

Івано-Франківський національний технічний
університет нафти і газу

Б.М. Рувінський

ФІЗИКА

для інженерних спеціальностей

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

2005

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Івано-Франківський національний технічний
університет нафти і газу
Кафедра фізики новітніх технологій

Б.М. Рувінський

ФІЗИКА

для інженерних спеціальностей

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
для студентів спеціальностей напряму
"інженерна механіка"

Івано-Франківськ
2005

Зміст

1	Кінематика	1
1.1	Основні поняття	2
1.2	Кінематика матеріальної точки	4
1.3	Обертальний рух	7
1.4	Запитання для самоконтролю	13
2	Динаміка матеріальної точки	19
2.1	Закони Ньютона. Інерціальні системи відліку	19
2.2	Закон збереження імпульсу. Рух центра мас	22
2.3	Робота. Кінетична енергія	25
2.4	Потенціальна енергія. Консервативні, неконсервативні сили. Закон збереження енергії	27
2.5	Сили і потенціальна енергія	32
2.6	Моменти сили і імпульсу відносно нерухомого центра	34
2.7	Запитання для самоконтролю	36
3	Механіка суцільних середовищ	39
3.1	Елементарні деформації. Коефіцієнт Пуассона	40
3.2	Пружні тіла	41
3.3	Рідина і газ у стані рівноваги	44
3.4	Основні рівняння рівноваги та руху рідин	46
3.5	Рідина в полі сили тяжіння	48
3.6	Рівняння нерозривності	48
3.7	Стационарний рух ідеальної рідини. Рівняння Бернуллі	50
3.8	Формула Торрічеллі	51
3.9	Сили в'язкого тертя	52
3.10	Течія в'язкої рідини. Формула Пуазейля	53
3.11	Закони гідродинамічної подібності	56
3.12	Запитання для самоконтролю	57
4	Елементи фізики твердого тіла	60
4.1	Типи кристалів	60
4.2	Дефекти в кристалах. Міцність кристалів	62
4.3	Зміна агрегатного стану. Фазові переходи	67
4.4	Рідкі кристали	71
4.5	Запитання для самоконтролю	75

5	Коливання	77
5.1	Незагасаючі гармонічні коливання систем з одним ступенем вільності	78
5.2	Метод векторних діаграм	82
5.3	Фазовий портрет коливальної системи	84
5.4	Вільні коливання в дисипативних системах із в'язким тертям	88
5.5	Загасання коливань у системах із сухим тертям	93
5.6	Вимушені коливання	96
5.7	Вимушені коливання під дією гармонічної сили	97
5.8	Запитання для самоконтролю	102
6	Хвильові процеси. Звук	103
6.1	Звукові хвилі	103
6.2	Звук у газах і рідинах	106
6.3	Інтенсивність звуку	109
6.4	Пружні хвилі в твердих тілах	114
6.5	Застосування звукових хвиль	116
6.6	Запитання для самоконтролю	121
7	Постійний електричний струм	123
7.1	Електричний струм	123
7.2	Закон Ома. Опір провідників	124
7.3	Природа носіїв заряду в металах	126
7.4	Класична електронна теорія металів	128
7.5	Основи квантової теорії твердого тіла	130
7.6	Динаміка електронів у кристалічній ґратці	133
7.7	Електропровідність металів	133
7.8	Напівпровідники	138
7.9	Струм в електролітах	143
7.10	Електроліз. Закони Фарадея	147
7.11	Електролітична провідність	150
7.12	Технічні застосування електролізу	152
7.13	Запитання для самоконтролю	153
8	Основні питання і закони оптики	155
8.1	Електромагнітна природа світла	156
8.2	Додавання світлових коливань. Когерентність та інтерференція	159
8.3	Застосування інтерференції в науці і техніці	162
8.4	Явище дифракції	167
8.5	Принцип Гюйгенса-Френеля	168
8.6	Поляризація світла	169
8.7	Основні поняття і закони геометричної оптики	172
8.8	Запитання для самоконтролю	177

9	Фізичні основи голографії. Оптичні квантові генератори (лазери)	179
9.1	Голографія і когерентна оптика	179
9.2	Застосування голографії	189
9.3	Оптоволоконні лінії зв'язку	192
9.4	Оптичні квантові генератори (лазери)	196
9.5	Застосування лазерів	206
9.6	Запитання для самоконтролю	208

Передмова

Навчальна програма курсу загальної фізики для технічних вузів передбачає вивчення студентами широкого спектра питань механіки, електрики та оптики. Пропонований курс є спробою поєднати традиційні питання навчального курсу з деякими новітніми найбільш важливими досягненнями сьогодення. Деякі питання викладені більш глибоко, ніж це зазвичай робиться у курсі загальної фізики, докладні математичні викладки дають розуміння процесу досліджень, вчать самостійності і вказують на важливість математичної підготовки, а, отже, і фундаментальної підготовки студента. Питання, викладені у курсі, є важливими і необхідними для підготовки фахівця будь-якої технічної спеціальності.

В курсі розглядаються основи механіки, основну увагу приділено фізиці суцільних середовищ (деформації пружних тіл, механіці рідин та газів), висвітлені деякі питання фізики твердого тіла (типи кристалічних ґраток, дефекти кристалів та їх вплив на міцність твердого тіла).

Багато уваги приділено фізиці коливальних та хвиль. Окремо розглянуто коливання в дисипативних системах із в'язким і сухим тертям. Пояснено принципи поширення звуку через гази, рідини та тверді тіла. Показано залежність між швидкістю звуку та пружними деформаціями твердого тіла, через яке відбувається поширення звуку. Звернено увагу на важливе практичне застосування ультразвуку, а також на деякі негативні наслідки, наприклад, кавітацію, що виникає при проходженні ультразвуку великої інтенсивності через рідину.

Докладно викладені питання електропровідності, основи квантової теорії твердого тіла, детально пояснено залежність опору металу від температури. Значну увагу приділено електропровідності напівпровідників, пояснені принципи проходження струму через електродні та важливість технічного застосування електролізу.

Викладено властивості електромагнітного випромінювання, наведено приклади застосування явищ інтерференції, дифракції та поляризації світла у техніці, розглянуто закони геометричної оптики та принципи роботи оптичних квантових генераторів (лазерів). Належну увагу приділено висвітленню основ голографії та її застосуванню.

Посібник рекомендується для використання, в першу чергу, при підготовці спеціалістів напряму "інженерна механіка", а також може бути корисним для студентів всіх інших інженерних спеціальностей та викладачів технічних вузів.

Розділ 1

Кінематика

Вступ; системи відліку, системи координат; шлях, переміщення, швидкість і прискорення; рівномірний та рівноприскорений, прямолінійний та криволінійний рухи; обертальний рух твердого тіла; кутова швидкість та кутове прискорення, їх зв'язок з лінійними величинами.

Вступ. Раніше інших розділів фізики стала розвиватися механіка. Механіка - наука про рух і рівновагу тіл. В широкому значенні слова рух матерії є будь-яка її зміна. Проте, в механіці під рухом розуміється тільки найпростіша його форма, а саме — переміщення тіла відносно інших тіл. Принципи механіки були вперше сформульовані Ньютоном (1643-1727 рр.) в його основній праці “Математичні начала натуральної філософії” (1687 р.). Після Ньютона механіка починає швидко розвиватися, але до початку XX століття цей розвиток йшов, в основному, у напрямі вдосконалення математичних методів механіки і застосування її законів до все нових і нових областей знання. Безперечні у той час успіхи механіки привели до уявлення, що законів механіки достатньо для пояснення всіх явищ природи (механістичний погляд на природу речей). Положення в корені змінилося з відкриттям електричних і магнітних явищ, особливо з відкриттям електромагнітних хвиль. І їх, звичайно, намагалися пояснити механістично, як хвилі в деякому пронизуючому весь простір середовищі, званому ефіром (як хвилі на поверхні води або звук в повітрі). Проте, ці спроби не увінчалися успіхом. Остаточна відмова від механістичних уявлень відбулася на початку XX століття. Перше, що з'ясувалося, - це те, що механіка Ньютона застосовна лише до порівняно повільних рухів з швидкостями, помітно меншими швидкості світла у вакуумі $c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с. Рухи, швидкості яких наближаються до швидкості світла, називають релятивістськими. В повсякденному житті ми маємо справу з швидкостями набагато меншими. Так, швидкість реактивного літака може в 2-3 рази перевищувати швидкість звуку в повітрі¹ ($v \approx 3 \cdot 10^2$ м/с). Швидкість супутника або космічного корабля $\approx 10^4$ м/с. Такого ж порядку швидкість руху Землі по орбіті навколо Сонця ($3 \cdot 10^4$ м/с). Нарешті, швидкість руху Сонця по своїй орбіті навколо центру нашої Галактики

¹Того ж порядку швидкість точки на поверхні Землі при її обертанні навколо своєї осі ($\approx 4,7 \cdot 10^2$ м/с).

порядка $3 \cdot 10^5$ м/с, що менше швидкості світла в 1000 разів.

Друге обмеження класичної механіки полягає в її незастосовності до опису явищ мікросвіту, тобто до рухів тіл малої маси в малих ділянках простору. Більш загальною наукою, що описує такі рухи, є квантова механіка, згідно якої невизначеність в знанні координат і імпульсу визначається співвідношенням невизначеності Гейзенберга

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2. \quad (1.1)$$

В застосуванні до звичайних тіл, наприклад до футбольного м'яча вагою 0,5 кг, що рухається із швидкістю 30 м/с, з доброю точністю застосовна механіка класична. Так, якщо ми не знаємо швидкість із вищою точністю, ніж $\Delta x = 10^{-3}$ мкм/с (тобто $\Delta v/v = 3 \cdot 10^{-11}$ — величезна точність), а $\Delta x \simeq 10^{-3}$ мкм ($10 \text{ \AA}$), то $\Delta p \cdot \Delta x \simeq 5 \cdot 10^{-12}$ ерг · с $\gg \hbar \approx 10^{-27}$ ерг · с. Таким чином, класична механіка Ньютона досліджує повільні рухи макроскопічних тіл.

1.1 Основні поняття

Що таке рух і як його описувати? На це питання відповідає кінематика. Рух - це переміщення тіла відносно інших тіл (зміна його положення в просторі). Таким чином, описуючи рух тіла, ми завжди прив'язуємося до якоїсь координатної системи щодо якої тіло рухається² або до системи відліку. Рух тіла визначається рухом всіх його точок (маленьких частин тіла), тому ми почнемо з опису руху матеріальної точки. Матеріальною точкою називають тіло, розміри якого достатньо малі для того щоб у русі, що розглядається, їх можна було не приймати до уваги і вважати, що уся речовина тіла сконцентрована в одній геометричній точці.

Перш за все, виберемо систему координат. Найпростіша система - це декартова система координат. Розрізняють два види координатних систем: праву і ліву (рис. 1.1).

Закони природи, зрозуміло, повинні бути записані у формі, яка не залежить від вибору системи координат. Ми для визначеності користуватимемося правою системою. Положення точки у вибраній нами системі координат задається радіус-вектором³ $\mathbf{r}$, проекції якого на осі координат рівні відповідно x , y , z . Таким чином, вектор $\mathbf{r}$ цілком однозначно визначається заданням

²Наприклад, перебуваючи у вагоні поїзда, що рухається, ми не рухаємося відносно поїзда, але разом з ним рухаємося відносно Землі.

³Вектор — фізична величина, що характеризується своєю довжиною та напрямком в просторі. Додавання векторів відбувається за правилом паралелограма.

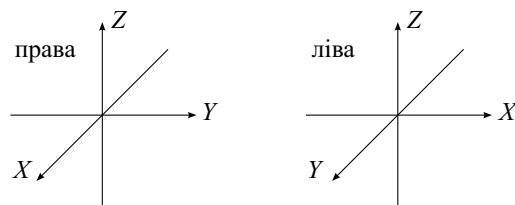


Рисунок 1.1

трьох його проекцій, хоча це можуть бути і інші три числа, наприклад довжина r та два кута θ і φ (*сферична система координат*) (рис. 1.2). Декартові координати та сферичні пов'язані між собою співвідношеннями

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= r \cos \theta, \end{aligned} \quad (1.2)$$

де

$$0 \leq r < +\infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Якщо ввести три одиничних вектора $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, напрямлених уздовж

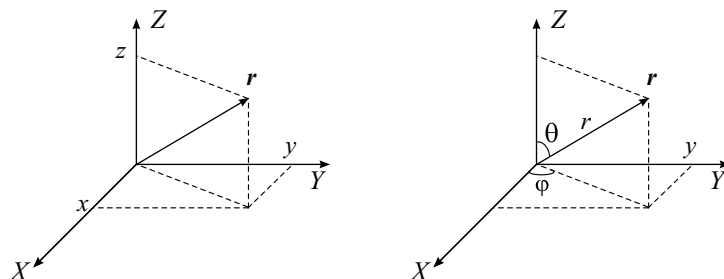


Рисунок 1.2

координатних осей (одиничні орти), то радіус-вектор $\mathbf{r}$ можна представити у вигляді суми трьох векторів:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad |\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1. \quad (1.3)$$

Квадрат довжини радіуса-вектора дорівнює сумі квадратів його проекцій:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2. \quad (1.4)$$

1.2 Кінематика матеріальної точки

Розглянемо тепер рух матеріальної точки, траєкторія якої зображена на рис. 1.3, і визначимо такі важливі для подальшого розуміння поняття, як швидкість $\mathbf{v}$ матеріальної точки і прискорення $\mathbf{a}$. Нехай радіус-вектор матеріальної точки в момент часу t_1 дорівнює $\mathbf{r}_0$, а в момент часу t_2 дорівнює $\mathbf{r}$. Таким чином, при русі радіус-вектор $\mathbf{r}$ змінюється з часом, тобто є функцією часу $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Якщо нам відомий цей закон, то ми знаємо де в будь-який момент часу знаходиться матеріальна точка. Задання функції $\mathbf{r}(t)$ еквівалентно заданню трьох функцій $x(t)$, $y(t)$ і $z(t)$ — координат матеріальної точки:

$$\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}. \quad (1.5)$$

Лінія, що описується рухомою матеріальною точкою відносно вибраної системи відліку, називається траєкторією. В залежності від форми траєкторії рух може бути прямолінійним або криволінійним.

Різниця векторів $\mathbf{r}$ і $\mathbf{r}_0$

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \quad (1.6)$$

— переміщення матеріальної точки. Це є вектор і напрямлений він з точки 1 в точку 2. Відношення переміщення матеріальної точки $\Delta\mathbf{r}$ до інтервалу часу $\Delta t = t_2 - t_1$, тобто $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$, називають *середньою швидкістю* за час Δt , яка так само є вектором, причому колінеарним⁴ вектору переміщення. Якщо ми будемо зменшувати величину інтервалу Δt (наближаючи t_2 до t_1), то відповідно буде зменшуватися і довжина вектора $\Delta\mathbf{r}$, тобто величина переміщення. Границя відношення переміщення $\Delta\mathbf{r}$ до інтервалу Δt , коли останній прямує до нуля, називають похідною вектора $\Delta\mathbf{r}(t)$ за часом t :

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}. \quad (1.7)$$

Цей вектор напрямлений по дотичній до траєкторії матеріальної точки в точці t_1 . За визначенням, швидкість матеріальної точки дорівнює

$$\mathbf{v} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (1.8)$$

⁴Вектори $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ — колінеарні, якщо $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b}$, де $\alpha = \text{const} \neq 0$. Вектори $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ розташовані паралельно і напрямлені або однаково, або у протилежних напрямках.

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}.$$

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Вектор швидкості $\mathbf{v}(t)$ так само, як і радіус-вектор, є функцією часу t . Аналогічним чином можна визначити вектор, який

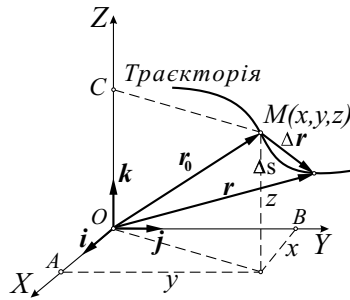


Рисунок 1.3

характеризує швидкість зміни швидкості частинки і називається прискоренням:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \quad (1.9)$$

Якщо величина і напрямок цього вектора не змінюються з часом, тобто якщо

$$\mathbf{a} = \text{const}, \quad (1.10)$$

то такий рух називається рівноприскореним. Для рівноприскореного руху швидкість матеріальної точки $\mathbf{v}(t)$, а також її радіус-вектор $\mathbf{r}(t)$ змінюються з часом за законом

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \mathbf{v}(0) + \mathbf{a}t, \\ \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}(0) + \mathbf{v}(0)t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2, \end{aligned} \quad (1.11)$$

де $\mathbf{v}(0)$, $\mathbf{r}(0)$ — відповідно швидкість та радіус-вектор в початковий момент часу $t = 0$. Частинним випадком рівноприскореного руху є рух із прискоренням, рівним нулю. Такий рух називається рівномірним. Очевидно, що він відбувається по прямій.

Розглянемо тепер питання, як знайти шлях⁵, пройдений матеріальною точкою при її русі. Розглянемо довільного вигляду

⁵Тобто довжину траєкторії точки.

траєкторію, по якій рухається матеріальна точка. Нехай у момент часу t_1 матеріальна точка займала положення на траєкторії, яке характеризується радіус-вектором $\mathbf{r}_0$, а в момент часу t_2 — радіус-вектором $\mathbf{r}$, див. рис. 1.3. Який шлях пройшла точка між цими двома положеннями? Переміщення матеріальної точки визначається вектором $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, але довжина цього вектора не визначає пройдений матеріальною точкою шлях, за винятком того випадку, коли траєкторія матеріальної точки між двома положеннями є прямою лінією. Це підказує спосіб знаходження шляху при криволінійному русі. Для цього розіб'ємо часовий інтервал $t_2 - t_1$ на велику кількість однакових інтервалів дуже маленької тривалості Δt , так що в будь-якому інтервалі рух практично прямолінійний (рис. 1.4). Кількість таких інтервалів

$$n = \frac{t_2 - t_1}{\Delta t}. \quad (1.12)$$

Позначимо вектори переміщення матеріальної точки $\Delta\mathbf{r}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) в кожному з цих інтервалів часу. Очевидно, при доста-

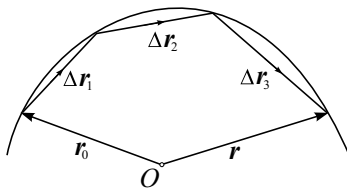


Рисунок 1.4

тньо малому Δt пройдений шлях s може бути апроксимований сумою довжин цих векторів:

$$s \approx \sum_{i=1}^n |\Delta\mathbf{r}_i|. \quad (1.13)$$

По мірі прямування Δt до нуля це наближення стає все точніше і, в кінці кінців, при нескінченному n обертається в точну рівність.

Поділимо і домножимо кожний доданок в сумі (1.13) на Δt :

$$s \approx \sum_{i=1}^n \frac{|\Delta\mathbf{r}_i|}{\Delta t} \Delta t. \quad (1.14)$$

Перейдемо до границі при $\Delta t \rightarrow 0$:

$$s \approx \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{|\Delta \mathbf{r}_i|}{\Delta t} \Delta t. \quad (1.15)$$

Пам'ятаючи, що

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}_i}{\Delta t} = \mathbf{v}_i \quad (1.16)$$

— швидкість частинки $\mathbf{v}$ в i -му інтервалі, шлях буде представлений у вигляді суми нескінченного числа нескінченно малих доданків:

$$s = \sum_{i=1}^{\infty} |\mathbf{v}_i| dt \equiv \int_{t_1}^{t_2} |\mathbf{v}(t)| dt. \quad (1.17)$$

Таким чином, ми прийшли до висновку: *шлях, пройдений частинкою в інтервалі її руху від t_1 до t_2 , дорівнює визначеному інтегралу за часом в цих межах від модуля швидкості частинки.*

1.3 Обертальний рух

При рівноприскореному русі частинка рухається весь час в одній площині, утворюваній початковим вектором швидкості $\mathbf{v}(0)$ і постійним прискоренням. Проте очевидно, що далеко не всякий плоский рух є рівноприскореним. Приклад плоского нерівноприскореного руху, відомий вам з шкільного курсу фізики, — це рівномірний рух матеріальної точки по колу. Розглянемо його. Оскільки цей рух плоский, виберемо в якості площини, площину XY . Початок координат оберемо в центрі кола (рис. 1.5).

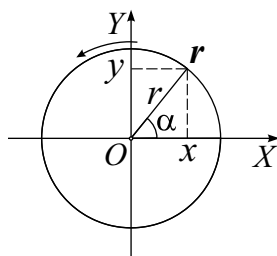


Рисунок 1.5

Координати частинки виразимо через радіус кола r та кут α :

$$\begin{aligned} x &= r \cos \alpha, \\ y &= r \sin \alpha. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Оскільки рух відбувається по колу, r від часу не залежить. Функцією часу залишається лише кут $\alpha(t)$. Похідна від кута за часом називається *кутовою швидкістю*⁶ ω :

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt}. \quad (1.19)$$

При рівномірному русі по колу $\omega = \text{const}$, і рівняння можна проінтегрувати. В результаті

$$\alpha = \omega t + \text{const}. \quad (1.20)$$

Стала інтегрування отримується з умови $\alpha(0) = 0$. Таким чином,

$$\begin{aligned} x(t) &= r \cos \omega t, \\ y(t) &= r \sin \omega t. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Рівняння (1.21) повністю визначають рух, а проекції швидкості матеріальної точки визначаються похідними за часом від координат:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = -\omega r \sin \omega t, \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = \omega r \cos \omega t. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Скалярний добуток

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} &= x v_x + y v_y = \\ &= r \cos \omega t (-\omega r \sin \omega t) + r \sin \omega t (\omega r \cos \omega t) = 0, \end{aligned} \quad (1.23)$$

що вказує на перпендикулярність векторів $\mathbf{r}$ і $\mathbf{v}$, тобто лінійна швидкість дійсно напрямлена по дотичній до кола. Абсолютна величина швидкості

$$\begin{aligned} v = |\mathbf{v}| &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\omega^2 r^2 \sin^2 \omega t + \omega^2 r^2 \cos^2 \omega t} = \\ &= \omega r = \text{const}, \end{aligned} \quad (1.24)$$

⁶За напрям вектора ω кутової швидкості обрано напрям осі обертання (вісь Z на рис. 1.5).

не залежить від часу; рух дійсно рівномірний (але по колу).

Диференціюючи за часом проекції швидкості, визначаємо проекції прискорення:

$$\begin{aligned}a_x &= \frac{dv_x}{dt} = -\omega^2 r \cos \omega t, \\a_y &= \frac{dv_y}{dt} = -\omega^2 r \sin \omega t,\end{aligned}\tag{1.25}$$

звідки бачимо, що прискорення залежить від часу, тобто рух не є рівноприскореним. Абсолютна величина прискорення (модуль), тим не менше, залишається сталою:

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \omega^2 r\tag{1.26}$$

або, оскільки $\omega r = v$, отримуємо

$$|\mathbf{a}| = \frac{v^2}{r}\tag{1.27}$$

— відому формулу для доцентрового (нормального) прискорення. Чому доцентрового? Тому, що вектор $\mathbf{a}$ напрямлений доцентрово (перпендикулярно до швидкості $\mathbf{v}$). В цьому неважко переконатися, порахувавши скалярний добуток:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} = a_x x + a_y y &= -(\omega^2 r \cos \omega t)r \cos \omega t + \\&+ (-\omega^2 r \sin \omega t)r \sin \omega t = -\omega^2 r^2.\end{aligned}\tag{1.28}$$

З іншого боку,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} = |\mathbf{a}| |\mathbf{r}| \cos(\widehat{\mathbf{a}\mathbf{r}}).\tag{1.29}$$

Із порівняння цих двох виразів отримаємо, що $\cos(\widehat{\mathbf{a}\mathbf{r}}) = -1$. Таким чином, вектор прискорення антипаралельний вектору $\mathbf{r}$, тобто напрямлений доцентрово. В результаті картина напрямків векторів виглядає, як показано на рис. 1.6, *a*. Дотепер при розгляді обертального руху ми оперували проекціями векторів на осі координат. Тим часом, часто корисно мати співвідношення, не залежні від вибору системи координат або, як то кажуть, записані у векторній формі.

При розгляді обертального руху ми ввели кутову швидкість ω як похідну за часом від кута повороту α : $\omega = d\alpha/dt$. Задамося тепер питанням, якою величиною, скалярною або векторною, є кут повороту. Адже коли говорять про поворот, потрібно вказати не

тільки величину кута повороту, але і те, навколо якої осі відбувається обертання (поворот) і в яку сторону (за годинниковою стрілкою або проти). В розглянутому вище прикладі віссю обертання була вісь Z і, оскільки ми використовували праву систему координат, обертання відбувалося проти годинникової стрілки (якщо дивитися проти осі Z) (рис. 1.6, б). З цієї точки зору кут повороту повинен бути величиною векторною. Проте, довільний кут повороту, взагалі кажучи, не є вектором. Поняття вектора застосовно

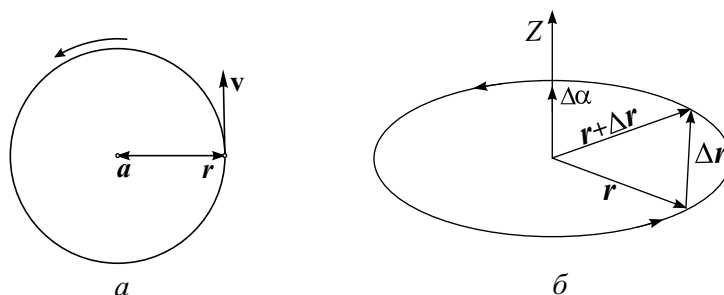


Рисунок 1.6

лише по відношенню до нескінченно малих кутів повороту.

Тому, кажучи про поворот на якийсь малий кут $\Delta\alpha$, можна наближено казати про вектор $\Delta\alpha$, величина якого дорівнює куту повороту, а напрямок визначається таким чином: *напрямок відліку кута співпадає з напрямом обертання за правилом правого гвинта* - тобто з рухом осі гвинта, коли він обертається у напрямі руху матеріальної точки. Задамося питанням, як пов'язано переміщення матеріальної точки $d\mathbf{r}$ при повороті її радіус-вектора $\mathbf{r}$ на нескінченно малий кут $d\alpha$. Його величина (дорівнює довжині хорди) співпадає з довжиною дуги, тобто

$$|d\mathbf{r}| = r d\alpha, \quad (1.30)$$

а за напрямом вектор $d\mathbf{r}$ співпадає з дотичною, яка перпендикулярна вектору $\mathbf{r}$. В результаті ми маємо три взаємно перпендикулярні вектори $\mathbf{r}$, $d\mathbf{r}$ і $d\alpha$, які утворюють праву трійку (рис. 1.7), причому $|d\mathbf{r}| = |d\alpha||\mathbf{r}|$. Пам'ятаючи правила *векторного добутку*, розуміємо, що шукане співвідношення можна записати у вигляді векторної рівності

$$d\mathbf{r} = [d\alpha \times \mathbf{r}]. \quad (1.31)$$

Поділивши обидві сторони цієї рівності на нескінченно малий часовий інтервал dt , протягом якого відбулася зміна вектора $\mathbf{r}$ на $d\mathbf{r}$, отримаємо

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left[\frac{d\alpha}{dt} \times \mathbf{r} \right]. \quad (1.32)$$

Величина, що знаходиться в лівій частині рівняння, — швидкість частинки $\mathbf{v}$, а похідна

$$\frac{d\alpha}{dt} = \boldsymbol{\omega}. \quad (1.33)$$

— вектор кутової швидкості. Спочатку ми вводили її за абсолютним значенням, тепер показали, що є зміст говорити про кутову швидкість обертання як про вектор. Її величина визначає величину кутової швидкості (швидкість обертання, або швидкість зміни кута), а напрямок паралельний осі обертання (за правилом правого гвинта), тобто

$$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]. \quad (1.34)$$

Щоб отримати прискорення, візьмемо від обох частин похідну за часом. Якщо $\boldsymbol{\omega}$ стає (як за величиною, так і за напрямком)⁷, то

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left[\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right] = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}], \quad (1.35)$$

тобто прискорення виявляється перпендикулярним кутовій швидкості обертання $\boldsymbol{\omega}$ і швидкості руху $\mathbf{v}$. А оскільки остання напрямлена по дотичній, це означає, що прискорення напрямлено

⁷Рівномірне обертання.

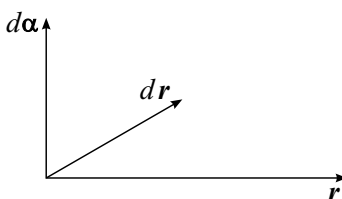


Рисунок 1.7

або паралельно $\mathbf{r}$, або антипаралельно. Як саме, можна вияснити, підставивши в останню формулу значення $\mathbf{v}$:⁸

$$\mathbf{a} = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}] = [\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]] = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) - \omega^2 \mathbf{r}. \quad (1.36)$$

Оскільки в нашому прикладі початок координат було обрано в центрі кола, то кутова швидкість $\boldsymbol{\omega}$ і радіус-вектор $\mathbf{r}$ взаємно перпендикулярні, а, відповідно, їх скалярний добуток дорівнює нулю (взагалі кажучи, як ми зараз побачимо, не завжди $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{r}$), отже

$$\mathbf{a} = -\omega^2 \mathbf{r}, \quad (1.37)$$

тобто антипаралельність векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{r}$ (згадаємо термін "доцентрове прискорення").

Використовуючи векторний добуток, подвійний векторний добуток, ми записали закони руху у *інваріантній* формі, яка не залежить від вибору конкретної системи координат. Отримані нами співвідношення справедливі і в більш загальному випадку, коли ми розглядаємо *обертання системи матеріальних точок або твердого тіла* як цілого (рис 1.8). Маючи це на увазі, неважко

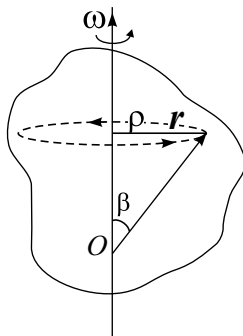


Рисунок 1.8

показати, що хоча $\boldsymbol{\omega}$ і $\mathbf{r}$ не перпендикулярні один одному, тим не менше, виконується співвідношення (1.34) для швидкості деякої обраної нами точки з радіус-вектором $\mathbf{r}$. Дійсно, як бачимо з рис. 1.8, точка рухається по колу радіуса $\rho = r \sin \beta$ із лінійною швидкістю $v = \omega \rho = \omega r \sin \beta$. Оскільки β — кут між векторами $\boldsymbol{\omega}$ і $\mathbf{r}$ ми переконуємося в справедливості формули (1.34).

⁸Тут ми використали формулу для подвійного векторного добутку $[\mathbf{A} \times [\mathbf{B} \times \mathbf{C}]] = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$

Тепер нам зрозуміло походження у загальному випадку відмінного від нуля додаткового доданку у формулі (1.36) для прискорення (див рис. 1.9)

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) - \omega^2 \mathbf{r}. \quad (1.38)$$

Отже, прискорення насправді напрямлене не до центра, а до осі обертання. На користь співвідношення $\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]$ свідчить і те,

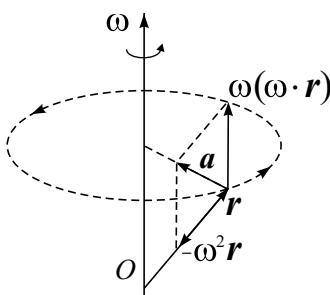


Рисунок 1.9

що воно є справедливим в більш загальному випадку, коли вектор кутової швидкості $\boldsymbol{\omega}$ не є сталим і залежить від часу. Тоді формула для прискорення матиме вигляд:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left[\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} \right] + \left[\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right] = [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r}] + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}], \quad (1.39)$$

в якій величину $\boldsymbol{\beta} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{\alpha}}{dt^2}$ називають кутовим прискоренням, яке характеризує нерівномірне обертання.

Отже, значення кутової швидкості і кутового прискорення відповідно дорівнюють першій та другій похідній від кута повороту за часом. Відзначимо, що при обертальному русі твердого тіла всі його точки мають однакові кутові швидкості і кутові прискорення.

1.4 Запитання для самоконтролю

- 1 Що називається матеріальною точкою?
- 2 Як пов'язані між собою декартові та сферичні координати?

- 3 Які вектори називаються колінеарними?
- 4 Який напрям має вектор швидкості по відношенню до траєкторії руху матеріальної точки?
- 5 Як знайти шлях, що проходить частинка за деякий визначений інтервал часу?
- 6 Що називається кутовою швидкістю? Який напрям вектора кутової швидкості?
- 7 Записати вираз для абсолютної величини лінійної швидкості точки при рівномірному русі по колу. Який напрям вектора лінійної швидкості?
- 8 Записати вираз для абсолютної величини прискорення точки при рівномірному русі по колу. Який напрям вектора прискорення?
- 9 Записати, як пов'язані між собою лінійна швидкість, кутова швидкість та радіус-вектор точки при рівномірному русі по колу?
- 10 Записати, як пов'язані між собою лінійна швидкість, кутова швидкість та радіус-вектор точки при рівномірному обертанні твердого тіла навколо осі?
- 11 Що називається кутовим прискоренням?

Приклад 1. Знайти рівняння руху точки M обода колеса радіуса R , що котиться з швидкістю v_0 без ковзання по прямій рейці.

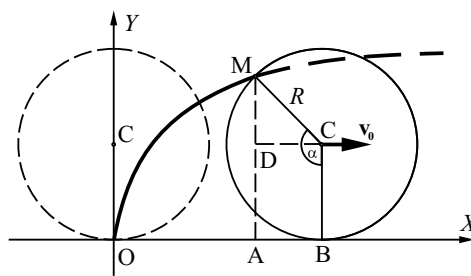


Рисунок 1.10

Початок координат O розмістимо в одному з положень точки M на рейці і напрямимо вісь OX у бік руху колеса вздовж рейки. З рис. 1.10 видно, що координати точки M дорівнюють:

$$x = OA = OB - AB = \widetilde{MB} - DC = R\alpha - R \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) = R(\alpha - \sin \alpha);$$

$$y = AM = AD + DM = R + R \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) = R(1 - \cos \alpha),$$

де α — кут повороту колеса. При коченні колеса без ковзання дуга кола $\widehat{BM}$ дорівнює відріzkу OB , тобто $R\alpha = v_0 t$, звідки

$$\alpha = \frac{v_0}{R} t, \quad (1.40)$$

де t — час руху колеса. Підставивши значення (1.40) для α у вирази для x і y , знайдемо:

$$\left. \begin{aligned} x &= v_0 t - R \sin \frac{v_0}{R} t; \\ y &= R \left(1 - \cos \frac{v_0}{R} t \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.41)$$

Це і є шукані рівняння руху точки обода колеса в координатній формі. Вони визначають закон руху точки M у площині XY . Водночас ці рівняння можна розглядати як рівняння траєкторії точки M у параметричній формі; параметром є час t . У геометрії криву (1.41) називають *циклоїдою*.

Покладаючи $\frac{v_0}{R} = \omega$, перепишемо (1.41) у вигляді:

$$\left. \begin{aligned} x &= R(\omega t - \sin \omega t); \\ y &= R(1 - \cos \omega t). \end{aligned} \right\} \quad (1.42)$$

Приклад 2. Рівняння руху точки (снаряда), кинutoї з початковою швидкістю v_0 під кутом α до горизонту у вакуумі, мають вигляд⁹:

$$\left. \begin{aligned} x &= v_0 t \cos \alpha; \\ y &= v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (1.43)$$

де g — стала (прискорення земного тяжіння). Знайти траєкторію, дальність польоту і час руху точки.

⁹Рівняння руху знаходять у більшості випадків методами динаміки. У кінематиці ми вважаємо їх відомими (заданими за умовою задачі).

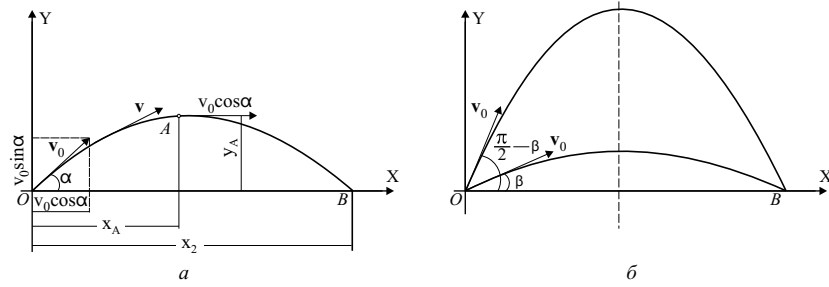


Рисунок 1.11

Щоб знайти рівняння траєкторії точки в декартових координатах, виключимо з рівнянь руху (1.43) параметр t — час. З першого рівняння знаходимо $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$ і підставляємо значення t в друге рівняння:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2. \quad (1.44)$$

Знайдене в декартових координатах рівняння траєкторії (1.44) визначає параболу (рис.1.11, а).

Координати вершини А параболі можна знайти, прирівнюючи до нуля похідну $\frac{dy}{dx}$ і розв'язуючи потім знайдене рівняння відносно x ; ординату точки А обчислюємо за формулою (1.44):

$$x_A = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\alpha; \quad y_A = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha. \quad (1.45)$$

Траєкторія перетинає вісь ОХ у двох точках. Щоб знайти абсциси відповідних точок, покладемо $y = 0$ в (1.44) і розв'язуємо знайдене рівняння відносно x :

$$x_1 = 0; \quad x_2 = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha. \quad (1.46)$$

Величина x_2 є дальність польоту снаряда. З виразу для x_2 видно, що при незмінному значенні v_0 дальність польоту має такі властивості: 1) при $\alpha = \frac{\pi}{4}$ вона найбільша і дорівнює $x_2|_{\alpha=\pi/4} = \frac{v_0^2}{g}$; 2) при $\alpha = \beta$ і $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$, де $0 < \beta < \frac{\pi}{4}$, дальність польоту однакові (рис.1.11, б).

Проміжок часу, протягом якого точка переміщується по траєкторії з положення О в В (час руху T), знайдемо, покладаючи в другому

рівнянні (1.43) $y = 0$:

$$T = \frac{2v_0}{g} \sin \alpha. \quad (1.47)$$

Приклад 3. Знайти вектор швидкості і вектор прискорення точки, що рухається по циклоїді (див. рис. 1.10) за законом (1.42):

$$\left. \begin{aligned} x &= R(\omega t - \sin \omega t); \\ y &= R(1 - \cos \omega t). \end{aligned} \right\} \quad (1.48)$$

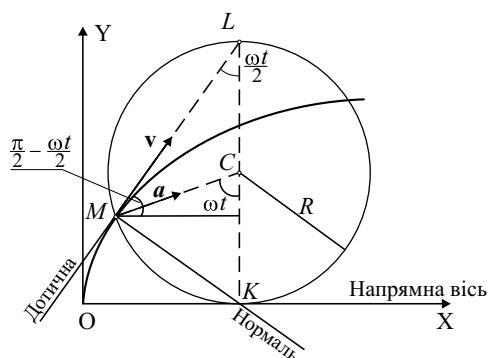


Рисунок 1.12

Проекції вектора швидкості на осі координат дорівнюють:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \dot{x} = R\omega(1 - \cos \omega t); \\ v_y &= \dot{y} = R\omega \sin \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (1.49)$$

Кут між напрямом вектора $\mathbf{v}$ і віссю OX визначаємо через тангенс:

$$\operatorname{tg}(\widehat{\mathbf{v}, X}) = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\sin \omega t}{1 - \cos \omega t} = \operatorname{ctg} \frac{\omega t}{2}, \text{ звідки } (\widehat{\mathbf{v}, X}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega t}{2}. \quad (1.50)$$

Вектор швидкості точки M напрямлений до верхньої точки L твірного кола (рис. 1.12).

Із формул (1.49) і (1.24) видно, що абсолютна величина швидкості дорівнює

$$|\mathbf{v}| = 2R\omega \sin \frac{\omega t}{2} \quad \left(0 \leq \frac{\omega t}{2} \leq \pi\right) \quad (1.51)$$

і, отже, $|\mathbf{v}|$ збільшується від 0 і досягає значення $2R\omega$ – в найвищій точці циклоїди (для цієї точки кут повороту твірного кола $\omega t_1 = \pi$), а потім зменшується і перетворюється в момент $t_2 = \frac{2\pi}{\omega}$ знову в нуль в точці циклоїди на осі ОХ, для якої $\omega t_2 = 2\pi$. В наступному проміжку часу від $t_2 = \frac{2\pi}{\omega}$ до $t_4 = \frac{4\pi}{\omega}$ зміна швидкості точки повторюється. Хоч твірне колесо і котиться рівномірно, та точка обода рухається по циклоїді нерівномірно.

Проекції вектора прискорення точки М знайдемо диференціюванням (1.49) по часу:

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \ddot{x} = R\omega^2 \sin \omega t; \\ a_y &= \ddot{y} = R\omega^2 \cos \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (1.52)$$

Вектор прискорення дорівнює:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} = R\omega^2 (\mathbf{i} \sin \omega t + \mathbf{j} \cos \omega t).$$

Кут нахилу цього вектора до горизонтальної осі ОХ легко знайти через тангенс:

$$\operatorname{tg}(\widehat{\mathbf{a}, X}) = \frac{a_y}{a_x} = \operatorname{ctg} \omega t = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \omega t \right),$$

звідки кут $\widehat{\mathbf{a}, X} = \frac{\pi}{2} - \omega t$.

Цей результат доводить, що вектор прискорення $\mathbf{a}$ напрямлений по радіусу твірного кола до його центра. Величина прискорення, як видно з (1.52), стала і дорівнює

$$a = \omega^2 R. \quad (1.53)$$

Розділ 2

Динаміка матеріальної точки

Закони Ньютона, інерціальні системи відліку; закон збереження імпульсу, рух центра мас; поступальний, коливальний та обертний рухи; робота та кінетична енергія; потенціальна енергія, консервативні, неконсервативні сили; закон збереження механічної енергії; моменти сили і імпульсу відносно нерухомого центра; рівняння моментів; закон збереження моменту імпульсу.

2.1 Закони Ньютона. Інерціальні системи відліку

В основі динаміки лежать три закони Ньютона.

Перший закон Ньютона. Тіло залишається в стані спокою або рухається з постійною швидкістю (без прискорення), якщо воно надано самому собі, тобто якщо на нього не діють ніякі зовнішні сили. Це означає, що

$$\mathbf{a} = 0, \quad \text{коли} \quad \mathbf{F} = 0. \quad (2.1)$$

Явище, що полягає в збереженні швидкості руху тіл або їх спокою при відсутності дії на них інших тіл називають інерцією. Тому І-ий закон Ньютона називають ще законом інерції.

Другий закон Ньютона. Результуюча сила, яка діє на тіло, дорівнює добутку маси тіла на його прискорення:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}; \quad \mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m}. \quad (2.2)$$

Інакше формулюючи, прискорення, якого набуває тіло, прямо пропорційне діючій силі і обернено пропорційне його масі.

Третій закон Ньютона. При взаємодії двох тіл сила $\mathbf{F}_{21}$, яка діє на друге тіло з боку першого, дорівнює за величиною і протилежна за напрямком силі $\mathbf{F}_{12}$, що діє на перше тіло з боку другого:

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}, \quad (2.3)$$

обидва вектори напрямлені вздовж лінії, що сполучає ці два тіла.

Існують певні межі застосовності третього закону. Ми знаємо, що всі сигнали, а значить і сили, передаються не миттєво, а з кінцевою швидкістю. Проте третій закон містить твердження, що $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$, коли обидві ці сили вимірюються в один і той

же момент часу. Ця вимога суперечить тому факту, що дане тіло сприймає дію сили, що надається іншим тілом, не миттєво, а через кінцевий проміжок часу. Тому третій закон Ньютона не завжди є достатньо добрим наближенням, наприклад, при розгляді зіткнення атомів і заряджених частинок.

Перші два закони виконуються лише тоді, коли спостереження ведеться у системах відліку, які рухаються без прискорення. Такі системи відліку називають інерціальними. Наприклад, якщо тіло в одній системі відліку рухається із сталою швидкістю і існує система відліку, котра рухається із прискоренням відносно неї, очевидно, що тіло буде рухатись відносно цієї системи із прискоренням.

Наприклад, якщо система відліку жорстко пов'язана з каруселлю, що обертається, то в такій системі відліку прискорення тіла не рівне нулю, коли на це тіло не діють сили. Ви можете нерухомо стояти на каруселі, тільки якщо будете від чого-небудь відштовхуватися, надаючи вашому тілу силу $m\omega^2 r$ в напрямку до осі, де m — маса вашого тіла, ω — кутова швидкість обертання, а r — відстань від вас до осі обертання. Іншим прикладом може бути система відліку, що нерухомо пов'язана з літаком, який швидко набирає швидкість при зльоті. Завдяки прискоренню вас притискає назад, до сидіння, а сила, діючи з боку спинки сидіння, утримує вас в стані спокою щодо цієї системи. Якби ви знаходилися в стані рівномірного руху або спокою щодо системи відліку, що не має прискорення, то для цього не вимагалось б ніякої сили. Але якщо ви хочете знаходитися в стані спокою щодо системи відліку, що рухається з прискоренням, то ви повинні прикладати силу або зазнавати дію сили з боку іншого тіла. Вам потрібен мотузок, щоб утриматися, або сидіння, щоб притискатися до нього. Рух (його характер) в системах відліку, що рухаються з прискоренням, відіграє важливу роль у фізиці. Такі системи відліку називаються неінерціальними. Особливо важливо зрозуміти характер руху тіл в системі відліку, що обертається, (практичне застосування - центрифуга), хоча б тому, що ми з вами знаходимося якраз в такій системі відліку (на Землі), але цього ми поки робити не будемо і спробуємо відповісти на питання, з якою точністю ту або іншу систему відліку можна вважати інерційною.

Зрозуміло, що наша Земля не є інерційною системою відліку (є неінерційною), оскільки вона обертається навколо власної осі. Через це точка на екваторі має доцентрове прискорення

$$a = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R \simeq 3,4 \cdot 10^{-2} \frac{\text{м}}{\text{с}^2}, \quad (2.4)$$

де кутова швидкість обертання Землі ω і радіус Землі рівні

$$\omega = \frac{2\pi}{\underbrace{8,6 \cdot 10^4 \text{ с}}_{\text{доба}}} \approx 0,73 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}, \quad R \simeq 6,4 \cdot 10^6 \text{ м.} \quad (2.5)$$

В результаті доцентрове прискорення виявляється рівним приблизно $3,4 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}^2$. Це складає близько 0,3% від прискорення вільного падіння $g \approx 9,8 \text{ м/с}^2$, що з точки зору прецизійних фізичних вимірювань є величезною величиною, котру необхідно враховувати при розрахунках. Із-за цього прискорення сили тяжіння, що спостерігається на Північному полюсі, більше за прискорення сили тяжіння, що спостерігається на екваторі.

Прискорення, що розвивається за рахунок руху Землі по орбіті навколо Сонця є на порядок меншим. А прискорення, що отримується внаслідок обертання Сонця із планетами навколо центра Галактики, настільки мале, що систему відліку, пов'язану із нерухомими зірками, вважають інерційною з дуже добрим ступенем точності.

Якщо існує хоча б одна інерційна система, то таких систем має бути нескінченно багато, оскільки будь-яка система, що рухається з постійною швидкістю щодо інерційної, теж є інерційною. Існує фундаментальний фізичний принцип, який називається принципом відносності Галілея¹: *основні закони фізики однаково формулюються для всіх систем відліку, які рухаються одна відносно іншої з постійною швидкістю (тобто без прискорення).*

Згідно цьому принципу, спостерігач, що знаходиться в кабіні без вікон, не може експериментально визначити, покоїться він або знаходиться в рівномірному прямолінійному русі щодо нерухомих зірок. Тільки дивлячись у вікно і маючи, таким чином, нагоду порівнювати свій рух з рухом зірок, спостерігач може сказати, що він рівномірно рухається щодо них. Але навіть і тоді він не міг би вирішити, чи сам він рухається або рухаються зірки. Принцип відносності Галілея був одним з перших основних принципів фізики. Він є основним для картини Всесвіту, запропонованої Ньютоном. Цей принцип витримав багаторазову експериментальну перевірку і служить зараз одним із наріжних каменів спеціальної теорії відносності.

¹За часів Галілея під законами фізики розумілися, в основному, закони механіки. Лише пізніше цей принцип був об'єднаний із скінченністю швидкості розповсюдження взаємодій і став називатися принципом відносності Ейнштейна. В часи ж Галілея швидкість розповсюдження взаємодій вважалася нескінченною.

2.2 Закон збереження імпульсу. Рух центра мас

Другий закон Ньютона можна записати у такому вигляді:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}, \quad (2.6)$$

де $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ — імпульс.

При цьому ми вважали, що маса частинки m від швидкості (і від часу) не залежить:

$$m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (2.7)$$

Розглянемо, наприклад, вільний рух двох тіл з масами m_1 і m_2 , пов'язаних одне з одним пружиною, яку для простоти вважатимемо невагомою (рис. 2.1). На цю систему не діють зовнішні сили², тому, згідно першого закону Ньютона, система повинна або знаходитися у спокої, або рухатися з постійною за величиною і напрямом швидкістю. Але швидкість кожного з тіл в процесі руху складним чином змінюється за величиною і напрямом, оскільки система одночасно скоює поступальний, коливальний і обертальний рухи. Значить, перший закон Ньютона застосований не до всіх точок системи. А тоді де ж знаходиться та точка, яка рухається з постійною швидкістю? Вона існує (хоча б одна), інакше перший закон Ньютона не був би справедливим. Щоб відповісти на поставлене питання, запишемо рівняння, що виражає другий закон Ньютона, для кожної з матеріальних точок 1 і 2:

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = \mathbf{F}_{12}, \quad \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \mathbf{F}_{21}, \quad (2.8)$$

де $\mathbf{F}_{12}$ — сила, що діє з боку другої частинки на першу, а $\mathbf{F}_{21}$ — сила, що діє з боку першої на другу. Згідно третього закону Ньютона, ці сили рівні за значенням і протилежні за напрямком:

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}. \quad (2.9)$$

Підставивши рівняння (2.8) у (2.9), отримаємо:

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = 0. \quad (2.10)$$

²Введемо поняття замкненої системи, під якою будемо розуміти сукупність матеріальних точок, які взаємодіють між собою і не взаємодіють з оточуючими тілами.

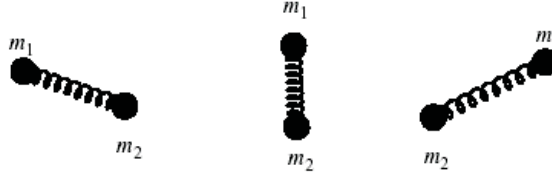


Рисунок 2.1

Рівняння (2.10) запишемо у вигляді

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = 0. \quad (2.11)$$

В результаті отримуємо закон збереження імпульсу системи двох тіл

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \text{const}. \quad (2.12)$$

Підставляючи вираз для імпульсу частинок, отримуємо

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = \text{const} \quad \text{або} \quad (2.13)$$

$$m_1 \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = \text{const} \quad \text{або} \quad (2.14)$$

$$\frac{d(m_1 \mathbf{r}_1)}{dt} + \frac{d(m_2 \mathbf{r}_2)}{dt} = \text{const} \quad \text{або} \quad (2.15)$$

$$\frac{d}{dt}(m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2) = \text{const}. \quad (2.16)$$

Поділивши обидві частини на сумарну масу $m = m_1 + m_2$, отримуємо рівняння

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \right) = \frac{\text{const}}{m_1 + m_2} = \text{const}. \quad (2.17)$$

Введемо вектор

$$\mathbf{R}_c \equiv \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}. \quad (2.18)$$

Точку з радіус-вектором $\mathbf{R}_c$ називають центром інерції (або центром мас) системи двох матеріальних точок. З рівняння (2.17) бачимо, яким би складним не був рух кожної з мас, похідна

$d\mathbf{R}_c/dt = \text{const.}$ Таким чином, центр інерції рухається із сталою швидкістю (незалежно від коливального і обертального рухів системи). Позначимо цю швидкість як $\mathbf{V}_c$:

$$\frac{d\mathbf{R}_c}{dt} = \mathbf{V}_c. \quad (2.19)$$

Підставляючи вираз для $\mathbf{R}_c$ і диференціюючи, отримаємо

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \right) = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} = \mathbf{V}_c. \quad (2.20)$$

Ця формула визначає швидкість центра інерції $\mathbf{V}_c$ через маси і швидкості частинок, що складають систему. До руху саме цієї точки відноситься перший закон Ньютона, і швидкість цієї точки треба вважати швидкістю руху системи як цілого³. Імпульс системи як цілого рівний добутку сумарної маси системи $m_1 + m_2$ на її швидкість $\mathbf{V}_c$, тобто $(m_1 + m_2)\mathbf{V}_c$. З іншого боку,

$$(m_1 + m_2)\mathbf{V}_c = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \quad (2.21)$$

і імпульс системи виявляється рівним сумі імпульсів складаючих систему частинок. Таким чином, імпульс — величина *адитивна*, як і маса тіла. Ми показали, що у відсутності зовнішніх сил імпульс не змінюється з часом, тобто зберігається. Очевидно, все це відноситься і до системи з більшою кількістю матеріальних точок.

Якщо на систему діють зовнішні сили, наприклад на перше тіло $\mathbf{F}_1$, а на друге $\mathbf{F}_2$, то рівняння руху для кожної з матеріальних точок запишуться у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} &= \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_1, \\ \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} &= \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_2, \end{aligned} \quad (2.22)$$

Додавши ці рівняння, отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 \quad \text{або} \\ m \frac{d\mathbf{V}_c}{dt} &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2. \end{aligned} \quad (2.23)$$

³В системі відліку, що рухається із швидкістю $\mathbf{V}_c$, імпульс системи матеріальних точок дорівнює нулю.

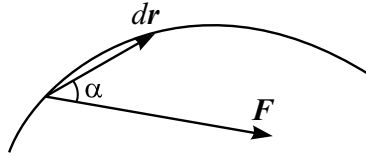


Рисунок 2.2

Центр мас системи рухається як матеріальна точка, маса якої рівна сумарній масі всієї системи, а діюча сила – геометричній сумі всіх зовнішніх сил, діючих на систему.

Прикладом може бути рух снаряда по параболі в безповітряному просторі. Якщо в який-небудь момент часу снаряд розірветься на дрібні осколки, то ці осколки далі розлітатимуться в різні боки. Проте центр мас осколків і газів, що утворилися при вибуху, продовжуватиме свій рух по параболічній траєкторії, неначебто ніякого вибуху не було.

2.3 Робота. Кінетична енергія

Як відомо, робота — це скалярна величина, що дорівнює добутку сили на переміщення і на косинус кута між ними (рис. 2.2). Для скінченного переміщення $\Delta \mathbf{r}$ маємо

$$\Delta A = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r} = F \Delta r \cos \alpha, \quad (2.24)$$

де ми використали поняття скалярного добутку двох векторів.

В загальному випадку, коли матеріальна точка, рухаючись по криволінійній траєкторії L , проходить шлях скінченної довжини, цей шлях можна поділити на нескінченно малі проміжки, на кожному з яких силу $\mathbf{F}$ можна наближено вважати сталою, а елементарну роботу можна буде порахувати за формулою $dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Якщо додати елементарні роботи, то отримаємо вираз для роботи у вигляді інтегралу:

$$A = \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (2.25)$$

Цей вираз називається *криволінійним інтегралом* від вектора $\mathbf{F}$ вздовж кривої L .

