

Роман Лучицький

Ф І З И К А

частина 1

М Е Х А Н І К А

Посібник для самостійної роботи студентів всіх спеціальностей
денної та дистанційної форм навчання

Івано-Франківськ
Видавництво ІФНТУНГ «Факел»
2004

УДК – 53(076)
ББК 22.3

Фізика. ч.1. МЕХАНІКА. Навч. посібник /Р.М. Лучицький.
Івано-Франківськ: Факел, 2004. – 124 с.

У посібнику коротко, у доступній формі подано матеріал, згідно навчальної програми нормативної дисципліни «Фізика» для вищих технічних закладів освіти (затв. Міносвіти України 1998 р.).

Основою даного посібника є електронний посібник для дистанційного навчання для студентів всіх спеціальностей. Кожний розділ завершується контрольними запитаннями для самоперевірки, тестом для контролю засвоєння теоретичного матеріалу, прикладами розв'язування задач, задачами для самостійного розв'язування і тестом – контрольною роботою, яку контролюватиме викладач.

Посібник для самостійної роботи студентів денної та заочної форми навчання.

Резензенти:

М.О. Галушак	- професор, кандидат фізико-математичних наук,
І.І. Чигур	- доцент, кандидат технічних наук, директор центру дистанційного навчання.

ISBN 966-694-034-5

Дане видання – власність ІФНТУНГ
Забороняється тиражувати і розповсюджувати.

Передмова	6
Вступ.....	7
Розділ 1. ПРЕДМЕТ ФІЗИКИ. ФІЗИЧНІ ВЕЛИЧИНИ	8
1.1 Методи фізичних досліджень. Зв'язок фізики з іншими науками	9
1.2 Абстракції та моделі, комп'ютери та математичне моделювання в фізиці	10
1.3 Фізичні величини і їх вимірювання	12
1.3.1 Позначення фізичних величин	13
1.3.2 Розмірність фізичних величин	13
1.3.3 Скалярні фізичні величини.....	14
1.3.4 Векторні величини	14
1.4 Міжнародна система одиниць (СІ).....	16
МЕХАНІКА	
Предмет механіки. Класична, релятивістська та квантова механіки. Фізичні моделі механіки.	
Розділ 2. ОСНОВИ КІНЕМАТИКИ	19
2.1 Простір, розміри , відстані та тривалість	19
2.2 Система відліку.....	20
2.3 Траєкторія і шлях	22
2.4 Переміщення	22
2.5 Швидкість	23
2.6 Прискорення	23
2.7 Рівномірний прямолінійний поступальний рух тіла.....	25
2.8 Рівнозмінний прямолінійний поступальний рух.....	27
2.9 Вільне падіння тіл. Прискорення вільного падіння.....	28
2.10 Рух тіла, кинутого під кутом α до горизонту.....	29
2.11 Рівномірний криволінійний рух по колу	30
2.12 Рівнозмінний рух по колу	32
2.13 Відносність руху. Додавання швидкостей. Перетворення Галілея	33
2.14 Запитання для самоперевірки.....	35
2.15 Приклади і методика розв'язування задач з кінематики.....	37
2.16 Задачі для самостійних вправ.....	42
Розділ 3. ОСНОВИ ДИНАМІКИ	50
3.1 Закони Ньютона.....	50

3.2 Поле тяжіння і його напруженість. Вага тіла. Закон всесвітнього тяжіння	52
3.3 Невагомість	55
3.4 Космічні швидкості. Рух штучних супутників Землі	56
3.5 Види деформацій, пружність та повзучість. Закон Гука	56
3.6 Сила тертя. Коефіцієнт тертя ковзання.....	59
3.7 Поняття про сили інерції	60
3.8 Тиск. Архімедова сила. Гідростатичне зважування. Умови плавання.....	63
3.9 Кількість руху (імпульс). Закон збереження імпульсу	64
3.10 Реактивний рух	65
3.11 Запитання для самоперевірки.....	66
3.12 Приклади розв'язування задач з динаміки	68
3.13 Задачі для самостійних вправ.....	70
Розділ 4. ДИНАМІКА ОБЕРТОВОГО РУХУ	75
4.1 Момент сили. Умови рівноваги твердого тіла	75
4.2 Момент інерції. Закон динаміки обертowego руху	76
4.3 Робота, кінетична енергія та потужність для обертowego руху	78
4.4 Вільні осі. Гіроскопи.....	79
4.5 Момент імпульсу	79
4.6 Запитання для самоперевірки.....	81
4.7 Приклади розв'язування задач	82
4.8 Задачі для самостійних вправ.....	83
Розділ 5. ЕНЕРГІЯ, РОБОТА ТА ПОТУЖНІСТЬ.....	86
5.1 Механічна робота	86
5.2 Потужність	87
5.3 Кінетична енергія	88
5.4 Види механічних сил.....	88
5.5 Потенціальна енергія в полі тяжіння. Потенціал	89
5.6 Закон збереження механічної енергії.....	91
5.7 Запитання для самоперевірки.....	93
5.8 Приклади розв'язування задач	94
5.9 Задачі для самостійних вправ.....	96
Розділ 6. ЕЛЕМЕНТИ МЕХАНІКИ СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ.....	100
6.1 Механічні властивості твердих тіл, рідин та газів.....	100
6.2 Рівняння нерозривності (неперервності) та рівняння Бернуллі для стаціонарної течії ідеальної рідини.....	101

6.3 Вимірювання тиску в потоці	103
6.4 Ламінарна та турбулентна течії. Сили в'язкого тертя.....	105
6.5 Течія рідин та газів по трубах.....	106
6.6 Рух твердих тіл у рідинах та газах.....	107
6.7 Закон подібності Рейнольдса.....	109
6.8 Запитання для самоперевірки.....	109
6.9 Приклади розв'язування задач	110
6.10 Задачі для самостійних вправ.....	112
Розділ 7. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ.....	114
7.1 Передумови спеціальної теорії відносності.	
Постулати Ейнштейна.....	114
7.2 Перетворення координат Лоренцо	115
7.3 Відносність довжини та проміжку часу	
Інтервал між подіями	115
7.4 Релятивістський закон додавання швидкостей	117
7.5 Основний закон релятивістської динаміки.	
Релятивістський імпульс.....	117
7.6 Взаємозв'язок маси і енергії	118
7.7 Границі застосовності класичної механіки	119
7.8 Запитання для самоперевірки.....	119
7.9 Приклади розв'язування задач	120
7.10 Задачі для самостійних вправ.....	122

Передмова

Фізика є базовою дисципліною блоку фундаментальної підготовки інженерів технічних напрямів. Вона необхідна студентам для формування їх світогляду та подальшого успішного освоєння обраної спеціальності.

В першу чергу викладання фізики в технічних вузах має на меті формування у студентів теоретичної бази для вивчення “Електротехніки”, “Механіки рідин та газів”, “Термодинаміки”, “Теорії машин і механізмів”, “Процесів і апаратів хімічних виробництв”, “Опору матеріалів” тощо. Запорукою цьому повинна стати точність та глибина розуміння основних понять, законів та принципів фізики.

По-друге, фізика – експериментальна наука з широко розвиненою системою методів наукових досліджень. Тому під час вивчення фізики відбувається ознайомлення студентів з сучасною науковою апаратурою, вміння оцінювати похибки прямих і непрямих вимірювань. Це поглиблює розуміння суті явищ, знання фізичних величин, одиниць вимірювання та способів їх контролю, вміння користуватись відповідною апаратурою.

По-третє, знайомство з розвитком фізики у світі та в Україні зокрема, з методологією розв’язання складних проблем, що виникали в її історії, буде для студентів невичерпним джерелом творчого підходу до вирішення суто технічних проблем. Класичні приклади використання аналогій, застосування моделювання фізичних процесів, створення ідеальних моделей та абстракцій навчають студентів умінню виділяти головне у кожній проблемі, що буде корисним в їх подальшій повсякденній роботі. Адже такими прикладами якраз і багата фізика.

Насамкінець, вивчення фізики несе і значну виховну роль, підкреслюючи значення людського фактора в освоєнні природи та в посяганні на її таємниці. Біографії більшості видатних вчених можуть стати прикладом служіння науці і людству. Важливо донести до майбутніх інженерів, що фізика, перебуваючи завжди на вістрі технічного прогресу, виступала як джерелом так і засобом розв’язання більшості проблем, зокрема, екологічних, даючи найбільш системний підхід до оцінки екологічної ситуації, формуючи погляд про глобальний взаємозв’язок в Природі, в центрі якої – найбільша цінність – Людина.

Фізика вивчає загальні властивості і закони руху речовини і поля.

Абрам Йоффе

Фізики – це люди, які бачать і знають те, що іншим недоступно.

Ірина Радунська

Вступ

Світ, який нас оточує і який ми стараємось пізнати, – настільки розмаїтий і складний в своїй, як згодом виявляється, високомудрій простоті, що ще надовго залишиться ристалищем для нашого розуму. Адже всесвіт безмежний і вічнозмінний. В ньому народжуються і вмирають зорі, він насичений таємничими для нас об'єктами (чорні діри, пульсари, нейтронні зорі...). До нас в сонячну систему залітають час від часу різні небесні тіла, комети. Планети змінюють періоди обертання та конфігурацію своїх магнітних полів. На Землі настає то потепління, то похолодання, вона піддається різним за тривалістю та інтенсивністю періодичним впливам з боку космосу, Сонця, місяця та планет-супутників. Змінюється погода, чергуються день і ніч, пори року. Відбуваються різні процеси в атмосфері, течуть ріки, вулкани вивергають магму... Відбувається обмін і засвоєння речовин в тваринному і рослинному світі. Всі ці зміни і багато-багато інших є не що іншим як *рухом матерії*.

Фізика – наука про природу, про найбільш фундаментальні закономірності руху матерії, її будову, властивості та види взаємодії. Головна мета фізики – встановити та пояснити закони, за якими відбуваються процеси та явища навколишнього світу.

Розділ 1. ПРЕДМЕТ ФІЗИКИ. ФІЗИЧНІ ВЕЛИЧИНИ

Головне завдання фізики – виявити і пояснити закони природи, якими визначаються всі фізичні явища. Фізика дає фундаментальні знання і формує світогляд.

Сучасна фізика, займаючись головним для науки питанням – пошуком істини, яка дає найбільш повну уяву про фізичний світ, який нас оточує, - розвивається, в основному, в трьох напрямках.

Перший – вивчення найбільш загальних форм руху матерії, які лежать в основі всіх природних явищ; встановлення законів цих рухів і їх взаємозв'язків між собою. Форми рухів матерії, які вивчаються фізикою, називаються фізичними процесами або фізичними явищами.

Так найбільш загальні форми руху матерії – зміна положення тіл одне відносно одного з часом, тобто механічні процеси, - є присутніми, як правило, в усіх інших явищах природи, і є предметом вивчення розділу фізики механіка.

Нова група фізичних процесів пов'язана із зміною тепла і холоду. При цьому змінюються властивості самих тіл, їх форма, стан, розміри, швидкість хімічних реакцій. Все це відноситься до теплових процесів, які теж мають всезагальний характер, тобто є учасниками всіх інших явищ природи.

Електризація одягу із синтетичної тканини, блискавка, телевізор, радіо – все це прояви особливого виду взаємодії тіл, які відносяться до електромагнітних явищ і є предметом вивчення особливого розділу сучасної фізики – електродинаміки.

Другий – вивчення властивостей матеріальних тіл, їх внутрішньої будови; пошук взаємозв'язків між властивостями тіл і їх будовою.

Завдання фізики полягає в тому, щоб, з одного боку, навчитись коректно знаходити кількісні міри для опису і порівняння властивостей тіл, а, з другого, - зуміти побудувати правильні моделі внутрішньої будови тіл. Такими задачами займаються такі розділи сучасної фізики, як молекулярна фізика, електронна теорія, атомна і ядерна фізики.

Третій – пошук можливостей, форм і методів використання законів фізики і властивостей матеріальних об'єктів для потреб людства.

Цими проблемами займається переважна більшість учених-фізиків. Вони є предметом прикладної або ж технічної фізики.

1.1 Методи фізичних досліджень. Зв'язок фізики з іншими науками

Розширюючи свої знання з фізики, розглядаючи необхідний фактичний матеріал, - ми повинні бути готовими до того, що в свідомості має виникати чітке уявлення про науковий метод, характерний для фізики. Само собою зрозуміло, що цей метод є методом експериментальним. Адже фізика, в основному, є дослідною наукою і її закони розкриваються переважно за допомогою досліду, її означення наповнюються змістом за допомогою вимірювань. Чітке розуміння цього експериментального характеру фізичних законів має дуже велике значення: воно робить фізику наукою про природу. Але одночасно воно вказує і на межі застосування встановлених фізичних законів і теорій, які на них ґрунтуються.

Першим кроком для розуміння природи, явищ реального світу є спостереження. Але щоб робити загальні висновки, ми повинні під час аналізу даного явища навчитись його розчленовувати, виділяти окремі елементи і, по можливості, змінювати умови. Тобто необхідно перейти від простого спостереження до експерименту. Завдяки експерименту можна знайти кількісні характеристики окремих елементів явища чи процесу у вигляді величин, які вимірюються з певною точністю.

Віднайдення числових співвідношень між ними – це і є формулювання фізичних законів явищ в кількісній (математичній) формі.

Значно полегшує справу вміння розчленовувати складні явища на простіші. Згадаємо грозу: тут тісно переплітаються різноманітні механічні явища (вітер, рух хмар, утворення вихорів, падіння краплин...): теплові явища і явища молекулярної фізики (випаровування і конденсація пари, форма краплин...); електричні явища (виникнення індукованих зарядів і їх розподіл, виникнення електричної напруги між хмарами, а також хмарами і предметами на поверхні землі в результаті руху висхідних потоків нагрітого повітря, зародження краплин довкола заряджених частинок, електричні розряди, іонізація молекул...); оптичні і акустичні явища (блискавка, грім, веселка...).

Пізнаючи довкілля, людина не просто задовольняє одну із своїх головних потреб, але і прагне використати отримані знання для покращення свого життя, для передбачення можливих небезпек, для прогнозування оптимальних напрямків розвитку. Тому фізика породила цілий ряд інженерних наук – технічну механіку, матеріалознавство, теорію механізмів і машин, теплотехніку, теорію двигунів, електро- і радіотехніку, сучасну електроніку та енергетику і багато інших.

Як праматір всіх природничих наук фізика допомагає хімікам і біологам розкрити внутрішні механізми хімічних і біологічних процесів, геологам – розібратися в особливостях внутрішньої будови земної кулі, допомагає їм створити необхідні інструменти і прилади для їх роботи. Вона нерозривно пов'язана з астрономією, космологією і, звичайно ж, з математикою та зі всіма технічними науками.

1.2 Абстракції та моделі, комп'ютери та математичне моделювання в фізиці.

Фізика, як і інші науки, розглядаючи певні явища чи процеси, користується методом, підходом “від простого до складного”. Першим кроком під час застосування цього методу є позбавлення об'єкта всіх інших його властивостей, окрім тієї, яка є визначальною для даного явища. Такий абстрактний “обезличений” об'єкт веде себе за певних умов так як велика кількість подібних до нього реальних об'єктів за тих же умов. В цьому і полягає суть методу, адже поведінка абстрагованого об'єкта дозволяє в першому наближенні говорити про таку ж поведінку великої кількості реальних об'єктів. Накладання на такі абстракції певних умов-зв'язків створює своєрідну абстраговану фізичну систему – модель. Наприклад, модель ідеального газу: молекули-абстракції – це матеріальні точки, від реальних молекул в них залишено дві визначальні властивості – 1) маса і 2) пружна взаємодія із стінками посудини (імпульс). Ні розміри, ні кількість атомів в молекулах, ні інші їх властивості не розглядаються в моделі. Про них можна потім згадати і поспробувати врахувати, якщо виникне конкретна потреба вивчити поведінку даного реального газу і її відхилення від поведінки моделі.

Дещо глибшого і своєрідного застосування набули абстракції та моделі в фізиці внаслідок широкого поширення комп'ютерів. Весь

спектр використання комп'ютерів у фізиці можна поділити на чотири сфери:

1) числовий аналіз; 2) символні (аналітичні) перетворення; 3) моделювання; 4) управління в реальному часі.

Коли комп'ютер служить інструментом *числового аналізу*, в програму для нього закладають всі суттєві фізичні принципи, а тоді вже проводять операції з великими матрицями, беруть багатомірні інтеграли або ж розв'язують складні диференціальні рівняння.

В теоретичній фізиці все більшого поширення знаходять *аналітичні перетворення*, в яких за допомогою типових програм аналітичних перетворень можна виконати такі математичні операції як диференціювання, інтегрування, розв'язок рівнянь і розкладання в степеневий ряд.

Моделювання характеризується тим, що в програму закладаються всі основні закони моделі з мінімальним аналізом.

В експериментальній фізиці комп'ютери використовують на всіх фазах лабораторного експерименту: для проектування апаратури, управління нею в ході експерименту і до збору та аналізу даних, і тому вони вимагають *програмування в реальному часі*.

Тобто сьогодні вже мало використовувати комп'ютер для навчання фізики. Складніше, але значно важливіше є “навчитись вчити” комп'ютер моделювати фізичні процеси. Тому числове моделювання складає невід'ємну частину сучасної фундаментальної і прикладної науки. По важливості в останні роки воно наближається до традиційних експериментальних і теоретичних методів.

Одна із причин того, що *числове моделювання* стає важливим у фізиці на сьогоднішній день є те, що більшість аналітичних засобів, які застосовуються, таких, наприклад, як диференціальне числення, надаються перш за все для дослідження *лінійних задач*. Але ж більшість природних процесів є *нелінійними*, і лише комп'ютер дає новий ефективний інструмент для їх дослідження.

Друга причина – потреба працювати з системами з багатьма ступенями свободи або з багатьма змінними.

Розвиток комп'ютерної технології приводить сьогодні до нового погляду на фізичні системи. Спроби сформулювати задачу на комп'ютері уже привело до нових формулювань фізичних законів і усвідомлення того, що наскільки практично, настільки і природно

виражати фізичні закони у вигляді правил для комп'ютера, а не на традиційній поки-що мові диференціальних рівнянь.

Іноді числове моделювання називають *обчислювальним експериментом*, оскільки воно має багато спільного з традиційним лабораторним експериментом, наприклад такі аналогії:

лабораторний експеримент	обчислювальний експеримент
зразок	модель
фізичний прилад	програма для комп'ютера
калібрування	тестування програми
вимір	розрахунок
аналіз даних	аналіз даних

Відправним пунктом числового моделювання є розроблення ідеалізованої моделі даної фізичної системи. Потім треба визначити процедуру або *алгоритм* для реалізації цієї моделі на комп'ютері. Комп'ютерна програма моделює фізичну систему і описує обчислювальний експеримент. Таке комп'ютерне моделювання (обчислювальний експеримент) є мостом між лабораторним експериментом і теоретичними розрахунками.

1.3 Фізичні величини і їх вимірювання

Фізичні закони виражають у вигляді математичних співвідношень між фізичними величинами. Під фізичними величинами розуміють виміряні характеристики (властивості) фізичних об'єктів (предметів, станів, процесів). Прикладами таких величин можуть бути: температура, час, довжина, густина, сила струму, тиск, об'єм і ін.

Кожна фізична величина виражає собою добуток її числового значення на одиницю вимірювання, тобто дорівнює числовому значенню, помноженому на одиницю вимірювання. Таким чином, вираз: час дорівнює 5 секунд ($t = 5 \text{ c}$) означає, що виміряний час є п'ятикратне повторення секунди. Із сказаного випливає, що числове значення без одиниці вимірювання не може бути характеристикою фізичної величини.

Основні фізичні величини: у фізиці використовують 7 основних фізичних величин: довжина, час, маса, температура, сила струму, кількість речовини, сила світла.

Похідні фізичні величини: за допомогою основних фізичних величин можна одержати інші фізичні величини (похідні) або

використовуючи вирази для законів природи, або шляхом цілеспрямованого визначення їх через множення або ділення основних величин. Наприклад: швидкість дорівнює шляху, поділеному на час, робота дорівнює силі, помноженій на переміщення і ін..

1.3.1 Позначення фізичних величин

Фізичні величини у формулах, таблицях або на графіках позначаються спеціальними символами. У відповідності з міжнародними угодами введені відповідні стандарти на позначення основних фізичних величин (табл. 1.1).

Таблиця 1.1. Позначення основних фізичних величин

№	Основні фізичні величини	Позначення
1	Довжина	L
2	Час	t
3	Маса	m
4	Сила електричного струму	I
5	Температура за шкалою Кельвіна	T
6	Кількість речовини	n
7	Сила світла	I

Фізична величина, поміщена в квадратні дужки, означає одиницю вимірювання цієї величини, наприклад, вираз $[U] = \text{В}$ читається так: "одиниця вимірювання напруги дорівнює вольту". Якщо фізична величина взята у фігурні дужки $\{U\}$, то це вказує тільки на її числкове значення, наприклад, вираз $\{U\} = 220$ читається так: "числове значення напруги дорівнює 220". Тому що кожне значення фізичної величини виражається добутком числового значення на одиницю вимірювання, то, очевидно, наведений приклад запишеться так: $U = \{U\}[U] = 220 \text{ В}$.

1.3.2 Розмірність фізичних величин

Розмірність фізичної величини встановлює її зв'язок з основними величинами. Вона завжди виражається добутком позначень основних фізичних величин з відповідними для кожної із них показниками степенів. Наприклад: розмірність (dim) швидкості визначається як шлях, поділений на час, тобто $\dim v = L/T = LT^{-1}$. Позначення розмірностей основних фізичних величин,

прийнятих у фізиці у відповідності з міжнародними угодами, показані в таблиці 2.2.

Зверніть особливу увагу: необхідно чітко розрізняти поняття розмірності і одиниці вимірювання, тому що часто одиницю вимірювання помилково називають розмірністю і навпаки.

