QQ^* + \varepsilon I_m)^{-1}. \quad (3)$$

Якщо матриця Q повного рангу, то

$$Q^+ = (Q^*Q)^{-1}Q^* = Q^*(QQ^*)^{-1}. \quad (4)$$

Розглянемо систему лінійних рівнянь вигляду:

$$Qc = b, \quad (5)$$

де матриця Q – довільна $(m \times n)$ -вимірна матриця рангу: $\text{rank } Q = n_1 \leq \min(m, n)$; вектор-стовбець $c \in R^n$ є вектором невідомих, які потрібно знайти; вектор-стовбець $b \in R^m$ є заданим вектором правих частин.

Основною задачею є знаходження такого вектора c , який задовольняє дану систему рівнянь.

Система лінійних рівнянь може бути сумісною або несумісною. Також система може мати нескінченну кількість розв'язків, якщо ранг матриці менший за кількість невідомих. У таких випадках виникає необхідність у знаходженні узагальненого або наближеного розв'язку. Саме для цього вводиться поняття псевдооберненої матриці.

Псевдообернена матриця дозволяє розв'язувати систему (5) навіть коли:

- система **перевизначена** (більшість рівнянь, ніж невідомих);
- система **недовизначена** (менше рівнянь, ніж невідомих);
- система **на має точного розв'язку**.

Отже, система лінійних рівнянь $Qc = b$ є розв'язною тоді і тільки тоді, коли:

$$P_{Q^*}b = 0. \quad (6)$$

Це означає, що вектор b належить простору стовпців матриці Q .

Якщо умова (6) виконана, її загальний розв'язок має вигляд:

$$c = Q^+b + P_Q\bar{c},$$

де \bar{c} – довільний вектор.

Перший доданок є частинним розв'язком системи. Другий доданок описує всі можливі розв'язки однорідної системи. Таким чином, отримується повний опис множини розв'язків.

Якщо умова (6) не виконується, то система (5) не розв'язна і має псевдорозв'язок

$c^+ = Q^+b \in R^n$, який мінімізує похибку (нев'язку): $|Qc - b| = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left| \sum_{k=1}^n q_{ik}c_k - b_i \right|^2}$ в розв'язку системи (5) і серед всіх векторів $c \in R^n$, на яких похибка $|Qc - b|$ досягає найменшого значення, вектор $c^+ \in R^n$ має найменшу довжину $|c| = c^*c = \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2}$ і норма похибки дорівнює

$$|Qc^+ - b| = |P_{Q^*}b| \quad [6].$$

Псевдорозв'язок використовується у випадку несумісної системи. Він мінімізує норму похибки між лівою та правою частинами. Це означає, що знаходиться найкраще можливе наближення. Він лежить в основі методу найменших квадратів.

Псевдорозв'язок має чітке геометричне тлумачення.

Вектор Qc^+ є ортогональною проєкцією вектора b , на підпростір, натягнутий на стовпці матриці Q . Це означає, що знаходиться найближчий можливий вектор до b , який належить цьому підпростору. Таким чином, псевдообернена матриця реалізує задачу мінімізації відстані.

Приклад. Розглянемо систему $Qc = b$, де $Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $c \in \mathbb{R}^2$.

Знайдемо Q^+ : $Q^+ = (Q^*Q)^{-1}Q^*$, де $Q^* = Q^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

$$Q^*Q: \quad Q^*Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad (Q^*Q)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Отже, псевдообернена матриця має вигляд: $Q^+ = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$$P_{Q^*} = I_m - QQ^+ = I_3 - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Перевіримо умову: $P_{Q^*}b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq 0$.

Умова $P_{Q^*}b = 0$ не виконується, то система має псевдорозв'язок:

$$c^+ = Q^+b = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

який мінімізує норму нев'язки. Нехай $c = \begin{bmatrix} k \\ b \end{bmatrix}$ – вектор невідомих (параметри прямої

$y = kx + b$). На площині XOY знайдений псевдорозв'язок визначає пряму: $y = \frac{1}{2}x$.

До цієї ж прямої приводить і класичний метод найменших квадратів, згідно з яким для знаходження коефіцієнтів лінійної регресії $y = kx + b$, що найкращим чином описує залежність між даними: $x_1=0; x_2=1; x_3=1; y_1=0; y_2=0; y_3=1$, отримуємо однозначно розв'язну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} k \sum_{i=1}^3 x_i^2 + b \sum_{i=1}^3 x_i = \sum_{i=1}^3 x_i y_i, \\ k \sum_{i=1}^3 x_i + 3b = \sum_{i=1}^3 y_i. \end{cases}$$

У нашому випадку система

$$\begin{cases} 2k + 2b = 1, \\ 2k + 3b = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2k = 1 - 2b, \\ 1 - 2b + 3b = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2}, \\ b = 0. \end{cases}$$

приводить до тієї ж прямої $y = \frac{1}{2}x$, причому нев'язка для даної прямої є мінімальна.

Отриманий результат не є точним розв'язком системи, проте він мінімізує норму нев'язки. Таким чином, псевдообернена матриця дозволяє знаходити оптимальний розв'язок навіть у випадку несумісної системи.

Отже,

- Псевдообернена матриця є універсальним інструментом лінійної алгебри.
- Дозволяє працювати з будь-якими матрицями.
- Дає як точні, так і наближені розв'язки.
- Має чітке геометричне тлумачення.
- Широко застосовується у різних галузях науки.
- Псевдообернена матриця має велике теоретичне і практичне значення.

Література

- [1] Moore E.H. On the Reciprocal of the General Algebraic Matrix (Abstract) // Bull. Amer. Math. Soc. --- 1920. --- № 26 --- P. 394 -- 395.
- [2] Penrose R. A Generalized Inverse for Matrices // Proc. Cambridge Philos. Soc. --- 1955. --- Vol. 51, № 3 --- P. 406 -- 413.
- [3] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. --- М.: Наука, 1967. --- 572 с.
- [4] Турбин А.Ф. Формулы для вычисления полуобратной и псевдообратной матрицы / А.Ф. Турбин // Журн. вычислит. математики и мат. физики. --- 1974. --- Т. 14, № 3. --- С. 772 -- 776.
- [5] Кублановская В.И. О вычислении обобщенной обратной матрицы и проекторов / В.И. Кублановская // Журн. вычисл. математики и мат. физики. --- 1966. --- Т. 6, № 2. --- С. 326 -- 332.
- [6] Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized Inverse Operators and Fredholm Boundary Value Problems. --- VSP, Utrecht-Boston, 2004. --- 317 p.

ІНТЕГРАЛ ПУАССОНА ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ В ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧАХ

Ілюк Марія Юріївна

група ПМІ-25-1 Інститут інженерної механіки та робототехніки

mariia.iliuk-pmi251@nung.edu.ua

Науковий керівник: Тимків Іван Романович, к.ф.-м.н. доцент кафедри фізико-математичних наук, ivan.tymkiv@nung.edu.ua

В доповіді ітиме мова про інтеграл Пуассона, також відомий як інтеграл Гаусса-Пуассона або Пуассонівський інтеграл. Цей інтеграл відіграє значну роль у математичному аналізі, оскільки він належить до визначених інтегралів, первісна від підінтегральної функція якого не може бути обчислена за допомогою елементарних функцій. Він безпосередньо пов'язаний із дослідженням Гауссової функції та має фундаментальне значення в теорії ймовірностей, математичній фізиці та статистиці.

Розглянемо метод обчислення інтеграла Пуассона за допомогою подвійного інтеграла та проаналізувати його основні властивості й сфери практичного застосування.

Інтегралом Пуассона називають визначений інтеграл виду:

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

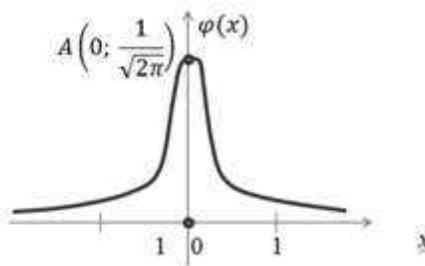
З ним пов'язаний інтеграл на всій числовій осі

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Функція e^{-x^2} називається Гауссовою і має такі властивості:

- є додатною для всіх x ;
- є парною функцією;
- швидко прямує до нуля при $|x| \rightarrow \infty$, це видно з графіка функції

– Гауссова функція яка виникає в теорії ймовірностей,



Завдяки цим властивостям інтеграл на нескінченному проміжку є збіжним.

Обчислення інтегралу Пуассона базується на переході до подвійного інтеграла та використанні полярних координат:

Нехай

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Розглядається квадрат інтеграла та записується повторний інтеграл у вигляді подвійного:

$$I^2 = \iint e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

Далі виконується перехід до полярних координат $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, де $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq r < +\infty$,

тоді $x^2 + y^2 = (r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2 = r^2$

Подвійний інтеграл набуває вигляду

$$I^2 = \iint e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-r^2} d(-r^2) \right) d\varphi = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{A^2}} - \frac{1}{e^0} \right) d\varphi = \frac{1}{2} \varphi \Big|_0^{2\pi} = \pi$$

Тоді $I = \sqrt{\pi}$, а інтеграл $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Наведемо ряд важливих властивостей Пуассона.

а) Інтеграл Пуассона збігається завдяки експоненціальному спаданні функції e^{-x^2} .

б) Функція e^{-x^2} є парною, тому $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

в) Якщо в показнику стоїть параметр $a > 0$, інтеграл змінюється за певним законом. Розглянемо

інтеграл: $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \left| t = \sqrt{a}x, dt = \sqrt{a}dx \right| = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

г) Інтеграл з множителем x^n $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^{n+1}} \sqrt{\pi}$.

За допомогою відповідних заміन змінних можна показати, що інтеграл Пуассона є окремим випадком інтегралів, пов'язаних із гамма-функцією.

Інтеграл Пуассона є ефективним інструментом для розв'язання широкого кола задач у фізиці, механіці, теплофізиці та інших технічних дисциплінах [2]. Однією з важливих переваг методів, заснованих на використанні інтеграла Пуассона, є можливість дослідження та розв'язання складних диференціальних рівнянь, що описують функціонування різних фізичних систем. Крім того, інтеграл Пуассона дозволяє моделювати численні фізичні процеси за різних умов. Його застосовують як у задачах теплопровідності, так і при аналізі коливальних процесів у механічних системах, що робить цей інтеграл важливим засобом у сучасних інженерних та прикладних дослідженнях.

У теорії ймовірностей інтеграл Пуассона застосовується під час дослідження випадкових процесів, розподілів і задач, пов'язаних з гармонічними функціями та потенціальною теорією. Зокрема, він використовується для побудови розв'язків крайових задач, які виникають при моделюванні випадкових явищ і стохастичних процесів. Крім того, методи, пов'язані з інтегралом Пуассона, мають важливе значення у дослідженні процесів дифузії та випадкових блукань.

В економіці інтеграл Пуассона застосовується в математичних моделях фінансових ринків, теорії ризику та аналізі динаміки економічних процесів. Його використовують при дослідженні моделей, що описують випадкові зміни цін активів, потоки заявок у фінансових системах та процеси прийняття рішень в умовах невизначеності. Також методи, засновані на інтегралі Пуассона, можуть застосовуватись для розв'язання диференціальних рівнянь, які виникають у задачах оптимізації та прогнозування економічних показників.

Висновки: Інтеграл Пуассона є одним із фундаментальних результатів математичного аналізу. Було розглянуто метод обчислення інтеграла Пуассона за допомогою подвійного інтеграла та переходу до полярних координат. Також було показано, що визначені інтегралів можуть бути зведеними до інтеграла Пуассона за допомогою відповідних перетворень. Відзначено задачі в яких викає такий інтеграл.

Література

[1] Практикум з вищої математики. Частина 2: Навчальний посібник / В.М. Мойсишин, Я.І. Савчук, А.І. Бандура та ін.; За ред. В.М. Мойсишина, Я.І. Савчука. – Івано-Франківськ: ІФНТУНГ, 2022. – 658с.

ПАРАДОКСИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Князевич Антон Миколайович

СІ-25-1 Факультет інформаційних технологій

anton.kniazevych-si251@nung.edu.ua

Науковий керівник: Гураль Інеса Михайлівна, к.ф.-м.н., доцент кафедри ФМН, inesa.hural@nung.edu.ua

Слово парадокс (від давньогрецького *παράδοξος* - незвичайний, неймовірний, дивний) - це твердження або ситуація, що начебто суперечить здоровому глузду або інтуїції, хоч насправді може й не бути хибним. Зі всіх розділів математики інтуїція найчастіше підводить у теорії ймовірностей та математичній статистиці. В історії теорії ймовірностей парадокси відігравали і продовжують відігравати фундаментальну роль, діючи як стимул для розвитку науки, виявлення обмежень інтуїтивного мислення та вдосконалення математичного апарату [1]. Розглянемо деякі парадокси теорії ймовірності.

Першим розглянемо парадокс Монті Голла. Задача формулюється як опис гіпотетичної гри, заснованої на американському телешоу «Let's Make a Deal». Ця задача названа на честь ведучого цієї передачі Монті Голла. Уявіть себе на телегрі, де вам потрібно обрати одні з трьох дверей: за одними з них автомобіль; за двома іншими по козі. Ви обираєте одні двері, наприклад, перші, ведучий відчиняє одні з двох інших, наприклад, треті, за якими коза. Тоді він каже вам: «Бажаєте змінити вибір на другі двері?». Чи отримуєте ви перевагу, якщо зміните свій вибір? Більшість людей вважає, зміна вибору нічого не дасть. В реальності зміна вибору подвоює ваші шанси (з $1/3$ до $2/3$), оскільки дії ведучого надали вам нову інформацію про «неправильні» двері, яку слід врахувати.

Для пояснення використаємо теорему Байєса [2]. Розглянемо події $H_i = \{\text{автомобіль знаходиться за дверима } i\}, i = 1, 2, 3$; $P(H_i) = \frac{1}{3}$. Подія $A = \{\text{ведучий відкриває двері 3 (після вибору дверей 1 гравцем)}\}$. Якщо приз за дверима 1, ведучий відкриває двері 3 з ймовірністю $\frac{1}{2}$ (двері 2 та 3 рівноймовірні), тобто $P(A/H_1) = \frac{1}{2}$. Якщо приз за дверима 2, ведучий повинен відкрити двері 3 з ймовірністю 1 (не може відкрити 1 - вибір гравця, не може 2 - там приз), тобто $P(A/H_2) = 1$. Якщо приз за дверима 3, ведучий відкриває двері 3 з ймовірністю 0, тобто $P(A/H_3) = 0$.

За формулою Байєса $P(H_i/A) = \frac{P(A/H_i)P(H_i)}{\sum_{i=1}^n P(A/H_i)P(H_i)}$:

$$P(H_2/A) = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{2}{3}$$

Парадокс Монті Голла є класичним прикладом у теорії ймовірностей, який демонструє, чому переоцінка початкової стратегії на основі нової інформації є вигідною.

Другим розглянемо парадокс хибнопозитивного результату (помилку базового рівня). Це помилка у мисленні: людина ігнорує загальну статистичну інформацію (базовий рівень) і фокусується лише на специфічних деталях конкретного випадку, що призводить до хибних висновків.

Розглянемо наступну задачу. При деякому медичному обстеженні ймовірність виявити деяке захворювання у хворого дорівнює 0,95, ймовірність прийняти здорову людину за хвору дорівнює 0,05. Частка хворих по відношенню до всього населення дорівнює 0,01. Знайти ймовірність того, що людина здорова, якщо вона була визнана хворою при обстеженні.

Розглянемо події: $H_1 = \{\text{людина здорова}\}$, $H_2 = \{\text{людина хвора}\}$; $A = \{\text{людина визнана хворою при обстеженні}\}$. За умовою задачі $P(H_1) = 0,99$, $P(H_2) = 0,01$, $P(A/H_1) = 0,05$, $P(A/H_2) = 0,95$.

За формулою Байєса

$$P(H_1/A) = \frac{0,99 \cdot 0,05}{0,99 \cdot 0,05 + 0,01 \cdot 0,95} \approx 0,839.$$

Аж 83,9% хибнопозитивних результатів.

Розуміння цього парадоксу дозволяє уникнути паніки серед пацієнтів та раціонально використовувати ресурси системи охорони здоров'я, фокусуючись на підтверджувальній діагностиці для груп високого ризику.

Неправомірність деяких іноді небезпечних для життя узагальнень ілюструє парадокс Сімпсона. Уявімо два методи лікування каменів у нирках: метод А (відкрита операція), метод В (малий розріз). Результати по групах:

Тип каменів	Метод А(успіх)	Метод В (успіх)	Який метод кращий?
Малі камені	93% (81 з 87)	87% (234 з 270)	Метод А
Великі камені	73% (192 з 263)	69% (55 з 80)	Метод А

На цьому етапі можна зробити висновок, що метод А ефективніший для обох типів каменів.

Тепер об'єднаємо всі випадки разом, не зважаючи на розмір каменів: метод А: 81 + 192 = 273 успіхи з 350 пацієнтів, тобто 78%, метод В: 234 + 55 = 289 успіхів з 350 пацієнтів, тобто 83%.

Метод В раптом став виглядати кращим (83% проти 78%), хоча він програв у кожній окремій групі. Формула повної ймовірності дозволяє побачити, чому виникає цей парадокс, оскільки

вона показує, що повна ймовірність є зваженою сумою ймовірностей окремих груп. За

формулою повної ймовірності $P(A) = \sum_{i=1}^n P(A/H_i)P(H_i)$.

$$P(A) = \frac{81}{87} \cdot \frac{87}{350} + \frac{192}{263} \cdot \frac{263}{350} = \frac{273}{350} = 0,78$$

$$P(B) = \frac{234}{270} \cdot \frac{270}{350} + \frac{55}{80} \cdot \frac{80}{350} = \frac{289}{350} = 0,83.$$

Розуміння цього парадоксу допомагає уникати помилок при оцінці ефективності ліків.

Препарат може здаватися ефективнішим для обох груп пацієнтів окремо, але при об'єднанні даних програвати іншому методу через різний розмір вибірок. Також він вчить остерігатися маніпуляцій: можна представити ті самі дані як «успіх» (показавши загальний графік) або як «провал» (показавши статистику за категоріями). Класичний приклад — вступ до Берклі (1973), де загальний відсоток прийнятих чоловіків був вищим, ніж жінок, що створювало ілюзію упередженості. Проте аналіз по факультетах показав, що на більшості з них жінки мали перевагу, просто вони частіше подавалися на напрямки з вищим конкурсом.

Останнім розглянемо парадокс днів народження, який оцінює ймовірність того, що у

випадково вибраній групі людей збігатимуться дні народження в якоїсь пари. В групах кількістю не менших 23 випадково вибраних людей, ймовірність збігу днів народження в якоїсь пари становить більше 50 %. Такий результат суперечить інтуїтивній уяві більшості людей.

Розглянемо розв'язання цієї задачі при наявності 23 людей – припускаємо, що ймовірність того, що дві людини народились в один день $P(A)$, тоді ймовірність того, що дві людини народились в різні дні $P(\bar{A})$. Через те, що події протилежні, то: $P(A) = 1 - P(\bar{A})$. Отже, знайдемо ймовірність, що всі учасники народились в різні дні, перший може народитись в будь-який з 365 днів, другий може народитись в будь-який з 364 днів, що лишилися, продовжуючи цей ланцюжок отримуємо:

$$P(\bar{A}) = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \dots \cdot \frac{343}{365}$$

$$P(\bar{A}) = 0,4927$$

$$P(A) = 1 - 0,4927 = 0,5073.$$

Для $P(\bar{A})$. можна записати загальну формулу для будь-якої кількості людей $P(\bar{A}) = \frac{365!}{(365-n)!} \cdot \left(\frac{1}{365}\right)^n$, де n – кількість людей в групі. Зі збільшенням кількості осіб, буде збільшуватись ймовірність того, що принаймні двоє народились в один день. Наступна таблиця показує ймовірності для деяких інших значень n (в таблиці знехтувано високосні роки):

$n =$	10	20	23	30	50	57	100
$P(n) \approx$	0,117	0,411	0,507	0,706	0,97	0,99	1

Найважливіша сфера практичного використання парадоксу днів народження – криптографія та кібербезпека. Парадокс лежить в основі так званої атаки «днів народження» на криптографічні хеш-функції.

Щоб не стати «жертвою» ймовірнісних парадоксів, важливо розуміти, що наша інтуїція часто пасує перед математикою. Розуміння парадоксів теорії ймовірностей – це не просто інтелектуальна розвага, це щеплення від маніпуляцій цифрами та спосіб мислити раціональніше там, де більшість покладається на відчуття.

Література

[1] Ярова О.А., Скасків Л.В., Костриця Б.І. Парадокси теорії ймовірностей. Вісник науки та освіти №4(34)-2025, с. 1858-1867. [https://doi.org/10.52058/2786-6165-2025-4\(34\)](https://doi.org/10.52058/2786-6165-2025-4(34))

[2] Гураль І.М. Мойсеєнко Л.А. Теорія ймовірностей[Текст] : навч. посіб. Івано-Франківськ: ІФНТУНГ 2015.- 116 ст.
https://search.library.nung.edu.ua/DocDescription?doc_id=408571

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ У FRONTEND-ІНЖЕНЕРІЇ: ВІД МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДО РЕНДЕРИНГУ

Кобринський Олександр Дмитрович
студент групи ІП-25-2, факультет інформаційних технологій
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу
oleksandr.kobrynskyi-ip252@nung.edu.ua

Науковий керівник: Григорчук Г. В.,
доктор філософії, доцент, доцент кафедри фізико-математичних наук
ORCID: 0000-0003-1674-9828
halyna.hryhorchuk@nung.edu.ua

Анотація. У роботі встановлено наскрізний математичний зв'язок між лінійною інтерполяцією (LERP), алгоритмом де Кастельє, поліномами Бернштейна та матричною формою кривих Безьє. Доведено теорему еквівалентності рекурсивного алгоритму де Кастельє та аналітичної форми Бернштейна методом математичної індукції. Виведено матрицю переходів Безьє М, формулу похідної кривої та параметричне рівняння швидкості CSS-анімації. Експериментально підтверджено, що аналітичне ядро на основі поліномів Бернштейна у 3 рази ефективніше за геометричний алгоритм де Кастельє.

Ключові слова: криві Безьє, лінійна інтерполяція, алгоритм де Кастельє, поліноми Бернштейна, матриця Безьє, похідна кривої, Canvas API, SVG, CSS cubic-bezier, Frontend-інженерія.

1. Вступ та актуальність

Сучасні розробники у сфері Frontend щодня використовують криві Безьє у CSS-анімаціях, SVG-ілюстраціях та Canvas-рендерингу, проте здебільшого не усвідомлюють їхньої справжньої математичної природи. Між тим браузерні рушії Blink (Chromium) та WebKit (Safari) обчислюють ці криві безпосередньо за формулою Бернштейна [1], а базова математична теорія є невід'ємною частиною курсів аналітичної геометрії. Отже, існує прогалина між математичними знаннями студентів і практичними інструментами сучасної веброботи — ліквідація цієї прогалини й становить актуальність дослідження.

Мета роботи: встановити наскрізний математичний зв'язок від формули Бернштейна до реалізації у браузері, включаючи строгі доведення ключових тверджень.

Наукова новизна: вперше у контексті Frontend-інженерії систематизовано ланцюг LERP → де Кастельє → Бернштейн → матрична форма Безьє з виведенням матриці переходів, формули похідної та параметричного рівняння CSS-часу.

2. Лінійна інтерполяція (LERP) як атомарна операція

Нехай $P_0, P_1 \in \mathbb{R}^n$ — два вектори, $t \in [0, 1]$. Лінійна інтерполяція визначається відображенням:

$$\text{lerp}(P_0, P_1, t) = (1 - t)P_0 + tP_1 \quad (1)$$

Формула (1) є класичною опуклою комбінацією: (1) ваги $(1-t)$ та t є невід'ємними і в сумі дають 1; (2) результат lerp належить опуклій оболонці $\text{conv}\{P_0, P_1\}$; (3) для будь-якого афінного

відображення A виконується: $\text{lerp}(A(P_0), A(P_1), t) = A(\text{lerp}(P_0, P_1, t))$. Ключовий наслідок: LERP є атомарною операцією, і всі криві вищих порядків зводяться до послідовного рекурсивного застосування формули (1).

3. Алгоритм де Кастельє та теорема еквівалентності

Нехай задано $n+1$ контрольних точок $b_0^\circ, b_1^\circ, \dots, b_n^\circ \in \mathbb{R}^n$. Алгоритм де Кастельє [2] визначає трикутну рекурсивну схему:

$$b_i^r(t) = (1-t) \cdot b_i^{r-1}(t) + t \cdot b_{i+1}^{r-1}(t), \quad r = 1..n, \quad i = 0..n-r \quad (2)$$

де крива Безьє є верхівкою трикутника: $B(t) = b_0^n(t)$.

Теорема 1 (еквівалентність де Кастельє та Бернштейна). Для кривої n -го порядку: $b_0^n(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \cdot b_i^\circ$, де $B_i^n(t) = C(n,i) \cdot t^i \cdot (1-t)^{n-i}$.

Доведення проводиться методом математичної індукції за n . База ($n=1$): $b_0^1(t) = (1-t) \cdot b_0^\circ + t \cdot b_1^\circ = b_0^1 \cdot b_0^\circ + b_1^1 \cdot b_1^\circ$. Крок індукції: нехай твердження виконується для порядку $n-1$. Застосовуючи гіпотезу до b_0^{n-1} і b_1^{n-1} , після зміни індексу та тотожності Паскаля $C(n-1,i) + C(n-1,i-1) = C(n,i)$ отримуємо $\sum_i C(n,i) \cdot t^i \cdot (1-t)^{n-i} \cdot b_i^\circ$. ■

Для кубічної кривої ($n=3$) алгоритм виконує 6 операцій LERP: складність $O(n^2)$ за часом та $O(n)$ за пам'яттю [3].