Робота сили, віднесена до одиниці часу, називається *потужністю*:

$$P = \frac{dA}{dt}, \quad (2.26)$$

отже $dA = Pdt$ і

$$A = \int_{t_1}^{t_2} P dt. \quad (2.27)$$

Оскільки $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$ тоді формулу для роботи можна переписати у вигляді

$$A = \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt, \quad (2.28)$$

тобто можна виразити роботу через інтеграл від потужності за часом, або через інтеграл за часом від скалярного добутку сили на швидкість частинки. В останньому випадку ясно, що якщо сила, діюча на частинку, перпендикулярна швидкості $\mathbf{v}$, то робота такої сили рівна нулю.

Скористаємося тепер формулою другого закону Ньютона і виразимо силу через похідну від імпульсу за часом $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$, тоді

$$A = \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt = \int \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt = \int d\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}. \quad (2.29)$$

Оскільки $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, то $d\mathbf{p} = m d\mathbf{v}$. Тому

$$A = \int d\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} = \int m d\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = m \int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \frac{mv^2}{2} + \text{const.} \quad (2.30)$$

Якщо розглядати роботу сили по переміщенню матеріальної точки з положення 1 в положення 2, шукана робота буде рівна

$$A = \int_1^2 d\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} = m \int_1^2 \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \frac{mv^2}{2} \Big|_1^2 = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \quad (2.31)$$

Як відомо, скалярна величина

$$K = \frac{mv^2}{2} \quad (2.32)$$

називається кінетичною енергією частинки. Таким чином, ми довели, що *робота по переміщенню матеріальної точки дорівнює приросту її кінетичної енергії*.

При цьому під силою треба розуміти рівнодійну сил, діючих на точку. Так, наприклад, якщо ви тягнете санки по не дуже слизькій дорозі (посипаній піском), то робота, яку ви виконуєте, відмінна від нуля. Проте ніякого приросту кінетичної енергії санок не

відбувається. Вся річ у тому, що сила тертя теж виконує роботу (негативну).

Отриманий результат може бути узагальнений на випадок довільної системи матеріальних точок. Кінетичною енергією системи називається сума кінетичних енергій матеріальних точок, з яких складається ця система:

$$K = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}. \quad (2.33)$$

В результаті: *сумарна робота всіх сил, діючих на систему матеріальних точок, рівна приросту кінетичної енергії цієї системи.*

При цьому потрібно враховувати також і роботу всіх внутрішніх сил. Порівняйте: внутрішні сили сумарний імпульс системи не змінюють (тільки зовнішні), а кінетичну енергію системи змінюють. Наприклад, в процесі зіткнення існує момент, коли два тіла, що стикаються, зупиняються. Кінетична енергія системи у цей момент рівна нулю, а енергія пружної деформації максимальна. Якщо зіткнення пружне, то після нього кінетична енергія, зрозуміло, відновлюється і залишається такою ж, як і до зіткнення.

2.4 Потенціальна енергія. Консервативні, неконсервативні сили. Закон збереження енергії

Всі сили, що зустрічаються в механіці макроскопічних тіл, прийнято поділяти на консервативні і неконсервативні. *Консервативними* називаються *сили, робота яких не залежить від форми шляху між двома точками* (при переміщенні тіла між ними) (рис. 2.3). Прикладом консервативних сил є сила тяжін-

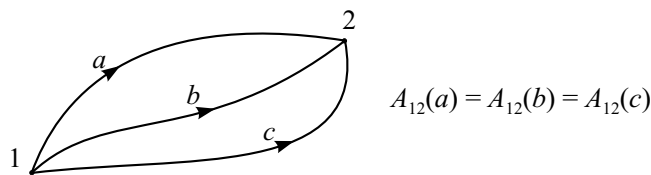


Рисунок 2.3

ня. Обчислимо роботу цієї сили при переході матеріальної точки

масою m з положення 1 в положення 2 уздовж прямолінійного відрізка $\mathbf{r}_{12}$ (рис. 2.4, а):

$$A_{12} = m\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}_{12} = mgr_{12} \cos \alpha = mg(h_1 - h_2) = mgh_1 - mgh_2, \quad (2.34)$$

де h_1 і h_2 — висоти, на яких знаходилась матеріальна точка на початку та в кінці шляху. Вони відлічуються від якого-небудь довільного рівня, наприклад від земної поверхні або від рівня моря.

Формула для роботи $A_{12} = mgh_1 - mgh_2$ залишається вірною і при переміщенні уздовж кривої 1а2 або 1б2 (рис. 2.4, б). Щоб довести це твердження треба поділити весь шлях горизонтальними площинами на дрібні ділянки, кожна з яких може бути прийнята за прямолінійну. Застосувавши до кожної ділянки виведену формулу $A_{12} = mgh_1 - mgh_2$ і додавши отримані роботи, ми прийдемо до попереднього результату. Таким чином, *робота сили тяжіння не залежить від шляху, вона визначається лише початковим та кінцевим положеннями рухомої матеріальної точки (тіла).*

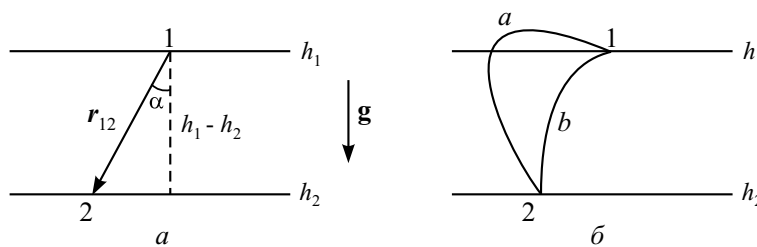


Рисунок 2.4

Крім того, порівнюючи

$$A_{12} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \quad \text{і} \quad A_{12} = mgh_1 - mgh_2,$$

приходимо до висновку, що

$$mgh_1 + \frac{mv_1^2}{2} = mgh_2 + \frac{mv_2^2}{2},$$

тобто при русі в полі тяжіння зберігається величина

$$E = mgh + \frac{mv^2}{2} = \text{const}, \quad (2.35)$$

яка називається повною енергією системи і складається з кінетичної і потенціальної енергії. Під потенціальною енергією тут розуміємо величину $U = mgh$.

Іншим прикладом консервативних сил є так звані *центральні сили*. Так називається сила, яка завжди напрямлена вздовж радіус-вектора, що сполучає матеріальну точку з деякою точкою в просторі, і залежить тільки від відстані до цієї точки (рис. 2.5; точка O — силовий центр, сили $F_1(r_{10})$ і $F_2(r_{20})$ залежать лише від відстані до центра). Сама ця точка називається центром сили, або силовим центром. Прикладом таких сил можуть служити сили тяжіння Землі до Сонця (або Місяця до Землі).

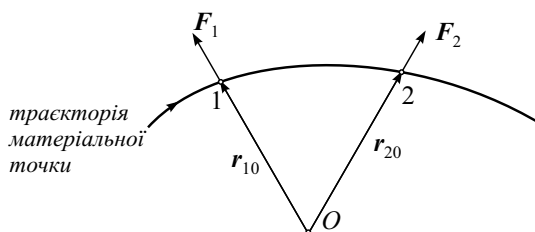


Рисунок 2.5

Розглянемо замкнутий контур, що проходить через точки 1 і 2 (рис. 2.6). Якщо сила консервативна, то $A_{132} = A_{142}$. Якщо ми змінимо напрям руху і будемо рухатися не від 1 до 2, а від 2 до 1, на кожному відрізку нашого шляху сила буде тією ж самою, але переміщення змінить свій знак, тобто $A_{241} = -A_{142}$, в результаті $A_{132} + A_{241} = 0$, приходимо до важливого результату *робота консервативних сил по замкнутому контуру рівна нулю*. Всі сили,

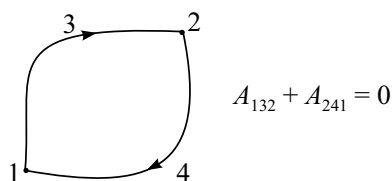


Рисунок 2.6

що не є консервативними, називають *неконсервативними* силами. До них відносяться, перш за все, так звані *дисипативні сили*,

наприклад сили тертя, що виникають при ковзанні одного тіла по поверхні іншого. Сила тертя в цьому випадку завжди напрямлена проти швидкості руху, тобто проти переміщення тіла. І якщо тіло змістилося, а потім повернулося назад, то очевидно, що сумарна робота буде величиною від'ємною і не рівною нулю. Таким чином, робота сили тертя ковзання при русі по замкнутому контуру не рівна нулю! До неконсервативних сил відносяться також сили опору, які діють на тіло при його русі в рідкому або газоподібному середовищі. Ці сили називають силами в'язкого тертя. На відміну від сил тертя ковзання, вони завжди залежать від абсолютної величини швидкості тіла і напрямлені протилежно до неї.

Ще один вид неконсервативних сил – *гіроскопічні сили*. Вони залежать від швидкості матеріальної точки і напрямлені перпендикулярно до неї. Тому робота таких сил завжди рівна нулю. Єдиним прикладом гіроскопічних сил в інерційних системах відліку є сила Лоренца, що діє на заряджену рухому частинку в магнітному полі.

Якщо на систему діють лише консервативні та гіроскопічні сили, для неї можна ввести поняття *потенціальної енергії*. Будь-яке довільне положення системи, що характеризується заданням координат її матеріальних точок, умовно приймемо за *нульове*. Робота, що скоюється консервативними силами під час переходу системи з деякого положення в нульове, називається *потенціальною енергією* U системи в цьому положенні (див. рис. 2.7).

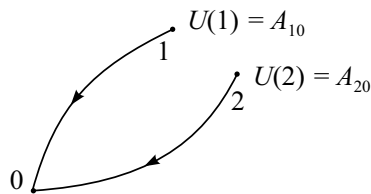


Рисунок 2.7

Робота консервативних сил не залежить від шляху переходу, а тому потенціальна енергія системи при фіксованому нульовому положенні залежить лише від координат матеріальних точок системи в даному положенні. Інакше кажучи, *потенціальна енергія системи U є функцією тільки її координат*.

Значення потенціальної енергії залежить від того, яке положення системи прийнято за нульове. Якщо за нульове прийнято положення O (рис. 2.8, а), то в положенні 1 система буде володіти

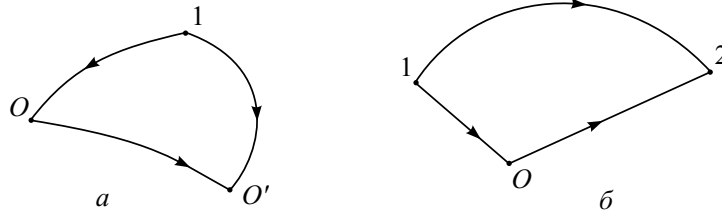


Рисунок 2.8

потенціальною енергією $U = A_{1O}$, що дорівнює роботі консервативних сил при переході системи з положення 1 в положення O . Якщо за нульове прийняти положення O' , потенціальна енергія буде рівна $U' = A_{1O'}$. Внаслідок консервативності сил, які діють у системі, робота вздовж шляху $1O'$ рівна роботі вздовж шляху $1OO'$: $A_{1O'} = A_{1O} + A_{OO'}$, або $U' = U + A_{OO'}$. Робота $A_{OO'}$ стала, тобто не залежить від координат системи в досліджуваному стані 1. Вона повністю визначається вибором нульових положень O і O' . Ми бачимо, що при заміні одного нульового положення іншим потенціальна енергія системи змінюється на сталу величину. Невизначеність можна підсилити ще більше, якщо умовитися рахувати потенціальну енергію в нульовому положенні рівною не нулю, а якому-небудь постійному довільному значенню. Тоді в приведенному вище визначенні замість потенціальної енергії слід говорити про її різницю в двох положеннях. *Різницею потенціальних енергій в даному і нульовому положеннях називається робота, що виконується консервативними силами під час переходу системи з даного положення в нульове.* Таким чином, потенціальна енергія визначена не однозначно, а з точністю до довільної постійної. Це свавілля не може відобразитися на фізичних висновках, оскільки хід фізичних явищ залежить не від абсолютних значень самої потенціальної енергії, а лише від її різниці в різних станах.

Нехай система перейшла з положення 1 в положення 2 по деякій траєкторії 1-2. Як видно з рис. 2.8, б, $A_{12} = A_{1O} + A_{O2} = A_{1O} - A_{2O} = U_1 - U_2 = -(U_2 - U_1)$, тобто робота консервативних сил рівна зменшенню потенціальної енергії системи. З іншого боку робота сили рівна приросту кінетичної енергії системи (2.31): $A_{12} = U_1 - U_2 = K_2 - K_1$. Таким чином,

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2. \quad (2.36)$$

Сума кінетичної і потенціальної енергії системи називається її

повною енергією E . Ми отримали $E_1 = E_2$ або

$$E \equiv K + U = \text{const.} \quad (2.37)$$

В системі з одними тільки консервативними (і гіроскопічними) силами повна енергія залишається незмінною. Можуть відбуватися лише перетворення потенціальної енергії в кінетичну і навпаки, але повна енергія системи змінитися не може. Це положення називається законом збереження енергії в механіці.

Приклади потенціальної енергії в деяких найпростіших випадках:

- $U = mgh$ — потенціальна енергія однорідного поля тяжіння. Нульове положення $h = 0$.
- $U = kx^2/2$ — потенціальна енергія розтягнутої пружини. Нульове положення $x = 0$.
- $U = -GMm/r$ — потенціальна енергія гравітаційного тяжіння двох точкових мас m і M . За нульове положення прийнято нескінченно віддалену точку.

2.5 Сили і потенціальна енергія

Знаючи силу як функцію координат матеріальної точки $F(x, y, z)$, можна шляхом інтегрування (знаходження роботи) визначити потенціальну енергію системи

$$U_1 = U(x, y, z) - U(0) = A_{10} = -A_{01} = - \int_0^1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (2.38)$$

Обернена задача: визначити діючу силу $\mathbf{F}(x, y, z)$ за заданою потенціальною енергією $U(x, y, z)$. Її розв'язуємо диференціюванням. Нехай точка зазнала довільного нескінченно малого переміщення $d\mathbf{r}$. Якщо $\mathbf{F}$ — сила, що на неї діє, то робота цієї сили по переміщенню дорівнює зменшенню потенціальної енергії:

$$\mathbf{F} d\mathbf{r} = -dU. \quad (2.39)$$

Для знаходження вектора $\mathbf{F}$ достатньо знайти його проекції F_x , F_y , F_z на координатні осі прямокутної системи координат. В проекціях рівняння (2.39) виглядає так:

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dU. \quad (2.40)$$

Припустимо, що переміщення відбувається вздовж якої-небудь координатної осі, наприклад осі X . Тоді

$$F_x dx = -dU|_{y,z},$$

отже

$$F_x = -\frac{dU}{dx}\bigg|_{y,z=\text{const}} \equiv -\frac{\partial U}{\partial x} \quad (2.41)$$

— (частинна похідна), аналогічно

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \quad (2.42)$$

Таким чином, компоненти сили можна знайти, диференціюючи потенціальну енергію системи по координатах x , y і z .

Формули (2.41), (2.42) можна об'єднати в одну векторну формулу, перемноживши проекції сили на відповідні орти координатних осей:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} = -\frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} - \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k} = \\ &= -\left(\frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k} \right) = -\text{grad } U, \end{aligned} \quad (2.43)$$

де символом $\text{grad } U$ позначена сума

$$\text{grad } U \equiv \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \equiv \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k}, \quad (2.44)$$

Вектор, якій визначається співвідношенням (2.44) називається *градієнтом скалярної величини U* . Градієнтом скалярної величини називається вектор, напрямком якого співпадає з напрямком найшвидшого зростання цієї скалярної величини, і за абсолютним значенням рівний похідній за цим напрямком. Градієнт у кожній точці скалярного поля перпендикулярний до поверхні рівня, яка проходить через цю точку. Отже, згідно (2.43), сила дорівнює градієнту потенціальної енергії з протилежним знаком. Знак "—" вказує на те, що вектор консервативної сили, з якою діє потенціальне поле, напрямлений у протилежний бік до градієнта потенціальної енергії, тобто, система намагається зайняти положення з мінімальною потенціальною енергією (в полі тяжіння Землі ($U = mgh$) тіло рухається вниз, намагаючись зайняти положення з $h = 0$; розтягнута або стиснута пружина ($U = kx^2/2$) намагається вернутися в стан рівноваги з $x = 0$).

2.6 Моменти сили і імпульсу відносно нерухомого центра

Нехай O — будь-яка точка, відносно якої розглядається момент вектора сили або вектора імпульсу. Її називають *поллюсом*. Позначимо буквою $\mathbf{r}$ радіус-вектор, проведений з цієї точки в точку прикладання сили $\mathbf{F}$ (рис. 2.9). Моментом сили $\mathbf{F}$ відносно точки O називають *векторний добуток радіус-вектора $\mathbf{r}$ на силу $\mathbf{F}$* :

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r} \times \mathbf{F}]. \quad (2.45)$$

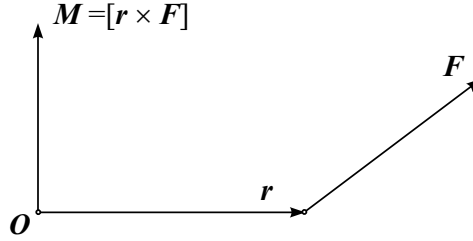


Рисунок 2.9

Якщо $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$, на підставі відомої властивості векторного добутку можна записати

$$[\mathbf{r} \times \mathbf{F}] = [\mathbf{r} \times \mathbf{F}_1] + [\mathbf{r} \times \mathbf{F}_2]. \quad (2.46)$$

Це означає, що *момент рівнодіючої двох або декількох сил відносно деякого центра дорівнює геометричній сумі моментів сил відносно цього ж центра*.

Аналогічно визначається момент імпульсу $\mathbf{p}$ матеріальної точки відносно полюса O :

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r} \times \mathbf{p}]. \quad (2.47)$$

Доцільність введення цих двох понять виправдовується тим, що моменти імпульсу і сили пов'язані між собою важливим співвідношенням, котре виводиться з рівнянь Ньютона. Будемо вважати, що центр O нерухомий. Диференціюючи вираз (2.47) за часом, отримаємо

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} \right] + \left[\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right]. \quad (2.48)$$

Оскільки центр O нерухомий, похідна $d\mathbf{r}/dt$ — це швидкість матеріальної точки, яка пов'язана з її імпульсом співвідношенням $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, то $\left[\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p}\right] = 0$ як векторний добуток колінеарних векторів $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$ і $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Другий доданок формули (2.48) можна перетворити за допомогою рівняння Ньютона $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$. Тоді отримуюємо $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = [\mathbf{r} \times \mathbf{F}]$ або

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}. \quad (2.49)$$

Це співвідношення називається рівнянням моментів: *похідна за часом від моменту імпульсу матеріальної точки відносно нерухомого центра рівна моменту діючої сили відносно того ж самого центра*. При отриманні формули не вважалося, що маса m залишається сталою. Тому рівняння (2.49) справедливе також і у релятивістській механіці.

Співвідношення моментів (2.49) можна узагальнити на випадок довільної системи матеріальних точок. *Моментом імпульсу системи матеріальних точок відносно деякого центра називається векторна сума моментів імпульсів усіх матеріальних точок системи відносно того ж центра*:

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 + \dots \quad (2.50)$$

Аналогічно момент усіх сил, що діють на систему матеріальних точок, визначається як векторна сума моментів окремих сил:

$$\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{M}_i = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \dots \quad (2.51)$$

Вважаючи центр нерухомим, запишемо рівняння моментів для кожної матеріальної точки і векторно додамо їх. Ми знову отримаємо співвідношення (2.49), але вже для системи матеріальних точок. Як зрозуміло з виводу, під $\mathbf{M}$ треба розуміти момент усіх сил, як зовнішніх так і внутрішніх. Однак внутрішні сили можна не брати до уваги, оскільки їх повний момент відносно будь-якого центра дорівнює нулю. Це пояснюється тим, що внутрішні сили завжди діють попарно: силі F_{ik} , з якою k -та точка діє на i -ту відповідає рівна і протилежна за напрямком сила F_{ki} , з якою i -та точка діє на k -ту. Сумарний момент цих сил дорівнює нулю.

Таким чином замість рівняння (2.49) ми отримуємо більш загальний результат:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}_{\text{зовн}}, \quad (2.52)$$

тобто, *похідна за часом від моменту імпульсу (або швидкість зміни моменту імпульсу) системи матеріальних точок відносно довільного нерухомого центра рівна геометричній сумі моментів всіх зовнішніх сил відносно того ж самого центра.*

Якщо момент зовнішніх сил відносно нерухомого центра O рівний нулю, то момент імпульсу системи відносно того ж центра залишається сталим в часі. Це положення називається законом збереження моменту імпульсу ($\mathbf{L} = \text{const}$).

2.7 Запитання для самоконтролю

- 1 Сформулюйте закони Ньютона.
- 2 Які системи відліку називають інерціальними? Наведіть приклади неінерціальних систем відліку.
- 3 Сформулюйте принцип відносності Галілея.
- 4 Що називається замкненою системою?
- 5 Запишіть вирази для координат і швидкості центра мас.
- 6 В чому відмінність центра мас від всіх інших точок системи?
- 7 Які сили називаються консервативними (неконсервативними)? Наведіть приклади неконсервативних сил.
- 8 Сформулюйте закон збереження енергії.
- 9 Що називається градієнтом?
- 10 Сформулюйте рівняння моментів.
- 11 Сформулюйте закон збереження моменту імпульсу.

Приклад. Обчислити прискорення, з яким повинен їхати автомобіль масою m вниз по плиті, щоб ця плита повзла вгору рівномірно по похилій площині клина. Маса плити дорівнює M , коефіцієнт тертя плити по клину k , кут нахилу площини α .

Вниз у напрямі похилої площини на плиту діє складова сили тяжіння цієї плити (рис. 2.10):

$$f_1 = Mg \sin \alpha, \quad (2.53)$$

а також сила тертя клина

$$T = kN, \quad (2.54)$$

де k — коефіцієнт тертя, а N — нормальний тиск плити і автомобіля разом на клин, тобто

$$N = (m + M)g \cos \alpha. \quad (2.55)$$

Повна сила, що діє на плиту вниз у напрямі похилої площини, дорівнює $f_1 + T$. Щоб плита рухалась рівномірно, треба, щоб дія сили $f_1 + T$ була скомпенсована такою самою за величиною силою, напрямленою вгору (паралельно похилій площині). Ця остання може бути тільки силою дії коліс автомобіля на плиту. Отже, в напрямі похилої площини вгору автомобіль діє на плиту з силою $f_1 + T$.

Згідно III-го закону Ньютона, в напрямі похилої площини плита діє на колеса автомобіля з силою $f_1 + T$, напрямленою вниз. Крім цієї сили, на автомобіль вниз паралельно похилій площині діє ще складова сили тяжіння автомобіля:

$$f_2 = mg \sin \alpha. \quad (2.56)$$

Повна сила прикладена до автомобіля в напрямі його руху, дорівнює $F = f_1 + T + f_2$; на підставі (2.53)–(2.56) знаходимо:

$$F = g(m + M)(\sin \alpha + k \cos \alpha). \quad (2.57)$$

Поділивши цю силу на масу автомобіля, знайдемо (за II-им законом Ньютона) прискорення автомобіля:

$$a = \frac{F}{m} = g \left(1 + \frac{M}{m} \right) (\sin \alpha + k \cos \alpha). \quad (2.58)$$

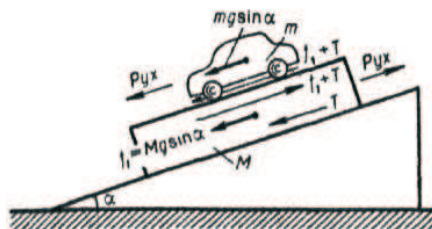


Рисунок 2.10

Як бачимо, прискорення автомобіля не залежить від коефіцієнта тертя між колесами автомобіля і плитою, який, проте, повинен бути відмінним від нуля.

Задача ця цікава тим, що при її розв'язуванні довелося застосувати відразу всі закони Ньютона.

Розділ 3

Механіка суцільних середовищ

Деформації твердого тіла: розтяг (стиск), зсув; пружність, пластичність та текучість; закон Гука; рідина в полі сил тяжіння; рівняння нерозривності; стаціонарний рух ідеальної рідини, рівняння Бернуллі; формула Торічеллі; види та сили тертя; течія в'язкої рідини, формула Пуазейля; закони гідродинамічної подібності.

Деформації твердого тіла. В механіці твердого тіла передбачалося, що під дією прикладених сил в тілі виникають деформації, проте вони не враховувалися при описі руху цього тіла як цілого.

В багатьох важливих випадках врахування деформацій є визначаючим, наприклад, коли йдеться про цілу область фізики — про механіку суцільного середовища — або про розрахунок міцності численних конструкцій і деталей машин та механізмів, що базується на окремій інженерній науці, званій "опір матеріалів".

Розглянемо поведінку твердих тіл, які деформуються під дією прикладених сил. Треба відзначити, що основні положення механіки деформації твердих тіл, що розглядаються як суцільні середовища, були розроблені на початку XIX ст. і складають основу сучасної теорії пружності. Досвід показує, що під дією прикладених сил тіла в тому або іншому ступені міняють свою форму і об'єм, що на мікроскопічному рівні означає відносний зсув атомів, з яких складається тіло. Для зручності опису деформацій уявно розіб'ємо тіло на фізично малі об'єми (іноді їх називатимемо частинками), що містять, проте, велику кількість атомів. У відсутності деформацій атоми знаходяться в стані теплової рівноваги, а всі малі об'єми — в механічній рівновазі. Тоді сума сил і моментів сил, діючих на виділений об'єм з боку примикаючих до нього інших об'ємів, буде рівна нулю. Зміни положень атомів при деформаціях призводять до того, що в тілі виникають внутрішні сили або внутрішні напруги, які прагнуть повернути тіло в стан рівноваги. Важливо відзначити, що внутрішні сили, як сили молекулярної взаємодії, є короткодійними. Тільки сусідні атоми або молекули ефективно взаємодіють між собою. Це спрощує ситуацію, оскільки дозволяє вважати, що сили, діючі на малий об'єм, прикладені до обмежуючої його поверхні.

3.1 Елементарні деформації. Коефіцієнт Пуассона

При всьому різноманітті випадків довільну деформацію тіла можна звести до двох елементарних деформацій — розтягування (стиснення) і зсуву. Звернемося до досліду. Закріпимо один кінець гумового шнура завдовжки l , що має квадратний перетин, і потягнемо за інший кінець з постійною силою. Шнур прийде в нове положення рівноваги з довжиною $l_1 > l$ (рис. 3.1, а). Таку найпростішу деформацію можна охарактеризувати відносним видовженням

$$\varepsilon = \frac{l_1 - l}{l}. \quad (3.1)$$

При цьому розтягу відповідає позитивне значення ε ($\varepsilon > 0$), а стиску — від'ємне значення ($\varepsilon < 0$). Деформацію зсуву можна спосте-

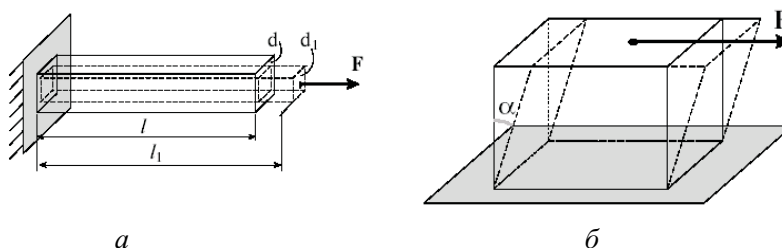


Рисунок 3.1

рігати в досліді з гумовим кубиком, якщо закріпити, наприклад, його нижню грань, а до верхньої грані прикласти дотичну силу (рис. 3.1, б). Деформація в цьому випадку характеризуватиметься параметром

$$\gamma = \operatorname{tg} \alpha, \quad (3.2)$$

що залежить від кута зсуву α , котрий у більшості практично важливих випадків малий, і $\gamma \approx \alpha$.

Відзначимо також відомий факт, що при розтягуванні гумового шнура його поперечний розмір d зменшується до величини d_1 . Таке поперечне стиснення характеризується параметром

$$\varepsilon_{\perp} = \frac{d_1 - d}{d} = \frac{\Delta d}{d}. \quad (3.3)$$

Дослідним шляхом встановлено, що відношення $\varepsilon_{\perp}$ до ε приблизно однакове для різних деформацій одного і того ж матеріалу.

Тому в теорії пружності матеріал характеризується *коефіцієнтом Пуассона*

$$\mu = -\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon}. \quad (3.4)$$

Яке чисельне значення коефіцієнта Пуассона? Щоб відповісти на це питання, підрахуємо зміну об'єму гумового шнура.

Об'єм недеформованого шнура $V = ld^2$, після деформації об'єму шнура

$$V_1 = l_1 d_1^2 = l(1 + \varepsilon)d^2(1 + \varepsilon_{\perp})^2 \approx V(1 + \varepsilon + 2\varepsilon_{\perp}).$$

В останньому виразі ми нехтували малими величинами $\varepsilon_{\perp}^2$, $2\varepsilon\varepsilon_{\perp}$ та $\varepsilon\varepsilon_{\perp}^2$.

З урахуванням (3.4) відносна зміна об'єму запишеться у вигляді

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{V_1 - V}{V} \approx \varepsilon + 2\varepsilon_{\perp} = \varepsilon(1 - 2\mu). \quad (3.5)$$

Оскільки при розтягу ($\varepsilon > 0$) об'єм ніколи не зменшується (ΔV завжди > 0 ; при розтягу відстань між атомами збільшується), то $0 < \mu < 1/2$.

Для ізотропних матеріалів, що мають однакові механічні властивості у всіх напрямках, коефіцієнт Пуассона $1/4 < \mu < 1/3$, зокрема, для більшості металів $\mu = 3/10$.

3.2 Пружні тіла

Як вже наголошувалося вище, при деформаціях виникають внутрішні напруги, які, в загальному випадку, залежать не тільки від деформацій, але і від швидкостей, з якими ці деформації відбуваються. В цьому легко переконатися, якщо узяти полімерну речовину, яка в звичайних умовах поволі розтікається подібно мастиці. Можна без особливих зусиль змінити її форму, якщо робити це поволі. Проте, якщо з цієї речовини виліпити кульку, то легко побачити, що така кулька володіє добрими пружними властивостями, підскакуючи після удару об підлогу практично на ту ж висоту, з якою він був кинутий без початкової швидкості. Цей дослід показує, що напруги, подібно силам в'язкого тертя, зростають у міру збільшення швидкості деформації. У ряді практично важливих випадків напруги визначаються тільки деформаціями. Такі тіла називаються **абсолютно пружними тілами**, або **пружними тілами**. Чудовою властивістю таких тіл є здатність повністю відновлювати свою форму після зняття зовнішніх зусиль, що прикладаються до тіла.

Розглянемо, наприклад, розтягування (або стиснення) стрижня (рис.3.1, а) під дією сили F , прикладеної перпендикулярно до торцевої грані з площею поперечного перерізу S . При послідовному збільшенні навантаження спочатку деформації розвиваються рівномірно по довжині стрижня і ростуть пропорційно навантаженню, тобто

$$\varepsilon = \frac{l_1 - l}{l} = \chi \cdot \frac{F}{S} = \chi \sigma, \quad (3.6)$$

Величина $\sigma = F/S$ називається нормальною *напругою* в торцевому перерізі стрижня. *Пропорційність деформацій ε відповідним напругам* виражає *закон Гука*. Коефіцієнт пропорційності χ називається коефіцієнтом подовження і для кожного матеріалу визначається дослідним шляхом. Оскільки чисельні значення ε набагато менші σ , то χ — вельми мала величина. Тому, звичайно, вводять модуль пружності (*модуль Юнга*) $E = \chi^{-1}$, і закон Гука остаточно записують у вигляді

$$\varepsilon = \sigma/E \quad \text{або} \quad \sigma = \varepsilon E. \quad (3.7)$$

Досвід показує, що цей закон виконується лише в певному інтервалі напруг. Якщо розтягувати стрижень, послідовно збільшуючи від нуля прикладену до нього силу, то кожного разу, після зняття навантаження, деформація зникає. Проте, при деякій напрузі $\sigma \geq \sigma_{\text{пр}}$ з'являється помітне залишкове подовження. Ця напруга $\sigma_{\text{пр}}$ називається *межею пружності*. На рис. 3.2 зображена залежність деформації від напруги, так звана діаграма напруг або діаграма розтягу. Слід зазначити, що закон Гука виконується тільки в частині області пружності — *області пропорційності*, коли $0 \leq \sigma \leq \sigma_{\text{п}}$.

При зростанні навантаження спостерігається явище текучості, тобто зростання подовження зразка при постійному навантаженні $\sigma_{\text{т}}$, званому *межею текучості*. Звернемо увагу на те, що течія матеріалу відбувається рівномірно по всій довжині стрижня. За межами області текучості подальше подовження стрижня супроводжується збільшенням σ . Проте деформації будуть розподілені вже неоднаково по довжині стрижня (рис. 3.3) — в деякому місці можна помітити утворення шийки. При напрузі $\sigma_{\text{м}}$, званій *межею міцності*, в цьому ослабленому перетині відбувається розрив.

Ту напругу, яку даний матеріал може витримати на практиці, не руйнуючись, називають *допустимою* і позначають $[\sigma]$. Частіше $[\sigma] < \sigma_{\text{п}}$, і всі розрахунки проводять на основі закону Гука. Щоб забезпечити міцність при всіх обставинах, допустима напруга вибирається як частина межі міцності, зокрема, для металів $[\sigma] = 0,2\sigma_{\text{м}}$, а для дерева $[\sigma] = 0,1\sigma_{\text{м}}$.

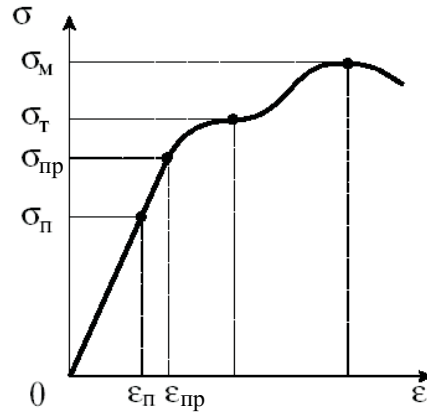


Рисунок 3.2

Слід зазначити, що найбільші деформації, які може витримати матеріал, визначаються протяжністю області текучості. *Якщо область текучості велика, то матеріал є пластичним.* Такий матеріал, як сталь, здатний витримувати великі навантаження без руйнування. Навпаки, *якщо область текучості невелика, то матеріал крихкий.* Крихкі матеріали, наприклад, чавун, руйнуються при деформаціях $\varepsilon \geq \varepsilon_{\text{п}}$. Проте, у ряді випадків і пластичні матеріали можуть руйнуватися при малих деформаціях $\varepsilon \approx \varepsilon_{\text{п}}$ (наприклад, сталь при температурі нижче -45°C).

Аналогічними властивостями володіють і деформації зсуву. Зокрема, в області пропорційності зв'язок між деформацією і допичною напругою (рис. 3.1, б) задається співвідношенням

$$\gamma = \frac{1}{G} \frac{F}{S} = \frac{\sigma_{\tau}}{G}, \quad (3.8)$$

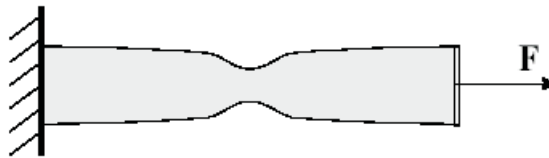


Рисунок 3.3

в якому $\sigma_\tau = F/S$ — дотична напруга, аналогічна за змістом введений раніше нормальній напрузі, а G — модуль зсуву, що є, як і модуль Юнга, характеристикою матеріалу.

3.3 Рідина і газ у стані рівноваги

Під дією зовнішніх сил в рідинах і газах, як і в твердих тілах, можуть виникати внутрішні напруги. Розглядаючи рідини і гази як суцільні середовища, ми відзначимо, що рідини, не маючи певної форми, зберігають практично незмінним свій об'єм. В багатьох важливих випадках їх можна розглядати як нестискувані. Гази ж не мають ні певної форми, ні фіксованого об'єму.

На відміну від твердих тіл *рідини і гази в стані рівноваги не володіють пружністю форм*. Вони володіють тільки *об'ємною пружністю*. В стані рівноваги напруга в рідині і газі завжди нормальна площині, на яку вона діє. Дотичні напруги викликають тільки зміну форми елементарних об'ємів тіла (зсуви), але не зміну величини самих об'ємів. Для таких деформацій в рідинах і газах зусиль не вимагається, а тому в цих середовищах при рівновазі дотичні напруги не виникають. В цьому можна переконатися, примусивши, наприклад, масивне тіло, що плаває на поверхні рідини, переміщатися уздовж поверхні під дією скільки завгодно малої сили. В цій ситуації дотичні напруги, що передаються від верхнього (захоплюваного тілом) шару до нижніх шарів рідини, дуже малі. Отже, з точки зору механіки, *рідини і гази можуть бути визначені як такі середовища, в яких при рівновазі дотичні напруги існують не можуть*.

В рідині (далі цей термін використовуватиметься і для газів, за виключенням тільки окремо обумовлених випадків) при стисненні сили відштовхування між молекулами можуть бути вельми значними. З цієї причини говорять не про розтягуючі і зсуваючі напруги σ , а про тиски $p = -\sigma$ як про негативні напруги.

Наслідком відсутності дотичних напруг в рідині є те, що в стані рівноваги величина нормальної напруги в рідині не залежить від орієнтації площадки, на котру вона діє. Для того, щоб це довести візьмемо довільно орієнтовану площадку, зовнішню нормаль до якої будемо характеризувати одиничним вектором $\mathbf{n}$. Оскільки напруга нормальна до площадки, то її можна представити у вигляді $\sigma = -p\mathbf{n}$. Напруги на площадках, перпендикулярних до координатних осей, запишуться як $\sigma_x = -p_x\mathbf{i}$, $\sigma_y = -p_y\mathbf{j}$, $\sigma_z = -p_z\mathbf{k}$, де $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — координатні орти. Тоді

$$p\mathbf{n} = p_x n_x \mathbf{i} + p_y n_y \mathbf{j} + p_z n_z \mathbf{k}.$$

Перемноживши скалярно ці співвідношення на $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ отримаємо

$$p = p_x = p_y = p_z. \quad (3.9)$$

Звідки бачимо, що в стані рівноваги нормальне напруження (тиск p) не залежить від орієнтації площадки, на котру воно діє. Це — закон Паскаля (1623–1662). Сформулюємо інакше: тиск у будь-якій точці рідини, що перебуває у стані спокою, однаковий у всіх напрямках і передається однаково по всьому об'єму рідини.

Тиск, що існує в рідині, обумовлений її стисненням. А оскільки дотичні напруги не виникають, то пружні властивості рідин по відношенню до малих деформацій характеризуються тільки однією пружною сталою — коефіцієнтом стисливості

$$\gamma = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp} \quad (3.10)$$

або зворотною до нього величиною — модулем всебічного стиснення

$$K = -V \frac{dp}{dV}. \quad (3.11)$$

В стані рівноваги тиск рідини p міняється із зміною її густини ρ і температури T . Він однозначно визначається значеннями цих параметрів. Співвідношення

$$p = f(\rho, T) \quad (3.12)$$

між тиском, густиною і температурою в стані рівноваги називається рівнянням стану. Воно має різний вигляд для різних речовин і особливою простотою відрізняється у випадку розріджених газів.

Якщо рідина знаходиться в русі, то разом з нормальними напругами в ній можуть виникати і дотичні сили. Проте останні визначаються не самими деформаціями рідини (зсувами), а їх швидкостями, тобто похідними деформацій за часом. Тому їх слід відносити до класу сил тертя або в'язкості. Вони називаються дотичними або зсувними силами внутрішнього тертя. Разом з дотичними можуть існувати і нормальні або об'ємні сили внутрішнього тертя. Від звичайних сил тиску p ці сили відрізняються тим, що вони визначаються не ступенем стиснення рідини, а швидкістю зміни стиснення з часом.

3.4 Основні рівняння рівноваги та руху рідин

Сили, що діють в рідині, діляться на сили *масові* (об'ємні) і сили *поверхневі*. Масова сила пропорційна масі dm , а з нею і об'єму dV елемента рідини, на який вона діє. Цю силу можна позначити як $\mathbf{f}dV$, називаючи $\mathbf{f}$ — *об'ємною густиною масових сил*. Найважливішими прикладами масових сил є сила тяжіння і сили інерції. У разі сили тяжіння $\mathbf{f} = \rho \mathbf{g}$, де ρ — густина рідини, а $\mathbf{g}$ — прискорення сили тяжіння.

Розглянемо випадок ідеальної рідини¹. Визначимо рівнодіючу сил тиску, що діють на нескінченно малий елемент об'єму рідини dV . Візьмемо в якості елемента об'єма нескінченно малий циліндр з площею основи dS і довжиною dx (рис. 3.4) (шукаємо проекцію рівнодіючої на напрямок координатної осі X). Сила тиску, що діє на першу основу, рівна $p(x)dS$, а на другу — $p(x+dx)dS$. Проекція сил тиску на вісь X , діючих на елемент об'єму рідини рівна $[p(x) - p(x+dx)]dS$. Але

$$p(x+dx) - p(x) = dp|_{y,z,t=\text{const}} = \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) dx. \quad (3.13)$$

Отримуємо для проекції сили

$$-\frac{\partial p}{\partial x} dS dx = -\frac{\partial p}{\partial x} dV,$$

оскільки $dS dx = dV$. Ця проекція, таким чином, пропорційна величині елемента об'єму dV , її можна позначити як $s_x dV$. Величина s_x є x -складова сили, що діє на одиницю об'єму рідини, котра виникає із-за зміни нормального тиску p в просторі. Таким самим шляхом можна знайти і s_y , s_z . В результаті побачимо, що на

¹Ідеальною рідиною називають уявну рідину, у якій відсутні сили внутрішнього тертя.

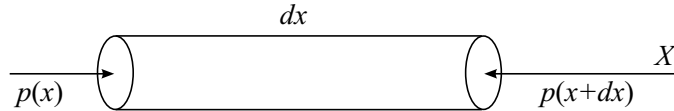


Рисунок 3.4

одиницю об'єму рідини діє сила $\mathbf{s}$ з проекціями

$$s_x = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad s_y = -\frac{\partial p}{\partial y}, \quad s_z = -\frac{\partial p}{\partial z}. \quad (3.14)$$

Сам вектор $\mathbf{s}$ дорівнює

$$\mathbf{s} = -\frac{\partial p}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial p}{\partial y}\mathbf{j} - \frac{\partial p}{\partial z}\mathbf{k} \quad (3.15)$$

або

$$\mathbf{s} = -\text{grad } p. \quad (3.16)$$

Таким чином, об'ємна густина $\mathbf{s}$ результуючої сил тиску, діючих на елементи об'єму рідини, рівна градієнту p , взятому з протилежним знаком. Сила $\mathbf{s}$ обумовлена не величиною тиску p , а його просторовими змінами. Величина p також важлива. Вона визначає ступінь стиску рідини в даній точці простору.

В стані рівноваги сила $\mathbf{s}$ має бути врівноважена зовнішньою масовою силою $\mathbf{f}$. Це призводить до рівняння

$$\text{grad } p = \mathbf{f}, \quad (3.17)$$

котре є основним рівнянням гідростатики².

Основне рівняння гідродинаміки³ ідеальної рідини:

$$\rho \frac{dv}{dt} = \mathbf{f} - \text{grad } p, \quad (3.18)$$

де v — швидкість, а $\frac{dv}{dt}$ — прискорення рідини в даній точці. Рівняння (3.18) називають рівнянням Ейлера.

Рівняння (3.17) показує, що при рівновазі рідини сила $\mathbf{f}$ (точніше густина сили або сила, діюча на одиницю об'єму рідини) повинна виражатися градієнтом однозначної скалярної функції. Це є необхідна і достатня умова того, щоб сила $\mathbf{f}$ була консервативною. Таким чином, для рівноваги рідини необхідно, щоб силове поле, в котрому вона знаходиться, було консервативним.

²Гідростатика — розділ механіки, в котрому вивчається рівновага нестискуваних рідин та дія рідини, що знаходиться в стані спокою, на занурені в неї тіла.

³Гідродинаміка — розділ механіки, в котрому вивчається рух нестискуваних рідин і їх взаємодія з твердими тілами.

Сила $\mathbf{f}$ потенціальна, а тому може бути виражена через потенціальну функцію U (потенціальну енергію одиниці об'єму рідини у зовнішньому полі) наступним чином

$$\mathbf{f} = -\text{grad } U. \quad (3.19)$$

Підставляючи (3.19) в (3.17) отримаємо

$$\text{grad}(p + U) = 0 \quad \text{або} \quad p + U = \text{const}. \quad (3.20)$$

Константа в (3.20) визначається з умови нормування потенціалу.

3.5 Рідина в полі сили тяжіння

Нехай рідина (наприклад, вода) знаходиться в полі сил тяжіння $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$, тоді $\mathbf{f} = \rho\mathbf{g}$. Для розрахунку розподілу тисків зручно направити вісь X уздовж сили тяжіння, сумістивши початок осі з вільною поверхнею рідини. Оскільки потенціальну функцію можна записати у вигляді $U = -\rho gh$, то розподіл тисків по глибині визначається із співвідношення

$$p(x) - \rho gx = \text{const}. \quad (3.21)$$

Константу визначимо з умови рівності тиску на поверхні води атмосферному тиску p_0 . Отже,

$$p(x) = p_0 + \rho gx, \quad (3.22)$$

де $p = \rho gh$ — тиск стовба рідини висотою h , який називається *гідростатичним тиском*.

Сила тиску на нижні шари рідини більша ніж на верхні, тому на тіло, занурене у рідину діє сила, що визначається за законом Архімеда: *на тіло, занурене в рідину, з боку рідини діє напрямлена догори виштовхуюча сила, яка рівна вазі витисненої тілом рідини*:

$$F_A = \rho gV, \quad (3.23)$$

де ρ — густина рідини, V — об'єм зануреного в рідину тіла.

3.6 Рівняння нерозривності

Рух рідини називається течією, а сукупність частинок рідини, що рухається — потоком. Графічно рух рідин зображається за допомогою *ліній струму*, які проводяться так, що дотичні до них

співпадають за напрямом з вектором швидкості рідини в даний момент часу. Лінії струму проводяться так, щоб густина їх була більша там, де більша швидкість руху рідини, і менша там, де рідина тече повільніше. Частина рідини, обмежена лініями струму, називається *трубкою струму* (рис. 3.5). Якщо поле швидкостей і відповідні йому лінії струму не міняються з часом, то рух рідини називається *стаціонарним* або сталим.

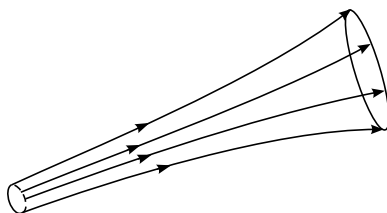


Рисунок 3.5

Візьмемо довільну трубку струму. Оскільки швидкості частинок рідини напрямлені по дотичних до ліній струму, то при течії рідина не може перетинати бічну поверхню трубки струму. Трубка струму поводить себе подібно бічній поверхні жорсткої трубки, уздовж якої тече рідина. Якщо поперечний переріз трубки струму нескінченно малий, то можна вважати, що швидкість рідини одна і та ж у всіх точках одного і того ж поперечного перетину і напрямлена уздовж осі трубки струму. Маса рідини, що протікає за час dt через поперечний переріз трубки, визначається виразом

$$dm = \rho v S dt, \quad (3.24)$$

де ρ — густина рідини, S — площа (нормального) поперечного перерізу трубки.

У випадку стаціонарної течії маса dm буде однією і тією ж для всіх перерізів трубки струму. Якщо взяти два перерізи, площі котрих рівні S_1 і S_2 , то можна записати

$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2, \quad (3.25)$$

Якби ця рівність не виконувалась, маса рідини між перерізами S_1 і S_2 з часом змінювалась би. А це суперечить закону збереження маси і припущенню про стаціонарність течії. Якщо рідина *нестискувана*, то $\rho_1 = \rho_2$, і співвідношення (3.25) приймає вигляд

$$v_1 S_1 = v_2 S_2. \quad (3.26)$$

Ми отримали рівняння нерозривності: *добуток швидкості течії нестискуваної рідини на поперечний переріз трубки є величиною сталою для даної трубки струму*. Швидкість рідини в одній і тій трубці тим більша, чим більш вузький поперечний переріз трубки.

3.7 Стаціонарний рух ідеальної рідини. Рівняння Бернуллі

Розглянемо стаціонарну течію ідеальної рідини в якому-небудь консервативному силовому полі, наприклад, в полі сили тяжіння. Застосуємо до цієї течії закон збереження енергії. При цьому повністю нехтуватимемо теплообміном, який може відбуватися між частинами рідини з навколишнім середовищем. Виділимо в рідині, що займає об'єм $MNDC$ (рис. 3.6). Нехай ця частина перемістилася в нескінченно близьке положення $M_1N_1D_1C_1$. Обчислимо роботу A , виконувану при цьому силами тиску. Тиск, що діє на бічну поверхню трубки струму, перпендикулярний до переміщення і роботи не виконує. При переміщенні межі MN в положення M_1N_1 виконується робота $A_1 = p_1 S_1 l_1$, де $l_1 = MM_1$ — величина переміщення. $S_1 l_1 = \Delta V_1$, $A_1 = p_1 \Delta V_1$ або $A_1 = p_1 \frac{\Delta m_1}{\rho_1}$, де Δm_1 — маса рідини в об'ємі MNN_1M_1 . При переміщенні межі CD в положення C_1D_1 рідина виконує роботу проти сил тиску p_2 (або тиск p_2 виконує над рідиною від'ємну роботу). Для неї, міркуючи аналогічно, знайдемо $A_2 = p_2 \frac{\Delta m_2}{\rho_2}$ де Δm_2 — маса рідини в об'ємі CDD_1C_1 . Але якщо рух стаціонарний, то маса рідини в об'ємі M_1N_1DC не зміниться, а тому із закону збереження маси отримаємо $\Delta m_1 = \Delta m_2 = \Delta m$. Остаточно знаходимо, що

$$A = A_1 - A_2 = \left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \right) \Delta m.$$

Ця робота рівна приросту ΔE повної енергії виділеної частини рідини. Зважаючи на стаціонарність течії, енергія рідини в об'ємі M_1N_1DC не змінюється. Тому величина ΔE рівна різниці енергій маси рідини Δm в положеннях CDD_1C_1 і MNN_1M_1 . Знаючи повну енергію рідини масою Δm

$$E = \frac{\Delta m v^2}{2} + \Delta m gh,$$

знаходимо $\Delta E = E_2 - E_1$. Прирівнюючи цю величину до роботи A і скорочуючи на ΔV , отримуємо

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2. \quad (3.27)$$

Отже,

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = \text{const} \quad (3.28)$$

— рівняння Бернуллі (1700-1782), де p — *статичний тиск*, $\rho g h$ — *гідростатичний тиск*, $\rho v^2/2$ — *динамічний тиск*. Рівняння Бернуллі виражає закон збереження механічної енергії для стаціонарного руху нестислої ідеальної рідини в однорідному полі сил тяжіння.

З рівняння Бернуллі та рівняння нерозривності слідує, що при течії рідини по трубці, яка має різні перерізи, швидкість рідини більша у місцях звуження, а статичний тиск більший в більш широких місцях.

3.8 Формула Торрічеллі

Розглянемо течію ідеальної нестискуваної рідини через малий отвір в бічній стінці або дні широкої посудини. Всі лінії струму проходять через трубку, починаючись поблизу вільної поверхні рідини, де швидкість v зневажливо мала (ми вважаємо, що площа отвору набагато менша за площу вільної поверхні). Застосуємо рівняння Бернуллі до точок B і A і відповідної лінії струму (рис. 3.7).

В точці B швидкість можна вважати рівною нулю, швидкість в отворі A позначимо v . Рівняння Бернуллі дає

$$p_0 + \rho g h = p_0 + \frac{v^2}{2},$$

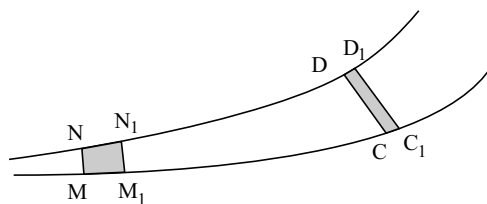


Рисунок 3.6

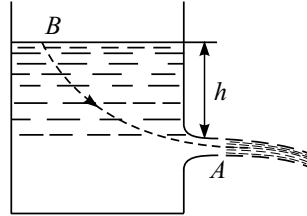


Рисунок 3.7

де p_0 — атмосферний тиск, а висота h відлічується від рівня отвору. Звідси отримуємо

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (3.29)$$

Це — формула Торічеллі (1608–1647). Вона показує, що при витіканні рідина отримує таку швидкість, яку отримало б тіло, що вільно падає з висоти h . Тому, якщо зігнути трубку і направити струю вертикально вгору або під малим кутом до вертикалі, то в щонайвищій своїй точці вона досягне рівня рідини в посудині. Насправді висота підняття струменя буде дещо менша через тертя і опір повітря, які при отриманні рівняння Бернуллі не враховувалися.

3.9 Сили в'язкого тертя

Раніше ми розглядали рух рідин і газів нехтуючи силами в'язкого тертя. Тим часом ці сили, які діють між частинками рідини, що рухається, можуть кардинальним чином вплинути як на розподіл швидкостей в потоці рідини, так і на обтікання рідиною тіл, поміщених в потік, що рухається.

Ще Ньютон встановив дослідним шляхом, що при ковзанні однієї відносно іншої двох паралельних площин, простір між якими заповнений рідиною, сили в'язкого тертя перешкоджають цьому ковзанню (рис. 3.8, *a*). Так, при русі із швидкістю v верхньої площини відносно нижньої виникає сила в'язкого тертя, напрямлена проти руху і рівна

$$F_\tau = \eta S \frac{v}{h}. \quad (3.30)$$

Ця сила пропорційна площі S і зміні швидкості на одиницю довжини в поперечному напрямі $\frac{v}{h}$ (градієнту швидкості в напрямі,

перпендикулярному руху) і залежить також від *динамічної в'язкості* (або просто *в'язкості*) рідини η . Формула (3.30) справедлива, якщо відстань h між пластинами значно менша їх лінійних розмірів ($h \ll \sqrt{S}$). Важливо відзначити, що частинки рідини, прилеглі до верхньої пластини, рухаються разом з нею із швидкістю v (захоплюються пластиною). Навпаки, частинки рідини поблизу нижньої (нерухомої) пластини знаходяться у спокої (прилипають до пластини). Уявимо, що рідина між пластинами складається з плоских паралельних шарів, що рухаються рівномірно (рис. 3.8, *а*). Незаважко зрозуміти, що кожний вищерозміщений шар захоплює за собою нижній сусідній шар з силою F_τ . У свою чергу, цей нижній шар гальмує рух верхнього шару з тією ж силою F_τ . На кожний шар діють зверху і знизу дві рівні, але протилежно напрямлені сили. Швидкість шарів зростає від нижнього шару до верхнього лінійно (рис. 3.8, *б*), а сили тертя, що діють на кожний з шарів, однакові. Як результат, зусилля F_τ , прикладене до верхньої пластини, передається на нижню пластину. Коефіцієнт в'язкості рідини η можна визначити експериментально, наприклад, по швидкості її витікання через трубку відомих розмірів. Як показує досвід, *при нагріванні в'язкість рідин зменшується, а газів — збільшується*.