Таблиця 2.2. Розмірності основних фізичних величин

№	Основні фізичні величини	Позначення
1	Довжина	L
2	Час	T
3	Маса	M
4	Сила електричного струму	I
5	Температура за шкалою Кельвіна	T
6	Кількість речовини	n
7	Сила світла	I

1.3.3 Скалярні фізичні величини

У фізиці потрібно чітко розрізняти скалярні і векторні величини.

Скалярні величини повністю характеризуються числовим значенням і одиницею вимірювання.

Наприклад: час $t = 6$ с, температура $T = 10$ К, електричний заряд $q = 2$ Кл, маса $m = 1$ кг. В розрахунках скалярні величини виражаються дійсними числами і з ними можна виконувати всі без винятку дії, які виконуються з дійсними числами. Скалярні величини можуть мати додатні або від'ємні числові значення (за винятком температури за шкалою Кельвіна).

1.3.4 Векторні величини

Векторна величина характеризується числовим значенням, одиницею вимірювання і напрямом.

Наприклад: швидкість, сила, напруженість електричного поля і ін. Для того, щоб вказати на векторний характер фізичної величини, над її позначенням ставиться стрілка, наприклад: $\vec{v}$ (швидкість), $\vec{F}$ (сила), $\vec{E}$ (напруженість електричного поля) і ін. Часто для позначення векторів використовують потовщені букви. На рисунку векторна величина зображається відрізком, який має довжину і напрям (довжина вектора відповідає числовому значенню величини в певному масштабі). Потрібно мати на увазі,

що якщо напрям векторної величини є не суттєвим, а важливим, є тільки числове значення і одиниця вимірювання, то записують так: $|\vec{F}|$ - модуль вектора $\vec{F}$, або просто F .

Пам'ятайте: що вектори, які можна вільно переміщувати в просторі чи площині паралельно самим собі, називаються вільними; що вектори, які можуть вільно переміщуватися тільки вздовж лінії їх дії, дістали назву колінеарних векторів; що вектори, які виходять з однієї точки і не можуть переміщуватися, називаються ортвекторами.

У фізиці, особливо механіці та електростатиці, приходить додати та відняти вектори, визначати добуток векторної і скалярної величин, скалярний добуток двох векторних величин, векторний добуток двох векторних величин. Відповідні операції над векторними і скалярними величинами можна пригадати, проаналізувавши рис. 1.1 - 1.6.

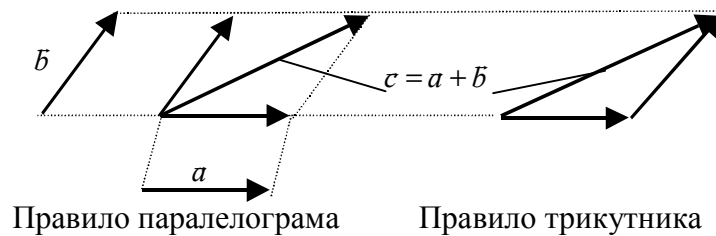


Рисунок 1.1 Додавання векторів

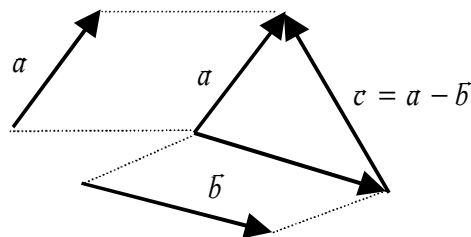


Рисунок 1.2 Віднімання векторів

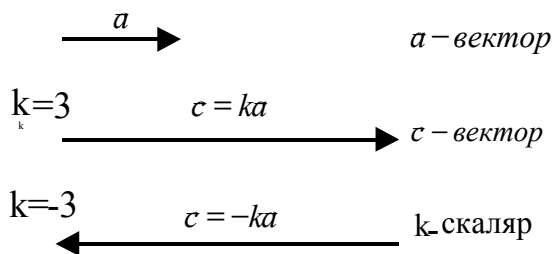


Рисунок 1.3 Множення вектора на скаляр

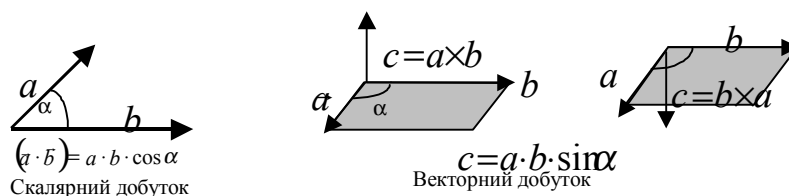


Рисунок 1.4 Множення вектора на вектор

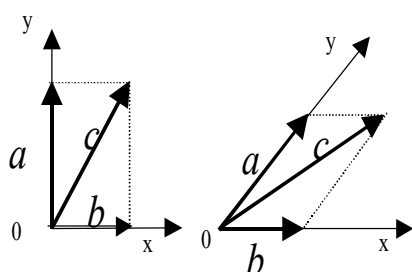


Рисунок 1.5 Розкладання вектора на складові

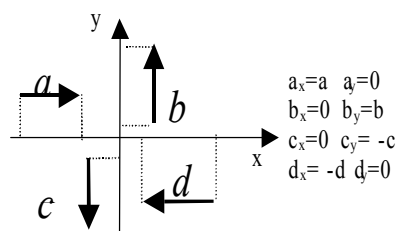


Рисунок 1.6 Проекції вектора на координатні осі

Детальніше з операціями над векторними величинами можна познайомитися в довідниках з математики.

1.4 Міжнародна система одиниць (СІ)

Одним із найважливіших завдань фізики і техніки є вимірювання. Для вимірювання потрібно мати не тільки вимірювальні прилади, але і встановити відповідні одиниці вимірювання, об'єднані в певну систему. В даний час використовується прийнята у 1960 р. єдина Міжнародна система одиниць. На всіх мовах світу вона одержала скорочену назву -

СІ (SI) - система інтернаціональна, а її одиниці називаються одиницями СІ (SI). Кожна із основних фізичних величин вимірюється у відповідних одиницях (табл. 1.3).

Таблиця 1.3. Одиниці вимірювання основних фізичних величин

№	Фізичні величини	Назва одиниць вимірювання	Скорочене позначення
1	довжина	метр	м
2	час	секунда	с
3	маса	кілограм	кг
4	сила струму	ампер	А
5	температура	кельвін	К
6	кількість речовини	моль	моль
7	сила світла	канделла	Кд

Похідні фізичні величини вимірюються у відповідних їм похідних одиницях, наприклад: швидкість у м/с, прискорення у м/с², а їх розмірність відповідно $\dim v = LT^{-1}$, $\dim a = LT^{-2}$, сила – в ньютонах, а розмірність $\dim F = MLT^{-2}$. Більша частина похідних одиниць вимірювання мають назву і скорочене позначення, наприклад: ньютон (Н) – одиниця сили, паскаль (Па) – одиниця тиску, кулон (Кл) – одиниця кількості електрики і ін..

В окремих випадках одиниці вимірювання системи СІ як основні, так і похідні, виявляються дуже великими або дуже малими, тоді за допомогою префіксів можуть бути утворені кратні і частинні одиниці (табл. 1.4).

Таблиця 1.4. Префікси для позначення кратних і частинних одиниць

Префікси	Коротке позначення	Значення	Префікси	Коротке позначення	Значення
дека	да	10 ¹	деци	д	10 ⁻¹
гекто	г	10 ²	санти	с	10 ⁻²
кіло	к	10 ³	мілі	м	10 ⁻³
мега	М	10 ⁶	мікро	мк	10 ⁻⁶
гіга	Г	10 ⁹	нано	н	10 ⁻⁹
тера	Т	10 ¹²	піко	п	10 ⁻¹²
пета	П	10 ¹⁵	фемто	ф	10 ⁻¹⁵
екса	Е	10 ¹⁸	атто	а	10 ⁻¹⁸

Еталонами кожної основної одиниці системи СІ є:

метр - визначається як 165763,73 довжини хвилі випромінювання атома криптону – 86 у вакуумі, що відповідає переходу між його рівнями $2p_{10}$ і $5d_5$;

секунда - дорівнює 9192631,770 періодам випромінювання, що відповідає переходу між двома надтонкими рівнями основного стану атома цезію-133;

кілограм - визначається як маса міжнародного прототипу кілограма платино-іридієвого циліндра висотою 39 мм і діаметром 39 мм, що зберігається в Парижі;

кельвін - дорівнює $1/273,16$ частині температури потрібної точки чистої води;

моль – така кількість речовини, в якій вміщується стільки структурних елементів (молекул), скільки атомів в 12 г ізотопу вуглецю-12;

В 1 молі вміщується $6,022 \times 10^{23}$ структурних елементів (число Авогадро);

кандела – сила світла, що випромінюється чорним тілом перпендикулярно до поверхні площею $1/60 \text{ см}^2$ при температурі 2042,5 К (температура твердіння платини за нормальних умов);

ампер – сила такого електричного струму, який, протікаючи по двох паралельних нескінченно довгих провідниках, розміщених на відстані 1 м один від одного, викликає силу взаємодії $2 \times 10^{-7} \text{ Н}$ на кожний метр довжини провідника.

Потрібно пам'ятати, що крім перерахованих основних величин у системі СІ фігурують додаткові величини: плоский кут, що вимірюється в радіанах (рад), і просторовий (тілесний) кут, що вимірюється в стерadianах (ср).

Радіан – центральний кут, довжина дуги якого дорівнює радіусу кола.

Стерадіан – центральний просторовий (тілесний) кут, площа частини сферичної поверхні якого дорівнює квадрату її радіуса.

МЕХАНІКА

Предмет механіки. Класична, релятивістська та квантова механіки. Фізичні моделі механіки.

Механіка - розділ фізики, що вивчає переміщення одних тіл (частинок) відносно інших в просторі з плином часу та пов'язані з ними взаємодії.

На сьогоднішній день сформувались три вітки механіки: класична, релятивістська та квантова. Класична механіка вивчає відносне переміщення тіл (частинок) з швидкостями, значно меншими від швидкості світла. Основою класичної механіки є закони Ньютона. При цьому простір і час вважаються абсолютними (незалежними від розміщення і руху матеріальних об'єктів), тіла позбавлені квантових ефектів і не розглядається природа взаємодії між ними. Об'єктами вивчення класичної механіки є моделі: **матеріальна точка** (тіло, розмірами якого нехтують в умовах даної задачі, а масу вважають зосередженою в точці); **тверде тіло** (агрегатний стан речовини, який характеризується сталістю форми і об'єму); **суцільне середовище** (неперервне, з однаковими в кожній точці властивостями). Основним завданням класичної механіки є визначення положення тіла в просторі в будь-який момент часу. Класична механіка поділяється на кінематику, динаміку і статику.

Розділ 2. ОСНОВИ КІНЕМАТИКИ.

Основним завданням кінематики є вивчення характеру руху тіла без розгляду причин, які цей рух викликають чи змінюють. Іншими словами, кінематика дає відповідь на запитання: “як тіло рухається”. Основними поняттями кінематики є система відліку, положення тіла в просторі, шлях, переміщення, швидкість, прискорення. Ці поняття виникли в результаті осмислення людиною фундаментальних понять **простору і часу**.

2.1 Простір, розміри, відстані та тривалість

Для фізики і всього природознавства поняття простору і часу є основними. Кожному матеріальному об'єкту притаманна просторова протяжність і віддаленість від інших об'єктів.

Розміри тієї частини простору, в якій рухається дане тіло, називаються масштабом руху. Якщо розміри тіла значно менші (в 100 і більше разів) в порівнянні з масштабом руху, то його можна розглядати як матеріальну точку. Характерні розміри об'єктів, які зустрічаються в природі, і масштаби їх рухів показані на рисунку 2.1.

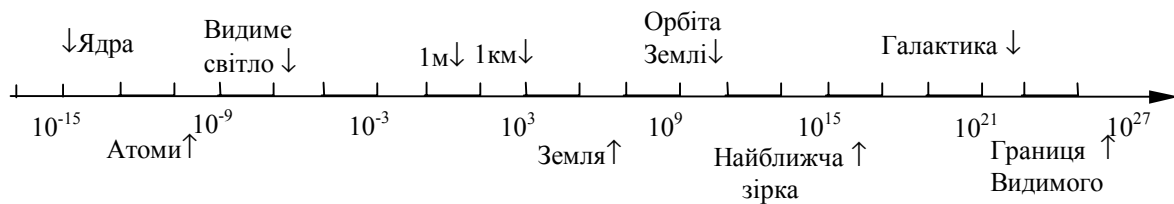


Рисунок 2.1 Характерні відстані та розміри об'єктів

Простір і час є загальними формами існування матерії, тобто матерія є “вмістимим”, а простір і час – формою цього вмістимого. Простір і час, будучи формами об'єктивно існуючої матерії, самі мусять бути об'єктивними.

Тривалість деяких фізичних процесів, характерний час життя зображені на рисунку 2.2, де на логарифмічній шкалі одиницею часу є секунда.

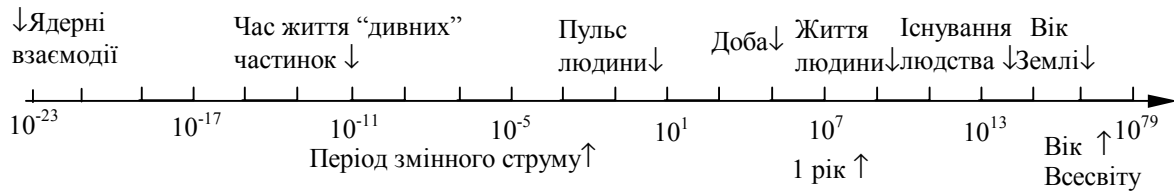


Рисунок 2.2 Характерний час життя та тривалість різних процесів

Час виражає послідовність зміни явищ, процесів одних за одними.

Просторово-часову характеристику **положення тіла** включає в себе поняття системи відліку.

2.2 Система відліку

Система відліку – це тіло відліку, зв'язана з ним система координат і пристрій для вимірювання часу (рис. 2.3). Тіло, відносно якого судять про рух іншого тіла, вважають тілом відліку.

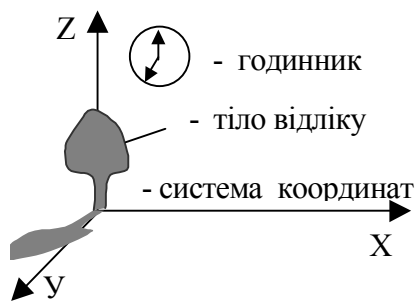


Рисунок 2.3.
Система відліку.

Система координат дає можливість визначити положення тіла (точки) в просторі (три координати), на площині (дві координати) і на прямій (одна координата).

Потрібно мати на увазі, що положення точки може бути задане і радіус-вектором $\vec{r}$.

Системи відліку можуть бути інерціальні і неінерціальні. Оскільки немає абсолютно нерухомих тіл відліку, то немає й абсолютних систем відліку.

Системи відліку, відносно яких рух матеріального тіла підлягає закону інерції, а єдиною причиною зміни вектора швидкості в такій системі є взаємодія між тілами, називають **інерціальними системами відліку**.

Рух інерціальної системи відліку не впливає на закони перебігу явищ у ній. Інерціальна система відліку – це абстракція, яка тоді точніше збігається з реальною системою відліку, якщо взяти тіла, які за час руху даного об'єкта практично можна вважати непорушними. Так, система відліку, пов'язана з поверхнею Землі, тільки наближено може вважатися інерціальною, адже рух Землі навколо Сонця не є рівномірним, а от система відліку, пов'язана з Сонцем і далекими зорями Галактики, - в більшій мірі інерціальна. Інерціальна система відліку постулюється першим законом Ньютона – системи відліку, в яких виконується перший закон Ньютона, є інерціальними. Системи відліку, які рухаються зі сталим вектором швидкості по відношенню до інерціальної системи відліку, також є інерціальними системами відліку. Якщо система відліку інерціальна, то інерціальними будуть системи, утворені такими способами:

- перенесенням початку координат;
- зміною початку відліку часу.

Системи відліку, які обертаються або рухаються з прискоренням, є **неінерціальними**.

Механічним рухом називається зміна з плином часу положення тіл чи їх частинок у просторі відносно інших тіл (частинок). Розрізняють два види руху: поступальний і обертовий.

Рух, під час якого будь-яка пряма, проведена в тілі, під час його руху залишається паралельна сама собі, називається **поступальним**.

Прикладами такого руху може бути рух автомобіля, поїзда, велосипеда і ін.

Рух, під час якого всі точки тіла описують кола, центри яких лежать на одній прямій, що є віссю обертання, називається **обертотим**.

Прикладами такого руху є обертання Землі навколо своєї осі, обертання коліс, шківів, шестерень і ін..

2.3 Траєкторія і шлях

Траєкторія – неперервна лінія, яку описує тіло (матеріальна точка) під час свого руху відносно вибраної системи координат.

Шлях (S) – довжина траєкторії, по якій рухається тіло.

Шлях – скалярна величина і в системі СІ вимірюється в метрах (м), тобто $[S] = \text{м}$.

За формою траєкторії поступальний рух може бути прямолінійним: траєкторія - пряма лінія, і криволінійним: траєкторія - крива лінія. Найпростішим криволінійним поступальним рухом є рух тіла по колу. Не ототожнюйте поступальний рух тіла по колу з обертотим рухом (подумайте чому?).

2.4 Переміщення

Переміщення ($\vec{r}$) - векторна величина, яка з'єднує початкове і кінцеве положення рухомого тіла (матеріальної точки) (рис. 2.4).

Проекції вектора $\Delta\vec{r}$ на ox і oy – це різниця координат його кінця і початку:

$$\Delta r_x = x_1 - x_0;$$

$$\Delta r_y = y_1 - y_0.$$

Величина переміщення, як і шлях, в системі СІ вимірюється в метрах (м), тобто $[r] = \text{м}$.

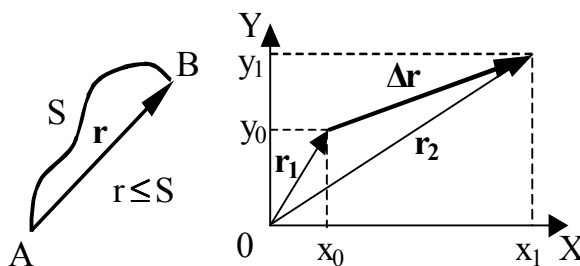


Рисунок 2.4 Шлях і переміщення

2.5 Швидкість

Швидкість ($\vec{v}$) – векторна величина, яка характеризує зміну вектора переміщення з часом і визначається відношенням зміни переміщення ($\Delta\vec{r}$) до проміжку часу (Δt), протягом якого тіло (матеріальна точка) здійснило це переміщення

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \quad (2.1)$$

Якщо рух прямолінійний, то напрям швидкості співпадає з напрямом переміщення, а числове значення переміщення дорівнює числовому значенню шляху (за винятком випадків, коли тіло рухається зворотно і повертається у вихідне положення).

З досвіду відомо, що швидкість рухомого тіла може змінюватись з плином часу, а отже є зміст говорити про середню швидкість і швидкість, яку має тіло в даний момент часу в даній точці траєкторії (миттєва швидкість). Середня швидкість характеризує рух, який уже відбувся, а миттєва швидкість, - який відбувається в даний час. Середня швидкість ($\vec{v}_c$) може бути визначена відношенням переміщення ($\Delta\vec{r}$) до проміжку часу (Δt), протягом якого тіло (матеріальна точка) це переміщення здійснило $\vec{v}_c = \Delta\vec{r}/\Delta t$. Якщо рух прямолінійний, то $v_c = \Delta S/\Delta t$. Практично це співвідношення справедливе для характеристики будь-якого поступального руху тіла.

Миттєва швидкість визначається як границя співвідношення $\Delta\vec{r}/\Delta t$, коли проміжок часу прямує до нуля, тобто

$$\vec{v}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (2.2)$$

Якщо рух прямолінійний, то

$$v_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}.$$

Під час криволінійного руху вектор швидкості завжди напрямлений вздовж дотичної до траєкторії в будь-якій її точці.

Швидкість в системі СІ вимірюється в м/с, тобто $[v] = \text{м/с}$.

2.6 Прискорення

Для характеристики зміни швидкості введена величина, яка називається прискоренням ($\vec{a}$).

Прискорення – векторна величина, яка характеризує зміну

вектора швидкості з плином часу і визначається відношенням зміни швидкості до проміжку часу, протягом якого ця зміна відбувається

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}, \text{ де } \Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1.$$

Так визначається середнє значення прискорення. Якщо швидкість змінюється нерівномірно, то миттєве значення прискорення шукають так:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (2.3)$$

В системі СІ прискорення вимірюється в м/с^2 , тобто $[a] = \text{м/с}^2$.

З рис.2.5 видно, що через час Δt швидкість тіла $\vec{v}$ змінила свій напрям і величину. Тому вектор зміни швидкості можна представити так: $\Delta \vec{v} = \Delta \vec{v}_n + \Delta \vec{v}_\tau$. Тут $\Delta \vec{v}_n$ - зміна швидкості, зумовлена зміною її напрямку, а $\Delta \vec{v}_\tau$ - зміна швидкості, зумовлена зміною її величини. Тоді одержимо:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_n}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_\tau}{\Delta t} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau. \quad (2.4)$$

Тобто повне прискорення тіла дорівнює векторній сумі його **нормального** (доцентрового) і **тангенціального** прискорення.

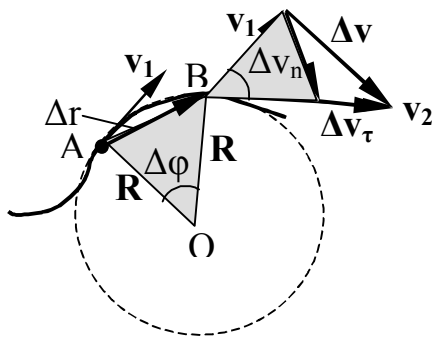


Рисунок 2.5 Зміна швидкості під час обертового руху

Зверніть увагу, що нормальне прискорення завжди напрямлене перпендикулярно (нормально) до дотичної в даній точці траєкторії, а тангенціальне прискорення – вздовж неї. Якщо тіло рухається по прямій лінії, то його повне прискорення рівне тангенціальному і під час збільшення швидкості напрям

прискорення співпадає з напрямом швидкості, а якщо швидкість зменшується, то ці напрями будуть протилежні. Під час криволінійного руху кут між вектором швидкості і повним прискоренням може змінюватися від 0° до 180° , причому під час зростання швидкості цей кут приймає значення від 0° до 90° , а під час її зменшення – від 90° до 180° , відповідно.