4. Поліноми Бернштейна та матрична форма

Кубічна крива Безьє через поліноми Бернштейна ($n=3$):

$$B(t) = (1-t)^3 \cdot P_0 + 3t(1-t)^2 \cdot P_1 + 3t^2(1-t) \cdot P_2 + t^3 \cdot P_3 \quad (3)$$

Поліноми $B_i^3(t)$ мають три строгі властивості: (1) partition of unity — $\sum_i B_i^n(t) = 1$ для всіх $t \in [0,1]$ (наслідок біноміальної теореми); (2) невід'ємність — $B_i^n(t) \geq 0$ при $t \in [0,1]$; (3) крайові умови — $B_i^n(0) = \delta_{i0}$, $B_i^n(1) = \delta_{in}$.

Розкладаючи (3) за степенями t і позначаючи $T(t) = [t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1]^T$, отримуємо матричну форму:

$$B(t) = [t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1] \cdot M \cdot [P_0 \quad P_1 \quad P_2 \quad P_3]^T \quad (4)$$

де матриця переходів Безьє M :

$$M = [[-1, 3, -3, 1], [3, -6, 3, 0], [-3, 3, 0, 0], [1, 0, 0, 0]]$$

Матриця M є невиродженою ($\det M = 1 \neq 0$), що дозволяє переходити між базисом Бернштейна та степеневим поліноміальним базисом. Похідна кривої Безьє n -го порядку є кривою порядку $n-1$:

$$B'(t) = n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) \cdot (P_{i+1} - P_i) \quad (5)$$

Вектор $B'(t)$ є дотичним до кривої в точці $B(t)$: при $t=0$ дотична визначається першим ребром контрольного полігону $B'(0) = n(P_1 - P_0)$, при $t=1$: $B'(1) = n(P_n - P_{n-1})$.

5. Параметричне рівняння CSS-анімації

У CSS властивість cubic-bezier фіксує $P_0=(0,0)$ та $P_3=(1,1)$. Нехай $P_1=(c_{1x}, c_{1y})$, $P_2=(c_{2x}, c_{2y})$. Підставляючи у (3):

$$B_x(t) = 3(1-t)^2 t \cdot c_{1x} + 3(1-t)t^2 \cdot c_{2x} + t^3 \quad (6)$$

$$B_y(t) = 3(1-t)^2 t \cdot c_{1y} + 3(1-t)t^2 \cdot c_{2y} + t^3 \quad (7)$$

де $B_x(t)$ — нормований час, $B_y(t)$ — прогрес анімації. Миттєва швидкість прогресу анімації відносно нормованого часу:

$$dB_y/dB_x = B_y'(t) / B_x'(t) \quad (8)$$

Нульовий знаменник $B_x'(t)=0$ відповідає точці зупинки (ефекти bounce/overshoot) — це можливе лише якщо c_{1x} або $c_{2x} \notin [0,1]$ [4]. Формула (8) дозволяє прогнозувати динаміку

інтерфейсу на етапі проектування, а не підбирати параметри емпірично. Наприклад: `ease` \equiv `cubic-bezier(0.25, 0.1, 0.25, 1.0)` — умови узгодженості $V_x(0)=0$, $V_x(1)=1$ виконані автоматично.

6. Реалізація та порівняння продуктивності

Для верифікації теоретичних результатів розроблено два обчислювальних ядра мовою C (близькою до реальних рушіїв Blink/WebKit):

Аналітичне ядро (`bezierBernstein`): пряма розгортка поліномів Бернштейна. Використовує заздалегідь обчислені коефіцієнти матриці M , що зводить складність обчислень до $O(1)$.

Геометричне ядро (`bezierDeCasteljau`): триступенева лінійна інтерполяція за алгоритмом де Кастельє. Є універсальним для кривої будь-якого порядку, але вимагає $O(n^2)$ операцій.

Тестування проведено на архітектурі Zen 4 при 10^8 ітераціях для кожного алгоритму. Аналітичне ядро показало прискорення у 3 рази порівняно з геометричним. Причина: зменшення кількості операцій запису/читання проміжних результатів у стеку та ефективніше використання ресурсів процесора при переході до $O(1)$ [3].

Встановлено, що функції Canvas API `bezierCurveTo()`, SVG-команда `C` та CSS `cubic-bezier()` є синтаксичним цукром над єдиною C-функцією безпосередньо у браузерному рушії [4, 5]. Усі три виклики мають складність $O(1)$ і спираються на одне аналітичне ядро.

7. Висновки

1. Встановлено наскрізний математичний зв'язок між аналітичною геометрією та Frontend-інженерією за ланцюгом: LERP \rightarrow де Кастельє \rightarrow Бернштейн \rightarrow матрична форма Безьє.

2. Методом математичної індукції доведено теорему еквівалентності рекурсивного алгоритму де Кастельє та аналітичної форми Бернштейна; виведено матрицю переходів M та формулу похідної кривої.

3. Отримано формулу (8) для диференціальних характеристик CSS-анімацій, що дозволяє прогнозувати ефекти bounce та overshoot на етапі розробки.


4. Експериментально підтверджено, що перехід від рекурсивного рендерингу до прямої аналітичної розгортки зводить складність до $O(1)$ і забезпечує триразове прискорення.

Література

1. Bernstein S. N. Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités // Communications de la Société mathématique de Kharkow. — 1912. — Vol. 13. — P. 1–2.
2. de Casteljau P. Outillage méthodes calcul. — Paris : André Citroën Automobiles SA, 1959.
3. Farin G. Curves and Surfaces for CAGD: A Practical Guide. — 5th ed. — San Francisco : Morgan Kaufmann, 2002. — 520 p.
4. W3C CSS Easing Functions Level 1 [Електронний ресурс]. — Режим доступу: <https://www.w3.org/TR/css-easing-1/> (дата звернення: 28.04.2025).
5. MDN Web Docs. CanvasRenderingContext2D: bezierCurveTo() method [Електронний ресурс]. — Режим доступу: https://developer.mozilla.org/en-US/docs/Web/API/Canvas_API (дата звернення: 28.04.2025).

МЕТОДИ ОЦІНКИ ЗНОСОТРИВКОСТІ МАТЕРІАЛІВ ЗА УМОВ УДАРНО-АБРАЗИВНОГО ЗНОШУВАННЯ

Коваль Віталій Володимирович
НБ 24-2/_Інститут нафтогазової інженерії
vitalii.koval-hr241@nung.edu.ua

Науковий керівник: Тирлич Володимир Васильович , к.т.н, доцент кафедри ФМН,
volodymyr.tyrlych@nung.edu.ua

В доповіді розглядається проблема оцінки зносотривкості матеріалів, що працюють в умовах ударно-абразивного зношування, характерних для бурового обладнання [2, 3]. Проаналізовано основні механізми руйнування поверхні, зокрема мікрорізання та втомне викришування під дією ударних навантажень [3, 7]. Особливу увагу приділено сучасним методам випробувань, які дозволяють моделювати реальні умови експлуатації, зокрема ударно-абразивному тесту, методу струменевої ерозії та стандарту ASTM G65 [1, 5]. Обґрунтовано доцільність комплексного підходу до оцінки зносостійкості матеріалів з урахуванням їх мікроструктури та умов роботи [4].

Вступ

У сучасній нафтогазовій промисловості проблема зносотривкості матеріалів бурового обладнання набуває особливої актуальності [2]. Це пов'язано з екстремальними умовами експлуатації, в яких працюють породоруйнівні інструменти та елементи гідравлічних систем [3]. Буріння супроводжується поєднанням ударних навантажень та абразивного середовища, що формує складні механізми зношування [7].

Зношування бурового обладнання має не лише технічне, а й значне економічне значення. Передчасний вихід з ладу інструменту спричиняє простої, пов'язані з необхідністю підйому та заміни бурильної колони, що може тривати десятки годин. Це призводить до значних фінансових втрат, особливо в умовах морського буріння. Таким чином, підвищення зносотривкості матеріалів і правильний вибір методів її оцінки є ключовими завданнями.

Особливості ударно-абразивного зношування

Ударно-абразивне зношування є складним фізико-механічним процесом, який поєднує декілька механізмів руйнування матеріалу. Основними з них є [3, 7]:

- мікрорізання поверхні твердими частинками;
- пластична деформація;
- втомне викришування під дією повторюваних ударів.

Згідно з сучасними уявленнями трибології, зношування не є виключно властивістю матеріалу. Воно визначається взаємодією системи «матеріал – середовище – навантаження» [2]. Зокрема, твердість матеріалу відіграє важливу роль у протидії абразивному зношуванню, однак при наявності ударних навантажень ця залежність істотно ускладнюється.

Важливим фактором є також мікроструктура матеріалу. Розмір зерен, розподіл зміцнюючих фаз і характер карбідних включень визначають здатність матеріалу протистояти розвитку тріщин [4]. Крім того, кут атаки абразивних частинок впливає на механізм руйнування: при нормальному ударі переважає крихке викришування, тоді як при малих кутах – процеси різання та пластичної деформації [7].

Методи оцінки зносотривкості матеріалів

Для адекватної оцінки експлуатаційного ресурсу бурового обладнання необхідно застосовувати методи, що максимально точно відтворюють реальні умови роботи. У роботі

розглянуто три основні підходи.

1. Випробування на ударно-абразивне зношування

Метод ударно-абразивного зношування (Impeller-Tumbler) призначений для моделювання умов роботи бурових доліт [5]. Його сутність полягає у взаємодії зразка з абразивними частинками, які прискорюються за допомогою ротора або імпелера.

Основними параметрами випробування є:

- кут атаки абразиву;
- швидкість руху частинок (енергія удару);
- тип та розмір абразиву.

Зміна кута атаки дозволяє моделювати різні режими роботи інструменту. При перпендикулярному ударі домінує механізм утворення тріщин і викришування, тоді як при косому – мікрорізання [5].

Даний метод дозволяє не лише оцінити втрату маси матеріалу, але й дослідити мікроструктурні зміни поверхні. Це особливо важливо для визначення схильності матеріалу до крихкого руйнування, що є критичним для твердосплавних елементів бурових доліт.

2. Метод струменевої ерозії (Slurry Jet Erosion Test)

Цей метод використовується для оцінки зносостійкості елементів гідравлічного обладнання, зокрема клапанів бурових насосів. Він моделює вплив потоку рідини, що містить абразивні частинки [3].

Сутність методу полягає у спрямуванні струменя суспензії під заданим кутом на поверхню зразка. До складу суспензії входять:

- рідка фаза (вода або масло);
- тверді частинки (пісок, оксид алюмінію).

Основні параметри випробування:

- швидкість потоку;
- концентрація абразиву;
- розмір частинок;
- кут падіння струменя.

Даний метод дозволяє оцінити не лише механічне зношування, але й взаємодію ерозії та корозії. Це особливо важливо, оскільки бурові розчини можуть бути хімічно активними та прискорювати руйнування матеріалу.

3. Стандартний метод ASTM G65

Метод ASTM G65 («сухий пісок – гумове колесо») є одним із найбільш поширених стандартизованих методів оцінки абразивного зношування [1]. Він застосовується для первинного відбору матеріалів і контролю якості.

Принцип методу полягає у наступному:

- гумове колесо обертається з заданою швидкістю;
- зразок притискається до його поверхні;
- у зону контакту подається сухий абразивний матеріал.

У процесі випробування абразив викликає інтенсивне мікрорізання поверхні. Основним показником є втрата об'єму матеріалу, яка використовується для оцінки зносостійкості.

Перевагами методу є:

- висока відтворюваність результатів;
- стандартизованість;
- простота реалізації.

Водночас він не враховує ударні навантаження, тому не може повністю відтворити умови

роботи бурових інструментів. У зв'язку з цим його доцільно використовувати як етап попереднього скринінгу.

Аналіз та порівняння методів

Жоден із розглянутих методів не є універсальним [2, 3]. Кожен із них відтворює лише окремі аспекти процесу зношування:

- ударно-абразивний метод моделює динамічні навантаження;
- струменева ерозія – роботу в рідкому середовищі;
- ASTM G65 – чисто абразивне зношування.

Тому для отримання достовірних результатів необхідно застосовувати комплексний підхід. Особливо важливо враховувати специфіку роботи різних елементів бурового обладнання:

- для доліт ключовим є опір ударному руйнуванню;
- для клапанів – ерозійна стійкість у потоці;
- для корпусних деталей – загальна абразивна стійкість.

Роль мікроструктури матеріалу

Мікроструктурні характеристики матеріалу мають визначальний вплив на його поведінку в умовах зношування. Гетерогенні матеріали, такі як твердосплавні композити, демонструють складну залежність між твердістю та в'язкістю руйнування [4, 7].

Оптимальний матеріал повинен забезпечувати баланс між:

- високою твердістю (для протидії абразиву);
- достатньою в'язкістю (для запобігання крихкому руйнуванню).

Комплексні випробування дозволяють визначити цей баланс і підібрати матеріал, що найкраще відповідає умовам експлуатації.

Висновки

1. Зносотривкість матеріалів визначається не лише їх властивостями, а й умовами експлуатації, що вимагає системного підходу до її оцінки.
2. Універсального методу випробувань не існує, тому необхідно застосовувати комплекс різних методик.
3. Метод ударно-абразивного зношування є найбільш інформативним для оцінки матеріалів бурових доліт.
4. Метод струменевої ерозії ефективно моделює умови роботи гідравлічних систем бурового обладнання.
5. Стандарт ASTM G65 доцільно використовувати для первинного відбору матеріалів і контролю якості.
6. Мікроструктура матеріалу відіграє ключову роль у формуванні його зносостійкості.
7. Комплексне застосування методів дозволяє підвищити надійність бурового обладнання та зменшити економічні втрати [2, 4].

Література

[1] ASTM International. ASTM G65-16(2021) Standard Test Method for Measuring Abrasion Using the Dry Sand/Rubber Wheel Apparatus. West Conshohocken : ASTM International, 2021. URL: <https://www.astm.org/g0065-16r21.html>

[2] Rabinowicz E. Friction and Wear of Materials. 2nd ed. New York : John Wiley & Sons, 1995.

[3] Hutchings I. M., Shipway P. Tribology: Friction and Wear of Engineering Materials. 2nd ed. Oxford : Butterworth-Heinemann, 2017.

- [4] Zum Gahr K.-H. *Microstructure and Wear of Materials*. Amsterdam : Elsevier, 1987.
- [5] Ratia V., Valtonen K., Kuokkala V.-T. Surface deformation of steels in impact-abrasion // *Wear*. 2013. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0043164813000161>
- [6] Lindroos M. et al. The effect of impact conditions on wear behaviour of steels // *Wear*. 2015.
- [7] Kosel T. H. Abrasive wear in multiphase microstructures // *Wear*. 1981.
- [8] Pejaković V. et al. Abrasion resistance of materials using ASTM G65 // *Tribologia*. 2018.

ВПЛИВ РЕЛЬЄФУ, ГЕОГРАФІЧНИХ ТА КЛІМАТИЧНИХ УМОВ НА ЕФЕКТИВНІСТЬ СОНЯЧНИХ ПАНЕЛЕЙ

Коляджин Тетяна Іванівна

ГЗ-25-1, Інститут архітектури та будівництва "ІФНТУНГ-ДонНАБА"

tetiana.koliadzhyn-hz251@nung.edu.ua

Науковий керівник: Мазур Тетяна Михайлівна^{0000-0002-4047-832X}, доктор філософії, доц. кафедри ФМН, tetiana.mazur@nung.edu.ua

В доповіді розглядається вплив рельєфу місцевості, географічного положення та кліматичних умов на ефективність функціонування сонячних панелей. Актуальність теми зумовлена зростанням енергоспоживання, необхідністю зменшення викидів CO₂ та активним розвитком відновлюваної енергетики, зокрема сонячної. Сьогодні сонячна енергетика є одним із найважливіших напрямів розвитку відновлюваної енергетики. Але ефективність сонячних панелей залежить не лише від їхньої конструкції чи матеріалу, а й дуже сильно – від природних умов, у яких вони працюють [1,2].

Метою роботи є аналіз впливу природних чинників на продуктивність фотоелектричних систем. Для досягнення мети поставлено такі завдання: дослідити роль сонячної інсоляції, оцінити вплив атмосферної маси, проаналізувати значення рельєфу, географічної широти та температури, а також визначити оптимальні умови для роботи сонячних електростанцій.

Сонячна панель (фотоелектричний модуль) – це пристрій, що перетворює енергію сонячного випромінювання в електричну. Ефективність її роботи залежить як від властивостей матеріалів, так і від зовнішніх природних умов [2]. Основні елементи включають: алюмінієву раму, загартоване скло, герметизуючу плівку, фотоелектричні комірки, задню підкладку, розподільчу коробку (рис. 1).

Загальний ланцюжок принципу роботи: сонце → атмосфера → рельєф → панель → електроенергія. Ця схема добре показує, що на панель впливає не тільки Сонце. Між джерелом випромінювання і самою панеллю є ще атмосфера, а також умови місцевості, тобто рельєф, орієнтація поверхні, можливе затінення і клімат.

Ефективність сонячної панелі визначається двома великими групами чинників: властивостями самих фотоелектричних матеріалів і зовнішніми природними умовами.

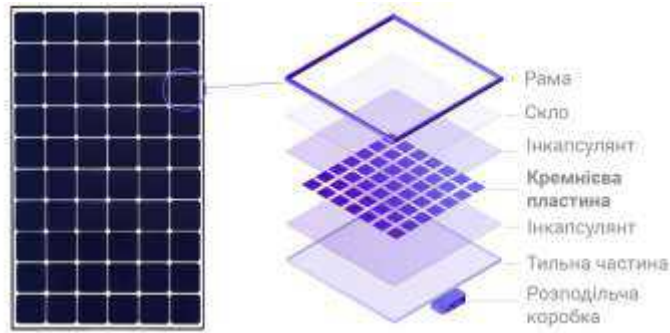


Рис. 1. Будова соняної панелі

Одним із ключових параметрів є сонячна інсоляція – потік сонячного випромінювання, що досягає поверхні Землі. Таблиця 1 відображає стандартні умови випробування фотоелектричних перетворювачів, які прийняті для коректного порівняння їхніх характеристик та визначення номінальних параметрів. Зокрема, густина сонячного випромінювання на рівні 1000 Вт/м² відповідає умовам інтенсивного сонячного освітлення опівдні при ясному небі, температура фотоелемента 25 °С вважається еталонною для визначення ефективності, оскільки реальні робочі температури зазвичай є вищими і призводять до зниження ККД. Атмосферна маса AM1.5 характеризує середню довжину шляху сонячного випромінювання через атмосферу, що відповідає типовим умовам для помірних широт, а спектральний розподіл AM1.5 враховує поглинання та розсіювання світла в атмосфері. Використання цих стандартизованих параметрів дозволяє об’єктивно оцінювати ефективність сонячних елементів, порівнювати різні технології між собою та прогнозувати їхню роботу в реальних умовах експлуатації [2,3].

Таблиця 1. Стандартні умови випробування фотоелектричних перетворювачів

Параметр	Позначення	Стандартне значення
Густина сонячного випромінювання	G	1000 Вт/м²
Температура фотоелемента	T	25 °C
Атмосферна маса	AM	1.5
Спектральний розподіл випромінювання	—	AM 1.5 спектр

Наступний важливий показник – це коефіцієнт корисної дії, або ККД сонячної панелі, який визначають за формулою [3]:

$$\eta = \frac{P_{max}}{P_{in}} = \frac{V_m I_m}{GA},$$

де V_m та I_m – напруга та струм у точці максимальної потужності, G – густина сонячного випромінювання (Вт/м²), A – площа фотоелемента.

ККД показує, яка частина сонячної енергії перетворюється в електричну. Іншими словами, якщо на панель падає певна кількість сонячної енергії, то лише частина її перетворюється в корисну електричну потужність, а решта втрачається – наприклад, через нагрівання або інші фізичні процеси. Тому реальна продуктивність сонячної електростанції визначається не лише паспортним ККД модуля, а сукупністю багатьох факторів, серед яких дуже важливі саме природні умови експлуатації.



Рис. 2. Типи панелей та їхній ККД

З літературних джерел [1-4] взято порівняння різних типів панелей стосовно їхніх ККД (рис. 2). Найвища ефективність характерна для монокристалічних панелей 18-23%.

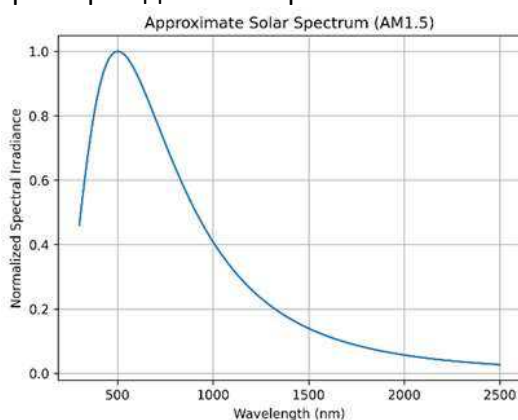


Рис. 3. Спектральний розподіл сонячного випромінювання для стандартних умов AM1.5 у діапазоні 300–2500 нм.

Важливим фактором є також атмосферна маса (Air Mass), яка визначає довжину шляху сонячного випромінювання в атмосфері. Чим нижче Сонце над горизонтом, тим довший цей шлях. А це означає, що в атмосфері посилюються процеси поглинання та розсіювання випромінювання. Зі збільшенням повітряної маси пряме випромінювання зменшується згідно з наближеною формулою [3]:

$$I = 1,353 \times 0,7^{AM^{0,678}}$$

На рис. 3 можемо побачити спектральний розподіл сонячного випромінювання для стандартних умов AM1.5 у діапазоні 300–2500 нм. Також при великому значенні атмосферної маси до панелі доходить менше короткохвильового, більш енергійного випромінювання, а в спектрі починає переважати червона частина. Взавши це до уваги, найкращою частиною доби є день, де показник рівний 1 – 1,5 (таблиця 2).

Таблиця 2. Вплив атмосферної маси (AM) та часу доби на спектральний склад сонячного випромінювання і ефективність фотоелектричних перетворювачів

Час доби	AM	Характеристика спектра	Ефективність

Ранок/вечір	AM>2	Зміщення в червону зону, розсіювання синього світла	Низька
день	AM 1.0 – 1.5	Повний спектр, максимальна концентрація фотонів	Максимальна

На рис. 4. спостерігаємо залежність сонячного випромінювання від повітряної маси: чим менша повітряна маса, тим сильніше сонячне випромінювання.

Рельєф місцевості суттєво впливає на ефективність роботи сонячних панелей. У північній півкулі найбільш ефективними є південні схили, тоді як низини та ущелини можуть спричинити значні втрати через затінення [5]. Таблиці 3,4 наведені для місцевості в Україні. Оскільки ми живемо у північній півкулі, найбільш ефективними для нас є південні схили. Далі за спаданням відносної ефективності йдуть рівнини, східні, або західні схили, а також низини, або ущелини.

Стосовно затінення, то навіть невелика гора на горизонті здатна забрати у станції 2-3 години найбільш ефективного ранкового, або вечірнього сонця. На великих висотах атмосфера чистіша, тому втрати випромінювання менші. Наприклад, на висоті близько 2000 метрів інтенсивність сонячного випромінювання може бути на 10–20% більшою вищою (таблиця 3) [5].

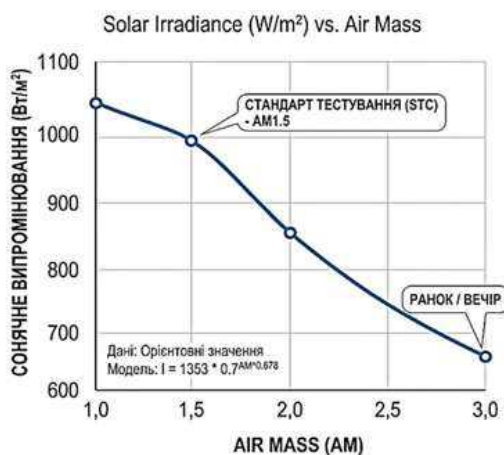


Рис. 4. Залежність сонячного випромінювання від повітряної маси.

Таблиця 3. Вплив типу рельєфу місцевості на відносну ефективність роботи сонячних фотоелектричних установок

Тип рельєфу	Відносна ефективність	
Південний схил (оптимальний)	100%	
Рівнина	90–95%	
Східний / Західний схил	75–85%	
Ущелини / Низини	60–70%	

Таблиця 4. Рекомендовані кути нахилу сонячних панелей залежно від режиму роботи та

географічної широти місцевості

Режим роботи	Рекомендований кут
Літній максимум	30° – 35°
Зимовий максимум	60°– 70°
Універсальний	30°– 45°
Широта місцевості	48°– 50°

Оптимальний кут нахилу панелей зазвичай відповідає географічній широті місцевості. Для західних регіонів України він становить приблизно 35–40°. Відхилення від оптимального кута може зменшувати річний виробіток електроенергії на 3–5% (таблиця 4) [6,7]. Однак навколишня поверхня також допомагає: наприклад, звичайний сніг відбиває 80-90% світла назад на панелі. Це явище називається альбедо. За розрахунками додаткова енергія від снігу для двосторонніх панелей складає аж 24%. Тобто з 400 до 496 Вт.

Кліматичні фактори також відіграють важливу роль. Підвищення температури фотоелементів призводить до зниження їхньої ефективності приблизно на 0,4–0,5% на кожен градус понад 25 °C [6,7]. Хмарність, вологість та опади додатково впливають на рівень генерації електроенергії (таблиця 5).

