Завдання I туру олімпіади з математики
серед студентів ІФНТУНГ за 2025-2026 навчальний рік (11 березня 2026 року)

Задача 1. Довести, що при $x^2+y^2+z^2=1$ маємо $|\Delta| \leq 1$, де $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$. Скористайтеся, що $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots a_n} \leq \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ при $a_j \geq 0$, $j \in \{1, 2 \ldots, n\}$.

Задача 2. Розв'язати рівняння $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\arcsin(x+\arcsin(x+\arcsin(x+\ldots+\arcsin(x))))}_{n \arcsin} = b$, де b — дійсний параметр.

Задача 3. *Відомо, що* $f'(\sin^2 \frac{x}{2}) = \cos x + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}$. *Знайти* $f(x)$ *для* $0 < x < 1$.

Задача 4. *Знайти суму подвійного ряду* $\sum_{m\in\mathbb{N}} \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n\neq m}} \frac{1}{n^2-m^2}$, *якщо* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Задача 5. *Нехай* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *такі, що* $f^{(n)}(x))$ *та* $g^{(n)}(x)$ *— неперервні функції для всіх* $n > 0$. *Чи з умови* $\forall x \in [a,b] :\ g(x) = f(x)$ *випливає* $\forall x \notin [a,b] : f(x) = g(x)$?

Задача 6. *Знайти всі функції* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *такі, що* $(x+1)f(xf(y)) = xf(y(x+1))$.

Задача 7. *Нехай* $f(x) = e^x$. *Для довільних* $a < b$ *знайдіть точку* $c \in (a,b)$ *таку, що* $\frac{f'(c)}{f(c)} = \frac{1}{a-c} + \frac{1}{b-c}$.

Завдання I туру олімпіади з математики
серед студентів ІФНТУНГ за 2025-2026 навчальний рік (11 березня 2026 року)

Задача 1. Довести, що при $x^2+y^2+z^2=1$ маємо $|\Delta| \leq 1$, де $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$. Скористайтеся, що $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots a_n} \leq \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ при $a_j \geq 0$, $j \in \{1, 2 \ldots, n\}$.

Задача 2. Розв'язати рівняння $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\arcsin(x+\arcsin(x+\arcsin(x+\ldots+\arcsin(x))))}_{n \arcsin} = b$, де b — дійсний параметр.

Задача 3. *Відомо, що* $f'(\sin^2 \frac{x}{2}) = \cos x + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}$. *Знайти* $f(x)$ *для* $0 < x < 1$.

Задача 4. *Знайти суму подвійного ряду* $\sum_{m\in\mathbb{N}} \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n\neq m}} \frac{1}{n^2-m^2}$, *якщо* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Задача 5. *Нехай* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *такі, що* $f^{(n)}(x))$ *та* $g^{(n)}(x)$ *— неперервні функції для всіх* $n > 0$. *Чи з умови* $\forall x \in [a,b] :\ g(x) = f(x)$ *випливає* $\forall x \notin [a,b] : f(x) = g(x)$?

Задача 6. *Знайти всі функції* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *такі, що* $(x+1)f(xf(y)) = xf(y(x+1))$.

Задача 7. *Нехай* $f(x) = e^x$. *Для довільних* $a < b$ *знайдіть точку* $c \in (a,b)$ *таку, що* $\frac{f'(c)}{f(c)} = \frac{1}{a-c} + \frac{1}{b-c}$.

Розв'язки задач із студентської олімпіади з математики в ІФНТУНГ за 2025-2026 навчальний рік 11 березня 2026 року

Задача 1. Довести, що при $x^2+y^2+z^2=1$ справедлива нерівність $|\Delta| \le 1$, де $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$. Скористайтеся тим, що середнє геометричне не перевищує середнього арифметичного, тобто $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots a_n} \le \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ при $a_j \ge 0$, $j \in \{1, 2 \ldots, n\}$.

Розв'язування. Обчислимо визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & x \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & y-x & z-x \\ x^2 & y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y-x & z-x \\ y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y+x & z+x \end{vmatrix} =$$

$(y-x)(z-x)(z-y)$. Тоді $\Delta^2 = (y-x)^2(z-x)^2(z-y)^2 \le \left(\frac{(y-x)^2+(z-x)^2+(z-y)^2}{3}\right)^3$. Із нерівності $(x+y+z)^2 \ge 0$, одержуємо що $x^2+y^2+z^2 \ge -2xy-2zx-2zy$. Враховуючи це маємо $\Delta^2 \le \left(\frac{2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2zx-2zy}{3}\right)^3 \le \left(\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{3}\right)^3 = 1$, що і потрібно було довести. □

Задача 2. Розв'язати рівняння

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\arcsin(x+\arcsin(x+\arcsin(x+\ldots+\arcsin(x))))}_{n \arcsin} = b,$$

де b — дійсний параметр.

Розв'язування. Розглянемо послідовність $a_{n+1} = \arcsin(x+a_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Легко довести, що вона обмежена та монотонна. А тому має скінченну границю b. Перейшовши до границі при $n \to \infty$ маємо $b = \arcsin(x+b)$. Звідси, $x = -b + \sin b$ при $b \in [-\pi/2; \pi/2]$. □

Задача 3. *Відомо, що* $f'(\sin^2 \frac{x}{2}) = \cos x + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}$. *Знайти* $f(x)$ *для* $0 < x < 1$.

Розв'язування.