Якщо частині траєкторії АВ можна співставити дугу кола

радіусом R , то говорять, що траєкторія в даній точці характеризується **радіусом кривизни**:

$$R = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta\varphi}, \quad (2.5)$$

де ΔS – довжина дуги, що спирається на кут $\Delta\varphi$, або ж **кривизною**:

$$k = \frac{1}{R} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta S}. \quad (2.6)$$

Оскільки $|\Delta\vec{v}_\tau| = v_2 - v_1 = \Delta v$ - зміна величини швидкості за час Δt , то тангенціальне прискорення

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}, \quad (2.7)$$

тобто воно характеризує швидкість зміни величини швидкості.

Із подібності затінених трикутників одержуємо:

$$\frac{|\Delta\vec{v}_n|}{v_1} = \frac{\Delta r}{R} \Rightarrow |\Delta\vec{v}_n| = \frac{v_1}{R} \cdot \Delta r. \quad \text{Тоді значення нормального}$$

прискорення знаходимо за допомогою формули:

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_n}{\Delta t} = \frac{v_1}{R} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{v_1^2}{R}. \quad (2.8)$$

Значення повного прискорення знаходять за формулою:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}, \text{ або за допомогою проєкцій вектора прискорення на відповідні осі координат } a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.$$

Враховуючи зв'язок кутової і лінійної швидкостей, нормальне (доцентрове) прискорення можна виразити через ω :

$$a_n = \omega^2 R = \omega \cdot v. \quad (2.9)$$

В залежності від значення нормальної і тангенціальної складової прискорення, можна розглянути такі часткові випадки рухів.

2.7 Рівномірний прямолінійний поступальний рух тіла:

$$\vec{a} = \vec{a}_n = \vec{a}_\tau = 0; R = \infty; \mathbf{k} = 0; \vec{v} = const.$$

Рух, під час якого тіло за будь-які, але рівні, проміжки часу проходить рівні шляхи (переміщення), називається **рівномірним**. При цьому $\mathbf{v} = \mathbf{v}_x = d\mathbf{x}/dt$, звідки, розділивши змінні і

проінтегрувавши, отримаєм **рівняння рівномірного прямолінійного руху:**

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v} \cdot t. \quad (2.10)$$

Прикладом рівномірного поступального руху може бути: рух автомобіля на певній ділянці шляху, рух корабля в безвітряну погоду і ін., а прикладом рівномірного поступального руху тіла по колу є рух людини на “чортовому колесі”. Швидкість під час рівномірного прямолінійного поступального руху є сталою як за величиною, так і за напрямом. А під час рівномірного поступального руху тіла по кривій лінії модуль швидкості є сталою величиною, але її напрямок змінюється (рис.2.6).

Оскільки для цього випадку $|\vec{r}| = S = x - x_0$, а швидкість є сталою величиною, то можна записати:

$$S = v \cdot t.$$

Вище було наголошено, що основним завданням механіки є визначення положення тіла в будь-який момент часу. Визначивши координати тіла, виконаємо завдання механіки.

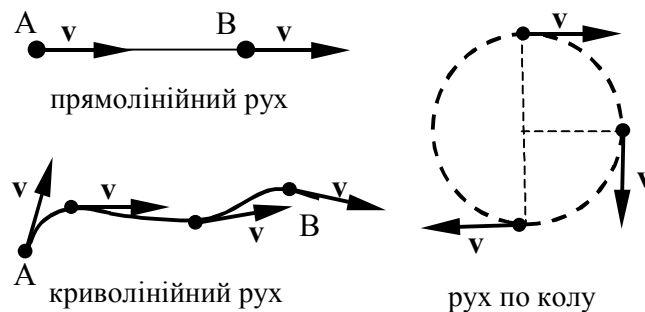


Рисунок 2.6 Приклади різних траєкторій рівномірного руху

Графіком залежності величини переміщення (шляху) від часу розглянутого руху є пряма, яка проходить через початок координат (OS, Ot) і нахилена до осі часу під кутом, величина

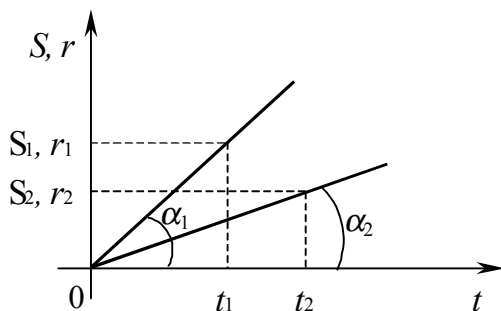


Рисунок 2.7 Залежність шляху від часу для рівномірного руху

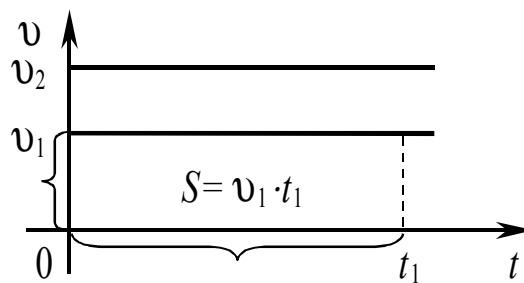


Рисунок 2.8 Залежність швидкості від часу для рівномірного руху

якого прямо пропорційна величині швидкості руху і визначається з умови: $\operatorname{tg} \alpha = v = \Delta S / \Delta t$, (рис.2.7).

Графіком залежності швидкості від часу є пряма лінія, паралельна до осі часу, а величина відрізка, що відтинається прямою на осі швидкості, чисельно дорівнює величині швидкості (рис.2.8).

З графіка видно, що шлях на графіку швидкості зображується площею фігури, обмеженої осями координат OV і Ot , графіком швидкості і перпендикуляром, проведеним до осі часу в точці t_1 :
 $S = v_1 \cdot t_1$.

2.8 Рівнозмінний прямолінійний поступальний рух:

$$a_n = 0; \quad R = \infty; \quad k = 0.$$

Рух, під час якого тіло за будь-які рівні проміжки часу змінює свою швидкість на одну і ту ж величину, називають **рівнозмінним**.

Якщо рух здійснюється вздовж осі OX , то

$$a = a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Проінтегрувавши один раз, одержимо рівняння швидкості:

$$v = v_0 + at, \quad (2.11)$$

де v_0 – швидкість тіла на початку спостереження за рухом, v – швидкість тіла в кінці спостереження, t – час спостереження. Якщо прискорення має напрям, протилежний до напрямку швидкості, то $v = v_0 - at$. Тоді кажуть, що рух рівносповільнений. Якщо тіло починає рух із стану спокою ($v_0=0$), то $v = at$.

Проінтегрувавши другий раз, одержимо рівняння рівнозмінного прямолінійного руху $x(t)$:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}. \quad (2.12)$$

Запам'ятайте, що тільки під час цього руху середня швидкість дорівнює середній арифметичній швидкості $v_c = \frac{v_0 + v}{2}$.

Графіком швидкості рівнозмінного руху, якщо $v_0=0$, є пряма, що проходить через початок координат (Ov , Ot) і нахилена до осі часу під кутом, величина якого пропорційна величині прискорення. Якщо початкова швидкість $v_0 \neq 0$, то пряма

відтинає на осі швидкості відрізок, рівний величині початкової швидкості (рис. 2.9).

Шлях під час рівнозмінного руху також можна визначити, використовуючи значення середньої швидкості, а саме:

$$S = v_{\text{ср}} t = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t = \frac{v_0 + v_0 + at}{2} \cdot t = v_0 t + \frac{at^2}{2}. \quad (2.8)$$

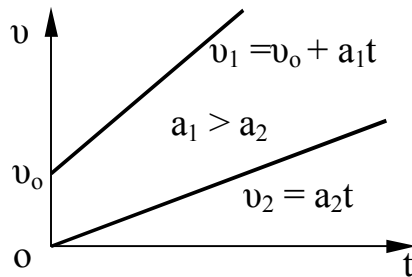


Рисунок 2.9 Залежність швидкості від часу для рівнозмінного (рівноприскореного) руху

Запам'ятайте, що рівномірний рух описується рівнянням $S = v \cdot t$, а рівнозмінний рух описується рівняннями: $v = v_0 \pm at$ і

$$S = v_0 t \pm \frac{at^2}{2},$$

а також, що для рівномірного руху $v = \text{const}$, а для рівнозмінного — $a = \text{const}$.

2.9 Вільне падіння тіл. Прискорення вільного падіння

Вільне падіння — рух, який здійснювало б тіло під дією лише сили тяжіння, є частковим випадком рівнозмінного руху з $\vec{a} = \vec{g} = \text{const}$.

Перші досліди з вивчення вільного падіння виконав Ньютон (пригадайте трубку Ньютона). Він довів, що всі тіла, незалежно від їх маси, на даній географічній широті з даної висоти падають під дією сили тяжіння з однаковим прискоренням, яке дістало назву прискорення вільного падіння.

Прискорення вільного падіння залежить тільки від географічної широти і висоти, з якої тіло падає:

$$g = G \frac{M_3}{(R + h)^2},$$

де G — гравітаційна стала; M_3 — маса Землі; R — радіус Землі; h — висота тіла над рівнем моря. Для середніх широт і невеликих висот $g = 9,81 \text{ м/с}^2$.

Оскільки вільне падіння є частковим випадком рівнозмінного (рівноприскореного) руху, то воно буде описуватись рівняннями:

$$v = gt; \quad h = \frac{gt^2}{2}, \quad (2.14)$$

а координата тіла:

$$y = y_0 \pm \frac{gt^2}{2}.$$

Якщо тіло кинуте вертикально вгору або вниз, то рівняння мають відповідно такий вигляд:

$$\left. \begin{aligned} v &= v_0 \pm gt; \\ y &= y_0 \pm v_0 t \pm \frac{gt^2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

Пам'ятайте, що знак проекції векторів швидкості і прискорення залежить від напрямку осі ОУ і даного вектора.

2.10 Рух тіла, кинутого під кутом α до горизонту:

$$\vec{a} = \vec{g} = \text{const}.$$

Це є складний рух, який складається з двох поступальних рухів: горизонтального (рівномірного) за інерцією і вертикального вгору і вниз (вільне падіння) під дією сили тяжіння.

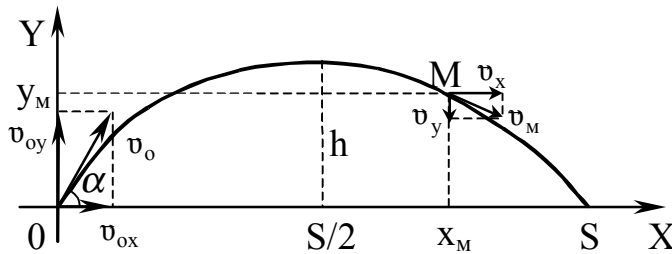


Рисунок 2.10 Складний рух тіла, кинутого під кутом до горизонту

Розклавши початкову швидкість тіла на горизонтальну і вертикальну складові (рис. 2.10), знаходимо координати довільної точки М на траєкторії тіла в даний момент часу t :

$$v_{0x} = v_x = v_0 \cos \alpha;$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \alpha;$$

$$x = v_{0x} t = v_0 \cdot t \cdot \cos \alpha;$$

$$y = v_{0y} t - \frac{gt^2}{2} = v_0 \cdot t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

Підставивши значення $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$ в рівняння

$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}$, одержимо рівняння траєкторії руху тіла (зв'язок між y і x):

$$y = \frac{v_0 \sin \alpha \cdot x}{v_0 \cos \alpha} - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} = x \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2. \quad (2.16)$$

Оскільки g , v_0 і α для конкретного руху є сталими величинами, то траєкторією руху є парабола (опором повітря нехтуємо).

Швидкість, яку має тіло в будь-якій точці траєкторії, можна визначити як векторну суму її горизонтальної (незмінна в часі) і вертикальної ($v_y = v_{oy} - gt = v_0 \sin \alpha - gt$) складових: $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$, а її модуль: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

Максимальне переміщення тіла протягом всього часу польоту (t_n) в горизонтальному напрямі (дальність польоту S) і вертикальному напрямі (максимальна висота підйому h в момент $t = t_n/2$) визначається із умови:

$$v_y = 0 = v_0 \sin \alpha - g \frac{t_n}{2}.$$

Звідси $t_n = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$. Тоді

$$S = v_0 t_n \cos \alpha = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}; \quad (2.17)$$

$$h = \frac{v_0 t_n \sin \alpha}{2} - \frac{gt_n^2}{2 \cdot 4} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} - \frac{g4v_0^2 \sin^2 \alpha}{2 \cdot 4g^2} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \quad (2.18)$$

Зверніть особливу увагу на те, що: 1) в точці максимального підйому ($v_y = 0$) повне прискорення тіла $a = g = (v_0 \cos \alpha)^2 / R$; 2) горизонтальна швидкість v_x тіла, як для руху тіла, кинутого горизонтально, так і під кутом до горизонту, з часом не змінюється (за умови відсутності опору повітря), а вертикальна складова швидкості v_y змінюється за законом $v_y = v_{oy} \pm gt$ (для руху тіла вгору – зменшується, а для його падіння вниз – збільшується).

2.11 Рівномірний криволінійний рух по колу:

$$v = \text{const}; \rightarrow a_\tau = 0; a = a_n = v^2/R; R = \text{const}.$$

Рівномірним рухом тіла по колу (частковий випадок рівномірного криволінійного руху, коли нормальне прискорення на протязі всього часу руху спрямоване в одну точку – центр кола)

називається такий поступальний рух, для якого модуль лінійної швидкості v всіх точок тіла залишається незмінним, але однаково змінюється її напрям.

Період (T) – час, протягом якого тіло (матеріальна точка) проходить шлях, рівний довжині кола.

Одиницею вимірювання періоду є секунда (с), $[T] = \text{с}$.

Кількість обертів, які здійснює тіло (матеріальна точка) за одиницю часу, називають **частотою обертання(n)**.

Одиницею вимірювання частоти є герц (Гц), $[n] = \text{Гц}$.

Між періодом і частотою є зв'язок:

$$T = \frac{1}{n}.$$

Для характеристики руху матеріальної точки по колу, а також для обертального руху тіл, вводяться кутові величини – кут повороту радіус-вектора, кутові швидкість і прискорення.

Кутова швидкість ($\vec{\omega}$) – векторна величина, значення якої визначається відношенням кута повороту ($\Delta\phi$) рухомого радіуса R до проміжку часу (Δt), протягом якого цей поворот здійснюється, тобто:

$$\omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}. \quad (2.19)$$

Оскільки під час рівномірного руху тіла по колу за час, що дорівнює періоду T, рухомий радіус повертається на кут 2π , то можна записати:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n. \quad (2.20)$$

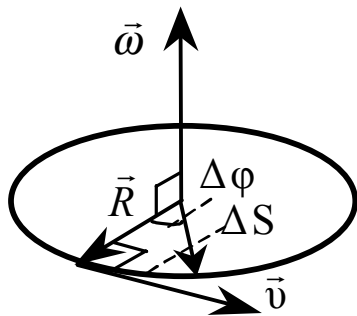


Рисунок 2.11 Напрямок і відлік кутових характеристик для обертального руху тіла

Миттєве значення кутової швидкості рівне першій похідній кута повороту радіус-вектора по часу:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{d\phi}{dt} = \phi'. \quad (2.21)$$

Напрямок кутової швидкості визначається за **правилом правого гвинта**: якщо напрям руху тіла по колу співпадає з напрямом правого гвинта, то поступальний рух гвинта вказує на напрям кутової швидкості (рис. 2.11).

В системі СІ кутова швидкість вимірюється в рад/с;
 $[\omega] = \text{рад/с}$.

Швидкість, з якою тіло (точка) рухається по колу, називають **лінійною**:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R \Delta \varphi}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = R \omega,$$
 або ж у векторному вигляді:

$$\vec{v} = (\vec{\omega} \times \vec{R}). \quad (2.22)$$

Під час рівномірного руху тіла по колу за час, рівний періоду T , тіло (матеріальна тачка) проходить шлях $2\pi R$, тоді лінійна швидкість $v = \frac{2 \pi R}{T}$.

2.12 Рівнозмінний рух по колу: $a_\tau \neq 0$; $R = \text{const}$; $\varepsilon = \text{const}$.

Кутовим прискоренням називається векторна величина, рівна першій похідній від кутової швидкості по часу:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (2.23)$$

Оскільки $a_\tau = \frac{dv}{dt}$, а $a_n = \frac{v^2}{R}$, то зв'язок між кутовими і лінійними величинами в кінематиці має вигляд:

$$S = R \varphi,$$

$$v = R \omega,$$

$$a_\tau = R \varepsilon,$$

$$a_n = R \omega^2.$$

Тоді повне прискорення тіла

$$a = \sqrt{R^2 \varepsilon^2 + \omega^4 R^2} = R \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (2.24)$$

Для рівнозмінного руху по колу $\varepsilon = \text{const}$, тоді рівняння рівнозмінного руху по колу, виражені через кутові характеристики, мають вигляд:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \varepsilon t, \\ \varphi &= \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

Зверніть увагу на те, що для одного і того ж значення кутової швидкості, лінійна швидкість більша у того тіла (точки), яке далі розміщене від центра кола.

Кутове прискорення в системі СІ вимірюється в рад/с^2 ,
[ϵ]= рад/с^2 .

2.13 Відносність руху. Додавання швидкостей. Перетворення Галілея.

Розглянувши основні поняття кінематики та найпростіші рухи, можна з впевненістю стверджувати, що будь-який рух і стан спокою є відносними. В природі не існує абсолютного руху і абсолютного спокою. Згідно з принципом відносності (сформульованим Галілеєм у 1638 р.) закони механіки однакові в будь-якій інерціальній системі відліку, тобто всі механічні процеси за одних і тих же умов протікають однаково. Спостерігач, знаходячись в інерціальній системі відліку, не може за перебігом механічних змін у цій системі визначити швидкість цієї системи (визначити, чи система рухається рівномірно, чи знаходиться в спокої).

В повсякденному житті людини доводиться мати справу із складними рухами, тобто рухами, які складаються з декількох простих рухів, наприклад: рух вантажу, що піднімається краном, рух човна на переправі через річку і ін.. Для таких рухів виникає потреба у визначенні результуючого переміщення і результуючої швидкості. Результуючі переміщення і швидкість визначаються просто у випадку, коли прості рухи спрямовані в одному напрямі: вони дорівнюють сумі, коли напрями рухів співпадають, і різниці, - коли напрями протилежні. Крім цього випадку, буває потреба у визначенні переміщення і швидкості, коли прості рухи (швидкості) напрямлені під певним кутом, наприклад: швидкість човна, який перепливає річку, напрямлена під певним кутом до течії (рис. 2.12).

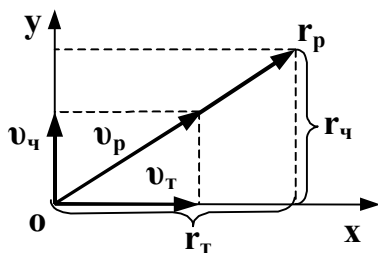


Рисунок 2.12 Швидкість і переміщення
для складного руху човна по річці

Результуюча швидкість в таких випадках дорівнює векторній сумі складових швидкостей:

$$\vec{v}_p = \vec{v}_ch + \vec{v}_m,$$

де v_{ch} – швидкість човна під дією зусиль весляра, v_t – швидкість течії, v_p – результуюча швидкість човна.

Векторною сумою визначається і результуюче переміщення: $\vec{r}_p = \vec{r}_q + \vec{r}_m$. Модуль переміщення і модуль швидкості, відповідно, визначаються:

$$r = \sqrt{r_q^2 + r_m^2} \quad \text{і} \quad v = \sqrt{v_q^2 + v_m^2}.$$

Зверніть увагу на те, що ці формули справедливі тільки для випадків, коли складові напрямлені перпендикулярно.

Часто під час розгляду складних рухів виникає потреба у визначенні складових (простих) рухів (дивіться рух тіла, кинутого горизонтально і під кутом до горизонту).

Оскільки будь-який рух є відносним, а отже залежить від вибору системи відліку, то і швидкість, і переміщення (координата) також залежать від вибору системи координат. Тому Галілеєм для зв'язку між координатами, а значить і для переходу від однієї системи відліку до іншої, були виведені рівняння, які дістали назву перетворень Галілея.

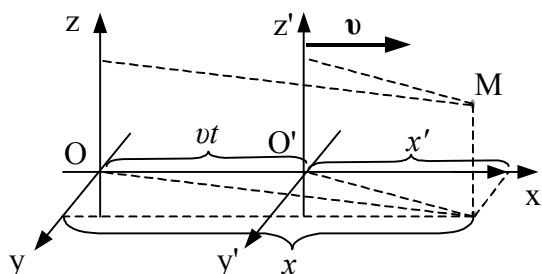


Рисунок 2.13 Нерухома і рухома (штрихова) системи відліку

Нехай дано інерціальну систему відліку OXYZ (рис. 2.13). Якщо інша система O'X'Y'Z' рухається відносно першої із швидкістю v , напрям якої співпадає з віссю OX, а OY//O'Y' і OZ//O'Z', то координати матеріальної точки M (тіла) в системі OXYZ можна виразити через координати x' , y' , z' системи O'X'Y'Z', тобто:

$$\begin{aligned} x &= x' + v \cdot t, \\ y &= y', \\ z &= z'. \end{aligned}$$

В початковий момент часу $t=0$ початки координат обох систем співпадають, тоді $x=x'$, $y=y'$ і $z=z'$. У класичній механіці, як відомо, постулюється, що час t і t' в обох системах однаковий, тому $t = t'$. Рівняння (2.26)

$$\begin{cases} x = x' + v \cdot t; \\ y = y'; \\ z = z'; \\ t = t' \end{cases} \quad (2.26)$$

є формулами для переходу від однієї системи відліку до іншої і називаються **перетвореннями Галілея**.