Таблиця 5. Вплив кліматичних факторів на ефективність роботи сонячних фотоелектричних установок

Кліматичний фактор	Механізм впливу	Втрати / Зміни (%)
Спека (понад 25°C)	Падіння напруги	-0.3%... -0.5 на кожний 1°C
Холод (нижче 25°C)	Зростання напруги та струму	+0.1% ... +0.3% на кожний 1°C
Снігопад / Щільні хмари	Блокування прямого світла	-50% ... -100%
Пил	Затінення осередків	-2% ... -15%

Аналіз умов України показав, що найсприятливішими для розвитку сонячної енергетики є південні регіони, де рівень інсоляції на 30–40% вищий, ніж у північних областях. Водночас західні регіони характеризуються більшою хмарністю та складним рельєфом, що знижує ефективність великих сонячних електростанцій (таблиця 6).

Таблиця 6. Порівняльна характеристика сонячного енергетичного потенціалу північних та південних регіонів України

Показник	Північ України	Південь України
Сонячна радіація	~1100 кВт·год/м ² на рік	~1400–1500 кВт·год/м ² на рік
Сонячні години	1700–1800 год/рік	2100–2300 год/рік
Найкращі області	Чернігівська, Волинська	Одеська, Херсонська, Миколаївська

Отже, для підвищення ефективності сонячних електростанцій доцільно застосовувати

комплексний підхід, що включає оптимізацію розміщення панелей, корекцію кута нахилу, зменшення теплових втрат та врахування локальних природних умов. Це дозволяє суттєво підвищити енергетичну віддачу та економічну доцільність використання сонячної енергії.

Література

- [1] A. Luque, S. Hegedus, *Handbook of Photovoltaic Science and Engineering*, Wiley, 2011, 1132. 10.1002/9780470974704
- [2] M. A. Green, *Solar Cells: Operating Principles, Technology and System Applications*, Prentice-Hall, 1982, 288 p.
- [3] J. A. Duffie, W. A. Beckman, *Solar Engineering of Thermal Processes*, Wiley, 2013, 910 p. 10.1002/9781118671603
- [4] T. Markvart, L. Castañer, *Practical Handbook of Photovoltaics*, Elsevier, 2003, 694 p.
- [5] О. Ю. Березюк, *Енергоощадні технології в будівництві*. Вінниця: ВНТУ, 2020, 220 с.
- [6] D. Erbs, S. Klein, J. Duffie, Estimation of diffuse radiation fraction, *Solar Energy*, 28 (1982), 293–302.
- [7] N. Engerer, F. Mills, KPV clear-sky index for photovoltaics, *Solar Energy*, **105** (2014), 679–693.

ПАРАФУНКЦІЇ ТРИКУТНИХ МАТРИЦЬ

Крамар Євген Олександрович

АКП-24-1, ФАЕ

yevhen.kramar-akp241@nung.edu.ua

Науковий керівник: Семенчук Андрій Васильович <https://orcid.org/0000-0002-6910-1868>, к.ф.-м.н, доц. кафедри ФМН, andrii.semenchuk@nung.edu.ua

В доповіді розглядаються парафункції трикутних матриць
Нехай задано деяке числове поле K .

Означення 1. Трикутну таблицю чисел, які належать полю K

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \cdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_n \quad (1)$$

називають трикутною матрицею, а число n – її порядком.

Означення 2. Параперманентом трикутної матриці (1) називають число

$$\text{pper}(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \cdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_n = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \in P(n)} \prod_{s=1}^r \{a_{i(s), j(s)}\}$$

де $a_{i(s), j(s)}$ – ключовий елемент, який відповідає s -тій компоненті розбиття $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$.

Означення 3. Кожному елементу a_{ij} заданої трикутної матриці (1) поставимо у відповідність трикутну матрицю з цим елементом у лівому нижньому куті, яку називають рогом заданої трикутної матриці і позначають через $R_{ij}(A)$.

Очевидно, що ріг $R_{ij}(A)$ є трикутною матрицею $(i - j + 1)$ -го порядку, причому йому належать тільки ті елементи a_{rs} трикутної матриці (1), індекси яких задовольняють співвідношення $j \leq s \leq r \leq i$.

Вважають, що

$$\text{pper}(R_{01}(A)) = \text{pper}(R_{n,n+1}(A)) = 1.$$

Параперманенти, як і парадетермінанти [1] можна розкласти за елементами першого стовпця чи останнього рядка відповідно за формулами:

$$\text{pper}(A) = \sum_{r=1}^n \{a_{r1}\} \cdot \text{pper}(R_{n,r+1}),$$

$$\text{pper}(A) = \sum_{s=1}^n \{a_{ns}\} \cdot \text{pper}(R_{s-1,1}).$$

Література

[1] Заторський Р. А. Числення трикутних матриць та його застосування. Івано-Франківськ: Сімик, 2010, 508 с.

[2] Семенчук А. В. Періодичні рекурентні дроби 3-го порядку, Карпатські математичні публікації. – 2010. – Т.2, №1. – С.72-81.

МОДЕЛІ ЛАНЧЕСТЕРА

Крицький Владислав Андрійович

ПЗСІ-25-1 Факультет інформаційних технологій

vladyslav.krytskyi-pzs251@nung.edu.ua

Науковий керівник: Гураль Інеса Михайлівна, к.ф.-м.н., доцент кафедри ФМН, inesa.hural@nung.edu.ua

Одним із потужних інструментів пізнання та використання законів війни в теорії та практиці військової справи є математика. Ще у XVIII ст. Генріх Ллойд та Генрі Дітріха Бюлов заклали фундамент того, що ми сьогодні називаємо математичним моделюванням конфліктів. З приходом епохи Наполеонівських війн їхні ідеї застаріли. Основною причиною їхньої невдачі став так званий «геометризм». Під час Першої світової війни британський інженер Фредерік Вільям Ланчестер, натхненний сценаріями повітряних боїв, розробив систему диференціальних рівнянь, що описує динаміку зміни чисельності сил сторін у ході бойового зіткнення [1]. Запропоновані Ланчестером моделі (моделі Ланчестера) пройшли більш як сторічну історію розвитку і вони досі залишаються основою математичного моделювання збройних конфліктів [2,3].

Нехай є дві сторони, що беруть участь у бойових діях. Позначимо через $N_1(t)$, $N_2(t)$ чисельність військ першої та другої сторони на момент часу $t \geq 0$. Припустимо, що кожна з воюючих сторін перебуває в зоні дії вогневих засобів супротивника і що вогонь ведеться виключно по живій силі, яка бере безпосередню участь у бойових діях. Виключимо з розгляду небойові втрати та введення резервів. За таких припущень бойові втрати сторін можна вважати прямо пропорційними чисельності супротивника, тобто

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = -\beta_2 N_2, \\ \frac{dN_2}{dt} = -\beta_1 N_1, \end{cases}$$

де $\beta_1 > 0$ та $\beta_2 > 0$ – сталі параметри, які назвемо коефіцієнтами бойової ефективності сторін. Ці параметри можуть оцінюватися виходячи з ймовірностей ураження цілей.

Помножимо перше рівняння на $\beta_1 N_1$, друге – на $\beta_2 N_2$ і віднімемо отримане друге рівняння від отриманого першого. В результаті отримаємо рівняння $\frac{d}{dt} \left(\frac{\beta_1}{2} N_1^2 - \frac{\beta_2}{2} N_2^2 \right) = 0$, яке має інтеграл

$$\beta_1 N_1^2(t) - \beta_2 N_2^2(t) = \beta_1 N_1^2(0) - \beta_2 N_2^2(0) = C.$$

З цього рівняння однозначно визначається переможець.

При $C > 0$ перемагає перша сторона, при $C < 0$ – друга, а у випадку $C = 0$ сторони знищують один одного одночасно, і переможця немає (умова рівності сил $N_2(0) = N_1(0) \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}}$). Для перемоги важлива не тільки чисельність сторін на початку бойових дій $N_1(0)$, $N_2(0)$, але і їх вишкіл, якість їх озброєнь тощо (тобто коефіцієнти β_1 , β_2).

Так якщо $C > 0$, то $\beta_1 N_1^2(0) > \beta_2 N_2^2(0)$, і для перемоги другій стороні треба або збільшити початкову чисельність, або якість бойових дій, або і те і інше одночасно. Зауважимо, що ефект від збільшення коефіцієнта β_2 менше, ніж від такого ж збільшення $N_2(0)$ (входить в нерівність в другому ступені). Це так званий квадратичний закон бойових дій. Таким чином, для боротьби з удвічі чисельнішим противником потрібно вчетверо потужніша зброя, при триразовій чисельній перевазі - в дев'ять разів потужніша і т. д.

Систему рівнянь можна розв'язати методом виключення. Диференціюючи перше з рівнянь системи і приймаючи до уваги друге, отримаємо лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку

$$\frac{d^2 N_1}{dt^2} = \beta_1 \beta_2 N_1.$$

Загальний розв'язок цього рівняння $N_1(t) = C_1 e^{\sqrt{\beta_1 \beta_2} t} + C_2 e^{-\sqrt{\beta_1 \beta_2} t}$. Оскільки $\frac{dN_1}{dt} = -\beta_2 N_2 \Rightarrow N_2 = -\frac{1}{\beta_2} \frac{dN_1}{dt}$ і $N_2(t) = -\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}} (C_1 e^{\sqrt{\beta_1 \beta_2} t} - C_2 e^{-\sqrt{\beta_1 \beta_2} t})$. З початкових умов визначимо сталі і тоді отримаємо

$$\begin{aligned} N_1(t) &= N_1(0) ch \sqrt{\beta_1 \beta_2} t - N_2(0) \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}} sh \sqrt{\beta_1 \beta_2} t, \\ N_2(t) &= N_2(0) ch \sqrt{\beta_1 \beta_2} t - \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}} N_1(0) sh \sqrt{\beta_1 \beta_2} t. \end{aligned}$$

Нехай динаміка чисельності ворогуючих сторін визначається не тільки темпом втрат, обумовлених бойовими діями зі сторони противника, а і швидкістю зменшення складу через причини, безпосередньо не пов'язані з бойовими діями (хвороби, дезертирство), а також швидкістю поступлення підкріплень, яка вважається деякою заданою функцією часу. При цих припущеннях для $N_1(t)$, $N_2(t)$ отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = -\alpha_1(t) N_1 - \beta_2(t) N_2 + \gamma_1(t), \\ \frac{dN_2}{dt} = -\alpha_2(t) N_2 - \beta_1(t) N_1 + \gamma_2(t). \end{cases}$$

Коефіцієнти $\alpha_{1,2}(t) \geq 0$ характеризують швидкість втрат із-за не бойових причин, $\beta_{1,2}(t) \geq 0$ коефіцієнтами бойової ефективності сторін, $\gamma_{1,2}(t) \geq 0$ – швидкістю поступлення підкріплень.

Розглянемо реальний історичний приклад – битву за Іодзіму. Це одна з найзапекліших битв, що тривала з 16 лютого до 26 березня 1945 року, на завершальній фазі Другої світової війни на Тихоокеанському театрі воєнних дій між військами Японської імперії і США за контроль над островом Іото, більш знаним як Іодзіма, з групи островів Огасавара. Ця битва є класичним прикладом для перевірки квадратичного закону Ланчестера. У 1954 році аналітик Дж. Г. Енгель довів [4], що динаміка втрат у цій битві майже ідеально відповідає теоретичним рівнянням Ланчестера.

Бойова ситуація полягає в тому, що американські війська оточили та захопили Іодзіму. Під час операції японські війська не були ні виведені, ні підкріплені. Після завершення бою практично всі японські війська були знищені. Протягом перших кількох днів бою американські війська висадили різну кількість підкріплень. Оперативні втрати (викликані аваріями, погодою тощо, а не діяльністю противника) були незначними і ними можна було знехтувати. За цих обставин рівняння Ланчестера є такими:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = -\beta_2 N_2 + \gamma_1(t), \\ \frac{dN_2}{dt} = -\beta_1 N_1. \end{cases}$$

де $N_1(t)$ – чисельність американських військ (морська піхота), $N_2(t)$ – чисельність японських військ, $\gamma_1(t)$ – швидкість висадки підкріплень США, β_2 – бойова ефективність японців, β_1 – бойова ефективність американців.

Розв'язок цієї системи рівнянь для будь-якої інтегровної функції $\gamma_1(t)$ має вигляд:

$$\begin{aligned} N_1(t) &= N_1(0)ch\sqrt{\beta_1\beta_2}t - N_2(0)\sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}}sh\sqrt{\beta_1\beta_2}t + \int_0^t ch\sqrt{\beta_1\beta_2}(t-s)\gamma_1(s)ds \\ N_2(t) &= N_2(0)ch\sqrt{\beta_1\beta_2}t - \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}}N_1(0)sh\sqrt{\beta_1\beta_2}t - \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}}\int_0^t sh\sqrt{\beta_1\beta_2}(t-s)\gamma_1(s)ds \end{aligned}$$

Початкова чисельність американських військ - 54000, пізніше зросла до 73000 через підкріплення. Загальні втрати військ США становили 27 909 чоловік, серед яких 6 825 полягли у боях, а решта отримали поранення різного ступеня тяжкості. Загинуло 20 703 солдат з японського контингенту з 20 933 чоловік. Кількість японських полонених склала 216.

Енгель розрахував коефіцієнти ефективності на основі реальних даних $\beta_1 = 0,0106$, $\beta_2 = 0,0544$. Японський солдат був у 5,13 рази ефективнішим в обороні, ніж американський у наступі. Високі втрати США свідчать про те, що коефіцієнт ефективності японських військ у обороні був дуже високим, але величезна чисельна перевага США (понад 3:1) виявилася вирішальною, що і передбачає квадратичний закон. Енгель виявив, що теоретична крива втрат США, розрахована за моделлю, майже збігається з реальними щоденними звітами про втрати (похибка менше 5%).

Перша модель з лінійним законом, яку також називають Давньою битвою, припускає, що

битва складається з набору поєдинків один на один, типових для битв у ранній історії. Пара рівнянь, що описує давню битву, має вигляд

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = -\beta_2, \\ \frac{dN_2}{dt} = -\beta_1. \end{cases}$$

Помножимо перше рівняння на β_1 , друге – на β_2 і віднімемо отримане друге рівняння від отриманого першого. В результаті отримаємо рівняння $\frac{d}{dt}(\beta_1 N_1 - \beta_2 N_2) = 0$, яке має інтеграл

$$\beta_1 N_1 - \beta_2 N_2 = \beta_1 N_1(0) - \beta_2 N_2(0) = C$$

Другий лінійний закон описує неприцільний вогонь, де ефект власного вогню залежить не лише від чисельності власних сил, що вижили, але й від щільності цілей у протилежної сили. Оскільки вогонь не прицільний, ймовірність ураження цілі з іншого боку залежить від кількості таких цілей у заданій зоні. Пара диференціальних рівнянь у цьому випадку має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = -\beta_2 N_1 N_2, \\ \frac{dN_2}{dt} = -\beta_1 N_1 N_2. \end{cases}$$

Помножимо перше рівняння на β_1 , друге – на β_2 і віднімемо отримане друге рівняння від отриманого першого. В результаті отримаємо рівняння $\frac{d}{dt}(\beta_1 N_1 - \beta_2 N_2) = 0$, і знову отримаємо інтеграл

$$\beta_1 N_1 - \beta_2 N_2 = \beta_1 N_1(0) - \beta_2 N_2(0) = C$$

При $C > 0$ перемагає перша сторона, при $C < 0$ – друга, а у випадку $C = 0$ сторони знищують один одного одночасно, і переможця немає (умова рівності сил $\beta_1 N_1(0) = \beta_2 N_2(0)$). Для лінійних моделей стану якість (технологічна перевага) і кількість мають однакову вагу.

У попередніх моделях — прицільному вогні, вогні по певній зоні та Давній битві — обидві сторони застосовують однакову тактику та техніку стрільби; битви є симетричними. Асиметричні зіткнення виникають, коли дві сторони застосовують різну тактику. Одна з таких асиметричних бойових ситуацій виникає, коли регулярні сили держави воюють з партизанами або повстанцями, які застосовують тактику нерегулярної війни. З одного боку, партизани, які добре заховані в засідці або змішані з цивільним населенням, використовують прицільний вогонь по регулярних силах, які повністю відкриті для партизанів. З іншого боку, регулярні сили стріляють невибірково і тому можуть застосовувати лише вогонь по територіях з партизанами; ефективність регулярних сил залежить від щільності живих бійців партизанів. Оскільки кількість партизанів зменшується з виснаженням, важче захопити живу ціль, і тому ймовірність ураження живої цілі зменшується з цією кількістю. Якщо N_1 – це регулярні сили, а N_2 – партизани, тоді рівняння виснаження мають вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = -\beta_2 N_2, \\ \frac{dN_2}{dt} = -\beta_1 N_1 N_2, \end{cases}$$

Помножимо перше рівняння на $\beta_1 N_1$, друге – на β_2 і віднімемо отримане друге рівняння від отриманого першого. В результаті отримаємо рівняння $\frac{d}{dt}\left(\frac{\beta_1}{2} N_1^2 - \beta_2 N_2\right) = 0$, яке має інтеграл

$$\frac{\beta_1}{2} N_1^2(t) - \beta_2 N_2 = \frac{\beta_1}{2} N_1^2(0) - \beta_2 N_2(0) = C_1.$$

При $C_1 > 0$ перемагає армія, при $C_1 < 0$ – партизани, а при $C_1 = 0$ переможця немає (умова рівності сил $N_2(0) = N_1^2(0) \frac{\beta_1}{2\beta_2}$).

Поведінку функцій $N_1(t)$, $N_2(t)$ з часом також можна знайти. Так, для $N_1(t)$, маємо $\frac{dN_1}{dt} = C_1 - \frac{\beta_1}{2} N_1^2$, що рівносильно рівнянню

$$\frac{dN_1}{C_1 - \frac{\beta_1}{2} N_1^2} = dt.$$

Інтегруючи це рівняння, неважко знайти $N_1(t)$ і потім $N_2(t)$ як неявні функції часу.

Використання моделей Ланчестера для аналізу військових дій є корисним інструментом в наукових дослідженнях та військовому моделюванні. Сильні сторони моделей Ланчестера полягають у їхній здатності формалізувати комплексні військові дії та перетворювати їх на кількісні змінні, що можуть бути проаналізовані та використані для прогнозування битви.

Література

- [1] Lanchester F. W. Aircraft in warfare: the dawn of the fourth arm. London : Constable and Co. Ltd., 1916. 300 p
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/c2/Aircraft_in_Warfare.pdf
- [2] Rapoport A. Mathematicl Models in the Social and Behavioral Sciences. – N.Y. Wiley, 1983, p.507.
- [3] Фурсенко О.К., Черновол Н.М. Ланчестеровські моделі бойових дій. Збірник наукових праць Харківського національного університету Повітряних Сил. 2020. № 4(66). С. 85-91. <https://doi.org/10.30748/zhups.2020.66.12>.
- [4] Engel, J. H. (1954). A Verification of Lanchester’s Law. Journal of the Operations Research Society of America, 2(2), 163–171. <http://www.jstor.org/stable/166602>

АНАЛІЗ І СИНТЕЗ ЗМІННИХ СТАНУ ЕЛЕКТРИЧНИХ СИСТЕМ ЗА ДОПОМОГОЮ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Нумайко Тарас Григорович

студент групи ET-25-1, факультет автоматизації та енергетики

taras.numaiko-et251@nung.edu.ua

Науковий керівник: Шегда Любов Михайлівна, к. ф.-м. н., доцент кафедри ФМН, liubov.shehda@nung.edu.ua

Аналіз і синтез змінних стану електричних систем за допомогою диференціальних рівнянь є потужним інструментом для опису динаміки електричних кіл у часі. Такий підхід дозволяє перейти від класичних методів розрахунку (закони Кірхгофа) до системного моделювання через змінні стану, які характеризують енергію системи (наприклад, струми в індуктивностях і напруги на конденсаторах).

Диференціальні рівняння дають змогу:

- описувати перехідні процеси в колах;
- досліджувати стійкість системи;

- моделювати поведінку при зміні вхідних сигналів;
- виконувати комп'ютерне моделювання електричних систем.

Аналіз електричних систем (кіл) за допомогою диференціальних рівнянь базується на застосуванні законів Кірхгофа, що пов'язують напруги на елементах (R , L , C) та струми через них у часі. Це дозволяє моделювати перехідні процеси, визначаючи, як система переходить з одного стану в інший при вмиканні, вимиканні чи зміні параметрів.

Для контуру застосовують Другий закон Кірхгофа (сума напруг), а для вузлів — Перший закон Кірхгофа (сума струмів).

Визначається кількістю незалежних накопичувачів енергії (L або C). Наприклад, RL - або RC -кола описуються диференціальними рівняннями першого порядку, а RLC -кола — другого порядку:

- RC -коло (заряд конденсатора): $RC \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = U(t)$.
- RL -коло (зміна струму в котушці): $L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = U(t)$.
- RLC -коло (коливальна система): $L \frac{d^2q(t)}{dt^2} + R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t) = U(t)$.

Синтез електричної системи (мережі) за допомогою диференціальних рівнянь полягає у створенні схеми, яка відповідає заданим характеристикам (функції передачі або перехідному процесу), описуючи її законом Кірхгофа.

Тобто аналіз відповідає на питання: «Що буде з системою?», а синтез відповідає на питання: «Якою має бути система?»

Аналіз і синтез змінних стану електричних систем — це два взаємопов'язані підходи в теорії керування та електротехніці, які використовують *метод змінних стану* для опису й проектування систем.

Метод змінних стану дозволяє:

- звести складні електричні системи до систем диференціальних рівнянь першого порядку;
- зручно аналізувати багатовимірні системи;
- застосовувати чисельні методи та комп'ютерне моделювання;
- отримувати універсальний підхід до дослідження електричних процесів незалежно від складності схеми.

Метод змінного стану (state-space method) — це спосіб математичного опису та аналізу динамічних систем через систему диференціальних рівнянь першого порядку.

Суть методу:

1. Обирають набір змінних стану (наприклад, напруга на конденсаторі, струм через індуктивність).

2. Записують фізичні закони у вигляді диференціальних рівнянь. Використовують закони Кірхгофа, Ома, закони для L і C :

- для індуктивності: $u_L = L \frac{di}{dt}$,
- для конденсатора: $u_C = C \frac{du}{dt}$.

3. Записують систему у вигляді рівнянь першого порядку:

- рівняння стану: $x'(t) = f(x(t), u(t))$;

- рівняння виходу: $y(t) = g(x(t), u(t))$.

Отже, диференціальні рівняння використовуються як основа:

- вони описують швидкість зміни змінних стану (через похідні),
- вся модель системи зводиться до системи диференціальних рівнянь першого порядку,
- це дозволяє аналізувати перехідні процеси та поведінку системи в часі.

Тобто *метод змінних стану* – це представлення електричної системи у вигляді системи диференціальних рівнянь першого порядку.

Розглянемо простий приклад електричного кола RLC (послідовне з'єднання R , L , C) з джерелом напруги $u(t)$.

1. Вибір змінних стану

Обираємо:

- $x_1(t) = i(t)$ — струм у колі,
- $x_2(t) = u_C(t)$ — напруга на конденсаторі.

Тоді вектор стану: $x(t) = \begin{bmatrix} i(t) \\ u_C(t) \end{bmatrix}$.

2. Запис диференціальних рівнянь

За другим законом Кірхгофа: $u(t) = u_R + u_L + u_C$.

Підставляємо: $u_R = Ri(t)$, $u_L = L \frac{di}{dt}$. Отримуємо: $u(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt} + u_C(t)$.

Звідси: $\frac{di}{dt} = \frac{1}{L}(u(t) - Ri(t) - u_C(t))$.

Для конденсатора: $i(t) = C \frac{du_C}{dt} \Rightarrow \frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C}i(t)$.

3. Запис у вигляді системи стану

Отримуємо систему диференціальних рівнянь:
$$\begin{cases} x_1' = \frac{1}{L}(u(t) - Rx_1 - x_2), \\ x_2' = \frac{1}{C}x_1. \end{cases}$$

або у векторній формі: $x'(t) = Ax(t) + Bu(t)$, де диференціальні рівняння описують швидкість зміни змінних стану.

4. Висновок. У цьому прикладі:

- фізичні закони \rightarrow дають диференціальні рівняння,
- ці рівняння \rightarrow переписуються через змінні стану,
- похідні $\frac{di}{dt}$, $\frac{du_C}{dt}$ показують, як система змінюється в часі.

Таким чином, метод змінних стану прямо використовує диференціальні рівняння для опису динаміки електричної системи.

Література

[1] Карпов Ю.О. Теоретичні основи електротехніки. Перехідні процеси в ТЗЛ лінійних колах. Синтез лінійних кіл. Електричні та магнітні нелінійні кола : підручник / Ю. О. Карпов, Ю. Г.


Ведміцький, В. В. Кухарчук, С. Ш. Каців ; за ред. проф. Ю. О. Карпова. – Вінниця : ВНТУ, 2012. – 530 с.

[2] Маляр В.С. Теоретичні основи електротехніки : [підруч.]/В.С. Маляр. – Львів: Вид-во Львів. політехніки., 2018. –416 с

[3] Литвиненко В.А. Конспект лекцій з дисципліни «Основи теорії кіл» освітньо-професійної програми першого (бакалаврського) рівня вищої освіти зі спеціальності 172 «Телекомунікації та радіотехніка», укл. Кам'янске; ДДТУ, 2020 р. – 74 с.

ТЕРМОЕЛЕКТРИЧНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТЕПЛОВОЇ ЕНЕРГІЇ СОНЦЯ В ЕЛЕКТРИЧНУ

Ольхов Борис Олександрович
група ЕКО-25-1 Факультет природничих наук
e-mail:borys.olkhov-eko251@nung.edu.ua

Науковий керівник: Галушчак Мар'ян Олексійович , д.ф.-м.н, проф. кафедри ФМН, marian.halushchak@nung.edu.ua

Сонячна енергетика в поєднанні з термоелектрикою має сьогодні всі передумови, щоб частково вирішити енергетичні проблеми України, особливо по електропостачанню віддалених не електрифікованих осель, електроживленню приладів автоматики та моніторингу навантажень на трубопроводи і їх електрокорозійний захист, рекуперації теплової енергії газоперекачувальних станцій тощо. Системи сонячних батарей і термогенераторів з хімічними акумуляторами є практично єдиними, економічно придатними для живлення апаратури в умовах відсутності мережі центрального енергопостачання. На основі термоелектричних явищ створені термоелектричні генератори і холодильники, які характеризуються великим терміном служби (100000 год.) внаслідок відсутності швидкозношуваних рухомих частин, безшумністю і надійністю роботи, малою вагою і високою питомою енергоемністю, відсутністю забруднення навколишнього середовища, можливістю створення комбінованих систем електроживлення та опалення приміщень тощо.

Для ефективного перетворення теплової енергії в електричну необхідно мати термоелектричний матеріал, основним параметром якого є термоелектрична добротність Z ($Z = \alpha^2 \sigma / \chi$, де α – коефіцієнт термо-ЕРС, σ – питома електропровідність, χ – коефіцієнт теплопровідності). Основною перешкодою, що стоїть на шляху модифікації властивостей матеріалів для отримання максимальної термоелектричної добротності є те, що величини (α , σ , χ) пов'язані між собою. Зокрема, підвищуючи електропровідність матеріалу шляхом легування відбувається зменшення коефіцієнта термо-ЕРС та ріст теплопровідності.

Основним недоліком термоелектричних генераторів є їх відносно низька ефективність перетворення теплоти в електрику (зазвичай ~ 5-8 %). Це була і є сьогодні основна причина обмеження їх масового практичного використання. Однак, за останні десятиліття термоелектричні генератори стали ключовими елементами для пристроїв військової, медичної та аерокосмічної техніки. Також, сучасні дослідження вказують, що величезна кількість тепла викидається в навколишнє середовище Землі, причому більша частина його має занадто низьку температури для відновлення цієї енергії за допомогою звичайних електричних генераторів. Важливою для екології та зменшення використання видобувного палива є можливість відбору тепла відпрацьованих газів транспортних засобів, які працюють на двигунах внутрішнього згорання (автомобілі, морський та авіатранспорт), а також при роботі компресорів для

транспортування газу.

Наведені вище передумови стимулюють міжнародні дослідження в області систем накопичення енергії. Один із найбільш перспективних підходів накопичення енергії базується на використанні принципів термоелектрики.

Протягом дуже тривалого часу високі значення термоелектричної добротності ZT (визначає ефективність термоелектричного матеріалу), які дещо вищі одиниці, мали сполуки на основі телуриду вісмуту. За останні десятиліття пошук перспективних термоелектричних матеріалів підвищився завдяки створенню нових багатокомпонентних сполук та детальнішому розумінню фізичних процесів у низькорозмірних структурах. Для нових систем матеріалів прогноуються ZT, значно вищі за одиницю. Основною особливістю таких матеріалів є їхня низька теплопровідність, яка поєднується із добрими електричними властивостями.

В останні роки виник новий напрям покращення термоелектричних характеристик матеріалів, в якому було досягнуто прогресу і який дав новий імпульс відповідним дослідженням у цій області. Даний підхід полягає у використанні просторово-неоднорідних структур із включеннями, розміри яких порівняльні з характерними довжинами хвиль електронів і фононів, тобто знаходяться у нанометровій області. Зменшення розмірів системи до нанометрового масштабу викликає різкі відмінності в густині електронних станів, що створює нові можливості для варіації α , σ , χ квазінезалежно. Складові нанометрового розміру спричиняють квантово-розмірний ефект (КРЕ), який підвищує коефіцієнт потужності $\alpha^2\sigma$, а компонування внутрішніх границь в наноструктурі дозволяє зменшити теплопровідність в порівнянні з електропровідністю, що базується на відмінностях між фононною і електронною довжинами розсіювання.

Дана робота присвячена розробці нового способу одержання термоелектричних напівпровідникових матеріалів з високою термоелектричною добротністю та показано перспективність його використання на основі плюмбум телуриду в інтервалі робочих температур 400–850 К.

Встановлено основні шляхи покращення термоелектричних параметрів матеріалу через оптимізацію за рахунок зменшення теплопровідності та зростання електропровідності. Так, зокрема, вказано, що теплопровідність матеріалу визначається характером розсіювання фононів, яке можна зробити більш ефективним при легуванні ізовалентними чи гетеровалентними домішками у твердих розчинах.

Запропоновано нові підходи щодо використання сонячної енергії, які полягають у тому, що за допомогою орієнтованої геліостатом системи колекторів сонячну енергію перетворюють спочатку в теплову, носієм якої є рідина (неорганічна й нетоксична), а у подальшому частину цієї теплової енергії перетворюють в електричну за допомогою термогенератора спеціальної конструкції.

Структурна схема перетворення сонячної теплової енергії в електричну включає наступні головні складові:

- концентратор сонячного теплового випромінювання;
- термоелектричні генераторні модулі.

В ролі концентратора запропоновано використовувати плоско-лінійну лінзу Френеля, яка має дуже хороші технічні характеристики, а основне – є малочутливою до різкої зміни положення Сонця. Тому такий тип концентратора може встановлюватися стаціонарно. Фокус сконцентрованого сонячного та теплового випромінювання знаходиться не в точці, як в багатьох різноманітних концентраторів, а на прямій, яка розміщена безпосередньо під площиною плоско-лінійної лінзи Френеля.

Основний принцип роботи ТЕГ побудований на використанні ефекту Зеєбека. Робочою частиною ТЕГ є термоелемент (ТЕ), який складається з р- та n-віток напівпровідників, з'єднаних між собою металевим провідником. З метою збільшення робочої напруги, ТЕ з'єднані електрично послідовно, а для збільшення теплопровідності – паралельно, які затиснуті між двома керамічними пластинами. При різниці температур ΔT між поверхнями ТЕ, він створює напругу. Значення напруги прямо пропорційне різниці температур між поверхнями ТЕ та коефіцієнту Зеєбека:

$$V = \alpha(T_H - T_C) \quad (1)$$

де V – напруга ТЕ, T_H – температура гарячої сторони ТЕ, T_C – температура холодної сторони, α – коефіцієнт Зеєбека.

Електрична схема ТЕГ складається з джерела напруги V та внутрішнього опору $R_{вн}$. За структурою він схожий на акумулятори. Якщо опір навантаження R підключений через вихідні контакти ТЕГ і наявна різниця температур між поверхнями ТЕГ, то електричний струм проходить через опір навантаження і ТЕГ генерує електричну потужність P . Електроенергія, вироблена в ТЕГ прямо пропорційна різниці температур між поверхнями ТЕГ. Якщо внутрішній опір ТЕГ дорівнює опору навантаження ТЕГ ($R_{вн} = R$), то ТЕГ генерує максимальну потужність P_{max} , яка виражається наступним чином:

$$P_{max} = (\alpha^2 \Delta T^2) / (4R_{вн}) \quad (2)$$

Внутрішній опір ТЕГ $R_{вн}$ варіюється в залежності від температури:

$$R_{вн} = V_0 / I_{кз} \quad (3)$$

Кількість теплоти, яка подається на ТЕГ визначається:

$$Q_T = G_T * \rho_T * C_T * \Delta t_T \quad (4)$$

де G_T , ρ_T , C_T і Δt_T є витрачений об'єм гарячої рідини, густина гарячої рідини, питома теплоємність гарячої рідини при постійному тиску і перепад температури гарячої рідини під час проходження, відповідно. Тоді ефективність перетворення η виражається так:

$$\eta = P / Q_T \quad (5)$$

З однієї сторони, ТЕГ виробляють електричну енергію з падаючого сонячного тепла, з іншої, вони вносять вклад у підвищення енергоефективності. Тому використання ТЕГ може бути дуже різним. Так, наприклад, окрім перетворення сонячного тепла в електроенергію, можна навести використання ТЕГ у системі відпрацьованих газів автомобіля. При цьому отримується електрична потужність 2,6 Вт при температурі гарячої сторони близько 220°C і ККД ~ 5,4%.

Термоелектричне перетворення сонячної енергії є перспективним інженерним рішенням, що дозволяє поєднати відновлювані джерела енергії з високою надійністю та тривалим терміном експлуатації систем. Завдяки відсутності рухомих частин та здатності працювати в автономному режимі, ці системи є критично важливими для енергозабезпечення віддалених об'єктів та рекуперації скидного тепла в існуючих установках генерації, а також як спосіб живлення приладів та індикаторів на газопроводах. Подальший розвиток галузі, орієнтований на застосування наноструктурованих матеріалів та підвищення термоелектричної добротності (ZT), відкриває нові можливості для заміни традиційних неефективних методів енергогенерації на екологічно безпечні та сталі технології.

Література

[1] T.J. Seebeck, Ueber die magnetische Polarisation der Metalle und Erze durch Temperatur-Differenz, Abhandlungen der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, 1823.

[2] J.C. Peltier, Nouvelles expériences sur la calorité des courants électriques, Annales de Chimie et de Physique, 1834.

[3] C.B. Vining, An inconvenient truth about thermoelectrics, Nature Materials 8 (2009), 83–85. doi: [10.1038/nmat2361](https://doi.org/10.1038/nmat2361)

[4] М.О. Галуцак, Конструкція портативного термоелектричного генератора для перетворення сонячної енергії, Розвідка та розробка нафтових і газових родовищ, 2015.

ШУМ ПЕРЛІНА

Петрів Олександр Михайлович

ПЗС-25-1 Факультет інформаційних технологій

oleksandr.petriv-pzs251@nung.edu.ua

Науковий керівник: Гураль Інеса Михайлівна, к.ф.-м.н., доцент кафедри ФМН, inesa.hural@nung.edu.ua

Шум Перліна - це алгоритм генерації градієнтного шуму, розроблений Кеном Перліном для створення природно виглядаючих текстур у комп'ютерній графіці. Кен Перлін розробив цей алгоритм в 1983; формальний опис свого винаходу він зробив в 1985 в статті [1].

Розглянемо двовимірний шум Перліна. Його математична основа базується на наступних основних етапах:

1. Площина розбивається на квадратну сітку, де кожен вузол (кутова точка) має цілі координати. У кожному вузлі сітки генерується псевдовипадковий градієнтний вектор (напрямок).

2. Для довільної точки всередині комірки визначаються вектори відстані від чотирьох найближчих вузлів сітки.

3. Для кожного вузла сітки обчислюється скалярний добуток між вектором градієнта вузла та відповідним вектором відстані.

4. Фінальний крок — інтерполяція значень скалярних добутків, обчислених для кожного вузла, що оточують точку (x, y) . Щоб уникнути різких переходів на межах комірок, дробові частини координат $x - [x], y - [y]$ пропускаються через спеціальну функцію - функцію згладжування (Fade Function). В 2002 Перлін (див. [2]) запропонував в якості функції згладжування використовувати квінтичний поліном $f(t) = 6t^5 - 15t^4 + 10t^3$. Раніше використовувалася функція $f(t) = 3t^2 - 2t^3$, але нова функція краща тим, що її перша та друга похідні у вузлах дорівнюють нулю. Отримані координати використовують для білінійної інтерполяції.

Розглянемо приклад розрахунку двовимірного шуму Перліна. Нехай ми хочемо знайти значення шуму в точці $P(0,3; 0,6)$. Точка $P(0,3; 0,6)$ знаходиться в квадраті з вершинами $(0; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 1)$, $D(1; 0)$. Для кожної вершини задаються псевдовипадкові градієнтні вектори $\vec{g}_{00} = (1; 0)$, $\vec{g}_{10} = (0; 1)$, $\vec{g}_{01} = (-1; 0)$, $\vec{g}_{11} = (0; -1)$.

Вектори відстані від кутів до точки $P(0,3; 0,6)$:

$$\vec{d}_{00} = (0,3 - 0; 0,6 - 0) = (0,3; 0,6); \quad \vec{d}_{10} = (0,3 - 1; 0,6 - 0) = (-0,7; 0,6);$$

$$\vec{d}_{01} = (0,3 - 0; 0,6 - 1) = (0,3; -0,4) \quad \vec{d}_{11} = (0,3 - 1; 0,6 - 1) = (-0,7; -0,4)$$

Обчислимо скалярні добутки:

$$s_{00} = \vec{g}_{00} \cdot \vec{d}_{00} = 1 \cdot 0,3 + 0 \cdot 0,6 = 0,3; \quad s_{10} = \vec{g}_{10} \cdot \vec{d}_{10} = 0 \cdot (-0,7) + 1 \cdot 0,6 = 0,6;$$

$$s_{01} = \vec{g}_{01} \cdot \vec{d}_{01} = -1 \cdot 0,3 + 0 \cdot (-0,4) = -0,3; \quad s_{11} = \vec{g}_{11} \cdot \vec{d}_{11} = 0 \cdot (-0,7) + (-1) \cdot (-0,4) = 0,4.$$

Застосовуємо квінтичний поліном до дробових частин координат точки:

$$u = f(0,3) = 6 \cdot 0,3^5 - 15 \cdot 0,3^4 + 10 \cdot 0,3^3 = 0,16308;$$

$$v = f(0,6) = 6 \cdot 0,6^5 - 15 \cdot 0,6^4 + 10 \cdot 0,6^3 = 0,68256.$$

Спочатку інтерполюємо по горизонталі:

$$x_0 = s_{00} + u(s_{10} - s_{00}) = 0,3 + 0,16308 \cdot (0,6 - 0,3) = 0,348924,$$

$$x_1 = s_{01} + u(s_{11} - s_{01}) = -0,3 + 0,16308 \cdot (0,4 - (-0,3)) = -0,185844,$$

потім фінальна інтерполяція по вертикалі:

$$Result = x_0 + v(x_1 - x_0) = 0,348924 + 0,68256 \cdot (-0,185844 - 0,348924) \approx -0,016.$$

Алгоритм шуму Перліна має ряд особливих властивостей, які роблять його ефективним для створення природно виглядаючих текстур та ефектів у комп'ютерній графіці.

1. Плавність:

- значення функції змінюються поступово без різких переходів;
- забезпечує природний вигляд текстур, схожих на хмари, воду чи ландшафти.

2. Відсутність різких стрибків:

- на відміну від простого випадкового шуму, шум Перліна не має хаотичних стрибків;
- це дозволяє уникнути візуальних артефактів і створювати реалістичні поверхні.

3. Контроль масштабу:

- алгоритм дозволяє змінювати "масштаб" шуму, тобто рівень деталізації;
- висока частота створює дрібні деталі, низька - великі плавні форми.

4. Можливість багат шарового шуму:

- декілька шарів шуму різної частоти накладаються один на одного;
- це дає змогу створювати складні, природні структури, наприклад гори з деталями рельєфу чи хвилі на воді.

Завдяки цим властивостям шум Перліна є універсальним інструментом для створення процедурного контенту, який виглядає природно та органічно. На відміну від чисто випадкових значень, він генерує плавні переходи, що робить його незамінним у комп'ютерній графіці та розробці ігор.

Література

[1] Ken Perlin, An image synthesizer, ACM SIGGRAPH Computer Graphics, Volume 19, Issue 3, 1985, P. 287 - 296. <https://doi.org/10.1145/325165.325247>

[2] Ken Perlin. Improving Noise / Perlin Ken // SIGGRAPH '02 Proceedings of the 29th annual conference on Computer graphics and interactive techniques. – 2002. – PP. 681–682.

СИНИЙ СВІТЛОДІОД: ВІНАХІД, ЩО ЗМІНИВ СВІТ

Петриків Денис, студент групи НБ-24-1

Інститут нафтогазової інженерії

denys.petrykiv-nb241@nung.edu.ua

Науковий керівник: Чернова Мирослава Євгеніївна, д.т.н, проф. кафедри ФМН,
myroslava.chernova@nung.edu.ua
<https://orcid.org/0000-0001-6014-3087>

В доповіді розглядається проблема стосовно світу напівпровідникових технологій, де один, здавалося б, відсутній колір, затримував прогрес людства на десятиліття. Ця доповідь дала змогу дізнатися історію про наполегливість, інновації та несподівані відкриття.

Світлодіоди (LED) – це напівпровідникові пристрої, що перетворюють електричну енергію безпосередньо у світло. Їхня ефективність і довговічність значно перевершують традиційні лампи.

Червоні та зелені світлодіоди успішно існували на ринку з 1962 року, але без синього компонента було неможливо реалізувати повний потенціал LED-технологій.

Відповідь криється в принципах кольороутворення. Змішування трьох основних кольорів - червоного (Red), зеленого (Green) та синього (Blue) - дозволяє отримати практично будь-який відтінок, включно з білим світлом. Без синього LED не було б яскравих екранів смартфонів та телевізорів, до недавня їх і не було...

Провідні світові корпорації, такі як IBM та Bell Labs, витратили десятки років і мільярди доларів на дослідження, але так і не змогли подолати технічні бар'єри, пов'язані зі створенням синього світлодіода. Колір світла, що випромінюється світлодіодом, залежить від унікальної властивості напівпровідника, відомої як «ширина забороненої зони» (Energy Gap). Це енергетичний бар'єр, який електрон повинен подолати, щоб перейти з однієї орбіти на іншу. То є фізика процесу...

Коли електрон потрапляє із зони провідності у валентну зону, він вивільняє енергію у вигляді фотона. Чим більшою є ширина забороненої зони, тим вищою є енергія фотона, а отже, і коротшою є довжина хвилі світла. Синій фотон володіє найвищою енергією серед видимого спектру, що вимагало використання матеріалу з дуже широкою забороненою зоною [1].

У той час, коли науковий світ відступав, інженер Шуджі Накамура, котрий працював у невеликій японській хімічній компанії Nichia, вирішив взятися за це завдання. Не маючи докторського ступеня чи значних ресурсів, він кинув виклик загальноприйнятим науковим догмам. Накамура зосередився на нітриді галію (GaN) - матеріал, який більшість дослідників вважали надто складним для роботи через його нестабільність та високу схильність до дефектів [4]. Але саме в цьому матеріалі дослідник побачив ключ до синього світла. Однією з головних перешкод у роботі з нітридом галію були численні дефекти в кристалічній решітці, котрі перешкоджали ефективному випромінюванню світла. Накамура виявив, що стандартні реактори для вирощування кристалів не забезпечували необхідної якості. Тому він власноруч переробив реактора MOCVD, додавши другий потік газу, що дало можливість вирощувати ідеально гладкі та чисті кристали GaN, що є критично-важливим для світлодіодів [2]. Цей сміливий експеримент заклав основу для подальших відкриттів і став першим кроком до комерційного виробництва синіх світлодіодів. Для функціонування будь-якого світлодіода необхідні два типи напівпровідникових шарів: n-тип (з надлишком електронів) та p-тип (з надлишком «дірок» - позитивних зарядів). Створення стабільного переходу p-типу в нітриді галію було ще однією непереборною перешкодою для дослідників. Упродовж довгого часу вчені не могли зрозуміти, чому нітрид галію не піддається легуванню до p-типу. Накамура, працюючи інтуїтивно, виявив, що висока температура (термічний відпал) випаровує водень, який блокував утворення «дірок», а разом перехід p-типу. Це відкриття було революційним, оскільки воно відкрило шлях до створення повноцінних світлодіодів на основі GaN [3].

Але, щоб синій світлодіод світився яскраво та ефективно, потрібно було створити «активний шар», де електрони та дірки рекомбінують, випромінюючи світло. Для цього необхідно було ввести Індій (In) у нітрид галію, створивши сплав Нітрид Індію-Галію (InGaN). Однак Індій і Галій погано змішувалися, як "вода і олія", створюючи неоднорідні структури. Тому Накамура застосував так звану «грубу силу» - екстремальні умови температури та тиску в реакторі, що й сприяло отриманню необхідної структури InGaN, а це, у свою чергу, дозволило створити надзвичайно яскравий синій світлодіод.

Таким чином ці три прориви, зроблені Накамурою, виявились ключовими для розроблення високоефективних синіх світлодіодів, що значно перевершували будь-які попередні спроби.

Насправді, «білих» світлодіодів як таких у природі не існує. Світлодіод за своєю фізичною природою випромінює світло у дуже вузькому діапазоні (один колір). Щоб наші лампи вдома світилися приємним білим, розробники використовують хитрий трюк з оптикою. Це саме те, для чого був потрібен синій діод Накамури. Якщо розібрати сучасну LED-лампу, ми побачимо всередині маленькі жовті квадратики. Всередині знаходиться звичайний синій світлодіод. Зверху він залитий шаром жовтого люмінофору (зазвичай це ітрій-алюмінієвий гранат, легований цезієм). Коли синє світло проходить крізь жовтий шар, частина синіх фотонів збуджує люмінофор, і той починає випромінювати у широкому діапазоні жовте світло. Оскільки решта синього світла проходить наскрізь, людське око змішуючи синій та жовтий кольори і сприймає це як чисте біле світло. За великим рахунком саме за це відкриття науковці отримали Нобелівську премію - без синього діода цей дешевий і ефективний спосіб отримання білого світла був би неможливим. До появи синіх LED ламп ми використовували лампи розжарювання, де 95% енергії йшло на тепло і лише 5% на світло. LED-лампи на базі синього діода практично не гріються, перетворюючи майже всю енергію у світло. Це дозволило людству радикально знизити споживання електрики, адже це дуже важливо з точки зору екології.

Так у 1992 році Шуджі Накамура представив світу яскравий синій світлодіод, який був у 100 разів яскравішим за всі попередні прототипи. Це відкриття шокувало наукову та промислову спільноту, миттєво перетворивши компанію Nichia на світового лідера у виробництві LED-технологій.

Таким чином, у 2014 році Шуджі Накамура, разом з Ісаму Акасакі та Хіроші Амано, був удостоєний Нобелівської премії з фізики «за винахід ефективних синіх світлодіодів, що уможливили енергоефективні джерела яскравого білого світла», позаяк LED-лампи споживають на 80-90% менше енергії, змінюючи світову енергетику [6,7].

Стосовно майбутніх технологій варто зазначити, що невтомна праця простого науковця сприяла виникненню micro-LED дисплеїв, УФ-LED ламп для дезінфекції, та навіть сприяло застосуванню у ядерному синтезі.

Отже, винахід синього світлодіода не лише освітив наш світ, але й відкрив двері для безлічі інновацій, що продовжують формувати наше майбутнє.

Революція в освітленні стала можливою завдяки поєднанню фундаментальних відкриттів групи з Університету Нагої та інженерного генія Шуджі Накамури, Ісаму Акасакі (Isamu Akasaki) та Хіроші Амано (Hiroshi Amano). Саме вони заклали фундамент. Так у 1986 році вони вперше змогли виростити високоякісні кристали нітриду галію (GaN) на сапфіровій підкладці, використовуючи спеціальний буферний шар. Крім того, у 1989 році вони першими довели, що GaN взагалі може мати р-тип провідності, опромінюючи його електронним пучком (метод LEEBI). Без цих двох кроків створення діода було б неможливим.

Шуджі Накамура (Shuji Nakamura) зробив технологію надзвичайно ефективною та придатною для масового використання. Як згадувалося вище Накамура розробив власний метод вирощування кристалів (Two-Flow MOCVD) і знайшов набагато простіший спосіб отримання р-типу провідності - через термічне відпалювання. Але його головний тріумф полягає у створенні активного шару з InGaN (нітриду індію-галію), що дозволило отримати яскраве синє світло, яке ми бачимо сьогодні в кожному смартфоні та LED-лампі. Разом, вище згадані науковці, приборкали «норовливий» матеріал (GaN), навчилися керувати його електричними властивостями, створили пристрій, який дозволив отримати біле світло (шляхом змішування

синього з люмінофором), що економить до 80% світової енергії на освітлення, адже в 1980-х роках майже вся наукова спільнота (включаючи гігантів на кшталт **IBM**, **Sony** та **Panasonic**) покладалася на **селенід цинку (ZnSe)**, а роботу Накамури з **нітридом галію (GaN)** вважали марною тратою часу. Чому селенід цинку не оправдав надій? Бо проблема була у «часі життя», то була головна слабкість ZnSe, разом з тим селенід цинку володіє дуже слабкими атомними зв'язками. Коли через діод пропускали струм, енергія буквально руйнувала кристалічну решітку, а перші сині лазери на ZnSe працювали лише кілька хвилин або годин, після чого «вигорали». У той час як нітрид галію має надзвичайно міцні хімічні зв'язки, він витримує величезні навантаження, високі температури та інтенсивні потоки електронів, працюючи десятки тисяч годин без втрати яскравості [1, 5].

Для отримання синього світла потрібна велика «порція» енергії, яку виділяє електрон при переході з одного енергетичного рівня на інший. Хоча ZnSe мав ідеальну ширину зони для синього кольору, але був дуже примхливим у налаштуванні. У той же час GaN має ще ширшу зону, що дозволило вченим «легувати» його індієм (InGaN). Змінюючи кількість індію, вони змогли отримати будь-який колір: від глибокого синього до зеленого та навіть ультрафіолетового, використовуючи одну й ту саму базову технологію [4, 5].

Зазвичай напівпровідники перестають працювати, якщо в їхніх кристалах є багато дислокацій (помилки у структурі). У ZnSe будь-який дефект миттєво ставав осередком руйнування всього пристрою, але GaN виявився «диво-матеріалом»: навіть з мільярдами дефектів на квадратний сантиметр він продовжував яскраво світитися. Накамура довів це практично, хоча теоретики того часу стверджували, що це неможливо [1, 4, 8, 9].