3.10 Течія в'язкої рідини. Формула Пуазейля

Розглянемо течію в'язкої рідини, безпосередньо зробивши дослід. Під'єднаємо тонку горизонтальну скляну трубу з упаяними в неї вертикальними манометричними трубками за допомогою гумового шланга до водопровідного крана (рис. 3.9, *а*). При невеликій швидкості течії добре видно пониження рівня води в манометричних трубках у напрямі течії ($h_1 > h_2 > h_3$). Це, у свою чергу, вказує на наявність градієнта тиску уздовж осі трубки — статичний

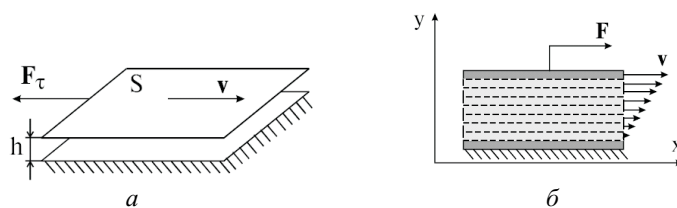


Рисунок 3.8

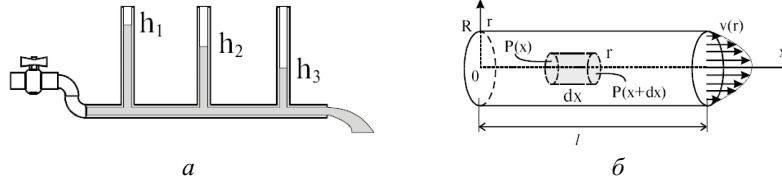


Рисунок 3.9

тиск в рідині зменшується з потоком. При рівномірній прямолінійній течії рідини сили тиску врівноважуються силами в'язкості. Прирівняємо сили в'язкості і тиску, діючого на циліндровий об'єм рідини радіуса r і завдовжки dx (рис. 3.9, б). На його бічну поверхню в напрямку руху діє дотична сила внутрішнього тертя $dF = \eta \cdot 2\pi r \frac{dv}{dr} dx$. На основу циліндра в тому ж напрямку діє сила різниці тисків $dF_1 = \pi r^2 [p(x) - p(x + dx)] = -\pi r^2 \frac{dp}{dx}$. Отже,

$$2\eta \frac{dv}{dr} = r \frac{dp}{dx}. \quad (3.31)$$

Швидкість $v(r)$, а разом з нею і похідна $\frac{dv}{dr}$ не змінюються із зміною x . Тому має бути сталою і похідна $\frac{dp}{dx}$, причому ця похідна має бути рівна $(p_2 - p_1)/l$, де p_1 — тиск на вході труби, p_2 — на виході, а l — довжина труби. В результаті приходимо до рівняння

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta l} r. \quad (3.32)$$

Інтегруючи його, отримуємо

$$v = -\frac{p_1 - p_2}{4\eta l} r^2 + C. \quad (3.33)$$

Сталу інтегрування C знаходимо з умови, що на стінці труби, тобто при $r = R$ швидкість v обертається в нуль. Тому

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} (R^2 - r^2). \quad (3.34)$$

Швидкість v максимальна на осі труби, де вона досягає значення

$$v_0 = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} R^2. \quad (3.35)$$

При віддаленні від осі швидкість v змінюється за параболічним законом. Підрахуємо витрату рідини, тобто кількість рідини, що за одиницю часу протікає крізь поперечний перетин труби. Маса рідини, за одиницю часу протікаючої крізь кільцевий майданчик з внутрішнім радіусом r і зовнішнім $r + dr$, рівна $dQ = 2\pi r dr \cdot \rho v$. підставляючи сюди вираз для v і інтегруючи, знаходимо шукану витрату рідини.

$$Q = \pi \rho \frac{p_1 - p_2}{2\eta l} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr \quad (3.36)$$

або

$$Q = \pi \rho \frac{p_1 - p_2}{8\eta l} R^4. \quad (3.37)$$

Витрата рідини пропорційна різниці тисків $p_1 - p_2$, четвертому степеню радіуса труби і обернено пропорційна довжині труби і коефіцієнту в'язкості рідини. Ці закономірності були встановлені експериментально і незалежно в 1938р. Гагеном і в 1840р. Пуазейлем (1799-1869). Гаген досліджував рух води в трубах, Пуазейль — течію рідини в капілярах. Формула (3.37) носить назву — *формула Пуазейля*, хоча сам Пуазейль і не отримав її, він досліджував питання тільки експериментально. На формулі Пуазейля заснований один з експериментальних методів визначення коефіцієнтів в'язкості рідин:

$$\eta = \pi \rho \frac{p_1 - p_2}{8Ql} R^4. \quad (3.38)$$

Формула Пуазейля справедлива лише для ламінарних течій рідини. *Ламінарною* називається така течія, при якій частинки рідини рухаються уздовж прямолінійних траєкторій, паралельних вісі труби (шари рідини ковзають один відносно одного не перемішуючись). При більших швидкостях ламінарна течія стає нестійкою і переходить у *турбулентну (вихрову) течію*. Течію називають турбулентною, якщо частинки рідини переходять з одного шару в інший (мають складові швидкостей, перпендикулярні течії). Це супроводжується інтенсивним перемішуванням рідини та вихреутворенням.

Кількісно перехід від одного режиму течії до іншого характеризується *числом Рейнольдса*:

$$\text{Re} = \frac{\rho l v_0}{\eta} = \frac{l v_0}{\nu}, \quad (3.39)$$

тут $\nu = \eta/\rho$ — кінематична в'язкість, v_0 — характерна швидкість потоку.

При малих значеннях числа Рейнольдса ($\text{Re} \leq 1000$) спостерігається ламінарна течія, перехід від ламінарної течії до турбулентної відбувається в області $1000 \leq \text{Re} \leq 2000$, а при $\text{Re} = 2300$ (для гладких труб) течія — турбулентна.

3.11 Закони гідродинамічної подібності

Розглянемо потік рідини, що оточує яке-небудь тіло або систему тіл. Разом з цією системою можна ввести нескінченну безліч подібних і подібно розташованих тіл, які обтікаються іншими рідинами. Якій умові повинні задовольняти параметри потоку і сталі, які характеризують властивості рідин (густина, в'язкість і ін.), щоб обидва потоки були механічно подібні? Якщо подібність має місце, то, знаючи картину течії для першої системи тіл, можна однозначно передбачити рух рідини і для іншої, геометрично подібної, системи тіл.

Нехай $\mathbf{r}$ і $\mathbf{v}$ — радіус-вектор і швидкість рідини в подібно розташованих точках, l — характерний розмір, а v_0 — характерна швидкість потоку. Властивості рідини характеризуються густиною ρ , в'язкістю η і стисливістю. Замість стисливості можна користуватись швидкістю звуку c в досліджуваній рідині. Якщо суттєва сила тяжіння, то остання характеризується прискоренням вільного падіння g . Якщо течія не стаціонарна, треба ввести характерний час τ , за який відбувається помітна зміна течії. Зважаючи на наявність рівнянь руху між величинами $\mathbf{v}$, v_0 , $\mathbf{r}$, l , ρ , η , c , g , τ повинен існувати функціональний зв'язок. З них можна скласти шість незалежних безрозмірних комбінацій. Сюди відносяться два відношення $\mathbf{v}/v_0$, $\mathbf{r}/l$ і ще чотири безрозмірні числа:

$$\text{Re} = \frac{\rho l v_0}{\eta} = \frac{l v_0}{\nu}, \quad (3.40)$$

$$\text{Fr} = \frac{v_0^2}{gl}, \quad (3.41)$$

$$\text{Ma} = \frac{v_0}{c}, \quad (3.42)$$

$$S = \frac{v_0 \tau}{l}, \quad (3.43)$$

Величина (3.40) — число Рейнольдса, (3.41) — число Фруда, (3.42) — число Маха, (3.43) — число Струхаля. Число Струхаля характеризує однаковість протікання процесів в часі. Число Маха — характеристика потоку з великими швидкостями, рівне відношенню швидкості течії до швидкості звуку.

На фізичному змісті чисел Рейнольдса та Фруда необхідно зупинитися. За порядком величини число Рейнольдса є відношенням кінетичної енергії рідини до її втрати, обумовленої роботою сил в'язкості на характерній довжині. Число Рейнольдса, таким чином, визначає відносну роль інерції і в'язкості рідини при течії. При великих числах Рейнольдса головну роль відіграє інерція, при малих — в'язкість.

Аналогічний зміст має число Фруда F . Воно за порядком величини визначає відношення кінетичної енергії рідини до її приросту, обумовленому роботою сили тяжіння на шляху, рівному характерній довжині. Чим більше число Фруда, тим більша роль інерції в порівнянні з тяжінням і навпаки.

Течії подібні, якщо вони мають однакові числа Рейнольдса і Фруда.

3.12 Запитання для самоконтролю

- 1 Які тіла називають абсолютно пружними?
- 2 Сформулюйте закон Гука.
- 3 Який зміст має межа пружності (текучості, міцності)?
- 4 Який матеріал називають пластичним (крихким)?
- 5 Сформулюйте закон Паскаля.
- 6 Що називається рівнянням стану?
- 7 Які сили називаються масовими? Поверхневими?
- 8 Запишіть основне рівняння гідростатики (гідродинаміки).
- 9 Сформулюйте закон Архімеда.
- 10 Який рух рідини називається стаціонарним?
- 11 Яка рідина називається нестискуваною?

- 12 Залишіть рівняння нерозривності (рівняння Бернуллі, формулу Торрічеллі).
- 13 Як залежить від температури в'язкість рідин та газів? На вашу думку, як можна пояснити цю залежність?
- 14 Яку течію називають ламінарною (турбулентною)?
- 15 Характеристикою чого є число Рейнольдса Re , число Маха M , число Струхала S та число Фруда F ?

Приклад 1. На рис. 3.10 зображено схему водоміру. По горизонтальній трубці змінного перерізу протікає вода. Визначити витрати води за одиницю часу, якщо різниця рівнів у двох манометричних трубках Δh , а перерізи труби біля основ трубок відповідно S_1 і S_2 .

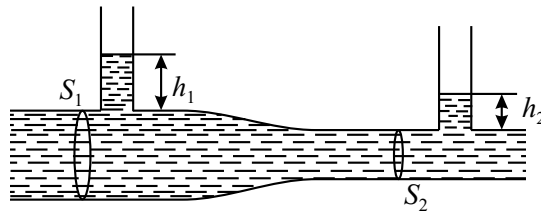


Рисунок 3.10

Витрата води для кожного з перерізів

$$Q = \rho v_1 S_1 = \rho v_2 S_2. \quad (3.44)$$

Оскільки трубка розміщена горизонтально, то рівняння Бернуллі для двох перерізів має вигляд

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}. \quad (3.45)$$

З формул (3.44) і (3.45) маємо:

$$v_1 = S_2 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho(S_1^2 - S_2^2)}}, \quad v_2 = S_1 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho(S_1^2 - S_2^2)}}.$$

Оскільки $p_1 - p_2 = \rho g h_1 - \rho g h_2 = \rho g \Delta h$, то $Q = \rho S_1 S_2 \sqrt{\frac{2g \Delta h}{S_1^2 - S_2^2}}.$

Отже, $Q = k \sqrt{\Delta h}$, де $k = \rho S_1 S_2 \sqrt{\frac{2g}{S_1^2 - S_2^2}}$ — стала водоміру.

Приклад 2. В циліндричну посудину з площею дна 100 см^2 налили рідину, густина якої $1,2 \text{ г/см}^3$. В ній плаває кусок льоду масою $0,3 \text{ кг}$ (рис. 3.11). Як зміниться тиск на дно, коли лід розтане? Як зміниться тиск, якщо лід забрати з посудини?

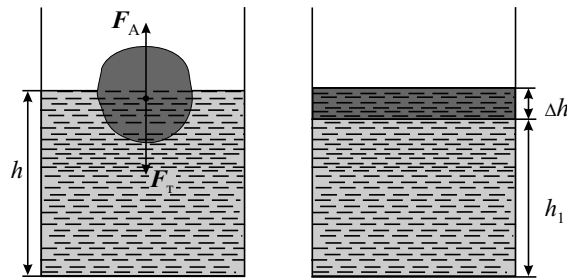


Рисунок 3.11

Умова плавання льоду $F_A = F_T$, де $F_T = m_{\text{л}}g$. Сила Архімеда $F_A = \rho g V'$, де V' — об'єм зануреної частини льоду. Тиск на дно $p = p_{\text{атм}} + \rho g h$. Коли б льоду в посудині не було, то рідина в посудині була б на рівні h_1 і $V' = S(h - h_1)$. Тоді тиск на дно $p = p_{\text{атм}} + \rho g h_1$.

$$\text{Їх різниця } \Delta p_1 = p - p_1 = \rho g(h - h_1) = \rho g \frac{V'}{S} = \frac{m_{\text{л}}g}{S} =$$

$$= \frac{0,3 \text{ кг} \cdot 9,81 \text{ м/с}^2}{100 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} \approx 294,3 \text{ Па}.$$

Отже, тиск за наявності у посудині плаваючого льоду буде більший ніж у відсутності льоду у посудині на $294,3 \text{ Па}$.

Після розплавлення льоду вода розтечеться по поверхні рідини (у відсутності льда висота рідини в посудині h_1) шаром товщиною Δh . Тепер тиск на дно буде

$$p_2 = p_{\text{атм}} + \rho g h_1 + \rho_{\text{в}} g \Delta h.$$

Оскільки $m_{\text{л}} = \rho_{\text{в}} S \Delta h$, то

$$p_2 = p_{\text{атм}} + \rho g h_1 + \frac{m_{\text{л}}g}{S}.$$

Шукана різниця тисків

$$\Delta p_2 = p - p_2 = p_{\text{атм}} + \rho g h - (p_{\text{атм}} + \rho g h_1 + \frac{m_{\text{л}}g}{S}) = \frac{m_{\text{л}}g}{S} - \rho g(h - h_1) = 0.$$

Після розплавлення льоду сумарний тиск на дно не змінився.

Розділ 4

Елементи фізики твердого тіла

Типи кристалів; дефекти в кристалах, міцність кристалів; зміна агрегатного стану, фазові переходи I-го роду; рідкі кристали.

Основною особливістю *кристалічних твердих тіл*, що відрізняє їх від рідин і аморфних твердих тіл, є *періодичність просторового розташування атомів, молекул чи йонів*, з яких складається кристал. Така періодичність одержала назву *далекого порядку*¹. Структура, для якої характерно регулярне розташування частинок з періодичною повторюваністю в трьох вимірах, називається *кристалічною ґраткою*. Точки, у яких розташовані частинки, а точніше - середні рівноважні положення, навколо яких відбуваються теплові та нульові коливання частинок (атомів, молекул чи йонів), називаються *вузлами кристалічної ґратки*. Характерною рисою кристалів є їх *анізотропність* — *залежність фізичних властивостей* (пружних, механічних, теплових, електричних, магнітних, оптичних) *від напрямку*. Анізотропія кристалів пояснюється тим, що густина розташування частинок по різних напрямках не однакова. Якщо кристалічне тіло складається з одного єдиного кристала, воно є *монокристалом*. Якщо тверде тіло складається з безлічі безладно орієнтованих кристалічних зерен, воно називається *полікристалом*. У полікристалах анізотропія спостерігається тільки для окремих дрібних кристаликів. Тверді тіла, фізичні властивості яких однакові в усіх напрямках (*ізотропні*) називаються *аморфними*. Для аморфних тіл, як і для рідин, характерний ближній порядок у розташуванні частинок, але, на відміну від рідин, рухливість частинок у них досить мала. Органічні аморфні тіла, молекули яких складаються з великої кількості однакових довгих молекулярних ланцюжків, з'єднаних хімічними зв'язками, називаються *полімерами* (наприклад, каучук, поліетилен, гума).

4.1 Типи кристалів

В залежності від роду частинок, розташованих у вузлах кристалічної ґратки, і характеру сил взаємодії між ними кристали поділяються на чотири типи: *йонні, атомні, металічні, молекулярні*.

Йонні кристали. У вузлах кристалічної ґратки розташовуються по черзі йони протилежного знака. Структури ґраток двох

¹В аморфних і рідких тілах упорядковане розташування часток може поширюватися тільки на сусідні атоми (*ближній порядок*).

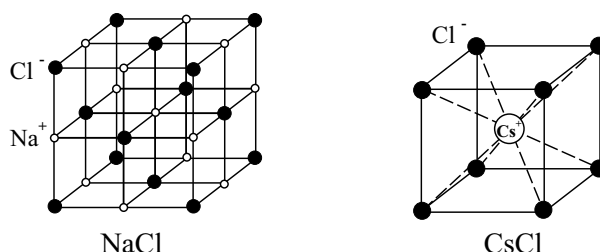


Рисунок 4.1

найбільш характерних йонних кристалів – NaCl (гратка являє собою дві однакові гранецентровані кубічні ґратки, вкладені одна в одну; у вузлах однієї з цих ґраток знаходяться іони Na^+ , у вузлах іншої – іони Cl^-) і CsCl (кубічна об'ємноцентрована ґратка – у центрі кожного елементарного осередку знаходиться йон) – показані на рисунку 4.1. Зв'язок, обумовлений кулонівськими силами притягання між різнойменно зарядженими йонами називається *йонним*.

Атомні кристали. У вузлах кристалічної ґратки розташовуються нейтральні атоми, що утримуються у вузлах ґратки *ковалентними зв'язками* квантово-механічного походження (у сусідніх атомів усупільнюються валентні електрони, найменш зв'язані з атомом). Приклад атомних кристалів – алмаз і графіт. В алмазі (рис. 4.2, а) кожен атом вуглецю зв'язаний з чотирма такими ж атомами, що розташовуються на однакових відстанях від нього у вершинах тетраедра. У графіті (рис. 4.2, б) атоми вуглецю упаковані в плоскі шари, зв'язані між собою слабкими ван-дер-ваальсовими силами.

Металічні кристали. У вузлах кристалічної ґратки розташовуються позитивні йони металу. При утворенні кристалічної ґратки валентні електрони, слабо зв'язані з атомами, відокремлюються від атомів і колективізуються: вони вже належать не одному атому, як у випадку йонного зв'язку, і не парі сусідніх атомів, як у випадку ковалентного зв'язку, а всьому кристалу в цілому.

Молекулярні кристали. У вузлах кристалічної ґратки розташовуються нейтральні молекули речовини, сили взаємодії між якими обумовлені незначним взаємним зміщенням електронів у електронних оболонках атомів. Ці сили називаються ван-дер-ваальсовими, тому що вони мають ту ж природу, що і сили притягання між молекулами, що приводять до відхилення газів від ідеальності. Приклади молекулярних кристалів – органічні сполу-

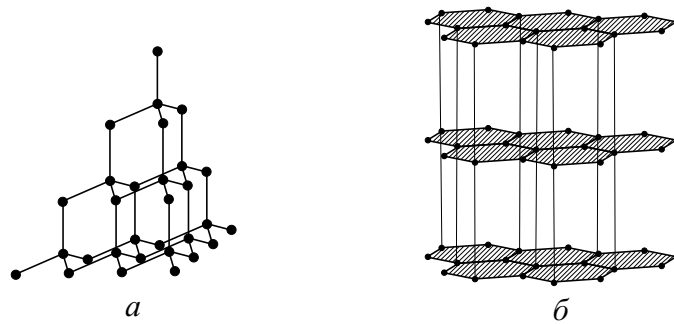


Рисунок 4.2

ки (наприклад, парафін), інертні гази (Ne, Ar, Kr, Xe), атмосферні гази CO_2 , O_2 , N_2 у твердому стані, лід, і т.д.

4.2 Дефекти в кристалах. Міцність кристалів

У реальних кристалічних ґратках існують відхилення від того ідеального розташування атомів у ґратці, що ми розглядали. Усі такі відхилення називаються *дефектами кристалічної ґратки*. Їх можна поділити на макроскопічні і мікроскопічні. До макроскопічних дефектів відносяться пори, тріщини, сторонні макроскопічні включення та ін. Найбільш простими мікроскопічними дефектами є *точкові дефекти*. До них відносяться: 1) відсутність атома в якому-небудь вузлі ґратки (вакансія, рис. 4.3, а); 2) заміна "свого атома" ґратки яким-небудь іншим "чужим" атомом (рис. 4.3, б); 3) упродовження свого чи чужого атома в міжвузловий простір (міжвузловий атом, рис. 4.3, в).

Точкові дефекти - вакансії і міжвузлові атоми - можуть виникати в результаті теплових флуктуацій. Такі дефекти називаються *термодинамічно рівноважними*. Зрозуміло, вони настільки ж неминучі, як і броунівський рух або будь-які флуктуації. При нагріванні кристала концентрація вакансій і міжвузлових атомів зростає експоненційно.

Енергія утворення точкових дефектів набагато більша енергії теплових коливань ґратки. Наприклад, для міді енергія вакансії $E_v \approx 1$ еВ, енергія міжвузлового атома $E_i \approx 3$ еВ, у той час як енергія теплових коливань kT навіть поблизу температури плавлення ($1084,5^\circ\text{C}$) складає усього 0,12 еВ. Тому рівноважна концен-

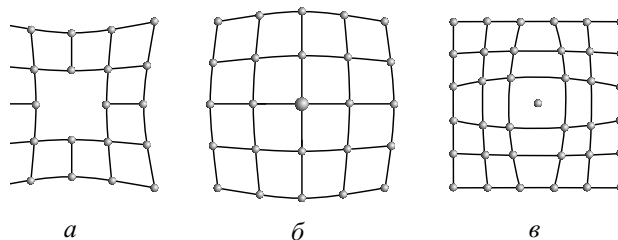


Рисунок 4.3

трація точкових дефектів, як правило, невелика. Так, для міді поблизу температури плавлення рівноважні концентрації вакансій і міжвузлових атомів, якщо їх оцінити за формулою Больцмана, будуть відповідно дорівнювати

$$n_v \approx \exp\left(-\frac{E_v}{kT}\right) \sim 10^{-4}, \quad n_i \approx \exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right) \sim 10^{-11}.$$

Однак в кристалах у результаті загартування, опромінення нейтронами та ін. концентрація точкових дефектів часто буває багато вище рівноважної. Такий "пересичений розчин" вакансій і міжвузлових атомів може розпастися з утворенням дислокацій.

Дислокації - це специфічні *лінійні дефекти* кристалічної ґратки, що порушують правильне чергування атомних площин. На відміну від точкових дефектів, що порушують *ближній порядок*, дислокації порушують *далекий порядок* у кристалі, спотворюючи всю його структуру. Тому саме дислокації відіграють найбільш важливу роль у механічних властивостях твердих тел.

Розрізняють два головних типи дислокацій: *крайову* і *гвинтову*. Схема крайової дислокації показана на рис. 4.4, а. Дислокація характеризується зайвою кристалічною площиною, всуненою між двома сусідніми шарами атомів. Лінією дислокації в даному випадку є пряма, перпендикулярна до площини малюнка і позначена на ньому знаком $\perp$. "Зайвий" шар атомів розташований над цим знаком. Крайова дислокація, що утворилася в результаті неправильного нарощування кристалічної ґратки, може існувати протягом десятків і сотень міжатомних відстаней.

Гвинтову дислокацію можна наочно уявити собі, зробивши "розріз" ґратки по напівплощині і зсунувши частини ґратки по обох сторонах розрізу назустріч одна одній на один період паралельно краю розрізу. Цей край називається *лінією гвинтової*

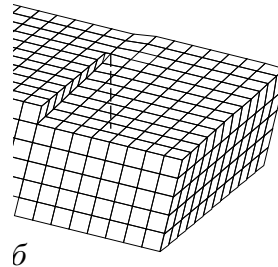


Рисунок 4.4

дислокації і зображений на рис. 4.4, б пунктиром. Наявність гвинтової дислокації перетворює кристалічні площини ґратки у гелікоїдальну поверхню (подібну гвинтовій лінії без сходинок).

Для характеристики кількості дислокацій у тілі вводять їхню густину. *Густиною дислокацій* називається кількість дислокаційних ліній, що перетинають одиничну площадку, уявно проведену в тілі. Це число змінюється приблизно від $10^2 - 10^3$ у найбільш досконалих чистих монокристаллах до $10^{11} - 10^{12}$ см^{-2} у сильно деформованих (холоднооброблених) металах.

Дефекти в кристалах сильно впливають на їхні фізичні властивості (механічні, магнітні, електричні та ін.). Розглянемо, наприклад, деформацію кристала під дією дотичних напружень. Будемо припускати, що кристал - ідеальний, тобто не містить ніяких дефектів. Нехай прикладене дотичне напруження паралельно одній з кристалічних площин ґратки (рис. 4.5). Під дією такої напруги шар CD ґратки зміститься на відстань x . Потенціальна

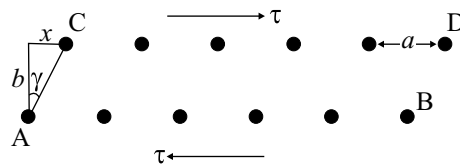


Рисунок 4.5

енергія ґратки $U(x)$ буде періодичною функцією зсуву x з періодом a , рівним сталій ґратки в напрямку зсуву. Вона мінімальна при $x = 0, a, 2a, \dots$ і максимальна при $x = a/2, 3a/2, 5a/2, \dots$. Мінімумам $U(x)$ відповідають *стійкі*, максимумам – *хиткі* положення.

ння рівноваги. Припустимо, що на кривій $U = U(x)$ немає ніяких інших мінімумів і максимумів. Якщо $x < a/2$, то після зняття напруги ґратка повертається у вихідне положення рівноваги, тобто деформація буде *пружною*. Не те буде, коли x перейде через точку максимуму $x = a/2$. У цьому випадку відбудеться мимовільний перехід у найближче положення стійкої рівноваги $x = a$. Якщо при цьому напругу τ не знімати, то за ним підуть переходи в подальші положення стійкої рівноваги $x = 2a$, $x = 3a$ і т.д. Іншими словами, деформація стане *пластичною*. Таким чином, максимальний зсув, при якому ще не існує пластичної деформації, рівний $x = a/2$. Відповідна йому напруга називається *межею пружності* чи *границею текучості* кристала. Для оцінки межі пружності $\tau_{\text{пр}}$ Френкель припустив, що періодична функція $U(x)$ - синусоїдальна:

$$U(x) = U_0 \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right).$$

Якщо площу грані АВ взяти рівною одиниці, то прикладена напруга буде

$$\tau = \frac{dU}{dx} = \frac{2\pi U_0}{a} \sin \frac{2\pi x}{a}.$$

Максимальне її значення, тобто $2\pi U_0/a$, і буде межею пружності $\tau_{\text{пр}}$. Таким чином,

$$\tau = \tau_{\text{пр}} \sin \frac{2\pi x}{a}.$$

При малих x $\tau = \frac{2\pi\tau_{\text{пр}}}{a}x$. З іншого боку, в цьому випадку $\tau = G\gamma$, де G — модуль зсуву, а γ — кут зсуву. Останній рівний $\gamma = x/b$, де b — міжплощинна відстань, тобто відстань між площинами АВ і CD. Порівняємо обидва вирази і отримаємо

$$\tau_{\text{пр}} = \frac{G}{2\pi} \frac{a}{b}. \quad (4.1)$$

Зокрема, для кубічних кристалів ($a = b$)

$$\tau_{\text{пр}} = \frac{G}{2\pi}. \quad (4.2)$$

Якщо підставити сюди експериментальні значення модулів зсуву, то для межі пружності найбільш уживаних матеріалів (металів і ін.) вийдуть величини, що лежать в інтервалі приблизно від

10^5 до 10^6 Н/см². Вони приблизно на два порядки перевищують значення, що спостерігаються. Така розбіжність теорії з дослідом пояснюється тим, що теорія не враховує різні дефекти, що завжди містяться в реальному кристалі. Механізм дії дефектів, завдяки їхній розмаїтості і нерегулярному розташуванню в кристалах, може бути найрізноманітнішим. Розглянемо ідеалізований дефект, що нагадує крайову дислокацію. Нехай у кристалі є кристалічна площина, що містить у порівнянні із сусідніми паралельними площинами зайві атоми (рис. 4.6). Припустимо, що n атомів однієї площини укладаються на тій же відстані, що і $n + 1$ атомів іншої

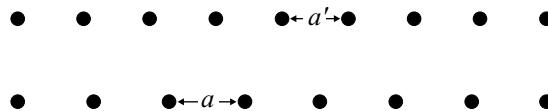


Рисунок 4.6

площини. Тоді можна скористатися оцінкою Френкеля. Тільки замість колишнього періоду a треба взяти більший період, а саме an , де $an = (n + 1)a'$. Це знижує межу пружності в n раз.

Абсолютно аналогічна картина має місце в питанні про *міцність кристала на розрив*. Теоретичні оцінки міцності приводять до результату, що ця величина для кристалів може досягати декількох тисяч - аж до 10^6 Н/см². Насправді в більшості випадків значення, що спостерігаються, приблизно в 100 і навіть у 1000 разів менші. Розбіжність знову пояснюється тим, що теорія не враховує наявності дефектів у реальних кристалах. На міцність кристалів насамперед впливають *мікроскопічні поверхневі й об'ємні тріщинки*, що містяться в кристалах. Один з механізмів впливу тріщин полягає в тому, що напруги в околиці тріщин розподіляються нерівномірно. Вони максимальні поблизу країв тріщин і можуть у багато разів перевищувати середні напруги в кристалі. Як тільки ці максимальні напруги досягають теоретичної межі міцності, відбувається збільшення розмірів тріщинок, а потім і *розрив кристала*. А.Ф.Йоффе (1880-1960) експериментально показав, що при зануренні кристалів кухонної солі у воду її міцність зростає від $5 \cdot 10^2$ до $16 \cdot 10^4$ Н/см², тобто до величини, близької до теоретичної. Він пояснив цей результат розчиненням у воді поверхневого шару кристала і ліквідації в ньому мікротріщин та інших дефектів.

Існують і інші причини зниження міцності кристалів на розрив. Наприклад, як показав П.А.Ребіндер (1898-1972), на міцність матеріалів мають великий вплив *поверхнево-активні речовини*,

адсорбовані на поверхні тіл і понижуючі при цьому їхню поверхневу енергію. Очевидно, частинки адсорбованих речовин розпирають зародкові тріщинки, проникаючи при цьому в глиб тіла і сильно зменшуючи його міцність. У повітрі завжди є волога й інші речовини, які адсорбуються на поверхні тіл. При видаленні повітря разом з домішками відбувається дезабсорбція, що супроводжується підвищенням міцності тіла на розрив.

Вплив дефектів на міцність матеріалів чітко виявляється при розгляді так званого "*масштабного фактора*", тобто залежності середньої міцності зразка даного матеріалу від його розміру. Для зразків звичайних розмірів, порядку декількох сантиметрів і більше, ця залежність практично не спостерігається. Але для тонких ниток вона виступає дуже чітко. Наприклад, міцність скляних ниток з діаметрами 22, 16, 12.5, 8 і 2.5 мкм дорівнює відповідно $22 \cdot 10^3$, $100 \cdot 10^3$, $140 \cdot 10^3$, $200 \cdot 10^3$ і $550 \cdot 10^3$ Н/см². Таким чином, при зменшенні діаметра скляної нитки від 22 до 2.5 мкм міцність підвищується приблизно в 25 разів. Справа в тім, що імовірність зустрічі "небезпечного дефекту" (наприклад, тріщини), що приводить до розриву зразка, для тонких ниток менша, ніж для товстих.

Міцність матеріалу збільшується в результаті придушення процесів зародження тріщин, а також у результаті створення перешкод для їхнього поширення в тілі. Тому найбільш міцні матеріали можуть бути отримані двома протилежними способами. Один з них полягає у виготовленні бездефектних (наприклад, нитковидних) кристалів, де усунуті джерела внутрішніх напружень, на яких можуть зароджуватися тріщини. Інший шлях, навпаки, полягає в максимальному спотворенні правильної структури кристала, що утруднює поширення в тілі тріщин і пластичних деформацій. Техніка одержання надміцних матеріалів і сплавів у даний час використовує тільки другий спосіб (*легкування*, тобто введення в ґратку домішок зі сторонніх атомів; *наклеп*, тобто сильне пластичне деформування кристалічних ґраток при холодній обробці металів; загартування й ін.).

4.3 Зміна агрегатного стану. Фазові переходи

І в рідинах і у твердих тілах завжди є деяке число молекул, енергія яких достатня для подолання притягання до інших молекул і які здатні залишити поверхню рідини чи твердого тіла. Такий процес для рідини називається *випаровуванням* (чи *пароутворенням*), для твердих тіл - *сублімацією*. *Плавленням* називається перехід речовини з кристалічного (твердого) стану в рідкий. Плавлення відбувається при певній визначеній *температурі плавлення*

$T_{пл}$, що зростає зі збільшенням зовнішнього тиску. У процесі плавлення теплота Q , що надається речовині, йде на виконання роботи з руйнування кристалічної ґратки і тому $T_{пл} = \text{const}$ (рис. 4.7, а) до розплавлення всього кристала.

Кількість теплоти L , потрібної для розплавлення 1 кг речовини, взятої при температурі плавлення, називається *питомою теплотою плавлення*.

Якщо рідину охолоджувати, то процес піде в зворотному напрямку (рис. 4.7, б Q' — кількість теплоти, що віддається тілом при кристалізації): спочатку температура рідини знижується, потім при постійній температурі, що дорівнює $T_{пл}$, починається *кристалізація*. Для кристалізації речовини необхідна наявність *цен-*

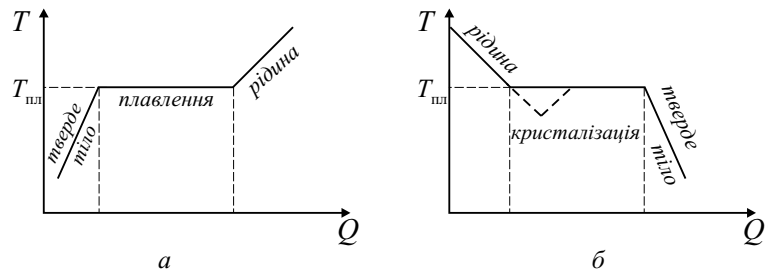


Рисунок 4.7

трів кристалізації - кристалічних зародків, котрими можуть бути як кристалики речовини, що утворюється, так і будь-які сторонні включення. Якщо в чистій рідині немає центрів кристалізації, то вона може бути охолоджена до температури, меншої за температуру кристалізації, і утворити при цьому *переохолоджену рідину* (рис. - пунктир).

Аморфні тіла є переохолодженими рідинами.

Фаза - сукупність усіх частин системи, що володіють однако- вим хімічним складом і знаходяться в однаковому термодинамі- чному стані.

Перехід речовини з однієї фази в іншу - *фазовий перехід* - завжди пов'язаний з якісними змінами властивостей речовин.

Фазовий перехід першого роду - це перехід, що супроводжує- ться поглинанням або виділенням теплоти (наприклад, плавлен- ня, кристалізація). Він характеризується *сталістю температу- ри*, змінами ентропії й об'єму.

Важливим співвідношенням для фазових перетворень I-го ро- ду є рівняння Клапейрона-Клаузіуса, яке можна отримати або з

рівності питомих термодинамічних потенціалів (умова рівноваги фаз), або методом циклів.

Проведемо цикл Карно з двухфазною системою, що складається з рідини і її насиченої пари. Оскільки тиск насиченої пари однозначно визначається його температурою, то для такої системи ізотерма $T = \text{const}$ є в той же час ізобарою $p = \text{const}$. На діаграмі pV ізотерми зображаються горизонтальними прямими. Нехай початковий стан двухфазної системи позначено точкою 1 (рис. 4.8). Привівши систему в тепловий контакт із нагрівачем, бу-

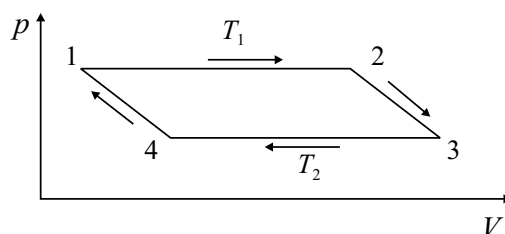


Рисунок 4.8

демо квазістатично підводити до неї теплоту. Рідина почне випаровуватися, а система виконувати роботу, наприклад, піднімаючи навантажений поршень. Коли випарується одиниця маси рідини (системі буде передана кількість теплоти Q_1 , яка чисельно дорівнює питомій теплоті пароутворення q), усунемо тепловий контакт і адіабатично ізолюємо систему. Після цього змусимо її розширюватися по нескінченно короткій адіабаті 23, поки температура системи не зрівняється з температурою холодильника T_2 . В якості холодильника візьмемо тепловий резервуар, температура якого T_2 нескінченно мало відрізняється від температури нагрівача T_1 . Зі стану 3 повернемо систему по ізотермі 34 і адіабаті 41 у вихідний стан 1. У результаті система зробить нескінченно малий цикл Карно. Кількість теплоти, отримана системою від нагрівача, $Q_1 = q$. На ізотермі 12 система виконала позитивну роботу $A_1 = p(T_1)(V_1 - V_2)$, оскільки її об'єм збільшився на $V_1 - V_2$, а на ізотермі 34 – негативну, $A_2 = -p(T_2)(V_1 - V_2)$. Роботою на адіабатах 23 і 41 можна знехтувати як величиною більш високого порядку малості. Повна робота системи буде

$$A = A_1 + A_2 = (V_1 - V_2)[p(T_1) - p(T_2)] = \frac{dp}{dT}(V_1 - V_2)(T_1 - T_2). \quad (4.3)$$

Згідно теореми Карно

$$\frac{A}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (4.4)$$

Підставляючи в (4.4) значення A і Q_1 та заміняючи T_1 на T , отримаємо *рівняння Клапейрона-Клаузіуса*

$$\frac{dp}{dT} = \frac{q}{T(V_2 - V_1)}. \quad (4.5)$$

Рівняння (4.5) справедливе не тільки для рівноваги фаз рідини і пари але й для рівноваги фаз твердого тіла і його газоподібної фази в процесах сублімації; фаз твердого тіла і його розплаву, тоді q — питома теплота плавлення, V_1 , V_2 — питомі об'єми твердої та рідкої фаз, T — температура плавлення при тиску p . Величина q істотно додатня. Тому, якщо $V_2 > V_1$, то $\frac{dp}{dT} > 0$. Це означає, що з підвищенням тиску точка плавлення підвищується. Якщо ж $V_2 < V_1$, то $\frac{dp}{dT} < 0$, тобто при збільшенні тиску температура плавлення понижується. Останній випадок має місце для води. Різниця питомих об'ємів льоду і води при 0°C приблизно рівна

$$V_1 - V_2 = 9,1 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 \text{ кг}^{-1}.$$

Теплота плавлення

$$q = 3,35 \cdot 10^5 \text{ Дж} \cdot \text{кг}^{-1}.$$

Використовуючи ці данні, отримаємо

$$\frac{dp}{dT} = 134 \text{ атм} \cdot \text{K}^{-1}.$$

Звідси бачимо, що із збільшенням тиску на одну атмосферу точка плавлення льоду знижується приблизно на $0,0075$ градуса.

Якщо на брусок льоду, що лежить своїми кінцями на нерухомих опорах, накинути петлю з дроту, до якої підвісити великий вантаж, лід під дротом буде плавитися. Вода витискається з-під дроту і замерзає на ньому. Дріт поступово пройде крізь брусок, однак брусок залишиться нерозрізаним.

4.4 Рідкі кристали

Крім анізотропного кристалічного й ізотропного рідкого станів, речовина може знаходитися ще в одному своєрідному стані, що називають *рідиннокристалічним*. За своїми механічними властивостями речовини в цьому стані походять на звичайну рідину: вони текучі, причому серед рідких кристалів зустрічаються як речовини легко рухливі (з малою в'язкістю), так і менш рухливі (з великою в'язкістю). У той же час ці рідини відрізняються від звичайних своєю анізотропією, що найбільш помітним чином виявляється в оптичних властивостях. Рідиннокристалічний стан спостерігається у багатьох складних органічних речовин з великими молекулами. Фізична природа р.к. стану полягає у наступному. У звичайній рідині взаємне розташування і взаємна орієнтація молекул зовсім хаотичні; іншими словами, у своєму тепловому русі молекули рідини роблять як хаотичні поступальні переміщення, так і хаотичне обертання. У рідкому ж кристалі молекули хоча і розташовані як ціле в просторі безладним чином, але їхня взаємна орієнтація упорядкована. Хаотичне лише теплове поступальне переміщення молекул, але не їхнє обертання. Можливість поступального зсуву молекул обумовлює рідинні властивості речовин – його плинність. Упорядкована ж орієнтація молекул приводить до анізотропії речовини.

Рідкі кристали — це рідини, молекули яких мають не сферичну, а витягнуту форму, для яких характерний певним порядком розташування. Атоми в молекулах розміщуються в основному або вздовж певної лінії, або в певній площині (рис. 4.9).

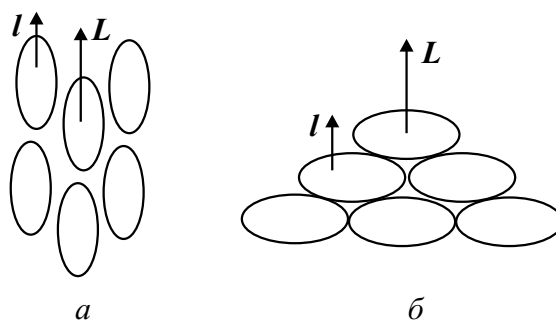


Рисунок 4.9

Несферичність форми молекули можна характеризувати одиничним вектором l , який називають директором і який або па-

паралельний осі молекули $\mathbf{L}$, утворюючи так звані стрижнеподібні молекули (рис. 4.9, *a*) або перпендикулярний до її площини — дископодібні молекули (рис. 4.9, *б*). Центри мас молекул не утворюють періодичної ґратки, як у кристалі, а розміщуються хаотично в просторі і можуть в ньому вільно переміщуватися. Зрозуміло, що орієнтація молекул в такій анізотропній рідині підпорядкована цьому порядку тільки при певній температурі, доки теплові флуктуації не зруйнують даний орієнтаційний порядок. Значне підвищення температури викликає розлад в орієнтації молекул. Коли їх хаотичний поступальний і обертальний рух стає переважачим, рідкий кристал перетворюється в звичайну рідину.

Існування того чи іншого рідкого стану залежить не тільки від температури, але й від густини речовини. Тобто від концентрації в розчині несферичних молекул.

Отже, в рідинах, які складаються з несферичних молекул, при помірних температурах і густинах речовин з'являється певний напрям — вісь $\mathbf{L}$. Уздовж цієї осі орієнтуються молекули - стрижні і перпендикулярно до неї — молекули - диски. Такі саме осі є і в деяких твердих молекулярних кристалах. Наявність у рідинно-му середовищі виділеної осі надає матеріалу особливих оптичних властивостей. Ці осі називаються оптичними і зумовлюють схожість між рідкими і твердими кристалами. Великий інтерес до рідких кристалів зумовлений саме тим, що в них виявилось можливим керувати світловими променями, змінюючи їх інтенсивність, колір і напрям, впливати на орієнтацію оптичних осей у рідинах набагато простіше, ніж в твердому тілі. Орієнтація оптичної осі в рідких кристалах залежить від впливу зовнішніх умов, інородних вкраплень тощо, які приводять до деформації орієнтації одиничного вектора $\mathbf{l}(\mathbf{r})$. Часто спостерігаються дефекти орієнтації, такі як точки, лінії, площини, в межах яких орієнтація осі $\mathbf{L}$ змінюється дуже різко, часто з розривами. Типові дефекти зображені на рис. 4.10, де суцільні лінії показують локальну орієнтацію оптичних осей в площині рисунку.

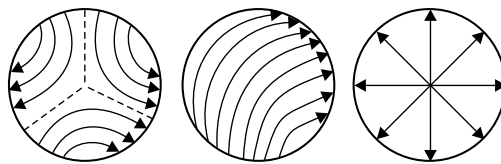


Рисунок 4.10

Лінія або нитка - це місце, де молекула різко змінює свою оріє-

ентацію. ці нитки дали назву найбільш простому типу рідких кристалів — нематики. Як і всякий дефект, такі нитки енергетично невигідні для сукупності молекул, а більш вигідною є паралельна орієнтація осей всіх молекул. Але існуванню нематиків без таких ниток заважають сторонні причини; нитки можуть закріплюватись на домішкових твердих частинках, зовнішніх поверхнях або зачіплюватись одна за одну і заважати одна одній зникнути.

Існують інші типи рідких кристалів, які більш жорсткі за своєю структурою, ніж нематика. Деякі з них подібні за своєю будовою до мильних плівок і називаються смектиками. Смектик являє собою стопку моношарів, у кожному з яких молекули орієнтовані однаково і вільно переміщуються вздовж нього, але так, що центри мас їх перебувають на одній і тій самій площині (рис. 4.11, а). Ці площини називаються смектичними, розміщені вони на однаковій відстані одна від одної, яка наближена рівна довжині молекули. Таким чином, смектик має кристалічну ґратку періодичну в одному напрямі — вздовж осі Z, яка є оптичною віссю цього рідкого кристалу. Вздовж площини смектик поводить себе як нематик, а вздовж єдиної кристалічної осі проявляє властивості твердого тіла, тобто має пружність.

Третій тип рідких кристалів — холестерики. Молекули, з яких складаються нематика мають площину симетрії. Але можна уявити продовгуваті молекули, які не мають площини симетрії.

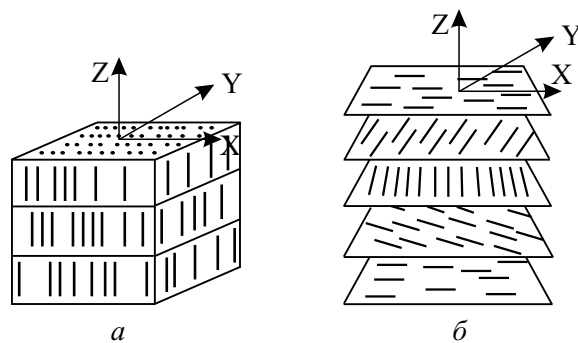


Рисунок 4.11

Такі молекули називаються хіральними. Вони мають довгі плоскі ділянки, що надає їм схожості з молекулами нематика, але до плоскої ділянки молекул прикріплюється короткий спіральний ланцюжок атомів (кінці одиничного вектора $\mathbf{l}$ утворюють у просторі спіраль, рис. 4.11, б). На основній плоскій ділянці молекули роз-

міщуються десятки й сотні атомів, в той час як спіральна ділянка їх нараховує одиниці. Залежно від напрямку закручування спіралі такі молекули можуть бути і правими, і лівими. Холестеричні рідкі кристали, які складаються з хіральных молекул, подібні за структурою до нематиків, але є принципова різниця. Вона полягає в тому, що однорідна орієнтація оптичної осі L є енергетично невигідною. Молекули холестерика можна розмістити паралельно одна одній в тонкому моношарі, але в сусідньому шарі хіральні молекули повинні бути повернуті на деякий малий кут. А тому вісь L повертається поступово від шару до шару, утворюючи правий або лівий гвинт. Крок гвинта може складати декілька сотень нанометрів, тобто порівняний з довжиною хвилі світла у видимій частині. Крок гвинта можна змінити, зміщуючи холестерики з гвинтами протилежних знаків, але з одним і тим самим кроком. Крок гвинта холестерика може змінюватися під дією температури, електричного і магнітного полів, випромінювання, домішок. Це приводить до зміни довжини хвилі світла, яке відбивають холестеричні плівки, а значить, і до зміни їх кольору. Закони відбивання світла для холестериків не виконуються. Промені різних довжин хвиль відбиваються під різними кутами, а тому холестерична плівка у відбитому світлі яскраво забарвлена. Пройшовши через всю товщину холестеричної плівки, світло лінійно поляризується. Вони також можуть повертати площину поляризації на кут $\sim 10^5$ град/см.

Для рідких кристалів характерна анізотропія багатьох властивостей: електричних, магнітних, поверхневого натягу, показника заломлення. Анізотропія магнітної μ і діелектричної ϵ проникності приводить до переорієнтації оптичної осі рідкого кристалу в магнітному і електричному полях. Так, μ і ϵ будуть максимальними вздовж довгої осі молекули і мінімальними - впоперек осі. Молекули рідких кристалів у магнітному полі орієнтуються вздовж його силових ліній, що дає можливість одержати монокристали. Комбінація анізотропії електропровідності σ і діелектричної проникливості ϵ у рідких кристалах приводить до виникнення в електричному полі просторово-періодичних структур - дифракційних решіток. У досить сильних електричних полях прозорий зразок рідкого кристалу може сильно розсіювати світло і стає матовим. Ці ефекти зворотні. Якщо зняти електричне поле, то зразок повертається в початковий стан. Виключення складають смектики, які мають велику в'язкість і запам'ятовують дію надовго (використовуються в пневмоавтоматиці).

Увага в останні роки до рідких кристалів пояснюється тим, що вони знаходять широке практичне застосування в радіотехніці, лазерній техніці, голографії, медицині, біології, хімії, фізиці тощо. На основі рідких кристалів розроблено перетворювач ін-

фрачервоного світла у видиме. Деякі рідкі кристали дуже чутливі до присутності пари різних речовин, під дією яких змінюється їх колір. На зміну кольору рідкого кристалу впливають також незначні температурні відхилення. На цьому принципі працюють деякі типи рідкокристалічних термометрів. Все ширше вони використовуються для відображення інформації, зокрема в цифрових індикаторах на рідких кристалах для широкого класу приладів, дисплеях, рекламах. З цією метою на скляній пластинці, яку покривають струмопровідним прозорим шаром діоксиду олова SnO_2 , витравлюють шрифти або деякі знаки. Пластинки склеюють так, щоб відстань між ними була 10-20 мкм, при цьому струмопровідний шар розміщують з внутрішньої сторони. Плоский зазор між пластинами заповнюють рідким кристалом і заклеюють. Ділянки рідкого кристалу, що перебувають під напругою ~ 10 В, починають інтенсивно розсіювати світло, тобто стають матовими. У місцях, де видалений струмопровідний шар, рідкий кристал залишається прозорим і чітко видно шрифти. Такі індикатори можна побачити на циферблатах електронних годинників, калькуляторів та інших електронних приладів. Вигідні тим, що використовують малі кількості енергії, низькі керуючі напруги. Наприклад, циферблат наручного годинника на рідких кристалах з розміром цифр 4 мм використовує частки мкВт на квадратний сантиметр. Для формування зображення використовується зовнішнє освітлення, що зумовлює також мале використання енергії. Чим більше освітлення приміщення, тим краще, видно зображення.

Широко використовуються рідкі кристали в молекулярній біології, медицині. Виявляється, що в багатьох живих організмах, таких як нервова тканина, мозок, білок в ядрі клітини, ДНК, сполуки холестерину та інших стероїдів, спостерігаються структури близькі за впорядкованістю до рідкокристалічних. Висока чутливість рідких кристалів до температури використовується в медичній діагностиці. Цей метод використовується в техніці неруйнівного контролю поверхні різних нагрітих тіл.

4.5 Запитання для самоконтролю

- 1 Які особливості будови твердих кристалічних тіл?
- 2 Яке тіло називають монокристалом (полікристалом)?
- 3 В чому полягає властивість ізотропності?
- 4 Назвіть типи кристалів?
- 5 Які існують точкові дефекти (лінійні дефекти)?

- 6 Що називається густиною дислокацій?
- 7 Які є способи підвищення міцності матеріалів?
- 8 Що таке фаза (фазовий перехід I-го роду)?
- 9 Який зміст має рівняння Клапейрона-Клаузіуса?
- 10 Опишіть властивості рідкокристалічного стану.
- 11 Які є типи рідких кристалів? Які їх властивості?
- 12 Наведіть приклади застосування рідких кристалів.

Приклад 1. Обчислити період елементарної комірки ґратки кухонної солі NaCl.

В елементарну комірку NaCl входить разом 4 іони Na і 4 іони Cl, тобто 4 молекули NaCl.

Число молекул в одному молі дорівнює числу Авогадро N_A . На один елементарний куб солі припадає 4 молекули NaCl. Отже, число елементарних кубів в одному молі дорівнює $N_A/4$.

Об'єм одного елементарного кубика з ребром a (період елементарної комірки) дорівнює a^3 . Тому об'єм одного моля, який складається з $N_A/4$ кубиків,

$$V_\mu = a^3 \frac{N_A}{4}. \quad (4.6)$$

З іншого боку, об'єм одного моля можна знайти через густину і молярну масу:

$$V_\mu = \frac{\mu}{\rho}. \quad (4.7)$$

Порівнюючи (4.6) і (4.7), дістаємо:

$$a^3 \frac{N_A}{4} = \frac{\mu}{\rho},$$

звідки

$$a = \sqrt[3]{\frac{4\mu}{\rho N_A}} = 5,64 \cdot 10^{-10} \text{ м.}$$

Приклад 2. Знайти приріст температури плавлення льоду поблизу 0°C при підвищенні тиску на $\Delta p = 1 \text{ атм}$, якщо питомий об'єм льоду на $\Delta V = 91 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3/\text{кг}$ більший питомого об'єму води.

Запишемо у рівнянні Клапейрона-Клаузіуса (4.5) похідну у вигляді відношення приростів: $\frac{\Delta p}{\Delta T} = \frac{q}{T(-\Delta V)}$ ($q = 334 \cdot 10^3 \text{ Дж/кг}$ — питома теплота плавлення льоду).

Звідки $\Delta T = -T \Delta V \Delta p / q = -7,5 \text{ мК}$.

Розділ 5

Коливання

Незагасаючі гармонічні коливання систем з одним ступенем вільності; метод векторних діаграм; фазовий портрет коливальної системи; вільні коливання в дисипативних системах із в'язким тертям; загасання коливань у системах із сухим тертям; вимушені коливання; вимушені коливання під дією гармонічної сили.

Об'єкти навколишнього світу знаходяться у неперервному русі. Важливим класом рухів є такі, у яких об'єкт робить фінітний (обмежений) рух поблизу деякого положення рівноваги. Під рухом ми розуміємо не тільки його найпростішу форму — зміщення об'єкта в просторі, — але і будь-яку зміну в часі властивостей матерії, розподіленої в просторі. *Коливаннями називаються процеси, що повторюються (або приблизно повторюються) у часі.*

Будь-яка система, коливання якої ми будемо вивчати, може бути охарактеризована деякою фізичною величиною, відхилення якої $f(x, y, z, t)$ від рівноважного значення залежить від координат і часу.

У випадку механічних систем об'єктами, що рухаються, є точкові маси або фізично малі елементи об'єму матеріального середовища (рідини, газу, твердого тіла і т.і.). Тому при описі коливань таких систем функція $f(x, y, z, t)$ може характеризувати зміщення, швидкість, прискорення, деформацію, кінетичну або потенціальну енергію, тиск та ін. При коливаннях в електричних системах коливною величиною f може бути струм у колі, заряд на пластинах конденсатора коливального контуру, напруга на котушці індуктивності. У випадку відкритого коливального контуру в навколишньому просторі коливаються електричне поле $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ і магнітне поле $\mathbf{B}(x, y, z, t)$.

Коливання можуть бути результатом короткочасного зовнішнього збудження. Тоді вони називаються *вільними*, або *власними*. Такі коливання відбуваються з частотами, обумовленими винятково конструктивними особливостями системи — власними частотами, і продовжуються протягом деякого характерного часу — часу загасання, що залежить від дисипації енергії в системі.

Для підтримки незагасаючих коливань до системи повинна безупинно підводитись енергія від зовнішнього джерела. У цьому випадку коливання будуть *вимушеними*. У залежності від способу підтримки незагасаючих коливань розрізняють вимушені коливання під дією періодичної сили, автоколивання, параметричні коливання і релаксаційні коливання.