Якщо взяти першу, а потім і другу похідну від $x = x' + vt$, то одержимо зв'язок між швидкостями і прискореннями в різних системах:

$$v = v' + u; \quad a = a'. \quad (2.27)$$

2.14 Запитання для самоперевірки

Шановний читачу, перед тим як приступити до розв'язування задач для закріплення теоретичного матеріалу, постарайтесь дати відповіді на запитання:

1. Що вивчає фізика?
2. Яке завдання механіки взагалі і кінематики зокрема?
3. Яка різниця між середньою і миттєвою швидкістю і як їх можна визначити?
4. Що розуміють під швидкістю і прискоренням та в яких одиницях вони вимірюються?
5. Чим відрізняються рівномірні рухи від рівнозмінних і що в них є спільного?
6. Якими рівняннями описуються рівномірні і рівнозмінні рухи?
7. Які графічні залежності переміщення (шляху), швидкості і прискорення від часу?
8. З яких рухів складається рух тіла, кинутого під кутом до горизонту?
9. Як визначити дальність польоту тіла, кинутого горизонтально і під кутом до горизонту?
10. Як визначити максимальну висоту падіння тіла, кинутого під кутом до горизонту?
11. Як визначити швидкість тіла, кинутого горизонтально і під кутом до горизонту в будь-якій точці траєкторії?

12. Якими величинами описується рівномірний рух тіла по колу і який між ними зв'язок?

13. Чому не можна ототожнювати розмірність фізичних величин з їх одиницями вимірювання?

Тест для контролю засвоєння теоретичного матеріалу:

1. Яка різниця між шляхом і переміщенням ?

Варіанти відповіді: **А** - шлях більший, а переміщення менше; **В** – переміщення - вектор, що з'єднує початкову та кінцеву точки руху, а шлях – скалярна величина, довжина траєкторії між цими точками; **С** – коли рух криволінійний, то немає різниці; **Д** – серед вищенаведених відповідей немає правильної.

2. Що розуміють під механічним рухом?

Варіанти відповіді: **А** – переміщення тільки механічних тіл; **В** – зміна в часі лінійних розмірів об'єктів; **С** – зміна в часі взаємного положення тіл в просторі; **Д** – зміна властивостей тіл в просторі з часом.

3. Який рух називають вільним падінням і якими рівняннями він описується?

Варіанти відповіді: **А** – це рух без сили тертя з постійною швидкістю, $x = x_0 + v \cdot t$; **В** – це рух по параболі $y = g x^2/2$; **С** – це рух під дією тільки сили тяжіння, $y = y_0 + v_0 \cdot t + g t^2/2$; **Д** - це рівномірний рух в полі тяжіння на великих висотах над поверхнею Землі, $y = R + v \cdot t$.

4. З яких рухів складається рух тіла, кинутого горизонтально?

Варіанти відповіді: **А** – з рівномірного по горизонталі і вільного падіння по вертикалі; **В** – з рівноприскореного по горизонталі і рівномірного по вертикалі; **С** – з руху по колу по горизонталі і прямолінійного по вертикалі; **Д** – з руху по параболі по горизонталі і рівносповільненого руху по вертикалі.

5. Яка різниця між прискоренням поступального прямолінійного руху тіла і доцентровим прискоренням руху тіла по колу?

Варіанти відповіді: **А** – немає різниці, їх напрям завжди співпадає з напрямом швидкості; **В** – доцентрове прискорення завжди більше, ніж прискорення прямолінійного руху; **С** – вони напрямлені завжди в протилежні сторони; **Д** – прискорення

прямолінійного руху співпадає з напрямом швидкості (або протилежно до неї напрямлене), а доцентрове прискорення напрямлене перпендикулярно до вектора швидкості.

2.15 Приклади і методика розв'язування задач з кінематики

Під час розв'язування задач доцільно притримуватися такої послідовності:

1. Проаналізувавши умову задачі, зробіть короткий запис умови, при цьому дані умови задачі виразить в системі СІ.
2. Зробіть, де це потрібно, креслення, схему або рисунок, які б пояснювали описаний в умові задачі процес.
3. Після аналізу умови задачі опишіть її рівняннями та перетворіть їх так, щоб в кінцеве рівняння входили тільки величини, дані в умові задачі, і шукана величина.
4. Перевірте одиниці вимірювання шуканої величини, цим самим Ви зробите перевірку правильності розв'язку задачі.
7. Якщо одиниці вимірювання відповідають шуканій величині, то підставте числові дані і виконайте обчислення.
8. Оцініть числове значення шуканої величини і запишіть відповідь.

Задача першого рівня складності

1. Протягом десятих секунд швидкість космічної ракети збільшилася від 1 км/с до 7 км/с. З яким прискоренням рухалась ракета?

Дано:

$$v_0 = 1 \text{ км/с} = 1 \cdot 10^3 \text{ м/с}$$

$$v = 7 \text{ км/с} = 7 \cdot 10^3 \text{ м/с}$$

$$t = 10 \text{ с}$$

$$a - ?$$

Розв'язування

Рух ракети рівноприскорений, тому

$$v = v_0 + at, \quad \text{звідки} \quad a = \frac{v - v_0}{t}.$$

Перевірка одиниць вимірювання:

$$[a] = \frac{\frac{\text{м}}{\text{с}}}{\text{с}} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Підставивши числові дані, одержимо:

$$a = \frac{7 \cdot 10^3 \frac{\text{м}}{\text{с}} - 1 \cdot 10^3 \frac{\text{м}}{\text{с}}}{10 \text{ с}} = 0,6 \cdot 10^3 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Відповідь: ракета рухалась з прискоренням $0,6 \cdot 10^3 \text{ м/с}^2$.

Задачі другого рівня складності

1. Ескалатор метро піднімає пасажирів, що нерухомо стоїть на ньому, за 1 хв. Ідучи по нерухомому ескалатору, пасажир піднімається за 3 хв. За який час пасажир підніметься, ідучи по рухомому ескалатору?

Дано:

$$t_1 = 1 \text{ хв} = 60 \text{ с}$$

$$t_2 = 3 \text{ хв} = 180 \text{ с}$$

$$t = ?$$

Розв'язування

Пасажир в першому і в другому випадках проходить однакову відстань. В першому випадку $S = v_e t_1$, а в другому $S = v_{\text{п}} t_2$, де v_e - швидкість ескалатора, $v_{\text{п}}$ - швидкість пасажирів. Таку ж відстань проходить пасажир і у випадку, коли він

рухається по рухомому ескалатору. $S = (v_{\text{п}} + v_e) t$. Підставивши в останню рівність значення швидкостей $v_e = \frac{S}{t_1}$ і $v_{\text{п}} = \frac{S}{t_2}$,

визначимо час t :

$$S = \left(\frac{S}{t_1} + \frac{S}{t_2} \right) \cdot t; \quad 1 = \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} \right) \cdot t;$$

$$\text{і тоді } t = \frac{1}{\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}} = \frac{t_1 \cdot t_2}{t_1 + t_2}.$$

Перевірка одиниць вимірювання:

$$[t] = \frac{\text{с}^2}{\text{с}} = \text{с}.$$

Підставивши числові дані, одержимо значення шуканої величини.

$$t = \frac{60 \cdot 180 \text{с}^2}{60 \text{с} + 180 \text{с}} = \frac{1080}{24} \text{с} = 45 \text{с}.$$

Відповідь: 45 с.

2. Швидкість тіла, що вільно падало, в момент удару об Землю була 12 м/с. З якої висоти впало тіло? Прискорення вільного падіння вважати рівним 10 м/с².

Дано:	Розв'язування
$v = 12 \text{м/с}$	Висота при вільному падінні $h = \frac{gt^2}{2}$. Для її визначення необхідно знати час, протягом якого падало тіло.
$g = 10 \text{м/с}^2$	
$h - ?$	

Час t можна визначити із $v = gt$; $t = \frac{v}{g}$, і тоді $h = \frac{gv^2}{2g^2} = \frac{v^2}{2g}$.

Перевірка одиниць вимірювання:

$$[h] = \frac{\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}}{\frac{\text{м}}{\text{с}^2}} = \text{м}.$$

Підставивши числові дані, одержимо значення шуканої величини:

$$h = \frac{12^2 \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}}{2 \cdot 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}} = 7,2 \text{ м}.$$

Відповідь: тіло впало з висоти 7,2 м.

Задачі третього рівня складності

1. Потяг відійшов від станції і 15 с рухався рівноприскорено. Визначити шлях, пройдений потягом за цей час, і його швидкість в кінці цього шляху, якщо шлях, пройдений ним протягом 15-ї секунди на 2 м більший, ніж за попередню секунду.

Дано:

$$t = 15\text{с}$$

$$S_{15} - S_{14} = 2\text{м}$$

$$S - ? \quad v_{15} - ?$$

Розв'язування

Тому, що рух потягу зі стану спокою рівноприскорений, шляхи, пройдені ним за чотирнадцяту секунду (S_{14}) і за п'ятнадцяту секунду (S_{15}), можна визначити з рівнянь:

$$S_{15} = v_{14}t_1 + \frac{at_1^2}{2}; \quad S_{14} = v_{13}t_1 + \frac{at_1^2}{2},$$

де $t_1 = 1\text{с}$, v_{14} - швидкість в кінці 14-ї секунди, v_{13} - швидкість в кінці 13-ї секунди.

За умовою задачі

$$S_{15} - S_{14} = v_{14}t_1 + \frac{at_1^2}{2} - v_{13}t_1 - \frac{at_1^2}{2} = v_{14}t_1 - v_{13}t_1.$$

$$v_{14} = a \cdot t_{14} \text{ і } v_{13} = a \cdot t_{13},$$

де t_{14} і t_{13} відповідно дорівнюють 13 і 14 секунд, тоді

$$S_{15} - S_{14} = a \cdot t_{14}t_1 - a \cdot t_{13}t_1 = a \cdot t_1(t_{14} - t_{13}).$$

З останньої рівності можна визначити прискорення

$$a = \frac{S_{15} - S_{14}}{t_1(t_{14} - t_{13})}$$

і, підставивши його значення в $S = \frac{a \cdot t^2}{2}$ (бо $v_0 = 0$),

одержимо шлях, пройдений тілом за 15 секунд:

$$S = \frac{S_{15} - S_{14}}{2t_1(t_{14} - t_{13})} t^2.$$

Швидкість в кінці 15-ї секунди $v_{15} = \frac{S_{15} - S_{14}}{t_1(t_{14} - t_{13})} t$.

Перевірка одиниць вимірювання:

$$[S] = \frac{\text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{с}^2} = \text{м}; \quad [v] = \frac{\text{м} \cdot \text{с}}{\text{с}^2} = \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Підставивши числові дані, одержимо значення шуканих величин:

$$S = \frac{2\text{м} \cdot 225\text{с}^2}{2\text{с}^2} = 225\text{м}.$$

$$v_{15} = \frac{2\text{м} \cdot 15\text{с}}{1\text{с}^2} = 30\text{м/с}.$$

Відповідь: тіло за 15 с пройшло шлях 225м і в кінці шляху мало швидкість 30 м/с.

2. Під яким кутом до горизонту потрібно кинути тіло, щоб далькість польоту дорівнювала максимальній висоті підняття?

Дано:

$$S = h$$

α - ?

Розв'язування

Відповідно до умови задачі $S = h$, тому для розв'язку задачі потрібно визначити S і h .

Рух тіла, кинутого під кутом до горизонту, є складним. Він

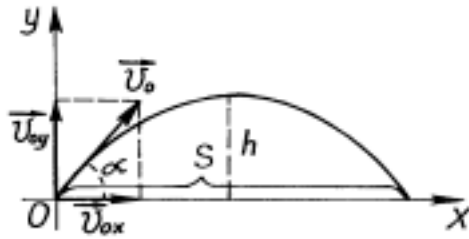


Рисунок 2.14

складається з двох простих рухів: руху тіла за інерцією і руху тіла під дією сили тяжіння. В горизонтальному напрямі рух тіла рівномірний, тому $S = v_{0x} t$, але $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$ (рис. 2.14), і тоді $S = v_0 t \cos \alpha$, де t - час польоту тіла.

Висота підняття тіла

$$h = v_0 \frac{t}{2} - \frac{g \left(\frac{t}{2} \right)^2}{2}$$

тому, що рух в цьому напрямі рівносповільнений.

$\frac{t}{2}$ - час підняття тіла.

З рисунка видно, що $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$, тоді

$$h = \frac{t}{2} v_0 \sin \alpha - \frac{gt^2}{8}.$$

Прирівнявши згідно з умовою задачі S і h , одержимо:

$$v_0 t \cos \alpha = \frac{t}{2} v_0 \sin \alpha - \frac{gt^2}{8}.$$

Час t можна визначити із умови

$$v_0 = v_{0y} - g \frac{t}{2} = 0, \quad v_{0y} = g \frac{t}{2}, \quad t = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Підставивши значення t в рівність

$$v_0 t \cos \alpha = \frac{t}{2} v_0 \sin \alpha - \frac{gt^2}{8},$$

одержимо:

$$\frac{v_0 \cos \alpha \cdot 2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{2v_0 \sin \alpha}{2g} v_0 \sin \alpha - \frac{g4v_0^2 \sin^2 \alpha}{8g^2}.$$

З останньої рівності $4 \cos \alpha = \sin \alpha$ або $\operatorname{tg} \alpha = 4$

одержимо $\alpha \approx 76^\circ$.

Відповідь: для того, щоб дальність польоту дорівнювала висоті підняття, тіло потрібно кинути під кутом $\approx 76^\circ$ до горизонту.

2.16 Задачі для самостійних вправ

Рівень-1

1 Положення деякого автомобіля на трасі Івано-Франківськ – Одеса дається рівнянням $x = 120 \text{ км} + 60 \text{ км/год} \cdot t$, де x – відстань від Івано-Франківська, а t – час руху, який відраховується від 9⁰⁰. На якій відстані від Івано-Франківська буде автомобіль опівдні? о 9⁰⁰? о 8⁰⁰? (Відповідь: 300 км; 120 км; 60 км).

2 Парашутист зазвичай приземляється із швидкістю приблизно 7 м/с. Якщо вам захотілось потренуватись, то із якої висоти ви будете стрибати? (Відповідь: $\sim 2,5$ м).

3 Якщо бейсбольний м'яч випустити із кошика повітряної кулі на висоті 1 км, то скільки приблизно часу він буде падати на землю? (Відповідь: ~ 14 с).

4 В трубці телевізора електрони проходять із постійною швидкістю відстань 0.3 м (від електронної гармати до екрану трубки) за час 10^{-5} с. Яка швидкість електронів? (Відповідь: 30 000 м/с).

5 3 вікна стоячого вагона спостерігають за рухом потягу. Визначити довжину потягу, якщо час проходження його повз вікно спостерігача 1 хв. Швидкість потягу 36 км/год. Рух потягу вважати рівномірним. (Відповідь: 600 м).

6 Ширина озера 200 м. Швидкість човна під дією зусиль весляра 2 м/с. За який час весляр перепливе озеро, рухаючись рівномірно і перпендикулярно до берега? (Відповідь: 100с).

7 Швидкість течії води 1 м/с, а швидкість човна в стоячій воді 2 м/с. Яка швидкість човна відносно берега, якщо човен пливе в напрямі течії? (Відповідь: 3 м/с).

8 Автомобіль, рухаючись від зупинки рівноприскорено, за 20 с досягає швидкості 15 м/с. З яким прискоренням рухався автомобіль? (Відповідь: $0,75 \text{ м/с}^2$).

9 Мотоцикліст почав рухатися з прискоренням $0,7 \text{ м/с}^2$. Який шлях він пройде за 20 с від початку руху? (Відповідь: 140 м).

10 Які рухи зображені на рисунку 2.15? (Відповідь:

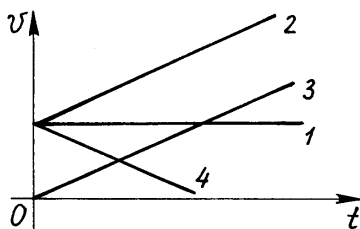


Рисунок 2.15

1 – рівномірний; 2 – рівноприскорений з початковою швидкістю; 3 – рівноприскорений без початкової швидкості; 4 – рівносповільнений).

11 З аеростата, який знаходиться на висоті 180 м, випав баласт. Через скільки секунд баласт досягне поверхні Землі? (Відповідь: 6 с).

12 Тіло, рухаючись рівноприскорено, зі стану спокою за 10 с пройшло шлях 50 м. З яким прискоренням рухалось тіло? (Відповідь: 1 м/с^2).

13 При раптовому гальмуванні автомобіль зменшив свою швидкість від 72 км/год до нуля за 5 с. З яким прискоренням рухався автомобіль? (Відповідь: 4 м/с^2).

14 З якої висоти впало тіло, якщо час його вільного падіння 10 с? (Відповідь 500 м).

15 З будинку протягом 3 с вільно падає тіло. Яка швидкість тіла в момент удару його об Землю? (Відповідь: 30 м/с).

16 Тіло, кинуте вертикально вгору з швидкістю 20 м/с, піднімалось 1 с. На яку висоту піднялось тіло? (Відповідь: 15 м).

17 З аеростата вертикально вниз кинули тіло з швидкістю 10 м/с. На якій висоті знаходився аеростат, якщо тіло падало протягом 2 с? (Відповідь: 40 м).

18 З вежі висотою 20 м кинули горизонтально м'яч. Через скільки часу він впаде на Землю? (Відповідь: 2 с).

19 Камінь, прив'язаний до кінця нитки, рухається по колу з швидкістю 1 м/с . З яким доцентровим прискоренням рухається камінь, якщо довжина нитки 1 м , а кут між ниткою і вертикаллю дорівнює 30° ? (Відповідь: 2 м/с^2).

20 Велосипедист рухається з швидкістю 4 м/с . З якою кутовою швидкістю обертаються колеса велосипеда, якщо радіус колеса $0,4 \text{ м}$? (Відповідь: 10 рад/с).

Рівень-2

1 Першу половину шляху автомобіль проходить за $2/5$ год, а другу половину шляху за $1/2$ год. Визначити середню швидкість (в км/год) руху автомобіля на всьому шляху, який дорівнює 63 км . (Відповідь: 70 км/год).

2 Літак в момент приземлення мав швидкість 63 м/с і через $1,5 \text{ хв}$ зупинився. З яким прискоренням рухався літак і який шлях він проїхав до зупинки? (Відповідь: $0,7 \text{ м/с}^2$, 2835 м).

3 Тіло з стану спокою рухається зі сталим прискоренням 2 м/с^2 . Визначити шлях, пройдений тілом за четверту секунду свого руху. (Відповідь: 7 м).

4 Тіло впало з висоти 245 м . Який шлях воно пройшло за останню секунду падіння. (Відповідь: 65 м).

5 М'яч, кинутий вертикально вгору, повернувся у вихідну точку через 6 с . З якою швидкістю був кинутий м'яч? (Відповідь: 30 м/с).

6 Людина, перебуваючи на вершині вежі заввишки 25 м , кидає вниз камінь з швидкістю 10 м/с . Через скільки часу камінь досягне поверхні Землі? (Відповідь: $\approx 1,45 \text{ с}$).

7 Камінь, кинутий горизонтально з висоти 10 м , впав на Землю на відстані 5 м по горизонталі від місця кидання. З якою початковою швидкістю він був кинутий? (Відповідь: $3,6 \text{ м/с}$).

8 Куля вилітає з гармати з початковою швидкістю 100 м/с під кутом 30° до горизонту. Скільки часу куля знаходилась в повітрі? Гармата і точка приземлення кулі знаходились на одній прямій. (Відповідь: 10 с).

9 Поїзд, рухаючись від вокзалу, набрав за 50 с швидкість 6 м/с , пройшовши 200 м . Збільшувалось чи зменшувалось його прискорення на протязі цього часу? (Відповідь: зменшувалось).

10 Секундна стрілка годинника має довжину 3,5 см. Який шлях пройде кінець стрілки за дві хвилини?(Відповідь: $0,14 \cdot \pi$ м).

11 Радіус одного колеса 20 см, другого 40 см, а лінійні швидкості найбільш віддалених від осі точок відповідно рівні 5 м/с і 10 м/с. У скільки разів доцентрове прискорення точок одного колеса більше від другого? (Відповідь: 2).

12 Три літаки, які рухаються паралельними курсами на відстані 60 м один від одного, здійснюють поворот, причому середній із них рухається із швидкістю 360 км/год по дузі кола радіусом 600м. Визначити прискорення кожного із літаків. (Відповідь: 18.3 м/с^2 ; 16.7 м/с^2 ; 15.0 м/с^2).

Рівень-3

1 Рівняння руху першого тіла $X_1 = 2 - 3t + 2t^2$, а другого – $X_2 = -2 + t$. Знайдіть час і найменшу відстань, на яку наблизяться ці два тіла. (Відповідь: 1с; 2м).

2 Рівняння руху першого тіла $X_1 = 2 - 3t + 2t^2$, а другого – $X_2 = 4 + 2t$. Знайдіть час, а також найбільшу відстань між ними до моменту їх зустрічі. (Відповідь: 1.25 с; 5.25 м).

3 Рівняння руху першого тіла $X_1 = -2 - 3t + t^2$, а другого – $X_2 = 1 - t$. Знайдіть час і місце їх зустрічі, а також найбільшу відстань між ними до моменту їх зустрічі. (Відповідь: 3 с; -2 м; 4 м).

4 Рівняння руху першого тіла $X_1 = 2 - 2t + t^2$, а другого – $X_2 = 2 + t$. Знайдіть час і місце їх зустрічі, а також найбільшу відстань між ними до моменту їх зустрічі. (Відповідь: 3с; 5м; 2.25м).

5 Рівняння швидкості першого тіла $V_1 = -3 + 2t$, а другого – $V_2 = 1 \text{ м/с}$. В який момент часу відстань між ними буде максимальною до моменту зустрічі? (Відповідь: 2 с).