Нині відомо, що світлодіоди в процесі роботи нагріваються. Тому ZnSe швидко втрачав свої властивості при нагріванні. Позаяк GaN залишається стабільним навіть при дуже високих температурах, що дозволило створювати потужні лампи для освітлення вулиць та приміщень [5,10].

Висновки:

Поки світ шукав «чистий» і легкий шлях із селенідом цинку, Накамура та його колеги приборкали «брудний», але надміцний нітрид галію. Саме ця міцність матеріалу зробила сині LED масовими та довговічними.

До появи синіх LED ми використовували лампи розжарювання, де 95% енергії йшло на тепло і лише 5% на світло. LED-лампи на базі синього діода майже не гріються, перетворюючи майже всю енергію у світло. Це дозволило людству радикально знизити споживання електрики.

Шудзі Накамура справді здійснив неймовірне, довівши всьому світові, що віра у свою ідею та наполеглива праця варті найвищих нагород.

Використання ШІ: допомога штучного інтелекту застосована лише для перекладу інформації джерел на котрі посилання є в тексті і перелік (не усіх) наведено нижче.

References

1. Nakamura, S. (1991). GaN Growth Using GaN Buffer Layer. *Japanese Journal of Applied Physics*, 30(Part 2, No. 10A), L1705–L1707. <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1991JaJAP..30L1705N/abstract>
2. Nakamura, S., Mukai, T., Senoh, M., & Iwasa, N. (1992). Thermal Annealing Effects on P-Type Mg-Doped GaN Films. *Japanese Journal of Applied Physics*, 31(Part 2, No. 2B), L139–L142. <https://ssleec.ucsb.edu/nakamura/publications>
3. Nakamura, S., Takashi, M., & Masayuki, S. (1994). Candela-class high-brightness InGaN/AlGaIn double-heterostructure blue-light-emitting diodes. *Applied Physics Letters*, 64(13), 1687–1689. <https://pubs.aip.org/aip/apl/article-abstract/64/13/1687/1023107>

4. Nakamura, S. (2015). Nobel Lecture: Background story of the invention of efficient blue InGaN light emitting diodes. *Annalen der Physik*, 527(5-6), 335–351. <https://journals.aps.org/rmp/abstract/10.1103/RevModPhys.87.1139>
5. Nakamura, S., & Fasol, G. (1997). *The Blue Laser Diode: GaN Based Light Emitters and Lasers*. Springer-Verlag. ISBN 978-3-662-03462-0. <https://www.scribd.com/document/792421455>
6. Amano, H., Sawaki, N., Akasaki, I., & Toyoda, Y. (1986). Metalorganic vapor phase epitaxial growth of a high quality GaN film using an AlN buffer layer. *Applied Physics Letters*, 48(5), 353–355. <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1986ApPhL.48..353A>
7. Amano, H., Kito, M., Hiramatsu, K., & Akasaki, I. (1989). P-type conduction in Mg-doped GaN treated with low-energy electron beam irradiation (LEEBI). *Japanese Journal of Applied Physics*, 28(Part 2, No. 12), L2112–L2114. doi.org [10.1143/JJAP.28.L2112](https://doi.org/10.1143/JJAP.28.L2112)
8. Akasaki, I., & Amano, H. (1991). Photoluminescence and blue electroluminescence of GaN p-n junction LED. *Journal of Luminescence*, 48-49, 666–670. <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/002223139190215H>
9. Akasaki, I. (2015). Nobel Lecture: Fascination and crystal growth of blue light-emitting nitride semiconductors. *Annalen der Physik*, 527(5-6), 311–327. <https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/26012383/>
10. Amano, H. (2015). Nobel Lecture: Growth of GaN on sapphire and the accompanying problems. *Annalen der Physik*, 527(5-6), 328–334. <https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/26012383/>

РОЗВИТОК МЕТАНОЛОВИХ ПАЛИВНИХ КОМІРОК У КОНТЕКСТІ ДЕКАРБОНІЗАЦІЇ

Погребняк Катерина

ВК-25-1, Інститут нафтогазової інженерії, katernyna.pohrebniak-vk241@nung.edu.ua

Науковий керівник: Мазур Мирослав Павлович 0000-0002-5746-9876, к.ф.-м.н, доц. кафедри ФМН, myroslav.mazur@nung.edu.ua

У доповіді розглядаються сучасні підходи до декарбонізації енергетики із використанням метанолових паливних комірок як ефективного інструменту перетворення хімічної енергії у електричну [1]. В умовах глобальної зміни клімату, зростання споживання енергоресурсів та необхідності зменшення викидів парникових газів особливої актуальності набуває пошук альтернативних джерел енергії, які здатні забезпечити стабільність енергопостачання при мінімальному впливі на довкілля. Одним із таких напрямів є розвиток водневої енергетики, що базується на використанні водню як універсального енергоносія. Його ключовою перевагою є відсутність прямих викидів вуглекислого газу під час перетворення енергії, що дозволяє розглядати його як основу майбутньої низьковуглецевої економіки [1,2].

Разом з тим, широке впровадження водневих технологій стикається з рядом суттєвих обмежень, серед яких особливе місце займають складності зберігання та транспортування водню. Через низьку густину енергії у газоподібному стані водень потребує або значного стиснення до високих тисків, або зрідження при наднизьких температурах, що супроводжується значними енергетичними витратами та ускладнює логістичні процеси. Враховуючи ці обставини, наукова спільнота активно розглядає альтернативні підходи до використання водню, зокрема через застосування рідких органічних носіїв водню. Одним із найбільш перспективних серед них є метанол (СН₃ОН), який поєднує у собі високий вміст водню, стабільність при зберіганні та

можливість використання існуючої інфраструктури транспортування рідкого палива [2,3].

Метанол відіграє важливу роль у реалізації вуглецево-нейтрального циклу, особливо у випадку його виробництва із застосуванням відновлюваних джерел енергії та технологій уловлювання CO₂. У такому разі вуглекислий газ, що утворюється під час генерації енергії, компенсується його попереднім вилученням з атмосфери, що дозволяє суттєво зменшити загальний вплив на довкілля. Україна, маючи значний потенціал відновлюваної енергетики, може ефективно інтегрувати такі технології у власну енергетичну систему [4].

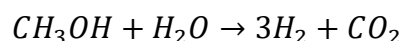
Практична реалізація цієї концепції можлива завдяки використанню метанолових паливних комірок, які забезпечують ефективне перетворення хімічної енергії палива в електричну. Особливий інтерес становлять системи типу RMFC, що використовують технологію реформінгу метанолу для отримання водню безпосередньо у процесі роботи. Це дозволяє уникнути необхідності зберігання чистого водню та значно спрощує конструкцію системи. Високотемпературні протонно-обмінні мембрани забезпечують стабільну роботу установки, високу ефективність та можливість використання теплової енергії, що утворюється у процесі реакцій [4,5].

У роботі було досліджено функціонування системи SereneU-5 G4, яка є системою паливних елементів на реформованому метанолі (RMFC, Reformed Methanol Fuel Cell - паливний елемент з реформованого метанолу), і функціонує у поєднанні із зовнішнім акумуляторним блоком або безпосередньо з навантаженням, що може бути як наявним на об'єкті, так і інтегрованим разом із системою (рис. 1). Вбудований контролер заряду забезпечує гнучке регулювання вихідної потужності постійного струму відповідно до різних сценаріїв застосування та типів акумуляторів. Завдяки використанню каталітичного запуску система характеризується мінімальним енергоспоживанням як у режимі очікування, так і на етапі старту [6].



Рис. 1. Вид спереду паливного елемента (А – подача та повернення палива, В – вхід/вихід живлення, С - панель підключення для входу/виходу керування, D - індикатор стану, Е - катодний повітрязабірний фільтр, F - забір охолоджувального повітря, G - захисне заземлення, H - ручки для переміщення паливного елемента на полицю стелажа (стійку), I - заповнення та індикатор охолоджуючої рідини, J - злив охолоджувальної рідини, К - отвори для кріплення).

Принцип роботи системи базується на процесі реформінгу метанолу. У ході експлуатації паливна суміш спочатку надходить у випарник, після чого подається до реформера, де відбувається хімічне перетворення метанолу у водень та вуглекислий газ:



Отриманий водень надходить до паливного елемента, де за участю кисню з повітря

відбувається електрохімічна реакція, в результаті якої генерується електрична енергія. Побічним продуктом цього процесу є вода, що виділяється у вигляді гарячого вологого повітря. Невикористаний водень направляється до каталітичного пальника, де спалюється з метою забезпечення теплової енергії для підтримки ендотермічного процесу реформінгу. Відпрацьовані гази, що містять воду, вуглекислий газ і повітря, виводяться з системи разом із продуктами роботи паливного елемента.

Технічні характеристики установки свідчать про її відповідність вимогам сучасних енергетичних систем [7]. Зокрема, установка забезпечує вихідну потужність до 5000 Вт при стабільній напрузі 48 В та електричній ефективності на рівні близько 41%. Конструктивне виконання із масою близько 77 кг забезпечує оптимальне поєднання мобільності та продуктивності. Система здатна працювати у широкому діапазоні температур від -20°C до $+50^{\circ}\text{C}$, що дозволяє використовувати її у різних кліматичних умовах, включаючи складні експлуатаційні середовища.

Під час експериментальних досліджень було встановлено, що після досягнення робочих температур система демонструє стабільні параметри роботи як при часткових, так і при номінальних навантаженнях. Перехідні процеси, що виникають при зміні навантаження, характеризуються короткочасними відхиленнями напруги та потужності, після чого відбувається швидка стабілізація параметрів. Це свідчить про ефективність системи управління, яка забезпечує оптимальне регулювання подачі палива та повітря. Важливим результатом є також підтвердження здатності системи витримувати різкі зміни навантаження без втрати працездатності, що є критично важливим для використання у резервних системах енергопостачання.

Метою роботи було експериментальне дослідження енергетичних і динамічних характеристик метанолової паливної комірки при фіксованому складі палива в умовах обмеженого часу експлуатації. У межах дослідження передбачалося отримати характеристики системи при стаціонарних навантаженнях, проаналізувати реакцію комірки на змінні режими роботи, дослідити перехідні процеси під час запуску та виходу на робочий режим, а також визначити питомі витрати палива для типових експлуатаційних сценаріїв.

Експериментальні випробування проводилися за умов стабільної температури навколишнього середовища ($\pm 8^{\circ}\text{C}$). Тривалість циклів навантаження становила від кількох до десятків хвилин, що дозволило змодельювати реальні режими роботи. На початковому етапі досліджено холодний запуск системи, під час якого живлення забезпечувалося від зовнішніх акумуляторів. Було зафіксовано значні витрати енергії на розігрів, що підтверджує високу теплову інерційність установки.

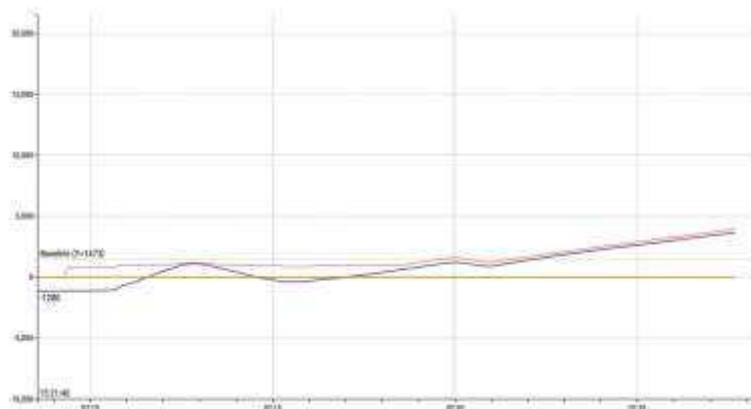


Рис. 2. Часова діаграма перехідного процесу при підключенні навантаження 2 кВт.

Після виходу на робочий режим система стабільно працювала при навантаженні 2 кВт, демонструючи надійність при частковому навантаженні (рис. 2). При збільшенні навантаження до приблизно 4,2 кВт установка зберігала стабільність, генеруючи близько 4 кВт потужності, з яких близько 3,7 кВт було корисною енергією (рис. 3).

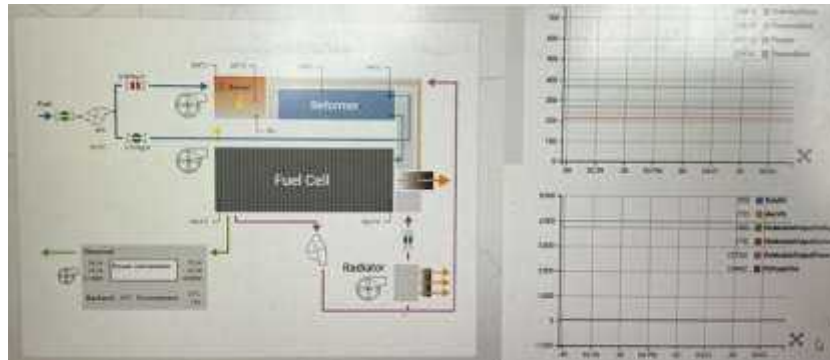


Рис. 3. Інтерфейс моніторингу під час стабілізації параметрів при повному навантаженні.

Дослідження динамічних режимів показало, що при різкому відключенні навантаження виникає короточасний сплеск напруги, після чого система переходить у режим холостого ходу (рис. 4). При повторному підключенні навантаження установка швидко відновлює роботу без зупинки генерації (рис. 5). Аналогічно, при каскадному відключенні споживачів система демонструє плавне ступінчасте зниження потужності без критичних перенапруг, що підтверджує ефективність алгоритмів керування.

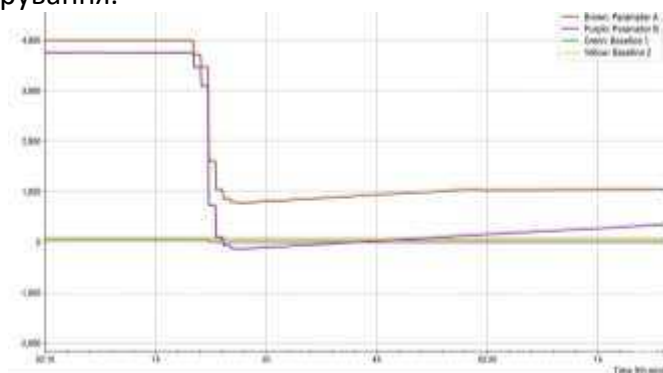


Рис. 4. Реакція системи на різкий скид навантаження повної потужності.

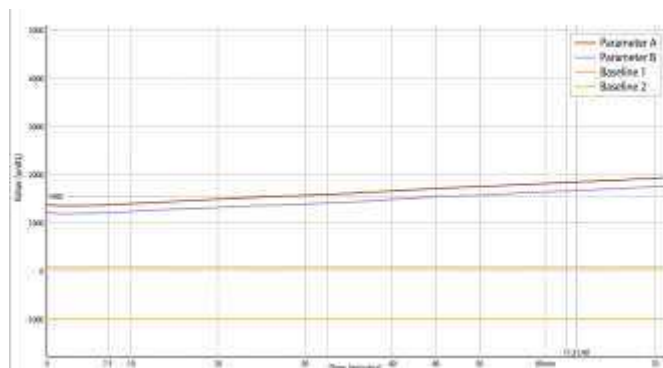


Рис. 5. Реакція системи на різкий ріст навантаження повної потужності.

Економічний аналіз показав, що при короткотривалих режимах експлуатації метанолові паливні комірочки поступають дизельним генераторам за вартістю виробленої енергії, що пов'язано з витратами на розігрів та високою ціною палива. Водночас у довготривалій перспективі ці системи мають переваги завдяки більшій екологічності та стабільності роботи.

Отже, метанолові паливні комірочки є перспективним напрямом розвитку енергетики, який дозволяє поєднати екологічність, ефективність та технологічну гнучкість. Вони можуть бути ефективно використані як резервні джерела енергії та як складова систем, інтегрованих із відновлювальними джерелами, що сприятиме переходу до низьковуглецевої економіки. Подальший розвиток технологій, зниження вартості палива та вдосконалення конструкції установок дозволять значно розширити сферу їх застосування та сприятимуть переходу до низьковуглецевої енергетики.

References

- [1] International Energy Agency, *The Future of Hydrogen: Seizing Today's Opportunities*, Paris, 2019.
- [2] European Commission, *A Hydrogen Strategy for a Climate-Neutral Europe*, Brussels, 2020.
- [3] International Renewable Energy Agency (IRENA), *Green Hydrogen Cost Reduction: Scaling up Electrolysers to Meet the 1.5°C Climate Goal*, Abu Dhabi, 2020.
- [4] G.A. Olah, A. Goepfert, G.K.S. Prakash, *Beyond Oil and Gas: The Methanol Economy*, 3rd ed., Wiley-VCH, 2018.
- [5] B.C.H. Steele, A. Heinzel, Materials for fuel-cell technologies, *Nature*. **414** (2001), 345–352. 10.1038/35104620
- [6] D.R. Palo, R.A. Dagle, J.D. Holladay, Methanol steam reforming for hydrogen production, *Chemical Reviews*. **107** (2007), 3992–4021. 10.1021/cr050198b
- [7] SFC Energy AG, Technical documentation for methanol fuel cell systems (SereneU / EFOY series), 2022. <http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf/article/view/4066/4105>

МАРКОВСЬКІ ЛАНЦЮГИ ПРИ АНАЛІЗІ КОРИСТУВАЦЬКОЇ ПОВЕДІНКИ У СОЦІАЛЬНИХ МЕРЕЖАХ

Приймачук Неля Іванівна
студентка групи ІП-24-3, факультет інформаційних технологій
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу
nelia.pryimachuk-ip243@nung.edu.ua

Науковий керівник: Григорчук Галина Василівна,
доктор філософії, доцент, доцент кафедри фізико-математичних наук
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1674-9828>

halyna.hryhorchuk@nung.edu.ua

Анотація. У роботі побудовано п'ятистанову модель користувацької активності в соціальній мережі на основі ергодичного Марковського ланцюга. Визначено матрицю переходів і аналітично знайдено стаціонарний розподіл. Верифікацію проведено методом Монте-Карло (10 000 сесій по 50 кроків): відхилення $\leq 1,4\%$. Показано, що 57% часу сесії припадає на пасивне споживання контенту, а активна взаємодія — лише 13%.

Ключові слова: Марковський ланцюг, матриця переходів, стаціонарний розподіл, clickstream, UX-аналітика, соціальні мережі, метод Монте-Карло, ергодичність.

1. Вступ та актуальність

Середній користувач проводить у соціальних мережах понад 2,5 години на добу [1]. Для розробників платформ ключовим завданням є утримання уваги: підвищення тривалості сесій, збільшення взаємодій, персоналізація контенту. Марковські ланцюги описують послідовності дій як систему станів з імовірнісними переходами і займають зручну нішу між описовою статистикою та нейронними мережами: враховують послідовний характер поведінки, є математично прозорими і не потребують великих обсягів даних.

Мета роботи: побудувати модель користувацької поведінки в соціальній мережі на основі Марковських ланцюгів, проаналізувати матрицю переходів та проінтерпретувати результати у контексті UX-аналітики.

2. Теоретичні основи Марковських ланцюгів

Марковський ланцюг [2] — послідовність випадкових величин $\{X_0, X_1, X_2, \dots\}$, що задовольняють властивість Маркова:

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1}, \dots) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = p^{ij}$$

Тобто імовірність наступного стану залежить виключно від поточного. Сукупність вірогідностей переходів утворює стохастичну матрицю P розміром $n \times n$, де кожний рядок сумується до 1. Для ергодичного ланцюга (незвідного і аперіодичного) існує єдиний стаціонарний розподіл π , що задовольняє:

$$\pi P = \pi, \quad \sum \pi^i = 1$$

У довгостроковій перспективі π^i — частка часу, яку система проводить у стані i . Аналогія з PageRank [3]: стани — типи активності, стаціонарний розподіл — їх відносна «вага» у поведінці. Стаціонарний розподіл знаходиться аналітично з системи $(P^T - I) \cdot \pi = 0$ при $\sum \pi^i = 1$ методом LU-розкладання.

3. П'ятистанова модель активності

Сесія користувача розбивається на п'ять атомарних станів: S_1 — перегляд стрічки (Feed); S_2 — Stories/Reels; S_3 — взаємодія з контентом (лайк, коментар); S_4 — особисті повідомлення (DM); S_5 — пауза. Набір є ергодичним, що гарантує існування єдиного стаціонарного розподілу.

Матриця переходів P (рядки — поточний стан, стовпці — наступний):

$$P = \begin{bmatrix} 0.30 & 0.40 & 0.15 & 0.10 & 0.05 \\ 0.25 & 0.35 & 0.20 & 0.10 & 0.10 \\ 0.30 & 0.20 & 0.10 & 0.25 & 0.15 \\ 0.20 & 0.10 & 0.05 & 0.50 & 0.15 \\ 0.50 & 0.20 & 0.10 & 0.10 & 0.10 \end{bmatrix}$$

Домінантний елемент рядку S_4 ($p_{44} = 0.50$) вказує на високу самозамкненість месенджер-функції; після паузи (S_5) користувач з ймовірністю 0.50 повертається до стрічки (S_1).

4. Стаціонарний розподіл та верифікація Монте-Карло

Аналітичний розв'язок системи $(P^T - I) \cdot \pi = 0$ при $\sum \pi^i = 1$ дає стаціонарний розподіл:

$$\pi = [\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5] = [0.287, 0.279, 0.132, 0.200, 0.102]$$

Верифікацію проведено методом Монте-Карло [4]: 10 000 незалежних сесій по 50 кроків,

початковий стан S_1 . Максимальне відхилення між аналітичним і симуляційним розподілами — 1,4% (S_5 : 0.102 проти 0.107). Достовірність підтверджується: вже після ~ 10 переходів поведінка користувача стає статистично передбачуваною.

Ключові висновки для UX-аналітики: понад 57% часу сесії користувач пасивно споживає контент (Feed + Stories/Reels: $\pi_1 + \pi_2 = 0.566$), а активна взаємодія (S_3) — лише 13%. Це узгоджується з принципом «90-9-1» у веб-аналітиці. Feed і Stories/Reels є пріоритетними для розміщення реклами; висока частка DM ($\pi_4 = 0.200$) вказує на критичну роль месенджер-функції в утриманні користувача. Аналіз матриці виявляє «слабкі зв'язки»: після взаємодії (S_3) користувач частіше повертається до стрічки ($p_{31} = 0.30$), ніж до відео ($p_{32} = 0.20$).

5. Обмеження та перспективи

Модель базується на властивості відсутності пам'яті — поведінка залежить лише від поточного стану. Модель ігнорує зовнішні фактори (час доби, демографія, платформа) та ґрунтується на синтетичних clickstream-даних (реальні є комерційно закритими). Перспективи розвитку: ланцюги вищих порядків (k -го порядку) для врахування довшої історії та прихована Марковська модель (НММ) для моделювання прихованих намірів користувача.

6. Висновки

1. Побудовано ергодичний Марковський ланцюг з п'яти станів для моделювання користувацької сесії у соціальній мережі. Аналітичний стаціонарний розподіл верифіковано методом Монте-Карло з відхиленням $\leq 1,4\%$.

2. Стаціонарний розподіл $\pi = [0.287, 0.279, 0.132, 0.200, 0.102]$ показує: 57% часу — пасивне споживання (Feed + Stories/Reels), 13% — активна взаємодія, 20% — особисті повідомлення. Це узгоджується з принципом «90-9-1» у веб-аналітиці.

3. Марковські ланцюги займають зручну нішу між описовою статистикою та нейронними мережами: враховують послідовний характер поведінки, є математично прозоримими і не потребують великих обсягів даних.

4. Перспективами розвитку є застосування ланцюгів вищих порядків та прихованої Марковської моделі (НММ) для врахування прихованих намірів користувача та інтеграція з реальними clickstream-даними.

Список використаних джерел

1. DataReportal. Digital 2026 Global Overview Report [Електронний ресурс]. — Режим доступу: <https://datareportal.com/reports/digital-2026-two-in-three-people-use-social-media> (дата звернення: 28.04.2025).
2. Ross S. M. Introduction to Probability Models. — 13th ed. — San Diego : Academic Press, 2024. — 848 p.
3. Brin S., Page L. The PageRank Citation Ranking: Bringing Order to the Web : Technical Report SIDL-WP-1999-0120. — Stanford : Stanford University, 1998. — 17 p.
4. Norris J. R. Markov Chains. — Cambridge : Cambridge University Press, 1998. — 237 p. — (Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics ; Vol. 2).
5. Gagniuc P. A. Markov Chains: From Theory to Implementation

КРИПТОГРАФІЯ ТА ТЕОРІЯ ЧИСЕЛ: МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ БЕЗПЕКИ ЦИФРОВОГО СВІТУ

Приплюцький Олег Олегович
студент групи ІП-24-3, факультет інформаційних технологій
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу
oleh.pryplotskyi-ip243@nung.edu.ua

Науковий керівник: Григорчук Галина Василівна,
доктор філософії, доцент, доцент кафедри фізико-математичних наук
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1674-9828>
halyna.hryhorchuk@nung.edu.ua

Анотація. У роботі розглянуто фундаментальні математичні принципи, що лежать в основі сучасних криптографічних систем: алгоритму RSA, протоколу Діффі-Геллмана, еліптичної криптографії (ECC) та постквантових стандартів (PQC). Проаналізовано парадигму обчислювальної складності як математичну основу безпеки. Розкрито квантову загрозу для класичних криптосистем та обґрунтовано перехід до криптографії Ґраток на основі задачі LWE.

Ключові слова: криптографія, теорія чисел, RSA, протокол Діффі-Геллмана, еліптична криптографія, ECC, дискретний логарифм, алгоритм Шора, постквантова криптографія, LWE, CRYSTALS-Kyber, обчислювальна складність.