5.1 Незагасаючі гармонічні коливання систем з одним ступенем вільності

Якщо положення системи може бути описано одним параметром $f(t)$, що залежить від часу, то така система має один ступінь вільності. Прикладами таких систем є добре відомі математичний (рис. 5.1, *а*) і пружинний (рис. 5.1, *б*) маятники, якщо перший з них рухається в одній площині, а другий — по прямій. Для математичного маятника $f(t)$ може характеризувати або кутове зміщення $f(t) = \alpha(t)$, або лінійне зміщення уздовж траєкторії $f(t) = s(t)$ точкової маси m від положення рівноваги, а для пружинного маятника $f(t) = s(t)$, де $s(t)$ — зміщення маси m від її рівноважного положення, зображеного пунктиром. Рух таких і подібних їм систем можна описати на основі другого закону Ньютона:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}, \quad (5.1)$$

Якщо знехтувати спочатку силами опору (надалі ми врахуємо їхню дію), то на масу m математичного маятника буде діяти результуюча сила $\mathbf{F} = \mathbf{N} + m\mathbf{g}$ ($\mathbf{N}$ — сила натягу нитки), спрямована, узагалі кажучи, під кутом до траєкторії, а на масу m пружинного маятника, що лежить на гладкій горизонтальній поверхні, — горизонтальна сила $\mathbf{F}_\tau$, що є функцією зміщення s від положення рівноваги.

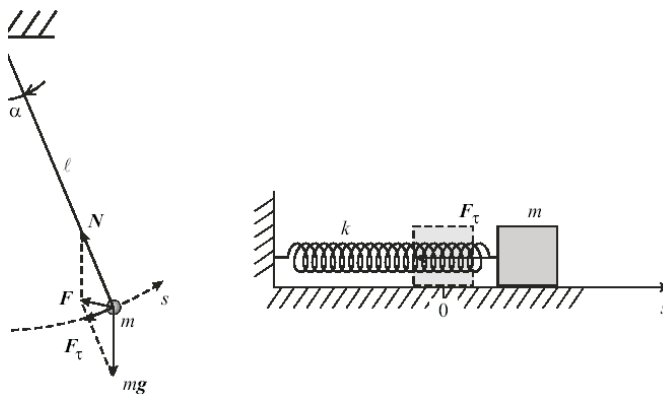


Рисунок 5.1

Оскільки зміщення $s(t)$ у випадку математичного маятника визначається тангенціальним прискоренням, то рівняння (5.1) для

обох маятників запишеться у виді

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = F_\tau(s) = -mg \sin \frac{s}{l}; \quad m \frac{d^2 s}{dt^2} = F_\tau(s), \quad (5.2)$$

де l — довжина нитки.

У першому рівнянні використана проекція $F_\tau(s)$ результуючої сили $\mathbf{F}$ на напрямок швидкості у виді $F_\tau = -mg \sin \alpha = -mg \sin(s/l)$.

У розглянутих прикладах повертаюча сила $F_\tau(s)$ є, взагалі кажучи, нелінійною функцією зміщення s . Тому точне рішення рівнянь (5.2), котрі є нелінійними, одержати не вдається.

Також будемо вважати зміщення малими в порівнянні з довжиною нитки чи довжиною недеформованої пружини. При таких припущеннях повертаюча сила пропорційна зміщенню:

$$F_\tau(s) = -mg \frac{s}{l}; \quad F_\tau(s) = -ks. \quad (5.3)$$

Вираз зліва записаний при врахуванні умови $\sin(s/l) \approx s/l$, а справа — з врахуванням закону Гука, який є справедливим для малих деформацій пружини з жорсткістю k .

Із врахуванням (5.3) рівняння (5.2) матимуть вигляд:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{g}{l}s; \quad \frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{k}{m}s. \quad (5.4)$$

Розрізняються лише коефіцієнти в правих частинах цих рівнянь, що чисельно дорівнюють відношенню повертаючої сили при одиничному зміщенні до маси коливного тіла і мають розмірність $[c^{-2}]$. Якщо ввести позначення

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad (5.5)$$

то рівняння (5.4) набувають вигляду рівняння незагасаючих гармонічних коливань, або *рівняння гармонічного осцилятора*:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -\omega_0^2 s. \quad (5.6)$$

Розв'язком рівняння (5.6) є сімейство гармонічних функцій

$$s(t) = s_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (5.7)$$

в чому легко переконатися, двічі диференціюючи функцію $s(t)$ за часом:

$$\frac{ds}{dt} = s_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0); \quad \frac{d^2 s}{dt^2} = -s_0 \omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (5.8)$$

Відмітимо, що коли рівняння руху приводиться до виду (5.6), то його розв'язком є гармонічні функції (5.7) з частотою ω_0 , яка рівна кореню квадратному з коефіцієнта біля s .

Поряд із *круговою частотою* ω_0 коливання характеризуються *циклічною частотою* $\nu_0 = \omega_0/2\pi$, яка рівна числу коливань за одиницю часу, і періодом коливань $T = 1/\nu_0$, який рівний тривалості одного коливання.

Період гармонійних коливань (так само як і частоти ω_0 і ν_0) не залежить від початкових умов і дорівнює

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (5.9)$$

Іншим прикладом є коливання фізичного маятника — тіла довільної форми маси m , закріпленого на горизонтальній осі O' так, що його центр мас знаходиться в точці O , віддаленій від осі на відстань a . При відхиленні маятника від вертикалі на невеликий кут α він буде здійснювати вільні гармонійні коливання під дією сили тяжіння, прикладеної до центра мас (рис. 5.2, a).

Якщо відомий момент інерції тіла J щодо осі обертання, то рівняння обертального руху запишеться у виді

$$J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = M = -mga \sin \alpha. \quad (5.10)$$

Якщо вважати, що при обертанні, наприклад, проти годинникової стрілки кут α збільшується, то момент сили тяжіння M викликає зменшення цього кута і, отже, при $\alpha > 0$ момент $M < 0$. Це і відбиває знак „-“ у правій частині (5.10).

Для малих кутів відхилення рівняння (5.10) переходить у рівняння гармонічних коливань

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -\frac{mga}{J} \alpha, \quad (5.11)$$

в якому частота ω_0 і період T коливань відповідно рівні:

$$\omega_0^2 = \frac{mga}{J}; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}}. \quad (5.12)$$

Порівнюючи вирази для періоду коливань фізичного (5.12) і математичного (5.9) маятників, легко бачити, що формули ідентичні, коли

$$\frac{J}{ma} = l. \quad (5.13)$$

Тому фізичний маятник характеризують *приведеною довжиною* (5.13), що дорівнює довжині математичного маятника з таким самим періодом коливань.

Період коливань фізичного маятника (а, отже, і його приведена довжина l) немонотонно залежить від відстані a . Це легко помітити, якщо відповідно до *теорема Гюйгенса–Штейнера момент інерції J виразити через момент інерції J_0 щодо паралельної горизонтальної осі, що проходить через центр мас: $J = J_0 + ma^2$* . Тоді період коливань (5.12) буде дорівнювати:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + ma^2}{mga}}. \quad (5.14)$$

Зміна періоду коливань при віддаленні осі обертання від центра мас O в обидва боки на відстань a показане на рис. 5.2, б. Легко

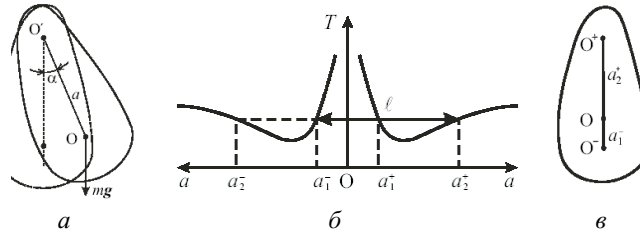


Рисунок 5.2

бачити, що той самий період коливань може реалізуватися щодо кожної з чотирьох осей, що розташовані попарно по різні сторони від центра мас. Можна показати, що сума відстаней a_1^+ і a_2^+ рівна приведеній довжині фізичного маятника: $l = a_1^+ + a_2^+$. В силу симетрії графіка зрозуміло, що

$$l = a_1^+ + a_2^-. \quad (5.15)$$

Ця обставина дозволяє для будь-якої осі обертання O^+ визначити відповідну їй вісь O^- . Період коливань щодо цих осей однаковий,

а відстань між ними дорівнює приведеній довжині фізичного маятника. На рис. 5.2, в зображені положення осей O^+ і O^- , при цьому вісь обертання, віддалена на відстань a_2^- , при такій формі маятника знаходиться поза ним.

Фізичний маятник застосовується для визначення прискорення вільного падіння. З цією метою вимірюють залежність періоду коливань маятника від положення осі обертання і за цією експериментальною залежністю знаходять відповідно до формули (5.15) приведену довжину. Визначена в такий спосіб приведена довжина в поєднанні з виміряним періодом коливань щодо обох осей дозволяє обчислити прискорення вільного падіння.

5.2 Метод векторних діаграм

Гармонічні коливання (5.7) допускають наочну графічну інтерпретацію. Її зміст полягає в тому, що кожному гармонічному коливанню з частотою ω_0 можна поставити у відповідність вектор, що обертається з кутовою швидкістю ω_0 , довжина якого дорівнює амплітуді s_0 , а його початкове (стартове) положення задається кутом φ_0 , що збігається з початковою фазою (рис. 5.3). Вертикальна проекція вектора $\mathbf{s}_0$ змінюється з часом: $s(t) = s_0 \sin \varphi(t)$. Миттєве положення вектора $\mathbf{s}_0$ визначається кутом $\varphi(t)$, що називається фазою і дорівнює:

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0. \quad (5.16)$$

При кутовій швидкості (кутовій частоті) ω_0 вектор робить $\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ обертів (циклів) за секунду, а тривалість одного оберту (період) дорівнює відношенню кута 2π до кутової швидкості ω_0 : $T = 2\pi/\omega_0$.

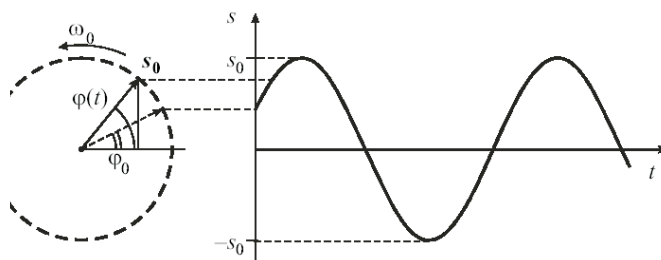


Рисунок 5.3

За допомогою векторних діаграм легко виконати додавання гармонічних коливань. Так, якщо необхідно скласти два коливання з однаковими частотами

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) = s_{01} \sin(\omega_0 t + \varphi_1) + s_{02} \sin(\omega_0 t + \varphi_2) = s_0 \sin(\omega_0 t + \varphi),$$

то амплітуду s_0 і початкову фазу φ сумарного коливання $s(t)$ з тією же частотою ω_0 можна легко розрахувати з рис. 5.4, а, на якому графічно зображена операція додавання векторів $\mathbf{s}_0 = \mathbf{s}_{01} + \mathbf{s}_{02}$ у момент часу $t = 0$:

$$\begin{aligned} s_0 &= \sqrt{(s_{01} \cos \varphi_1 + s_{02} \cos \varphi_2)^2 + (s_{01} \sin \varphi_1 + s_{02} \sin \varphi_2)^2} = \\ &= \sqrt{s_{01}^2 + s_{02}^2 + 2s_{01}s_{02}(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2)} = \\ &= \sqrt{s_{01}^2 + s_{02}^2 + 2s_{01}s_{02} \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}, \\ \varphi &= \operatorname{arctg} \frac{s_{01} \sin \varphi_1 + s_{02} \sin \varphi_2}{s_{01} \cos \varphi_1 + s_{02} \cos \varphi_2}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Зрозуміло, що вертикальна проекція вектора $\mathbf{s}_0$ буде також змінюватися за гармонічним законом з частотою ω_0 , оскільки взаємне розташування векторів s_{01} і s_{02} не змінюється з часом.

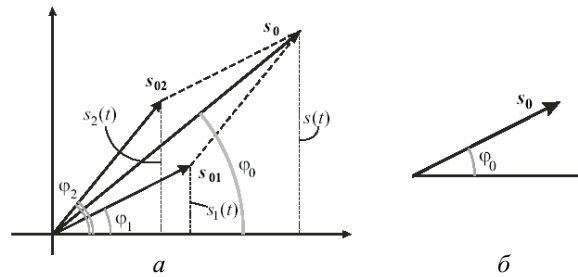


Рисунок 5.4

З цієї діаграми наочно видно, що сумарне коливання $s(t)$ випереджає по фазі коливання $s_1(t)$ і відстає по фазі від коливання $s_2(t)$. Повна фаза для кожного з трьох коливань у довільний момент часу відрізняється від їхніх початкових фаз на одну і ту саму величину $\omega_0 t$, що при побудові векторних діаграм не враховують. При цьому коливання зображується нерухомим вектором (рис. 5.4, б), а частота коливань вважається відомою.

5.3 Фазовий портрет коливальної системи

У будь-якій коливальній системі з одним ступенем вільності зміщення $s(t)$ і швидкість $v(t) = ds/dt$ змінюються з часом. Стан системи в кожен момент часу можна характеризувати двома значеннями (s і v), і на площині цих змінних цей стан однозначно визначається положенням точки P з координатами s і v . З часом точка P буде переміщатися по кривій, яку називають фазовою траєкторією руху (рис. 5.5, а).

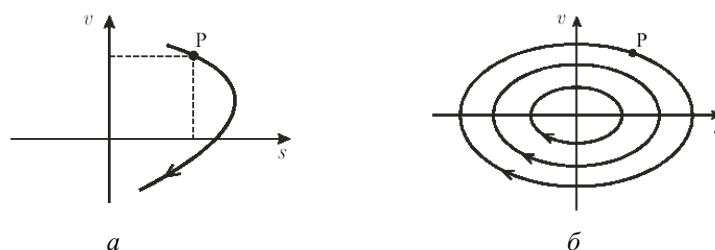


Рисунок 5.5

Площина змінних s і v називається фазовою площиною. Сімейство фазових траєкторій утворить фазовий портрет коливальної системи. Аналіз фазового портрета дає хоча і не повну, але значну інформацію про коливальну систему. До побудови такого портрета прибігають тоді, коли не вдається вирішити аналітично рівняння, що описують складні коливання. У першу чергу це відноситься до нелінійних коливань, аналіз яких утруднений за відсутності точних рішень нелінійних рівнянь.

Спочатку проілюструємо сказане на прикладі найпростіших гармонічних коливань виду $s(t) = s_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$. Оскільки швидкість $v(t) = \frac{ds}{dt} = s_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$ випереджає зміщення по фазі на $\pi/2$, то фазова траєкторія буде еліпсом. Точка P буде рухатися по еліптичній траєкторії за годинниковою стрілкою (при $v > 0$ зміщення s збільшується, а при $v < 0$ — зменшується (рис. 5.5, б)).

Параметри еліпса визначаються енергією, якою володіє гармонічний осцилятор. Потенціальна енергія пружинного маятника пропорційна квадрату зміщення:

$$E_{\text{пот}} = \frac{1}{2} k s^2 = \frac{1}{2} k s_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (5.18)$$

Кінетична енергія пропорційна квадрату швидкості:

$$E_{\text{кін}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 s_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (5.19)$$

Якщо взяти до уваги рівність $k = m\omega_0^2$, те легко бачити, що взаємоперетворення одного виду енергії в інший за період відбуваються двічі. При цьому повна енергія системи залишається постійною

$$E_0 = E_{\text{пот}} + E_{\text{кін}} = \frac{1}{2}m\omega_0^2 s_0^2 \quad (5.20)$$

або (енергія записана в координатах s і v):

$$E_0 = E_{\text{пот}} + E_{\text{кін}} = \frac{1}{2}ks^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\omega_0^2 s^2 + v^2). \quad (5.21)$$

Рівність (5.21) саме і є рівнянням еліпса, яку можна переписати в більш зручному вигляді:

$$s^2 + \frac{v^2}{\omega_0^2} = \frac{2E_0}{m\omega_0^2}. \quad (5.22)$$

Фазовий портрет гармонічного осцилятора являє собою сімейство еліпсів, кожному з яких відповідає енергія E_0 , котрою володіє осцилятор. Положення рівноваги в точці 0 на фазовій площині є особливою точкою і називається особливою точкою типу "центр".

Із збільшенням енергії E_0 зростають амплітуди коливань зміщення s_0 і швидкості $s_0\omega_0$. Коливання, як правило, перестають бути гармонічними, а фазові траєкторії — еліпсами.

Проаналізуємо на фазовій площині коливання математичного маятника при довільних кутах відхилення α від положення рівноваги. При цьому будемо вважати, що точкова маса m прикріплена не до нитки, а до твердого невагомго стрижня довжини l . Перше з рівнянь (5.2) запишемо у виді

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\omega_0^2 \sin \alpha. \quad (5.23)$$

Це нелінійне рівняння не має простого аналітичного рішення. Однак багато закономірностей таких коливань можна проаналізувати з використанням фазового портрета на площині $(\alpha; \dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt})$ — кутова швидкість маятника). З цією метою рівняння (5.23) треба перетворити до такого виду, щоби в ньому залишилися тільки

ці змінні, а час був би виключеним. Для цього кутове прискорення в лівій частині (5.23) перетворимо до виду:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{d\dot{\alpha}}{dt} = \frac{d\dot{\alpha}}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\dot{\alpha}}{d\alpha} \cdot \dot{\alpha} = \frac{1}{2} \frac{d(\dot{\alpha}^2)}{d\alpha}. \quad (5.24)$$

Підставляючи (5.24) у (5.23), одержимо

$$\frac{1}{2} d(\dot{\alpha}^2) = -\omega_0^2 \sin \alpha d\alpha. \quad (5.25)$$

Рівняння (5.25) відбиває той факт, що збільшення кінетичної енергії маятника дорівнює зменшенню його потенційної енергії в полі сили тяжіння. Інтегруючи (5.25), одержимо

$$\frac{\dot{\alpha}^2}{2} - \omega_0^2 \cos \alpha = \text{const}. \quad (5.26)$$

Якщо прийняти, що потенціальна енергія маятника в положенні рівноваги дорівнює нулю, то константа виражається через повну енергію маятника $E_0 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\alpha}_0^2$ ($\dot{\alpha}_0$ — кутова швидкість маятника в положенні рівноваги):

$$\text{const} = \frac{E_0}{m l^2} - \omega_0^2. \quad (5.27)$$

Рівняння фазової траєкторії (5.26) остаточно запишеться у виді:

$$\frac{1}{2} \frac{\dot{\alpha}^2}{\omega_0^2} + (1 - \cos \alpha) = \frac{E_0}{m l^2 \omega_0^2}. \quad (5.28)$$

При цьому потенціальна і кінетична енергії задаються виразами

$$E_{\text{кін}} = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\alpha}^2; \quad E_{\text{пот}} = m l^2 \omega_0^2 (1 - \cos \alpha). \quad (5.29)$$

Використовуючи (5.28), побудуємо фазовий портрет системи (рис. 5.6).

Чітко видно два типи фазових траєкторій, що відповідають двом типам руху. Замкнуті траєкторії, що оточують особливі точки типу "центр" з координатами $\dot{\alpha} = 0$, $\alpha = 2\pi n$ (n — ціле число), відповідають коливанням маятника відносно стійкого нижнього

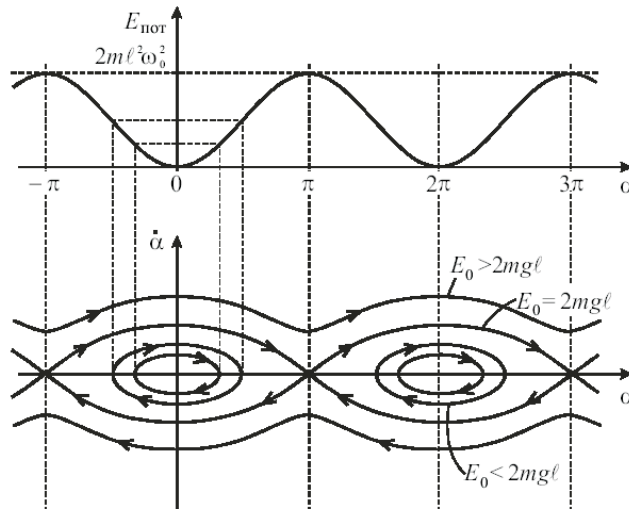


Рисунок 5.6

положення рівноваги. Такі коливання мають місце, якщо енергія системи $E_0 < ml^2\omega_0^2 = 2mgl$ (рис. 5.6). При цьому, якщо $E_0 \ll 2mgl$, то коливання будуть гармонічними, а фазові траєкторії — еліпсами. Якщо $E_0 \sim 2mgl$, то коливання будуть негармонічними. При збільшенні енергії, а відповідно, і амплітуди коливань осцилятора, їхній період буде зростати, оскільки повертаюча сила у рівнянні (5.23) менша, ніж у випадку гармонічного осцилятора.

Верхньому положенню рівноваги з координатами $\dot{\alpha} = 0$, $\alpha = (2n - 1)\pi$ відповідають особливі точки типу "сідло". Фазові криві, що проходять через "сідла", відповідають енергії $E_0 = 2mgl$ і називаються *сепаратрисами*.

Якщо, нарешті, $E_0 > 2mgl$, то отримуються незамкнуті траєкторії, що відповідають обертальному руху маятника.

Таким чином, сепаратриси розділяють фазову площину на дві області: область замкнених траєкторій і область траєкторій, що приходять з нескінченності й ідуть у нескінченність.

Відзначимо, що для негармонічних коливань не можна вживати термін "кругова частота", оскільки, такі коливання є суперпозицією гармонічних коливань з різними частотами. Період же є однією з головних характеристик коливань. Фазовий портрет не дозволяє визначити як швидко рухається точка по траєкторії.

5.4 Вільні коливання в дисипативних системах із в'язким тертям

У реальних системах завжди відбувається дисипація енергії. Якщо втрати енергії не будуть компенсуватися за рахунок зовнішніх пристроїв, то коливання з часом будуть загасати і через деякий час припиняться взагалі.

Формально загасаючі коливання описуються рівнянням

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = F_\tau(s) + F_{\text{тр}} \left(\frac{ds}{dt} \right), \quad (5.30)$$

яке, на відміну від (5.2), крім повертаючої сили F_τ , містить і силу тертя $F_{\text{тр}}$. Сила опору руху, узагалі кажучи, залежить як від напрямку швидкості (наприклад, при сухому терті), так і від величини швидкості (при русі у в'язкому середовищу). Якщо повертаюча сила пропорційна зсуву: $F_\tau(s) = -ks$, де k — коефіцієнт пропорційності (для пружинного маятника — жорсткість пружини), то рівняння (5.30) можна переписати у виді

$$\frac{d^2 s}{dt^2} - \frac{F_{\text{тр}}}{m} + \omega_0^2 s = 0, \quad (5.31)$$

де $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ — власна частота незагасаючих гармонічних коливань.

Спочатку ми розглянемо загасаючі коливання у випадку, коли на коливне тіло діє сила в'язкого тертя, пропорційна швидкості: $F_{\text{тр}} = -\Gamma \frac{ds}{dt}$. Така ситуація може мати місце, наприклад, при коливальному русі тіла в повітрі чи рідині, коли число Рейнольдса $\text{Re} \sim 1$ або $\text{Re} < 1$. Тоді рівняння (5.31) можна записати у виді:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\delta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0, \quad (5.32)$$

де $\delta = \frac{\Gamma}{2m}$ — коефіцієнт або показник загасання.

Загальна ідея розв'язку однорідних лінійних рівнянь типу (5.32) полягає у наступному: як функціональну залежність $s(t)$ треба вибрати таку, котра при диференціюванні за часом переходить у

саму себе, тобто експоненту: $s(t) = s_0 e^{\lambda t}$. Підставимо її в рівняння (5.32):

$$s_0 e^{\lambda t} (\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2) = 0. \quad (5.33)$$

Оскільки $e^{\lambda t} \neq 0$, отримуємо так зване "характеристичне рівняння":

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0, \quad (5.34)$$

яке в данному випадку (для рівняння другого порядку) має два кореня

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}, \quad (5.35)$$

а само рівняння (5.32) – два незалежних розв'язка: $s_1(t) = s_{01} e^{\lambda_1 t}$ і $s_2(t) = s_{02} e^{\lambda_2 t}$. У силу лінійності рівняння (5.32) сума будь-яких його розв'язків також є розв'язком, тобто справедливий так званий "принцип суперпозиції" розв'язків, і загальним розв'язком даного рівняння є

$$s(t) = s_{01} e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + s_{02} e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t}. \quad (5.36)$$

Рішення містить дві незалежні константи s_{01} і s_{02} , що визначаються з початкових умов $s(0)$, $v(0)$.

У залежності від співвідношення δ і ω_0 можливі три випадки:

1. Якщо $\delta < \omega_0$, то $\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$, де $i \equiv \sqrt{-1}$ – уявна одиниця. Розв'язок буде комплексним, але оскільки початкові умови дійсні, то за допомогою формули Ейлера:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad (5.37)$$

неважко показати, що загальний розв'язок буде дійсним і може бути записаний у виді:

$$s(t) = s_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (5.38)$$

тобто уявляє собою загасаючі коливання, частота яких ω менша, ніж у власних незагасаючих коливань:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}. \quad (5.39)$$

Колівання, що описуються (5.38) не є гармонічними (рис. 5.7). Під їх амплітудою будемо розуміти величину

$$A(t) = s_0 e^{-\delta t}, \quad (5.40)$$

котра монотонно зменшується із часом. "Тривалість" коливань характеризується часом загасання

$$\tau = \frac{1}{\delta}. \quad (5.41)$$

Якщо підставити τ у (5.40), то легко бачити, що по закінченню часу загасання τ амплітуда убуває в e разів. Кількість зроблених системою коливань за час τ дорівнює відношенню цього часу до

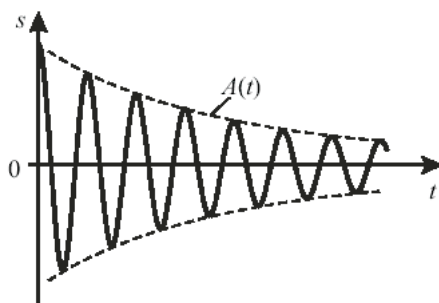


Рисунок 5.7

періоду загасаючих коливань $T = 2\pi/\omega$. Якщо загасання в системі мале ($\delta \ll \omega_0$), то період коливань $T \approx 2\pi/\omega_0$, і число цих коливань велике:

$$N = \frac{\tau}{T} \approx \frac{\omega_0}{2\pi\delta} \gg 1. \quad (5.42)$$

Експоненціальний закон зменшення амплітуди згодом дозволяє ввести безрозмірний параметр — логарифмічний декремент загасання θ , що дорівнює логарифму відношення двох послідовних відхилень в одну і ту саму сторону:

$$\theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T. \quad (5.43)$$

З (5.41), (5.42) і (5.43) знаходимо:

$$\theta = N^{-1}. \quad (5.44)$$

Логарифмічний декремент загасання можна оцінити, якщо підрахувати кількість коливань, зроблених системою за час загасання τ , тобто до зменшення амплітуди коливань приблизно в 3

рази. Чим більше число цих коливань, тим менше втрати енергії в системі.

Простежимо за зменшенням енергії, якою володіє осцилятор, з часом. Використовуючи (5.38), запишемо за аналогією до (5.18) і (5.19) вирази для потенціальної та кінетичної енергій осцилятора:

$$E_{\text{пот}} = \frac{1}{2} k s_0^2 e^{-2\delta t} \sin^2(\omega t + \varphi_0), \quad (5.45)$$

$$E_{\text{кін}} = \frac{1}{2} m \omega^2 s_0^2 e^{-2\delta t} \cos^2(\omega t + \varphi_0), \quad (5.46)$$

Помітимо, що, строго кажучи, швидкість рівна

$$v = \frac{ds}{dt} = -s_0 \delta e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0) + s_0 \omega e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (5.47)$$

Очевидно, що якщо $\delta \ll \omega$, то першим доданком у (5.47) можна знехтувати і записати вираз для кінетичної енергії у виді (5.46). Сумарна енергія осцилятора убиває з часом:

$$E(t) = E_{\text{пот}} + E_{\text{кін}} = \frac{1}{2} s_0^2 e^{-2\delta t} [k \sin^2(\omega t + \varphi_0) + m \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)]. \quad (5.48)$$

Візьмемо до уваги, що при $\delta \ll \omega$ частота $\omega \approx \omega_0$. Оскільки $k = m \omega_0^2$, то (5.48) остаточно запишеться у виді

$$E(t) = \frac{1}{2} s_0^2 m \omega_0^2 e^{-2\delta t} = E_0 e^{-2\delta t}. \quad (5.49)$$

Повна енергія осцилятора, рівна спочатку $E_0 = \frac{1}{2} s_0^2 m \omega_0^2$, монотонно зменшується з часом за експоненціальним законом і зменшується в e разів за час

$$\tau_E = \frac{1}{2\delta} = \frac{\tau}{2}. \quad (5.50)$$

"Якість" коливальної системи характеризують безрозмірним параметром Q — добротністю. Добротність пропорційна відношенню енергії $E(t)$ до енергії ΔE_T , що втрачається за період (рис. 5.8):

$$Q = 2\pi \frac{E(t)}{\Delta E_T} = 2\pi \frac{E_0 e^{-2\delta t}}{E_0 e^{-2\delta t} - E_0 e^{-2\delta(t+T)}} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\delta T}}. \quad (5.51)$$

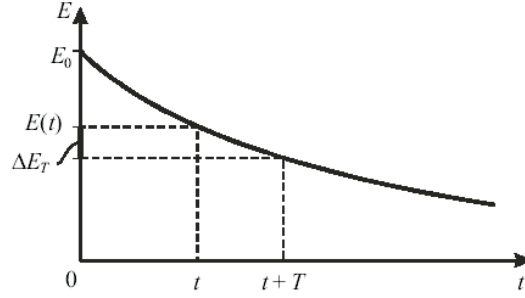


Рисунок 5.8

Якщо кількість коливань велика, то $\delta T = 1/N \ll 1$. Тоді

$$Q = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\delta T}} = \frac{2\pi}{1 - (1 - 2\delta T + \dots)} \approx \frac{\pi}{\theta} = \pi N. \quad (5.52)$$

При експоненціальному законі убуття енергії з часом добротність Q виявляється постійною величиною, що, як і логарифмічний декремент загасання θ , можна легко оцінити за кількістю коливань $N_Q = \pi N \approx 3N$, зроблених системою до їхнього повного припинення (за час 3τ амплітуда коливань зменшується в $e^3 \approx 20$ разів, тобто коливання практично цілком загасають).

Слід зазначити, що добротність не тільки характеризує загасання коливань, але і є важливою величиною, що визначає параметри вимушених коливань, здійснюваних під дією зовнішньої періодичної сили.

2. Розглянемо тепер випадок $\delta = \omega_0$, коли корені характеристичного рівняння кратні: $\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta$. При цьому частота $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = 0$, тобто коливання відсутні. Загальний розв'язок, що неважко перевірити підстановкою, має наступний вигляд:

$$s(t) = (s_0 + Ct)e^{-\delta t}, \quad (5.53)$$

де незалежні постійні s_0 і C визначаються, як і раніш, початковими умовами. Можливий вид залежності $s(t)$ при різних початкових умовах наведено на рисунку 5.9, а.

Їхньою характерною рисою є те, що вони перетинають вісь Ot не більш одного разу, і повернення до рівноважного стану в системі, виведеної з нього, відбувається за час порядку декількох τ . Такий режим руху називається *критичним*.

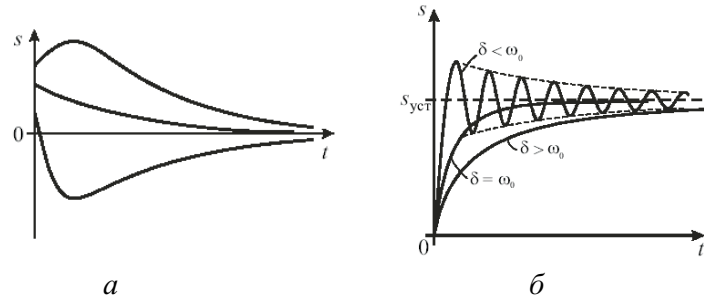


Рисунок 5.9

3. Нарешті, якщо $\delta > \omega_0$, те загальне рішення (5.36) є сумою двох убываючих з часом експонент, оскільки $-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} < 0$. Можливий вигляд залежностей $s(t)$ схожий на ті, що зображено на рис. 5.9, а, але повернення до рівноваги здійснюється повільніше, ніж у критичному режимі, оскільки в'язке тертя більше. Даний режим руху називається *закритичним*.

Відзначимо, що найбільш швидке повернення системи до положення рівноваги відбувається в критичному режимі, а в коливальному та закритичному режимах цей процес триває довше. Тому, наприклад, гальванометри — прилади для електричних вимірів — працюють звичайно в режимі, близькому до критичного, коли процес установаження їхніх показань, тобто зсуву s рамки до стійкого відхилення $s_{\text{вст}}$, має найменшу тривалість (рис. 5.9, б).

Ілюстрацією до розглянутих закономірностей загасаючих коливань є фазові портрети, побудовані для коливального ($\delta < \omega_0$), а також критичного і закритичного ($\delta \geq \omega_0$) режимів (рис. 5.10).

При $\delta < \omega_0$ фазовий портрет являє собою сукупність спіралей, що стягаються в особливу точку типу "фокус". На рис. 5.10 зображена одна з таких спіралей. За кожен оборот радіус спіралі зменшується в e^θ раз. Для критичного і закритичного режимів $\delta \geq \omega_0$ фазові траєкторії сходяться в особливу точку типу "вузол".

5.5 Загасання коливань у системах із сухим тертям

На практиці ми часто маємо справу із системами, у яких головну роль відіграє сила сухого тертя, що не залежить від швидкості. Типовий приклад — пружинний маятник, вантаж якого ковзає по

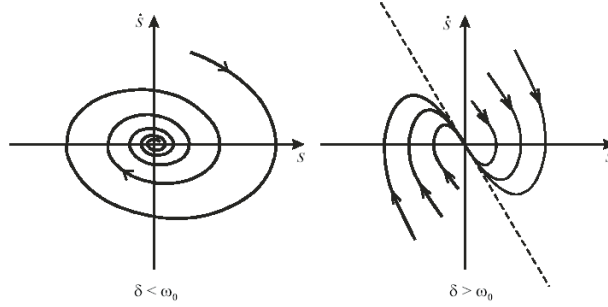


Рисунок 5.10

шорсткуватій горизонтальній поверхні, чи коливальна система у стрілочних вимірювальних приладах, основу якої складає рамка, що обертається та випробовує дію сил сухого тертя в осі обертання. Хоча сила $F_{\text{тр}}$ сухого тертя і не змінюється за величиною, проте вона змінює свій напрям при зміні напрямку швидкості. У силу цього необхідно записати два рівняння

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \omega_0^2 s = -\frac{F_{\text{тр}}}{m} \quad \text{для} \quad \frac{ds}{dt} > 0; \quad (5.54)$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \omega_0^2 s = +\frac{F_{\text{тр}}}{m} \quad \text{для} \quad \frac{ds}{dt} < 0; \quad (5.55)$$

Якщо в (5.54) зробити заміну $s_1 = s + \frac{F_{\text{тр}}}{m\omega_0^2}$, а в (5.55) — $s_2 = s - \frac{F_{\text{тр}}}{m\omega_0^2}$, то обидва рівняння приймуть однакового вигляду:

$$\frac{d^2 s_{1,2}}{dt^2} + \omega_0^2 s_{1,2} = 0. \quad (5.56)$$

Фазові траєкторії, що відповідають цьому рівнянню, являють собою еліпси з центрами, що мають координати $s_- = -\frac{F_{\text{тр}}}{m\omega_0^2}$ ($s_1 = 0$) для верхньої напівплощини $\frac{ds}{dt} > 0$, і $s_+ = +\frac{F_{\text{тр}}}{m\omega_0^2}$ ($s_2 = 0$) для нижньої напівплощини $\frac{ds}{dt} < 0$. Щоб побудувати фазовий портрет,

необхідно замкнути фазові траєкторії верхньої і нижньої напівплощин на їхній загальній межі $\frac{ds}{dt} = 0$.

З побудованого на рис. 5.11, *а* фазового портрета видно, що рух припиняється після скінченної кількості коливань. Надзвичайно важливим є те, що система не обов'язково прийде до стану $s = 0$, а може зупинитися, потрапивши в *зону застою* $s_+ - s_-$. Зона застою тим більша, чим більша сила $F_{\text{тр}}$. З фазового портрета легко визначити зменшення амплітуди коливань за один період. Ця зміна амплітуди в два рази перевищує довжину зони застою:

$$\Delta A = A(t) - A(t + T) = 2(s_+ - s_-) = \frac{4F_{\text{тр}}}{m\omega_0^2}. \quad (5.57)$$

Таким чином, на відміну від експоненціального закону (5.40), характерного для в'язкого тертя, амплітуда коливань зменшується з часом лінійно.

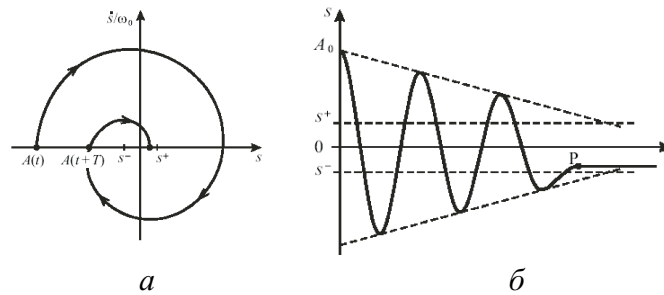


Рисунок 5.11

На рис. 5.11, *б* показана залежність зсуву коливного тіла від часу при сухому терті. Кількість скоєних системою коливань до їхнього припинення залежить від початкової амплітуди A_0 , і її можна оцінити за формулою:

$$N = \frac{A_0}{\Delta A} = \frac{A_0}{2(s_+ - s_-)}. \quad (5.58)$$

Вона залежить від початкової амплітуди A_0 . Частота коливань $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ залишається такою ж, як і при відсутності сили тертя (див. (5.56)).

Коливання продовжуються доти, поки їхня амплітуда залишається більше половини ширини зони застою $s_+ - s_-$. При цьому в реальних умовах маса, що коливається, зупиняється у випадковому положенні усередині цієї зони (у точці Р на рис. 5.11, б).

5.6 Вимушені коливання

Спочатку ми розглянули вільні загасаючі коливання, що виникають при початковому короткочасному впливі зовнішніх сил на коливальну систему. Тим часом, у повсякденній практиці ми зіштовхуємося з незагасаючими коливаннями, для підтримки яких необхідно підводити енергію до коливальної системи, щоб компенсувати її енергетичні втрати.

Одним з розповсюджених способів підтримки незагасаючих коливань є безупинний вплив на коливну масу періодичної вимушуючої сили

$$F(t) = F(t + T), \quad (5.59)$$

Якщо, наприклад, таку силу прикласти до коливної маси описаного вище пружинного маятника (рис. 5.12), то рівняння її руху прийме вид:

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -\Gamma \frac{ds}{dt} - ks + F(t). \quad (5.60)$$

Досвід показує, що якщо сила раптово починає діяти (наприклад, у момент часу $t = 0$), то маятник почне поступово розгойдуватися, і через деякий час його коливання встановляться. За порядком величини час встановлення таких вимушених коливань буде збігатися з часом загасання $\tau = \delta^{-1} = 2m/\Gamma$. Далі ми сконцентруємо увагу саме на сталих коливаннях. Природно, що параметри таких коливань будуть залежати від конкретного виду сили $F(t)$. З математики добре відомо, що будь-яку періодичну

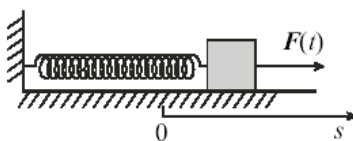


Рисунок 5.12

функцію можна представити у вигляді ряду Фур'є:

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{0n} \sin\left(\frac{2\pi}{T}nt + \psi_n\right). \quad (5.61)$$

Фізичний зміст цього представлення полягає в тому, що періодичний вплив $F(t)$ еквівалентний одночасному впливу постійної сили F_{00} і набору гармонічних сил з відповідними амплітудами F_{0n} , початковими фазами ψ_n і частотами $\omega_n = \frac{2\pi}{T}n = \omega n$, які кратні основній частоті $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Щоб одержати повну картину вимушених коливань під дією сили (5.61), необхідно прийняти до уваги лінійність рівняння (5.60). Це дозволяє представити його розв'язок $s(t)$ як суму гармонічних коливань:

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} s_{0n} \sin\left(\frac{2\pi}{T}nt + \varphi_n\right), \quad (5.62)$$

що відбуваються із сталими амплітудами s_{0n} і фазами φ_n на частотах ω_n відповідних гармонік вимушуючої сили (5.61). Кожен доданок у (5.62) може розглядатися як вимушене гармонійне коливання, що відбувається під дією зовнішньої гармонійної сили з амплітудою F_{0n} і частотою $\omega_n = \frac{2\pi}{T}n$.

5.7 Вимушені коливання під дією гармонічної сили

Нехай зовнішня сила змінюється за гармонічним законом

$$F(t) = F_0 \sin \omega t. \quad (5.63)$$

Рівняння (5.60) в цьому випадку прийме вигляд:

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -\Gamma \frac{ds}{dt} - ks + F_0 \sin \omega t. \quad (5.64)$$

Під дією цієї сили маятник в усталеному режимі буде виконувати гармонічні коливання

$$s(t) = s_0 \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (5.65)$$

Як показує досвід, амплітуда s_0 і початкова фаза φ_0 (тобто зсув фази між зміщенням s і силою F) встановлених коливань залежать не тільки від амплітуди сили F_0 (що очевидно з рівняння (5.64)), але і від того, наскільки частота вимушуючої сили ω відрізняється від власної частоти коливань маятника $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Найбільш сильно маятник буде розгойдуватися, коли ці частоти практично збігаються: $\omega \approx \omega_0$.

Перш ніж приступити до знаходження s_0 і φ_0 , зауважимо, що для механічних коливальних систем не так просто з технічної точки зору здійснити вплив гармонічної сили безпосередньо на масу, що рухається. Набагато простіше це зробити для електричних і оптичних коливальних систем, наприклад, для коливального контуру, підключеного до зовнішнього джерела змінної напруги. Однак, легко бачити, що можна підтримувати вимушені коливання маятника, зображеного на рис. 5.12, іншим способом, не прикладаючи безпосередньо зовнішню силу $F(t)$ до маси m . Досить лише цю силу прикласти до лівого кінця вільної пружини так, щоб цей кінець рухався за гармонічним законом $\xi(t) = \xi_0 \sin \omega t$ (рис. 5.13). Тоді подовження пружини складе величину $s - \xi$, а сила пружності, прикладена до маси m , буде рівна

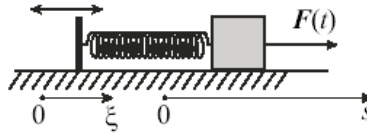


Рисунок 5.13

$-k(s - \xi)$. Тому рівняння руху маси m запишеться у виді:

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -\Gamma \frac{ds}{dt} - k(s - \xi). \quad (5.66)$$

Якщо прийняти до уваги, що сила пружності пружини у відсутності зміщення груза ($s = 0$) рівна

$$F(t) = k\xi(t) = k\xi_0 \sin \omega t, \quad (5.67)$$

то рівняння (5.66) цілком еквівалентно рівнянню (5.64). Сила (5.67) відіграє роль зовнішньої гармонічної сили в класичній схемі, що зображена на рис 5.12. Ця сила легко може бути візуалізована, оскільки її величина і напрямок однозначно визначаються зміщенням рухливого лівого кінця пружини. Це, у свою чергу, дає

можливість наочно продемонструвати фазові співвідношення між силою $F(t)$ (чи зміщенням $\xi(t)$) і зміщенням $s(t)$ маси, що коливається.

Перепишемо рівняння (5.66) у такий спосіб:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\delta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = \frac{F_0}{m} \sin \omega t, \quad (5.68)$$

де $F_0 = k\xi_0$.

Розв'язок цього рівняння будемо шукати у виді гармонічного коливання (5.65), де амплітуда s_0 і фаза φ_0 можуть бути визначені, якщо підставити (5.65) у (5.68).

Розглянемо три важливих режими вимушених коливань.

Повільні коливання.

Якщо частота вимушуючої сили ω значно менша ω_0 , то швидкість $\frac{ds}{dt}$ і прискорення $\frac{d^2 s}{dt^2}$ коливної маси будуть дуже малими. Тому можна знехтувати першими двома членами в лівій частині рівняння (5.68) і записати його у наближеному виді:

$$\omega_0^2 s = \frac{F_0}{m} \sin \omega t. \quad (5.69)$$

Його розв'язок очевидний:

$$s(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \sin \omega t = \frac{F_0}{k} \sin \omega t. \quad (5.70)$$

У цьому режимі зміщення вантажу пропорційний зовнішній силі і не залежить від величини його маси m . Рішення (5.70) є, власне кажучи, математичним вираженням закону Гука для статичної деформації пружини. Тому цей режим можна назвати квазістатичним (майже статичним). Амплітуда коливань відповідно до цього закону дорівнює $s_0 = F_0/k$, а зміщення $s(t)$ змінюється у фазі із зовнішньою силою.

У схемі, що зображена на рис. 5.13, це еквівалентно тому, що зміщення маси m практично повторює зміщення лівого кінця пружини:

$$s(t) = \frac{F_0}{k} \sin \omega t = \frac{k\xi_0}{k} \sin \omega t = \xi(t), \quad (5.71)$$

оскільки $F_0 = k\xi_0$. Це і не дивно, тому що для руху маси m із зневажливо малим прискоренням не потрібно великих деформацій пружини: $s(t) - \xi(t) \approx 0$.

Швидкі коливання.

Якщо $\omega \gg \omega_0$, то період вимушених коливань $T = 2\pi/\omega$ малий. Це означає, що маса m знаходиться під дією лише зовнішньої сили $F(t)$, а сила пружності ks і в'язкого тертя $\Gamma \frac{ds}{dt}$ малі. Дійсно, за половину короткого періоду коливань, коли маса рухається в одному напрямку, вона не встигає набрати як помітну швидкість $\frac{ds}{dt}$, так і зміститися на достатню величину s від положення рівноваги. Тому в рівнянні (5.68) можна опустити члени, що містять s і $\frac{ds}{dt}$, і записати його в іншому наближеному виді:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{F_0}{m} \sin \omega t. \quad (5.72)$$

Інтегруючи це рівняння двічі, знаходимо закон руху коливальної маси:

$$s(t) = -\frac{F_0}{m\omega^2} \sin \omega t = \frac{F_0}{m\omega^2} \sin(\omega t - \pi). \quad (5.73)$$

З (5.73) випливає, що зміщення відносно зовнішньої сили запізнюється по фазі на π ($\varphi_0 = -\pi$), а амплітуда, як ми і припускали, убуває зі збільшенням частоти.

У схемі, зображеній на рис. 5.13, у такому режимі лівий рухливий кінець пружини і маса m завжди рухаються у протилежних напрямках:

$$s(t) = -\frac{k\xi_0}{m\omega^2} \sin \omega t = -\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \xi(t). \quad (5.74)$$

За абсолютною величиною зміщення маси m у $\omega^2/\omega_0^2 \gg 1$ разів менше зміщення лівого кінця пружини, тобто практично не буде помітним.

Резонансний режим.

Якщо частота $\omega \approx \omega_0$, то вимушені коливання відбуваються на власній частоті коливань. Це означає, що

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \omega_0^2 s = 0. \quad (5.75)$$

Отже, рівняння (5.68) при врахуванні (5.75) прийме вигляд:

$$2\delta \frac{ds}{dt} = \frac{F_0}{m} \sin \omega_0 t. \quad (5.76)$$

Інтегруючи його, отримаємо вираз для зміщення:

$$s(t) = \frac{F_0}{2\delta m \omega_0} \sin(\omega_0 t - \pi/2). \quad (5.77)$$

Останній вираз зручно записати у вигляді

$$s(t) = \frac{F_0}{k} Q \sin(\omega_0 t - \pi/2), \quad (5.78)$$

де $Q = \frac{\pi}{\delta T}$ — добротність маятника. Якщо добротність $Q \gg 1$, то амплітуда коливань може в багато разів перевищувати амплітуду повільних квазістатичних коливань (порівняйте з (5.70)). Тому такий режим називається *резонансним*.

Великими будуть також амплітуди швидкості і прискорення. Оскільки швидкість $\frac{ds}{dt}$, як випливає з (5.76), змінюється у фазі з зовнішньою силою, то з енергетичної точки зору це дуже сприятливо для "підкачування" енергії в коливальну систему. Робота зовнішньої сили за період коливань дорівнює:

$$A = \int_0^T F(t) \cdot \frac{ds}{dt}(t) dt = \frac{F_0^2}{2\delta m} \int_0^T \sin^2 \omega_0 t dt = \frac{F_0^2 T}{4\delta m} \quad (5.79)$$

і значно перевищує роботу цієї сили в обох розглянутих вище режимах. Така велика робота необхідна для компенсації значних втрат через силу в'язкого тертя.

Для більшої наочності останнього результату звернемося до схеми з рухливим лівим кінцем пружини, де, як це видно з рішення (5.78),

$$s(t) = \xi_0 Q \sin(\omega_0 t - \pi/2). \quad (5.80)$$

Амплітуда зміщення правого кінця пружини в Q раз перевищує амплітуду зміщення лівого кінця. При проходженні масою m положення рівноваги $s = 0$, коли її швидкість максимальна, лівий кінець пружини зміщений на максимальну величину ξ_0 у напрямку швидкості рухомої маси. У цей момент часу потужність сили пружності пружини має максимально можливе позитивне значення при заданій величині ξ_0 . У наступні моменти часу ця потужність буде залишатися позитивною, що, природно, забезпечує найбільш ефективну передачу енергії тілу, що рухається із тертям.

5.8 Запитання для самоконтролю

- 1 Запишіть рівняння гармонічного осцилятора.
- 2 Запишіть вирази для періоду коливань математичного, пружинного, фізичного маятників.
- 3 Що називають приведеною довжиною фізичного маятника?
- 4 Запишіть теорему Гюйгенса–Штейнера.
- 5 В чому полягає метод векторних діаграм?
- 6 Яку площину називають фазовою?
- 7 Характеристикою чого є логарифмічний декремент (добротність)?
- 8 Які фазові портрети коливального, критичного та закритичного режимів загасаючих коливань?
- 9 В чому полягає відмінність між сухим та в'язким тертям?
- 10 Запишіть рівняння вимушених коливань під дією гармонічної сили і з врахуванням в'язкого тертя.
- 11 Які коливання називають повільними? швидкими?
- 12 Поясніть збільшення амплітуди коливань у резонансному режимі.

Приклад 1. Логарифмічний декремент коливань маятника рівний $\theta = 0,02$. Визначити, у скільки разів зменшиться амплітуда коливань після 100 повних коливань маятника.

В початковий момент часу $t = 0$ амплітуда коливань

$$A_0 = s_0 e^{-\delta t} = s_0 e^{-\theta t/T}$$

рівна s_0 .

Після 100 коливань, тобто в момент часу $t = 100T$, амплітуда коливань рівна

$$A_{100} = s_0 e^{-\theta \cdot 100},$$

звідки

$$\frac{A_0}{A_{100}} = \frac{1}{e^{-\theta \cdot 100}} = e^{-\theta \cdot 100} = e^2 \cong 7,4,$$

тобто амплітуда коливань маятника після 100 коливань зменшиться у 7,4 рази.

Розділ 6

Хвильові процеси. Звук

Звукові хвилі; звук у газах і рідинах; інтенсивність звуку; пружні хвилі в твердих тілах

6.1 Звукові хвилі

Маємо сукупність зв'язаних, тобто взаємодіючих між собою, частинок. Одна з них починає коливатися, слідом за нею будуть коливатися й інші частинки. З такою ситуацією ми стикаємося у всіх суцільних середовищах: газах, рідинах і твердих тілах.

Розглянемо гази. Уявимо собі, що в будь-якому місці газу відбувся стиск, тобто в це місце перейшли частинки з інших місць. Тоді в області ущільнення збільшиться тиск газу, що спричинює за собою виникнення сили, спрямованої у бік менших густин. У цю сторону почнуть переходити частинки з місця первісного ущільнення. Таким чином, там, де був стиск, наступить розрідження, і, навпаки, у сусідніх місцях, у яких спочатку виникло розрідження, відбудеться стиск.

Ми бачимо, що густина і тиск газу будуть коливатися, причому ці коливання не будуть пов'язані з визначеним місцем у газі, а обов'язково будуть передаватися від одного місця до сусіднього.

Така нелокалізованість коливань характерна для всіх суцільних середовищ. Важливо підкреслити, що коливання не обов'язково повинні супроводжуватися зміною густини речовини. Наприклад, у кристалах атоми можуть коливатися біля своїх положень рівноваги і без зміни густини речовини, і ці коливання будуть передаватися від одного атома до іншого.

Можна сказати, що в середовищах коливання поширюються від точки до точки. Такі коливання, що поширюються, називаються хвилями.

Пружні коливання, що поширюються у газах і рідинах чи твердих тілах називаються *звуковими хвилями* чи просто *звуком*.

Поширення коливань відбувається не миттєво, а з кінцевою швидкістю, що залежить від властивостей середовища. Ця швидкість називається *швидкістю поширення хвилі*.

Розглянемо коливання деякої величини ξ , що поширюється уздовж одного визначеного напрямку, котрий виберемо за вісь X . Нехай в точці $x = 0$ величина ξ змінюється з часом за деяким законом

$$\xi = f(t), \quad x = 0. \quad (6.1)$$

Тоді в інших точках величина ξ буде мати ті ж самі значення, що і в точці $x = 0$, тільки з деяким запізненням, яке визначається швидкістю поширення хвилі. Саме, значення величини ξ в точці x в момент часу t , тобто $\xi(x, t)$, буде таким самим як значення ξ в точці $x = 0$ в більш ранній момент часу $t' = t - \frac{x}{c}$, де c — швидкість поширення хвилі. Інакше кажучи,

$$\xi(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right). \quad (6.2)$$

Хвиля, яка поширюється уздовж одного визначеного напрямку і характеризується тим, що коливання в ній відбуваються зовсім однаково в площинах, перпендикулярних напрямку поширення, називається *біжучою плоскою хвилею*. Зазначений вираз являє собою загальний вираз для *біжучої плоскої хвилі*, що поширюється уздовж осі X зі швидкістю c .

Найпростішою є *плоска монохроматична*¹ *хвиля*. У такій хвилі коливання відбуваються у кожній точці за гармонічним законом; будь-яка коливна величина ξ в цій хвилі визначається виразом

$$\xi = A \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) + \alpha \right], \quad (6.3)$$

де A — амплітуда, $\omega = 2\pi\nu$ — циклічна частота, α — початкова фаза хвилі.

Знайдемо зв'язок між швидкістю точок, що коливаються $d\xi/dt$ і відносною деформацією $d\xi/dx$; дійсно

$$v = \dot{\xi} = \frac{d\xi}{dt} = A\omega \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) + \alpha \right]. \quad (6.4)$$

Відносна деформація визначається як

$$\frac{d\xi}{dx} = -\frac{A\omega}{c} \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) + \alpha \right]. \quad (6.5)$$

Порівнюючи останні два співвідношення, маємо:

$$\frac{d\xi}{dt} = -c \frac{d\xi}{dx}. \quad (6.6)$$

¹Монохроматична хвиля — хвиля однієї визначеної і сталої частоти.

Взявши другі похідні від ξ по змінним t та x , отримаємо:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\xi}{dt^2} &= -A\omega^2 \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) + \alpha \right]; \\ \frac{d^2\xi}{dx^2} &= -A\frac{\omega^2}{c^2} \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) + \alpha \right],\end{aligned}\tag{6.7}$$

звідки

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = c^2 \frac{d^2\xi}{dx^2},\tag{6.8}$$

тобто друга похідна ξ за часом пропорційна другій похідній ξ по координаті, причому коефіцієнтом пропорційності є квадрат швидкості поширення хвилі c . Функції, які є розв'язками рівняння (6.8), описують поширення в середовищі хвильового збурювання довільної форми зі швидкістю c .