6 Рівняння швидкості першого тіла $V_1 = -3 + 2t$, а рівняння руху другого – $X_2 = -2 + t$. В який момент часу відстань між ними буде дорівнювати 1,5м? (Відповідь: 2 с).

7 На невагомий стрижень довжиною l насаджена масивна куля на відстані $0.75 l$. Стрижень ставлять вертикально на стіл одним кінцем, а потім – другим. У якому випадку куля впаде на стіл швидше і у скільки разів? (Відповідь: в 1.7 раза).

8 Першу половину шляху автомобіль рухався з швидкістю 72 км/год, а другу з швидкістю 36 км/год. Визначити середню швидкість руху автомобіля на всьому шляху. (Відповідь: $\approx 13,3$ м/с).

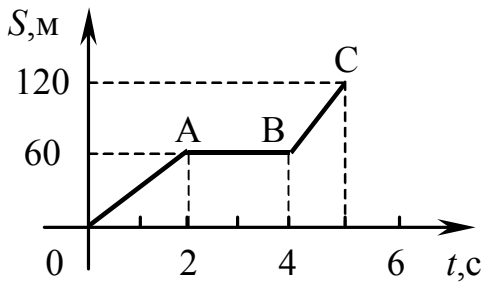


Рисунок 2.17

9 На рис. 2.17 зображено графік залежності шляху від часу. Протягом якого часу тіло перебуває в стані спокою? Котра із ділянок OA, AB чи BC відповідає найбільшій швидкості? Яка середня швидкість на шляху 120 м? (Відповідь: 2 с, BC, 24 м/с).

10 Відстань між двома містами A і B дорівнює 240 км. Одночасно з обох міст назустріч виїжджають два автомобілі. Автомобіль, що виїхав з міста A, рухається з швидкістю 72 км/год, а з міста B – з швидкістю 36 км/год. Через який час вони зустрінуться? Рух автомобілів вважати рівномірним. (Відповідь: $8 \cdot 10^3$ с).

11 Через річку переправляється човен, що витримує курс, перпендикулярний до течії. Швидкість човна в стоячій воді 1,4 м/с, швидкість течії 0,7 м/с, ширина річки 308 м. За скільки часу човен перепливе річку? На скільки метрів вода знесе човен? (Відповідь: 220 с, 154 м).

12 Літак піднімається з аеродрому під кутом 30° до горизонту з швидкістю 216 км/год. Визначити вертикальну і горизонтальну складові швидкості. На якій висоті буде літак через 10 с після початку піднімання? (Відповідь: 30 м/с; ≈ 51 м/с; 300 м).

13 Людина перебуває на відстані 50 м від прямої дороги, по якій наближається автобус із швидкістю 10 м/с. В якому напрямі повинна бігти людина із швидкістю 3 м/с, якщо автобус перебуває від неї на відстані 200 м? (Відповідь: $\alpha = 124^\circ$).

14 При рівноприскореному русі тіло проходить за перші два послідовні проміжки часу по 4 с кожний шлях, відповідно 24 м і 64 м. Визначити початкову швидкість тіла і прискорення, з яким рухається тіло. (Відповідь: 2,5 м/с², 1 м/с).

15 Чому дорівнює швидкість тіла при вільному падінні в кінці першої секунди руху і шлях пройдений цим тілом за другу секунду? (Відповідь: 10 м/с, ≈ 15 м).

16 Два тіла кинуті одночасно назустріч одне одному з початковою швидкістю 80 м/с, одне вертикально вгору, друге – вертикально вниз з точки найвищого підйому першого тіла. На якій висоті і через який час ці тіла зустрінуться? Яку швидкість вони матимуть у момент зустрічі? (Відповідь: 2 с, 140 м, 60 м/с, 100 м/с).

17 З висоти 1,8 м горизонтально кинули м'яч з швидкістю 6 м/с. Який кут з горизонтом утворює його швидкість в момент падіння на Землю? (Відповідь: $\approx 45^\circ$).

18 З двох труб, розміщених на одному рівні, з однаковою швидкістю витікає вода відповідно під кутом 60° і 30° до горизонту. Визначити відношення висот максимального підняття води і дальностей падіння її на Землю. (Відповідь: 3, 1).

19 М'яч кинули під кутом 60 градусів до горизонту. Через $\sqrt{3}$ секунд кут напрямку швидкості м'яча зменшується до 30 градусів. Яка була його початкова швидкість? (Відповідь: 30 м/с).

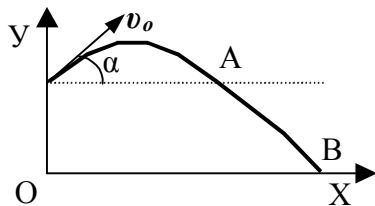


Рисунок 2.18

20 З висоти 12 м кинули тіло під кутом 30° до горизонту з початковою швидкістю 12 м/с. Визначити тривалість польоту від точки А до точки В (рис. 2.18), максимальну висоту підняття тіла над горизонтом та дальність польоту. Опір повітря не враховувати. (Відповідь: 1,07 с, 13,84 м, 23,8 м).

21 З палуби корабля, що рухається прямолінійно рівномірно з швидкістю 10 м/с, зроблений постріл з гармати в напрямі руху. На якій відстані від місця пострілу впаде куля і яку вона буде мати швидкість в момент падіння? Швидкість кулі в момент пострілу утворює кут 45° з горизонтом, а її величина 200 м/с. Який кут утворює швидкість кулі з горизонтом в момент удару її об Землю? (Відповідь: 4280 м, ≈ 205 м/с, $\approx 45^\circ$).

22 По похилій площині знизу вверх пустили котитись кульку. На відстані 30 см від початку руху кулька побувала двічі: через 1 с і через 2 с після початку руху. Визначити початкову швидкість і прискорення кульки, вважаючи його постійним. (Відповідь: 0.45 м/с; -0.3 м/с²).

23 Екваторіальний радіус Землі дорівнює 6380 км. З якою швидкістю рухаються точки екватора під час обертання Землі навколо своєї осі? (Відповідь: ≈ 1670 км/год).

24 Шків обертається з кутовою швидкістю 60 рад/с . Визначити доцентрове прискорення точок, які перебувають на відстані 250 мм від осі обертання. (Відповідь: 90 м/с^2).

25 Вал двигуна автомобіля з допомогою пасової передачі обертає шків генератора і вентилятора. З якою кутовою швидкістю обертаються шків, якщо діаметри вала і шківів відповідно дорівнюють 9 см , 7 см і 6 см ? Кутова швидкість вала двигуна 180 1/с . (Відповідь: $\approx 231 \text{ 1/с}$, 270 1/с).

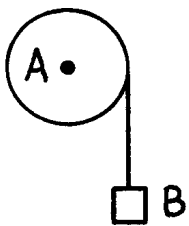


Рисунок 2.19

26 Шків А (рис. 2.19) радіусом 20 см приводиться в обертний рух вантажем В, підвішеним на нитці, яка поступово розмотується з шків. В початковий момент вантаж був нерухомий, а потім почав опускатися з прискоренням 2 см/с^2 . Визначити кутову швидкість шків і доцентрове прискорення в той момент, коли вантаж пройде шлях 10 см . (Відповідь: $0,33 \text{ 1/с}$, $\approx 0,02 \text{ м/с}^2$).

27 Колесо, яке має 12 симетрично розташованих спиць, фотографують з експозицією $0,04 \text{ с}$. На фото видно, що кожна спиця за цей час повернулася на половину кута між сусідніми спицями. Визначити кутову швидкість обертання колеса. (Відповідь: $6,5 \text{ рад/с}$).

28 Колесо обертається з частотою 25 Гц . Під час тормозіння за 30 с воно зупинилось. Знайти кутове прискорення і кількість обертів від початку тормозіння до зупинки.

(Відповідь: $-5,24 \text{ с}^{-2}$; 375).

29 Деяке тіло починає обертатись з постійним кутовим прискоренням $0,04 \text{ с}^{-2}$. Через скільки часу повне прискорення будь-якої точки тіла буде направлене під кутом 76° до напрямку швидкості цієї точки? (Відповідь: 10 с).

Тест для контролю вміння розв'язувати задачі:

1. Електропотяг, відійшовши від станції, перші 100 м шляху проходить за 10 с , а наступні 340 м за 12 с . Яка середня швидкість руху електропотягу?

Варіанти відповіді: А - 20 м/с ; В - 8 м/с ; С - $0,25 \text{ м/с}$; Д - 32 м/с .

2. Який шлях пройде тіло за 10 с, рухаючись рівноприскорено з прискоренням 2 м/с^2 , якщо початкова швидкість руху тіла 2 м/с ?

Варіанти відповіді: А - 3 м; В - 120 м; С – 2 м; Д - 32 м.

3. Куля і звук від вертикального пострілу одночасно досягають висоти 660 м. Визначити початкову швидкість кулі. Швидкість звуку вважати рівною 330 м/с .

Варіанти відповіді: А - 320 м/с ; В - 800 м/с ; С – 25 м/с ; Д – 340 м/с .

4. Поїзд рухається по заокругленню радіусом 400 м з тангенціальним прискоренням 0.2 м/с^2 . Визначити повне прискорення в той момент, коли його швидкість рівна 10 м/с .

Варіанти відповіді: А - 32 м/с^2 ; В - 8 м/с^2 ; С – 0.25 м/с^2 ; Д - 0.32 м/с^2 .

5. На токарному верстаті потрібно обточити вал діаметром 25 см. З якою кутовою швидкістю повинен обертатися вал, щоб швидкість різання була 60 м/хв ?

Варіанти відповіді: А - 32 рад/с ; В - 8 рад/с ; С – 0.5 рад/с ; Д – 2 рад/с .

Розділ 3. ОСНОВИ ДИНАМІКИ

Динаміка – підрозділ механіки, в якому рух матеріальних об'єктів вивчається з урахуванням їхніх взаємодій. Іншими словами, динаміка дає відповідь на запитання: “чому тіло рухається”. Динаміка, як і кінематика, поділяється на класичну, релятивістську і квантову. В основі класичної механіки лежать три закони Ньютона.

3.1 Закони Ньютона

Перший закон Ньютона. Інерціальна система відліку

Існують системи, в яких тіла знаходяться в стані спокою, або в стані рівномірного прямолінійного руху, якщо на них не діють інші тіла або їх дія компенсується.

Системи, в яких виконується перший закон Ньютона, називаються **інерціальними** (див. 2.2).

Властивість тіл зберігати стан спокою або стан рівномірного прямолінійного руху називають **інерцією**.

Маса тіла

Маса – скалярна фізична величина, яка характеризує одночасно гравітаційні та інерційні властивості матерії.

Маса тіла входить у формулу другого закону Ньютона, характеризує динамічні властивості і є мірою інерційності тіла. Як міру гравітаційних властивостей масу тіла визначають на основі закону всесвітнього тяжіння.

Одиницею вимірювання маси в СІ є кілограм (див. 1.4).

Густина (щільність) визначається відношенням маси тіла до його об'єму: $\rho = \frac{m}{V}$. Одиницею вимірювання густини є кг/м^3 ,

$[\rho] = \text{кг/м}^3$.

Сила. Рівнодійна сила

Сила – векторна величина, яка є мірою взаємодії матеріальних тіл, в результаті якої змінюється рух тіла, тобто виникає прискорення, або тіла деформуються.

На рисунку сила зображується вектором.

Сила в системі СІ вимірюється в ньютонах (Н – похідна одиниця). Ньютон – сила, під дією якої тіло масою 1 кг рухається з

прискоренням 1 м/с^2 . $[F] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}$.

На тіло можуть діяти декілька тіл, кожному з яких відповідає певна сила. Дію декількох сил можна замінити однією.

Силу, яка спричиняє таку саму дію на тіло, як декілька сил разом взятих, називають **рівнодієюю**.

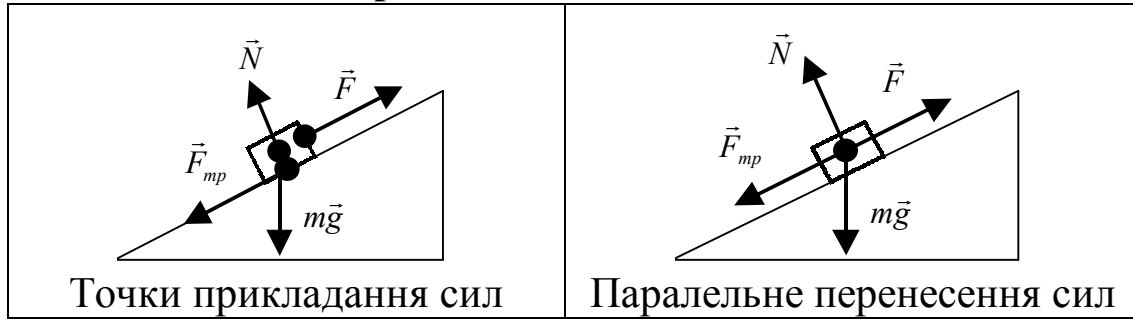


Рисунок 3.1 Дія сил на тіло та точки їх прикладання

Для визначення величини та напрямку рівнодіючої або для розкладу рівнодіючої на складові користуються правилами операцій над векторами (рис. 1.1-1.6). На рисунку вектори сил, як і будь-які вектори, можна вільно переміщувати в просторі чи площині паралельно самим собі. Таке перенесення векторів часто використовують в механіці, наприклад: силу реакції $\vec{N}$, силу тертя $\vec{F}_{\text{тр}}$, силу тяги $\vec{F}$ та силу тяжіння переносять для зручності так, щоб їх початки були в одній точці (рис. 3.1), як правило, – в центрі тяжіння (мас).

Другий закон Ньютона

Другий закон Ньютона, як і перший, виконується в інерціальній системі відліку.

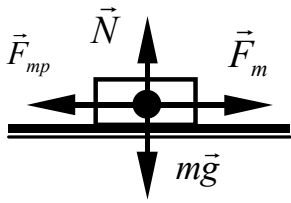
Прискорення, з яким рухається тіло, прямо пропорційне векторній сумі діючих на тіло сил, обернено пропорційне масі тіла і напрямлене в горизонтальній поверхні в сторону рівнодіючої сили:

$$\vec{a} = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{F}_i}{m} \quad \text{або} \quad \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}, \quad (3.1)$$

де $\vec{F}$ - результуюча сила.

Часто другий закон Ньютона записують так: $\vec{F} = m\vec{a}$.

Зверніть увагу на те, що $\vec{F}$ - результуюча сила, тому для випадку, коли на тіло діють сили (рис. 3.2): $\vec{N}$ - реакція опори, $\vec{F}_{\text{тр}}$ - сила тертя, $m\vec{g}$ - сила тяжіння, $\vec{F}_T$ - сила тяги, другий закон Ньютона запишеться так:



(зроблене паралельне
перенесення сил)

Рисунок 3.2 Дія сил на тіло на
горизонтальній поверхні

$$\vec{F}_T + \vec{F}_{тр} + m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}, \quad (3.2)$$

або $\vec{F} = m\vec{a}$, але
 $\vec{F} = \vec{F}_T + \vec{F}_{тр} + m\vec{g} + \vec{N}.$

Третій закон Ньютона

Якщо одне тіло діє на друге, то друге діє на перше, причому ці дії рівні за величиною і протилежні за напрямом. Закон рівності дії і протидії і є третім законом Ньютона.

Сили з якими взаємодіють тіла, завжди рівні за величиною і протилежні за напрямом:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2. \quad (3.2)$$

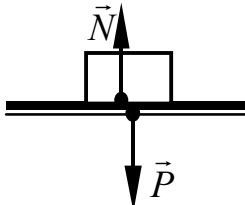


Рисунок 3.3
Точки прикладання сил
реакції опори та ваги

Зверніть особливу увагу на те, що сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ прикладені до різних тіл, а, значить, вони не зрівноважуються (рис. 3.3). $\vec{P}$ – сила, з якою тіло тисне на поверхню, – вага тіла. Точка прикладання її лежить на поверхні. $\vec{N}$ – реакція опори – сила, з якою згідно з третім законом Ньютона поверхня

діє на тіло. Точка прикладання цієї сили лежить на тілі.

3.2 Поле тяжіння і його напруженість. Вага тіла. Закон всесвітнього тяжіння

Взаємодія між тілами здійснюється не тільки через дотик, але і на відстані. Одним із прикладів взаємодії на відстані є гравітаційна взаємодія. Ця взаємодія здійснюється через поле, яке називають гравітаційним полем (поле тяжіння). Поле, яке існує навколо тіла, через яке здійснюється взаємодія, називається гравітаційним (тяжіння).

Основною властивістю поля тяжіння є те, що на будь-яке тіло масою m , поміщене в це поле, діє сила тяжіння $F = mg$. Вектор g не залежить від m і називається **напруженістю поля тяжіння**. Він є силовою характеристикою поля тяжіння і дорівнює силі, з якою поле діяло б на тіло одиничної маси, якщо б його помістити в дану точку поля.

Зверніть увагу на те, що напруженість гравітаційного поля співпадає за величиною, напрямом і одиницями вимірювання з

прискоренням вільного падіння, але за фізичним змістом це зовсім різні фізичні величини. В той час як напруженість поля характеризує стан простору в даній точці, то сила і прискорення появляються тільки тоді, коли в даній точці появляється тіло.

Зверніть особливу увагу на те, що ця взаємодія є однією із чотирьох видів фундаментальних взаємодій і відзначається малою інтенсивністю, необмеженим радіусом дії, універсальністю (охоплює всі види речовин). Постулюється, що ця взаємодія передається миттєво. Теорія цієї взаємодії ґрунтується на ньютонівському законі всесвітнього тяжіння:

Дві матеріальні точки (тіла) з масами m_1 і m_2 , відстань між якими R , притягуються одна до одної з силою F , напрямленою вздовж лінії, яка проходить через центри мас, пропорційною добутку їх мас і обернено пропорційною квадрату відстані між ними:

$$F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{R^2}, \quad (3.2)$$

де $G = 6,672 \cdot 10^{-11} \frac{\text{М}^3}{\text{с}^2 \cdot \text{кг}}$ - гравітаційна стала (пригадайте дослід Кавендіша).

Підсумовуючи, можна сказати, що навколо будь-якого тіла існує гравітаційне поле, через яке здійснюється взаємодія з іншими тілами,

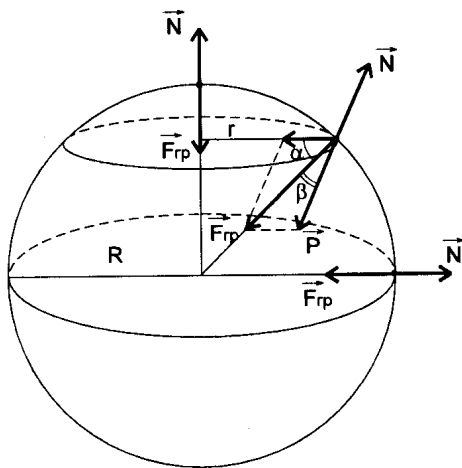


Рисунок 3.4

Напрями дії сил на тіло, що знаходиться на поверхні Землі

а значить на тіла, що перебувають в полі Землі, діють сили. Ці сили називають силами гравітації. Величина цих сил визначається законом всесвітнього тяжіння. Крім сили гравітаційної взаємодії, користуються такими поняттями, як вага тіла і сила тяжіння.

Вага – сила, з якою тіло діє у вертикальному напрямі на підставку або підвіс.

Якщо підставка чи підвіс позбавлені прискореного руху у вертикальному напрямі, то вага $\vec{P}$ чисельно дорівнює складовій сили гравітаційної взаємодії - $\vec{F}_{gr}$ між тілом і Землею (рис. 3.4).

Зверніть особливу увагу на те, що на тіло, яке лежить на поверхні Землі, діє сила гравітаційної взаємодії $\vec{F}_{\text{гп}}$ і сила реакції опори $\vec{N}$. Результируюча (рівнодійна) цих сил, згідно з рівнянням руху, дорівнює добутку маси тіла, що рухається разом з Землею, на прискорення, з яким воно рухається по колу. Згідно з рівнянням руху (другий закон Ньютона)

$$\vec{N} + \vec{F}_{\text{гп}} = m\vec{a}_g,$$

де $a_g = \frac{v^2}{r}$, v - лінійна швидкість тіла, r - радіус кола (широтний радіус). Радіус r можна виразити через радіус Землі R і широтний кут α . Лінійну швидкість можна виразити через кутову швидкість обертання Землі, і тоді $a_g = \omega^2 \cdot r = \omega^2 \cdot R \cdot \cos \alpha$, тому що $r = R \cdot \cos \alpha$ (рис. 3.4), де α - географічна широта.

Враховуючи те, що $a_g = \omega^2 \cdot r = \omega^2 \cdot R \cdot \cos \alpha$, отримаємо, що величина реакції опори змінюється із зміною географічної широти. З рис. 3.4 видно, що сила реакції земної поверхні $\vec{N}$ зрівноважує не силу гравітаційної взаємодії $\vec{F}_{\text{гп}}$, а тільки її складову $\vec{P}$. Ця складова і носить назву **сили тяжіння**.

З рисунка 3.4 також видно, що для всіх точок земної поверхні, крім полюсів і екватора, вектор сили тяжіння не напрямлений до центра Землі, а утворює з радіусом Землі кут β . Сила гравітаційної взаємодії $\vec{F}_{\text{гп}}$ і сила тяжіння $m\vec{g}$ рівні між собою тільки в двох точках земної кулі – на полюсах ($\alpha = 90^\circ$ і $N = F_{\text{гп}}$). Найменше значення сила тяжіння має на екваторі ($\alpha = 0^\circ$).

Зверніть увагу і на те, що точка прикладання сили тяжіння лежить в центрі тіла, а точка прикладання ваги тіла – на підставці або підвісі. Значення сили гравітаційної взаємодії обернено пропорційне квадрату радіуса Землі, який внаслідок сплюснутості Землі менший для полюса і більший для екватора, тому воно буде більшим на полюсі і меншим на екваторі. Цю різницю можна зафіксувати пружинним динамометром. Сила тяжіння спричинює вільне падіння незакріпленого тіла з прискоренням g (згідно з другим законом Ньютона $\vec{P} = m\vec{g}$) або тисне на підставку чи розтягує підвіс, які перешкоджають вільному падінню його.