Зрозуміло, що $\sin^2 \frac{x}{2} \in [0,1]$. Введемо формальне позначення $t = \sin^2 \frac{x}{2}$. Тоді $\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2} = 1-2t$. А $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{t}{1-t}$. Отже, $f'(t) = 1-2t+\frac{t}{1-t}$.

$$f(x) = \int_0^x (1-2t+\frac{t}{1-t})dt = t - t^2\Big|_0^x + \int_0^x (-1+\frac{1}{1-t})dt = x - x^2 + (-x - \ln|1-x|) =$$
$$= -x^2 - \ln|1-x|.$$

Задача 4. *Чи збігається подвійний ряд*

$$\sum_{m\in\mathbb{N}} \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n\ne m}} \frac{1}{n^2-m^2} \ ?$$

Якщо так, то знайдіть його суму, якщо $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Розв'язування.

Зауважимо, що при $N > 3m$ виконується рівність

$$\Big(\sum_{n=1}^{m-1} + \sum_{n=m+1}^{N}\Big)\frac{1}{n^2-m^2} = \frac{1}{2m}\Big(\sum_{n=1}^{m-1} + \sum_{n=m+1}^{N}\Big)\Big[\frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m}\Big] =$$

$$= \frac{1}{2m^2} + \frac{1}{4m^2} - \frac{1}{2m}\sum_{k=N-m+1}^{N+m}\frac{1}{k},$$

звідки

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\neq m}} \frac{1}{n^2-m^2} = \frac{3}{4m^2}.$$

Отже, подвійний ряд збігається, і його сума дорівнює $\frac{3}{4}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$.

Задача 5. *Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такі, що кожна похідна $\frac{d^n}{dx^n}(f(x))$ та $\frac{d^n}{dx^n}(g(x))$ є неперервною функцією для всіх $n > 0$. Чи з умови $\forall x \in [a,b] : g(x) = f(x)$ випливає $\forall x \notin [a,b] : f(x) = g(x)$?*

Розв'язування. Задамо дві дійсні функції f та g так:

$$f(x) = \begin{cases} \exp\Big(-\frac{1}{(x-1)^2}\Big) & \text{if } x > 1 \\ 0 & \text{if } x \in [-1,1] \\ \exp\Big(-\frac{1}{(x+1)^2}\Big) & \text{if } x < -1 \end{cases}$$

й $g(x) = 0$. Безпосередньою перевіркою переконуємося, що $\forall x \in [-1,1] : g(x) = f(x)$, але $f(x) \neq g(x)$ $\forall x \notin [-1,1]$. □

Задача 6. *Знайти всі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такі, що*

$$(x+1)f(xf(y)) = xf(y(x+1)).$$

Розв'язування. Зрозуміло, що $f(x) \equiv 0$ та $f(x) \equiv x$ є розв'язками цього рівняння.

Нехай f не дорівнює жодній з цих функцій. Припустимо, що існує точка $y_0 \neq 0$, в якій $f(y_0) = 0$. Тоді при $y = y_0$ з рівняння отримуємо $xf(y_0(x+1)) = (x+1)f(xf(y_0)) = (x+1)f(0) = 0$ для всіх x. Тому при $x \neq 0$ дістаємо $f(y_0(x+1)) = 0$, а це означає, що $f(x) \equiv 0$, адже відображення $x \mapsto y_0(x+1)$ — лінійне та сюр'єктивне.

Звідси, точка 0 — єдиний нуль для функції f. Позаяк $f(x) \equiv x$, існує точка c, в якій $f(c) \neq c$. Підставимо у рівняння такі значення $x = \frac{c}{f(c)-c}$ (тоді з огляду на доведене вище $f(c) \neq 0$ й $c \neq 0$) і $y = c$. Отримаємо

$$\frac{f(c)}{f(c)-c}f\Big(\frac{cf(c)}{f(c)-c}\Big) = \frac{c}{f(c)-c}f\Big(\frac{cf(c)}{f(c)-c}\Big)$$

Значення $f\Big(\frac{cf(c)}{f(c)-c}\Big) \neq 0$, тому можемо скоротити на це значення, а також на $f(c)-c$. Дістанемо $f(c) = c$. Прийшли до суперечності із припущенням, що $f(c) \neq c$. Отже, інших розв'язків, крім згаданих вище, не існує. □

Задача 7. *Нехай $f(x) = e^x$. Для довільних $a < b$ знайдіть точку $c \in (a, b)$ таку, що*

$$\frac{f'(c)}{f(c)} = \frac{1}{a-c} + \frac{1}{b-c}.$$

Розв'язування. $f'(x) = e^x$, тому $\frac{f'(c)}{f(c)} \equiv 1$. Звідси,

$$\frac{f'(c)}{f(c)} = 1 = \frac{1}{a-c} + \frac{1}{b-c}$$

Тоді

$$(a-c)(b-c) = b - c + a - c = a + b - 2c,$$

або

$$ab - c(a+b) + c^2 = a + b - 2c,$$
$$c^2 + c(2 - a - b) + ab - a - b = 0,$$
$$D = (2-a-b)^2 - 4(ab - a - b) = 4 + a^2 + b^2 + 4ab - 4a - 4b - 2ab - 4ab + 4a + 4b = a^2 - 2ab + b^2 + 4$$

$$c_1 = -\frac{\sqrt{(a-b)^2+4} - b - a + 2}{2}, \quad c_2 = \frac{\sqrt{(a-b)^2+4} + b + a - 2}{2}.$$

$\square$