Таким чином, диференціальне рівняння (6.8) в найбільш загальному виді описує поширення хвильового процесу; його називають **хвильовим рівнянням**.

В загальному випадку воно описує рух хвиль в тривимірному просторі і має вид:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = c^2 \left(\frac{d^2\xi}{dx^2} + \frac{d^2\xi}{dy^2} + \frac{d^2\xi}{dz^2} \right).\tag{6.9}$$

Бачимо, що величина ξ є не тільки періодичною функцією часу, але і періодичною функцією координат. Період (часовий) T пов'язаний з циклічною частотою відомим співвідношенням

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Для того, щоб визначити просторовий період коливань, треба розглянути в довільний момент часу дві найближчі одна до одної точки, в яких значення величини ξ однакові. Відстань між цими точками, яку позначимо λ , визначається з умови $\sin \omega t = \sin(\omega t - 2\pi)$; $\frac{\omega\lambda}{c} = 2\pi$, звідки

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega}c.\tag{6.10}$$

Величину λ , яка являє собою просторовий період коливань, називають **довжиною хвилі**.

Оскільки $T = \frac{2\pi}{\omega}$, λ можна записати у вигляді

$$\lambda = cT. \quad (6.11)$$

Аргумент синуса, що визначає величину ξ , яку ми будемо позначати φ , називають фазою хвилі:

$$\varphi = \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) + \alpha. \quad (6.12)$$

Фаза хвилі в заданій точці простору змінюється з часом, а в заданий момент часу є функцією координати. У кожній площині, перпендикулярній осі X , тобто напрямку поширення хвилі, фаза при заданому значенні t має одне і те саме значення. Поверхні, на яких фаза має при заданому t одне і те саме значення, називаються *хвильовими*. Вони перпендикулярні напрямку поширення хвилі.

Якщо задати будь-яке визначене значення фази, то з часом воно буде досягатися то в одній, то в іншій точці простору. Тому можна говорити про переміщення фази. Швидкість цього переміщення називається фазовою швидкістю і збігається зі швидкістю поширення хвилі c . За період T фаза переміститься на відстань, рівну довжині хвилі λ . Цю думку виражають інакше: довжина хвилі являє собою шлях, який проходить хвиля за час одного періоду (див. (6.11)).

Пружні коливання у повітрі і інших середовищах характеризуються величезним діапазоном частот і довжин хвиль. До власне звукових коливань відносяться коливання в діапазоні частот від $\nu = 16$ Гц до $\nu = 16 \cdot 10^3 - 20 \cdot 10^3$ Гц. Ці частоти лежать у межах зони чутності людського вуха. Пружні коливання з частотами, що перевершують 20 000 Гц називаються *ультразвуком*, а коливання з частотами нижчими за 16 Гц — *інфразвуком*.

Швидкість звуку в повітрі 330 м/с. Звуковому діапазону відповідають довжини хвиль від 20 м до 2 см. Ультразвуковим коливанням із частотами до 10^9 Гц відповідає діапазон, приблизно, від 2 см до $0,5 \cdot 10^{-4}$ см. Останнім часом вдалося одержати коливання з частотами до $10^{12} - 10^{13}$ Гц. Такі коливання називають *гіперзвуком*.

6.2 Звук у газах і рідинах

Уявимо циліндричну трубу, заповнену газом (рідиною), в кінці якої є поршень, який рухається і скоює коливання (рис. 6.1).

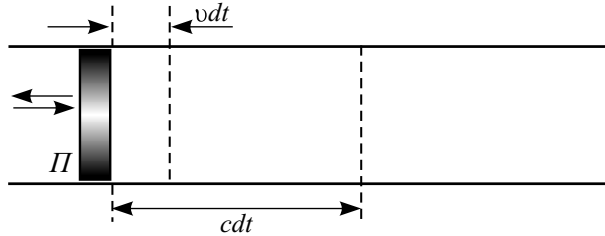


Рисунок 6.1

Ці коливання передаються від поршня до сусідніх частинок газу, від них – до більш віддалених частинок, і тому вздовж труби поширюється хвиля стисків і розрідженостей газу.

Визначимо швидкість цієї хвилі c . За час dt звук пошириться на відстань $c dt$, в стан хвильового руху перейдуть частинки з об'єму $c dt S$, де S — площа поперечного перерізу труби.

Якщо v — швидкість руху поршня, то за час dt поршень зміститься на відстань $v dt$, із-за чого об'єм газу зменшиться на $v dt S$. Поділивши цю величину на $c dt S$, знайдемо відносну зміну густини газу в момент часу t :

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_0} = \frac{v}{c}, \quad (6.13)$$

де ρ_0 — густина газу при відсутності звуку, $\Delta \rho$ — зміна густини, що обумовлена поширенням звукової хвилі.

Зміна густини викликає зміну тиску газу. Оскільки звукові коливання відбуваються дуже швидко, обмін теплоти між різними елементами середовища не відбувається. Іншими словами, поширення звуку — адіабатичний процес, а тому, зміну тиску можна представити у виді

$$\Delta p = \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_{\text{адіаб}} \Delta \rho, \quad (6.14)$$

де $\left(\frac{dp}{d\rho} \right)_{\text{адіаб}}$ — похідна від тиску газу (або рідини) по густині при адіабатичному процесі. Величину Δp часто називають *акустичним тиском*.

Пам'ятаючи, що $\frac{\Delta\rho}{\rho_0} = \frac{v}{c}$, можна представити $\Delta\rho$ у виді

$$\Delta p = \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_{\text{адіаб}} \rho_0 \frac{v}{c}. \quad (6.15)$$

Помноживши Δp на S , отримаємо силу F , з якою поршень діє на газ,

$$F = \Delta p S = \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_{\text{адіаб}} \rho_0 \frac{v}{c} S. \quad (6.16)$$

Ця сила має бути рівна зміні імпульсу за одиницю часу. За час dt , як ми відмічали вище, у хвильовому русі взяли участь частинки з об'єму $c dt S$. Помноживши цей об'єм на ρ_0 і v , отримаєм зміну імпульсу газу за час dt . Тому зміна імпульсу газу за одиницю часу рівна $\rho_0 c S v$. Отже, можемо записати рівність

$$F = \rho_0 c S v. \quad (6.17)$$

Прирівнявши праві частини формул (6.16) і (6.17), отримаємо

$$\left(\frac{dp}{d\rho} \right)_{\text{адіаб}} \rho_0 \frac{v}{c} S = \rho_0 c S v, \quad (6.18)$$

звідки

$$c = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho} \right)_{\text{адіаб}}}. \quad (6.19)$$

Формула (6.19) визначає швидкість звуку, тобто швидкість поширення малих коливань у газах та рідинах.

В ідеальному газі, як ми знаємо (рівняння стану адіабатичного процесу $pV^\gamma = \text{const}$),

$$\left(\frac{dp}{d\rho} \right)_{\text{адіаб}} = \gamma \frac{p_0}{\rho_0}, \quad (6.20)$$

де $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ (показник адіабати) і p_0 — тиск у відсутності звуку. Тому швидкість звуку в ідеальному газі рівна

$$c = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}}. \quad (6.21)$$

Оскільки $p_0 = n_0 kT$, де T — температура газу і n_0 — кількість частинок в одиниці об'єму у відсутності звуку, яка рівна $n_0 = \frac{\rho_0}{m}$ (m — маса молекули газу), то c можна представити у виді

$$c = \sqrt{\gamma \frac{kT}{m}}. \quad (6.22)$$

За порядком величини швидкість звуку у газі співпадає з тепловою швидкістю його молекул.

Наведемо значення швидкості звуку в деяких газах (при температурі 0°C) і рідинах (при температурі 20°C) в м/с:

Повітря	331,5	Вода	1480
Водень	1265	Ртуть	1460
Кисень	316	Спирт	1440
Вуглекислий газ	261	Трансформаторна олива	1390

Швидкість поршня v співпадає із швидкістю частинок газу (рідини) у трубі. Ця величина пов'язана із зміною тиску Δp співвідношенням $\Delta p = \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_{\text{адіаб}} \rho_0 \frac{v}{c}$. Так як $\left(\frac{dp}{d\rho} \right)_{\text{адіаб}} = c^2$ (див. (6.19)), отримаємо

$$v = \frac{\Delta p}{\rho_0 c}. \quad (6.23)$$

Гідродинамічна швидкість руху частинок середовища v має напрямок або співпадаючий з напрямком поширення звуку, або протилежний до нього. Тому звукові хвилі у газах і рідинах називають **п о в з д о в ж н і м и**.

6.3 Інтенсивність звуку

Частинки середовища, що приймають участь у хвильовому русі, володіють деякою енергією. Їх кінетична енергія пропорційна квадрату гідродинамічної швидкості v . Помноживши $\frac{1}{2}v^2$ на густину середовища ρ_0 , ми знайдемо кінетичну енергію частинок середовища в одиниці його об'єму

$$E_{\text{кін}} = \frac{1}{2} \rho_0 v^2. \quad (6.24)$$

Знову розглянемо плоску звукову хвилю, що поширюється у напівнескінченній трубі, у якій поршень P гармонічно коливається

з частотою ω . Тоді хвиля буде плоскою монохроматичною хвилею з частотою ω і швидкість v матиме вигляд

$$v = V \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) + \alpha \right], \quad (6.25)$$

де V — амплітуда швидкості частинок середовища, рівна, очевидно, амплітуді коливань поршня. Якщо підставити цей вираз у формулу (6.24), отримаємо

$$E_{\text{кін}} = \frac{1}{2} \rho_0 V^2 \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) + \alpha \right]. \quad (6.26)$$

Знайдемо середнє значення густини кінетичної енергії за період коливань. Так як середнє значення квадрата синуса рівне $1/2$, отримуємо

$$\bar{E}_{\text{кін}} = \frac{1}{4} \rho_0 V^2. \quad (6.27)$$

Оскільки частинки середовища коливаються, то вони володіють не лише кінетичною, але і потенціальною енергією. Для коливного руху є характерною рівність середньої кінетичної і середньої потенціальної енергії. Тому середнє значення (за період коливань) потенціальної енергії одиниці об'єму $E_{\text{пот}}$ (густини потенціальної енергії) також буде рівне

$$\bar{E}_{\text{пот}} = \frac{1}{4} \rho_0 V^2. \quad (6.28)$$

Сума $E = E_{\text{кін}} + E_{\text{пот}}$ являє собою густину повної енергії середовища при поширенні у ньому звукової хвилі. Середнє її значення визначається формулою

$$\bar{E} = \frac{1}{2} \rho_0 V^2. \quad (6.29)$$

При поширенні звукова хвиля захоплює до руху все нові і нові частинки. Тому при своєму русі хвиля переносить енергію. Цей перенос енергії не супроводжується, однак, переносом речовини, оскільки частинки середовища при поширенні хвилі скоюють лише коливальні рухи.

Знайдемо кількість енергії, що переноситься хвилею за час dt крізь площадку dS , розташовану перпендикулярно до напрямку поширення звуку. Побудуємо для цього паралелепіпед з основами dS , довжина ребер якого, паралельних до напрямку поширення

звуку, рівна $c dt$. Оскільки за час dt хвиля поширюється на відстань $c dt$, то вся енергія, що знаходилась у паралелепіпеді за цей час пройде крізь основу dS . Ця енергія рівна добутку густини енергії E на об'єм паралелепіпеда $c dt S$. Таким чином, кількість енергії, що переноситься хвилею за час dt крізь площадку dS , розташовану перпендикулярно до напрямку поширення звуку, рівна $E c dt S$, і, відповідно, за одиницю часу крізь одиничну площадку переноситься енергія cE . Вона рівна добутку густини енергії на швидкість звука і називається густиною потоку енергії або вектором $\vec{S}$ Умова

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \rho_0 c V^2. \quad (6.30)$$

Середнє значення за період коливань густини потоку енергії

$$I = c \bar{E} \quad (6.31)$$

— інтенсивність або сила звуку.

Пам'ятаючи, що $\bar{E} = \frac{1}{2} \rho_0 V^2$, запишемо

$$I = \frac{1}{2} \rho_0 c V^2. \quad (6.32)$$

Зрозуміло, що енергія, яку переносить хвиля, береться від поршня, що коливається. Тому, помноживши I на площу поперечного переріза поршня S , ми знайдемо середню акустичну потужність W , випромінювану поршнем

$$W = \frac{1}{2} \rho_0 c V^2 S. \quad (6.33)$$

Бачимо, що випромінювана потужність при заданому V пропорційна акустичному опору середовища $\rho_0 c$. Для води ця величина в 3500 раз більша, ніж для повітря. Тому в стільки же разів буде більшою потужність, випромінювана поршнем, у випадку води.

Виразимо інтенсивність звуку через акустичний тиск. Акустичний тиск Δp біжучої плоскої хвилі пов'язаний з гідродинамічною швидкістю v співвідношенням

$$\Delta p = \rho_0 c v. \quad (6.34)$$

Якщо у середовищі поширюється плоска монохроматична хвиля, так що

$$v = V \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) + \alpha \right], \quad (6.35)$$

за тим самим законом буде змінюватись і акустичний тиск

$$\Delta p = P \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) + \alpha \right], \quad (6.36)$$

де P — амплітуда акустичного тиску.

$$P = \rho_0 c V. \quad (6.37)$$

Використовуюючи цю формулу, можна отримати зв'язок між інтенсивністю звуку $I = \frac{1}{2} \rho_0 c V^2$ та амплітудою акустичного тиску

$$I = \frac{1}{2} \frac{P^2}{\rho_0 c}. \quad (6.38)$$

Знаючи I , можемо звідси визначити P :

$$P = \sqrt{2 \rho_0 c I}. \quad (6.39)$$

Акустичний тиск може бути дуже великим; наприклад у воді при силі звуку $I = 10 \text{ Вт/см}^2$ акустичний тиск рівний 6 атм.

При поширенні ультразвуку градієнти тиску можуть досягати величезних значень, оскільки перепад акустичного тиску від $-P$ до P відбувається на відстані, що рівна половині довжини хвилі; наприклад при силі звуку $I = 10 \text{ Вт/см}^2$ і частоті $5 \cdot 10^6 \text{ Гц}$ градієнт акустичного тиску складає 630 атм/см .

Якщо у рідині поширюються достатньо інтенсивні ультразвукові хвилі, то великі напруження в момент розрідження можуть приводити до утворення пустот, тобто до розривів рідини. Це явище носить назву кавітації. Кавітація виникає, наприклад, при швидкому русі гребних гвинтів, в турбінах, при витіканні газів з сопла і т.і. Розвитку кавітації сприяють пухирці газів, які завжди є у рідині, а також маленькі тверді частинки. При схлопуванні кавітаційних пустот, в моменти стиску, створюються величезні імпульси тиску (до декількох тисяч атмосфер), котрі призводять до руйнування машин.

Явище кавітації обмежує інтенсивність ультразвуку в рідинах. Звуковий тиск P_k , починаючи з якого виникає кавітація, складає 4 атм для касторового масла і 2 атм для гасу. Знаючи цю величину, можна знайти граничну інтенсивність ультразвуку $I_k = \frac{P_k^2}{2 \rho_0 c}$. Для касторового масла вона складає 5 Вт/см^2 , для води $0,5 \text{ Вт/см}^2$.

Дотепер ми розглядали тільки біжучі плоскі звукові хвилі. Такі хвилі збуджуються, наприклад, поршнем у трубі (якщо поршень є твердим і границя його плоска). Амплітуда плоскої хвилі, а також інтенсивність звуку однакові у всіх точках простору.

Однак, звукові хвилі можуть істотно відрізнятися від плоских. Можуть існувати, наприклад, хвилі, у яких гідродинамічна швидкість і акустичний тиск залежать тільки від відстані до деякого центра. Такі хвилі називаються *сферичними* чи *кульовими*.

Можуть існувати і хвилі, у яких швидкість і тиск залежать тільки від відстані до деякої осі. Такі хвилі називаються *циліндричними*.

Розглянемо трохи докладніше сферичні хвилі. Уявимо собі, що в рідині чи газі (необмежених) знаходиться пульсуюча куля, усі точки поверхні якої в кожен момент часу мають однакову швидкість. Ясно, що коливання цієї кулі роблять періодичні стиски і розрідження навколишнього середовища, що поширюються у виді звукових хвиль.

Якщо пульсації кулі відбуваються за гармонічним законом з частотою ω , то фізичні величини, пов'язані з хвилею, наприклад, акустичний тиск, змінюються за законом

$$\Delta p = \frac{A}{r} \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) + \alpha \right], \quad (6.40)$$

де A — деяка стала.

Цей вираз є загальним виразом для монохроматичної розбіжної сферичної хвилі.

Якщо радіус кулі R малий у порівнянні з довжиною хвилі звуку, то константа має вид

$$A = R^2 \rho_0 \omega V, \quad (6.41)$$

де ρ_0 — густина середовища, V — амплітуда радіальної швидкості поверхні кулі.

Формула, аналогічна формулі для Δp , справедлива для швидкості середовища v , що у сферичній хвилі має напрямок радіусів-векторів, проведених з центра кулі.

На великих відстанях кожен невелику ділянку сферичної хвильової поверхні можна, мабуть, розглядати як плоску. Тому на відстані від джерела сферичну хвилю на невеликих ділянках можна вважати плоскою. Звідси випливає, що на великих відстанях від джерела швидкість можна знайти за відомою нам формулою

$$v = \frac{\Delta p}{\rho_0 c}, \quad (6.42)$$

яка є справедливою для біжучої плоскої хвилі.

Інтенсивність звуку I часто для зручності виражають у логарифмічній шкалі. Для цього приймають деяку інтенсивність I_0 за нульовий рівень і визначають рівень інтенсивності як $\lg \frac{I}{I_0}$. У якості I_0 приймається інтенсивність, рівна

$$I_0 = 10^{-16} \text{ Вт/см}^2$$

і близька до порогу чутності людського вуха при частоті звуку 1000 Гц. Одиниця виміру інтенсивності звуку за логарифмічною шкалою — *бел*. На практиці використовують одиницю в 10 разів меншу; вона називається *децибелом* (дБ). Інтенсивність звуку в децибелах визначається так:

$$\beta = 10 \lg \frac{I}{I_0}. \quad (6.43)$$

6.4 Пружні хвилі в твердих тілах

Вище ми вже говорили, що коливання у твердих тілах, так само як і в газах та рідинах, не локалізуються у визначених місцях, а поширюються у виді хвиль. Найпростішими є поздовжні хвилі в ізотропних пружних тілах, аналогічні звуковим хвилям у газах і рідинах. Покажемо, як визначити швидкість таких хвиль.

Розглянемо, наприклад, стрижень, уздовж якого поширюється хвиля стисків і розріджень. Такий стрижень аналогічний трубі з газом, розглянутої раніше. Якщо зміщення частинок стрижня в його початку за час dt дорівнює $d\xi$, то, поділивши цю величину на відстань $c dt$, яку пройшла звукова хвиля за час dt (c — швидкість звуку), ми отримаємо відносну деформацію стрижня

$$\frac{d\xi}{c dt} = \frac{v}{c}, \quad (6.44)$$

де v — швидкість частинок стрижня (в деякий момент часу). Помноживши v/c на модуль Юнга E , визначимо напруги в стрижні

$$\tau = E \frac{v}{c}. \quad (6.45)$$

Добуток τ на площу поперечного перерізу стрижня S дає силу F , що викликає деформацію, котра в свою чергу рівна зміні імпульсу

стрижня за одиницю часу. Остання рівна $\rho c dt Sv$. Дійсно, за час dt у хвильовий рух вступають частинки стрижня з об'єму $c dt S$, їх маса рівна $\rho c dt S$ (ρ — густина стрижня), а імпульс рівний $\rho c dt Sv$. Тому ми можемо записати рівність

$$E \frac{v}{c} S = \rho c S v, \quad (6.46)$$

звідки

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (6.47)$$

Ця формула має ту саму структуру, що і формула $c = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}$, яка визначає швидкість звуку в газах, лише роль модуля Юнга відіграє у випадку газів величина тиску p (що множиться на $\gamma \sim 1$).

В твердих тілах можуть поширюватись не тільки *поздовжні коливання*, як в газах і рідинах. Однак швидкість самих різних пружних коливань завжди визначається формулою типу $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, в яку замість E треба підставити модуль пружності (або напругу), що відповідає тій деформації, котра поширюється у вигляді хвилі.

Наприклад, якщо розглядати поперечні коливання гнучкої струни, то швидкість їх поширення буде визначатися формулою

$$c = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}, \quad (6.48)$$

де τ — напруження у струні, ρ — її густина.

В ізотропних твердих тілах можливе поширення як поздовжніх, так і поперечних пружних хвиль. У *поздовжній хвилі зміщення частинок відбувається вздовж напрямку її поширення, у поперечній хвилі — перпендикулярно до цього напрямку*.

Модуль одностороннього стиску рівний $\frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}$, де σ — коефіцієнт Пуассона. Тому швидкість поширення поздовжніх хвиль в ізотропному твердому тілі визначається формулою

$$c_l = \sqrt{\frac{E(1-\sigma)}{\rho(1+\sigma)(1-2\sigma)}}. \quad (6.49)$$

Модуль зсуву, який характеризує поперечні деформації, рівний $G = \frac{E}{2(1 + \sigma)}$. Тому швидкість поширення поперечних коливань в ізотропному твердому тілі визначається формулою

$$c_t = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1 + \sigma)}}. \quad (6.50)$$

Відзначимо, що швидкість поздовжніх хвиль завжди більша швидкості поперечних хвиль.

Наведемо значення швидкостей c_l і c_t для деяких речовин

Речовина	Алюміній	Сталь	Мідь	Свинець
c_l , м/с	$6,4 \cdot 10^3$	$6,1 \cdot 10^3$	$4,6 \cdot 10^3$	$2,2 \cdot 10^3$
c_t , м/с	$3,16 \cdot 10^3$	$3,30 \cdot 10^3$	$2,26 \cdot 10^3$	$0,70 \cdot 10^3$

Ми бачимо, що за порядком величини швидкість звуку у твердих тілах складає близько $5 \cdot 10^3$ м/с.

В анізотропних твердих тілах, тобто у кристалах, пружні хвилі мають більш складний характер, ніж в ізотропних тілах.

Безладні коливання (флуктуації) різної фізичної природи, що відрізняються складною тимчасовою і спектральною структурою, називаються *шумом*.

Джерелом акустичного шуму можуть бути будь-які небажані механічні коливання у твердих, рідких і газоподібних середовищах.

Розрізняють механічні шуми викликані вібрацією, зіткненнями твердих тіл (шуми верстатів, машин); аеро- чи гідродинамічні шуми, що виникають в турбулентних потоках газів чи рідин у результаті флуктуації тиску (наприклад, шуми у струмені реактивного двигуна); термодинамічні шуми, обумовлені флуктуаціями густини газу (наприклад, у процесі горіння), а також різким підвищенням тиску (наприклад, при вибуху, електричному розряді); кавітаційні шуми, пов'язані із захопуванням газових порожнин і пухирців у рідинах.

6.5 Застосування звукових хвиль

Ультразвук. Для одержання ультразвукових хвиль широко застосовуються електродинамічні, п'єзоелектричні і магнітострикційні випромінювачі. Електродинамічні джерела використовуються для генерування низькочастотних ультразвукових і звукових коливань. Найбільш широкого застосування набули п'єзоелектричні

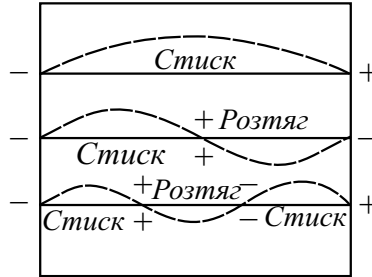


Рисунок 6.2

і магнітострикційні джерела ультразвуку. Робота п'єзоелектричних джерел ультразвуку ґрунтується на п'єзоелектричному ефекті. Він полягає в тому, що при деформаціях розтягу або стиску вирізаних певним способом пластин з кварцу, турмаліну, титанату барію та інших кристалів на протилежних гранях виникає різниця потенціалів, пропорційна механічній напрузі. Якщо пластину розташувати між електродами, до яких приєднано джерело змінної напруги, то пластина під дією електричного поля буде періодично то видовжуватися, то скорочуватися. Коливання поверхні пластини збуджують у середовищі ультразвукові хвилі. Якщо частота коливань напруги, прикладеної до пластини, збігається з її власною частотою коливань, то настає резонанс, і амплітуда вимушених коливань пластини досягає максимуму. При цьому утворюються поздовжні хвилі, вузли яких будуть на кінцях пластини. Розташування хвиль і електричних зарядів у кварцевій пластині схематично зображено на рис. 6.2. З рисунка випливає, що коливання виникатимуть за умови, коли у пластині вміщається непарна кількість хвиль. З цієї умови знаходимо частоти, які може випромінювати пластина:

$$\nu = \frac{2n + 1}{2\ell} v, \quad (6.51)$$

де $n = 0, 1, 2, \dots, \ell$ — товщина пластини, v — швидкість поширення пружних хвиль у пластині.

З формули (6.51) знаходимо, що власна частота коливань пластини

$$\nu = \frac{v}{2\ell}.$$

Кварцеві пластини (для кварцу $v = 5600$ м/с) здатні випромінювати ультразвукові коливання з частотами від десятків до тисяч

кілогерц. Більш високих частот досягають за допомогою кварцевих пластин при збудженні коливальних, що відповідають обертонам. Інтенсивність випромінювання при цьому значно зменшується. Кварцеві пластини створюють хвилі порівняно невеликої інтенсивності.

Щоб мати ультразвукові хвилі більшої інтенсивності, користуються магнітострикційними випромінювачами. Магнітострикційний ефект полягає в тому, що ряд феромагнетиків змінює свої розміри під дією магнітного поля. Якщо феромагнітний стержень розташувати у поздовжньому магнітному полі, яке змінюється з ультразвуковою частотою, то з такою самою частотою стержень зазнаватиме видовжень і скорочень, тобто здійснюватиме механічні коливання. При резонансі амплітуда коливальних різко зростає і стержень випромінюватиме ультразвуки значної інтенсивності.

Незважаючи на те, що природа ультразвукових хвиль і основні закони поширення їх такі, як і звукових хвиль будь-яких довжин хвиль, ультразвук має ряд специфічних особливостей. Вони визначають його важливе значення як у науці, так і в техніці. Ці особливості зумовлені досить малими довжинами хвиль, що дає можливість дістати ультразвукові промені великої напрямленості.

Різноманітність застосувань ультразвуку умовно можна поділити на три напрями: одержання інформації за допомогою ультразвукових методів; дія ультразвуку на речовину; обробка і передавання сигналів.

У першому напрямі ультразвукові методи широко застосовуються для вивчення властивостей і будови речовини, для з'ясування процесів, що в них відбуваються на макро- і мікрорівнях. Ці методи ґрунтуються в основному на залежності швидкості поширення і затухання ультразвукових хвиль від властивостей речовин і від процесів, що в них відбуваються. Такі методи застосовуються у молекулярній акустиці. Вони допомагають з'ясувати особливості молекулярної структури речовини, визначити енергію взаємодії молекул, перевірити припущення про структурні моделі. Вивчення поширення ультразвуку в кристалах дає інформацію про особливості будови кристалічної решітки. Ультразвукові методи, що ґрунтуються на вимірюваннях швидкості і затухання звуку, дають можливість визначити пружні характеристики та міцність металевих матеріалів, кераміки, полімерів, ступінь їхньої чистоти, наявність домішок.

Значна група ультразвукових методів отримання інформації ґрунтується на відбиванні і розсіюванні ультразвукових хвиль на межах між різними середовищами. Ці методи дають можливість здійснювати ультразвукову локацію. У зв'язку з тим що ультразвукові хвилі поглинаються у воді майже в 1000 разів слабше, ніж у повітрі, напрямлені пучки ультразвукових хвиль широко

застосовуються в гідроакустиці для сигналізації і гідролокації під водою. Застосування ультразвукових хвиль в гідроакустиці має виняткове значення, оскільки це єдиний вид хвиль, який поширюється на великі відстані у природних водних середовищах. За допомогою імпульсних ультразвукових ехолотів визначають глибину моря чи океану під кораблем, виявляють косяки риб. За допомогою гідролокаторів виявляють підводні човни, айсберги.

На рис. 6.3 наведено схему будови ехолота. Його дія ґрунтується на вимірюванні проміжку часу між моментом посилення ультразвукового імпульсу і моментом приймання після його відбиття від дна. Ультразвуковий імпульс від генератора 3 подається на випромінювач (антену) 1 і випромінюється у воду. Відбитий сигнал приймається антеною 2, подається на підсилювач 4, а потім - на блок слухового контролю 5, на індикатор 7. У деяких випадках випромінювач є і приймачем.

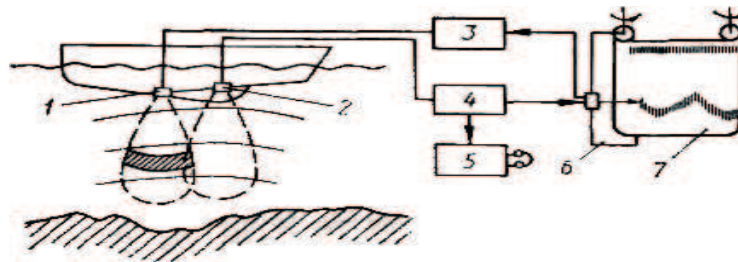


Рисунок 6.3

Ультразвукові хвилі проникають на значно більшу глибину у непрозорих тілах, ніж рентгенівські промені. Ультразвукові промені можуть проникати через металеві вироби, товщина яких понад 10 м. Таку велику проникну здатність ультразвукових променів у твердих тілах покладено в основу роботи ультразвукових дефектоскопів, за допомогою яких виявляють дефекти в матеріалах і виробах. Ультразвукову дефектоскопію металів вперше вивчив радянський фізик С.Я.Соколов. Серед методів ультразвукової дефектоскопії найбільшого поширення набули імпульсний ехометод, дія якого ґрунтується на аналізі відбитих від дефектів сигналів, і тіньовий метод, в якому аналізується структура звукової тіні за дефектом. Принцип дії ультразвукових дефектоскопів ґрунтується відповідно на ехометоді і тіньовому методі (рис. 6.4, а, б). В обох випадках числами 1, 2 і 3 позначені випромінювач, приймач і індикатор, буквою Д - дефект.

Методи ультразвукової дефектоскопії застосовуються також для дослідження структури частин живих організмів, для діагностики деяких захворювань. Особливе місце в застосуванні ультразвуку займають методи звукобачення. За допомогою випромінювачів ультразвуку і фокуруючих систем створюється ультразвукове зображення предмета, який перебуває в непрозорому для світла середовищі. Потім це зображення перетворюється у видиме.

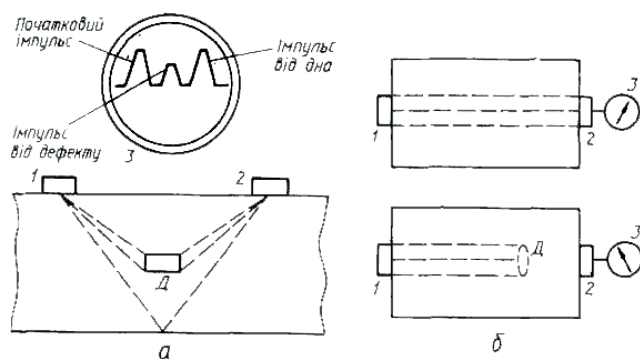


Рисунок 6.4

Візуалізація звукових полів застосовується у найбільш досконалих методах ультразвукової діагностики і дефектоскопії.

Дія ультразвуку на речовини ґрунтується на тому, що ультразвукові пучки можуть мати значні інтенсивності, під впливом яких відбувається активна дія на речовину. Частинки газу або рідини під дією ультразвукових хвиль можуть набути прискорень, які в сотні разів більші від прискорення вільного падіння. Внаслідок цього відбувається інтенсивне перемішування газів, що значно прискорює процеси теплообміну. В рідинах основну роль при дії ультразвукових хвиль на речовину і процеси відіграє кавітація. На основі кавітації здійснюється очищення поверхонь твердих тіл, металізація тіл і паяння, дегазація рідин, кристалізація тощо. Кавітаційні ударні хвилі можуть диспергувати тверді тіла і рідини, утворюючи емульсії і суспензії.

Обробка і передавання сигналів за допомогою ультразвукових пристроїв застосовуються в радіолокації, обчислювальній техніці та для керування світловими сигналами в оптиці і оптоелектроніці.

Застосування ультразвуків досить різноманітне. Останнім часом виникла квантова акустика, яка вивчає взаємодію звукових квантів з електронами і ядрами атомів.

Інфразвук. Джерелом інфразвукових коливань є грозові розряди, вибухи бомб, постріли гармат, коливання мостів, приміщень, дерев тощо.

У земній корі спостерігаються коливання і вібрації інфразвукових частот внаслідок обвалів, руху різних видів транспорту, вулканічних вивержень тощо. Інфразвукові коливання виникають також внаслідок турбулентних потоків атмосфери та вітру.

Швидкість поширення інфразвуку визначається тими самими формулами, що й швидкість поширення звуку. Характерним для інфразвуку є незначне його поглинання в різних середовищах. Внаслідок цього інфразвукові хвилі у повітрі, воді та земній корі можуть поширюватися на досить великі відстані. Це явище знаходить широке застосування в звукометрії, при визначенні місць сильних вибухів, епіцентрів землетрусів. Поширення інфразвуків на великі відстані в морях та океанах дає можливість передбачати такі стихійні явища, як цунамі. Утворення інфразвуків при цьому відбувається так. Під час шторму і вітру вздовж моря чи океану у повітрі виникають хвилі, довжини яких дорівнюють відстані між гребенями водяних хвиль, тобто інфразвукові хвилі. Поширюючись у повітрі з швидкістю, що переважає швидкість вітру і швидкість поширення штормових хвиль в морі, інфразвукові хвилі у повітрі досягають берега і попереджають про наближення шторму.

Приймають і вимірюють інфразвук спеціальними мікрофонами, гідрофонами та вібраторами.

6.6 Запитання для самоконтролю

- 1 Що називається плоскою монохроматичною хвилею?
- 2 Запишіть хвильове рівняння.
- 3 Що називають довжиною хвилі?
- 4 Що називається фазовою швидкістю?
- 5 В якому діапазоні частот розташовані звукові коливання? Ультразвук, інфразвук?
- 6 Що називають акустичним тиском?
- 7 Запишіть вираз для швидкості звуку в газах та рідинах.
- 8 Чим відрізняються між собою поздовжні і поперечні хвилі?
- 9 Запишіть вираз для вектора Умова для інтенсивності звуку.

10 В чому полягає застосування ультразвуку, інфразвуку?

Приклад 1. Знайти відношення частот основного тону двох однакових струн, одну з яких розтягнули на $\eta_1 = 2,0\%$, а другу — на $\eta_2 = 4,0\%$ відносно довжини струни в нерозтягнутому стані. Натяг струни вважають пропорційним розтягу.

Звучання струнних та духових музичних інструментів ґрунтується на явищі утворення стоячих хвиль у струнах та повітряних стовпах. Якщо ділянка середовища (струна, повітряний стовп), в якому поширюються хвилі, обмежується з обох кінців нерухомими межами, то стояча хвиля на цих межах має вузли. З цього випливає, що вздовж натягнутої струни, кінці якої закріплено нерухомо, можуть утворюватись стоячі хвилі тільки таких довжин хвиль, щоб вздовж довжини струни

ℓ вміщалося ціле число півхвиль, тобто коли $\ell = n \frac{\lambda}{2}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Цим довжинам хвиль відповідають частоти $\nu = \frac{c}{\lambda} = n \frac{c}{2\ell}$, де c — фазова швидкість поширення хвилі в струні.

Коливання з частотою $\nu = v/2\ell$ називають основним тоном струни. Всі інші частоти можливих коливань струни, кратні частоті основного тону, називають обертонами.

Згідно (6.48) швидкість поперечних хвиль у струні $c = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$, де τ — натяг (напруження) струни, ρ — її лінійна густина.

Оскільки частота основного тону визначається співвідношенням

$$\nu = \frac{c}{2\ell} = \sqrt{\frac{\tau}{4\ell^2\rho}},$$

то відповідно

$$\nu_1 = \sqrt{\frac{\tau_1}{4\ell^2\rho_1}}, \quad \nu_2 = \sqrt{\frac{\tau_2}{4\ell^2\rho_2}}.$$

За умовою задачі, $\tau = k\Delta\ell$ (k — коефіцієнт пропорційності, $\Delta\ell$ — величина розтягу). Тоді $\tau_1 = \eta_1 k \frac{\ell}{100}$, $\tau_2 = \eta_2 k \frac{\ell}{100}$. Лінійна густина відповідно

$$\rho_1 = \frac{m}{\ell + \frac{\eta_1\ell}{100}}, \quad \rho_2 = \frac{m}{\ell + \frac{\eta_2\ell}{100}},$$

де m — маса струни.

Знаходимо, що відношення

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \sqrt{\frac{\eta_2(100 + \eta_1)}{\eta_1(100 + \eta_2)}} = 1,4.$$

Розділ 7

Постійний електричний струм

Електричний струм; закон Ома. Опір провідників; природа носіїв струму в металах; класична електронна теорія металів; основи квантової теорії твердого тіла; динаміка електронів у кристалічній ґратці; електропровідність металів; власна та домішкова провідність напівпровідників; струм в електролітах; електроліз; закони Фарадея; технічне застосування електролізу.

7.1 Електричний струм

Якщо в провіднику створити електричне поле, то носії заряду придуть в упорядкований рух: позитивні в напрямку поля, негативні в протилежному напрямку. Впорядкований рух зарядів називається електричним струмом. Його прийнято характеризувати силою струму — скалярною величиною, рівною заряду, який переноситься носіями через розглянуту поверхню (наприклад, через поперечний переріз провідника) за одиницю часу. Якщо за час dt переноситься заряд dq , то сила струму i за означенням рівна

$$i = \frac{dq}{dt}. \quad (7.1)$$

Електричний струм може бути обумовлений рухом як позитивних, так і негативних носіїв. Рух негативного заряду в одному напрямку еквівалентний руху такого ж за величиною позитивного заряду в протилежному напрямку. Якщо в провіднику рухаються носії обох знаків, причому за час dt через дану поверхню позитивні носії переносять заряд dq^+ в одному напрямку, а негативні dq^- у протилежному, то сила струму

$$i = \frac{dq^+}{dt} + \frac{dq^-}{dt} \quad (7.2)$$

(dq^- — абсолютна величина негативного заряду).

Електричний струм може бути розподілений по поверхні, через яку він тече, нерівномірно. Більш детально електричний струм можна охарактеризувати за допомогою вектора густини струму $\mathbf{j}$. Цей вектор чисельно дорівнює силі струму di через розташовану в даній точці перпендикулярну до напрямку руху носіїв

площадку $dS_{\perp}$, віднесеної до величини її площі:

$$j = \frac{di}{dS_{\perp}}. \quad (7.3)$$

За напрям $\mathbf{j}$ приймають напрямок вектора швидкості $\mathbf{u}^+$ упорядкованого руху позитивних носіїв.

Поле вектора густини струму можна зобразити за допомогою ліній струму, так само, як і лінії струму у текучій рідині, лінії вектора напруженості електричного поля $\mathbf{E}$ і т.і.

Знаючи вектор густини струму в кожній точці провідника, можна знайти силу струму i через будь-яку поверхню S :

$$i = \int_S j_n dS. \quad (7.4)$$

Нехай в одиниці об'єму міститься n^+ позитивних носіїв і n^- негативних. Абсолютна величина зарядів носіїв дорівнює відповідно e^+ і e^- . Якщо під дією поля носії отримають швидкості $\mathbf{u}^+$ і $\mathbf{u}^-$, то за одиницю часу через одиничну площадку пройде $n^+ \mathbf{u}^+$ позитивних зарядів, що перенесуть заряд $e^+ n^+ \mathbf{u}^+$. Аналогічно негативні носії перенесуть заряд $e^- n^- \mathbf{u}^-$. Таким чином, для густини струму отримаємо наступний вираз:

$$\mathbf{j} = e^+ n^+ \mathbf{u}^+ + e^- n^- \mathbf{u}^-. \quad (7.5)$$

Струм, що не змінюється з часом, називається *постійним*. Очевидно, що

$$I = \frac{q}{t}, \quad (7.6)$$

де q — заряд, який переноситься через поверхню за час t .

У СІ одиниця струму *ампер* (А) є основною. Одиниця заряду *кулон* (Кл) визначається як заряд, що переноситься за 1 с через поперечний переріз провідника при силі струму в 1 А.

7.2 Закон Ома. Опір провідників

Ом експериментально встановив закон, відповідно до якого сила струму, що тече по однорідному металевому провіднику, пропорційна спаду напруги U на провіднику:

$$I = \frac{1}{R} U. \quad (7.7)$$

Однорідним називається провідник, у якому не діють сили неелектростатичного походження (сторонні сили). Величина R називається електричним опором провідника. Одиницею опору служить Ом, що дорівнює опору такого провідника, у якому при напрузі в 1 В тече струм силою в 1 А.

Величина опору залежить від форми і розмірів провідника, а також від властивостей матеріалу, з якого він зроблений. Для однорідного циліндричного провідника

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (7.8)$$

де l — довжина провідника, S — площа його поперечного перерізу, ρ — залежний від властивостей матеріалу коефіцієнт, який називається питомим електричним опором речовини.

Закон Ома можна записати в диференціальній формі. Виділимо увно в околиці деякої точки всередині провідника елементарний циліндричний об'єм з твірними, паралельними вектору густини струму $\mathbf{j}$ в даній точці. Через поперечний переріз циліндра тече струм силою $j dS$. Напруга, прикладена до циліндра, дорівнює $E dl$, де E — напруженість поля в даному місці. Нарешті, опір циліндра, відповідно до формули (7.8), дорівнює $\rho \frac{l}{S}$. Підставимо ці значення у формулу (7.7), тоді

$$j dS = \frac{dS}{\rho dl} \cdot E dl. \quad (7.9)$$

Носії заряду в кожній точці рухаються в напрямку вектора $\mathbf{E}$. Тому напрямки $\mathbf{j}$ і $\mathbf{E}$ співпадають¹. Отже, з (7.9) отримуємо

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\rho} \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E}, \quad (7.10)$$

де $\sigma = \frac{1}{\rho}$ — величина, яка називається коефіцієнтом електропровідності або просто провідністю матеріалу.

Формула (7.10) виражає закон Ома в диференціальній формі.

Здатність речовини проводити струм характеризується його питомим опором ρ або провідністю σ . Їхня величина визначається хімічною природою речовини й умовами, зокрема температурою,

¹В анізотропних тілах напрямки векторів $\mathbf{j}$ і $\mathbf{E}$ можуть не співпадати.

при яких вона знаходиться. Для більшості металів питомий опір росте з температурою приблизно за лінійним законом:

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t^\circ), \quad (7.11)$$

де ρ — питомий опір при 0°C , t° — температура за шкалою Цельсія, α — коефіцієнт, чисельно рівний приблизно $1/273$. Переходячи до абсолютної температури, одержимо

$$\rho = \rho_0 \alpha T. \quad (7.12)$$

Залежність електричного опору від температури покладена в основу термометрів опору. Такий термометр являє собою металеву (останнім часом усе більше застосування знаходять термометри опору на напівпровідниках) дротину, намотану на порцеляновий чи слюдяний каркас. Проградуваний за постійними температурними точками термометр опору дозволяє вимірювати з точністю порядку декількох сотих градуса як низькі, так і високі температури.

7.3 Природа носіїв заряду в металах

Для з'ясування природи носіїв струму в металах було поставлено ряд дослідів. Відзначимо дослід Рікке, здійснений у 1901 р. Рікке взяв три циліндри - два мідних і один алюмінієвий - з ретельно відшліфованими торцями. Циліндри були зважені і потім складені разом у послідовності: мідь - алюміній - мідь. Через такий складений провідник пропускався безупинно струм одного і того самого напрямку протягом року. За весь час через циліндри пройшов заряд, рівний $3,5 \cdot 10^6$ Кл. Зважування показало, що пропускання струму ніяк не змінило вагу циліндрів. При дослідженні торців, що торкалися, під мікроскопом теж не було виявлено проникнення одного металу в інший. Результати дослідів Рікке свідчили про те, що перенос заряду в металах здійснюється не атомами, а певними частинками, що входять до складу всіх металів. Такими частками виявилися електрони.

Найбільш переконливий доказ електронної природи струму в металах було отримано в досліді з *інерцією* електронів. Уявимо собі кусок незарядженого металу, що рухається з постійною швидкістю. Разом з металом будуть рухатися з тією же швидкістю й електрони, і тому ніякого руху електронів щодо кристалічної ґратки, а, отже, і електричного струму не буде. Однак електрони, крім заряду, володіють ще і масою і тому їм присуща інерція. При всякій зміні швидкості руху металу електрони будуть або

відставати від руху ґратки, або випереджати, отже, виникає електричний струм.

Толмен і Стюард (1916 р.) зробили якісні досліді й установили, що у котушці з дротом, що робить обертальні коливання навколо своєї осі, дійсно виникає змінний струм. Котушка з великим числом витків тонкого дроту приводилася у швидке обертання навколо своєї осі. Кінці обмотки були приєднані до чуттєвого гальванометра. Після розкручування котушки вона різко гальмувалася.

Досліді показали, що при гальмуванні котушки у колі дійсно виникає короткочасний струм, а його напрямок відповідає *негативно* зарядженим частинкам. У цих дослідіах було визначене відношення заряду до маси носіїв заряду, $\frac{e}{m}$. Дійсно, при гальмуванні котушки на електрони діє *сила інерції*, що і є в даному випадку сторонньою силою. При прискоренні дроту $\frac{dv}{dt}$ на один електрон діє сила

$$F = -m \frac{dv}{dt}. \quad (7.13)$$

Сила, віднесена до одиниці заряду, тобто напруженість поля сторонніх сил E , дорівнює

$$E = -\frac{m}{e} \frac{dv}{dt}. \quad (7.14)$$

Оскільки $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$, (φ — потенціал), знайдемо напругу, що виникає в колі при гальмуванні котушки:

$$U = -\frac{m}{e} \frac{dv}{dt} l, \quad (7.15)$$

де l — довжина дроту котушки. Якщо R — опір кола, то сила струму, викликаного цієї напругою, рівна

$$i = -\frac{m}{e} \frac{l}{R} \frac{dv}{dt}. \quad (7.16)$$

Величина заряду, що пройшов через коло за повний час гальмування котушки, визначається формулою

$$q = \int_{v_0}^0 i dt = -\frac{m}{e} \frac{l}{R} \int_{v_0}^0 dv = \frac{m}{e} \frac{lv_0}{R}, \quad (7.17)$$

де v_0 — початкова лінійна швидкість дроту. Вимірявши заряд q балістичним гальванометром, та знаючи всі інші величини (які можна легко визначити) v_0 , l і R , можна визначити $\frac{e}{m}$. Обчислене згідно формули (7.17) значення питомого заряду носіїв виходило дуже близьким до $\frac{e}{m}$ для електронів. Таким чином, було експериментально доведено, що носіями струму в металах є електрони.

7.4 Класична електронна теорія металів

Друде, який розробив класичну теорію металів, припустив, що електрони провідності в металі поведуться подібно молекулам ідеального газу. У проміжках між зіткненнями вони рухаються зовсім вільно, пробігаючи в середньому деякий шлях λ . Правда, на відміну від молекул газу, пробіг яких визначається зіткненням молекул однієї з іншою, електрони зіштовхуються переважно не між собою, а з йонами, що утворюють кристалічну ґратку металу. Ці зіткнення приводять до встановлення теплової рівноваги між електронним газом і кристалічною ґраткою. Вважаючи, що на електронний газ можуть бути поширені результати кінетичної теорії газів, оцінку середньої швидкості теплового руху електронів можна зробити за формулою

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}. \quad (7.18)$$

Для кімнатної температури ($\sim 300^\circ \text{K}$) обчислення згідно (7.18) приводить до значення $\bar{v} \approx 10^5 \text{ м/с}$.

При включенні поля на хаотичний тепловий рух, що відбувається зі швидкістю (7.18), накладається упорядкований або *дрейфовий рух* електронів з деякою швидкістю $\bar{u}$. Величину цієї швидкості легко оцінити, виходячи з формули (7.5), що пов'язує густину струму j з кількістю n носіїв в одиниці об'єму, їхнім зарядом e і середньою швидкістю $\bar{u}$:

$$j = en\bar{u}. \quad (7.19)$$

Гранична припустима технічними нормами густина струму для мідних проводів складає біля $10 \text{ А/мм}^2 = 10^7 \text{ А/м}^2$. Взявши для n значення $10^{23} \text{ см}^{-3} = 10^{29} \text{ м}^{-3}$, отримаємо $\bar{u} = 10^{-3} \text{ м/с}$. Таким чином, навіть при дуже високих густинах струму середня швидкість дрейфового руху зарядів ($\bar{u}$) у 10^8 раз менша за середню швидкість теплового руху.

Друде вважав, що відразу після чергового зіткнення електрона з йоном кристалічної ґратки швидкість дрейфового руху електрона дорівнює нулю. Тоді під дією поля електрон одержить постійне прискорення, рівне eE/m , і до кінця пробігу швидкість дрейфового руху досягне в середньому значенні

$$\bar{u}_{max} = \frac{eE}{m}\tau, \quad (7.20)$$

де τ — середній час між двома послідовними зіткненнями з йонами ґратки.

Швидкість u змінюється за час пробігу лінійно. Тому її середнє (за пробіг) значення дорівнює половині максимального:

$$\bar{u} = \frac{e\tau}{2m}E. \quad (7.21)$$

Середня швидкість дрейфового руху електронів виявляється пропорційною напруженості поля E . Тому можна покласти

$$\bar{u} = bE, \quad (7.22)$$

де $b = \frac{e\tau}{2m}$ не залежить від поля E . Величина b називається рухливістю електронів. Вона рівна швидкості дрейфового руху електронів в полі з напруженістю, що рівна одиниці. Якщо вимірювати швидкість в м/с, а напруженість поля — в В/м, то рухливість буде виражена в м²/(В·с).

Підклавши вираз для середньої швидкості дрейфового руху (7.21) у формулу (7.19), отримаємо

$$j = \frac{ne^2\tau}{2m}E. \quad (7.23)$$

Густина струму виявляється пропорційною напруженості поля. Таким чином, ми отримали закон Ома у диференціальній формі (7.10), згідно з яким коефіцієнт пропорційності між j і E являє собою провідність

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{2m}. \quad (7.24)$$

Класична теорія змогла пояснити закони Ома і Джоуля-Ленца², а також дала якісне пояснення закону Видемана-Франца³. Разом

²Кількість тепла, що виділяється в провіднику, пропорційна його опору, квадрату сили струму і часу $Q = I^2 R t$.

³Відношення коефіцієнта теплопровідності κ до коефіцієнта електропровідності σ для всіх металів приблизно однакова і змінюється пропорційно абсолютній температурі.

з тим ця теорія натрапила на дуже істотні труднощі: висновки теорії суперечили дослідним даним по температурній залежності електричного опору металів, класична теорія не змогла дати пояснення явищу надпровідності і пояснити теорію теплоємності металів.

7.5 Основи квантової теорії твердого тіла

У класичній теорії металів вважалося, що електрони провідності можуть мати будь-які значення енергії. Відповідно до квантової теорії енергія електронів у будь-якому кристалічному тілі (зокрема, у металі) так само, як і енергія електронів в атомі, квантується. Це означає, що вона може приймати лише дискретні (тобто розділені кінцевими проміжками) значення, які називають рівнями енергії. Дозволені рівні енергії в кристалі групуються в зони, розділені проміжками, у яких дозволених значень енергії немає. Ці проміжки називаються забороненими зонами. Ширина дозволених і заборонених зон не залежить від розмірів кристала.

Найвищу з дозволених енергетичних зон, повністю заповнених валентними електронами при абсолютному нулі температури, називають валентною зоною (v); найнижчу з пустих або частково заповнених дозволених зон називають зоною провідності (c); між валентною зоною і зоною провідності знаходиться заборонена зона.

При абсолютному нулі енергія кристала повинна бути мінімальною. Електрони підкоряються принципу заборони Паулі, відповідно до якого у будь-якій квантовій системі (атомі, молекулі, кристалі і т.і.) на кожному енергетичному рівні може знаходитися не більш двох електронів, причому спіни електронів, що займають одночасно той самий рівень, повинні мати протилежні напрямки. Тому валентні електрони заповнюють саму нижню зону, потім наступну більш високу і т.д. доти, поки не вичерпаються всі електрони, тобто поки не доберемося до фермі-

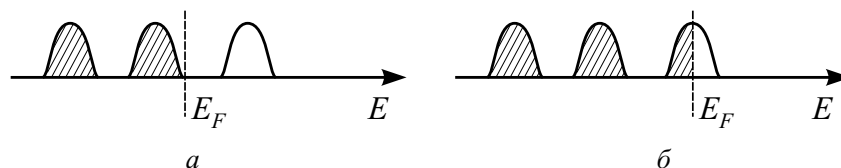


Рисунок 7.1

євської граничної енергії⁴.

Ясно, що при такому поступовому розміщенні електронів можуть бути два випадки: або всі електрони цілком заповнять кілька зон, інші ж зони будуть вільними (рис. 7.1, *a*), або електронів виявиться недостатньо для повного заповнення, так що в останній із заповнених зон залишаться незайняті рівні (рис. 7.1, *б*). У першому випадку рівень Фермі $E = E_F$ збігається з краєм дозволеної енергетичної зони, у другому лежить десь усередині однієї з

⁴Рівень Фермі E_F (енергія Фермі) — це значення енергії, нижче якої всі електронні стани повністю заповнені електронами при абсолютному нулі температури, а вище якої всі стани пусті. Існування енергії Фермі є наслідком принципу Паулі і квантової статистики Фермі-Дірака для частинок (або квазічастинок) з півцілим спіном — ферміонів. Функція розподілу Фермі-Дірака при $T = 0\text{ K}$ і при низьких температурах зображена на рис. 7.2. Статистика Фермі-Дірака для ідеального електронного газу:

$$f(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{k_B T}} + 1}, \quad (7.25)$$

де $f(E)$ — імовірність того, що стан з енергією E зайнятий електроном, k_B — стала Больцмана.

В області високих температур (тобто при $E - E_F \gg k_B T$, що виконується в області "хвоста" кривої розподілу) одиницею у знаменнику можна знехтувати. Тоді функція (7.25) набуває вигляду

$$f(E) \approx e^{-\frac{E-E_F}{k_B T}} = \text{const} \cdot e^{-\frac{E}{k_B T}}, \quad (7.26)$$

тобто переходить в функцію розподілу Больцмана (розподіл класичної фізики).

В діелектриках і напівпровідниках рівень Фермі співпадає з верхньою межею валентної зони або розташований в забороненій зоні. В металах рівень Фермі попадає в зону провідності або в область перекриття валентної зони і зон провідності.

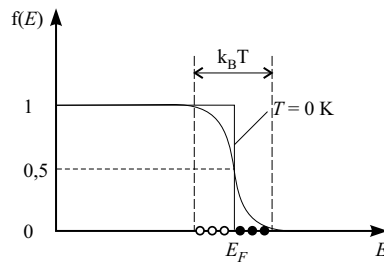


Рисунок 7.2

зон (на рисунках електронні стани $E < E_F$ заштриховані). Легко бачити, що якщо зони цілком заповнені, то кристал буде ізолятором, тобто діелектриком, якщо ж одна з зон не цілком заповнена (але в ній є електрони!), то кристал буде провідником, тобто металом. Щоб переконатися в цьому, прикладемо до кристала слабе електричне поле. Під впливом поля електрони будуть прискорюватися і переходити зі стану з меншою енергією в стан з більшою енергією. Але в першому випадку такий перехід неможливий. Дійсно, щоб електрону перейти в який-небудь стан, цей стан відповідно до принципу Паулі повинен бути вільним, вільних же станів немає - усі вони зайняті. Навпаки, у другому випадку перехід можливий - у зоні є вільні місця. Тому можливе протікання струму при як завгодно слабкому електричному полі, тобто кристал буде провідником. У металі струм може протікати при як завгодно малому електричному полі внаслідок того, що в металі існують частково зайняті рівні в зоні провідності. Діелектрики не мають такої властивості. Однак і в них можуть протікати струми, але не при слабких, а при дуже сильних полях, коли стає можливим перехід електронів у зону провідності.