1. Вступ та актуальність

Цифрова безпека сьогодні базується не на секретності ключів, а на математичній складності певних обчислювальних задач. Ключовий принцип — асиметрія між легкістю прямої операції та практичною нездійсненністю оберненої: перемножити два простих числа легко, а розкласти їх добуток на множники — невідомо для класичних комп'ютерів. Ця асиметрія є математичною основою всіх сучасних криптосистем з відкритим ключем. Однак швидкий розвиток квантових обчислень поставив під загрозу навіть найнадійніші класичні алгоритми, що робить дослідження актуальним.

Мета роботи: проаналізувати математичні фундаменти криптосистем з відкритим ключем та дослідити майбутній перехід до постквантової криптографії.

2. Парадигма відкритого ключа: алгоритм RSA

Алгоритм RSA, запропонований Rivest, Shamir та Adleman у 1978 році [1], вирішує ключову практичну проблему: як забезпечити безпечний зв'язок без попереднього обміну секретним ключем. Математична основа — проблема факторизації: для двох великих простих чисел p і q модуль $n = p \cdot q$ знаходиться миттєво, тоді як обернення — відновлення p і q з n — має субекспоненційну складність і є нездійсненним для класичних комп'ютерів.

Шифрування відкритим ключем e : $C \equiv M^e \pmod{n}$, дешифрування секретним d : $M \equiv C^d \pmod{n}$. Ключі пов'язані тотожністю Ейлера: $e \cdot d \equiv 1 \pmod{\phi(n)}$, де $\phi(n) = (p-1)(q-1)$ — функція Ейлера. Стійкість забезпечується тим, що знаходження d без знання p і q вимагає розв'язання задачі факторизації.

3. Безпечний обмін даними: протокол Діффі-Геллмана

Протокол Діффі-Геллмана [2] дозволяє двом сторонам сформувати спільний секретний ключ через відкритий канал з'язку. Математична основа — комутативність модульної експоненти: $K \equiv B^a \equiv A^b \equiv g^{ab} \pmod{p}$,

де g — публічний генератор, p — велике просте число, a і b — приватні експоненти. Зловмисник, перехопивши відкриті $g^a \pmod{p}$ і $g^b \pmod{p}$, постає перед нерозв'язною задачею дискретного логарифма (DLP): знайти a з $g^a \equiv h \pmod{p}$ — задача, що наразі не має ефективного класичного алгоритму розв'язку.

4. Еліптична криптографія (ECC)

Еліптична криптографія [3] виникла як відповідь на практичну потребу: зменшити розміри ключів для IoT та мобільних пристроїв. Замість множини цілих чисел використовується алгебраїчна група точок на еліптичній кривій над скінченним полем:

$$E: y^2 = x^3 + ax + b \pmod{p},$$

де операція додавання точок визначає групову структуру. Це дозволяє 256-бітному ключу ECC забезпечувати аналогічний рівень криптостійкості, що й 3072-бітний ключ RSA, значно зменшуючи вимоги до обчислювальних ресурсів.

5. Квантова загроза: алгоритм Шора

У 1994 році Пітер Шор [4] запропонував квантовий алгоритм, здатний факторизувати великі числа та розв'язувати DLP за поліноміальний час $O(\log^3 n)$. Це означає, що достатньо потужний квантовий компютер зробить RSA і ECC абсолютно вразливими.

Алгоритм Шора поєднує квантове перетворення Фур'є (для виявлення періоду числа) і квантовий алгоритм пошуку Гровера (для вибору з неструктурованої бази). Класичні алгоритми факторизації мають експоненційну складність; алгоритм Шора знижує її до поліноміальної, що робить захист обидвох алгоритмів неспроможним при наявності великого квантового процесора.

6. Постквантова криптографія (PQC)

Черговим математичним фундаментом постквантової криптографії є криптографія Ґраток і задача LWE (Learning With Errors) [5]. Проблема полягає у розв'язанні системи лінійних рівнянь із шумовим вектором:

$$As + e \equiv b \pmod{q},$$

де A — випадкова матриця, s — таємний вектор, e — малий шумовий вектор. Ця задача залишається NP-складною навіть для квантових компютерів — алгоритм Шора її не розв'язує. На основі LWE NIST стандартизував алгоритм CRYSTALS-Kyber як основний постквантовий стандарт інкапсуляції.

7. Висновки

1. Безпека цифрового світу — це безперервна гонка озброєнь між математикою і обчислювальними можливостями. Надійність криптосистем забезпечується асиметрією обчислювальної складності прямої і оберненої задач.

2. Алгоритм RSA, протокол Діффі-Геллмана та ECC забезпечили надійну архітектуру сучасного інтернету. У випадку ECC зменшення розміру ключа в 12 разів порівняно з RSA не знижує криптостійкість, але радикально скорочує обчислення.

3. Алгоритм Шора робить RSA і ECC вразливими в епоху квантових обчислень. Перехід до криптографії Ґраток (зокрема CRYSTALS-Kyber) і задачі LWE забезпечує нову математичну основу безпеки.

4. Допоки класи складності P і NP не рівні, непорушні закони математики продовжуватимуть захищати цифровий світ.

Список використаних джерел

1. Rivest R. L., Shamir A., Adleman L. A method for obtaining digital signatures and public-key cryptosystems // Communications of the ACM. — 1978. — Vol. 21, No. 2. — P. 120–126.

<https://doi.org/10.1145/359340.359342>

2. Diffie W., Hellman M. New directions in cryptography // IEEE Transactions on Information Theory. — 1976. — Vol. 22, No. 6. — P. 644–654. <https://doi.org/10.1109/TIT.1976.1055638>
3. Koblitz N. Elliptic curve cryptosystems // Mathematics of Computation. — 1987. — Vol. 48, No. 177. — P. 203–209. <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1987-0866109-5>
4. Shor P. W. Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring // Proceedings of the 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science. — 1994. — P. 124–134. <https://doi.org/10.1109/SFCS.1994.365700>
5. Regev O. On lattices, learning with errors, random linear codes, and cryptography // Journal of the ACM. — 2009. — Vol. 56, No. 6. — P. 1–40. <https://doi.org/10.1145/1568318.1568324>

ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИКИ В ОБРОБЦІ ПРИРОДНОЇ МОВИ

Сверида Богдан Ігорович

KI-24-1 Факультет інформаційних технологій

bohdan.sveryda-ki241@nung.edu.ua

Науковий керівник: Гураль Інеса Михайлівна, к.ф.-м.н., доцент кафедри ФМН, inesa.hural@nung.edu.ua

Обробка природної мови — це міждисциплінарна галузь, що знаходиться на стику прикладної лінгвістики, математики та комп'ютерних наук. В цій галузі застосовуються математичні моделі та алгоритми, які дозволяють комп'ютерам не просто зберігати текст як набір символів, а «розуміти» його структуру, контекст, емоційне забарвлення та семантичний зміст [1,2].

Оскільки комп'ютери працюють тільки з числами, то для відображення тексту була створена система відповідності: кожна літера, цифра або знак пунктуації — це унікальний числовий ідентифікатор. Але таке кодування не передає сенс. Для комп'ютера слова «авто» та «машина» нічим не зв'язані, тому що мають різне кодування. Хоча для нас вони мають схожий сенс. З точки зору кодування, слово «машина» ближче до слова «малина», ніж до «авто», бо у них збігається більше букв.

Виникає питання: як додати сенс і як комп'ютеру, який розуміє лише числа, працювати з такою абстракцією, як сенс? Відповідь: потрібно перетворити сенс на математичний об'єкт. Розглянемо приклад тривимірного семантичного простору, де кожна вісь репрезентує конкретну характеристику об'єкта: біологічну природу (вісь X), фізичні габарити (вісь Y) та здатність до руху (вісь Z). Якщо ми опишемо слово через ці три різні характеристики, комп'ютер отримає вектор, наприклад, кіт (10; 5; 6), собака (10; 7; 5), авто (0, 10, 10). Вектор, який описує сенс слова, називається семантичним вектором. Звичайно природна мова занадто складна для трьох вимірів. Розмірність семантичних векторів у завданнях обробки природної мови не є фіксованою, але зазвичай це високорозмірні простори (сотні або тисячі осей), які дозволяють кодувати складні смислові зв'язки. Координати не вписуються вручну, а обчислювальний алгоритм самостійно виводить їх з аналізу великих масивів тексту. Цей процес називається навчанням. Головний принцип навчання — дистрибутивна гіпотеза. Значення слова визначається не його словниковим визначенням, а його типовим оточенням у тексті. Спочатку всі слова отримують випадкові координати у просторі. Під час навчання модель зближує вектори слів, які часто зустрічаються поруч (наприклад, «кіт», «їсти», «шерсть»). В результаті виходить математична модель мови, де геометрична близькість векторів відповідає семантичній

близькості слів.

Представлення слів у вигляді векторів дозволяє застосовувати до них стандартні операції. Зокрема, для кількісного вимірювання близькості значень можна використовувати косинусну подібність (cosine similarity):

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}}$$

де a_i та b_i — координати векторів \mathbf{a} та \mathbf{b} відповідно. Це оцінка напрямку, а не величини: два вектори з однаковим напрямком мають косинус подібності 1, а два вектора, які утворюють кут 90° один відносно одного, мають подібність 0, а два діаметрально направлені вектори мають подібність -1, незалежно від їх довжини. Додавання векторів дозволяє об'єднувати поняття; віднімання - вилучати певну ознаку зі слова. Відомий приклад: вектор("Король") - вектор("Чоловік") + Вектор("Жінка") \approx Вектор("Королева").

В алгоритмах першого покоління одне слово має рівно один вектор у словнику. Цей вектор є фіксованим і ніколи не змінюється, незалежно від того, в якому реченні стоїть слово. Це обчислювально ефективно, але семантично обмежено. Що відбувається зі словом "замок"? Статичний вектор намагається об'єднати значення "великої фортеці" та "механізму на дверях". У багатовимірному просторі цей вектор опиняється посередині між двома непов'язаними кластерами значень, втрачаючи точність для обох.

У сучасних архітектурах вектори слів не існують ізольовано, а постійно обмінюються інформацією для оновлення своїх координат. Цей процес називається механізмом уваги [3], і він математично визначає, наскільки сильно слова в реченні пов'язані між собою. Рівень такої спорідненості обчислюється за допомогою скалярного добутку векторів.

Кожне вхідне слово (представлене вектором \mathbf{x}) перетворюється на три різні робочі вектори за допомогою навчених матриць ваг (W_Q, W_K, W_V):

- Query (Запит $\mathbf{Q} = \mathbf{x} W_Q$): визначає, яку інформацію слово шукає в інших словах речення.
- Key (Ключ $\mathbf{K} = \mathbf{x} W_K$): описує синтаксичну та семантичну суть самого слова, пропонуючи її іншим.
- Value (Значення $\mathbf{V} = \mathbf{x} W_V$): містить базовий зміст слова, який буде передано у фінальний результат.

Модель порівнює кожен запит (\mathbf{Q}) з усіма ключами (\mathbf{K}) за допомогою їх скалярного добутку \mathbf{QK}^T . Це фактично обчислює "важливість" кожного слова відносно іншого. Отримані результати діляться на $\sqrt{d_k}$ (d_k — розмірності вектора) і пропускаються через функцію softmax. Функція softmax перетворює k -вимірний вектор із довільними значеннями компонент до k -вимірного вектора з дійсними значеннями компонент в області $[0, 1]$, які в сумі дають одиницю, що дозволяє розуміти їх як ймовірності (ваги уваги). Для вхідного вектора $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_k)$ softmax задається наступним чином:

$$\text{softmax}(\mathbf{z})_i = \frac{e^{z_i}}{\sum_{j=1}^k e^{z_j}}$$

Ваги множаться на вектори значень (\mathbf{V}). Таким чином, фінальний вектор слова формується таким чином

$$\text{Attention}(\mathbf{Q}, \mathbf{K}, \mathbf{V}) = \text{softmax}\left(\frac{\mathbf{QK}^T}{\sqrt{d_k}}\right) \mathbf{V}.$$

Механізм уваги дозволяє моделі динамічно змінювати векторне представлення слова на

основі контексту (сусідніх слів). Ці операції відбуваються над кожним вхідним вектором.

Таким чином, перетворивши сенси на математичний об'єкт, можна: здійснювати пошук не за точним збігом слів, а за векторною близькістю сенсу запиту до документів; рекомендаційним системам пропонувати статті або товари, вектори яких схожі на вектори ваших попередніх інтересів; вирівнювати контекстні простори різних мов для машинного перекладу тощо.

Література

[1] Jurafsky, D. and Martin, J.H. (2019) Speech and Language Processing.
https://web.stanford.edu/~jurafsky/slp3/ed3book_jan26.pdf

[2] DeepLearning.AI. Natural Language Processing. On-line Course. Last updated on Jan 11, 2023. URL: [https://www.deeplearning.ai/resources/natural-language-processing/#What_Is_Natural_Language_Processing_\(NLP\)_Used_for](https://www.deeplearning.ai/resources/natural-language-processing/#What_Is_Natural_Language_Processing_(NLP)_Used_for)

[3] Vaswani, A., Shazeer, N., Parmar, N., Uszkoreit, J., Jones, L., Gomez, A. N., Kaiser, L., & Polosukhin, I. (2017). Attention is All you Need. Neural Information Processing Systems, 30, 5998–6008.
<https://proceedings.neurips.cc/paper/2017/file/3f5ee243547dee91fbd053c1c4a845aa-Paper.pdf>

ОГЛЯД РОЗВИТКУ ДЕЯКИХ СУЧАСНИХ ТЕХНОЛОГІЙ, ТА ШЛЯХИ ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ У ПРОМИСЛОВОСТІ

Свиридова Галина

НИВ-23-3 Інститут нафтогазової інженерії
halyna.svyrydova-niv231@nung.edu.ua

Науковий керівник: Чернова Мирослава Євгеніївна, д.т.н, проф. кафедри ФМН,
myroslava.chernova@nung.edu.ua
<https://orcid.org/0000-0001-6014-3087>

В доповіді розглядається сучасний етап розвитку науки і техніки, що характеризується швидким впровадженням інноваційних технологій у виробничі процеси. Оскільки нові технологічні рішення охоплюють різні сфери промисловості - від високоточної обробки матеріалів до створення нових конструкційних матеріалів і альтернативних систем енергозабезпечення. Основна увага зосереджена на значенні технологій для сучасної промисловості, що включає прецизійні УФ-лазерні системи, нові металоматричні композити, системи довготривалого накопичення енергії, біоелектрохімічні батареї.

Про прецизійні ультрафіолетові лазерні системи варто зазначити наступне: Ультрафіолетова лазерна система застосовується для лабораторій та невеликих виробничих майстерень, довжина хвилі в них становить ~ 355 нм, а потужність ~ 10 Вт. Система ІЗ (X-Laser Lab) дозволяє забезпечити розмір плями — лише ~5 мікрон. Для порівняння, зазначимо, що ІЧ-лазери володіють роздільною здатністю 30 мкм, а сині діодні ~ 80÷100 мкм. Ключовий процес - фотоабляція: матеріал руйнується під дією фотонів УФ-випромінювання, які розривають молекулярні зв'язки без значного нагрівання поверхні.

У металообробці термін «система І3» зазвичай пов'язаний з технологіями **лазерної абляції** для прецизійної обробки, де «І3» (Intelligence) вказує на третє покоління або високий рівень інтелектуалізації обладнання. Якщо говорити саме про лазерну фотоабляцію металів, то це процес видалення мікрошарів матеріалу за допомогою коротких та ультракоротких імпульсів, де система «І3» забезпечує наступні можливості, бо системи такого класу використовуються для завдань, де звичайна лазерна різка занадто груба: видалення іржі, фарби або оксидних плівок без пошкодження самого металу; нанесення надзвичайно чітких зображень або qr-кодів, які не стираються; створення специфічного мікрорельєфу для покращення адгезії або зміни властивостей тертя; видалення захисних шарів з електронних компонентів або друкованих плат. Ключовими особливостями системи «І3» у промисловості є: **холодна обробка**: завдяки ультракоротким імпульсам (піко- або фемтосекундним) енергія не встигає перетворитися на тепло в навколишніх зонах, а це запобігає деформації металу та утворенню окалини; **інтелектуальне фокусування**: система автоматично підлаштовує фокусну відстань під рельєф деталі, що дозволяє працювати зі складними 3D-формами; **зворотний зв'язок у реальному часі**: лазер аналізує відбите світло від поверхні, якщо система «бачить», що іржа вже видалена і з'явився чистий метал, вона автоматично знижує потужність або припиняє дію, щоб не «пропалити» зайве.

Переваги над традиційними методами полягають у наступному: порівняно з піскоструминною обробкою або хімічним травленням, системи типу «І3» забезпечують: відсутність витратних матеріалів, потрібна лише електроенергія; екологічність - немає хімічних відходів чи пилу; висока повторюваність - точність вимірюється в мікронах.

Варто зауважити, що на ринку є бренд «i3 Engineering», який випускає спеціалізовані модулі для лазерної різки та маркування.

У нафтогазовій промисловості системи класу І3 (у плані інтелектуальної лазерної фотоабляції) стають стандартом для обслуговування великогабаритних об'єктів. Замість традиційної піскоструминної обробки або хімічного очищення, лазерна абляція дозволяє працювати з деталями безпосередньо на місці їхнього розташування (in-situ). Системи «І3» використовуються для критично важливих вузлів, де знос або корозія можуть призвести до аварій, зокрема, об'єктами обробки є: бурові колони та стабілізатори - лазер видаляє залишки бурового розчину та втому металу перед дефектоскопією; запірна арматура (велетенські клапани та засувки) – застосовується для очищення посадових місць та ущільнювачів без демонтажу всієї конструкції: у трубопроводах, застосовують для видалення твердих відкладень (барію, кальцію) та нафтопродуктів; на морських платформах - для роботи в умовах агресивного солоного середовища, зокрема задля видалення корозії зі структурних балок [1, 2].

Технологічні переваги для великих деталей й полягають у тому, що для нафтогазового сектору «інтелектуальність» системи (Intelligence) означає: роботизовану інтеграцію, тобто, на великих об'єктах лазерні головки часто встановлюються на магнітних повзунах або роботизованих руках, які автоматично обходять деталь складного профілю.

Технологічні переваги полягають і у вибірковій абляції, тобто, система розпізнає типи забруднень, до прикладу, вона може видалити шар фарби, не пошкоджуючи антикорозійне цинкове покриття під ним.

Важливою є діагностика в часі процесу, зокрема, деякі системи «І3» здатні поєднувати абляцію з миттєвим аналізом складу металу (LIBS-спектроскопія), що дозволяє виявляти мікротріщини відразу після очищення ділянки. [1, 2, 3].

Це забезпечує значну економічну вигоду, позаяк зменшується час простою бо деталей не потрібно везти на очисну станцію, таким чином час обслуговування скорочується на ~ 50÷70%,

разом з тим відсутні вторинні відходи, в часі піскоструминного оброблення виникають тони забрудненого піску; лазер просто перетворює бруд на пил, який може всмоктуватися вакуумною системою. Разом з тим то є безпечно, так як оператор може керувати системою дистанційно, що є критично важливим в умовах вибухонебезпечних зон нафтопереробних заводів [1, 2, 3].

Для виробництва, зазвичай, це можуть бути мобільні лазерні устаткування потужністю від 500 Вт до 3, котрі можуть монтуватися в контейнери або причепа.

Для великих об'єктів у нафтогазовій галузі системи «ІЗ» (інтелектуальної фотоабляції) працюють як «хірургічний інструмент» промислового масштабу. Якщо, до прикладу, розглянути процес очищення труб зсередини, бо це одне з найскладніших завдань, де звичайна механіка часто безсила проти твердих відкладень (пірофорні відкладення, солі, парафіни), а працює це наступним чином, у цьому випадку використовується спеціальна роторна лазерна головка, яка центрується всередині труби. Вона обертається з високою швидкістю, створюючи суцільне кільце лазерного випромінювання. Система в реальному часі вимірює відстань до стінки, тобто проводить, так зване, LIDAR-сканування. Якщо труба має вигин або нерівномірний шар бруду, лазер автоматично корегує фокус та потужність, щоб не пошкодити основний метал, зокрема, стінку труби. В результаті поверхня стає стерильно чистою, що ідеально для подальшого нанесення внутрішнього антикорозійного покриття або ультразвукової дефектоскопії.

Стосовно відновлення зношених поверхонь, варто зазначити, що тут фотоабляція ІЗ виступає як підготовчий етап перед процесом лазерного наплавлення. До прикладу, якщо розглянути, так зване, видалення "втоми" металу, то лазерна абляція дозволяє не просто зняти іржу, а випарувати мікрошар металу, в якому є мікротріщини або втома. Це «омолоджує» поверхню деталі чи оброблюваного обладнання.

Варта зазначити, що для відновлення геометрії валів, бурових голівок або корпусів насосів потрібна ідеальна адгезія. Система «ІЗ» створює мікроскопічний рельєф, так зване текстурування, завдяки якому новий шар металу «в'їдається» в стару деталь на молекулярному рівні. Разом з тим, якщо деталь має складну геометрію, до прикладу, різьблення бурової замкової труби, інтелектуальна система точно обходить кожен виток, знімаючи нагар, але зберігаючи крок та профіль різьби. Основні характеристики для нафтогазової промисловості зазначено у порівняльній табл.1.

ТАБЛИЦЯ №1. Порівняння основних характеристик застосування системи «ІЗ» для нафтогазового сектору.

Характеристика	Очищення труб (внутрішнє)	Відновлення поверхонь (зовнішнє)
Головна вимога	Доступ до важкодоступних зон	Дотримання точних допусків (~10 ⁻⁶ м - мікрони)
Тип обладнання	Роботизовані кроулери (внутрішньоканальні)	Маніпулятори або ручні лазери >2кВт
Економічний ефект	Продовження терміну експлуатації магістралей	Відсутність потреби купувати нові дорогі вузли

Важливо зазначити, що для таких робіт у нафтогазовій сфері критично-важливою є вибухозахищеність обладнання. Системи «ІЗ» преміум-класу зазвичай мають герметичне виконання лазерної головки з продувкою інертним газом. Разом з тим для нафтогазової галузі вибір потужності системи «ІЗ» - це баланс між швидкістю проходження дистанції (метри за годину) та товщиною шару, який потрібно зняти (іржа, парафін чи окалина).

Якщо зупинити увагу на розвитку цих технологій в Україні, то варта наголосити, що стан розробок за напрямом лазерних технологій такі дослідження проводяться в Інституті

електрозварювання ім. Є.О. Патона НАН України та технічних університетах; застосування для зварювання та мікрооброблення поверхонь. Стосовно нових матеріалів роботи у галузі порошкової металургії, адитивного виробництва та наноматеріалів здійснюються в ІПМ ім. Францевича, КПП ім. І. Сікорського та в ІЕЗ ім. Патона [5,6,7,8]. Там же проводяться роботи стосовно накопичення енергії: розвиток відновлюваної енергетики, дослідження акумуляторних систем та енергетичних мереж [9].

Розглянуті технології відображають ключові тенденції розвитку промисловості у межах концепції Industry 4.0.

Сучасна промисловість переходить до виробництва, яке характеризується високою точністю, цифровим контролем процесів, використанням нових матеріалів та підвищеною енергоефективністю.

Лазерні технології забезпечують надточну обробку матеріалів, нові композити дозволяють створювати легші та міцніші конструкції, а інноваційні енергетичні системи забезпечують стабільність енергопостачання.

У сукупності ці технології формують основу для розвитку більш ефективної та екологічно збалансованої промисловості.

Незважаючи на складну ситуацію в Україні, науковий потенціал України залишається значним за умови підвищення рівня інвестицій та міжнародної співпраці.

ВИСНОВКИ:

Таким чином, сучасні технології демонструють значний потенціал для розвитку промисловості. Прецизійні лазерні системи, нові металоматричні композити, системи накопичення енергії та біоелектрохімічні батареї відкривають нові можливості для підвищення ефективності виробництва та розвитку екологічно орієнтованих технологій. Лазерні системи використовуються у нафтогазовій промисловості для мікрооброблення поверхонь, що мінімізує деформації.

Подальший розвиток цих технологій сприятиме формуванню більш інноваційної та енергоефективної промисловості, а металоматричні композити (700 МПа), завдяки вазі, що становить лише 1/3 від сталевих аналогів, є критично важливими не лише для аерокосмічної галузі, авіабудування та виробництва легких транспортних засобів, а й у нафтогазовій промисловості, зокрема, інтеграція вищезгаданих рішень у промислові процеси є фундаментом переходу України до концепції Industry 4.0.

Цифровізація лазерного виробництва та впровадження смарт-мереж дозволять автоматизувати виробничі цикли, знизити витрати ресурсів та підвищити конкурентоспроможність української продукції на світових ринках. Розвиток цих високих технологій є критичною запорукою створення інноваційної промислової бази України. Успіх цього курсу залежить від системного збільшення державних та приватних інвестицій, активного залучення до міжнародних науково-технічних програм та створення ефективних хабів для трансферу технологій, які об'єднують академічну науку з реальними потребами виробничого сектору.

Використання ШІ: допомога штучного інтелекту застосована лише для перекладу інформації джерел на котрі посилання є в тексті і перелік (не усіх) наведено нижче.