Зверніть особливу увагу на те, що гравітаційна сила – це міра взаємодії будь-яких тіл, зумовлена їхніми масами; сила земного тяжіння – це сила, з якою Земля притягує тіла в результаті цієї взаємодії і її обертового руху, а вага тіла – це сила, з якою тіла діють на опору або підвіс внаслідок дії на них сили тяжіння.

3.3 Невагомість

Якщо підставка чи підвіс рухається з прискоренням $\vec{a}$ у вертикальному напрямі (рис. 3.5), то згідно з другим законом Ньютона $\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$.

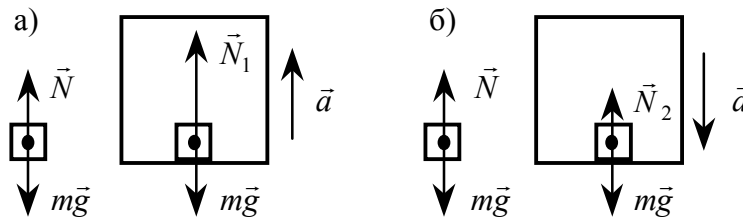


Рисунок 3.5 Зміна сил реакції опори в рухомому ліфті

Якщо підставка чи підвіс знаходяться в стані спокою, або в стані рівномірного прямолінійного руху, то $\vec{a} = 0$ і $N = mg$. Для випадку, коли підставка рухається вгору (рис. 3.5,а), $N = mg + ma$. В цьому випадку тіло тиснутиме на підставку або розтягуватиме підвіс з силою, яка перевищує mg на ma . Тоді кажуть, що тіло знаходиться в стані перевантаження. Якщо тіло рухається вниз (рис. 3.5,б) з прискоренням $\vec{a}$, то $N = mg - ma$ і для випадку $g = a$ $N = 0$. Такий стан називають невагомістю, тобто, якщо на тіло, крім сили тяжіння, не діють інші сили, то воно не тисне на підставку або не розтягує підвіс. В стані невагомості перебуває тіло під час вільного падіння, або вільного руху навколо Землі з першою космічною швидкістю.

Зверніть увагу на те, що у системі, яка знаходиться в стані невагомості, спостерігаються такі явища: математичний маятник зависає у відхиленому стані; зникає архімедова сила в рідині; змочуюча рідина розтікається по посудині, а всередині її міститься повітря; незмочуюча рідина набуває форми кулі; тіло, підвішене на пружині, не деформує її; предмети (і людина) “плавають” перебувають у вільному стані. Штучне тяжіння на супутнику можна створити, надаючи йому обертання (сила “тяжіння” – сила, що виникає в результаті обертового руху тіла, напрямлена в напрямі від осі обертання).

3.4 Космічні швидкості. Рух штучних супутників Землі

Космічні швидкості – характерні швидкості руху тіла в гравітаційному полі. Перша з них – це швидкість, яку треба надати тілу, щоб воно стало супутником Землі. Числове значення першої космічної швидкості v_1 визначається з умови, що сила тяжіння mg дорівнює доцентровій силі $F_g = \frac{mv_1^2}{h + R}$, де m - маса тіла, R - радіус Землі. З цієї умови перша космічна швидкість супутника, який рухається по коловій орбіті поблизу земної поверхні ($h \ll R$, $g \approx 9,8 \frac{M}{c^2}$):

$$v_1 = \sqrt{gR} \approx 7,9 \frac{\text{км}}{\text{с}}. \quad (3.4)$$

Друга космічна швидкість v_2 необхідна тілу, щоб воно вийшло із сфери впливу земного тяжіння і стало супутником Сонця. Її значення знаходять з умови, що набута тілом кінетична енергія

$$T = \frac{mv_2^2}{2} \text{ дорівнює роботі проти гравітаційних сил:}$$

$$A = G \frac{mM_3}{R},$$

тоді

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM_3}{R}} \approx \sqrt{2gR} \approx 11,2 \frac{\text{км}}{\text{с}}. \quad (3.5)$$

Маючи третю космічну швидкість v_3 , тіло, запущене з поверхні Землі, зможе подолати силу тяжіння і Землі, і Сонця. Її числове значення залежить від напрямку запуску тіла: мінімальне – 17 км/с, максимальне – 73 км/с.

Штучні супутники запускаються з метою вивчення космічного простору, польотів на інші планети, здійснення зв'язку і ін.

3.5 Види деформацій, пружність та повзучість. Закон Гука.

Як вже було сказано, сила – не тільки міра взаємодії, в результаті якої змінюється швидкість руху тіл, але й міра взаємодії, в результаті якої змінюється форма чи розміри тіла, тобто тіла деформуються. Деформація може бути пружною і пластичною.

Якщо тіло після взаємодії з іншими тілами відновлює свою форму і розміри, то деформацію називають **пружною**.

Якщо тіло після взаємодії з іншими тілами не відновлює своїх розмірів і форми та зберігає форму, яку воно одержало під час взаємодії, то деформацію називають **пластичною**.

Сила пружності – це сила, що виникає під час деформації тіла і напрямлена в сторону, протилежну напрямку зміщення частинок тіла (атомів, молекул) під час деформації.

Зв'язок між силою пружності і величиною деформації в межах пружності тіла встановлений Гуком в 1660 р.:

Сили, що виникають під час пружної деформації прямо пропорційні величині цієї деформації і напрямлені в сторону її зменшення: $F_n = -kx$, де F_n - сила пружності, x - величина деформації (зміщення), k - коефіцієнт жорсткості (різний для різних матеріалів).

В теорії пружності доказується, що всі *види деформацій* – *розтяг або стиск, зсув, згин і кручення*, - можна звести до наявних одночасно деформацій розтягу (стиску) і зсуву. Тому і розглянемо ці два види деформації більш детально.

Сила розтягу чи стиску, прикладена до тіла у формі стержня, розтягує його або стискує на деяку величину Δl . Величина Δl (абсолютне видовження) залежить від початкових розмірів стержня, матеріалу, з якого виготовлений стержень, і величини прикладеної сили. Тоді **закон Гука** матиме вид:

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l}, \quad \text{або} \quad \sigma = E \cdot \varepsilon, \quad (3.6)$$

де $\sigma = \frac{F}{S}$ – механічна напруга, S - площа поперечного перерізу

стержня, F – прикладена сила, $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ - відносне видовження, E -

модуль пружності (модуль Юнга). Для різних речовин модуль Юнга має різне значення. Величина α , обернено пропорційна модулю

Юнга, називається коефіцієнтом пружності $\frac{1}{E} = \alpha$; $[\alpha] = \frac{m^2}{H}$.

З діаграми напруг (рис. 3.6) видно, що закон Гука, тобто прямопропорційна залежність $\sigma(\varepsilon)$, має місце лише у дуже вузьких межах.

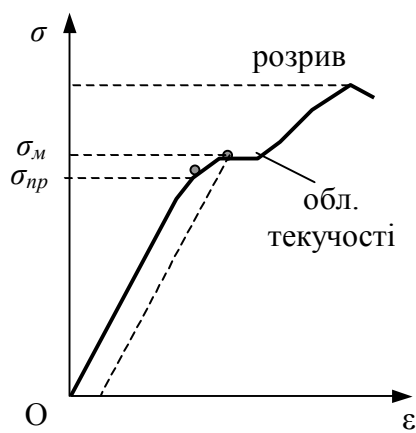


Рисунок 3.6
Експериментальна залежність
механічної напруги від
відносної деформації

Для характеристики деформації твердих тіл в механіці користуються такими поняттями:

а) напруга межі пружності ($\sigma_{пр}$) – напруга, після зняття якої в тілі ще не спостерігається залишкова деформація;

б) напруга межі міцності (σ_m) – максимальна напруга, для якої тіло ще не руйнується (має місце залишкова деформація).

в) запас міцності (коефіцієнт безпеки $n = \frac{\sigma_m}{\sigma_d}$) показує, у скільки

разів напруга межі міцності більша від допустимої (експлуатаційної) напруги.

Коли ж напруга перевищує межу пружності, то тіло “тече” – область пластичної деформації, і повертається у висхідний стан із залишковою деформацією (пунктирна паралельна лінія). Матеріали, в яких область текучості значна називаються *в’язкими*, а ті, для яких вона практично відсутня, – *крихкими*. Однак ці властивості сильно залежать від способу впливу на тіло – під час короткотривалої дії (удару) тіла ведуть себе як крихкі, а під час дії тривалих, але слабких сил, – як в’язкі.

Зверніть увагу на те, що на основі напруги межі міцності, маючи значення коефіцієнта безпеки (запасу міцності), можна розрахувати величину допустимого навантаження для даного матеріалу.

Сили стиску спричиняють зменшення довжини тіла; напруга і зміна довжини в цьому випадку будуть від’ємними.

Механічні напруги в поздовжньому напрямі окрім видовження спричиняють ще поперечний стиск тіла, тобто зменшується поперечний переріз тіла діаметром (товщиною) d . При цьому відносна поперечна деформація прямо пропорційна відносній поздовжній деформації:

$$\frac{\Delta d}{d} = -\mu \frac{\Delta l}{l}, \quad (3.7)$$

або ж
$$\epsilon_{\pi} = -\mu \cdot \epsilon, \quad (3.8)$$

де μ – коефіцієнт Пуассона, який приймає для різних матеріалів значення від 0,2 до 0,5. “-” означає, що видовженню відповідає зменшення поперечних розмірів тіла, а стиску – їх збільшення.

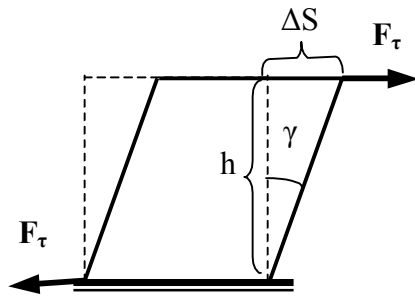


Рисунок 3.7
Деформація зсуву

Якщо взяти тіло у вигляді паралелограма висотою h і до його паралельних площин прикласти антипаралельні сили, то ці площини змістяться одна відносно одної на величину ΔS . Таку деформацію зсуву характеризують кутом зсуву γ (рис.3.7).

Для малих кутів $\gamma \approx \tan \gamma = \Delta S / h$.

Тоді по аналогії із законом Гука

$$\tau = \frac{F}{A} = G\gamma, \quad (3.9)$$

де A – площа поверхонь; F_τ – сили, що заставляють їх зміщуватись одна відносно одної; G – модуль зсуву. Модуль зсуву можна визначити за допомогою інших пружних постійних за допомогою формули:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \quad (3.10)$$

3.6 Сила тертя. Коефіцієнт тертя ковзання

Сила, що виникає між дотичними поверхнями двох взаємодіючих тіл і протидіє їх взаємному переміщенню або зрушенню тіл з місця, називається **силою тертя**.

Тертя спокою – тертя, яке існує між дотичними поверхнями, коли відсутнє їх відносне переміщення.

Зверніть увагу на те, що сила тертя, як правило, напрямлена в сторону, протилежну до напрямку руху. Сила тертя ($\vec{F}_{тр}$) пропорційна силі нормального тиску (N): $F_{тр} = \mu N$, де μ – коефіцієнт тертя. Коефіцієнт тертя ковзання може змінюватися залежно від шорсткості взаємодіючих поверхонь і плівок, якими покривають ці поверхні. Коефіцієнт тертя – безрозмірна величина.

Завжди потрібно пам'ятати, що в одних випадках стараються зменшити силу тертя, використовуючи для цього різні способи (мастила, чистоту поверхні і ін.), в інших – збільшити (посипання дороги піском, натирання пасів каніфоллю і ін.).

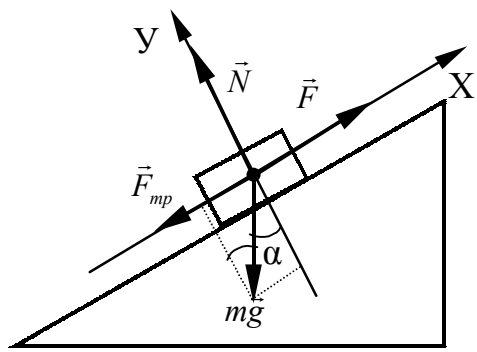


Рисунок 3.8. Дія сил на тіло, що знаходиться на похилій площині

Аналізуючи сили між взаємодіючими тілами, потрібно звертати увагу на напрям і точку прикладання сил, наприклад, сила тертя, сила тяжіння, сила тяги, сила реакції і ін. (рис. 3.8). $\vec{F}$ - сила, що спричиняє рух тіла (рушійна сила); $\vec{F}_{\text{тр}}$ - сила тертя; $m\vec{g}$ - сила тяжіння; $\vec{N}$ - реакція опори (рис. 3.8).

Як вже було сказано (див. 3.3), сили для зручності можна паралельно переносити так, щоб вони виходили з однієї точки (рис. 3.8).

Рівняння руху для такого випадку запишеться так:

$$\vec{F}_{\text{тр}} + \vec{F} + \vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}.$$

Визначаючи проекції цього рівняння на координатні осі, можна визначити невідомі в умові задачі сили або для відомих сил – прискорення, з яким рухається тіло і ін.

3.7 Поняття про сили інерції

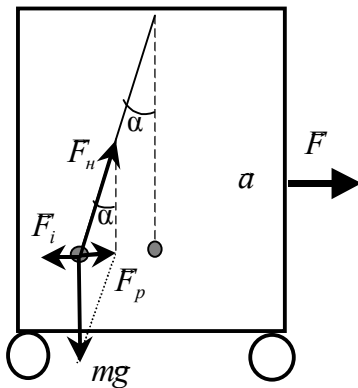


Рисунок 3.9
Дія сил на тіло в неінерціальній системі відліку

З другого закону Ньютона відомо, що прискорення, з яким рухається тіло, є результат дії сили і завжди напрямлене в напрямі їх результуючої. Тобто сили є *причиною* будь-якої зміни стану руху, а прискорення – *наслідком* їх дії. Крім того, існують ще так звані *сили інерції*, які виникають як наслідок прискорень. Сили інерції виникають тільки в неінерціальних системах відліку, їх не можна трактувати як результат взаємодії якихось реальних тіл, тобто вони є результатом руху. Напрямок цих сил протилежний напрямку прискорення, з яким рухається система.

Завжди потрібно чітко усвідомлювати, що сили, які спричиняють прискорений рух тіла, і сили інерції, які виникають внаслідок цього руху, завжди рівні за величиною і протилежні за напрямом (рис. 3.9):

$$\vec{F}_p = -\vec{F}_i, \quad (3.10)$$

$\vec{F}$ - сила, що надає візку прискорення;

$F_p = mg \cdot \operatorname{tg} \alpha = ma$ - результуюча сил натягу і тяжіння, звідки кут нахилу нитки $\operatorname{tg} \alpha = a/g$; $\vec{F}_i = -m\vec{a}$ - сила інерції; m - маса тіла; $\vec{a}$ - прискорення, з яким рухається неінерціальна система відліку.

Якщо ж тіло рухається з прискоренням $\vec{a}'$ відносно неінерціальної системи відліку, то другий закон Ньютона треба записувати у вигляді:

$$\vec{F}' + \vec{F}_i = m\vec{a}', \quad (3.11)$$

де $\vec{F}' = m\vec{a}_0$ (a_0 - прискорення тіла в інерціальній системі відліку).

Крім розглянутого випадку прискореного поступального руху системи відліку, є ще два випадки проявлення сил інерції.

Перший: Сили інерції, що діють на тіло, яке перебуває в спокої відносно системи відліку, яка обертається з кутовою швидкістю ω (рис.3.10).

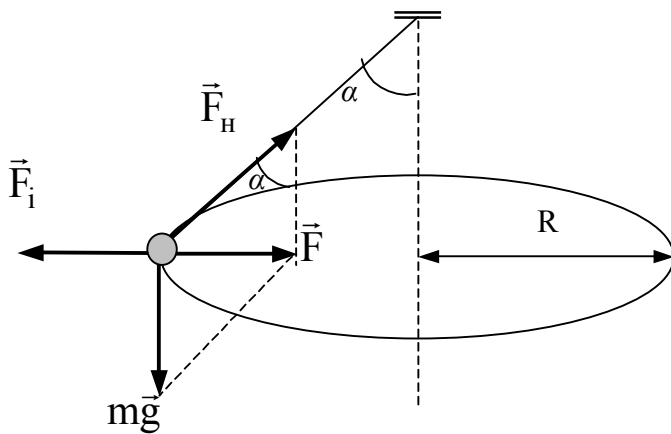


Рисунок 3.10

Дія сил на тіло в обертівій системі відліку

Відносно інерціальної системи відліку (підлоги в приміщенні, наприклад,) кулька буде рівномірно обертатись по колу радіусом R . Отже на неї діє сила $F = F_n + mg$, яка і надає їй доцентрового прискорення, тобто $F = mg \cdot \operatorname{tg} \alpha = m\omega^2 R$, звідки $\operatorname{tg} \alpha = \omega^2 R/g$.

Відносно неінерціальної системи відліку (місця кріплення нитки, наприклад,) кулька буде в спокої, коли сила F буде скомпенсована рівною їй, але протилежно напрямленою силою інерції F_i , яку ще називають відцентровою силою інерції. $F_i = -m\omega^2 R$, тобто вона залежить від кутової швидкості ω обертання системи відліку і відстані до осі обертання R , але не залежить від швидкості тіла відносно цієї системи відліку.

Проектуючи деталі, які в машинах повинні обертатись з великими швидкостями, необхідно збалансовувати в них дію

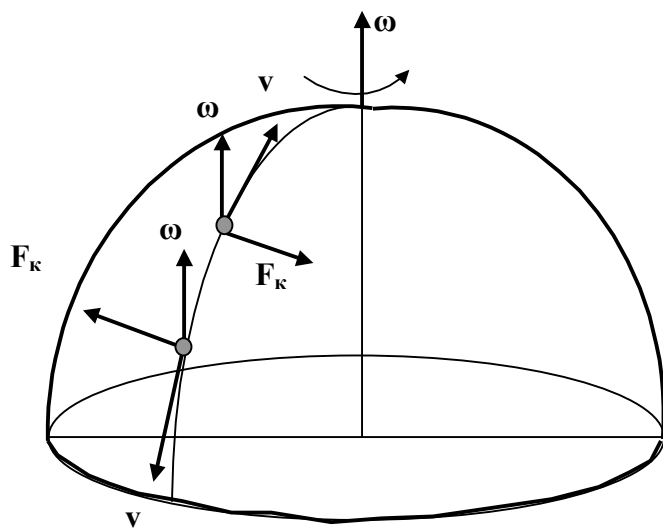


Рисунок 3.11

Дія сил на тіло, яке рухається в
обертовій системі відліку

(в північній півкулі, а в південній – вліво). Величина і напрям *коріолісової сили інерції* визначається формулою:

$$\mathbf{F}_k = 2m[\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega}]. \quad (3.12)$$

Наслідком дії сили Коріоліса в північній півкулі є більш сильне підмивання правих берегів річок; сильніше зношення правих рейок на залізничних коліях; відхилення на схід тіл, які вільно падають; обертання площини коливання маятника довкола вертикального напрямку.

Зверніть увагу на те, що два основні твердження динаміки, згідно яких прискорення завше спричинене силою, а сила завше зумовлена взаємодією між тілами, – в неінерціальних системах відліку одночасно не виконуються. Крім того, сили інерції є для тіл завжди зовнішніми. А це означає, що неінерціальні системи відліку є незамкнутими, тобто в них не виконуються закони збереження кількості руху (імпульсу), енергії і моменту імпульсу.

Водночас сили інерції і сили тяжіння дуже подібні між собою і їх часто неможливо розрізнити. Цю аналогію Ейнштейн поставив в основу **принципу еквівалентності**: всі фізичні явища в полі сил тяжіння проходять так же, як і у відповідному полі сил інерції, якщо напруженості обох полів у відповідних точках простору співпадають, а всі інші початкові умови однакові. Цей принцип є основою **загальної теорії відносності**.

відцентрових сил. Водночас їх широко використовують в усіх відцентрових механізмах (сепараторах, центрифугах, насосах...).

Другий: Сили інерції, що діють на тіло, яке рухається відносно системи відліку, яка обертається з кутовою швидкістю ω (рис.3.11).

Якщо тіло рухається радіально або вздовж меридіану відносно системи відліку, яка обертається (Земля), то на нього діє сила, яка завше спрямована вправо

3.8 Тиск. Архімедова сила. Гідростатичне зважування.

Умови плавання

Тиском називається фізична величина, що дорівнює силі, яка діє на одиницю площі поверхні в перпендикулярному до неї напрямі:

$$P = \frac{F}{S}, \quad (3.13)$$

де F – сила; S - площа поверхні.

В системі СІ тиск вимірюється в паскалях $[p] = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па}$.

Б.Паскалем сформульований закон:

Тиск рідиною або газом передається в усіх напрямках без зміни.

Посудини, сполучені між собою внизу, називають **сполученими посудинами**.

Однорідна рідина в сполучених посудинах встановлюється на одному рівні незалежно від форми посудини.

Занурене тіло в рідину чи газ втрачає частину своєї ваги. З боку рідини чи газу на занурене в них тіло завжди діє сила, напрямлена протилежно силі тяжіння. Величина цієї сили визначається законом Архімеда: **на занурене в рідину чи газ тіло діє виштовхувальна сила, прикладена до центра маси тіла, напрямлена вертикально вгору, і дорівнює вазі рідини чи газу, витіснених цим тілом:** $F_v = \rho g V$, де F_v - виштовхувальна сила; ρ - густина рідини чи газу; g - прискорення вільного падіння; V - об'єм рідини чи газу, витіснений тілом.

Закон Архімеда – основа теорії плавання. Якщо виштовхувальна сила (для повного занурення тіла) більша від сили тяжіння, то тіло плаває на поверхні рідини ($F_v > mg$), якщо дорівнює, – то плаває в рідині ($F_v = mg$) і якщо менша ($F_v < mg$), – то тіло тоне.