Сутність розходження між металами, діелектриками і напівпровідниками (діелектрики і напівпровідники відрізняються між собою лише шириною забороненої зони E_g , різкої межі між ни-

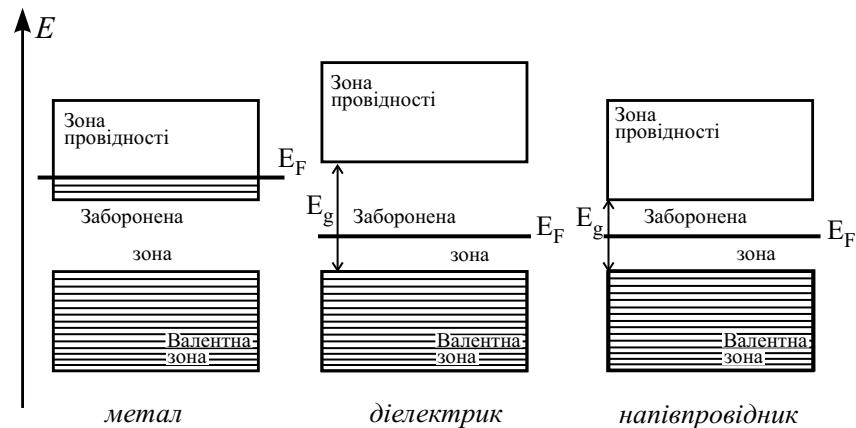


Рисунок 7.3

ми немає, поділ на діелектрики і напівпровідники в певній мірі є умовним) зв'язана з характером енергетичного спектра тіла в поєднанні з принципом Паулі. Ясно, що якби електрони не під-

корялися принципу Паулі, то між металами і діелектриками (і напівпровідниками) не існувало би розходження і всі тіла були би провідниками.

Енергетичні схеми металів, напівпровідників і діелектриків наведені на рис. 7.3. Заповнені електронами області дозволених зон заштриховані.

7.6 Динаміка електронів у кристалічній ґратці

Особливістю кристала, що відрізняє його від аморфних тіл і рідин, є періодичність у розташуванні атомів (кристалічна ґратка), а тому електрони рухаються в періодичному потенціальному полі кристалічної ґратки. Виявляється, рух електрона провідності в кристалі під дією зовнішньої сили $\mathbf{F}$ і сил з боку кристалічної ґратки $\mathbf{F}_{\text{крис}}\text{т}$ у ряді випадків може бути описаний як рух вільного електрона, на котрий діє лише сила $\mathbf{F}$, але з ефективною масою m^* , відмінною від маси вільного електрона m_0 .

Ефективна маса m^* може сильно відрізнятись від фактичної маси електрона m_0 , зокрема вона може приймати від'ємні значення. Це обумовлено тією обставиною, що в дійсності рівняння другого закону Ньютона має вигляд

$$m_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{крис}}\text{т}. \quad (7.27)$$

Співставлення (7.27) з рівнянням

$$m^* \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}$$

наочно показує, що m^* може істотно відрізнятись від m_0 . Незважаючи на це, саме значення m^* визначає характер руху електрона в ґратці під дією сили eE . Введення ефективної маси дозволяє, абстрагуючись від взаємодії електронів із ґраткою, визначити характер руху електрона під дією зовнішнього поля. Приписавши електрону масу m^* , ми можемо досліджувати поведінку електрона під дією сили eE , вважаючи його вільним.

7.7 Електропровідність металів

Згідно емпіричного правила Матіссена, встановленого у 1864р., загальний опір кристалічного металічного зразка $\rho(T)$ є сумою

опорів ρ_z , "залишкового опору", обумовленого розсіюванням електронів на дефектах і домішках кристалу, який практично не залежить від температури (залишається і при $T = 0 \text{ K}$), $\rho_\phi(T)$ – опору, обумовленого тепловими коливаннями ґратки, і $\rho_e(T)$ – опору, обумовленого міжелектронними зіткненнями. Останні два – температурно-залежні і зникають при $T = 0 \text{ K}$:

$$\rho(T) = \rho_z + \rho_\phi(T) + \rho_e(T). \quad (7.28)$$

Залежність питомого опору $\rho = \sigma^{-1}$ металу (Cu) і сплавів (Cu:Ni) від температури T наведено на рис. 7.4.

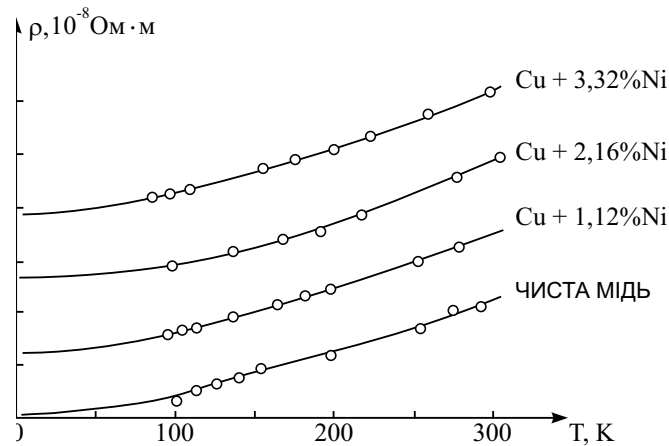


Рисунок 7.4

При відсутності зовнішнього поля дрейфова швидкість рівна нулю, і електричний струм у металі відсутній. При накладанні на метал зовнішнього електричного поля $\mathbf{E}$ дрейфова швидкість стає відмінною від нуля – у металі виникає електричний струм. Відповідно до закону Ома дрейфова швидкість є пропорційна силі $-e\mathbf{E}$.

З механіки відомо, що швидкість сталого руху виявляється пропорційною прикладеній до тіла зовнішній силі F в тому випадку, коли, крім сили F , на тіло діє сила опору середовища, що пропорційна швидкості тіла. Отже, крім сили $-e\mathbf{E}$, на електрони провідності в металі діє сила "тертя", середнє значення якої дорівнює

$$\mathbf{F}_{\text{тр}} = -r\mathbf{u}, \quad (7.29)$$

де r — коефіцієнт пропорційності.

Тоді рівняння руху для електрона матиме вигляд

$$m^* \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -e\mathbf{E} - r\mathbf{u}, \quad (7.30)$$

де m^* — ефективна маса електрона. Це рівняння дозволяє знайти усталене значення $\mathbf{u}$.

Якщо після встановлення стаціонарного стану виключити зовнішнє поле $\mathbf{E}$, дрейфова швидкість почне зменшуватися і по досягненні стану рівноваги між електронами і ґраткою дорівнюватиме нулю. Знайдемо закон зменшення дрейфової швидкості після виключення зовнішнього поля. Поклавши у (7.30) $\mathbf{E} = 0$, одержимо рівняння

$$m^* \frac{d\mathbf{u}}{dt} + r\mathbf{u} = 0. \quad (7.31)$$

Рівняння такого виду нам добре відомі. Його розв'язок має вид

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(0) \cdot \exp\left(-\frac{r}{m^*}t\right), \quad (7.32)$$

де $\mathbf{u}(0)$ — значення дрейфової швидкості в момент виключення поля.

З (7.32) випливає, що за час

$$\tau = \frac{m^*}{r} \quad (7.33)$$

значення дрейфової швидкості зменшиться в e разів. Таким чином, величина (7.33) євляє собою час релаксації, який характеризує процес встановлення рівноваги (між електронами і кристалічною ґраткою), спотвореної дією зовнішнього поля $\mathbf{E}$.

Із врахуванням (7.33) формула (7.29) може бути записана наступним чином:

$$\mathbf{F}_{\text{тр}} = -\frac{m^*}{\tau} \mathbf{u}. \quad (7.34)$$

Значення усталеної дрейфової швидкості можна знайти, якщо прирівняти нулю суму сил $-e\mathbf{E}$ і сили тертя (7.34):

$$-e\mathbf{E} - \frac{m^*}{\tau} \mathbf{u} = 0. \quad (7.35)$$

Звідки

$$\mathbf{u} = -\frac{e\mathbf{E}\tau}{m^*}. \quad (7.36)$$

Усталене значення густини струму отримаємо, помноживши це значення $\mathbf{u}$ на заряд електрона $-e$ і густину електронів n :

$$\mathbf{j} = -\frac{e\mathbf{E}\tau}{m^*}(-e)n = \frac{ne^2\tau}{m^*}\mathbf{E}. \quad (7.37)$$

Коефіцієнт пропорційності між $\mathbf{j}$ і $\mathbf{E}$ являє собою питому електропровідність σ . Таким чином,

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m^*}. \quad (7.38)$$

Відзначимо, що розрахунки, які привели до формули (7.38), однаково придатні як при класичному трактуванні руху електронів в металі, так і при квантовомеханічному трактуванні. Розходження цих двох підходів полягає в наступному. При класичному розгляді передбачається, що всі електрони збуджуються зовнішнім електричним полем. При квантовомеханічному трактуванні треба брати до уваги, що збуджуються полем і змінюють свою швидкість лише електрони, що займають стани поблизу рівня Фермі. Електрони, що знаходяться на більш глибоких рівнях, полем не збуджуються. Крім того, при класичному трактуванні в знаменнику формули (7.38) повинна стояти звичайна маса електрона, при квантовомеханічному трактуванні замість звичайної маси повинна бути взята ефективна маса електрона m^* .

Класична електронна теорія не в стані пояснити характер температурної залежності електропровідності металів. Дійсно, питома електропровідність згідно (7.24)

$$\sigma_{\text{кл}} = \frac{ne^2\tau}{2m} = \frac{ne^2\ell}{2m\bar{v}_T}, \quad (7.39)$$

де $\tau \approx \ell/\bar{v}_T$, ℓ — середня довжина вільного пробігу електронів в кристалі, яка згідно з класичною теорією, має порядок сталої кристалічної ґратки і не залежить від температури ($\ell \sim a$); $\bar{v}_T$ — середня теплова швидкість електронів ($\bar{v}_T \sim \sqrt{T}$); $\sigma_{\text{кл}} \sim \frac{1}{\sqrt{T}}$, що суперечить експериментальним даним.

Квантовомеханічний розрахунок дає

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m^*} = \frac{ne^2\ell}{m^*\bar{v}_F}, \quad (7.40)$$

де $\tau \approx \ell/\bar{v}_F$ — час релаксації, ℓ — середня довжина вільного пробігу електрона (квазічастинки з ефективною масою m^*), $\bar{v}_F =$

$\sqrt{2E_F/m^*}$ — фермі-швидкість (максимальна швидкість електронів, при $T = 0$).

Температурна залежність $\sigma(T)$ пов'язана з температурною залежністю $\ell(T)$. При $T = 0$ довжина вільного пробігу електрона в ідеально-періодичній безмежній кристалічній ґратці $\ell = \infty$. В реальних металах при $T = 0$ *скінченна довжина* вільного пробігу, обумовлена розсіянням електронів на дефектах (і домішках) кристалла, залежна від концентрації дефектів і практично незалежна від температури, є причиною *залишкового опору* ρ_z . В надчистих металах $\ell \sim 10^{-2}$ см і ρ_z є в $10^4 - 10^5$ разів менше питомого опору при кімнатній температурі.

При достатньо високих температурах $T \gg \vartheta_D$ ($\vartheta_D = \hbar\omega_{\max}/k_B$ — температура Дебая ($\vartheta_D \sim 10^2$ К); $\omega_{\max}$ — максимальна частота коливань кристалічної ґратки) довжина вільного пробігу електрона визначається, в основному, розсіянням на теплових коливаннях йонів кристалічної ґратки (фононах⁵). При кімнатних температурах довжина вільного пробігу електрона $\ell_\Phi \sim 10^{-6}$ см, $\ell_\Phi \sim \frac{1}{T}$, тому $\sigma_\Phi \sim \frac{1}{T}$ і питомий опір, обумовлений розсіянням електронів на фононах, лінійно залежить від температури $\rho_\Phi \sim T$ і дає основний вклад в опір металу.

В широкій області температур

$$\rho = \rho_z + \rho_\Phi = \rho_z(1 + \alpha T), \quad (7.41)$$

де α — температурний коефіцієнт опору (типове значення $\alpha \approx 1/273 \text{ K}^{-1} \approx 4 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$), ми отримали і пояснили формулу (7.11).

При низьких температурах $T \ll \vartheta_D$ $\rho_\Phi \sim T^5$, що вперше було з'ясовано Ф.Блохом (1929 р.) на основі квантової теорії. В цій області низьких температур суттєвим впливом на довжину вільного пробігу мають міжелектронні зіткнення, і відповідна частина питомого опору $\rho_e \sim T^2$. Отже, при $T \ll \vartheta_D$ питомий опір визначається трьома доданками

$$\rho = \rho_z + AT^2 + BT^5, \quad (7.42)$$

де A, B — величини, незалежні від температури ($\rho_e = AT^2$, $\rho_\Phi = BT^5$).

⁵Фонон — квант коливань кристалічної ґратки, квазічастинка, що описує колективні коливання йонів кристалічної ґратки.

7.8 Напівпровідники

Напівпровідниками є кристалічні речовини, у яких валентна зона цілком заповнена електронами, а ширина забороненої зони невелика (у власних напівпровідників не більша 1 eV). Напівпровідники зобов'язані своїй назві тій обставині, що за величиною електропровідності вони займають проміжне положення між металами і діелектриками. Однак характерним для них є не величина провідності, а те, що їхня провідність росте з підвищенням температури (нагадаємо, що в металах вона зменшується).

Розрізняють *власні* і *домішкові* напівпровідники. До числа власних відносяться хімічно чисті напівпровідники. Електричні властивості домішкових напівпровідників визначаються наявніми в них домішками.

Власна провідність. У власному напівпровіднику при абсолютному нулі всі рівні валентної зони цілком заповнені електронами, а в зоні провідності електрони відсутні. Електричне поле не може перекинути електрони з валентної зони в зону провідності. Тому власні напівпровідники поведуться при абсолютному нулі як діелектрики. При температурах, відмінних від 0 К, частина електронів з верхніх рівнів валентної зони переходить у результаті теплового збудження на нижні рівні зони провідності. У цих умовах електричне поле одержує можливість змінювати стан електронів, що знаходяться в зоні провідності. У результаті електропровідність напівпровідника стає відмінною від нуля:

$$\sigma = \sigma_0 \cdot \exp(-E_a/k_B T), \quad (7.43)$$

де σ_0 — коефіцієнт, в дійсності залежний від температури, але значно повільніше, ніж експоненціальний множник, E_a — так звана енергія активації провідності, необхідна для того, щоб електрон міг подолати заборонену зону і перейти з валентної зони у зону провідності.

Власна провідність виникає в результаті переходу електронів з верхніх рівнів валентної зони в зону провідності. При цьому в зоні провідності з'являється деяке число носіїв струму — електронів, що займають рівні поблизу дна зони; одночасно у валентній зоні звільняється таке ж число місць на верхніх рівнях. Такі вільні від електронів місця називають *дірками*⁶.

Розподіл електронів за рівнями валентної зони і зони провідності визначається функцією Фермі-Дірака (7.25). Обчислення показують, що рівень Фермі лежить точно посередині забороненої

⁶ Дірка — квазічастинка, що підкоряється статистиці Фермі-Дірака, має заряд, рівний заряду електрона за абсолютною величиною, та протилежним знаком.

зони. Отже, для електронів, що перейшли в зону провідності, величина $E - E_F$ мало відрізняється від половини ширини забороненої зони. Рівні зони провідності лежать на хвості кривої розподілу. Тому імовірність їхнього заповнення електронами можна знаходити за формулою (7.26). Вважаючи в цій формулі $E - E_F = E_g/2$, одержимо

$$f(E) \approx e^{-\frac{E_g}{2k_B T}}. \quad (7.44)$$

Кількість електронів, що перейшли в зону провідності, буде пропорційна імовірності (7.44). Оскільки провідність пропорційна числу носіїв, вона теж повинна бути пропорційна виразу (7.44). Отже, електропровідність власних напівпровідників швидко росте з температурою, змінюючись за законом

$$\sigma = \sigma_0 \cdot \exp(-E_g/2k_B T), \quad (7.45)$$

де E_g — ширина забороненої зони.

На рисунку 7.5 зображена схема, яка пояснює виникнення власної провідності напівпровідника. Електронні переходи показані стрілками.

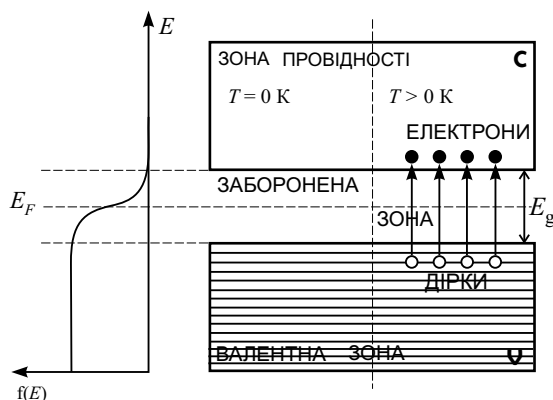


Рисунок 7.5

В електричному полі $\mathbf{E}$ відбувається дрейфовий рух електронів і дірок. Напрями швидкостей електронів (electron) і дірок (hole) $\mathbf{u}_e$ і $\mathbf{u}_h$ протилежні, але створювані ними електричні струми мають однаковий напрям ($\mathbf{j}_e \parallel \mathbf{j}_h \parallel \mathbf{E}$). Рухливості електронів і дірок:

$$\mu_n = \frac{u_n}{E}, \quad \mu_p = \frac{u_p}{E}, \quad (7.46)$$

u_n і u_p — дрейфові швидкості електронів і дірок в електричному полі $\mathbf{E}$. Густина електричного струму електронів і дірок

$$\mathbf{j} = -en\mathbf{v}_n + ep\mathbf{v}_p = (en\mu_n + ep\mu_p)\mathbf{E}, \quad (7.47)$$

де враховано, що $\mathbf{u}_n = -\mu_n\mathbf{E}$, $\mathbf{u}_p = \mu_p\mathbf{E}$. Згідно закону Ома

$$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}.$$

Питома електропровідність напівпровідника

$$\sigma = en\mu_n + ep\mu_p, \quad (7.48)$$

де n — концентрація електронів в зоні провідності, p — концентрація дірок у валентній зоні (e — абсолютна величина заряду електрона).

Для власної провідності

$$n = p \equiv n_i = A \cdot \exp(-E_g/2k_B T), \quad (7.49)$$

A — коефіцієнт, залежний від ефективних мас електрона і дірки (m_n^* і m_p^*) і температури (за степеневим законом).

Домішкова провідність. Цей вид провідності виникає, якщо деякі атоми даного напівпровідника замістити у вузлах кристалічної ґратки атомами, валентність яких відрізняється на одиницю від валентності основних атомів. На рисунку 7.6, *a* умовно зображена ґратка германія з домішкою 5-валентних атомів фосфору. Для утворення ковалентних зв'язків із сусідами атому фосфору досить чотирьох електронів. Отже, п'ятий валентний електрон

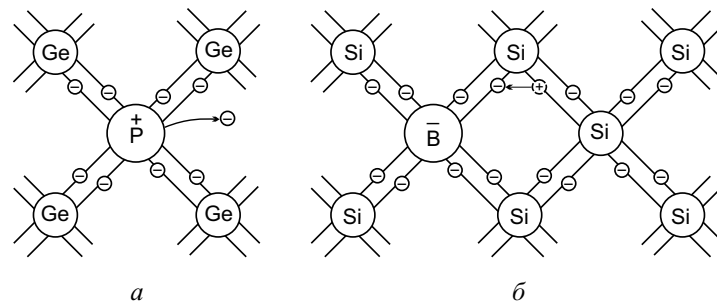


Рисунок 7.6

виявляється як би зайвим і легко відщиплюється від атома за рахунок енергії теплового руху, утворюючи при цьому мандрівний

вільний електрон. На відміну від розглянутого раніше випадку утворення вільного електрона не супроводжується порушенням ковалентних зв'язків, тобто утворенням дірки. Хоча в околиці атома домішки виникає надлишковий позитивний заряд, але він зв'язаний з цим атомом і переміщатися по ґратці не може. Завдяки цьому заряду атом домішки може захопити електрон, що наблизився до нього, але зв'язок захопленого електрона з атомом не буде міцним і легко порушується знову за рахунок теплових коливань ґратки.

Таким чином, у напівпровіднику з 5-валентною домішкою існує лише один вид носіїв струму – електрони. Відповідно говорять, що такий напівпровідник має електронну провідність або є напівпровідником *n*-типу (від слова *negativ* – негативний). Атоми домішки, що поставляють електрони провідності, називаються *донорами*.

Домішки спотворюють поле ґратки, що приводить до виникнення на енергетичній схемі так званих локальних рівнів, розташованих у забороненій зоні кристала (рис. 7.7, *a*). Будь-який рівень валентної зони чи зони провідності може бути зайнятий електроном, що знаходиться в будь-якій місці кристала. Енергію, що відповідає локальному рівню, електрон може мати лише знаходячись поблизу атома домішки, що викликав появу цього рівня. Отже, електрон, що займає домішковий рівень, локалізований поблизу атома домішки.

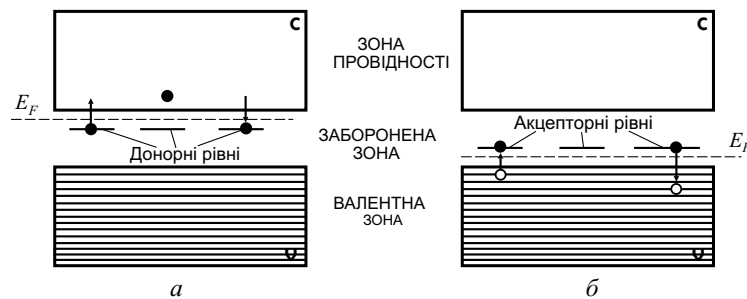


Рисунок 7.7

Якщо донорні рівні розташовані недалеко від стелі валентної зони⁷, вони не можуть істотно вплинути на електричні властивості кристала. Інакше обстоїть справа, коли відстань таких рівнів від дна зони провідності набагато менша, ніж ширина забороненої

⁷Це означає, що п'ятий валентний електрон міцно зв'язаний із своїм атомом.

зони. У цьому випадку енергія теплового руху навіть при звичайних температурах виявляється достатньою для того, щоб перевести електрон з донорного рівня в зону провідності. На рис. 7.6, *а* цьому процесу відповідає відщиплення п'ятого валентного електрона від атома домішки. Захопленню вільного електрона атомом домішки відповідає на рис. 7.7, *а* перехід електрона з зони провідності на один з донорних рівнів.

Рівень Фермі в напівпровіднику *n*-типу лежить між донорними рівнями і дном зони провідності, а при невисоких температурах - приблизно посередині між ними (рис. 7.7, *а*).

На рис. 7.6, *б* умовно зображена ґратка кремнію з домішкою 3-валентних атомів бору. Трьох валентних електронів атома бору недостатньо для утворення зв'язків із усіма чотирма сусідами. Тому один із зв'язків виявляється не укомплектованим і буде являти собою місце, здатне захопити електрон. При переході на це місце електрона однієї із сусідніх пар виникне дірка, що буде кочувати по кристалі. Поблизу атома домішки виникне надлишковий негативний заряд, але він буде зв'язаний з даним атомом і не може стати носієм струму. Таким чином, у напівпровіднику з 3-валентною домішкою виникають носії струму тільки одного виду - дірки. Провідність у цьому випадку називається дірковою, а про напівпровідник говорять, що він належить до *p*-типу (від слова *positiv* - позитивний). Домішки, що викликають виникнення дірок, називаються *акцепторними*.

На схемі рівнів (рис. 7.7, *б*) акцептору відповідає розташований у забороненій зоні, недалеко від її дна, локальний рівень. Утворенню дірки відповідає перехід електрона з валентної зони на акцепторний рівень. Зворотний перехід відповідає розриву одного з чотирьох ковалентних зв'язків атома домішки з його сусідами і рекомбінації електрона, що утворився при цьому, і дірки.

Рівень Фермі в напівпровіднику *p*-типу лежить між стелею валентної зони і акцепторними рівнями, а при невисоких температурах - приблизно посередині між ними.

З підвищенням температури концентрація домішкових носіїв струму швидко досягає насичення. Це означає, що практично звільняються всі донорні чи заповнюються електронами всі акцепторні рівні. Разом з тим, у міру росту температури, усе в більшому ступені починає виявлятися власна провідність напівпровідника, обумовлена переходом електронів безпосередньо з валентної зони в зону провідності. Таким чином, при високих температурах провідність напівпровідника буде складатися з домішкової і власної провідності. При низьких температурах переважає домішкова, а при високих - власна провідність.

7.9 Струм в електролітах

Дисоціація молекул у розчинах. Проходження струму через метали та електронні напівпровідники не супроводжується будь-якими хімічними перетвореннями. Такі речовини називаються провідниками першого роду. Речовини, у яких при проходженні струму відбуваються хімічні перетворення, називаються провідниками другого роду або електролітами. До їхнього числа належать розчини солей, лугів та кислот у воді і деяких інших рідинах, а також розплави солей, що є у твердому стані йонними кристалами.

Носіями струму в електролітах служать йони, на які дисоціюють (розщеплюються) у розчині молекули розчиненої речовини. Щоб з'ясувати, яким чином відбувається дисоціація, розглянемо полярну молекулу, наприклад, NaCl . При об'єднанні атомів Na і Cl у молекулу відбувається перерозподіл електронів - валентний електрон Na виявляється як би включеним в оболонку атома Cl , для повної забудови якої не вистачає саме одного електрона. У результаті атом Na перетворюється в позитивний йон, атом Cl - у негативний. Обидва йони утримуються в молекулі силами електростатичної (кулонівської) взаємодії. Аналогічно будь-яка інша полярна молекула складається з двох чи більшого числа йонів.

У розчині кожна молекула розчиненої речовини знаходиться в оточенні молекул розчинника. Якщо молекули розчинника є також полярними, поблизу молекули розчиненої речовини на них буде діяти електричне поле, створене розчиною молекулою. Тому молекули розчинника повернуться до позитивно зарядженої частини молекули розчиненої речовини своїми негативними "кінцями", а до негативно зарядженої частини - позитивними "кінцями" (рис. 7.8, а; суцільним контуром обведена молекула розчиненої речовини, пунктирними контурами - молекули розчинника). При такому розташуванні молекул розчинника створюване ними поле послаблює зв'язок між різноіменними йонами молекули розчиненої речовини, унаслідок чого зв'язок може виявитися розірваним за рахунок енергії теплового руху. У цьому випадку молекула ділиться на два чи більшу кількість іонів різних знаків (дисоціює).

Напруженість поля, що створюється диполем, пропорційна величині його електричного моменту. Тому зв'язок між йонами в молекулі розчиненої речовини послаблюється сильніше, чим більший дипольний момент навколишніх її молекул, тобто чим більша діелектрична проникність рідини, узятій у якості розчинника. З усіх рідин найбільшою діелектричною проникністю володіє вода ($\epsilon = 81$). Відповідно до цього дисоціація молекул у водяних розчинах буває особливо велика.

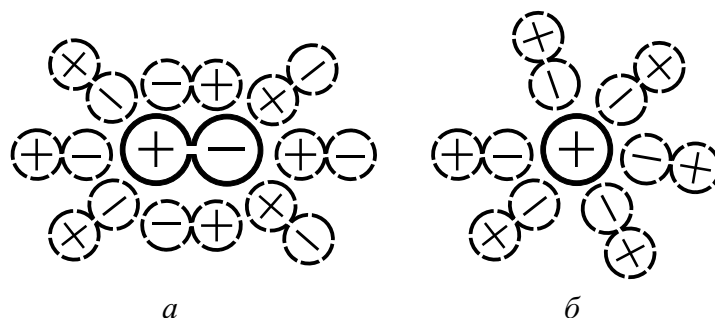


Рисунок 7.8

Йони, що утворилися, починають рухатись у розчині. Якщо йони різних знаків наблизяться на досить малу відстань, вони можуть об'єднатися знову в молекулу. Цей процес, протилежний процесу дисоціації, називається рекомбінацією йонів. У розчині йдуть одночасно обидва процеси – дисоціація молекул на йони і рекомбінація йонів у молекули. Коли кількість молекул, що дисоціюють в одиницю часу, стане рівною кількості молекул, що виникають "в той самий час унаслідок рекомбінації, установиться рівноважний стан. Цьому стану відповідає визначений ступінь дисоціації, який прийнято характеризувати коефіцієнтом дисоціації α , що показує, яка частина молекул розчиненої речовини знаходиться в дисоційованому стані. Якщо кількість молекул розчиненої речовини, що містяться в одиниці об'єму розчину, дорівнює n , то $n' = \alpha n$ молекул будуть знаходитися у розчині у виді йонів і $n'' = (1 - \alpha)n$ - у виді недисоційованих молекул.

Для кожної молекули розчиненої речовини, що ще не розпалася на йони, існує визначена імовірність того, що вона дисоціює протягом однієї секунди. Отже, кількість молекул $\Delta n'$, що дисоціює за одиницю часу в одиниці об'єму повинна бути пропорційною n'' – кількості молекул, які ще не розпалися на йони:

$$\Delta n' = k' n'' = k'(1 - \alpha)n. \quad (7.50)$$

Коефіцієнт пропорційності k' залежить від природи розчинника і розчиненої речовини. Для розчинників з більшим значенням ϵ коефіцієнт k' більший. Крім того, він зростає із збільшенням температури.

Імовірність зустрічі двох йонів різних знаків пропорційна як числу позитивних, так і числу негативних йонів. І те, і інше число

дорівнює кількості дисоційованих молекул n' . Тому кількість молекул, що виникають в одиниці об'єму за одиницю часу внаслідок рекомбінації, пропорційна n'^2 :

$$\Delta n'' = k'' n'^2 = k'' \alpha^2 n^2. \quad (7.51)$$

Для стану рівноваги $\Delta n' = \Delta n''$, тому (див. (7.50) і (7.51))

$$k'(1 - \alpha)n = k'' \alpha^2 n^2,$$

звідки

$$\alpha^2 + \frac{k'}{k''n} \alpha - \frac{k'}{k''n} = 0.$$

Розв'язок цього рівняння (другий розв'язок відкинуто із-за того, що він від'ємний)

$$\alpha = \frac{k'}{2k''n} \left(\sqrt{1 + \frac{4k''n}{k'}} - 1 \right). \quad (7.52)$$

Ця формула є наближеною. Коефіцієнти k' і k'' можна вважати постійними лише в тому випадку, якщо кожна молекула розчиненої речовини має своїми сусідами тільки молекули розчинника, що виконується при невеликих відносних концентраціях розчину. При великих концентраціях оточення кожної молекули складається як з молекул розчинника, так і з молекул розчиненої речовини, унаслідок чого змінюється імовірність дисоціації. Змінюється також імовірність рекомбінації при зустрічі йонів різних знаків.

При малих n (коли $\frac{4k''n}{k'} \ll 1$) функцію (7.52) можна наближено представити наступним чином:

$$\alpha \approx \frac{k'}{2k''n} \left(1 + \frac{2k''n}{k'} - 1 \right) = 1. \quad (7.53)$$

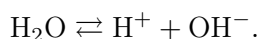
Отже, у сильно розведених розчинах практично всі молекули розчиненої речовини виявляються дисоційованими. Це пояснюється тим, що при малих n йони майже не зіштовхуються один з одним; тому рекомбінація не відбувається і з плином часу всі молекули розпадаються на йони.

При великих n (коли одиницею можна знехтувати у порівнянні $\sqrt{\frac{4k''n}{k'}}$, а тим більше у порівнянні з $\frac{4k''n}{k'}$) вираз (7.52) приймає вигляд

$$\alpha \approx \frac{k'}{2k''n} \sqrt{\frac{4k''n}{k'}} = \sqrt{\frac{k'}{k''n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}. \quad (7.54)$$

В цьому випадку коефіцієнт дисоціації α дуже малий (за умовою $\frac{4k''n}{k'} \gg 1$, а відповідно $\frac{k'}{k''n} \ll 1$) і зменшується із збільшенням концентрації пропорційно $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Дуже слабким електролітом є також і сама вода. Якесь (дуже незначна) частина її молекул дисоційована відповідно до рівняння



Десятковий логарифм концентрації йонів H^+ , узятий із протилежним знаком, позначають pH і називають водневим показником:

$$pH = -\lg [\text{H}^+].$$

Для чистої води при 25°C $pH = 7,0$ (при 0°C $pH = 7,5$; при 60°C $pH = 6,5$).

При розчиненні кислот від них відщеплюються йони H^+ . Частина іонів OH^- з'єднується з йонами H^+ в нейтральні молекули води. У результаті концентрація $[\text{H}^+]$ виявиться більшою, ніж їх концентрація в чистій воді. Іншими словами, водневий показник pH кислотного розчину менший 7. Аналогічним чином у розчинах лугів (відщеплюються йони OH^-) pH більший 7. Водневий показник розчину є, таким чином, кількісною мірою ступеня його кислотності або лужності.

При невисоких температурах йони бувають оточені молекулами розчинника, що обліплює йони (рис. 7.8, б; аналогічна картина спостерігається для негативного йона). Це явище називається сольватацією (у випадку водяних розчинів – гідратацією) йонів, а саме утворення з йона й утримуваної його силою оболонки з молекул розчинника називають сольватом. Більш

інтенсивний тепловий рух порушує зв'язок між йоном і молекулами, що утворюють оболонку сольвату. Тому при підвищенні температури розміри сольвату робляться усе меншими і при досить великій температурі оболонка цілком зникає.

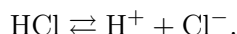
7.10 Електроліз. Закони Фарадея

Якщо в електроліт увести тверді пластинки, що проводять струм, (електроди) і прикласти до них напругу, йони починають рухатися і виникає електричний струм. Позитивно заряджені йони рухаються до негативного електрода (катода), унаслідок чого їх називають к а т і о н а м и. Негативні йони рухаються до позитивного електрода (анода) і звуться а н і о н а м и. Досягнувши відповідного електрода, йони віддають йому надлишкові чи отримують відсутні електрони і перетворюються у нейтральні атоми чи молекули. У залежності від хімічної природи електроліту та електродів йони, що нейтралізувалися, або виділяються на електродах, або вступають у реакцію з електродами або розчинником. Хімічні реакції, у які вступають йони, що нейтралізувалися, називають в т о р и н н и м и. Продукти вторинних реакцій виділяються на електродах або переходять у розчин.

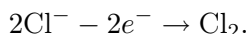
Таким чином, проходження струму через електроліт супроводжується виділенням на електродах складових частин електроліту. Це явище одержало назву е л е к т р о л і з у.

Розглянемо декілька прикладів.

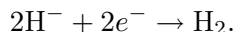
1. Візьмемо як електроліт водяний розчин соляної кислоти. Молекула HCl дисоціює у розчині на позитивно заряджений йон водню H^+ і негативно заряджений йон хлору Cl^- :



Підійшовши до анода, йони хлору віддають йому надлишкові електрони і перетворюються в нейтральні атоми хлору, що відразу ж поєднуються попарно у молекули:



Атоми водню, що нейтралізувалися на катоді, поєднуються попарно у молекули H_2 :

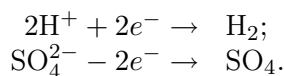


Отже, у процесі електролізу витрачається розчинена речовина, а на електродах виділяються газоподібні хлор і водень. Вторинних реакцій у цьому випадку не відбувається.

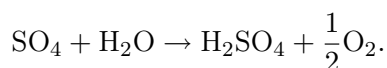
2. Електроліт – розчин сірчаної кислоти у воді. Молекула H_2SO_4 дисоціює у розчині на два позитивних однозарядних йони водню і двозарядний негативний йон SO_4^{2-} :



На електродах протікають наступні реакції:



Водень виділяється у виді пухирців на катоді. Нейтральна група атомів SO_4 хімічно дуже активна і вступає у вторинну реакцію. Якщо електроди виготовлені, наприклад, з платини чи нікелю, SO_4 реагує з водою:



Молекула сірчаної кислоти надходить у розчин, кисень виділяється у виді пухирців на аноді. У підсумку відбувається розкладання води з виділенням її складових частин. Вторинна реакція в цьому випадку протікає з розчинником.

Закони електролізу були встановлені експериментально Фарадеем у 1836 р. Перший з них зтверджує, що *кількість речовини, яка виділилася на електроді, пропорційна заряду, що пройшов через електроліт*:

$$m = Kq = K \int_0^t i \, dt, \quad (7.55)$$

де m — маса речовини, що виділилася, K — коефіцієнт, що залежить від природи речовини, його називають електрoхімічним еквівалентом. При $q = 1$ маса m чисельно дорівнює K . Отже, електрохімічний еквівалент являє собою масу речовини, що виділяється на електроді при проходженні через електроліт заряду, рівного одиниці.

Другий закон Фарадея зв'язує електрохімічний еквівалент K речовини з його хімічним еквівалентом A/z (A — атомна вага, z — валентність даної речовини)⁸. Цей закон говорить, що *електрохімічні еквіваленти всіх речовин пропорційні їхнім хімічним еквівалентам*. Коефіцієнт пропорційності пишуть у виді $1/F$. Величину F називають числом Фарадея. Вираз другого закону

⁸Хімічним еквівалентом елемента називається безрозмірна величина, чисельно рівна масі даного елемента, вираженої в грамах (чи в кілограмах), що заміщає в хімічних сполуках 1,0078 г (відповідно кг) водню.

Валентністю z елемента називається число атомів водню, що заміщається

Фарадея тепер виглядає так:

$$K = \frac{1}{F} \frac{A}{z}. \quad (7.56)$$

Підставивши (7.56) у формулу (7.55), об'єднаємо обидва закони і в результаті отримаємо, що

$$m = \frac{A}{z} \frac{q}{F}. \quad (7.57)$$

При q , чисельно рівному F , маса m чисельно збігається з A/z . Таким чином, для виділення на електроді кілограм-еквівалента чи грам-еквівалента будь-якої речовини потрібно пропустити крізь електроліт одну і ту саму кількість електрики, чисельно рівну F . Дослідним шляхом встановлено, що $F = 96,497 \cdot 10^6 \frac{\text{Кл}}{\text{кг-екв}}$.

Закони Фарадея зіграли важливу роль у встановленні атомної (тобто дискретної) природи електрики. Кілограм-еквівалент будь-якої речовини містить $N' = N_A/z$ атомів (N_A — число Авогадро). Отже, N_A/z йонів переносять заряд, рівний F . На долю кожного йона припадає заряд

$$e' = \frac{F}{N'} = \frac{F}{N_A} z. \quad (7.58)$$

Таким чином, заряд йона виявляється цілим кратним заряду

$$e = \frac{F}{N_A}, \quad (7.59)$$

котрий, очевидно, являє собою елементарний заряд.

Студент може переконатися сам в тому, що підстановка в (7.59) значення для F і $N_A = 6,02 \cdot 10^{26} \text{кмоль}^{-1}$ приводить до величини елементарного заряду $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{Кл}$.

в хімічних сполуках одним атомом даного елемента.

Для одновалентного елемента хімічний еквівалент дорівнює його атомній вазі. Для z -валентного елемента хімічний еквівалент дорівнює A/z .

Кількість елемента, маса якого, виражена в грамах, чисельно рівна хімічному еквіваленту, називається грам-еквівалентом. Кількість речовини, маса якої дорівнює A/z кілограмів, називається кілограм-еквівалентом.

Поняття хімічного еквівалента, а також грам-еквівалента і кілограм-еквівалента може бути поширене також на ті угруповання атомів, що виділяються при електролізі на електродах.

7.11 Електролітична провідність

При включенні електричного поля на хаотичний тепловий рух йонів накладається упорядкований рух – позитивних йонів у напрямку поля, негативних – проти напрямку поля. Розміри йонів (а тим більше сольватів) набагато більше розмірів електрона, тому молекули, які розташовані навколо йона, безупинно на нього впливають (нагадаємо, що рух електронів у металах в проміжках між зіткненнями з йонами ґратки можна було вважати вільним). Цей вплив приводить до того, що йон, подібно кульці в густому середовищі, зазнає при своєму русі опору, пропорційного швидкості. Отже, кожному значенню напруженості поля відповідає своє значення швидкості сталого рівномірного руху йонів u , яке визначається умовою

$$e'E = ku,$$

де e' – заряд йона, k – коефіцієнт пропорційності між швидкістю йона і силою опору середовища руху йона.

Таким чином, під дією поля напруженості E ; йон буде рухатися (у напрямку поля чи проти поля) з постійною швидкістю

$$u = \frac{e'}{k}E. \quad (7.60)$$

Зіставляючи цей вираз з формулою (7.22), бачимо, що відношення e'/k є не що інше, як рухливість йона b . Йони різних знаків можуть мати різний за величиною заряд e' , крім того, і коефіцієнт k для них буде різний. Тому йони різних знаків мають різну рухливість b .

Рухливість йона залежить від його природи і властивостей розчинника. З підвищенням температури рухливість росте. Це відбувається за рахунок того, що зменшується в'язкість середовища в якому рухається йон, але в ще більшому ступені це буває викликане тим, що при підвищенні температури зменшуються розміри сольватної оболонки, що оточує йон.

Рухливість йонів в електролітах дуже мала. При кімнатній температурі для водяних розчинів вона складає приблизно 10^{-8} — $10^{-7} \frac{\text{м/с}}{\text{В/м}}$. Рухливість електронів у металах приблизно на чотири порядки більша ($\sim 10^{-4} \frac{\text{м/с}}{\text{В/м}}$).

Рух йонів створює електричний струм, густина якого рівна

$$j = (n^+e^+b^+ + n^-e^-b^-) E, \quad (7.61)$$

де n^+ — кількість позитивних йонів в одиниці об'єму, e^+ — заряд, а b^+ — рухливість позитивних йонів, n^- , e^- і b^- — аналогічні величини для від'ємних зарядів (порівняйте з формулою (7.5)).

Величина, що знаходиться у дужках, не залежить від E . Отже, густина струму в електролітах пропорційна напруженості поля. Це означає, що закон Ома є справедливим для електролітів.

Якщо молекули дисоціюють на два йони, то $e^+ = e^- = e'$ і $n^+ = n^- = n' = \alpha n$ (кількості дисоційованих молекул). У цьому випадку

$$j = \alpha n e' (b^+ + b^-) E. \quad (7.62)$$

Вираз (7.62) справедливий лише на деякому віддаленні від електродів. У безпосередній близькості від електродів струм створюється йонами тільки одного знака: аніонами поблизу анода і катіонами поблизу катода. Відповідно до формули (7.62) провідність електроліту визначається наступним виразом

$$\sigma = \alpha n e' (b^+ + b^-). \quad (7.63)$$

Помножимо і поділимо цей вираз на $N' = \frac{N_A}{z}$ — кількість молекул у кілограм-еквіваленті розчиненої речовини:

$$\sigma = \alpha \frac{n}{N'} (e' N') (b^+ + b^-). \quad (7.64)$$

Добуток $e' N'$ дорівнює числу Фарадея F . Відношення n/N' дає кількість кілограм-еквівалентів розчиненої речовини в одиниці об'єму розчину; його називають еквівалентною концентрацією розчиненої речовини. Позначимо цю концентрацію буквою η , тоді виразу для провідності електроліту можна надати наступний вид:

$$\sigma = \alpha \eta F (b^+ + b^-). \quad (7.65)$$

При підвищенні температури коефіцієнт дисоціації α і рухливість йонів збільшуються. Тому провідність електролітів σ зростає з температурою. Залежність провідності від концентрації виявляється досить складною. Це викликано тим, що σ залежить від η і безпосередньо, і через α . При малих концентраціях, коли $\alpha \approx 1$ (див. формулу (7.53)), σ росте пропорційно η . Надалі зі збільшенням η починає зменшуватись коефіцієнт дисоціації α ; тому ріст провідності сповільнюється, а потім вона навіть починає зменшуватися.

7.12 Технічні застосування електролізу

Електроліз знаходить найрізноманітніші технічні застосування. Охарактеризуємо коротенько деякі з них.

1. Гальванопластика. У 1837 р. Б.С.Якобі застосував електроліз для виготовлення металевих зліпків з рельєфних моделей. Модель з воску чи якого-небудь іншого пластичного матеріалу покривається для створення провідного шару графітовим порошком і потім включається як катод при електролізі. Електролітом служить розчин солі, що містить метал, з якого хочуть одержати зліпок. Метал відкладається на катоді у виді шару, що точно відбиває рельєф моделі. Отриманий зліпок легко відокремлюється від катода. Таким способом іноді виготовляються типографські кліше.

2. Гальваностегія. За допомогою електролізу наносять на поверхню металевих виробів тонкий шар іншого металу. Це робиться у декоративних цілях (золочення, сріблення, платикування), а також для створення антикорозійних покриттів (нікелювання, хромування, кадміювання і т.і.).

3. Електрометалургія. Шляхом електролізу розплавлених руд одержують алюміній, натрій, магній, берилій і деякі інші метали. Наприклад, сировиною для одержання алюмінію служать боксити – мінерали, що містять глинозем (Al_2O_3). У якості електродів застосовуються вугільні пластини. Руда підтримується у розплавленому стані за рахунок тепла, що виділяється при проходженні струму.

Електроліз застосовують також для рафінування (тобто очищення) металів. Для цього пластина з металу, що очищається, включається як анод відповідної електролітичної ванни. Електролітом служить розчин солі металу, що очищається. При належному виборі напруги виділятися на катоді буде лише даний метал, а домішки випадуть у виді осаду. Таким шляхом одержують, наприклад, дуже чисту мідь, що називається електролітичною.

4. Електролітичне полірування. Кількість речовини, що осаджується на електроді або переходить з електрода в розчин, пропорційна густині струму. У виступів, як ми знаємо, напруженість поля більша, отже, у цих місцях більша і густина струму; у заглибленнях густина струму, навпаки, буде менша. Тому, якщо виріб із шорсткуватою поверхнею зробити анодом відповідним чином обраної електролітичної ванни, то з виступів буде переходити в розчин більше металу, чим із заглиблень, і шорсткості будуть згладжуватися. На цьому принципі ґрунтується електрополірування металів.

5. Одержання важкої води. Важкою водою (D_2O) назива-

ється вода, у якій атоми водню заміщені атомами дейтерію (D) - ізоотопу водню з атомною вагою 2. Важка вода присутня в невеликій кількості в звичайній воді. Йони D^+ володіють меншою рухливістю, ніж йони H^+ . Тому у газі, що виділяється при електролізі, важкий водень присутній у відносно меншій кількості, ніж у вихідній воді; в електроліті ж концентрація важкої води підвищується. Якщо робити електроліз досить довго, можна одержати воду з високим змістом молекул D_2O .

6. Електролітичні конденсатори. Якщо в розчин борного лугу (суміші борної кислоти й аміаку) занурити алюмінієві електроди і прикласти до них напругу, то анод швидко покривається дуже тонким непровідним шаром окислів алюмінію і струм припиняється. Ізолюючий шар підтримується за рахунок електролізу і при зміні полярності зникає. Таким чином, анод і електроліт виявляються розділеними найтоншим шаром ізолятора й утворюють конденсатор дуже великої ємності (ємність конденсатора обернено пропорційна відстані між обкладками).

У "сухих" електролітичних конденсаторах електроліт виготовляють у виді густої пасти і просочують їм паперову прокладку, що поміщається між обкладками. Подібні конденсатори при невеликих розмірах мають ємність порядку сотень мікрофарад. При їхньому включенні необхідно строго дотримувати позначену полярність. Якщо електрод із шаром, що утворився на ньому, окисла підключити до мінуса кола (тобто в зворотному напрямку), то ізолюючий шар зникне і сила струму різко зросте, що приведе до руйнування конденсатора. Кожен такий конденсатор буває розрахований на визначену граничну напругу, при перевищенні якої ізолюючий шар пробивається і конденсатор виходить з ладу.

7.13 Запитання для самоконтролю

- 1 Що називається густиною струму?
- 2 Запишіть закон Ома в диференціальній формі.
- 3 Що називають рухливістю електронів?
- 4 В чому полягає принцип заборони Паулі?
- 5 Що називається забороненою зоною (зоною провідності, валентною зоною)?
- 6 Що називають рівнем Фермі? Де розташований рівень Фермі в металах, діелектриках і напівпровідниках?

- 7 Який зміст має ефективна маса?
- 8 Поясніть температурну залежність електропровідності металів.
- 9 Що називається фононом?
- 10 Що називається діркою?
- 11 Поясніть власну і домішкову провідність напівпровідників.
- 12 Поясніть встановлення рівноважного стану під час дисоціації молекул.
- 13 Що називають водневим показником?
- 14 Сформулюйте закони Фарадея.
- 15 Опишіть технічне застосування електролізу.

Приклад 1. Визначити середню швидкість напрямленого руху електронів у металічному провіднику перерізом 50 мм^2 , через який протікає струм силою 12 А , якщо концентрація вільних електронів у провіднику $5 \cdot 10^{27} \text{ м}^{-3}$.

З точки зору класичної електронної теорії металів (див. (7.19)) густина струму $j = en\bar{u}$. Помноживши обидві частини рівняння на площу поперечного перерізу S , отримаємо силу струму:

$$I = en\bar{u}S,$$

звідки

$$\bar{u} = \frac{I}{enS} = 3 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Приклад 2. При нікелюванні виробу його поверхню покрили шаром нікелю товщиною $0,5 \text{ мм}$. Визначити середню густину струму, якщо нікелювання відбувалося протягом $2,5 \text{ год}$.

Згідно законів Фарадея (див. (7.57)) заряд q , що пройшов через електрод, рівний

$$q = \frac{mzF}{A},$$

де m — маса виділеного на електроді елемента, z — його валентність, A — атомна вага, F — число Фарадея.

Підклавши сюди

$$m = \rho hS,$$

де ρ — густина нікелю, S — площа нікельованої поверхні, отримаємо

$$q = \frac{\rho hS z F}{A} = It = jSt; \quad j = \frac{\rho h z F}{At} = 160 \frac{\text{А}}{\text{м}^2}.$$

Розділ 8

Основні питання і закони оптики

Електромагнітна природа світла; додавання світлових коливань. Когерентність та інтерференція; застосування інтерференції в науці і техніці; явище дифракції; принцип Гюйгенса-Френеля; поляризація світла; основні поняття та закони геометричної оптики, повне внутрішнє відбивання.

Оптика поділяється на фізичну і геометричну (рис. 8.1). Фізична оптика вивчає природу і властивості світла, характер його поширення в ізотропних та анізотропних середовищах і взаємодію світла з речовиною. Геометрична оптика розглядає коло практичних питань, які можна задовільно розв'язати геометричним шляхом, використовуючи закони, в основі яких лежить принцип прямолінійного поширення світла і аналогія з класичною механікою, встановлена Гамільтоном (1828 р.). Природа випромінювання світла в геометричній оптиці до уваги не береться.

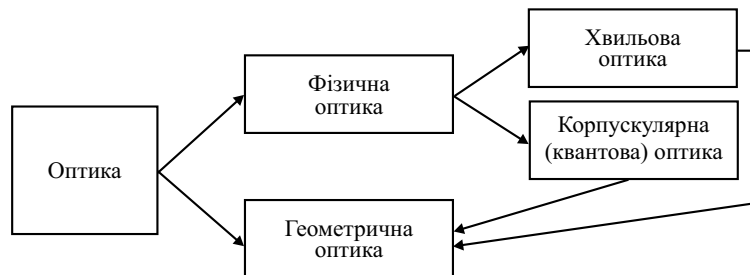


Рисунок 8.1

Однак існує цілий ряд оптичних явищ, які можна пояснити тільки з врахуванням природи світлових випромінювань. Це явища дифракції, інтерференції, дисперсії тощо. Всі ці і ряд інших явищ можна пояснити тільки з позицій фізичної оптики, яка розглядає світловий процес випромінювання як поширення електромагнітних хвиль. Цю частину фізичної оптики називають *хвильовою оптикою*. Поряд з цим існує чимало оптичних явищ, які з точки зору хвильової оптики пояснити важко або взагалі неможливо. Це - фотоефект, люмінесценція, ефект Комптона тощо. Ці і їм подібні явища можна пояснити, використовуючи уявлення, що

світло – це потік частинок – фотонів. Частина фізичної оптики, в основі якої лежить ідея про корпускулярну (квантову) природу світла називається *корпускулярною (квантовою) оптикою*. В фізичній оптиці вперше була з'ясована корпускулярно-хвильова єдність властивостей світла, яка знайшла своє відображення в ідеї корпускулярно-хвильового дуалізму світла (Ейнштейн, 1905-1917рр.), узагальненої пізніше на всі види матерії, включаючи речовину (де Бройль, 1923 р.). Геометрична оптика, яка допускає формулювання за аналогією з класичною корпускулярною механікою, є наближеним, частинним випадком хвильової оптики.

8.1 Електромагнітна природа світла

Основу вчення про електромагнітне поле заклав Фарадей. Подальший розвиток вчення про електромагнітне поле привело Максвелла в 1865 р. до встановлення основних законів для процесів, що відбуваються в змінних електричних та магнітних полях. *Найважливішим висновком теорії електромагнітного поля, розробленої Максвеллом, є те, що у вільному просторі електромагнітні хвилі поширюються з швидкістю світла.* На основі цього Максвелл створив електромагнітну теорію світла, згідно якої світло – це електромагнітні хвилі з малою довжиною. В 1888 р. Герц експериментально одержав електромагнітні хвилі у вільному просторі, а російський фізик Попов та італійський інженер Марконі у 1895 р. використали їх для бездротового телеграфу.

Якщо в якійсь частині простору відбувається нестационарний рух електричних зарядів, то він зумовлює появу змінних електричних і магнітних полів, тобто викликає збудження електромагнітних хвиль. Виникнувши, електромагнітні хвилі можуть існувати самі собою, поширюючись з швидкістю v . На рис. 8.2 зображена

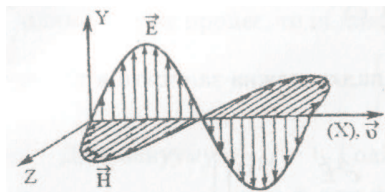


Рисунок 8.2

плоска електромагнітна хвиля. Процес поширення електромагнітних хвиль описується рівняннями Максвелла, які встановлюють

зв'язок між зміною в часі і просторі векторів напруженості електричного $\mathbf{E}$ і магнітного $\mathbf{H}$ полів. Якщо вибрати розміщення векторів $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ і $\mathbf{v}$ так, як на рис. 8.2, то рівняння Максвелла матимуть такий вигляд:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x} = -\epsilon\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (8.1)$$

де ϵ і μ — відповідно діелектрична і магнітна проникності середовища, ϵ_0 і μ_0 — електрична і магнітна стала відповідно.

Якщо перше рівняння продиференціювати по x , а друге по t , то після виключення з рівнянь мішаних похідних одержимо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} &= 0. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Рівняння (8.2) в загальному випадку можна записати в такому вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (8.3)$$

Рівняння (8.3) називаються *хвильовими рівняннями* (див. формули (6.8), (6.9)). Процеси, які описуються рівняннями (8.1), (8.2) і (8.3) мають хвильовий характер, частинним розв'язком яких є:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \right], \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \right], \quad (8.4)$$

Вирази (8.4) являють собою *рівняння плоскої гармонічної (монохроматичної) хвилі* (див. формулу (6.3)), яка поширюється вздовж вісі X з амплітудою $\mathbf{E}_0$ ($\mathbf{H}_0$), частотою $\omega = 2\pi/T$ (T — період) і швидкістю $\mathbf{v}$ ($v_x = v$, $v_y = v_z = 0$).