References

1. **Zhu, G., Wang, S., Cheng, W., & Li, C. (2021).** Study on the Laser Cleaning of Rust on Carbon Steel Surfaces. *Applied Sciences*, 11(11), 4728. <https://www.researchgate.net/publication/394868840>

2. **Bathe, R. (2012).** Laser surface cleaning for the oil and gas industry. *Industrial Laser Solutions*. industrial-lasers. <https://www.scribd.com/document/689849747/Springer-eBook-List-12245-Feb-2016>
3. Li Y., Wang B., Ma C., et. al. Material characterization, thermal analysis, and mechanical performance of a laser-polished Ti alloy prepared by selective laser melting. *Metals*. 2019. Vol. 9. P. 112.
4. **Dahotre, N. B., & Harimkar, S. P. (2008).** *Laser Fabrication and Machining of Materials*. Springer Science & Business Media. <https://content.e-bookshelf.de/media/reading/L-2054-6772930fdc.pdf>
5. **IPG Photonics Corporation. (2023).** Laser Cleaning: High-Efficiency Surface Preparation. *Technical White Paper*. <https://patonpublishinghouse.com/ukr/proceedings/ltwmp> [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]
6. **Кривцун, І. В. (2024).** Hybrid laser-plasma welding: efficiency and new possibilities. *The Paton Welding Journal*, 1, 31-41. http://inas.nbuiv.gov.ua/j-pdf/pwj_2024_1_4.pdf
7. **Шелягін, В. Д., Хаскін, В. Ю., & Бернацький, А. В. (2023).** Автоматичне зварювання, (7), 15-21. <https://patonpublishinghouse.com/ukr/journals/as/2023/07/03>
8. **Пупан, Ю. О. (2024).** <https://web.kpi.kharkov.ua/cutting/wp-content/uploads/sites/143/2024/02/12>
9. **Матеріали конференції «Materials Science and Engineering» (Київ).** <http://www.materials.kiev.ua/science2.0/conference/conference.jsp?id=77>

МОДЕЛЮВАННЯ «РОМБООДРИЗАЦІЇ» КУБІЧНОЇ ГРАТКИ В ЕПІТАКСІЙНИХ СЕНДВІЧ-СТРУКТУРАХ НА ОСНОВІ XRD АНАЛІЗУ

Сеньків Владислав-Марко Романович
студент групи KI-25-1, факультет інформаційних технологій
vladyslav-marko.senkiv-ki251@nung.edu.ua

Науковий керівник: Мокляк Володимир Володимирович , д.ф.-м.н, проф. кафедри ФМН, volodymyr.mokliak@nung.edu.ua

Епітаксійна сендвіч-структура на основі ферит-гранатової плівки є ключовим магнітним діелектриком для розробки та виготовлення нового покоління приладів надвисокочастотної техніки подвійного призначення, зокрема РЛС та РЕБ комплексів. Класичним прикладом є плівка залізо-ітрієвого гранату (ЗІГ) товщиною 2-50 мкм вирощена методом рідкофазної епітаксії (РФЕ) на підкладці із гадоліній-галієвого гранату (ГГГ) зрізу (111).

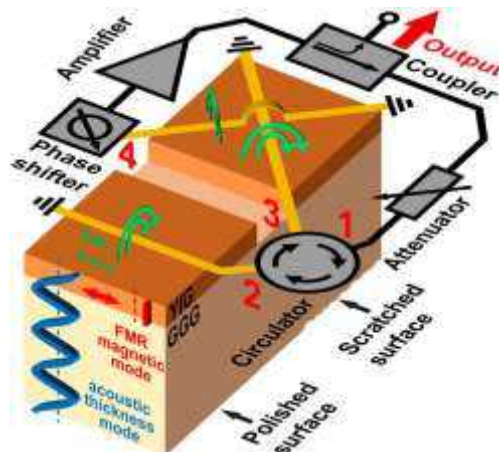


Рис.1. Модель сендвіч-структури ЗІГ/ГГГ (згенеровано "ШІ Google").

На рис. 1 приведена згенерована "ШІ Google" типова модель сендвіч-структури ЗІГ/ГГГ для використання в радіоелектронних пристроях. Вона включає в себе три компоненти:

Базовий шар (Substrate): нижня частина (зазвичай позначена як GGG — гадоліній-галієвий гранат) слугує підкладкою. Вона має аналогічну до плівки кристалічну структуру кубічної симетрії, що дозволяє вирощувати ідеальні моношари.

Епітаксійний шар (Epitaxial Layer): Шар магнітного гранату YIG (ЗІГ), вирощений поверх підкладки. На схемах показано вектори намагніченості, які можуть бути спрямовані в площині плівки або перпендикулярно до неї, залежно від механічних напружень на межі розділу.

Гетероінтерфейс: межа між підкладкою та плівкою. Вона є критично важливою, оскільки саме тут відбувається узгодження параметрів решітки, що визначає магнітні властивості всієї структури.

В загальному випадку існує різниця в сталих ґратки плівки і підкладки, і відбувається так звана «ромбоєдризація» кристалічної ґратки плівки. Тобто в процесі росту структура плівки деформується і, як показано на рис.2, в залежності від товщини “стискається” або “розширюється” в напрямку, перпендикулярному площині росту. Це приводить до зміни параметру міжплощинної відстані для сімейства площин {111}, і відповідно до зміни параметру сталої ґратки $a_{ромб}$ і виникнення кута «ромбоєдризації» α та можливої генерації дефектів структури.

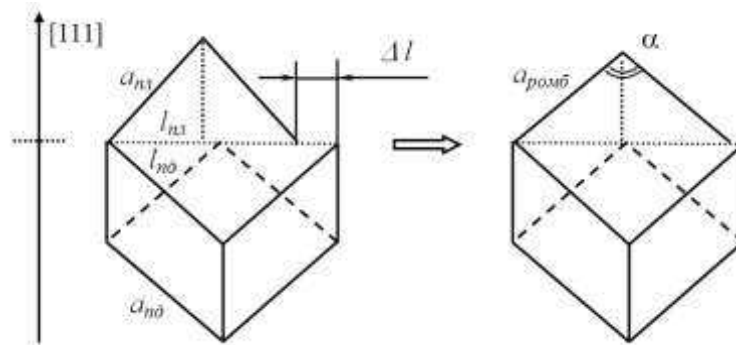


Рис. 2. Схема процесу “ромбоєдризації” кристалічної ґратки плівки ЗІГ в гетероструктурі ЗІГ/ГГГ.

Оскільки однією з основних вимог до цих композитних матеріалів є високий ступінь їх структурної досконалості, тому питання її оцінки та моделювання методами неруйнівного контролю стоїть надзвичайно гостро. В нашій роботі представлено застосування термодинамічного і кристалохімічного аналізу з використанням методу мінімізації функції середньоквадратичного відхилення для моделювання та оцінки основних структурних параметрів епітаксійної сендвіч-структури типу ЗІГ/ГГГ.

Ромбоєдризація кристалічної ґратки плівки в гетероструктурі

Для детального аналізу ромбоєдризації кристалічної ґратки плівки ЗІГ в гетероструктурі (рис.2) параметри ромба елементарної ґратки плівки визначались методом найменших квадратів по різниці брегівських кутів плівки та підкладки [1]:

$$2\Delta\theta^{hkl} = 2 * \left[\arcsin\left(\frac{\lambda}{2d_{пл}^{hkl}}\right) - \arcsin\left(\frac{\lambda}{2d_{но}^{hkl}}\right) \right] \quad (1)$$

де d_{nl}^{hkl} та d_{no}^{hkl} – міжплощинні відстані для плівки та підкладки відповідно. Значення міжплощинної відстані для сімейства площин $\{hkl\}$ підкладки d_{no}^{hkl} визначалося із рівняння (2),

$$a = d \sqrt{h^2 + k^2 + l^2} \quad (2)$$

а міжплощинна відстань плівки d_{nl}^{hkl} знаходилась в припущенні ромбоєдричної структури [2]:

$$d_{nl}^{hkl} = a_{ромб} \sqrt{\frac{1 + 2 \cos^3 \alpha - 3 \cos^2 \alpha}{(h^2 + k^2 + l^2) \sin^2 \alpha + 2(hk + hl + kl)(\cos^2 \alpha - \cos \alpha)}} \quad (3)$$

Було використано наступні рефлекси: (444), (888), (880) та (4810). Параметри ромбоєдричної структури $a_{ромб}$ та α знаходилися із умови мінімуму побудованої нами функції:

$$F = \sum_{(hkl)} (\Delta \theta_{експ}^{hkl} - \Delta \theta_{розра}^{hkl})^2 \quad (4)$$

де $\Delta \theta_{експ}^{hkl}$ – виміряні значення різниць кутів Брега (рентгенівський спектрометр ДРОН-2.0), а $\Delta \theta_{розра}^{hkl}$ – різниці розраховані за допомогою співвідношень (2) та (3). Для мінімізації функції було використано метод частинних похідних:

$$\begin{cases} \partial F / \partial a_{ромб} = 0 \\ \partial F / \partial \alpha = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Моделювання процесу «ромбоєдризації» кристалічної ґратки плівки і чисельно-графічний розв'язок системи рівнянь (5) (рис.3) було здійснено засобами «Maple» шляхом написання відповідного програмного скрипту. В результаті отримано невідомі параметри ромбоєдричної структури для плівки ЗІГ: $a_{ромб} = 12,3710 \text{ \AA}$, $\alpha = 90,0032^\circ$ ($a_{теор} = 12,3752 \text{ \AA}$). Тобто процес деформації плівки ЗІГ відбувається за наступною схемою (рис.2): кристалічна ґратка плівки стискається у напрямку [111], і відповідно, значення міжплощинних відстаней даного сімейства площин зменшуються; в площині (111) плівка намагається досягти співпадіння лінійних розмірів кристалічної ґратки із підкладкою, тобто $l_{пл} \rightarrow l_{пд}$.

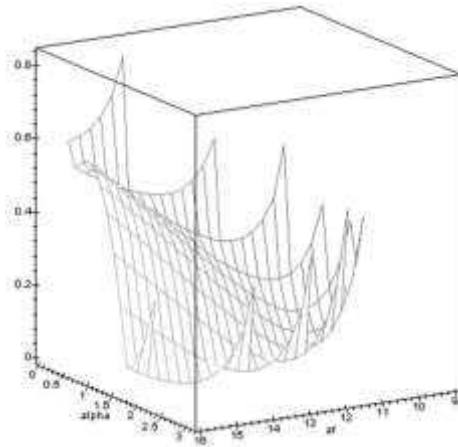


Рис.3. Вигляд функціональної залежності $F(a_{ромб}, \alpha) = \sum_{(hkl)} (\Delta \theta_{експ}^{hkl} - \Delta \theta_{розра}^{hkl})^2$.

Поле механічних напруг в гетероструктурі.

Для підтвердження даного типу деформації нами проведено оцінку розподілу деформацій ε_{zz} по товщині плівки. Експериментально значення ε_{zz} знаходили на основі рівняння:

$$-\Delta \theta \cdot \text{ctg} \theta = \varepsilon_{zz} - U_{zx} \cdot \text{ctg} \theta \quad (6)$$

де U_{zx} – недіагональна компонента тензора дисторсії (зміщення).

Розв'язавши систему 2 рівнянь типу (6) відносно ε_{zz} , для двох рефлексів від площин (444) та (888), було отримано експериментальне значення $\varepsilon_{zz} = -9.566 \cdot 10^{-4}$, що підтверджує результати нашого моделювання. Отож, епітаксійна гетероструктура знаходиться в напруженому стані стисненому вздовж осі OZ, на що вказує знак деформацій ε_{zz} .

В залежності від товщини плівки на границі розділу гетероструктури можливе виникнення дислокацій невідповідності, які частково або повністю знімають напруги в об'ємі плівки. Тому наступним нашим кроком була перевірка критеріїв можливості виникнення дислокацій невідповідності та оцінка їх поверхневої густини.

Утворення дислокацій невідповідності

Критеріями можливості виникнення дислокацій невідповідності є 2 наступні умови [3]:

– величина невідповідності $f = \frac{|a_{ic} - a_{ia}|}{a_{ia}} \geq 10^{-3}$;

– товщина плівки повинна перевищувати деяку критичну товщину h_c .

Розрахована величина параметра невідповідності в нашому випадку для гетероструктури 3ГГ/ГГГ $f = 0,00089 \approx 10^{-3}$, тобто можна вважати що перший критерій виконується. Другий критерій також виконується, оскільки товщина досліджуваного зразка $h_{пл} = 2,85 \cdot 10^{-6} \text{ м}$, а значення величини критичної товщини – $h_c \approx 0,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}$, тобто $h_{пл} > h_c$. Виконання двох критеріїв свідчить про те, що в плівці можливе утворення дислокації невідповідності.

Також було перевірено критерій відсутності дислокацій невідповідності $f = |\cos \alpha|$, і встановлено, що для нашого випадку величина невідповідності становить $f = 0,00089$, а $\alpha = 90,0032^\circ$, і в результаті отримуємо: $0,00089 \neq 0,00006$. Тобто як бачимо, даний критерій не виконується, тому можна стверджувати, що в даному зразку утворюються дислокації невідповідності.

Оцінку поверхневої густини дислокацій невідповідності було проведено за формулою:

$$\sigma = \frac{(l_{nd} - l_{nl})^2}{(l_{nd} l_{nl})^2} \quad (7)$$

$$l_{nd} = \sqrt{2} \cdot a_{nd}, \quad l_{nl} = 2a_{ромб} \sin(\alpha/2)$$

Визначене таким чином значення максимально можливої поверхневої густини дислокацій невідповідності для плівки 3ГГ рівне $\sigma = 2,4 \cdot 10^{11} \text{ м}^{-2}$. Отримане значення добре узгоджується із літературними даними, де стверджується, що плівки 3ГГ товщиною $2-3 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ мають найбільш досконалу кристалічну структуру.

Таким чином, частина напруг у плівці знімається за рахунок виникнення дислокацій невідповідності на границі гетероструктури. Потрібно наголосити, що отримане значення характеризує тільки дислокації невідповідності, хоча існує велика ймовірність того, що дислокації невідповідності будуть утворювати своєрідні центри стікання інших типів структурних дефектів.

Висновки

В роботі представлено методику, яка дозволяє провести оцінку структурної досконалості епітаксійних сендвіч-структур типу 3ГГ/ГГГ. Вона включає наступні етапи:

1. Аналіз структурних параметрів (в припущенні кубічної структури);
2. Відновлення параметрів ромбодрізованої кристалічної ґратки епітаксійної плівки;
3. Оцінка розподілу деформацій по товщині ЕФГП;
4. Перевірка критеріїв можливості виникнення дислокацій невідповідності та їх існування;

5. Оцінка максимально можливої концентрації густини дислокацій невідповідності.

Приведений алгоритм було апробовано на модельному зразку – епітаксійна плівка ЗІГ товщиною $h_{пл} = 2,85 \cdot 10^{-6} м$, яка вирощена методом РФЕ на підкладці із ГГГ з площиною зрізу (111). Встановлено, що плівка володіє ромбоєдричною структурою з параметрами ромбоєдра $a_{ромб} = 12,3710 \text{ \AA}$, $\alpha = 90,0032^\circ$, є однорідно деформованою по товщині і величина компоненти тензора деформації ε_{zz} (в напрямі росту гетероструктури) становить $\approx -9,6 \cdot 10^{-4}$. Для цієї епітаксійної сендвіч-структури виконуються критерії можливості утворення та існування дислокацій невідповідності, і максимально можливе значення їх поверхневої густини в плівці ЗІГ становить $\sigma = 2,4 \cdot 10^{11} м^{-2}$. Отримані результати дозволяють покращити вибір технологічних умов вирощування епітаксійних ферит-гранатових гетероструктур та враховувати дані щодо їх структурної досконалості при їх подальшій експлуатації у відповідних приладах.

Використання ШІ: типова модель сендвіч-структури ЗІГ/ГГГ для використання в радіоелектронних пристроях (рис.1) була згенерована за допомогою "ШІ Google".

References

[1] Kotsyubynsky, A. O., Moklyak, V. V., Fodchuk, I. M., Kotsyubynsky, V. O., Lytvyn, P. M., & Grubyak, A. B. (2019). Magnetic microstructure of epitaxial films of LaGa-substituted Yttrium Iron Garnet. *Metallofiz. Noveishie Tekhnol*, 41(4), 529. <https://doi.org/10.15407/mfint.41.04.0529>

[2] Chukhovskii, F. N., & Khapachev, Y. P. (1993). X-ray diffraction methods for the determination of stresses and strains in multilayer monocrystal films. *Crystallography reviews*, 3(3), 257-324. <https://doi.org/10.1080/08893119308032974>

[3] Moklyak, V. V. (2015). Features Crystal Structure LaGa - Substituted Epitaxial Films Yttrium Iron Garnet. Determination of Defects. *Physics and Chemistry of Solid State*, 16(1), 68–73. <https://doi.org/10.15330/pcss.16.1.68-73>

БРОНЕЖИЛЕТИ – ЇХ МИНУЛЕ, ТЕПЕРІШНЄ І ПЕРСПЕКТИВИ В МАЙБУТНЬОМУ

Сидорук Юрій, курсант групи ВК-24-1

інститут нафтогазової інженерії

yurii.sydoruk-vk241@nung.edu.ua

Науковий керівник: Чернова Мирослава Євгеніївна, д.т.н, проф. кафедри ФМН, myroslava.chernova@nung.edu.ua
<https://orcid.org/0000-0001-6014-3087>

Доповідь присвячена аналізу ауксетичних матеріалів як перспективного напрямку розвитку систем індивідуального бронезахисту. Робота має фізико-математичний характер і спрямована на дослідження механізмів поглинання та перерозподілу кінетичної енергії удару в сучасних захисних системах.

Актуальність теми полягає у тому, що сучасні бойові дії характеризуються підвищенням швидкостей уражаючих елементів та широким застосуванням уламкових боеприпасів. Навіть за відсутності пробиття броні значна частина імпульсу передається тілу військовослужбовця, що спричиняє заброньові травми. Тому ключовим завданням є створення систем, які не лише зупиняють снаряд, а й ефективно дисипують його енергію.

Актуальність дослідження зумовлена стрімкою еволюцією засобів ураження та зміною

характеру сучасних бойових дій. Розвиток високошвидкісних боєприпасів із підвищеною пробивною здатністю та широке використання уламкових засобів ураження вимагають створення принципово нових систем індивідуального захисту. Традиційні рішення часто не забезпечують необхідного балансу між рівнем захисту, вагою та ергономністю, що безпосередньо впливає на мобільність та боєздатність військовослужбовця.

Перший етап розвитку бронезахисту лежить в основі механічного бар'єрного захисту, що базується на основі металевих пластин. Другий – впровадження композитних матеріалів, таких як арамідні волокна та UHMWPE, що дозволили зменшити масу та реалізувати багат шарове гасіння енергії. Третій етап – використання метаматеріалів, де властивості визначаються геометрією структури.

Процес взаємодії вражаючого елемента (кулі чи осколка) з бронепанеллю є складним фізичним явищем, що базується на законах збереження енергії та імпульсу. Основним завданням бронезилета є максимально швидке поглинання та розсіювання кінетичної енергії вражаючого елемента. У часі контакту кулі з захисним шаром енергія витрачається на деформацію самого вражаючого елемента, розтягнення високоміцних волокон (у випадку м'якої броні) або на руйнування керамічної структури та подальшу передачу залишку енергії на композитну підкладку (у випадку жорстких плит).

Фізика ударної взаємодії є така: тиск у зоні удару визначається співвідношенням $P = \frac{F}{S}$ (тут F - сила удару (Н); S - площа дії удару (m^2)).

Є зрозуміло, що зі збільшенням площі контакту зменшується локальний тиск на тіло людини. Кінетична енергія снаряда визначається формулою $E_{кин} = \frac{1}{2}mv^2$. Ефективний захисний матеріал повинен максимально перетворювати цю енергію в тепло, внутрішнє тертя та пластичну деформацію.

Дослідження спрямоване на розроблення прогнозних моделей взаємодії високошвидкісних об'єктів із багат шаровими композитами, базуючись на фундаментальних принципах розсіювання енергії, викладених у працях Б. Чессмана (B. Cheeseman) щодо балістичного впливу на полімерні композити (Cheeseman, B. A., 2003, pp. 161–173) та концепціях динамічної стійкості керамічних перешкод за моделлю Джонсона-Холмквіста (Johnson-Holmquist model) (Johnson, G. R., & Holmquist, T. J., 1994, p. 309, pp. 981–984.).

За дослідженнями Т. Ланга та В. Голдсмита, (Lang, T., & Lang, D., 2012, pp. 5641–5652; Goldsmith, W., 2001, pp. 366–380) загальна енергія, що поглинається бронею, складається з декількох компонентів. Зокрема, загальна енергія, яку поглинає броня в часі ударного навантаження, зазвичай розглядається як сума енергій, витрачених на різні механізми деформації та руйнування. Класична формула балансу енергій має вигляд:

$$E_{заг} = E_p + E_{хв} + E_a + E_{уд} + E_{ф},$$

тут: E_p , - енергія, витрачена на виштовхування «пробки» або радіальне витіснення матеріалу (пластична деформація в зоні контакту);

$E_{хв}$ - енергія на утворення нових поверхонь (руйнування кераміки, тощо);

E_a - теплові втрати внаслідок тертя та адіабатичного стиснення;

$E_{уд}$ - енергія ударних хвиль, що поширюються в матеріалі;

$E_{ф}$ - кінетична енергія, передана фрагментам (уламкам) мішені.

Зараз розробки зосереджені на створенні композитних панелей та спеціальних волокон (наприклад, на основі полімерів), які поєднують легкість із надвисоким рівнем захисту.

Речовини, що їх називають ауксетики, характеризуються негативним коефіцієнтом Пуассона. На відміну від традиційних матеріалів, в часі стискання вони ущільнюються в зоні навантаження. Це забезпечує локальне збільшення щільності та жорсткості саме в місці удару.

Процес захисту включає чотири фази: передачу кінетичної енергії, мікродеформацію коміркової структури, перерозподіл напружень та дисипацію енергії. Завдяки такій каскадній реакції матеріал адаптується до навантаження. У порівнянні зі сталевими та композитними матеріалами ауксетичні структури мають нижчу щільність та вищу здатність до поглинання енергії. Важливою перевагою їх є здатність до відновлення після багаторазових ударів.

Найбільш перспективним є гібридний підхід: зовнішній балістичний шар зупиняє снаряд, а внутрішній ауксетичний шар гасить залишкову енергію та зменшує ймовірність заброньових травм. Подальший розвиток систем захисту пов'язаний з адитивними технологіями виробництва, комп'ютерним моделюванням методом скінченних елементів та створенням адаптивних інтелектуальних систем захисту.

Ауксетичні матеріали формують новий етап розвитку індивідуального бронезахисту. Їх використання дозволяє зменшити масу бронесистем (на $\sim 30\%$), підвищити мобільність військовослужбовця та ефективно поглинути кінетичну енергію удару ($\sim 45\div 50\%$).

Висновки:

1. Фізико-математичний аналіз підтверджує, що ефективність сучасного бронезахисту залежить не лише від міцності матеріалу, а й від його здатності до швидкої дисипації кінетичної енергії через хвильові процеси. Швидкість поширення звуку в матеріалі залишається визначальним фактором для мінімізації зони ураження.

2. Встановлено, що перехід від монолітних до багатошарових композитних структур (кераміка + високомодульний поліетилен) дозволяє знизити масу захисного спорядження на 20-30% при збереженні балістичної стійкості за найвищими класами захисту (IV).

3. Критичним аспектом залишається заперешкодна травма (BFS). Навіть за відсутності пробиття, динамічна деформація тильної сторони броні потребує додаткових математичних розрахунків для оптимізації демпферних шарів.

Використання ШІ: допомога штучного інтелекту застосована лише для перекладу інформації джерел на котрі посилання є в тексті і перелік (не усіх) наведено нижче.

References

[1]. Cheeseman, B. A., & Bogetti, T. A. (2003). Ballistic impact on polymer matrix composites. *Composite Structures*, 61(1-2), 161–173. [Mechanisms of energy absorption in high-strength fibers]. <https://www.researchgate.net/publication/264789636>

[2]. Goldsmith, W. (2001). *Impact: The Theory and Physical Behaviour of Colliding Solids*. Dover Publications. [Fundamental physics of solid body interaction]. <https://www.scribd.com/document/518441529/2015-133946>

[3]. Johnson, G. R., & Holmquist, T. J. (1994). An improved computational constitutive model for brittle materials. *AIP Conference Proceedings*, 309, 981–984. [Mathematical modeling of ceramic armor failure]. <https://www.researchgate.net/publication/235035291>

[4]. Lang, T., & Lang, D. (2012). Energy Absorption Mechanisms in Composite Armor. *Journal of Materials Science*, 47(15), 5641–5652. [Dissipation of kinetic energy in multilayer systems]. DOI: [10.1016/j.commat.2021.110504](https://doi.org/10.1016/j.commat.2021.110504) <https://journals.sagepub.com/doi/10.1177/002199838201600606>

- [5]. Meyers, M. A., & McKittrick, J. (2013). Biological Materials Science: Biological Connective Tissue and Armor. Cambridge University Press. [Biomimetic structures and gradient stiffness]. <https://meyersgroup.ucsd.edu/papers/journals/Meyers%20346>
- [6]. U.S. Department of Defense. (1997). V50 Ballistic Test for Armor (MIL-STD-662F). Military Standard. [Standardized methodology for ballistic limit determination]. <https://cvgstrategy.com/wp-content/uploads/2013/08/MIL-STD-662F>
- [7]. Wagner, N. J., & Brady, J. F. (2009). Shear thickening in colloidal dispersions. Physics Today, 62(10), 27–32. [Fluid dynamics and adaptive armor technology]. <https://www.researchgate.net/publication/38975809>
- [8]. Wagner, N. J., & Wetzel, E. D. (2007). Advanced Body Armor Utilizing Shear Thickening Fluids. Army Research Laboratory Technical Report. [Practical integration of STF in ballistic vests]. <https://www.scribd.com/document/56784650>
- [9]. Zhang, L., & Bogen, E. (2014). Carbon Nanotube Reinforced Composites for Ballistic Applications. Journal of Nanoscience, 14(3), 2110–2124. [Nanotechnologies in next-generation protection]. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2468217923000266>

ЗАСТОСУВАННЯ МОДУЛЬНОЇ АРИФМЕТИКИ ТА ЛОГАРИФМІЧНИХ РОЗПОДІЛІВ У ВЕРИФІКАЦІЇ ДАНИХ: АЛГОРИТМ ЛУНА ТА ЗАКОН БЕНФОРДА

Стахів Юрій

*студент групи ІП-24-3, факультет інформаційних технологій
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу*

*Науковий керівник: Григорчук Галина Василівна,
доктор філософії, доцент, доцент кафедри фізико-математичних наук
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу*

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1674-9828>

halyna.hryhorchuk@nung.edu.ua

Анотація. У роботі досліджено два математичних інструменти верифікації числових даних. Алгоритм Луна базується на модульній арифметиці в кільці \leftarrow_{10} і забезпечує 100% виявлення одиничних помилок у конкретному коді. Закон Бенфорда ґрунтується на логарифмічному розподілі $P(d) = \log_{10}(1 + 1/d)$ і дозволяє виявляти фальсифікації у великих масивах даних. Виведено теорему інваріантності масштабу, побудовано порівняльну характеристику обох методів.