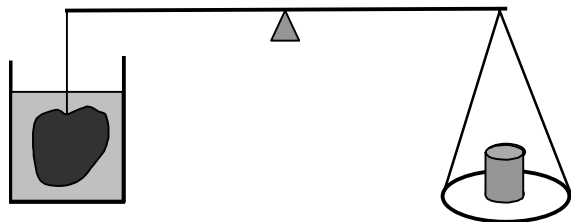


Рисунок 3.12 Гідростатичне зважування

Закон Архімеда використовується і для визначення густини твердого тіла. Для цього використовують гідростатичні терези, за допомогою яких, зважуючи тіло в повітрі і в воді, визначають

густину тіла неправильної геометричної форми (рис. 3.12). Якщо ρ_T - густина твердого тіла, ρ_p - густина рідини, в якій зважують тіло, P_n - вага тіла в повітрі, P_b - вага повністю зануреного в рідину тіла, то

$$\rho_m = \frac{\rho_p \cdot P_n}{P_n - P_b}. \quad (3.14)$$

Зверніть увагу на те, що спочатку зважують тіло в повітрі, а потім в рідині (густину можна визначити тільки такого твердого тіла, яке тоне в рідині).

Гідростатичне зважування використовується і для визначення густини рідини.

Якщо ρ - густина невідомої рідини; ρ_1 - густина відомої рідини; P_n - вага твердого тіла в повітрі; P_{ρ_1} - вага твердого тіла в рідині, густину якої потрібно визначити; P_{ρ_2} - вага твердого тіла в рідині, густина якої відома, то

$$\rho = \rho_1 \frac{P_n - P_{\rho_1}}{P_n - P_{\rho_2}}. \quad (3.15)$$

3.9 Кількість руху (імпульс). Закон збереження імпульсу

Імпульс (кількість руху) – фізична векторна міра механічного руху матеріальної точки або поступального руху тіла.

Для матеріальної точки імпульс ($\vec{p}$) визначається добутком її маси (m) на швидкість ($\vec{v}$): $\vec{p} = m\vec{v}$. Для великої кількості точок

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i. \quad \text{Для поступального руху твердого тіла: } \vec{p} = m\vec{v}_c$$

(m - маса всього тіла, $\vec{v}_c$ - швидкість руху центра мас, тобто всього тіла).

Імпульс тіла (точки) під дією сили $\vec{F}$ змінюється за законом динаміки $\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{\Delta(m\vec{v})}{\Delta t}$ або $\vec{F}\Delta t = \Delta(m\vec{v}) = \Delta \vec{p}$, де $\vec{F}\Delta t$ - імпульс сили, $\Delta \vec{p}$ - зміна імпульсу.

Зверніть увагу: класичній механіці зміна імпульсу визначається тільки зміною швидкості ($\Delta p = m\Delta v$).

В системі СІ імпульс вимірюється в кг·м/с, $[p] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$.

В механіці має велике значення **закон збереження імпульсу**: векторна сума імпульсів тіл замкнутої системи (на яку не діють зовнішні тіла) залишається величиною сталою:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \text{const.} \quad (3.16)$$

Зверніть увагу на те, що повний імпульс системи є сталою величиною, а значить, його зміна дорівнює нулю: $\Delta \vec{p} = 0$.

Завжди потрібно пам'ятати, що тіла після взаємодії можуть рухатися окремо (пружний удар) і разом, як одне ціле (непружний удар). Для обох цих випадків закон збереження імпульсу запишеться так:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' \quad (\text{пружний удар}),$$

$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}$ (непружний удар), де m_1 і m_2 - маси тіл; v_1 і v_2 - швидкості тіл до взаємодії; v_1' , v_2' і v - швидкості тіл після взаємодії.

3.10 Реактивний рух

Рух, що виникає в результаті відділення від тіла його частини з деякою відносною швидкістю, називають **реактивним**.

Основоположниками застосування реактивного руху в ракетній техніці є: М.І.Кибальчич – автор першого проекту реактивного літаючого апарата, К.Е.Ціолковський – заклав основи теорії реактивних двигунів ($v_p = v_2 \ln \frac{m_2}{m_p}$, де v_p - швидкість ракетки,

v_2 – швидкість вилітаючих газів, m_2 – маса палива, m_p – маса ракети), С.П.Корольов – автор конструкції ракет для космічних польотів, Ю.Кондратюк – автор проектів польотів на інші планети.

Реактивний рух пояснюється на основі закону збереження імпульсу. Нехай в деякий момент часу маса ракети разом з паливом дорівнює m , а швидкість її відносно Землі дорівнює v . Під час згоряння деякої кількості палива ракета через час t_1 матиме масу m_1 і швидкість відносно Землі v_1 . Швидкість газів відносно ракети дорівнює u і напрямлена в протилежну сторону до напрямку руху

ракети. Тоді швидкість газів відносно Землі в момент часу t_1 дорівнює різниці швидкості ракети в цей момент і швидкості вилітаючих газів $v_{\text{газ}} = v_1 - u$. Імпульс ракети в момент часу t_0 дорівнює $p_0 = mv$. В момент часу t_1 сумарний імпульс ракети і газів $p_1 = m_1 v_1 + m_{\text{газ}} v_{\text{газ}} = m_1 v_1 + (m - m_1)(v_1 - u)$. Оскільки ракета і газів утворюють замкнуту систему, то до неї можна застосувати закон збереження імпульсу: $mv = m_1 v_1 + (m - m_1)(v_1 - u)$. Розкривши дужки, одержимо: $m(v_1 - v) = u(m - m_1)$. Але $v_1 - v = \Delta v$ – приріст швидкості; $\Delta m = m - m_1$ – маса речовини, що згоріла за час $\Delta t = t_1 - t_0$. Тоді $m\Delta v = \Delta mu$. Таким чином, вилітаючі газів призводять до збільшення швидкості руху ракети, тобто діють на неї з деякою силою, яка називається реактивною. Щоб визначити її, скористаємося основним рівнянням динаміки (другий закон Ньютона). Поділимо $m\Delta v = \Delta mu$ на Δt і отримаємо $\frac{m\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta mu}{\Delta t}$.

Враховуючи те, що $\frac{m\Delta v}{\Delta t} = F$ – рушійна сила, а $k = \frac{\Delta m}{\Delta t}$ – швидкість згоряння палива, одержимо: $F = ku$.

З цієї рівності випливає, що реактивна сила тяги пропорційна швидкості згоряння палива.

3.11 Запитання для самоперевірки

Шановний читачу, перед тим, як приступити до розв'язування задач, постарайтесь дати відповіді на запитання:

1. Яке основне завдання динаміки?
2. Які системи відліку називають інерціальними?
3. Сформулюйте перший закон Ньютона.
4. Що таке інерція?
5. Чому поняття спокою і рівномірного прямолінійного руху відносні?
6. В чому суть принципу відносності Галілея?
7. Що розуміють під масою тіла і як її можна визначити?
8. Що таке густина?
9. Що таке сила і якими величинами вона характеризується?
10. В яких одиницях вимірюється маса і сила?

11. Яку силу називають рівнодійною, як її можна визначити і як її можна розкласти на складові?
12. Сформулюйте другий і третій закони Ньютона.
13. Які сили найчастіше зустрічаються в повсякденному житті людини?
14. Чим відрізняється пружна деформація від пластичної?
15. Для якої деформації виконується закон Гука і як він формулюється?
16. Яку силу називають силою тертя ковзання і від чого вона залежить?
17. Яку величину називають коефіцієнтом тертя ковзання і від чого вона залежить?
18. Які сили називають гравітаційними і за яким законом можна визначити їх величину?
19. Що розуміють під вагою тіла?
20. Що розуміють під перевантаженням і невагомістю, і за яких умов вони виникають?
21. Що розуміють під першою, другою і третьою космічною швидкостями і як їх можна визначити?
22. Сформулюйте закон збереження імпульсу.

Тест для контролю теоретичного матеріалу:

1. Яка різниця між вагою тіла і силою тяжіння?

Варіанти відповіді: **А** – немає ніякої різниці, вони завжди рівні; **В** – сила тяжіння діє на дане тіло, а вага – це сила, з якою це тіло діє на опору або підвіс; **С** – вага – це маса тіла, виражена в одиницях сили; сила тяжіння – це сила, з якою гравітаційне поле Землі в будь-якій точці простору діє на тіло; **Д** – серед вищенаведених відповідей немає правильної.

2. Сформулюйте другий закон Ньютона.

Варіанти відповіді: **А** – сила, з якою одне тіло діє на інше, дорівнює добутку маси цього другого тіла на величину прискорення, з яким це тіло рухається; **В** – всякій дії є завжди рівна по величині і протилежно спрямована протидія; **С** – прискорення, з яким рухається дане тіло, прямопропорційне результуючій всіх прикладених до тіла сил і оберненопропорційне його масі; **Д** – тіло зберігає стан спокою

або рухається рівномірно прямолінійно до тих пір, поки зовнішні сили не заставлять змінити цей стан.

3. Що таке імпульс тіла і від чого залежить його величина?

Варіанти відповіді: **A** – це векторна величина, яка характеризує рух даного тіла, і визначається добутком маси тіла на швидкість його руху; **B** – це фізична величина, яка характеризує рух тіла по колу, і дорівнює добутку маси тіла на радіус-вектор; **C** – це векторна величина, яка визначається швидкістю зміни з часом сили, яка діє на дане тіло; **D** – це проміжок часу, на протязі якого на тіло діяла сила, змінюючи його швидкість.

4. Який рух називається реактивним?

Варіанти відповіді: **A** – це рух частинок під час хімічної реакції; **B** – це рух ракет після згорання палива; **C** – це рух тіла за рахунок відділення від нього іншої його частини в протилежну сторону; **D** – це рух тіл в неінерціальних системах відліку внаслідок дії сторонніх сил.

5. За якої умови тіло може рухатися навколо Землі по коловій орбіті?

Варіанти відповіді: **A** – коли воно набуде першої космічної швидкості; **B** – коли воно набуде другої космічної швидкості; **C** – коли сила тяжіння буде рівна силі інерції; **D** – коли воно набуде третьої космічної швидкості.

3.12 Приклади розв'язування задач з динаміки

Задача першого рівня складності

1. Тіло масою 100 кг рівномірно ковзає по поверхні землі. Яка величина сили, прикладеної до тіла, якщо коефіцієнт тертя 0,2?

Дано:	Розв'язування
$m = 100 \text{ кг}$	З рисунка 3.13 видно, що на тіло діють: сила тяги $\vec{F}$, сила тертя $\vec{F}_{\text{тр}}$, сила реакції опори $\vec{N}$ і сила тяжіння $m\vec{g}$. Умовою рівномірного руху тіла згідно з першим законом Ньютона є: $\vec{F}_{\text{тр}} + \vec{N} + \vec{F} + m\vec{g} = 0$. Визначимо проекції сил на вибрану вісь координат OX (вважаємо, що напрям руху співпадає з OX): $-F_{\text{тр}} + 0 + F + 0 = 0$ і $F = F_{\text{тр}}$. Відомо, що $F_{\text{тр}} = \mu mg$ для випадку,
$\mu = 0,2$	
$F = ?$	

коли тіло рухається по горизонтальній поверхні, тоді $F = \mu mg$.

Перевірка одиниць вимірювання: $[F] = \text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н}$.

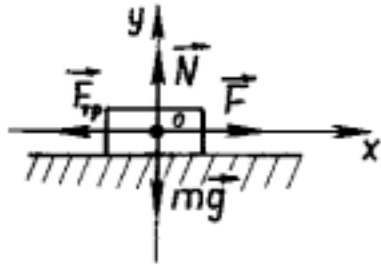


Рисунок 3.13

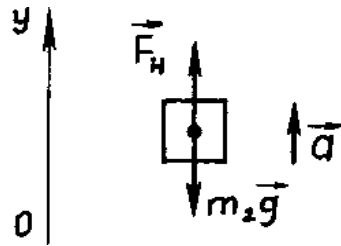


Рисунок 3.14

Підставивши числові значення, одержимо:

$$F = 0,2 \cdot 100 \text{ кг} \cdot 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = 200 \text{ Н} = 0,2 \text{ кН}.$$

Відповідь: Для того, щоб тіло рухалось рівномірно, потрібно прикласти до нього силу 0,2 кН.

Задача другого рівня складності

1. Сталева дротина може витримати вантаж масою 440 кг. З яким найбільшим прискоренням можна піднімати тіло масою 390 кг, підвішене на цій дротині, щоб вона не розірвалась?

Дано:	Розв'язування
$m_1 = 440 \text{ кг}$	На тіло масою m , що рухається вертикально вгору з прискоренням a діють: сила натягу $\vec{F}_n$ і сила тяжіння $m\vec{g}$ (див. рис. 3.14). Згідно з другим законом Ньютона рівняння руху тіла
$m_2 = 390 \text{ кг}$	
$g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$	
$a - ?$	
	$\vec{F}_n + m_2 \vec{g} = m_2 \vec{a}.$

Спроектувавши це рівняння на вісь ОУ, напрям якої співпадає з напрямом руху, одержимо: $F_n - m_2 g = m_2 a$. З цього рівняння

$a = \frac{F_n - m_2 g}{m_2}$. Згідно з умовою задачі F_n - максимальна сила натягу,

яку може витримати дротина. Її величина дорівнює $m_1 g$. Тоді

$$a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_2}. \text{ Перевірка одиниць вимірювання: } [a] = \frac{\text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2}}{\text{кг}} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Підставивши числові значення, одержимо:

$$a = \frac{(440 \text{ кг} - 390 \text{ кг}) \cdot 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}}{440 \text{ кг}} \approx 1,14 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Відповідь: Тіло може підніматися з прискоренням $1,14 \text{ м/с}^2$.

Задача третього рівня складності

1 У воді з глибини 5 м піднімають до поверхні камінь, об'єм якого становить $0,6 \text{ м}^3$. Густина каменю дорівнює 2500 кг/м^3 . Визначити роботу, затрачену на піднімання каменю.

Дано:	Розв'язування
$h = 5 \text{ м}$	На камінь у воді діє три сили: сила тяжіння mg ; сила Архімеда $F_A = \rho_v gV$; сила F , яку прикладають до каменя, щоб його рівномірно піднімати. Тоді $F = mg - F_A$. Робота цієї сили дорівнює
$V = 0,6 \text{ м}^3$	
$\rho_v = 1000 \text{ кг/м}^3$	
$\rho_k = 2500 \text{ кг/м}^3$	
$A - ?$	$A = F h = (mg - \rho_v gV)h,$

де $m = \rho_k V$ - маса каменю. Остаточно отримуємо

$$A = (\rho_k g V - \rho_v gV)h = (\rho_k - \rho_v)gVh.$$

Перевіримо одиниці вимірювання:

$$[A] = \left(\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} - \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right) \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \text{м}^3 \text{м} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} \text{м} = \text{Нм} = \text{Дж}$$

Підставивши числові значення, отримаємо:

$$A = (2500 - 1000)10 \cdot 0,6 \cdot 5 \text{ Дж} = 4500 \text{ Дж} = 4,5 \text{ кДж}.$$

Відповідь: Величина виконаної роботи $4,5 \text{ кДж}$.

3.13 Задачі для самостійних вправ

Рівень-1

1 На тіло масою 200 г діє стала сила, яка за 5 с надає йому швидкості 1 м/с . Визначити величину цієї сили. (Відповідь: $0,04 \text{ Н}$).

2 Внаслідок взаємодії двоє тіл набули прискорення 1 см/с^2 і 1 м/с^2 . Визначити співвідношення мас цих тіл. (Відповідь: $m_1/m_2 = 100$).

3 Під дією сили в 200 Н пружина розтягнута на 10 мм . Визначити коефіцієнт пружності пружини. (Відповідь: $2 \cdot 10^4 \text{ Н/м}$).

4 Тіло масою 100 кг рівномірно ковзає по горизонтальній поверхні. Якої величини сила, прикладена до тіла, якщо коефіцієнт

тертя 0,2? Вважати, що напрям сили співпадає з напрямом руху. (Відповідь: 200 Н).

5 Яку силу потрібно прикласти до кінця мотузки, перекинутої через нерухомий блок, щоб вантаж масою 15 кг, підвішений до другого кінця, рухався вгору з прискоренням $2,5 \text{ м/с}^2$? (Відповідь: 187,5 Н).

6 До тіла прикладені дві сили під кутом 90° одна до одної. Визначити величину рівнодійної сили, якщо величини складових 3 Н і 4 Н. (Відповідь: 5 Н).

7 Сила гравітаційної взаємодії між двома однаковими кулями 0,01 Н. Які маси куль, якщо відстань між їх центрами 1 м? Гравітаційна стала $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/\text{кг} \cdot \text{с}^2$. (Відповідь: $\approx 1,22 \cdot 10^4 \text{ кг}$).

Рівень-2

1 Автомобіль рухається по горизонтальному шляху з швидкістю 72 км/год. Визначити, через який час від моменту виключення мотора автомобіль зупиниться. Коефіцієнт тертя 0,2. (Відповідь: 10 с).

2 До нитки підвішене тіло масою 1 кг. Визначити силу натягу нитки, якщо тіло піднімають вгору з прискоренням 5 м/с^2 ? (Відповідь: 15 Н).

3 Два хлопчики, маси яких 40 кг і 60 кг, стоять на ковзанах на льоду. Перший відштовхується від другого з силою 10 Н. Яких прискорень набувають хлопчики? (Відповідь: $0,25 \text{ м/с}^2$, $\approx 0,17 \text{ м/с}^2$).

4 Дерев'яний брусок масою 0,2 кг ковзає по горизонтальній поверхні під дією вантажу масою 0,05 кг, прив'язаного до кінця мотузки, перекинутої через нерухомий блок. Коефіцієнт тертя між бруском і поверхнею 0,1. Визначити прискорення, з яким рухається вантаж. (Відповідь: $1,2 \text{ м/с}^2$).

5 З якою швидкістю повинен рухатися мотоцикліст по опуклій ділянці шляху, що має радіус кривизни 40 м, щоб у верхній точці опуклості тиск дорівнював нулю? (Відповідь: 20 м/с).

6 На якій відстані від поверхні Землі сила притягання космічного корабля стане в 100 разів меншою, ніж на її поверхні? (Відповідь: $9 \cdot R$).

7 Ліхтар вагою 200 Н підвішений на двох дротах, які утворюють з вертикальними стінками кути по 60° . Визначити сили натягу дротів. (Відповідь: 200 Н).

Рівень-3

1 Потяг масою 10^5 кг відходить від станції, рухаючись рівноприскорено, і на відстані 250 м розвиває швидкість 36 км/год. Коефіцієнт опору 0,006. Визначити силу тяги локомотива. (Відповідь: $26 \cdot 10^3$ Н).

2 Пасажи́рський потяг масою $4 \cdot 10^4$ кг рухається з швидкістю 40 км/год. Визначити гальмівну силу, якщо гальмівний шлях потягу 200 м. (Відповідь: $\approx 0,12$ кН).

3 На похилій площині завдовжки 5 м і заввишки 3 м лежить вантаж, маса якого 50 кг. Яку силу, напрямлену вздовж площини, треба прикласти, щоб утримати цей вантаж? Витягувати його рівномірно вгору? Витягувати з прискоренням 1 м/с^2 ? Коефіцієнт тертя становить 0,2. (Відповідь: 220 Н, 380 Н, 830 Н).

4 Похила площина розташована під кутом $\alpha = 30^\circ$ до горизонту. За яких значень коефіцієнта тертя μ витягувати по ній вантаж важче, ніж піднімати вертикально? (Відповідь: $> 0,58$).

5 За допомогою нерухомого блока зрівноважені два вантажі масою по 0,23 кг. З яким прискоренням рухатимуться вантажі, якщо на один з них покласти додатковий вантаж масою 0,03 кг? Тертя в блоці не враховувати. Яка швидкість вантажів через 5 с після початку руху? Який шлях пройде кожний вантаж за 4 с? (Відповідь: $\approx 0,61 \text{ м/с}^2$, $\approx 3 \text{ м/с}$, 4,88 м).

6 З якою швидкістю автомобіль повинен проїжджати середину опуклого моста радіусом 40 м, щоб пасажир на мить опинився в стані невагомості? (Відповідь: 20 м/с).

7 Яку швидкість повинен мати штучний супутник, щоб обертатися по коловій орбіті на висоті 600 км над поверхнею Землі? Який буде період його обертання? Радіус Землі становить 6400 км. (Відповідь: 7,57 км/с; 96,5 хв).

8 Визначити найменший радіус дуги для повороту автомашини, що їде по горизонтальній дорозі з швидкістю 36 км/год, якщо коефіцієнт тертя коліс об дорогу становить 0,25. (Відповідь: 40 м).

9 Хлопчик, маса якого 50 кг, гойдається на гойдалці, підвішений на мотузці завдовжки 4 м. З якою силою він тисне на сидіння, проходячи положення рівноваги з швидкістю 6 м/с? (Відповідь: 950 Н).

10 Ковзаняр рухається з швидкістю 10 м/с по колу, радіус якого 30 м. Під яким кутом до горизонту він має нахилитися, щоб зберегти рівновагу? (Відповідь: 72°).

11 Вертоліт, маса якого 27,2 т, піднімає на тросах вертикально вгору вантаж масою 15,3 т з прискоренням $0,6 \text{ м/с}^2$. Визначити силу тяги вертольота і силу, що діє з боку вантажу, на причіпний механізм вертольота. (Відповідь: 442 кН; 160 кН).

12 Обчислити першу космічну швидкість для Венери, якщо маса Венери становить $4,3 \cdot 10^{24} \text{ кг}$, а її радіус дорівнює 6100 км. (Відповідь: 7,3 км/с).

13 Який запас міцності тросів, на яких підвішена кабіна ліфта, якщо загальний переріз тросів 200 мм^2 , а маса кабіни з пасажирами 500 кг? Межа міцності сталі, з якої виготовлені троси 450 Н/мм^2 . (Відповідь: 18).