Порівнявши рівняння (8.3) з рівнянням (6.8); одержимо

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}}. \quad (8.5)$$

Для вакууму $\epsilon = \mu = 1$. Тоді

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}} = c. \quad (8.6)$$

Звідси випливає, що *швидкість поширення світла і швидкість поширення електромагнітних хвиль у вакуумі однакові*. Це дало можливість Максвеллу ототожнити світлові хвилі з електромагнітними. Так виникла електромагнітна теорія світла, згідно якої світлові хвилі є електромагнітними хвилями малої довжини. Враховуючи (8.5) і (8.6) швидкість поширення світлової хвилі в середовищі буде дорівнювати

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}. \quad (8.7)$$

У випадку неферомагнітних середовищ ($\mu = 1$)

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} \quad \text{або} \quad \sqrt{\epsilon} = \frac{c}{v} = n, \quad (8.8)$$

де n — абсолютний показник заломлення середовища. Останню рівність у вигляді

$$\sqrt{\epsilon} = n, \quad (8.9)$$

називають законом Максвелла. Математичними перетвореннями можна встановити зв'язок між $\mathbf{E}$ і $\mathbf{H}$ електромагнітної (світлової) хвилі:

$$\sqrt{\mu \mu_0} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \sqrt{\epsilon \epsilon_0} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (8.10)$$

або

$$\sqrt{\mu \mu_0} \mathbf{H} = \sqrt{\epsilon \epsilon_0} \mathbf{E}. \quad (8.11)$$

Для вакууму $\epsilon = \mu = 1$. Тоді

$$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \mathbf{E}. \quad (8.12)$$

Для діелектрика $\mu = 1$. Тоді

$$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_0}{\mu_0}} \mathbf{E}. \quad (8.13)$$

Останні співвідношення показують, що $\mathbf{E}$ і $\mathbf{H}$ пов'язані між собою лінійною залежністю. Причому вони змінюються так, що

одночасно проходять через максимум і мінімум (рис. 8.2). Слід мати на увазі, що вектори $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ і $\mathbf{v}$ (напрямок поширення хвилі) завжди складають у вільній хвилі правий гвинт. Із цього випливає, що електромагнітна хвиля поперечна. Хвилю, яка вільно поширюється у просторі, називають *біжучою хвилею*.

Таким чином, Максвелл, спираючись на ідеї Фарадея про електричне і магнітне поля, узагальнив закони, встановлені експериментально, розробив досконалу теорію єдиного електромагнітного поля. Ця теорія мала велике значення для розвитку класичної фізики. Вона дала змогу охопити велике коло явищ, починаючи від електричного поля нерухомих зарядів і закінчуючи електромагнітним полем і світловим, зокрема.

Підсумовуючи вище сказане, можна зробити такі висновки:

1. Електромагнітні хвилі поширюються в просторі із швидкістю світла $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$, а світлові хвилі можна розрізняти, як частковий випадок електромагнітних хвиль малої довжини.
2. Електромагнітні хвилі (а значить і світлові) поперечні.
3. Вектори $\mathbf{E}$ і $\mathbf{H}$ електромагнітної хвилі ортогональні.
4. Зв'язок між оптичними, електричними і магнітними константами здійснюється (виражається) за законом Максвелла

$$n = \sqrt{\epsilon\mu} = \frac{c}{v}. \quad (8.14)$$

8.2 Додавання світлових коливань. Когерентність та інтерференція

Для розрахунку результату при додаванні світлових хвиль застосовують три різні методи, які умовно можна назвати алгебраїчним (тригонометричним), векторним і комплексним. В кожному окремому випадку вибір методу визначається математичною зручністю і простотою його використання. Кожен метод при правильному застосуванні повинен призвести до одного й того ж результату.

Векторний метод ми застосовували у 5-й лекції (див. рис 5.4), коливання описували умовним вектором амплітуди коливань, довжина якого чисельно рівна значенню амплітуди, а кут, що утворює цей вектор з горизонтальною віссю, рівний фазі коливань в будь-який момент часу. При додаванні таких векторів за теоре-

мою косинусів ми мали результат (формули (5.17, стор. 83)):

$$E_0^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02}\cos(\phi_1 - \phi_2),$$

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{E_{01} \sin \phi_1 + E_{02} \sin \phi_2}{E_{01} \cos \phi_1 + E_{02} \cos \phi_2}. \quad (8.15)$$

Для будь-якого числа синхронних коливань результуюче коливання знаходимо аналогічно, як векторну суму:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 + \dots + \mathbf{E}_n. \quad (8.16)$$

З енергетичної точки зору світло часто характеризують інтенсивністю I , яка визначається густиною потоку енергії і пропорційна квадрату амплітуди електричного поля світлової хвилі $I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_0}{\mu \mu_0}} E_0^2$. Тоді, згідно (8.15)

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\phi_2 - \phi_1), \quad (8.17)$$

де I_1 і I_2 — інтенсивності світлових коливань, які накладаються, I — результуюча інтенсивність.

Із (8.17) видно, що результуюча інтенсивність світла не дорівнює сумі інтенсивностей двох хвиль. Результат визначається різницею фаз $\phi_2 - \phi_1$ і може бути рівним сумі інтенсивностей $I = I_1 + I_2$, лише коли $\cos(\phi_2 - \phi_1) = 0$.

Обчислимо середнє значення квадрата амплітуди результуючого коливання за деякий проміжок часу t . Із формули (8.15)

$$\langle E_0^2 \rangle = \frac{1}{t} \int_0^t E_0^2 dt = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02} \frac{1}{t} \int_0^t \cos(\phi_2 - \phi_1) dt. \quad (8.18)$$

Якщо $\phi_2 - \phi_1 = \text{const}$, тобто незмінна в часі величина в певній точці спостереження, то

$$\frac{1}{t} \int_0^t \cos(\phi_2 - \phi_1) dt = \cos(\phi_2 - \phi_1) = \text{const}, \quad (8.19)$$

а значить

$$\langle E_0^2 \rangle = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02} \cos(\phi_2 - \phi_1). \quad (8.20)$$

Переходячи до інтенсивності матимемо:

$$\langle I \rangle = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\phi_2 - \phi_1), \quad (8.21)$$

тобто

$$\langle I \rangle \neq I_1 + I_2. \quad (8.22)$$

Вираз (8.22) означає, що *при сталості різниці фаз хвиль, які додаються, результуюча інтенсивність буде відмінною (більшою або меншою в залежності від конкретного значення різниці фаз) від суми інтенсивностей окремих коливань*. Коливання, які задовільняють умовам, при яких різниця фаз залишається сталою величиною, називаються *когерентними*.

Таким чином, необхідною умовою виникнення інтерференції є сталість різниці фаз ($\phi_2 - \phi_1 = \text{const}$) інтерферуючих хвиль, тобто хвилі повинні бути когерентними. Однак, щоб ця умова перетворилася в достатню, необхідно ще, щоб частоти інтерферуючих світлових хвиль були рівними ($\omega_1 = \omega_2$), а вектори $\mathbf{E}_1$ і $\mathbf{E}_2$ не були взаємно перпендикулярними ($\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \neq 0$).

При хаотичних змінах різниці фаз двох коливань, коли вона протягом часу t набуває випадкових значень від 0 до 2π ,

$$\frac{1}{t} \int_0^t \cos(\phi_2 - \phi_1) dt = 0. \quad (8.23)$$

Тоді $\langle E_0^2 \rangle = E_{01}^2 + E_{02}^2$, тобто

$$\langle I \rangle = I_1 + I_2. \quad (8.24)$$

Як видно із (8.24), *при хаотичній зміні різниці фаз відбувається просте додавання інтенсивностей, тобто явище інтерференції не спостерігається*. Подібні коливання називаються *некогерентними*. Отже, при накладанні двох коливань однієї частоти потрібно розрізняти два випадки:

а) В першому випадку різниця фаз коливань зберігається сталою протягом всього часу спостереження. Середня інтенсивність результуючого коливання в цьому випадку відрізняється від суми середніх інтенсивностей складових коливань і може бути як більшою, так і меншою, залежно від різниці фаз. Наприклад, якщо $\phi_2 - \phi_1 = 2k\pi$, $\cos(\phi_2 - \phi_1) = 1$ (де $k = 0, 1, 2, \dots$), то *результуюча інтенсивність є максимальною*, тобто $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$. Якщо ж $\phi_2 - \phi_1 = (2k + 1)\pi$, $\cos(\phi_2 - \phi_1) = -1$, то *результуюча інтенсивність буде мінімальною*: $I = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$. При проміжних значеннях $\phi_2 - \phi_1$ інтенсивність матиме проміжні значення.

Накладання когерентних світлових хвиль, при якому результуюча інтенсивність залежить від різниці фаз і відрізняється від

суми інтенсивностей окремих коливань, називається інтерференцією світлових хвиль. Із формули (8.21) видно, що явище інтерференції зумовлюється її третім доданком $2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\phi_2 - \phi_1)$ у зв'язку з чим він отримав назву інтерференційного члена. Оскільки різниця фаз залежить від координат точки спостереження, *інтерференційна картина характеризується чергуванням у просторі стійких максимумів і мінімумів освітленості.*

Для кількісної оцінки якості інтерференційної картини вводиться *параметр видимості* V , запропонований Максвеллом. Іноді його називають просто контрастом. Він визначається так:

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \quad (8.25)$$

де $I_{\max}$ і $I_{\min}$ — максимальна і мінімальна інтенсивності інтерференційних смуг. Для знаходження функції видимості необхідно виміряти $I_{\max}$ і $I_{\min}$, а потім знайти V за формулою (8.25).

У випадку некогерентних джерел світла інтерференційна картина не спостерігається: $I_{\max} = I_{\min}$ і $V = 0$.

При використанні когерентних джерел світла і за умови, що $E_{01} = E_{02}$, контрастність буде максимальною, бо при $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = (2k + 1)\pi$, $I_{\min} = 0$. Якщо інтерференційна картина утворюється частково когерентними світловими хвилями, то контрастність її буде погана.

Виникнення інтерференційних максимумів і мінімумів у світловому полі не суперечить закону збереження і перетворення енергії. У випадку інтерференції відбувається просторовий перерозподіл світлової енергії, в результаті чого в одних місцях простору густина енергії збільшується (максимуми), в інших - зменшується (мінімуми), а загальний запас енергії в просторі залишається незмінним.

б) В другому випадку різниця фаз коливань, які додаються, змінюється довільним чином (хаотично) протягом часу спостереження. Це означає, що необхідна умова не виконується, коливання вважаються некогерентними. Інтерференція в звичайному розумінні спостерігатися не буде, оскільки, як уже відмічалось вище, середнє значення $\cos(\phi_2 - \phi_1) = 0$, а це означає, що в кожній точці спостереження інтенсивність буде одна і та ж: $I = I_1 + I_2$.

8.3 Застосування інтерференції в науці і техніці

За допомогою інтерференції з великою точністю $[(0.05 - 0.025)\lambda$ - для двопроменевої, і $0,001\lambda$, - для багатопроменевої інтерференції]

вимірюють довжину світлової хвилі, лінійні розміри тіл та їх зміну під впливом різних фізичних процесів, показники заломлення і малі їх різниці (до 10^{-6}); оцінюють якість шліфування і полірування поверхонь ($\sim \frac{1}{4}\lambda$); вимірюють малі кути ($2\text{-}10''$) та кутові розміри небесних тіл тощо.

Інтерференційні вимірювання проводять за допомогою візуальних, фотографічних і фотоелектричних методів реєстрації інтерференційної картини.

Дослідження якості поверхонь. В оптичній промисловості до поверхонь оптичних деталей при їх виготовленні пред'являють дуже високі вимоги. Плоскі поверхні дзеркал, пластин і призм або сферичні поверхні дзеркал і лінз не повинні відступати від ідеальних геометричних поверхонь на десятки і навіть соті частки довжини хвилі. Схема установки, за допомогою якої досліджують гладкість поверхні наведена на рис. 8.3, а, де S – джерело світла, ZZ' – напівпрозора пластинка, L – лінза, яка дає паралельний пучок світла, яким освітлюється досліджувана пластинка A'B' та еталонна пластинка АВ, поверхня якої відступає від ідеально геометричної площини не більше ніж на 0.05λ . Досліджувану поверхню A'B' притискають до еталона АВ так, щоб між ними утворився тонкий прошарок, на якому утворюються смуги однакової товщини. Якщо поверхні обидвох пластинок ідеально плоскі, то між ними утворюється тонкий повітряний шар у вигляді клина, якщо з одного боку пластинки стиснуті сильніше, ніж з протилежного. Смуги рівної товщини, які утворюються на такому повітряному клині, будуть мати вигляд прямих, паралельних ребру клина. Будь-яке відхилення від правильної площини призведе до викривлення інтерференційних смуг. На рис. 8.3, подано вигляд інтерференційних смуг при наявності горба (б) і западини (в). За величиною і напрямком викривлень можна судити про розміри виступів і западин досліджуваної поверхні з точністю до 0.01 мкм . Якщо натискати почергово то на один, то на другий край пластинок, змінюючи цим самим положення повітряного клина, можна достатньо швидко дослідити якість поверхні у всіх напрямках. Для того, щоб підвищити точність контролю якості поверхонь, можна використати багатопроменеву інтерференцію від повітряного прошарку. Для цього необхідно на поверхню досліджуваної пластинки і поверхню еталонної пластинки нанести тонкий напівпрозорий шар срібла. Завдяки багатократному відбиванню виникнуть більш вузькі і різкі інтерференційні смуги, які можуть підвищити точність вимірювань до 0.003 мкм .

Вимірювання малих кутів. При вимірюванні малих кутів застосовують різні методи, що ґрунтуються на інтерференцій-

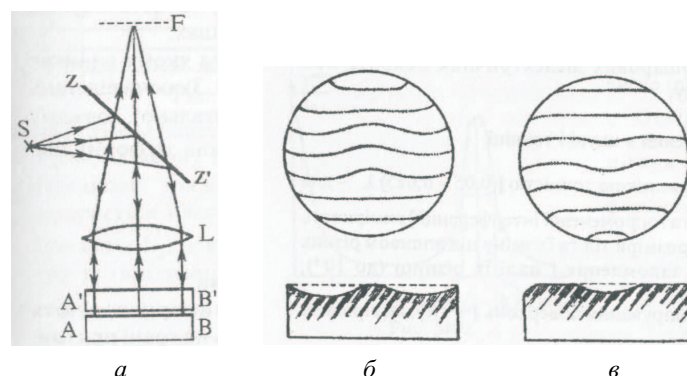


Рисунок 8.3

них явищах. Для вимірювання малих кутів, наприклад, клина, на якому виникає інтерференційна картина, можна скористатися рис. 8.4, а. Знаючи відстань l між сусідніми максимумами (l визначається експериментально), довжину хвилі λ і показник заломлення n матеріалу клина можна за формулою визначити кут α :

$$\sin \alpha = \frac{\lambda}{2nl}.$$

Подібним методом визначають малі кути між площинами.

Для контролю правильності кутів у призмах використовують стандартний скляний двогранний кут, який накладають на грані призми. Між гранями призми і площинами двогранного кута виникають повітряні прошарки (клини). За інтерференційною картиною, яка виникає на повітряних прошарках, можна судити про правильність кутів призми.

Контроль кінцевих мір і вимірювання малих довжин. У механічних цехах в машинобудуванні широко використовують точні стандарти, так звані кінцеві міри або плитки Йогансона. Кінцеві міри – це сталі плитки, дві протилежні сторони яких добре відполіровані і строго паралельні одна одній. Відстань між цими поверхнями називається довжиною кінцевої міри. Якщо покласти одну плитку на другу і дещо їх притиснути, то їх в подальшому важко роз'єднати, настільки щільно вони прилягають одна до одної. Точність, з якою виготовляються вимірювальні плитки, дуже висока. Так, наприклад, кінцева міра довжиною 100 мм повинна бути зроблена з похибкою, значно меншою (0,3 мкм), ніж

середня довжина світлової хвилі (0,5 мкм).

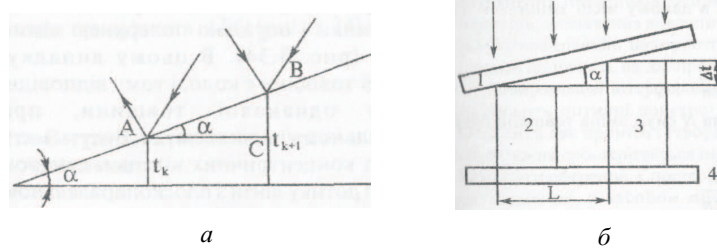


Рисунок 8.4

Ясно, що для досягнення такої великої точності при виготовленні кінцевих мір їхню довжину перевіряють інтерференційними методами за допомогою еталонної плитки.

Найпростіший метод ґрунтується на використанні інтерференції на клині. Спочатку кінцеві міри перевіряють на відхил від ідеальної площини і плоскопаралельність. Якщо протилежні площини відповідають стандарту ідеальності, то плитки калібрують за допомогою такого методу: дві кінцеві міри (плитки 2 і 3), одна із яких є еталонною, притискають до пробного скла або сталюї плити (4) і прикривають іншим пробним склом (або кварцевою пластинкою) (1) (рис. 8.4, б). Як правило, верхня пластинка опирається на кожну із пластинок тільки в одній точці. Тоді між поверхнею пластинки і поверхнями кінцевих мір утвориться повітряний клин, на якому при монохроматичному освітленні утворюються смуги однакової товщини. Знаючи відстань L між ребрами плиток, на які опирається пластинка, число інтерференційних максимумів на одиниці довжини N_0 , довжину хвилі λ , можна знайти різницю довжин кінцевих мір за тангенсом кута α клина:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta t}{L} = \frac{\lambda/2}{1/N_0}; \quad \Delta t = L \frac{N_0 \lambda}{2} = \frac{N \lambda}{2},$$

де N — кількість інтерференційних смуг на відстані L .

Для калібрування еталонної кінцевої міри існує чимало різних методів з використанням інтерферометрів (Майкельсона, Фабрі-Перо тощо).

Вимірювання малих змін довжин. Малі зміни довжини можна визначити також, користуючись інтерференцією на клиноподібному шарі рідини чи газу, який утворюється між двома клиноподібними або плоскопаралельними поверхнями.

Відомо, що різниця ходу в місці утворення світлої смуги дорівнює

$$\Delta_1 = 2t_1n - \frac{\lambda}{2} = k\lambda.$$

Якщо товщину клина змінювати, зміщуючи одну із поверхонь паралельно самій собі, то спостерігатимемо зміщення світлої смуги в бік ребра клина. Коли різниця ходу набуде значення $(k+1)\lambda$ замість $k\lambda$, в розглядуваному місці знову розміститься світла смуга. Це буде мати місце при виконанні умови

$$\Delta_2 = 2t_2n - \frac{\lambda}{2} = k\lambda.$$

Із останніх двох рівностей випливає, що при зміщенні інтерференційної картини на одну смугу, товщина клина в даному місці змінилась на величину

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\lambda}{2n}.$$

При зміщенні інтерференційної картини на N смуг, зміна товщини буде рівною:

$$t_{N+1} - t_1 = N \frac{\lambda}{2n},$$

де n — показник заломлення середовища клина. Оскільки довжина хвилі λ є величина порядку $5 \cdot 10^{-5}$ см, то за таким методом можна виміряти зміну довжини порядку 10^{-5} см. Зазначений метод використовується, наприклад, для точного вимірювання коефіцієнта теплового розширення тіл. Для цього застосовують прилад, який називають *інтерференційним дилатометром* (рис. 8.5). Прилад складається з кільця плавленого кварцу KK' (його термічні властивості добре відомі), на якому лежить еталонна плоскопаралельна пластинка AB . В середині кільця вміщується досліджуване тіло R , нижня і верхня поверхні якого добре відполіровані. Між поверхнями пластинки AB і тіла R утворюється клиноподібний повітряний прошарок. При освітленні приладу зверху спостерігаються смуги однакової товщини.

При нагріванні приладу внаслідок відмінності в коефіцієнтах розширення тіла R і кільця KK' товщина повітряного клина змінюється, завдяки чому відбувається зміщення інтерференційних смуг. Вимірявши величину зміщення, можна визначити зміну розмірів тіла і, значить, вирахувати коефіцієнт його теплового розширення.

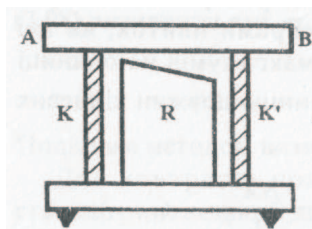


Рисунок 8.5

Інтерференційний метод використовується також для вимірювання малих довжин, викликаних різними іншими причинами: механічними розтягами, згинами тощо.

8.4 Явище дифракції

Одним із основних законів геометричної оптики є закон прямолінійного поширення світла в однорідному середовищі. Переколивим підтвердженням прямолінійності поширення світла може служити утворення тіні позаду непрозорої перешкоди, яка знаходиться на шляху поширення світла. Прямолінійність поширення світла легко пояснювала корпускулярна теорія Ньютона.

Однак, досвід свідчить, що прямолінійність поширення світла не є універсальним законом. Він порушується при проходженні світла через достатньо вузькі щілини і отвори, а також при освітленні невеликих непрозорих перешкод.

З принципів геометричної оптики випливає, що чим менший отвір діафрагми, тим менша буде світла смуга на екрані. Здавалося б, що якщо отвір зменшувати до мізерно малого, то можна в такий спосіб отримати як завгодно малу світлу смугу на екрані. Проте досвід дає протилежний результат: починаючи з певної величини отвору, подальше його зменшення викликає не зменшення світлої смуги на екрані, а її збільшення (рис. 8.6). При цьому смуга втрачає свою різкість, стає розпливчастою і освітленою нерівномірно, на ній виникають світлі і темні кільця, які заповнюють область $A'B'$. Описане явище називають дифракцією світла. *Воно полягає у відхиленні світлових хвиль від прямолінійного поширення.* Явище дифракції властиве будь-яким хвилям, незалежно від їх природи.

Прихильники корпускулярної теорії світла пробували пояснити відхилення світлових променів від прямолінійності тим, що ча-

Рисунок 8.6

стинки світла притягаються краями екрана. Однак Френель, один із творців хвильової теорії світла, експериментально спростував таку спробу.

8.5 Принцип Гюйгенса-Френеля

Завдання теорії дифракції полягає в тому, щоб за даним розташуванням і формою тіл (і розташуванням джерел світла) визначити розподіл електромагнітного поля у всьому просторі. Точне і послідовне розв'язання цієї складної задачі є можливим тільки шляхом розв'язку хвильового рівняння, яке впливає з рівнянь Максвелла, із відповідними граничними умовами на поверхні тіл, залежними ще і від оптичних властивостей матеріалу. Це вдається зробити лише в окремих випадках внаслідок значних математичних труднощів. Для багатьох практичних випадків достатнім виявляється наближений метод розв'язку задачі про розподіл світла біля межі між світлом і тінню. Цим методом ми зобов'язані Х.Гюйгенсу (1687 р.) та його узагальненням - О.Ж.Френелю (1815 р.) (принцип Гюйгенса-Френеля). Цей метод є застосовним у випадках слабого відхилення від геометричної оптики. Тим самим припускається, по-перше, що усі розміри є великі порівняно з довжиною хвилі (це стосується як розмірів екранів або отворів в них, так і відстаней від тіл до точок випромінювання і спостереження світла); по-друге, розглядаються лише невеликі відхилення світла від напрямку променів, які визначаються геометричною оптикою.

Гюйгенс розглядав процес поширення світла як послідовне збурення ефіру, в якому воно поширюється. Кожна точка світлової поверхні (хвильового фронту) є, за Гюйгенсом, самостійним джерелом випромінювання елементарних вторинних хвиль, які

поширюються із швидкістю світла. При цьому зворотні елементарні хвилі вважаються відсутніми. Нове положення хвильового фронту у будь-який наступний момент часу є огиноюча поверхня до таких хвиль (рис. 8.7, а, б). Перпендикуляри до фронту вказують напрямки поширення хвилі. З рис. 8.7 видно "механізм" огинання світловими хвилями перешкод. Дифраговані промені заходять в область геометричної тіні. Таким чином, виходячи з принципу Гюйгенса, можна легко пояснити цілий ряд явищ,

Рисунок 8.7

зокрема, заходження світла в область геометричної тіні, але при цьому залишається не з'ясованим питання про розподіл енергії вздовж хвильового фронту. У принципі Гюйгенса не бралися до уваги фазові співвідношення між вторинними хвилями.

Цей недолік було усунуто Френелем, який повністю прийняв принцип Гюйгенса і доповнив його таким твердженням: *вторинні джерела еквівалентні первинному і вони когерентні*. Їхні фази визначаються збудженням, яке йде від первинного джерела. Отже, хвилі, що виходять від вторинних джерел, *інтерферують*. Сформульований вище принцип Гюйгенса разом з доповненням Френеля називається принципом Гюйгенса-Френеля. На його основі можна дістати розподіл інтенсивності і для вільного поширення світлових хвиль, і при наявності перешкод на їх шляху.

8.6 Поляризація світла

Світло являє собою електромагнітні коливання. Звідси безпосередньо випливає, що світлові хвилі поперечні.

Відмінність між поперечними і поздовжніми хвилями можна пояснити на наочному механічному прикладі (рис. 8.8).

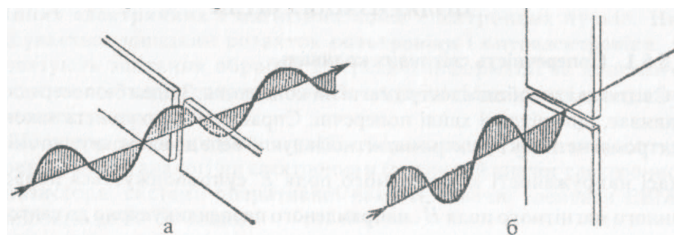


Рисунок 8.8

Біжучі по вірвовці хвилі вільно проходять через вертикальну щілину (рис. 8.8, а). Якщо щілину повернути на 90° , то коливання будуть погашені повністю (рис. 8.8, б). Поздовжні ж хвилі в обидвох випадках проходять через щілину вільно і ніяких змін не зазнаватимуть.

Зрозуміло, що для експериментального виявлення асиметрії світлових хвиль подібні механічні щілини непридатні.

Електромагнітні хвилі, як уже було сказано, поперечні. Однак, разом з тим світлові хвилі в звичайних умовах не виявляють асиметрії відносно напрямку поширення променя. Це зумовлено тим, що світлові хвилі, які випромінюються тілами, являються результатом тих окремих хвиль, що випромінюються його атомами (елементарними вібраторами). Оскільки окремі атоми безперерв-



Рисунок 8.9

но змінюють свою просторову орієнтацію, то змінюються з великою частотою і напрямки коливань вектора $\mathbf{E}$ окремих хвиль світлового променя (рис. 8.9).

Вектор $\mathbf{E}$ багато мільярдів разів за секунду міняє напрямок своїх коливань. Тому в результуючій хвилі коливання різних напрямків представлені з однаковою ймовірністю. Таке світло ви-

промінують полум'я, електричні дуга і лампа, Сонце та інші джерела світла. Описане світло називається *природним* або *неполяризованим*. Таким чином, в природному світлі коливання вектора $\mathbf{E}$ різних напрямків швидко і безладно змінюють одне одного.

Рисунок 8.10

Однак, можна отримати і таке світло, в якому вектор $\mathbf{E}$ коливається в одному єдиному напрямку (вектор $\mathbf{E}$ лежить в одній площині). Таке світло називається *плоско* або *лінійно поляризованим*. Площина, в якій коливається світловий вектор (вектор $\mathbf{E}$), називається *площиною коливань* (рис. 8.10, а). Площину, перпендикулярну до площини коливань, прийнято називати *площиною поляризації*¹ (в силу історичних причин).

Світло, яке випромінюється в елементарному акті (елементарним випромінювачем), завжди лінійно поляризоване (рис. 8.10, б). Макроскопічне джерело світла, як правило, представляє собою ха-



Рисунок 8.11

отичну сукупність елементарних випромінювачів. Тому в окремих

¹В останній час все частіше площиною поляризації називають площину коливань електричного вектора.

елементарних актах випромінюється світло з різною поляризацією (з різними азимутами лінійної поляризації). В цілому і отримується неполяризоване світло. Існує ще і так зване частково поляризоване світло, у якого коливання світлового вектора E відбуваються у всіх можливих напрямках, але якийсь один із них переважає над іншими (рис. 8.11).

8.7 Основні поняття і закони геометричної оптики

Явища інтерференції, дифракції і поляризації світла є проявами його хвильових властивостей і описуються за допомогою хвильової теорії, основою якої є рівняння Максвелла. Хвильова теорія дозволяє розв'язувати задачі, пов'язані з поширенням світла як в ізотропних, так і в анізотропних середовищах, враховуючи його взаємодію з речовиною. Однак, чимало оптичних явищ, зокрема, дію оптичних приладів, утворення зображень в оптичних системах тощо, можна з достатнім наближенням розглядати, користуючись законами геометричної оптики, коли вдається уникнути ускладнень, пов'язаних з розв'язуванням рівнянь Максвелла з відповідними крайовими та початковими умовами. Геометрична оптика вивчає явища, в яких виявляється проста властивість прямолінійного поширення світла в однорідному ізотропному середовищі.

Основним в геометричній оптиці є поняття світлового променя. Під променем розуміють *лінію, нормальну до хвильової поверхні, вздовж якої переноситься світлова енергія*. При перетині промені не збурюють один одного. Отже, поширення світла в наближенні геометричної (променевої) оптики відбувається вздовж певних геометричних ліній — променів.

Крім поняття про світловий промінь, до основних понять оптики відносяться поняття світної точки та гомоцентричного пучка.

Світна точка — це *джерело світла, яке не має розмірів*. Світна точка і світловий промінь геометричної оптики реально не існують, а є зручною математичною моделлю.

Сукупність світлових променів називають світловим пучком. Пучок, промені якого мають одну спільну точку перетину, називається гомоцентричним пучком, тобто пучком, що має спільний центр. Пучок, промені якого розбігаються із спільного центра, називають розбіжним гомоцентричним пучком (рис. 8.12, а); якщо ж промені йдуть в напрямку до центра, то пучок називається збіжним гомоцентричним пучком (рис. 8.12, б). Якщо світна точка знаходиться на нескінченності, то світловий пу-

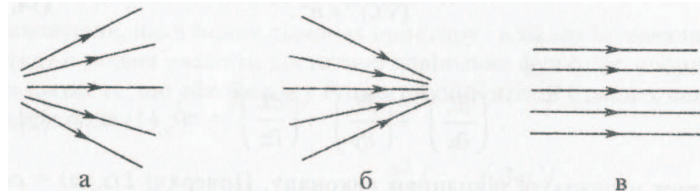


Рисунок 8.12

чок буде паралельним (рис. 8.12, в). Пучок, який після проходження через оптичну систему зберігає гомоцентричність, називають стигматичним. Пучок, промені якого після виходу із оптичної системи не перетинаються в одній точці, називається астигматичним.

В основі геометричної оптики лежать чотири закони:

Закон прямолінійного поширення світла. Відповідно до цього закону в однорідному прозорому середовищі світло поширюється по прямій лінії. Цей закон порушується, коли пучок проходить через діафрагму з дуже малим отвором або, якщо на шляху променя розміщена невелика перегородка. В цих випадках, внаслідок явища дифракції, світло заходить в область геометричної тіні.

Закон незалежності поширення світлових пучків. Суть цього закону полягає в тому, що, коли в просторі зустрічаються два або більше світлових пучків, які поширюються в різних напрямках, то вони не впливають один на одного. Якщо декілька пучків падають на одну і ту ж площадку або сходяться в одній точці, то сумарна дія цих пучків дорівнює сумі дій кожного пучка зокрема. Явище інтерференції при цьому не враховується.

Закон відбивання світла. Світлові промені, зустрічаючи на шляху поширення дзеркальні або гладкі поверхні, частково або повністю відбиваються, підкоряючись закону відбивання: *падаючий, відбитий промені і нормаль до поверхні поділу в точці падіння лежать в одній площині. При цьому кут відбивання дорівнює куту падіння* (рис. 8.13, а)

$$r_1 = r. \quad (8.26)$$

Кут r між нормаллю і падаючим променем називають *кутом падіння*, а кут r_1 між нормаллю і відбитим променем — *кутом відбивання*. Падаючий і відбитий промені зворотні. Це означає, що якщо падаючий промінь направити по шляху ВО, то він відіб'ється в напрямку ОА (рис. 8.13, а).

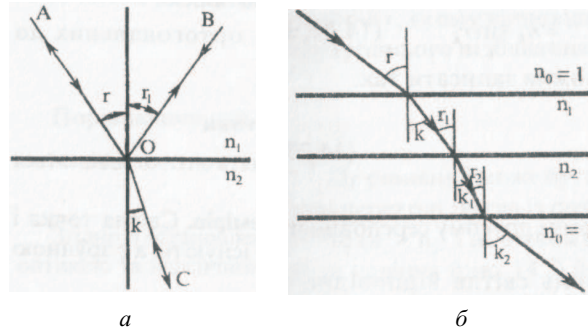


Рисунок 8.13

Закон заломлення світла: падаючий, заломлений промені і нормаль до поверхні поділу в точці падіння лежать в одній площині. При цьому має місце таке співвідношення:

$$\frac{\sin r}{\sin k} = n_{21}, \quad (8.27)$$

де кут k називається кутом заломлення, n_{21} – стала для даної пари середовищ величина, яку називають *відносним показником заломлення другого середовища відносно першого*.

Дослід показує, що коли промінь пропущений в зворотному напрямку із другого середовища під кутом k , то він вийде в першому середовищі під кутом r (рис. 8.13, а). Для цього випадку можна записати:

$$\frac{\sin k}{\sin r} = n_{12} \quad (8.28)$$

де n_{12} — *відносний показник заломлення першого середовища відносно другого*. Із порівняння формул (8.27) і (8.28) маємо:

$$n_{12} = \frac{1}{n_{21}}. \quad (8.29)$$

Таким чином, величини n_{12} і n_{21} є взаємнообернені.

Коефіцієнт заломлення речовини по відношенню до вакууму називається *абсолютним показником заломлення n* даної речовини.

Покажемо, що відносний показник заломлення двох середовищ дорівнює відношенню їх абсолютних показників.

Розглянемо хід променя через дві, щільно притиснуті одна до одної, плоскопаралельні пластинки (рис. 8.13, б). Нехай на першу пластинку з вакууму ($n_0 = 1$) падає промінь світла під кутом r . Дослід показує, що пройшовши обидві пластинки, промінь вийде знову у вакуум під кутом $k_2 = r$, тобто паралельно падаючому на першу пластинку променю.

Застосовуючи послідовно закон заломлення до всіх трьох меж поділу одержимо:

$$\frac{\sin r}{\sin k} = n_1; \quad \frac{\sin r_1}{\sin k_1} = n_{21}; \quad \frac{\sin k_2}{\sin r_2} = n_2, \quad (8.30)$$

де n_1 і n_2 — абсолютні показники заломлення речовини пластинок, n_{21} — відносний показник заломлення речовини другої пластинки відносно першої. Поділивши третю рівність на першу, отримаємо:

$$\frac{\sin k \sin k_2}{\sin r \sin r_2} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (8.31)$$

Враховуючи, що $k_2 = r$, $k_1 = r_2$ і $k = r_1$, на основі другого рівняння (8.30) отримаємо зв'язок між відносним і абсолютним показниками заломлення:

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (8.32)$$

Отже, *відносний показник заломлення двох речовин дорівнює відношенню їх абсолютних показників заломлення.*

Закон заломлення світла на межі двох речовин, після цього, запишеться так:

$$\frac{\sin r_1}{\sin k_1} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21} \quad (8.33)$$

або

$$n_1 \sin r_1 = n_2 \sin r_2. \quad (8.34)$$

Добуток показника заломлення на синус кута між променем і нормаллю при кожному заломленні є величина стала і називається оптичним інваріантом. В загальному випадку для оптично-го інваріанту маємо:

$$n_1 \sin r_1 = n_2 \sin r_2 = n_3 \sin r_3 = \dots = n_k \sin r_k. \quad (8.35)$$

Враховуючи, що $n = c/v$, формулу (8.33) можна записати так:

$$\frac{\sin r_1}{\sin k_1} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \quad (8.36)$$

де v_1 і v_2 – швидкості поширення світла в першому і другому середовищах відповідно, $\lambda_1 = \frac{\lambda_0}{n_1}$ і $\lambda_2 = \frac{\lambda_0}{n_2}$ – довжини хвиль світла відповідно в першому і другому середовищах, λ_0 – довжина хвилі світла у вакуумі. Із закону заломлення світла (8.33) видно, що при переході із середовища з меншим показником заломлення (оптично менш густого) в середовище з більшим показником заломлення (оптично більш густе) ($n_1 < n_2$) промінь, заломлюючись, наближається до нормалі ($r < k$, рис. 8.13, б) і навпаки.

Повне внутрішнє відбивання

Розглянемо проходження світлового променя з оптично більш густого середовища в менш оптично густе ($n_1 > n_2$). Як уже вище відмічалось, в цьому випадку заломлений промінь буде віддалятися від нормалі ($r < k$) (рис. 8.14, а). Якщо збільшувати кут падіння r , то збільшуватиметься і кут заломлення k (рис. 8.14, б) і, врешті, наступить момент, коли кут заломлення стане рівним $\pi/2$, а $\sin k = 1$ (рис. 8.14, в), тобто заломлений промінь буде поширюватись вздовж межі поділу двох середовищ. Дослід по-

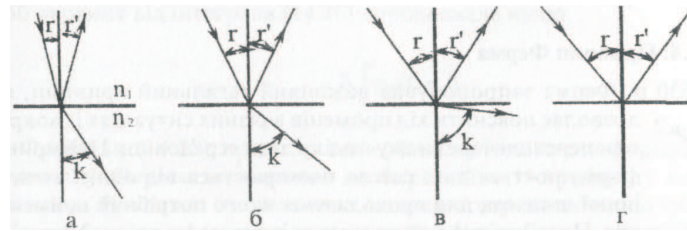


Рисунок 8.14

казує, що подальше збільшення кута падіння призведе до того, що заломлений промінь зникне (рис. 8.14, г): *все падаюче світло буде відбиватися*. Це явище називається повним внутрішнім відбиванням. Кут падіння r , якому відповідає $k = \pi/2$, називають *граничним кутом* $r_{\text{гр}}$ *повного внутрішнього відбивання*. Значення $r_{\text{гр}}$ визначається за формулою:

$$\sin r_{\text{гр}} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (8.37)$$

Це рівняння може бути задоволене дійсними значеннями кута $r_{\text{гр}}$ тільки при переході світла із оптично більш густого середови-

ща в оптично менш густе ($n_1 > n_2$) і ні в якому разі не навпаки. Зауважимо, що із зростанням кута падіння (рис. 8.14) інтенсивність заломленого променя зменшується, а відбитого зростає аж до повного зникнення заломленого променя (при $r > r_{\text{rp}}$).

8.8 Запитання для самоконтролю

- 1 Запишіть рівняння Максвелла.
- 2 З якою швидкістю поширюються електромагнітні хвилі?
- 3 Електромагнітні хвилі повздовжні чи поперечні? Як направлені вектори напруженості електричного та магнітного полів електромагнітної хвилі?
- 4 Які коливання називають когерентними?
- 5 В чому полягає явище інтерференції?
- 6 Наведіть приклади застосування інтерференції.
- 7 В чому полягає явище дифракції?
- 8 Сформулюйте принцип Гюйгенса-Френеля.
- 9 Яке світло називають лінійно поляризованим?
- 10 Сформулюйте закон відбивання світла та закон заломлення світла.
- 11 Поясніть явище повного внутрішнього відбивання.

Приклад 1. Довести, що світлова хвиля, яка задається рівнянням $\mathbf{E} = \mathbf{A} \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right]$ є немонахроматичною, якщо $\mathbf{A}$ — величина змінна і змінюється за законом $\mathbf{A} = \mathbf{a} \left(1 + \cos \left[\omega_0 \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \right)$.

При врахуванні значення $\mathbf{A}$ рівняння хвилі набуде такого вигляду:

$$\mathbf{E} = \mathbf{a} \left(1 + \cos \left[\omega_0 \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \right) \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right].$$

Після елементарних перетворень отримаємо:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{a} \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] + \frac{\mathbf{a}}{2} \cos \left[\omega_0 \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] = \\ &= \mathbf{a} \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] + \frac{\mathbf{a}}{2} \cos \left[(\omega + \omega_0) \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \cos \left[(\omega - \omega_0) \left(t - \frac{x}{c} \right) \right]. \end{aligned}$$

З формули видно, що задана світлова хвиля є сукупністю трьох монохроматичних хвиль з амплітудами a , $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{2}$ і частотами ω , $\omega + \omega_0$ і $\omega - \omega_0$.

Приклад 2. Відстань між точковими джерелами $2t = \lambda/2$, а хвилі, які випромінюються ними, мають різницю фаз $\delta_0 = \pi$ і кожна зокрема дають інтенсивність I_0 . Знайти розподіл інтенсивності в інтерференційній картині на екрані.

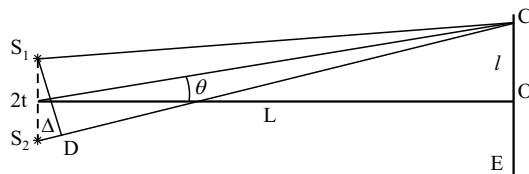


Рисунок 8.15

Результуюча інтенсивність при додаванні двох монохроматичних хвиль визначається за формулою (8.17):

$$I = 2I_0(1 + \cos \delta), \quad (8.38)$$

де I_0 — початкова інтенсивність кожної хвилі зокрема, δ — різниця фаз хвиль в момент додавання (наприклад в точці C, рис. 8.15). Для даного випадку різниця фаз дорівнює $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta + \pi$, де $\Delta = S_2D$ — різниця ходу, з рис. 8.15 маємо: $\Delta = 2tl/L$ або $\Delta = \frac{\lambda}{2} \sin \theta$, де $2t = \lambda/2$ — відстань між джерелами, а $\sin \theta \approx l/L$. Тоді

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{2} \sin \theta + \pi = \pi \sin \theta + \pi. \quad (8.39)$$

При врахуванні (8.39) формула (8.38) набуде вигляду

$$I = 2I_0 [1 + \cos(\pi \sin \theta + \pi)].$$

Оскільки $\cos(\pi \sin \theta + \pi) = -\cos(\pi \sin \theta)$, то отримаємо:

$$I = 2I_0 [1 - \cos(\pi \sin \theta)].$$

Беручи до уваги, що $1 - \cos(\pi \sin \theta) = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \sin \theta \right)$, отримаємо остаточний вираз розподілу інтенсивності в інтерференційній картині на екрані

$$I = 4I_0 \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \sin \theta \right).$$

Розділ 9

Фізичні основи голографії. Оптичні квантові генератори (лазери)

Голографія і когерентна оптика; голографування плоскої і сферичної хвилі; властивості голограм; об'ємні голограми; застосування голограм; оптоволоконні лінії зв'язку; оптичні квантові генератори (лазери); спонтанне і вимушене випромінювання, помилання; застосування лазерів.

9.1 Голографія і когерентна оптика

Голографія - це метод запису і наступного відтворення структури світлових хвиль, в основі якого лежать явища інтерференції і дифракції когерентних світлових пучків. Слово голографія походить від грецьких слів holos – весь, повний і grapho - пишу, креслю, рисую. В назві підкреслена можливість реєстрації вичерпної інформації про хвильове поле на поверхні приймача світла.

Як і звичайна фотографія, голографія забезпечує можливість запису, збереження і відтворення зорових образів предметів. Однак, в звичайній фотографії реєструється лише *розподіл амплітуди* (точніше, її квадрата) в двовимірній проекції об'єкта на площину фотознімка. Тому, розглядаючи фотознімок під різними кутами, ми не можемо заглянути за предмети, які знаходяться на передньому плані. На відміну від фотографії голографія дозволяє записати і відновити не двовимірний розподіл освітленості в площині знімка, а розсіяні світлові хвилі із всіма їх характеристиками - *напрямоком поширення, амплітудою, фазою, довжиною хвилі*. Відтворені голограмою світлові хвилі створюють повну ілюзію реальності спостережуваних предметів. Далекі і близькі деталі предмета(або інші предмети) видно однаково чітко. Розглядаючи голограму під різними кутами, можна бачити предмети в різних ракурсах, відчуючи його об'ємність і реальність. На голограмі реєструється не оптичне зображення об'єкта, а інтерференційна картина, яка виникає при накладанні світлової хвилі, розсіяної об'єктом, і когерентної з нею опорної хвилі. Ця інтерференційна картина фіксує інформацію про *розподіл амплітуд і фаз* в предметній хвилі. Освітлення голограми відтворювальною хвилею, ідентичною з тією, що служила опорною при реєстрації, викликає появу дифрагованих хвиль, одна із яких являє собою більш-менш точну копію хвилі, розсіяної предметом. Попадаючи в око спостерігача, вона створює такі відчуття, як і при безпосередньому

спостереженні предмета.

Фізичною основою голографії є когерентна оптика, тобто вчення про хвилі, їх інтерференцію і дифракцію, яке зародилося ще в 17 ст. На початку 19 ст. Юнг, Френель і Фраунгофер були цілком взмозі сформулювати основні принципи голографії. Чимало фізиків в другій половині 19 і початку 20 ст. підходили до принципів голографії достатньо близько (Кірхгоф, Релей, Аббе, Брегг). В принципі ідея голографії була висунута і експериментально перевірена відомим польським фізиком М. Вольфке (1920 р.). Проте на роботу Вольфке не звернули уваги і вона була забута. Незалежно від Вольфке цю ідею знову запропонував і обґрунтував в 1947 р. англійський фізик Д. Габор, якого справедливо вважають засновником голографії.

Однак труднощі, пов'язані з отриманням голограм, затримали практичне здійснення голографії майже на 15 років. Для практичної реалізації голографії необхідні джерела світла, які володіють високим ступенем часової і просторової когерентності. Тому широке поширення вона отримала лише після створення лазерів. В 1963 р. американські фізики Е. Лейт і Дж.Ю. Упатнієкс вперше отримали *лазерні голограми*. За рік до цього (в 1962 р.) вони запропонували "двопроменеву" схему, значно вдосконаливши вихідну схему Габора. Важливим етапом в розвитку голографії були роботи Ю.М.Денисюка, який в 1962–1963 рр. запропонував записувати голограми в *тривимірних середовищах*, що дозволяє відновлювати зображення в білому світлі. З цього часу голографія отримала інтенсивний розвиток.

Голографування плоскої і сферичної хвилі

Перш за все слід зауважити, що при освітленні (або просвітленні) предмета від нього поширюється розсіяна (або прохідна) хвиля. Розсіяна хвиля в подальшому зберігає незалежне існування і несе повну інформацію про форму та інші властивості предмета. Попадаючи в око або в фотоапарат, ця хвиля утворює на сітківці або на фотопластинці зображення предмета. Якщо якимось чином створити таку ж саму хвилю, то вона може викликати такі ж відчуття, як і розсіяна предметом хвиля. На цьому і ґрунтується ідея голографії.

Голографічний процес можна поділити на дві стадії: а) процес виготовлення голограми, яка являє собою фотопластинку, за допомогою якої можна відтворити світлову хвилю, розсіяну предметом; б) процес відтворення цієї хвилі і отримання зображення.

1. Найбільш простий випадок для з'ясування принципу голографії є *голографічний запис і відтворення плоскої хвилі*. Нехай світлова хвиля 1, відбита від предмета А (цю хвилю називають

об'єктною), падає на фотопластинку ФП під кутом θ до нормалі (рис. 9.1, а). За інтенсивністю почорніння фотопластинки після її хімічної обробки можна судити лише про амплітуду розсіяної хвилі в місцях пластинки, яких досягла розсіяна і хвиля. Таким чином фотопластинка зберігає інформацію про амплітуду хвильового поля, якої недостатньо для його відтворення. Для відтворення хвильового поля потрібна *додаткова інформація про фазу*, якою

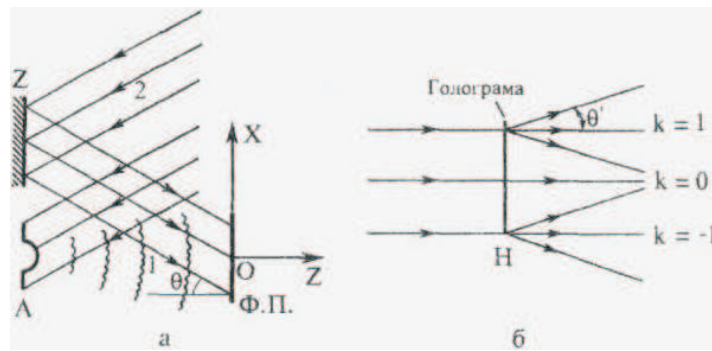


Рисунок 9.1

фотопластинка не володіє, оскільки інтенсивність почорніння її залежить тільки від амплітуди, а не від фази хвилі. Необхідну інформацію про фазу можна отримати і записати її на фотопластинку, якщо фотопластинку освітити іншою плоскою хвилею, *когерентною з хвилею 1*. На рис. 9.1, а ця хвиля позначена цифрою 2 і називається *опорною* або *референтною* хвилею. В результаті інтерференції на поверхні пластинки встановиться стаціонарний перерозподіл освітленості у вигляді системи паралельних світлих і темних смуг, перпендикулярних площині рис. 9.1, а. Залежність інтенсивності від координати визначається формулою

$$I(x) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos k \cdot \Delta(x), \quad (9.1)$$

де I_1 і I_2 — відповідно інтенсивності предметної і опорної хвиль, $k = 2\pi/\lambda_0$ — хвильове число, $\Delta(x) = \sin \theta$ — різниця ходу між предметною і опорною хвилями ($\Delta = 0$ в точці $x = 0$). Із аналізу формули (9.1) можна знайти відстань між сусідніми світлими (темними) смугами, яка рівна $d = 2\pi/(k \sin \theta) = \lambda/\sin \theta$. При правильному підборі часу експозиції і відповідній хімічній обробці фотопластинки пропускання світла нею буде відбуватися за

тим же законом, що і (9.1). Іншими словами, ми отримаємо на фотопластинці (голограмі) дифракційну решітку з синусоїдальним пропусканням світла. *Структура зареєстрованих на голограмі інтерференційних смуг містить інформацію про розподіл фаз світлових коливань в предметній хвилі.*

За допомогою такої голограми не важко відтворити хвилі, які інтерферували, і, зокрема, предметну хвилю. Для цього помістимо голограму (фотопластинку) в те саме місце і в тій же орієнтації, в яких вона експонувалася, і направимо на неї відновлюючу хвилю, ідентичну з опорною хвилею 2, яка використовувалася при запису (рис. 9.1, б). Оскільки голограма являє собою синусоїдальну дифракційну решітку з періодом d , то в результаті дифракції справа від пластинки (голограми) виникнуть три плоскі хвилі: одна з них відповідає головному максимуму порядку $k = 0$ і поширюється вона в напрямку падаючої хвилі, дві інші – головним максимумам порядку $k = \pm 1$. Напрямок дифрагованої хвилі з $k = 1$ визначається умовою $d \sin \theta = \lambda$, але оскільки $d = \lambda / \sin \theta'$, то $\theta = \theta'$, а це означає, що ця хвиля поширюється точно в тому напрямку, що і предметна хвиля (хвиля 1) під час утворення інтерференційної картини (голограми). Попадаючи в око спостерігача при розгляді голограми, відновлена хвиля ($k = 1$) викликає при відсутності предмета такі ж самі відчуття, як і предметна хвиля при безпосередньому спостереженні предмета. В цьому випадку виникає уявне зображення предмета. Зауважимо до цього, що названі вище хвилі $k = 0$, $k = \pm 1$, утворюються тільки тоді, коли дифракційна решітка строго синусоїдальна. Очевидно, що в нашому випадку є деяке (хоч і незначне) відхилення від синусоїдальності, тому крім хвиль, відмічених вище, існують додаткові хвилі $k = \pm 2, \pm 3, \dots$, хоча вони, як правило, мало інтенсивні. Дифрагована хвиля $k = -1$ формує ще одне (дійсне) зображення об'єкта.

2. Схема досліду по голографуванню сферичної хвилі зображена на рис. 9.2, а. Сферичні хвилі випромінюються точковим джерелом S. Опорною хвилею служить когерентна сферичній плоска хвиля, яка нормально падає на фотопластинку. Інтерференція когерентних об'єктної сферичної і опорної плоскої хвиль призводить до утворення стаціонарної картини у вигляді концентричних кілець на поверхні фотопластинки. Радіальний розподіл інтенсивності в інтерференційній картині, як і у випадку плоскої об'єктної хвилі, дається формулою (9.1), але різниця ходу $\Delta(x)$ між сферичною об'єктною і плоскою опорною хвилями залежить від x за законом $\Delta(x) = x^2/2R$ (якщо в точці $x = 0$ різниця ходу $\Delta = 0$). Положення світлих кілець визначається із умови $\Delta(x_k) = k\lambda$, звідки $x_k = \sqrt{2Rk\lambda}$. Переміщуючи джерело, можна добитися максималь-

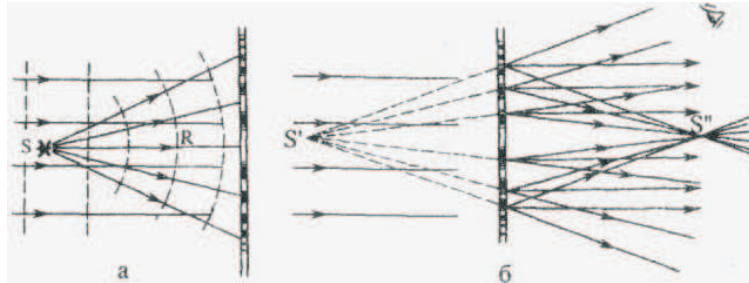


Рисунок 9.2

ної інтенсивності в центрі картини, що еквівалентно дії зональної пластинки з фокусною відстанню $f = R$. Відмінність голограми точкового джерела від зональної пластинки полягає тільки в тому, що зміна інтенсивності (перехід від світлих кілець до темних) на голограмі відбувається за синусоїдальним законом, тобто плавно.

Для відтворення отриману голограму необхідно освітити плоскою хвилею, ідентичною з опорною (рис. 9.2, б). Оскільки пропускання світла голограмою підкоряється синусоїдальному закону, то як і в попередньому випадку, справа від голограми внаслідок дифракції виникнуть три хвилі: одна з них (плоска) поширюється в напрямку хвилі, що падає на голограму; друга - збіжна з вершиною в точці S'' ; третя розбіжна з вершиною в точці S' . Вершина розбіжної дифрагованої хвилі S' розміщена на тій же відстані від голограми, що і джерело S при запису голограми (рис. 9.2, б), тобто точку S' можна розглядати як уявне зображення джерела. Спостерігач, який знаходиться справа від голограми, бачить через неї в точці S' точкове джерело, хоча його там немає. Зауважимо при цьому, що для спостереження уявного зображення S' око спостерігача повинно розміщуватися вище або нижче голограми. В протилежному випадку хвиля, яка проходить прямо або збіжна хвиля створюють серйозні перешкоди. Для усунення подібних перешкод використовують кутове розділення дифрагованої хвилі і хвилі, яка пройшла через голограму, яке досягається завдяки похилому падінні опорної хвилі.

Збіжна дифрагована хвиля утворює в точці S'' дійсне зображення точкового джерела і, якщо в це місце помістити екран, то на ньому отримаємо дійсне зображення у вигляді світлого дифракційного кільця. Воно формується голограмою без допомоги будь-яких оптичних приладів або їх елементів.