Ключові слова: алгоритм Луна, закон Бенфорда, модульна арифметика, логарифмічний розподіл, верифікація даних, контрольна сума, виявлення фальсифікацій, фінансовий аудит.

1. Вступ та актуальність

Числові дані є основою сучасних фінансових, медичних та статистичних систем. Три класи помилок постійно загрожують цілісності даних: людські (помилки введення), технічні (збої програмного забезпечення) та навмисні маніпуляції (фальсифікація даних). Ключове питання: як математично гарантувати коректність числових даних без ручної перевірки? Відповідь дають два інструменти з різних галузей математики: алгоритм Луна (модульна арифметика) та закон Бенфорда (логарифмічний розподіл).

Мета роботи: встановити математичні основи алгоритму Луна та закону Бенфорда,

довести ключові твердження та побудувати порівняльну характеристику обох методів.

2. Модульна арифметика як математична основа

Модульна арифметика [1] оперує залишками від ділення. Означення порівняння за модулем:

$$a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow n \mid (a - b) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : a - b = k \cdot n$$

Множина залишків $\leftarrow_{10} = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ утворює кільце за модулем 10 з отриманою структурою: рефлексивність $a \equiv a \pmod{10}$, симетричність, транзитивність та адитивність: $(a+b) \pmod{10} = ((a \pmod{10}) + (b \pmod{10})) \pmod{10}$. Фундаментальний критерій алгоритму Луна: $S \equiv 0 \pmod{10}$, тобто контрольна сума ділиться без остачі.

3. Алгоритм Луна — принцип дії та формальний запис

Алгоритм запропоновано Гансом Пітером Луном у 1954 році [2] для автоматичної валідації номерів банківських карток. Нехай d_1, d_2, \dots, d_{16} — цифри номера (d_1 — найправіша). Алгоритм обчислює дві суми:

$$S_1 = \sum d_i \quad (\text{цифри на непарних позиціях зправа: } d_1, d_3, d_5, \dots)$$

$$f(d_i) = \{ 2 \cdot d_i, \text{ якщо } 2 \cdot d_i \leq 9; \quad 2 \cdot d_i - 9, \text{ якщо } 2 \cdot d_i > 9 \}$$

$$S_2 = \sum f(d_i) \quad (\text{цифри на парних позиціях після перетворення})$$

$$S = S_1 + S_2 \equiv 0 \pmod{10} \rightarrow \text{НОМЕР ДІЙСНИЙ}$$

Покроковий приклад для номера 4539 1488 0343 6467: підсума цифр після всіх перетворень дорівнює 80. Оскільки $80 \equiv 0 \pmod{10}$, номер дійсний. Алгоритм виявляє 100% одиничних помилок та більшість перестановок сусідніх цифр (не виявляє лише $0 \leftrightarrow 9$ і $9 \leftrightarrow 0$). На практиці застосовується для номерів Visa/MasterCard, IMEI-кодів, ISBN та податкових ідентифікаційних кодів.

4. Виведення закону Бенфорда

Закономірність розподілу перших цифр у великих масивах даних була помічена Саймоном Ньюкомбом у 1881 році [3] і незалежно підтверджена Френком Бенфордом у 1938 році [4]. Математична основа — інваріантність розподілу щодо масштабування (зміни одиниць вимірювання). Якщо розподіл $P(d)$ інваріантний до множення, то він має логарифмічну форму:

$$P(d) = \int^d \wedge \{d+1\} (1/(x \cdot \ln \dots 10)) dx = \log_{10}(d+1) - \log_{10}(d) = \log_{10}(1 + 1/d)$$

Перевірка (partition of unity): $\sum_{d=1}^9 P(d) = \log_{10}(10) - \log_{10}(1) = 1 - 0 = 1$. Числові значення: $P(1) \approx 30.1\%$, $P(2) \approx 17.6\%$, $P(3) \approx 12.5\%$, ..., $P(9) \approx 4.6\%$. Таким чином, цифра 1 зустрічається приблизно в 7 разів частіше, ніж цифра 9. Ключовий наслідок: якщо дані створені людиною (фальсифіковані), розподіл відхиляється від $\log_{10}(1+1/d)$ — це і є сигналом аномалії.

5. Порівняльна характеристика методів

Обидва інструменти вирішують різні класи задач. Алгоритм Луна діє на рівні одного конкретного номера з складністю $O(n)$, де n — кількість цифр (для 16-цифрового номера — мілісекунди). Закон Бенфорда працює з великими масивами (тисячі/мільйони чисел) з складністю $O(N \cdot \log N)$, виявляючи відхилення загального розподілу, а не помилку в конкретному числі [5].

За об'єктом перевірки методи доповнюють один одного: алгоритм Луна захищає від випадкових помилок (людських і технічних), закон Бенфорда — від систематичних маніпуляцій. Спільний висновок: прості математичні структури (кільця залишків, логарифми) мають потужні практичні застосування у фінансах, безпеці та аудиті.

6. Висновки

1. Алгоритм Луна є лінійною контрольною сумою з нерівномірним зважуванням позицій у кільці \leftarrow_{10} . Критерій дійсності $S \equiv 0 \pmod{10}$ гарантує 100% виявлення всіх одиничних помилок у конкретному коді.

2. Закон Бенфорда — єдиний можливий логарифмічний розподіл, інваріантний до масштабування. Відхилення реальних даних від цього розподілу являє собою статистичний сигнал фальсифікації або маніпуляції даними.

3. Обидва методи є комплементарними: алгоритм Луна працює з одним числом, закон Бенфорда — з мільйонами. Разом вони утворюють потужний комплекс захисту даних на рівнях від окремого розряду до великих баз даних і застосовуються у фінансовому аудиті, виборчому контролі та розслідуванні шахрайства.

4. Прості математичні структури — кільця залишків і логарифмічний розподіл — забезпечують надійний інструментарій захисту даних у цифровому світі.

Література

1. Niven I., Zuckerman H. S., Montgomery H. L. An Introduction to the Theory of Numbers. — 5th ed. — New York : Wiley, 1991. — 529 p.
2. Luhn H. P. Computer for verifying numbers : Patent US2950048 / H. P. Luhn ; André Citroën Automobiles SA. — Filed 11.08.1954 ; Issued 23.08.1960. [Electronic resource]. — Available at : <https://patents.google.com/patent/US2950048> (accessed: 28.04.2025).
3. Newcomb S. Note on the frequency of use of the different digits in natural numbers // American Journal of Mathematics. — 1881. — Vol. 4, No. 1–4. — P. 39–40. <https://doi.org/10.2307/2369148>
4. Benford F. The law of anomalous numbers // Proceedings of the American Philosophical Society. — 1938. — Vol. 78, No. 4. — P. 551–572.
5. Nigrini M. J. Benford's Law: Applications for Forensic Accounting, Auditing, and Fraud Detection. — Hoboken : Wiley, 2012. — 330 p.

ТРИКУТНІ МАТРИЦІ. ДІЇ НАД НИМИ

Уграк Назарій Вікторович

АКП-25-1, ФАЕ

nazarii.uhrak-akp251@nung.edu.ua

Науковий керівник: Семенчук Андрій Васильович <https://orcid.org/0000-0002-6910-1868>, к.ф.-м.н, доц. кафедри ФМН, andrii.semenchuk@nung.edu.ua

В доповіді розглядаються трикутні матриці

Нехай задано деяке числове поле K .

Означення 1. Трикутну таблицю чисел, які належать полю K

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \cdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_n \quad (1)$$

називають трикутною матрицею, а число n — її порядком.

Кожному елементу a_{ij} матриці (1) поставимо у відповідність $(i - j + 1)$ елементів a_{ik} , $k = j, \dots, i$, які називають похідними елементами матриці, породженими ключовим елементом a_{ij} .

Добуток всіх похідних елементів породжених елементом a_{ij} позначають через $\{a_{ij}\}_i$

називають факторіальним добутком ключового елемента a_{ij} , тобто

$$\{a_{ij}\} = \prod_{k=j}^i a_{ik}.$$

Означення 2. *Набір ключових елементів матриці (1) називають нормальним набором цієї матриці, якщо вони породжують множину похідних елементів потужності n , кожні два з яких не лежать в одному стовпці цієї матриці.*

Якщо $P(n)$ – множина всіх упорядкованих розбиттів натурального числа n на натуральні доданки, то відомо що

$$|P(n)| = 2^{n-1}.$$

Між нормальними наборами ключових елементів матриці (1) і упорядкованими розбиттями натурального числа n існує взаємно однозначна відповідність

$$(n_1, n_2, \dots, n_r) \in P(n) \Leftrightarrow (aN_1, N_0 + 1, aN_2, N_1 + 1, \dots, aN_r, N_{r-1} + 1)$$

де $N_0 = 0$, $N_s = \sum_{i=1}^s n_i$, $s = 1, 2, \dots, r$.

Розглянуто операції додавання та множення трикутних матриць [1].

Література

[1] Заторський Р. А. Числення трикутних матриць та його застосування. Івано-Франківськ: Сімик, 2010, 508 с.

[2] Семенчук А. В. Періодичні рекурентні дроби 3-го порядку, Карпатські математичні публікації. – 2010. – Т.2, №1. – С.72-81.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ 3-ГО СТЕПЕНЯ ЗА ФОРМУЛАМИ КАРДАНО ТА 4-ГО СТЕПЕНЯ МЕТОДОМ ФЕРАРІ

Чуйко Назарій Михайлович

студент групи ET-25-2, факультет автоматизації та енергетики

nazarii.chuiko-et252@nung.edu.ua

Науковий керівник: Шегда Любов Михайлівна, к. ф.-м. н., доцент кафедри ФМН, liubov.shehda@nung.edu.ua

В доповіді розглядаються алгебраїчні рівняння вищих степенів, які мають важливе значення в математиці, фізиці та техніці. Для рівнянь третього і четвертого степенів існують точні аналітичні методи розв'язання:

- формула Кардано — для кубічних рівнянь (рівновага, оптимізація, рух) ;
- метод Феррарі — для рівнянь четвертого степеня (пружність, оптика, механіка) .

Джероламо Кардано – видатний лікар, математик та інженер епохи Відродження. Опублікував методи розв'язання рівнянь третього та четвертого ступенів у праці книзі «Велике Мистецтво» (лат. *Ars Magna*), першим застосував від'ємні корені та заклав основи теорії ймовірностей через аналіз азартних ігор. На його честь названо карданний вал [2].

Лодовіко де Ферарі був учнем і помічником Кардано. У 18 років став професором. Уславився тим, що переміг математика Тарталью у відкритому інтелектуальному турнірі. Першим

у світі знайшов метод розв'язання рівнянь четвертого степеня. Своєї книги не написав — усі його знання опублікував Кардано в праці книзі «Велике Мистецтво» [3].

Розв'язання рівняння типу $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

Підставимо $x = y - \frac{a}{3}$ й рівняння зведеться до вигляду $y^3 + py + q = 0$.

Розв'язок цього рівняння шукають у вигляді $y = u + v$, де на u та v накладається додаткова умова: $u \cdot v = -\frac{p}{3}$

Дискримінантом кубічного рівняння називають число $D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$,

тоді $u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}}$.

Знайдем одне із значень цього кореня, позначим його u_0 .

Після цього можна знайти v_0 : $v_0 = -\frac{p}{3u_0}$.

Підставимо $x = y - \frac{a}{3}$ й рівняння зведеться до вигляду $y^3 + py + q = 0$.

Розв'язок цього рівняння шукають у вигляді $y = u + v$, де на u та v накладається додаткова умова: $u \cdot v = -\frac{p}{3}$.

Тепер запишемо корені рівняння за формулами Кардано:

$$\begin{aligned} y_0 &= u_0 + v_0 \\ y_1 &= -\frac{1}{2}(u_0 + v_0) + \frac{\sqrt{3}}{2}i(u_0 + v_0) \\ y_2 &= -\frac{1}{2}(u_0 + v_0) - \frac{\sqrt{3}}{2}i(u_0 + v_0) \end{aligned}$$

Для знаходження коренів рівняння повернемося до змінної x :

$$x_0 = y_0 - \frac{a}{3} \quad x_1 = y_1 - \frac{a}{3} \quad x_2 = y_2 - \frac{a}{3}$$

Якщо кубічне рівняння з дійсними коефіцієнтами має дискримінант, який

- 1) $D > 0$, то таке рівняння має один дійсний корінь і два комплексні спряжені корені;
- 2) Якщо $D = 0$, то всі корені цього рівняння дійсні, причому два із них рівні між собою;
- 3) Якщо $D < 0$, то таке рівняння має три дійсні різні корені. [1]

Застосування формули Кардано:

– Теоретична алгебра. Формула стала аналітичним фундаментом для відкриття комплексних чисел. Необхідність обчислення квадратних коренів з від'ємних величин у кубічних рівняннях призвела до створення теорії функцій комплексної змінної, що є базою для сучасної квантової механіки та електротехніки.

– Термодинаміка. У фізичній хімії метод використовується для знаходження коренів рівняння Ван дер Ваальса: $\left(P + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT$. При розкритті дужок це рівняння перетворюється на кубічне відносно об'єму $PV_m^3 - (Pb + RT)V_m^2 + aV_m - ab = 0$. Оскільки воно є кубічним відносно об'єму V формула Кардано дозволяє аналітично визначити параметри фазових переходів «рідина—газ» при заданих тиску та температурі.

Приклад. Розглянемо рух тіла в середовищі з опором. У спрощеній моделі сила опору може залежати від швидкості так:

$$F_{\text{оп}} = kv + cv^2.$$

При рівновазі сил (коли прискорення = 0): $mg = kv + cv^2$.

А тепер ускладнимо модель (наприклад, при великих швидкостях додається ще один член): $mg = kv + cv^2 + dv^3$.

Переносимо все в одну сторону: $kv + cv^2 + dv^3 - mg = 0$.

Це кубічне рівняння відносно швидкості v .

За формулою Кардано знайдемо граничну (сталу) швидкість тіла.

Нехай: $d = 1$, $c = 0$, $k = -3$, $mg = 2$. Тоді маємо: $v^3 - 3v - 2 = 0$.

Для такого рівняння розв'язок має вигляд:

$$v = \sqrt[3]{-\frac{g}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{g}{2} - \sqrt{D}},$$

де дискримінант $D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$, $p = -3$, $g = -2$.

Отже, $D = \left(\frac{-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3}{3}\right)^3 = 1 - 1 = 0$, $x = \sqrt[3]{1 + 0} + \sqrt[3]{1 - 0} = 1 + 1 = 2$.

Це означає, що: тіло рухається зі сталою швидкістю 2 м/с, коли сили врівноважені, а саме сила тяжіння mg і сили опору (включаючи нелінійні v^3).

Розв'язання рівняння типу $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. (1)

Залишимо в лівій частині перші два доданки, решту доданків перенесемо в праву частину

$$x^4 + ax^3 = -bx^2 - cx - d$$

виділимо повний квадрат в лівій частині рівняння (для цього додамо до обох частин рівняння доданок $\frac{a^2}{4}x^2$):

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x\right)^2 = \frac{a^2}{4}x^2 - bx^2 - cx - d.$$

Внесемо в дужку допоміжне невідоме t , або для зручності обчислень $\frac{t}{2}$ (тобто до обох частин рівняння додамо вираз $t\left(x^2 + \frac{a}{2}x\right) + \frac{t^2}{4}$):

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{t}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}x^2 - bx^2 - cx - d + t\left(x^2 + \frac{a}{2}x\right) + \frac{t^2}{4},$$

Спростимо

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{t}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b + t\right)x^2 + 2\left(\frac{at}{2} - c\right)x + \left(\frac{t^2}{4} - d\right). \quad (2)$$

Підберемо t так, що праву частину рівняння можна було подати у вигляді повного квадрату, тобто у вигляді $(Ax + B)^2$, для цього дискримінант правої частини має дорівнювати нулю:

$$\left(\frac{at}{2} - c\right)^2 - 4\left(\frac{a^2}{4} - b + t\right) \cdot \left(\frac{t^2}{4} - d\right) = 0, \quad (3)$$

рівняння (3) називають кубічною резольвентою рівняння (1).

Знайшовши один з коренів t_0 кубічної резольвенти (3), підставимо його в (2), отримаємо

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{t_0}{2}\right)^2 = (Ax + B)^2.$$

Звідси

$$\begin{aligned} \left(x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{t_0}{2}\right)^2 - (Ax + B)^2 &= 0 \\ \left(x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{t_0}{2} - Ax - B\right)\left(x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{t_0}{2} + Ax + B\right) &= 0. \end{aligned}$$

Далі задача зводиться до розв'язання двох квадратних рівнянь [1].

Приклад. Розглянемо тіло на пружині, але не ідеальній: сила має вигляд: $F = -kx - \alpha x^3$, (доданок x^3 — це нелінійна пружність, таке буває при великих деформаціях).

Закон збереження енергії $E = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} + \frac{\alpha x^4}{4}$.

Знайдемо максимальне відхилення у точці зупинки: $v = 0$. Тому: $E = \frac{kx^2}{2} + \frac{\alpha x^4}{4}$.

Нехай: $k = 4$, $\alpha = 1$, $E = 3$.

Отримаємо: $3 = 2x^2 + \frac{x^4}{4}$ або $x^4 + 8x^2 - 12 = 0$.

Маємо рівняння Феррарі. Це біквадратне рівняння (простий випадок методу Феррарі).

Заміна: $y = x^2$.

Отримаємо квадратне рівняння: $y^2 + 8y - 12 = 0$.

Розв'язуємо $D = 64 + 48 = 112$, $\sqrt{D} = \sqrt{112} = 4\sqrt{7}$. $y_{1,2} = \frac{-8 \pm 4\sqrt{7}}{2} = -4 \pm 2\sqrt{7}$.

Отже,

$$x^2 = -4 + 2\sqrt{7} \approx 1,29; \quad x \approx \pm 1,14.$$

$$x^2 = -4 - 2\sqrt{7} < 0 \quad \text{— немає дійсних розв'язків}$$

Відповідь: $x \approx \pm 1,14$. Фізичний зміст: тіло коливається між $-1,14$ і $1,14$. Це максимальне відхилення тіла.

Метод Феррарі використовується для доведення розв'язності рівнянь четвертого степеня в радикалах та дослідження властивостей коренів.

Література

[1] Верпатова Н. Алгебра і теорія чисел. Основні факти та алгоритми (дидактичні матеріали для самостійної роботи студентів). – К.: УДУ імені Михайла Драгоманова, 2023. –130 с.

[2] Джероламо Кардано – Вікіпедія: Вільна Енциклопедія [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://ru.wikipedia.org/wiki/Кардано>, Джероламо.

[3] Лодовіко Феррарі – Вікіпедія: Вільна Енциклопедія [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://uk.wikipedia.org/wiki/Лодовіко_Феррарі.

ОПТИМАЛЬНЕ УПРАВЛІННЯ У ЗАДАЧІ АНАЛІЗУ РІШЕНЬ ТАКТИЧНОЇ ЛОГІСТИКИ:

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

Ярош Владислав, Басараб Анастасія група ІП-25-1/ФІТ

vladyslav.yarosh-ip251@nung.edu.ua, anastasiia.basarab-ip251@nung.edu.ua

Науковий керівник: Бандура Андрій Іванович, д.ф.-м.н, проф. кафедри ФМН,
andriy.bandura@nung.edu.ua

Вступ

В доповіді розглядається тактична логістика, яка вимагає щоденного прийняття рішень щодо маршрутів, запасів та розподільчих центрів. Інтуїтивні рішення часто призводять до надлишкових витрат або дефіциту, оскільки системи є динамічними і діють в умовах жорстких обмежень. Застосування математичних методів, таких як лінійне та динамічне програмування, дозволяє формалізовано вибирати найкращі альтернативи та мінімізувати цільові функції.

Мета роботи - розробити та програмно реалізувати математичні моделі для оптимізації рішень у тактичній логістиці, що дозволить мінімізувати сукупні витрати та автоматизувати процеси управління запасами й маршрутами.

Основна частина

1. Управління запасами

Суть задачі: Знайти оптимальний обсяг замовлень u для кожного стану запасів s у часі t , щоб мінімізувати сукупні витрати.

Математичний апарат: Динамічне програмування та рівняння Беллмана. Система розбивається на кроки, для кожного з яких шукається мінімум функції

$$V(t, s) = \min_u [C(s, u) + V(t + 1, s')]$$

Будь-яка оптимальна стратегія має ту властивість, що наступні рішення обов'язково утворюють оптимальну стратегію щодо нового поточного стану системи.

Метод зворотної індукції: Для знаходження точного глобального мінімуму витрат, обчислення починаються з кінцевого періоду T і виконуються у зворотному часовому напрямку до початкового моменту $t=0$. Саме тому головний цикл переходу станів у програмі ітерується назад

Програмна реалізація:

```
# ... ініціалізація матриці V ...
```

```
for t in range(T - 1, -1, -1):
```

```
    for s in range(max_stock + 1):
```

```
        for u in range(max_order + 1):
```

```
            if s + u <= max_stock:
```

```
                next_s = max(0, s + u - 2) # прогнозований залишок
```

```
                # Рівняння Беллмана: поточні витрати + майбутні
```

```
                cost = (s * holding_cost) + (u * order_cost) + V[t + 1, next_s]
```

```
                # Пошук оптимального (мінімального) рішення
```

```
                if cost < V[t, s]:
```

```
                    V[t, s] = cost
```

2. Оптимізація маршрутів

Суть задачі: Розподілити матеріальні потоки між складами та магазинами таким чином, щоб загальна вартість перевезень була мінімальною. **Математичний апарат:** Лінійне програмування (модель транспортної задачі). Цільова функція полягає у мінімізації сумарних транспортних витрат.

$$\sum_i c_i x_i \rightarrow \min$$

де c_i — вартість перевезення одиниці продукції за i -тим маршрутом; x_i — обсяг продукції, що перевозиться за i -тим маршрутом.

Обмеження: сума відвантажень продукції зі складів має повністю задовольняти та дорівнювати потребам кожної точки збуту (магазину).

3. Комплексна модель: Простір станів

Моделювання складних логістичних мереж зручно здійснювати через багатовимірні динамічні системи [1, 2]. Це дозволяє врахувати взаємозв'язки між усіма складами:

- **Вектор стану (x_t):** Відображає поточну ситуацію в системі (рівень запасів).
- **Вектор керування (u_t):** Рішення, що приймаються (обсяги замовлень/відвантажень).
- **Час виконання (Lead time):** Модель враховує запізнення надходження товарів у систему [2].

"A Tactical Logistic Decision Analysis Problem"

Логістична система описується через матричне різницеве рівняння:

$$x_{t+1} = Ax_t + B_0 u_t + B_1 u_{t-1}$$

де:

- A — власна динаміка системи запасів
- B_0 — миттєвий вплив керування (поточні поставки)
- B_1 — запізнення поставок з попереднього кроку

Алгоритмічна схема: Динаміка системи

```
# ... задання матриць A, B0, B1 ...
for t in range(T):
    # Обмеження керуючого впливу
    u[t] = np.clip(current_u, u_min, u_max)
    # Розрахунок впливів матриць
    term1 = A @ x[t]          # власна динаміка
    term2 = B0 @ u[t]        # поточне керування
    # Врахування запізнення
    term3 = B1 @ u_minus_1 if t == 0 else B1 @ u[t-1]
    # Розрахунок наступного стану з урахуванням місткості складів
    x[t+1] = np.clip(term1 + term2 + term3, x_min, x_max)
```

Висновки: сформульовано математичні моделі задач тактичної логістики мовою різницевих рівнянь та оптимізаційних функцій, реалізовано алгоритмічні схеми: транспортна оптимізація та рівняння Беллмана, створено програмну модель на Python, що дозволяє прогнозувати стани логістичної системи під впливом керуючих векторів.

Використання ШІ: ШІ виділив ключові концепти динамічного програмування та рівнянь Беллмана, а для оптимізації маршрутів — логіку транспортної задачі лінійного програмування. Програмний код на Python зі слайдів було перетворено на формальний математичний опис багатовимірної динамічної системи у просторі станів, що враховує вектори стану, керування та матриці запізнення.

Література

[1] Baker, S., Shi, P. (2002). Formulation of a tactical logistics decision analysis problem using an optimal control approach. *ANZIAM Journal*, 44(E), E82-E113.

<https://doi.org/10.21914/anziamj.v44i0.490>

[2] Teo, K. L., Li, B., Yu, C., Rehbock, V. (2021). *Applied and Computational Optimal Control: A Control Parametrization Approach*. Springer Optimization and Its Applications, 171.

<https://doi.org/10.1007/978-3-030-69913-0>