На рис. 9.3 наведена можлива схема запису і відтворення го-

логограми. Попередньо розширений паралельний пучок лазерного випромінювання спрямовується на дзеркало Z і об'єкт S . Світлова хвиля відбита від дзеркала (опорний пучок) і світлова хвиля розсіяна об'єктом (об'єктний пучок), є когерентні, оскільки вони походять з одного і того ж лазерного пучка (рис. 9.3, *a*). При відтворенні прямий пучок, який в утворенні зображення участі

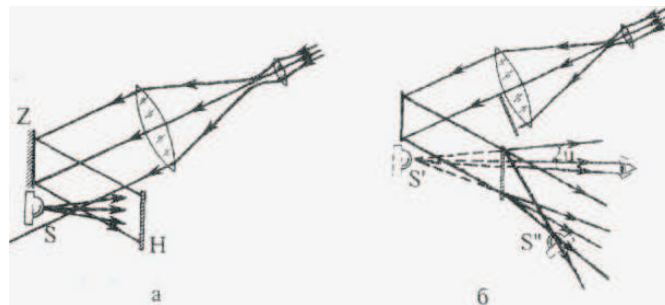


Рисунок 9.3

не бере, і пучки, які утворюють уявне S' і дійсне S'' зображення, виявляються добре розділеними в просторі, що дозволяє без будь-яких перешкод спостерігати уявне зображення.

Властивості голограм

1. *Зображення*, які отримуються методом голографії, є *тривимірні* (звичайна фотографія - плоска). Уявні зображення повністю відтворюють розміщення реальних предметів у просторі. Якщо при розглядуванні голограми одні предмети закривають інші, то щоб побачити закриті предмети досить змістити в бік око спостерігача.

2. Іншою важливою властивістю голограм є те, що вони можуть відтворювати хвильовий фронт невеликою своєю частиною: *частина голограми діє, як ціла голограма*. Наприклад, для відтворення зображення годиться кожний шматочок розбитої голограми. Для доведення сказаного закриємо діафрагмою частину голограми (рис. 9.4). Із рисунка видно, що відкрита частина голограми, як і раніше, утворює і уявне S' і дійсне S'' зображення неіснуючого об'єкта. Із зменшенням розмірів голограми зменшується чіткість зображення і відчуття об'ємності, оскільки зменшується величина світлового потоку, що проходить через голограму. Властивість голограми відтворювати зображення окремою її

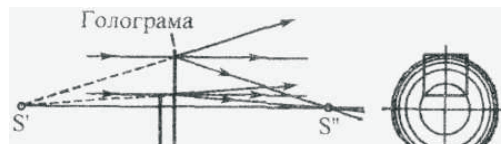


Рисунок 9.4

ділянкою пов'язана з тим, що при експонуванні, як правило, всі частини фотопластинки зазнають дію світла, розсіяного всіма точками об'єкта. Тому в кожній точці голограми зберігається в закодованій формі зображення всього предмета, тобто інформація, яка реєструється голограмою, рівномірно розподіляється по всій площі голограми.

3. *Голографічний запис інформації відрізняється виключно високою густиною.* Для прикладу можна сказати, що на пластинці площею в декілька квадратних сантиметрів можна записати зміст великої книги. Крім того, *голографічний запис володіє високою надійністю*, тобто слабкою чутливістю до перешкод, таких, як порошинки, подряпини, дрібні дефекти реєструючого середовища.

4. *Голографічний метод дозволяє на одній фотопластинці послідовно реєструвати декілька зображень*, причому кожне із них можна відтворити без перешкод з боку інших зображень. Можна, наприклад, записати на одному і тому ж місці пластинки різні зображення, голографуючи кожного разу тільки один предмет. Щоб при відтворенні зображення не накладалися одне на інше, необхідно при голографуванні об'єкти розміщувати в різних місцях, або поміщаючи об'єкти в одне і те ж місце, змінювати напрямок опорного пучка.

5. Рівномірний розподіл по голограмі світла, розсіяного об'єктом (голограма виглядає, як засвічена фотопластинка), не викликає локальних переекспозицій реєструючого матеріалу, як це має місце у звичайній фотографії при наявності в об'єкті великих перепадів яскравості. В результаті голографічне зображення може передавати інтервали яскравостей в об'єкті на 2-3 порядки більші, ніж, наприклад, фотографія.

6. *Голограма має здатність компенсувати спотворення, які можуть виникати при голографуванні об'єктів.* Наприклад, голограма не чутлива до турбулентності атмосфери, якщо об'єктний і опорний пучки проходять через одну і ту ж неоднорідність. Введення цілеспрямованих спотворень в один із пучків дає широкі можливості для здійснення кодуючих операцій.

7. При відтворенні зображення предмета завжди отримується позитивним. Навіть якщо контактним способом фотодруку отримати голограму, обернену у відношенні до первісної (темні ділянки стають прозорими, а прозорі - темними), то при просвічуванні буде відтворене те ж саме позитивне зображення предмета. У випадку зональної пластинки це очевидно: дія її однакова як при парних, так і при непарних відкритих зонах Френеля. Ця парадоксальна, на перший погляд, властивість голограми пояснюється тим, що на фотопластинці зафіксовано зміну контрасту інтерференційних смуг і відстаней між ними, а ці фактори не змінюються при "оберненні" голограми.

8. Голографія - це універсальний метод, він може бути використаний для запису будь-яких хвильових процесів незалежно від їх природи: чи то електромагнітні коливання будь-якого діапазону, чи, наприклад, акустичні хвилі. Щоправда, в оптичному діапазоні голографія має найбільше число практичних застосувань, хоча важливі результати були отримані в радіотехніці і в акустиці.

9. Можна отримувати кольорові зображення на чорно-білій фотопластинці, освітлюючи предмет трьома джерелами світла з різними довжинами хвиль, які підбирають так, щоб найбільш повно передати колір предмета. Опорний пучок формується тими ж самими джерелами, які разом з розсіяними предметом хвилями створюють єдину голограму. Для відтворення зображення таку "трикомпонентну голограму", розміщену в те ж місце, яке вона займала при експонуванні, одночасно освітлюють трьома світловими пучками, тотожними з опорними. При цьому кожний із цих пучків створює три уявні і три дійсні зображення. Уявні зображення всіх кольорів просторово співпадають один з одним і дають кольорове зображення об'єкта. Дійсні (різних кольорів) зображення розміщуються в різних місцях і не співпадають з основним зображенням.

10. Голограми поділяють на амплітудні і фазові. Голограми розглянуті вище відносяться до амплітудних. Амплітудні голограми здійснюють переважно амплітудну модуляцію хвилі, що відтворюється. Вона діє як амплітудна дифракційна решітка. Амплітудні голограми отримують шляхом добору експозиції і процесу проявлення фотопластинки. На такій голограмі розподіл коефіцієнта поглинання відповідає розподілу інтенсивності падаючого світла.

Фазовою голограмою називають голограму, в якій інтерференційне мереживо зафіксовано не в змінах пропускання, а в змінах показника заломлення (оптичної товщини) реєструючого шару. Це досягається шляхом відбілювання уже проявленої і відфіксованої фотопластинки в спеціальному розчині. Пластинка стає прозорою, і тільки зміни показника заломлення несуть записану

на ній інформацію. Така голограма призводить до просторової фазової модуляції відновлюючої хвилі, внаслідок чого виникають дифраговані хвилі. Вони створюють, як і у випадку амплітудної хвилі, уявне і дійсне зображення предмета.

Об'ємні (тривимірні) голограми

Голограми, розглянуті вище, називають двовимірними. Тут застосовувалися фотопластинки, товщина світлочутливого шару яких набагато менша просторового періоду інтерференційної картини, що реєструється на них. Отримана на такій фотопластинці голограма являє собою ніби двовимірну дифракційну решітку. Якщо товщина світлочутливого шару реєструючого середовища істотно перевищує просторовий період інтерференційної картини, то кажуть про об'ємну (тривимірну) голограму.

Метод отримання об'ємних голограм був запропонований Ю.М. Денисюком (1962 р.) на фотопластинках з товстошаровою фотоемульсією. Товщина фотоемульсійного шару становить 15-20 мкм, тобто близько 30 довжин хвиль зеленого світла. В методі Денисюка вдало поєднуються принципи голографії і кольорової фотографії Ліппмана. Схему одержання об'ємних голограм наведено на рис. 9.5, а. Фотопластинка настільки прозора, що майже вільно пропускає світло, яким освітлюється об'єкт. Розсіяні об'єктом хвилі поширюються назустріч опорній хвилі, утворюючи у фоточутливому шарі (ФЕ) інтерференційну картину – стоячі хвилі.

Рисунок 9.5

Проявлена і відфіксована фотопластинка і буде об'ємною голограмою Денисюка. Вона складається із десятка поверхневих голограм, якими є напівпрозорі відбиваючі шари, розміщені у світлочутливому шарі фотоемульсії. При просвітленні отриманої голограми лазерним випромінюванням таким же, як і випромінювання

опорного пучка, відтворюється тільки одне уявне (основне) зображення (рис. 9.5, *б*). Важливою особливістю методу Денисюка є те, що в якості просвічуючого випромінювання можна використувати і розбіжний пучок білого світла. При цьому також утворюється тільки одне уявне зображення (рис. 9.6, *а*). Причиною цього є те, що при багатопроменевій інтерференції, яка виникає при освітленні голограми білим світлом, підсилення відбувається тільки тих хвиль, довжина яких рівна довжині хвилі опорного пучка, і тільки в тих напрямках, в яких різниця фаз між хвилями від сусідніх шарів срібла дорівнює 2π . Хвилі, які б мали дати інші зображення, гасяться внаслідок інтерференції або проходять через голограму і не беруть участі в утворенні зображення. Спостережуване зображення є того ж кольору, що і колір опорного лазерного випромінювання. Однак, колір зображення може істотно змінюватися із-за усадки фотоемульсії в процесі хімічної обробки фотопластинки, що є причиною зміни просторового періоду тривимірної інтерференційної структури, яка міститься на фотопластинці.

Рисунок 9.6

Якщо освітити голограму із зворотного боку (рис. 9.6, *б*), то основне зображення буде відсутнім, але утвориться додаткове, яке є дзеркальним зображенням у відношенні до предмета.

Метод Денисюка дозволяє отримувати зображення предметів в натуральних кольорах. Для цього на одній і тій же фотопластинці необхідно отримати голограму предмета, освітивши його випромінюванням, яке має в своєму спектрі три монохроматичні лінії (червону, зелену і синю), які разом викликають відчуття білого світла. Така голограма діє, як три голограми, що дають при освітленні її білим світлом суміщені зображення в трьох спектральних кольорах. Такі зображення сприймаються оком як одне об'ємне зображення в натуральних кольорах.

9.2 Застосування голографії

1. Нині високого розвитку досягла так звана *образотворча голографія*. Образотворчі голограми відтворюють об'ємні зображення різних предметів: творів мистецтва, історичних і архітектурних пам'яток, цінних археологічних знахідок тощо. Голограми широко використовуються в музеях, на виставках, в рекламній справі, навчальному процесі.

Перспективним є застосування голографії в кіно і телебаченні. На шляху розв'язання цієї проблеми зустрілися серйозні технічні труднощі: створення імпульсних лазерів червоного, синього і зеленого випромінювань з енергією в кілька джоулів і високим ступенем когерентності; створення голографічних кіноплівок для зйомки і тиражування фільмів; створення спеціальних голографічних екранів тощо. Однак, експериментально було доведено можливість створення тривимірного кольорового голографічного кіно. В 1976 р. в СРСР був створений двохвилинний експериментальний кольоровий голографічний фільм. Ще більші труднощі виникають при розробці голографічного телебачення.

2. Численні практичні застосування в наукових дослідженнях і техніці має *голографічна інтерферометрія*. Існує чимало різноманітних методів голографічної інтерферометрії, однак в основі всіх їх лежить принцип порівняння двох хвильових фронтів, що відповідають двом фізичним станам предмета.

Розглянемо два найбільш поширені методи голографічної інтерферометрії. Перший метод (метод однієї голограми) ґрунтується на інтерференції хвилі, відбитої від об'єкта. Для реалізації цього методу спочатку необхідно отримати голограму об'єкта і після хімічної її обробки голограму розташувати на тому ж самому місці, де вона знаходилася при запису. Освітлюючи її і предмет, який залишився також на своєму місці, опорною хвилею, ми будемо спостерігати відновлене зображення і реальний об'єкт. Хвиля, яка пройшла через голограму від об'єкта і відтворена голограмою хвиля — когерентні, і вони інтерферують між собою. В результаті спостерігач бачитиме зображення, покрите системою інтерференційних смуг, вигляд і положення яких залежать від стану об'єкта. При цьому безпосередньо можна впливати на об'єкт (деформувати, нагрівати, зміщувати тощо), що відразу відібється на інтерференційній картині. Оскільки інтерференція змінюється в процесі впливу на об'єкт, то цей метод часто називають *методом голографічної інтерферометрії в реальному часі*.

Таким чином, даний метод голографічної інтерферометрії дозволяє за допомогою однієї голограми об'єкта, отриманої в його вихідному стані, отримати інтерферограми його в багатьох станах або досліджувати динаміку зміни об'єкта в реальному часі.

Незручністю є те, що голограму необхідно розташовувати точно в тому місці, в якому вона була під час експозиції. Перевагою його є можливість порівнювати даний стан об'єкта з якимось іншим станом.

На рис. 9.7 наведена серія інтерферограм теплових потоків при імпульсному нагріві розміщеного у воді опору, отриманих методом голографічної інтерферометрії в реальному часі.

Простішим є *метод двох експозицій*, який застосовується тоді, коли потрібно визначити відмінність між двома станами об'єкта. На одну і ту ж фотопластинку записується спочатку голограма одного стану об'єкта, а потім після впливу на нього, наприклад, теплових деформацій – голограма другого стану. При просвічуванні цієї двічі експонованої голограми опорним пучком світла спостерігатиметься система інтерференції відновлених хвиль. Якщо зображення, що виникають у відновлених пучках, не дуже сильно відрізняються одне від одного (як за формою, так і за розміщенням), система інтерференційних смуг, яка покриває зображення, може дати інформацію про величину змін, що відбулися з об'єктом.

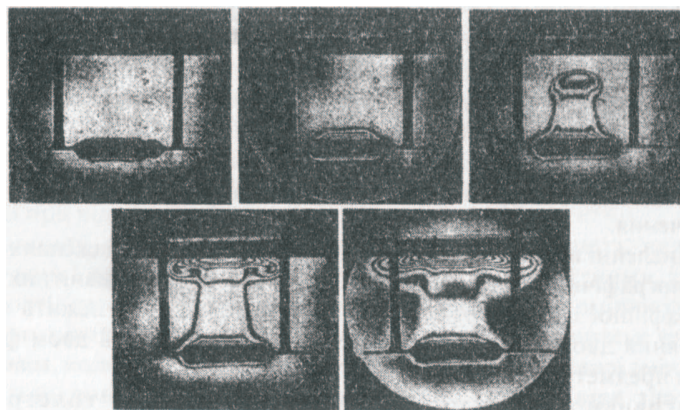


Рисунок 9.7

Приклад інтерферограми, отриманої методом двох експозицій при контролі якості автомобільних шин по деформації їх поверхні при невеликій зміні тиску, наведений на рис. 9.8, а.

За допомогою методу двох експозицій вивчалися, наприклад, деформації циліндричних і турбінних лопаток, а також зміни показника заломлення прозорих рідин і твердих тіл в залежності

від впливу на них зовнішніх факторів (механічних напруг, температури тощо). Останнє ілюструється голограмою навантаження кільця із епоксидної смоли (рис. 9.8, б).

Перевагою даного методу є те, що інтерференційне поле стаціонарне і його можна аналізувати коли завгодно.

Рисунок 9.8

Голограму двох експозицій доцільно застосовувати при вивченні динамічних процесів.

Метод голографічної інтерферометрії застосовується для дослідження вібрацій, деформацій предметів, поступального і обертального їх рухів, для контролю якості поверхонь оптичних деталей тощо. Висока точність вимірювання такого методу дозволяє вимірювати зміни розмірів порядку десятих часток мікрометра.

3. Одним із перспективних напрямків застосування голографії є обробка і передача інформації. Сучасна обробка і передача інформації здійснюється в основному за допомогою керованих систем змінних електричних і магнітних полів електронних пучків. Нині відбувається швидкий розвиток *оптотроніки* і *оптоелектроніки*, які розв'язують завдання обробки і передачі інформації за допомогою керованих світлових (оптотроніка) або сукупності світлових і електронних (оптоелектроніка) потоків.

На основі голографії створюються різного роду оптичні перетворювачі, аналогічні електронним (оптичний аналог електронного транзистора, системи оперативної пам'яті, логічні елементи ЕВМ із швидкістю до 10^{-12} с тощо).

Швидкість передачі інформації на світлових сигналах є максимально можливою в природі швидкістю, і, зрозуміло, що вона перевищує швидкість передачі інформації за допомогою електронних пучків. Дуже важливим є і те, що *для оптичних пристроїв не*

існує проблеми контактів, що є дуже актуальним для електронних приладів.

Перспективним є використання голографії для керування лазерними пучками, які використовуються для здійснення керованого термоядерного синтезу, а також для багатьох інших технологічних процесів (лазерна обробка матеріалів тощо).

9.3 Оптиковолоконні лінії зв'язку

Світлові провідники та їх застосування. Явище повного внутрішнього відбивання (яке ми обговорювали у попередньому розділі) використовується в оптичних схемах, зокрема воно лежить в основі принципу дії призм повного відбивання. На рис. 9.9, *а* зображена призма повного внутрішнього відбивання, яка дозволяє повертати світловий пучок на 90° , а призма, яка зображена на рис. 9.9, *б*, дозволяє повернути зображення.

Рисунок 9.9

Повне внутрішнє відбивання використовується в "світлопроводах". Якщо промінь не просто попадає на границю двох середовищ, а проходить у циліндричному світловоді (оптичному волоконі) між рівнобіжними (паралельними) стінками, то при куті входу більше критичного, він "назавжди" залишиться у світловоді (див. рис. 9.10).

Переваги оптичного волокна. Оптичне волоконна технологія істотно виділяється серед інших способів передачі інформації рядом переваг.

Головною перевагою є колосальна пропускна здатність оптичних волоконних ліній зв'язку.

Іншими, не менш важливими перевагами оптичних волоконних ліній зв'язку є:

— стійкість до електромагнітних впливів;

Рисунок 9.10

- відсутність випромінювання у оптоволоконного кабеля;
- привабливі масово-габаритні параметри;
- захищеність від несанкціонованого доступу.

Таким чином, щоб передавати інформацію за допомогою волоконно-оптичної лінії зв'язку (ВОЛС), вона повинна мати очевидну структуру і складатися з:

- передавача - джерела світлового сигналу;
- приймача - світлочутливого елемента;
- середовища поширення - оптоволокна.

Найбільший інтерес викликає головний елемент ВОЛС — оптичне волокно. Його ми розглянемо більш докладно.

Оптичне волокно. Сучасне оптичне волокно складається як мінімум із двох компонентів: серцевини (core) і оболонки (cladding) (зображення оптоволоконного кабеля і поперечний переріз оптичного волокна наведено на рис. 9.11). Зовні волокно покривається захисним покриттям. У ВОЛС використовують оптоволоконні кабелі, що складаються з десятків і сотень волокон.

Рисунок 9.11

І серцевина, і оболонка виготовляються з скла чи пластику. Найбільш часто (унаслідок кращих характеристик) використовується оптоволокно типу "скло-скло", коли серцевина й оболонка виготовляються з особливого кварцового скла. Зрозуміло, що скло, яке використовується для оболонки, повинно мати менший показник заломлення, ніж для серцевини. На практиці показник

заломлення скла регулюється за допомогою легуючих домішок. В оптичних волокнах показники заломлення серцевини й оболонки розрізняються на 1%.

Розглянемо, як світловий сигнал поширюється у світоводі. Через багаторазове відбивання луча від стінок світовода, світловий імпульс, пройшовши через оптоволокно, трансформується в серію мод. Тобто, у кінцеву точку можуть прийти промені, що ввійшли у світовод у той самий момент часу, але під різними кутами. Як наслідок ці промені (моди) проходять різні відстані і "прибувають у пункт призначення" не одночасно. Це явище одержало назву міжмодової дисперсії. Чим більша довжина оптоволокна, тим більший буде розкид за часом прибуття, тим менша буде смуга пропускання.

Оптичні волокна можна поділити на три види:

1. **Багатомодове ступінчасте волокно** (рис. 9.12). У наближенні геометричної оптики точковий випромінювач біля одного з торців оптоволокна може бути трансформований у ґрати синфазних випромінювачів, що знаходяться друг від друга на відстані, рівній діаметру оптоволокна (тут цілком доречною представляється аналогія з калейдоскопом - іграшкою, знайомою з дитинства



Рисунок 9.12

практично усім). Діаграма спрямованості кожного з випромінювачів обмежена кутами повного внутрішнього відбивання, і, у залежності від відстані між ними (чи діаметра оптоволокна), набіг різниці фаз між випромінювачами може досягнути тільки в одному напрямку (випадок одномодового волокна) чи відразу в декількох (багатомодове волокно). У зазначених напрямках випромінювання від випромінювачів будуть додаватися синфазно, утворюючи хвилі, що поширюються, чи, інакше кажучи, моди. Ясно, що для того, щоб досягти іншого торця хвилеводу, різним

модам прийдеться пройти різну відстань.

В цьому випадку проблема міжмодової дисперсії ніяк не розв'язується. Смуга пропускання невелика 20-30 МГц-км, але просте виготовлення кабелю.

2. Багатомодове градієнтне волокно. За рахунок складного легування оптоволоконна можна домогтися плавного зменшення показника заломлення від центра до оболонки волокна. Тоді моди, хоча і будуть як і раніше проходити різні шляхи, але робити це за однаковий час. Смуга пропускання в порівнянні із ступінчастим волокном помітно збільшується, до 100-1000 МГц-км.

Показник заломлення градієнтних волокон має параболічний профіль, що одержують, вводячи в однорідну скляну нитку спеціальні домішки. У результаті, за інших рівних умов, кількість мод, що поширюються, зменшується приблизно в два рази в порівнянні із ступінчастим хвилеводом.

Оптоволоконні лінії зв'язку на багатомодовому волокні мають цікаву властивість: смуга пропускання лінійно залежить від довжини кабелю, тому її вимірюють не в абсолютних, а в питомих показниках, звичайно в МГц-км (мегагерц-кілометр). Так, оптоволоконний кабель з характеристикою 100 МГц-км при довжині 100 метрів буде мати смугу пропускання 1 ГГц.

3. Одномодове волокно. Ясно, що кількість мод істотно залежить від діаметра волокна. Так що, якщо діаметр волокна виявиться порівняним з довжиною хвилі, що використовується, то через волокно буде поширюватися тільки одна мода (при цьому діють закони вже не геометричної, а хвильової оптики).

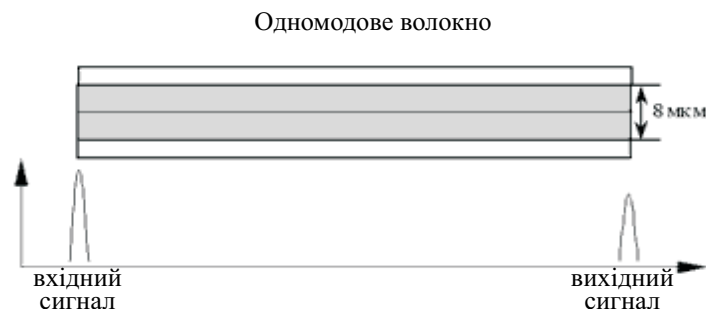


Рисунок 9.13

Для довжини хвилі світлового сигналу $\lambda = 0.85$ мкм одномодове волокно має мати діаметр 8.5 мкм.

Оптоволокно деякого малого діаметру для однієї довжини хвилі джерела світла буде одномодовим, а для другої - багатомодовим.

Для оптоволоконних ліній з одномодовим волокном, де міжмодова дисперсія відсутня, строгої лінійної залежності смуги пропускання від довжини лінії немає. Смуга пропускання одномодового волокна складає близько 30 ТГц, що на кілька порядків більше, ніж у перших двох видів, і мало залежить від довжини. У магістральних лініях, внаслідок обмежень за частотою, внесених оптичними підсилювачами, вона обмежена 3 ТГц.

Найбільш типові діаметри серцевини і оболонки:

Діаметр серцевини, мкм	8	50	62	100
Діаметр оболонки, мкм	125	125	125	140

9.4 Оптичні квантові генератори (лазери)

Оптичні квантові генератори (лазери), які з'явилися на початку 60-х років, отримали широке використання як джерела випромінювання, що працюють в оптичному діапазоні частот. Термін "лазер" LASER утворений із початкових букв англійського словосполучення – Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation – "підсилення світлових коливань за допомогою індукованого випромінювання".

Великий прогрес в області квантової електроніки обумовлений позитивними якостями лазерного випромінювання, яке володіє високою часовою і просторовою когерентністю, монохроматичністю і напрямленістю. Можливість ефективного його фокусування дозволяє отримати надзвичайно велику густину енергії в світловому пучку. Ці можливості лазерів мають істотне значення для розвитку, зокрема, таких галузей радіотехніки, як локація, навігація, зв'язок, телебачення, обчислювальна техніка тощо. Відомо також широке науково-технічне застосування лазерів в найрізноманітніших галузях.

Спонтанне і вимушене випромінювання. Поглинання. В основі роботи лазера лежать три фундаментальних явища, які мають місце при взаємодії електромагнітних хвиль з речовинами: *процеси спонтанного і вимушеного випромінювання та поглинання.*

Спонтанне випромінювання. Розглянемо атомну систему з двома енергетичними рівнями E_i і E_k . Припустимо, що атом (молекула) речовини знаходиться у початковому стані, який відповідає i -му рівню. Якщо для атома є можливим квантовий пере-

хід з i -ого на k -ий рівень. Отже, атом може виділити енергію, що дорівнює різниці енергій $E_i - E_k$. Коли ця енергія звільняється у вигляді електромагнітної хвилі самовільно, то цей процес називають *спонтанним (самовільним) випромінюванням*. При цьому частота випроміненої хвилі визначається за правилом частот Бора:

$$\nu_{ik} = \frac{E_i - E_k}{h}, \quad (9.2)$$

де h — стала Планка. Таким чином, при спонтанному випромінюванні виникає фотон з енергією

$$h\nu_{ik} = E_i - E_k. \quad (9.3)$$

Характерною особливістю спонтанних переходів є те, що вони не пов'язані з впливом яких-небудь зовнішніх електромагнітних полів на атомну систему. Причиною спонтанних переходів є квантові флуктації вакууму електромагнітного поля, природа яких з'ясовується у квантовій електродинаміці. *При спонтанному випромінюванні окремі атоми випромінюють незалежно один від одного, і окремі акти випромінювання не пов'язані в часі, тому поляризація і напрямок випромінювання електромагнітних хвиль можуть бути будь-якими.* Звідси випливає висновок - спонтанне випромінювання за своїми властивостями є некогерентним, шумовим і ненаправленим.

Імовірність спонтанного випромінювання можна визначити так. Припустимо, що в момент часу t на i -му рівні знаходиться N_i атомів (в одиниці об'єму). Згідно з постулатами А.Ейнштейна, середнє число спонтанних переходів Z_{ik} за одиницю часу в оди-

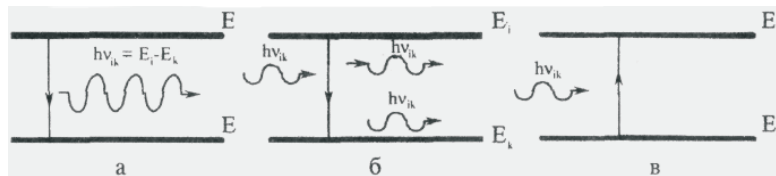


Рисунок 9.14

ниці об'єму з верхнього рівня E_i на нижній рівень E_k (рис. 9.14, а) є пропорційним числу частинок N_i на вихідному рівні, тобто,

$$Z_{ik}^{\text{сп}} = A_{ik}N_i. \quad (9.4)$$

Співвідношення (9.4) виконується строго, якщо елементарні процеси випромінювання незалежні, що справедливо для багатьох випадків при нехтуванні міжатомною взаємодією. Згідно з (9.4) коефіцієнт пропорційності

$$A_{ik} = \frac{Z_{ik}^{\text{сп}}}{N_i}. \quad (9.5)$$

Отже, A_{ik} визначає *середнє число спонтанно випромінюваних за одиницю часу фотонів частоти ν_{ik} в розрахунку на одну збуджену частинку з енергією E_i* . Тому коефіцієнт A_{ik} називають *імовірністю спонтанного випромінювання або коефіцієнтом Ейнштейна для спонтанного випромінювання*. Величину A_{ik} вимірюють в обернених секундах (с^{-1}). Чисельне значення A_{ik} залежить від конкретного переходу.

Акти спонтанного випромінювання просторово розділених атомів (молекул) мають статистичний характер, а це означає, що між фазами хвиль, випромінюваних різними частинками, немає ніякого закономірного зв'язку, тобто, як уже відмічалось, спонтанне випромінювання є некогерентним.

Вимушене випромінювання. Припустимо знову, що атом в початковому стані знаходиться на верхньому i -ому рівні, і на речовину падає електромагнітна хвиля з частотою, яка визначається виразом (9.2). Оскільки частоти падаючої хвилі і випромінювання, зв'язаного з атомним переходом, рівні одна одній, то існує скінченна імовірність того, що падаюча хвиля викличе перехід атома з i -ого рівня на k -ий ($i \rightarrow k$) (рис. 9.14, б). При цьому різниця енергій $E_i - E_k$ виділяється у вигляді електромагнітної хвилі, яка додається до падаючої. Це і є явище вимушеного випромінювання. Його ще називають індукованим або стимульованим випромінюванням.

Існує важлива особливість вимушеного випромінювання: вторинний фотон, який випускається в результаті переходу, нічим не відрізняється від того фотона, який стимулював цей перехід. Обидва фотони характеризуються однаковими властивостями: при вимушеному випромінюванні частота, напрямок поширення і стан поляризації індукованого випромінювання точно співпадають з частотою, напрямком поширення і поляризацією зовнішнього електромагнітного поля, яке викликало це випромінювання. Обидва випромінювання співфазні, тобто фази вимушуючих і випромінених квантів жорстко зв'язані. Звідси випливає, що оскільки первинні і вторинні фотони тотожні, то зрозуміло, що таке *випромінювання набуває властивостей монохроматичності, когерентності і напрямленості*.

У випадку вимушеного випромінювання число фотонів Z_{ik} , які утворюються за одиницю часу ансамблем частинок одиничного об'єму при переході з верхнього рівня E_i на нижній рівень E_k під дією зовнішнього випромінювання з густиною ρ , пропорційне як N_i , так і $\rho_{\nu_{ik}}$:

$$Z_{ik}^{\text{вим}} = B_{ik} \rho_{\nu_{ik}} N_i, \quad (9.6)$$

звідки

$$B_{ik} = \frac{1}{\rho_{\nu_{ik}}} \frac{Z_{ik}^{\text{вим}}}{N_i}. \quad (9.7)$$

Тут B_{ik} — коефіцієнт Ейнштейна для вимушеного випромінювання, який дорівнює середньому числу випромінюваних однією частинкою за одиницю часу фотонів з енергією $h\nu_{ik} = E_i - E_k$, віднесеного до густини випромінювання $\rho_{\nu_{ik}}$. Зауважимо, що імовірність вимушеного випромінювання залежить не тільки від конкретного переходу, але й від густини (інтенсивності) падаючого електромагнітного випромінювання.

Поглинання. Припустимо тепер, що атом (молекула) у початковому стані знаходиться на k -тому рівні. Якщо це основний рівень, то атом буде залишатися на ньому доти, поки на нього не подіє якесь зовнішнє збурення. Нехай на речовину падає електромагнітна хвиля з частотою ν_{ik} , яка визначається формулою (9.2). В такому разі існує скінченна імовірність того, що атом перейде на верхній рівень з енергією E_i (рис. 9.14, в). Різниця енергій $E_i - E_k$, яка необхідна для того, щоб атом здійснив перехід $k \rightarrow i$, береться із енергії падаючої електромагнітної хвилі. В цьому і полягає суть процесу резонансного поглинання. *Індуковане (вимушене) випромінювання виявляється процесом, зворотним до резонансного поглинання.*

Середнє число фотонів, поглинутих ансамблем частинок за одиницю часу в одиниці об'єму $Z_{ki}^{\text{погл}}$ є пропорційним заселеності початкового (нижнього) рівня N_k та густині падаючого випромінювання $\rho_{\nu_{ik}}$, оскільки процес поглинання є вимушеним процесом, тобто

$$Z_{ki}^{\text{погл}} = B_{ki} \rho_{\nu_{ik}} N_k. \quad (9.8)$$

Коефіцієнт пропорційності

$$B_{ki} = \frac{1}{\rho_{\nu_{ik}}} \frac{Z_{ki}^{\text{погл}}}{N_k}, \quad (9.9)$$

визначиться числом поглинутих однією частинкою за одиницю часу фотонів з енергією $h\nu_{ik} = E_i - E_k$, віднесених до густини випромінювання $\rho_{\nu_{ik}}$. B_{ki} — коефіцієнт Ейнштейна для поглинання, а добуток $\rho_{\nu_{ik}} B_{ki}$ — імовірність поглинання за одиницю часу.

Основні принципи роботи лазера

Лазерне накачування: створення інверсної населеності. Для прикладу розглянемо сукупність атомів газу, які знаходяться в термодинамічній рівновазі при кімнатній температурі. Розподіл електронів у більшості атомів відповідає основному стану. Оскільки завжди існує теплова енергія достатня, щоб викликати переходи на більш високі рівні, то невелика частина атомів знаходиться в збуджених станах. Очевидно, що з підвищенням температури доля атомів у збуджених станах зростає. Яка частина атомів знаходиться в тому чи іншому енергетичному стані при заданій рівноважній температурі визначається законом розподілу Больцмана

$$\frac{N_i}{N_0} = e^{-\frac{E_i}{kT}}, \quad (9.10)$$

де N_i і N_0 — середні числа атомів у збудженому і основному станах, E_i і E_0 — відповідно енергія збудженого і основного станів, T — абсолютна температура, $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — стала Больцмана. На рис. 9.15 наведено розподіл Больцмана для населеності декількох дискретних енергетичних рівнів.

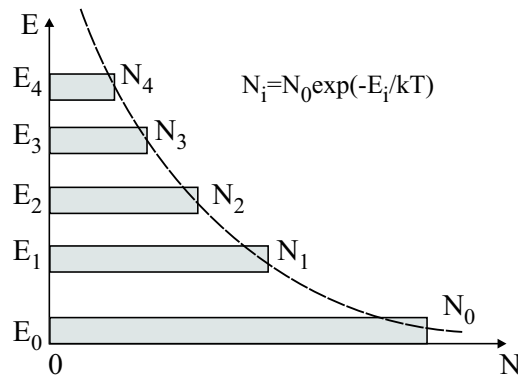


Рисунок 9.15

Населеність кожного рівня показана в масштабі відносно населеності основного рівня. Із (9.10) можна отримати відношення населеностей двох довільних енергетичних рівнів E_i і E_j :

$$\frac{N_j}{N_i} = e^{-\frac{E_j - E_i}{kT}} = e^{-\frac{\Delta E_{ij}}{kT}}. \quad (9.11)$$

Таким чином, для певного числа енергетичних рівнів, заданої температури і відомого повного числа атомів можна точно встановити рівноважне число атомів, які знаходяться в будь-якому енергетичному стані.

Розглянемо два екстремальні випадки: $\Delta E_{ij} \ll kT$ і $\Delta E_{ij} \gg kT$.

Коли $\Delta E_{ij} \ll kT$ (*високотемпературний випадок*), $N_i/N_j \approx 1$ і населеність рівня E_i майже рівна населеності рівня E_j . Якщо б E_j відповідала енергії основного рівня E_0 , то, як впливає із (9.11), атомні стани з енергіями, відрахованими від основного стану і малими в порівнянні з kT , були б населені приблизно так, як і основний стан. При $\Delta E_{ij} \gg kT$ (*низькотемпературний випадок*) больцманівське відношення дуже мале і на верхньому енергетичному рівні не знайдеться практично ні одного атома. Межею між цими двома випадками є $\Delta E_{ij} = kT$, що еквівалентно рівності

$$h\nu_{ij} = kT. \quad (9.12)$$

При кімнатній температурі ($T = 300 \text{ K}$) частота, знайдена за (9.12) дорівнює $6 \cdot 10^{12} \text{ Гц}$. Випромінювання з цією частотою лежить в далекій інфрачервоній ділянці спектра ($\lambda = 50 \text{ мкм}$). Легко підрахувати, що при кімнатній температурі верхні енергетичні рівні практично не населені (по суті, всі атоми знаходяться в основному енергетичному стані).

Із (9.11) визначимо температуру

$$T = \frac{\Delta E_{ij}}{k} \frac{1}{\ln \frac{N_j}{N_i}}. \quad (9.13)$$

Із (9.13) видно, що при $N_j > N_i$, коли більшість атомів знаходяться в незбудженому стані, $\ln \frac{N_j}{N_i} > 0$ і *абсолютна температура T є додатною*. При $N_j = N_i$, коли населеність рівнів однакові, $\ln \frac{N_j}{N_i} = 0$ і *абсолютна температура перетворюється в нескінченність*. При $N_j < N_i$, коли більшість атомів знаходяться в збудженому стані¹, $\ln \frac{N_j}{N_i} < 0$ і *абсолютна температура є від'ємною*.

Отже, *від'ємна абсолютна температура є характеристикою нерівноважного стану*.

¹В цьому випадку кажуть, що середовище існує в стані з інверсною населеністю.

Із (9.11) видно, що при підвищенні $T N_j \rightarrow N_i$, але не може перевершити його. В умовах термодинамічної рівноваги населеність верхнього енергетичного стану ніколи не може бути більшою за населеність нижнього енергетичного стану. Як же тоді здійснюється інверсна населеність в лазері? Привести середовище в стан *інверсної населеності* можна за допомогою зовнішнього джерела енергії (освітлення, бомбардування швидкими частинками тощо). *Збудження* або *накачування* атомів лазерного середовища відбувається так, щоб їх розподіл за рівнями енергій істотно відрізнявся від розподілу при термодинамічній рівновазі. Як тільки в середовищі буде досягнута інверсна населеність, стає можливим підсилення світла за допомогою вимушеного випромінювання. Існує чимало різних способів накачування сукупності атомів, за яких реалізується інверсна населеність. Однак перш ніж розглянути деякі із цих способів, з'ясуємо основні оптичні схеми функціонування квантових генераторів.

В залежності від кількості переходів, які призводять в кінцевому результаті до інверсії на відповідному (лазерному) переході, квантові системи класифікують на дво-, три- і чотирирівневі системи функціонування робочих центрів. Зрозуміло, що кожна з цих схем є спрощеною моделлю складних процесів, що відбуваються в лазерних системах.

Дворівнева схема в лазерах не застосовується і використовується лише при накачуванні аміачного мазера². Особливістю методу накачування аміачного мазера є те, що інверсна населеність в ньому створюється не за допомогою збудження зовнішнім джерелом енергії, а шляхом фізичного відокремлення молекул, які знаходяться на верхньому енергетичному рівні, від молекул, що перебувають на нижньому рівні.

Схеми оптичного накачування, в яких інверсна населеність досягається в результаті поглинання, вимагають застосування більш складних процесів, ніж пряме збудження із основного стану на верхній рівень лазерного переходу. В три- і чотирирівневих схемах, які застосовуються в лазерах з оптичним накачуванням, обмеження, властиві дворівневій схемі, долаються в результаті здійснення досить складних (непрямих) переходів активного середовища з нижнього на верхній рівень. Вперше *трирівневу схему* (рис. 9.16) запропонував Н.Бломберген (1956р). Нехай є квантова система з трьома енергетичними рівнями $E_0 < E_1 < E_2$ (E_0 — основний енергетичний стан). В стані термодинамічної рівноваги (в нормальному стані) розподіл населеностей (кількість частинок на кожному із цих рівней) підкоряється закону Больцмана

²Мазер — скорочена назва підсилювача мікрохвиль за допомогою вимушеного випромінювання.

(рис. 9.16, а), згідно з яким вищий енергетичний рівень завжди менш населений, ніж нижчий.

Припустимо далі, що всі можливі переходи ($E_1 \rightarrow E_0$, $E_2 \rightarrow E_1$, $E_2 \rightarrow E_0$) дозволені. Якщо таку систему опромінити електромагнітним полем від зовнішнього допоміжного джерела з частотою $\nu_{20} = \frac{E_2 - E_0}{h}$, то в результаті поглинання велике число атомів може перейти з рівня E_0 на самий верхній енергетичний рівень E_2 , а звідти спонтанно перейти на рівень E_1 (рис. 9.16, б).

При достатньо інтенсивному накачуванні значне число атомів може перейти із основного стану на рівень E_1 . Коли населеність рівня E_1 перевершить населеність основного стану, то виникне

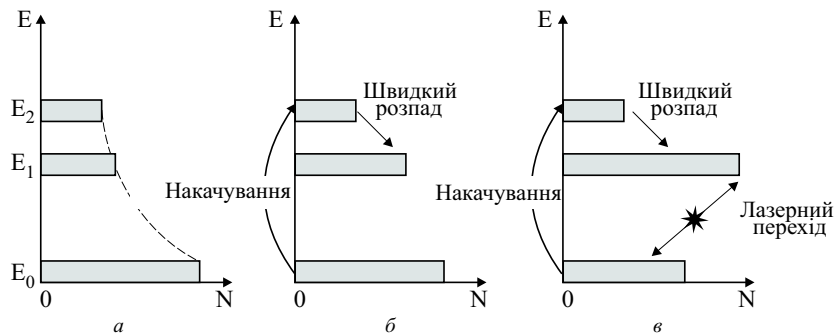


Рисунок 9.16

інверсний стан (рис. 9.16, в). При цьому важливо, щоб безвипромінювальний перехід $E_2 \rightarrow E_1$ був швидким, тобто час життя системи на рівні E_2 повинен бути дуже малим, а рівень E_1 повинен бути метастабільним (з досить великим часом життя). При виконанні цих двох умов, атоми із основного стану швидко переходять на рівень E_1 і відбувається їх нагромадження на цьому рівні. Швидкий перехід $E_2 \rightarrow E_1$ завжди гарантує велику різницю $N_0 - N_2$, в результаті цього ефективність поглинання буде весь час високою.

Квантові системи, які можна призвести в стан з інверсною населеністю енергетичних рівнів і використовувати для індукованого випромінювання, називають активними речовинами.

Вибір того чи іншого варіанту використання переходів залежить від властивостей активної речовини, відстаней між рівнями енергій та імовірностей переходів між відповідними енергетичними рівнями.

Для забезпечення режиму генерації треба мати в системі зворотний зв'язок, який можна дістати за допомогою відкритих оптичних резонаторів. Ідеальний *відкритий резонатор* оптичного діапазону довжин хвиль являє собою систему відбиваючих поверхонь, в якій можуть збуджуватися електромагнітні коливання високих частот. В простішому випадку це два дзеркала з плоскою, сферичною або параболічною поверхнею, віддалені одне від одного на відстань від 10^{-4} м до 5 м. Основне призначення відкритого резонатора оптичних генераторів і підсилювачів - створювати вихідне когерентне випромінювання і здійснювати додатний зворотний зв'язок, за допомогою якого створене індуковане випромінювання багатократно проходить через активне середовище.

Рисунок 9.17

Процес генерації випромінювання ілюструється рис. 9.17, де тверда активна речовина зображена у вигляді циліндра із строго паралельними торцями і поміщена в оптичний резонатор, виконаний у вигляді відбивних шарів, нанесених на торцеві поверхні циліндра.

До початку процесу накачування переважна більшість атомів активної речовини перебуває в основному стані, що умовно на

рис. 9.17, *а* позначено чорними кружечками. Завдяки накачуванню більшість атомів переходить у збуджений стан (рис. 9.17, *б*). Якщо частина збуджених атомів спонтанно переходить в основний стан і випромінює фотони мають напрямки, не паралельні осі активної речовини, то ці фотони виходять за межі речовини (рис. 9.17, *в*) і участі в дальшому процесі не беруть.

Процес індукованого випромінювання починається тоді, коли принаймні один збуджений атом спонтанно випромінить фотон, паралельний осі активної речовини (рис. 9.17, *г*). Цей фотон примусить інший атом випромінити тотожний першому другий фотон і т.д. Процес набуває лавиноподібного характеру, бо фотони поширюються вздовж речовини, послідовно відбиваючись від її торцевих поверхонь (рис. 9.17, *г*, *д*). Частина утвореного пучка виходить через напівпрозорий торець у вигляді вузькоспрямованого, потужного, когерентного світлового променя (рис. 9.17, *е*).

Строга паралельність торцевих пластин забезпечує вузьку спрямованість світлового променя, а участь в процесі індукованих переходів великої кількості збуджених частинок (молекул, атомів) забезпечує велику потужність випромінювання, яка зростає із збільшенням концентрації активних частинок.

Оскільки індуковане випромінювання є процесом резонансним, то воно є *високомонохроматичним*. Сигнал, який виходить з боку напівпрозорої торцевої поверхні, має майже плоский фронт, тому він є *просторово когерентним*, а оскільки сигнал майже монохроматичний, то він *когерентний і в часі*.

Нарешті, зауважимо, що яскравість квантових генераторів (лазерів) становить $B = 10^{11}$ кд/м². Для порівняння відмітимо, що яскравість Сонця на два порядки менша ($B_S = 10^9$ кд/м²).

Лазери з високовідбиваючими дзеркалами, завдяки створеним умовам самозбудження є генераторами світла. Ці дзеркала, як уже відмічалось вище, забезпечують зворотний зв'язок, утворюючи тим самим *оптичний генератор*, який підтримує неперервні електромагнітні коливання на частоті лазерного переходу. На самому початку виникає підсилення на резонансній частоті світла, яке виникло внаслідок спонтанного випромінювання. Однак підсилення спонтанного випромінювання буде продовжуватися лише доти, поки не буде досягнуто деякого *стаціонарного рівня коливань*. Від цього моменту наростання коливань в резонаторі припиняється, і вся додаткова енергія, що виникає внаслідок вимушеного випромінювання, йде на підтримання лазерної генерації. Необхідною умовою, виконання якої обов'язкове для встановлення коливань, є інверсія населеностей на енергетичних рівнях лазерного переходу. Однак просто вимагати, щоб населеність верхнього рівня була більшою, ніж нижнього, недостатньо. Необхідно

врахувати різні енергетичні втрати, в тому числі і на лазерне випромінювання. Щоб компенсувати ці втрати, необхідний деякий мінімальний або пороговий коефіцієнт підсилення $\beta_{\text{пор}}$, який забезпечує виникнення і підтримання лазерної генерації. *Пороговий коефіцієнт підсилення визначає необхідний мінімум інверсної населеності.*

Коефіцієнт підсилення слабкого сигналу, необхідного для стаціонарної генерації лазера, залежить як від складу активного середовища, так і від конструкції лазера і визначається:

$$\beta_{\text{пор}} = \alpha_e + \frac{1}{2L} \ln \frac{1}{R_1 R_2} = \alpha_e + \alpha_0, \quad (9.14)$$

де α_e — коефіцієнт дифракційних втрат та втрат на поглинання і розсіювання в середовищі, $\alpha_0 = \frac{1}{2L} \ln \frac{1}{R_1 R_2}$ — коефіцієнт для вихідного випромінювання лазера, L — відстань між дзеркалами, R_1 і R_2 — коефіцієнти відбиття дзеркал.

Таким чином, якщо корисний вихід розглядати як втрати, то умову стаціонарної генерації лазера можна сформулювати так: *підсилення повинно дорівнювати сумі всіх втрат.* Очевидно, що якщо збільшити потужність накачування так, щоб втрати на процеси генерації світла перевищували всі інші негативні втрати, то яскравість променя, що виходить з лазера, збільшуватиметься. Однак, підсилення світла в лазері безмежно зростати не може. Із зростанням підсилення зростають і процеси спонтанного випромінювання атомів, що перебувають на верхніх "робочих енергетичних рівнях" генератора. Це веде до зменшення інверсії в населеності верхніх енергетичних рівнів і зменшення індукованих переходів і як наслідок - підсилення припиняється. Це явище називають *насиченням в оптичному квантовому генераторі.*

9.5 Застосування лазерів

Лазери використовуються надзвичайно широко в науці (фізика, хімія, біологія, медицина, електроніка) та техніці. Таке широке використання лазерів є прямим наслідком специфічних особливостей і переваг лазерного випромінювання в порівнянні з іншими джерелами енергії. Нижче наведено коротко перелік основних застосувань лазерів.

Галузі застосування, для яких найбільш важливі:

- Енергетичні можливості лазерів
 - Зварювання

- Свердління отворів
- Різка матеріалів
- Обробка тонких плівок
- Випаровування тугоплавких матеріалів
- Термічна обробка металічних і напівпровідникових матеріалів
- Лазерний термоядерний синтез
- Керовані хімічні реакції
- Променева передача енергії
- Розділення ізотопів
- Когерентні властивості лазерів
 - Управління лазерним променем
 - Геодозія, картографія, будівництво
 - Голографія
 - Нелінійні оптичні явища
 - Гірометрія
 - Лазерна спектроскопія
 - вимірювання швидкостей потоків
 - Контроль за забрудненням навколишнього середовища
 - Біологія, медицина
 - Світлодалекометрія, світлолокація

Наведемо лише декілька прикладів із численних застосувань лазерів.

1. В лабораторії квантової радіофізики Фізичного інституту РАН ім. П.М.Лебедева під керівництвом М. Г. Басова створений кінескоп — електронно-променева трубка з лазерним екраном для проєкційного телебачення. В цьому кінескопі замість екрана з люмінофором, використовується тонка напівпровідникова пластинка площею $\approx 1\text{см}^2$. Електронний промінь, що ковзає по цій пластинці, змусовує її генерувати і випромінювати світло. Величина зображення в цьому випадку залежить від розмірів застосованого напівпровідника. Якщо вони рівні розмірам кадра кіноплівки, то зображення можна спроектувати на екран площею 60 м^2 . Колір зображення залежить від природи напівпровідника.

2. Гідним завершенням розвитку експериментальної фізики в ХХ ст. було відкриття бозе-конденсату в парах лужних металів - нового стану речовини (К.Віман, Е.Карнел, М.Андерсон,

Дж.Енмер, М.Метьюс, СІЛА, 1995 р). Бозе-конденсат - це приклад когерентного квантового стану, існування якого раніше передбачалося лише в надтекучих і надпровідних системах. Явище бозе-ейнштейнівської конденсації полягає у можливості накопичення частинок з цілим спіном (бозонів) на найнижчому енергетичному рівні. На основі розвинутих лазерних методів глибокого охолодження атомів до наднизьких температур (порядку сотень $\text{nK}(10^{-9} \text{ K})$) у поєднанні з магнітними уловлювачами вдалось отримати бозе-конденсати атомів лужноземельних металів і, нещодавно (1998 р.), атомів водню, властивості яких тепер інтенсивно досліджуються як теоретично, так і експериментально.

9.6 Запитання для самоконтролю

- 1 Поясніть процес виготовлення голограми.
- 2 Поясніть процес відтворення світлової хвилі за допомогою готової голограми.
- 3 В чому різниця між голограмою та звичайною фотографією? Яка інформація зберігається голограмою (фотографією)?
- 4 Опишіть властивості голограм.
- 5 Наведіть приклади застосування голограм.
- 6 Який важливий оптичний принцип використовується в світлових провідниках?
- 7 Яке явище називається міжмодовою дисперсією?
- 8 В чому полягають процеси спонтанного і вимушеного випромінювання та поглинання?
- 9 Що називається інверсною населеністю?
- 10 Який зміст має від'ємна абсолютна температура?
- 11 Наведіть приклади застосування лазерів.

Приклад 1. Отримана голограма предмета, розташованого на відстані $L = 50$ см від неї. Яким повинен бути розмір D фотопластинки, щоб записати на голограмі деталі розміром $l \approx 0,01$ мм? Довжина хвилі світла $\lambda = 0,5$ мкм.

В голографічній системі, як і в будь-якій іншій оптичній системі, зображення точкового джерела (світнього об'єкта) має вигляд дифракційної смуги, розміри і форма якої визначаються кутовою апертурою пучка світла, дифрагуючого на голограмі. Мінімальна відстань l_{min} між двома близькими світними точками предмета, які розділені на зображенні, виражається формулою

$$l_{min} = \frac{\lambda}{2 \sin u} \quad (9.15)$$

для випадку похилого падіння променів. Тут $2u$ — кут, під яким із місця розміщення точок предмета видно діючу частину голограми (рис. 9.18) (Половина цього кута, тобто кут u носить назву апертури). У формулі (9.15) врахована умова виникнення максимумів першого порядку $\sin u = \lambda/l$, за виконанням якої виникає зображення об'єкта, однак, якість його бажає бути кращою. Чим більше $\sin u$ в порівнянні з λ/l , тим більше максимумів вищих порядків беруть участь у створенні зображення, тобто тим точніше передається спостережуваний об'єкт.

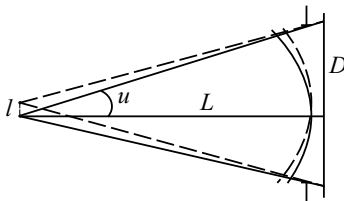


Рисунок 9.18

Якщо припустити, що кут u є малий, то $\sin u \approx u \approx R/L$, де R — радіус діафрагми, L — відстань від предмета до голограми, і умова (9.15) набуде вигляду

$$l_{min} = \frac{\lambda}{2R} L. \quad (9.16)$$

Із (9.16) видно, що якщо відстань l між світними точками менша від l_{min} ($l < l_{min}$), то на голограмі такі точки будуть не розділені. Таким чином умовою розділення є:

$$l \geq \frac{\lambda}{2R} L = \frac{\lambda}{D} L, \quad (9.17)$$

де $D = 2R$ — діаметр діафрагми (фотопластинки). Звідки

$$D > \frac{\lambda L}{l} = 2,5 \text{ см.}$$

Перелік рекомендованих джерел

- [1] Сивухин Д.В. Общий курс физики. В 3-х т. — М.: Наука, 1974.
- [2] Савельев И.В. Курс физики. В 3-х т. — М.: Наука, 1989.
- [3] Бугаєнко Г.О. Курс теоретичної механіки. — К.: Радянська школа, 1968. — 372с.
- [4] Ландау Л.Д., Ахиезер А.И., Лифшиц Е.М. Курс общей физики. Механика и молекулярная физика. — М.: Наука, 1965. — 384с.
- [5] Ахиезер А.И. Общая физика. Электрические и магнитные явления. Справочное пособие. — К.: Наук. думка, 1981. — 472с.
- [6] Рувінський М.А., Остафійчук Б.К., Галушак М.О., Фреїк Д.М., Яцура М.М. Курс загальної фізики. Квантова фізика атомів, молекул і конденсованих середовищ — Київ – Івано-Франківськ, 1998. — 520с.
- [7] Галушак М.О. Курс загальної фізики. Молекулярна фізика і термодинаміка. — Івано-Франківськ: Факел, 2000. — 447с.
- [8] Остафійчук Б.К., Рувінський М.А., Яцура М.М. Курс загальної фізики. Оптика: хвилі, промені, кванти. — Івано-Франківськ: Гостинець, 2003. — 648с.
- [9] Галушак М.О. Курс загальної фізики. Практичні заняття. Кн.1. Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка. — Івано-Франківськ: Місто НВ, 2003. —156с.
- [10] Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. В 9-ти т. — М.: Мир, 1976.
- [11] Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Задачи и упражнения с ответами и решениями — М.: Мир, 1969.