14 Якого найменшого перерізу треба взяти сталевий стержень, щоб навантаження 2500 Н під час розтягу не спричинило залишкової деформації? Межа пружності розтягу 1000 Н/мм^2 . (Відповідь: $2,5 \text{ мм}^2$).

15 Сидячи у човні, мисливець стріляє з рушниці в тому самому напрямі, в якому пливе човен. Яку швидкість мав човен, якщо він зупинився після двох пострілів, зроблених швидко один за одним? Маса мисливця з човном 200 кг, маса набою 20 г. Швидкість вильоту шроту та порохових газів становить 500 м/с. (Відповідь: 0,1 м/с).

16 Матеріальна точка, маса якої 1 кг, рівномірно рухається по колу з швидкістю 10 м/с. Визначити зміну імпульсу за одну чверть періоду, половину періоду і цілий період. (Відповідь: 14 кг·м/с; 20 кг·м/с; 0).

17 Яку вагу матиме у воді (густина 10^3 кг/м^3) і в гасі (густина 800 кг/м^3) кусок свинцю (густина $11,3 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$), який у повітрі важить 20 Н? (Відповідь: 18,25 Н; 18,6 Н).

18 Діаметр капронової рибальської жилки 0,12 мм, а розривне навантаження 7,5 Н. Визначити межу міцності на розрив даного сорту капрону. (Відповідь: 0,66 ГПа).

19 Під час розтягування алюмінієвої дротини (модуль Юнга – 69 ГПа) завдовжки 2 м у ній виникла механічна напруга 35 МПа. Визначити відносне та абсолютне видовження. (Відповідь: 0,0005; 1 мм).

20 До кінців сталевий дротини (модуль Юнга – 216 ГПа), що має довжину 3 м і переріз 1 мм^2 , приклали розтягуючі сили 200 Н кожна. Визначити абсолютне і відносне видовження. (Відповідь: 3,5 мм; $1,2 \cdot 10^{-3}$).

Тест для контролю вміння розв'язувати задачі:

1. Автомобіль, маса якого 2т, рухається по опуклому мосту радіусом кривизни 40 м з швидкістю 36 км/год. Визначити величину доцентрової сили, яка діє на автомобіль.

Варіанти відповіді: А – $2 \cdot 10^4$ Н; В – $8 \cdot 10^3$ Н; С – $5 \cdot 10^3$ Н; Д – $3 \cdot 10^3$ Н.

2. Який має бути діаметр труби, щоб для швидкості течії 0,32 м/с через її поперечний переріз протікало 10 літрів води за 4 секунди?

Варіанти відповіді: А – 3 м; В – 0.1 м; С – 2 м; Д – 0.2 м.

3. Сила, з якою тіло розтягує пружину, знаходячись у воді, в три рази менша від сили розтягу, коли тіло знаходиться в повітрі. Визначити густину тіла (густина 10^3 кг/м^3).

Варіанти відповіді: А – $3 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$; В – $8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$; С – $2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$; Д – $1.5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

4. Якої швидкості набуває ракета масою 0,6 кг в момент вилітання з неї продуктів згоряння масою 30 г з швидкістю 800 м/с?

Варіанти відповіді: А – 30 м/с; В – 8 м/с; С – 40 м/с; Д – 3 м/с.

5. Для якого значення прискорення розірветься трос, міцність якого на розрив становить 15 кН, якщо ним піднімати вантаж масою 500 кг?

Варіанти відповіді: А – 3 м/с^2 ; В – 8 м/с^2 ; С – 0.5 м/с^2 ; Д – 20 м/с^2 .

Розділ 4 ДИНАМІКА ОБЕРТОВОГО РУХУ

Розглядаючи обертовий рух тіл, слід звернути увагу на дві речі: перше – вже не можна абстрагуватися від реальної форми цих тіл, потрібно враховувати наявні і потенційні осі обертання, і, друге, - необхідно враховувати точку прикладання кожної із діючих на тіло сил.

Момент сили – фізична величина, яка характеризує обертовий ефект сили під час її дії на тверде тіло. **Тверде тіло** – тіло, в якому відстань між двома будь-якими точками залишається незмінною за всіх умов, тобто тіло не деформується. Це поняття вводиться для того, щоб можна було описати обертання такого тіла однаковими значенням кутових характеристик для всіх його точок, тобто для тіла в цілому.

4.1 Момент сили. Умови рівноваги твердого тіла

Момент сили ($\vec{M}$) відносно осі обертання O дорівнює векторному добутку радіус-вектора $\vec{r}$, проведеного з точки O до точки прикладання сили (рис. 4.1), на вектор сили $\vec{F}$:

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}]. \quad (4.1)$$

Часто визначення моменту сили дають і так: момент сили дорівнює добуткові плеча сили на величину сили. В цьому випадку

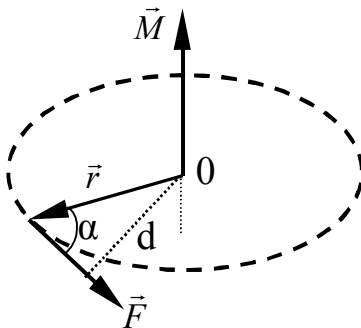


Рисунок 4.1 Момент сили

мається на увазі, що плече сили – найкоротша відстань від осі обертання до лінії дії сили: $d = r \cdot \sin \alpha$ (α - кут між радіус-вектором і силою). Напрямок моменту сили визначається правилом правого гвинта (рис. 4.1): якщо напрям сили $\vec{F}$ співпадає з напрямом обертання правого гвинта, то поступальний рух гвинта вказує на напрям моменту сили.

Одиницею вимірювання моменту сили в системі СІ є ньютон, помножений на метр (Н·м),

$$[\vec{M}] = \text{Н} \cdot \text{м} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2}.$$

На тіло, що може вільно обертатися навколо осі чи точки, можуть діяти декілька моментів сил (рис.4.2, а, б).

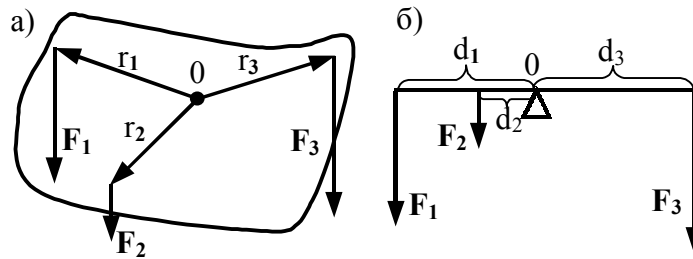


Рисунок 4.2 Дія декількох моментів сил

Якщо вісь O нерухома, то умовою рівноваги тіла відносно неї є: сума моментів сил відносно осі обертання дорівнює нулю

$$\left(\sum_{i=1}^n \vec{M}_i = 0 \right). \quad (4.2)$$

Загальною умовою рівноваги тіла відносно осі (точки) O є:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0 \text{ і } \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = 0. \quad (4.3)$$

Складаючи рівняння для умови рівноваги тіла, що має вісь (точку) обертання, потрібно пам'ятати, що моменти сил, напрями яких співпадають з напрямом моменту сили, визначеного за правилом правого гвинта, беруть зі знаком “+”, а моменти сил, напрям яких протилежний до напрямку, визначеного правилом правого гвинта, беруть зі знаком “-” (часто кажуть: за і проти стрілки годинника), наприклад: умовою рівноваги важеля відносно точки опори O (рисунок 4.2,б) є:

$$F_1 d_1 + F_2 d_2 = F_3 d_3.$$

4.2 Момент інерції. Закон динаміки обертового руху

Коли тіло здійснює обертовий рух, то важливим є не стільки його маса, як її розподіл, – розташування мас різних частин тіла відносно осі обертання. Від цього буде залежати результат руху, тобто – з яким кутовим прискоренням буде обертатись дане тіло. Для врахування впливу віддаленості різних частин тіла від реальної або потенційної осей обертання на величину кутової швидкості та кутового прискорення вводиться скалярна фізична величина, яка називається моментом інерції тіла J . Момент інерції тіла залежить від

матеріалу, однорідності, форми і розмірів тіла, а також його віддаленості від осі обертання. Його величина визначається як алгебраїчна сума добутків мас всіх частинок тіла на квадрат їх відстаней від осі обертання:

$$J = \sum_{i=1}^n \Delta m_i r_i^2. \quad (4.5)$$

Для однорідних тіл правильної геометричної форми додавання можна замінити інтегруванням і розрахувати моменти інерції відносно їх центра симетрії, який співпадає з центром мас чи центром тяжіння:

Таблиця 4.1 Моменти інерції тіл симетричної форми

Форма тіла	формула
циліндр чи диск радіуса R (відносно їх поздовжньої осі)	$J = \frac{1}{2} m R^2$
кільце або тонкостінний порожнистий циліндр	$J = m R^2$
куля або порожниста сфера радіусом R	$J = \frac{2}{5} m R^2$
тонкий стержень довжиною l – вісь перпендикулярна і проходить через середину стержня	$J = \frac{1}{12} m l^2$
тонкий стержень довжиною l – вісь перпендикулярна і проходить через кінець стержня	$J = \frac{1}{3} m l^2$

Якщо відомий момент інерції тіла J_o відносно осі, що проходить через його центр мас, то момент інерції J відносно будь-якої іншої осі, віддаленої від неї на відстань d , визначається **теоремою Штейнера**: момент інерції тіла відносно даної осі дорівнює сумі моменту інерції тіла відносно паралельної їй осі, що проходить через центр мас цього тіла, і добутку маси даного тіла на квадрат відстані між цими осями:

$$J = J_o + m d^2. \quad (4.6)$$

Тобто для обертового руху тіла причиною є не сила, а момент сили, який “діє” не на масу, а на момент інерції тіла і змушує обертатись це тіло з кутовим прискоренням, яке прямо пропорційне

результуючому моменту (його ще називають головним) і обернено пропорційне моменту інерції цього тіла:

$$\vec{\epsilon} = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{M}_i}{J}. \quad (4.7)$$

Тобто для обертального руху вже не маса, а момент інерції тіла є його мірою інертності.

Тоді основний закон динаміки обертового руху матиме вигляд:

$$\vec{M} = J\vec{\epsilon}, \quad (4.8)$$

де $\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i$ - повний момент діючих на тіло сил.

4.3 Робота, кінетична енергія та потужність для обертового руху

Якщо на тіло діє спрямована по дотичній постійна за величиною сила F , а точка її прикладання знаходиться на периферії тіла, яке під її впливом обертається, і воно здійснює переміщення S , то робота рівна добутку цієї сили на переміщення $A = F S$. Оскільки $F = M/R$, а $S = \varphi \cdot R$, то одержуємо

$$A = M \varphi. \quad (4.9)$$

Миттєва потужність – це перша похідна від роботи (енергії) по часу, тоді отримаємо:

$$P = \frac{dA}{dt} = M \frac{d\varphi}{dt} = M\omega. \quad (4.10)$$

Тіло, яке обертається довкола даної осі, має кінетичну енергію, оскільки всі елементи його маси рухаються з певними швидкостями. Повна кінетична енергія обертання тіла дорівнює сумі енергій його окремих елементів:

$$W = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta m_i v_i^2}{2} = \sum \Delta m_i r_i^2 \frac{\omega^2}{2} = \frac{J\omega^2}{2}. \quad (4.11)$$

Тобто зміна кутової швидкості обертання від ω_1 до ω_2 спричиняє зміну кінетичної енергії тіла

$$\Delta W = \frac{J}{2}(\omega_1^2 - \omega_2^2). \quad (4.12)$$

Якщо тверде тіло одночасно рухається поступально з деякою швидкістю v і обертається з кутовою швидкістю ω навколо осі, що проходить через його центр інерції, то його повна кінетична енергія

$$W = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}. \quad (4.13)$$

4.4 Вільні осі. Гіроскопи

Через центр маси будь-якого тіла можна провести безліч осей. Але тільки відносно двох із них момент інерції тіла буде мати найменше і найбільше значення. Ці осі розташовані перпендикулярно одна до одної (рис. 4.3). Вони характерні тим, що відносно них можливе стійке обертання даного тіла. Обертання відносно третьої, перпендикулярної до них, вже не буде стійким. Тобто під час обертання тіла відносно даної осі її просторова орієнтація залишається також незмінною, але після короткотривалої дії

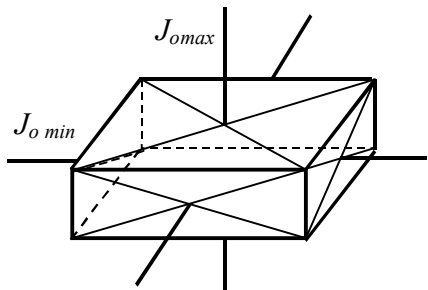


Рисунок 4.3
Головні осі інерції

зовнішніх сил тіло не буде повертатись у висхідне положення. Ці три взаємоперпендикулярні осі називаються *головними осями інерції*. Під час обертання тіла довкола будь-якої із головних осей інерції всі сили взаємно зрівноважуються, тому ці осі ще називають *вільними осями* або осями вільного обертання.

Властивість вільних осей зберігати свою орієнтацію в просторі широко застосовується в техніці. Характерним прикладом є гіроскопи – масивні однорідні тіла, які обертаються з великими кутовими швидкостями з мінімальним тертям довкола однієї із своїх осей симетрії, що є одночасно його вільною віссю. Гіроскопи широко застосовуються в навігаційних приладах (гірогоризонт, гірокомпас...) та для підтримання заданого курсу різних транспортних засобів (авторуль для суден, автопілот для літаків, автоматичне керування рухом самолітних снарядів...).

4.5 Момент імпульсу

Забезпечує утримання просторової орієнтації вільної осі гіроскопа ще один універсальний закон природи – закон збереження

моменту імпульсу. Момент кількості руху є аналогом кількості руху (імпульсу) тіла під час його обертання довкола даної осі.

Моментом імпульсу (кутовим моментом) тіла називається добуток його моменту інерції на кутову швидкість

$$\vec{L} = J\vec{\omega}. \quad (4.14)$$

Кутовий момент – векторна величина. Його напрям співпадає з напрямом кутової швидкості. Продиференціювавши цей вираз по часу, отримаємо:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = J \frac{d\vec{\omega}}{dt} = J\vec{\varepsilon} = \vec{M}. \quad (4.15)$$

Це є динамічне рівняння обертового руху в імпульсній формі. Добуток $\vec{M}dt$ називається *імпульсом моменту сили або рухаючим моментом*. Тоді зміна моменту імпульсу дорівнює інтегралу по часу від моменту сили

$$\Delta\vec{L} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}dt.$$

Якщо система є замкнутою, тобто на неї не діють моменти зовнішніх сил, то її повний момент імпульсу залишається постійним за величиною і напрямком:

$$\vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \dots + \vec{L}_n = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \vec{L}_{\text{пов}} = \text{const}. \quad (4.16)$$

Це – **закон збереження моменту імпульсу**, – один із фундаментальних законів фізики.

Зверніть увагу : 1) якщо кругле тіло котиться по плоскій поверхні, то на нього діє сила тертя F , прямо пропорційна силі N , що притискає це тіло до поверхні (реакції опори), і обернено пропорційна радіусу тіла r : $F = N \frac{k}{r}$, де k – коефіцієнт тертя кочення;

2) якщо на гіроскоп, що вільно обертається з кутовою швидкістю ω довкола головної осі обертання, діє обертовий момент M , перпендикулярний до осі обертання гіроскопа, то вісь гіроскопа буде обертатись (прецесія) з деякою кутовою швидкістю $\omega_n = \frac{M}{J\omega}$, де J – максимальний момент інерції тіла.

4.6 Запитання для самоперевірки

Шановний читачу, перед тим, як приступити до розв'язування задач, постарайтесь дати відповіді на запитання:

- 1) Чим визначаються інертні властивості тіла, яке обертається?
- 2) Сформулюйте і поясніть теорему Штейнера.
- 3) Як формулюється і записується динамічне рівняння обертового руху?
- 4) Як оцінити кінетичну енергію тіла, яке обертається і яке котиться?
- 5) Що таке момент імпульсу?
- 6) Сформулюйте закон збереження моменту імпульсу.
- 7) Що таке гіроскопи і де вони використовуються?

Тест для контролю засвоєння теоретичного матеріалу:

1. Що таке момент сили?

Варіанти відповіді: **А** – час, на протязі якого на тіло діє сила; **В** – скалярна величина, рівна добутку сили на величину переміщення тіла по колу; **С** – векторна величина, яка оцінює причину обертового руху тіла і визначається як векторний добуток радіус-вектора від осі обертання до точки прикладання сили на вектор діючої на тіла сили; **Д** – лінія, вздовж якої діє сила, що спричинила обертовий рух.

2. Від чого залежить момент інерції тіла?

Варіанти відповіді: **А** – від величини переміщення тіла по колу; **В** – від часової тривалості обертового руху тіла; **С** – від матеріалу, однорідності, форми і розмірів тіла, а також його віддаленості та орієнтації відносно осі обертання; **Д** – від кутової швидкості обертання тіла та діючої на нього сили.

3. Як визначити миттєву потужність тіла, що обертається?

Варіанти відповіді: **А** – $P = M \cdot \omega$; **В** – $P = M \cdot \varepsilon$; **С** – $P = m \cdot \varepsilon^2 / 2$; **Д** – $P = m \cdot v^2 / R$.

4. Які осі обертання називаються головними?

Варіанти відповіді: **А** – всі осі, що проходять через центр маси тіла; **В** – осі, відносно яких тіло обертається з постійним кутовим прискоренням; **С** – дві взаємноперпендикулярні осі, дотичні до поверхні тіла, що обертається; **Д** – три

взаємноперпендикулярні осі стійкого обертання, відносно двох з яких момент інерції тіла максимальний і мінімальний.

5. Запишіть динамічне рівняння обертального руху в імпульсній формі.

Варіанти відповіді: **A** – $\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}$; **B** – $\vec{F} = J \cdot \vec{\omega}$; **C** – $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$;

$$D - \vec{M} = \frac{d\vec{F}}{dt}.$$

4.7 Приклади розв'язування задач

Задача першого рівня складності

1 Один кінець труби масою 100 кг робітник поставив на спинку крісла, а другий тримає в руках так, щоб труба розташувалась горизонтально. Яку силу робітник прикладає до кінця труби?

Дано:	Розв'язування
$m = 100 \text{ кг}$	Труба буде в рівновазі, коли момент сили тяжіння,
$g = 10 \text{ м/с}^2$	прикладеної до середини труби, і момент сили,
$F - ?$	прикладеної до її другого кінця, відносно опори будуть
	одинакові, тобто

$$mgl/2 = Fl.$$

$$\text{Звідки отримуємо: } F = \frac{mg}{2} = \frac{100\text{кг} \cdot 10\text{м/с}^2}{2} = 500\text{Н}.$$

Відповідь: Сила для утримання труби рівна 500 Н.

Задача другого рівня складності

1 На якій відстані зупиниться диск масою 2 кг, який котиться по горизонтальній поверхні без проковзування, якщо на нього подіє гальмівна сила величиною 10 Н?

Дано:	Розв'язування
$m = 2 \text{ кг}$	Момент інерції диска $J = 1/2 mR^2$.
$F = 10 \text{ Н}$	Повна кінетична енергія диска $W_k = 1/2 \cdot J \cdot \omega^2 + 1/2 \cdot mv^2$
$l - ?$	йде на виконання роботи переборення сили тертя
	$A = F l.$

Згідно закону збереження і перетворення енергії, отримуємо:

$$\frac{J \cdot \omega^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = F \cdot l. \text{ Враховуючи, що } \omega = v/R, \text{ і підставляючи значення}$$

момента інерції для диска, отримуємо:

$$\frac{mR^2}{2} \frac{v^2}{R^2} + \frac{mv^2}{2} = mv^2 = Fl.$$

Звідки

$$l = mv^2/F.$$

Перевіримо одиниці вимірювання: $[l] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2 \text{Н}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^2}{\text{с}^2 \text{кг} \cdot \text{м}} = \text{м}.$

Підставивши числові значення даних величин, отримаємо:

$$l = \frac{2\text{кг} \cdot 4\text{м}^2 / \text{с}^2}{10\text{Н}} = 0,8\text{м}.$$

Відповідь: Диск зупиниться, прокотившись 0,8 м.

Задача третього рівня складності

1 Суцільний диск радіусом 0.2 м і масою 50 кг розкрутили до частоти 8 Гц. Під дією сил тертя він зупинився через 50 с. Знайти момент сили тертя.

Дано:	Розв'язування
$R = 0,2 \text{ м}$	Запишемо основне рівняння динаміки обертального руху у вигляді: $M = J \cdot \varepsilon$ де $J = 1/2 m R^2$ – момент інерції диска, а $\varepsilon = (\omega - \omega_0)/t$ – кутове прискорення. Враховуючи, що кутова швидкість $\omega_0 = 2\pi\nu_0$, а $\omega = 0$, отримаємо:
$m = 50 \text{ кг}$	
$\nu_0 = 8 \text{ Гц}$	
$t = 50 \text{ с}$	
$M - ?$	

$$M = \frac{1}{2} m R^2 \frac{(\omega - \omega_0)}{t} = -\frac{m R^2 \pi \nu_0}{t}.$$

Перевіримо

одиниці

вимірювання:

$$[M] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \text{с}^{-1}}{\text{с}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} \text{м} = \text{Н} \cdot \text{м}.$$

Підставивши значення даних фізичних величин у системі СІ,

отримаємо:
$$M = -\frac{50 \cdot 0.2^2 \cdot 3.14 \cdot 8}{50} \text{ Нм} = -1 \text{ Нм}.$$

Відповідь: Гальмівний момент, рівний – 1 Нм.

4.8 Задачі для самостійних вправ

1 На шків діаметром 40 см діє момент сили 10 Н·м. Визначити величину сили, прикладеної дотично до шківів. (Відповідь: 50 Н).

2 З якою силою потрібно діяти на ручку коловорота в криниці, з якої рівномірно витягають відро з водою масою 10 кг, якщо ручка

знаходиться на відстані 30 см від осі дерев'яного барабана радіусом 7.5 см, на який намотується трос з відром? (Відповідь: 25 Н).

3 Яку горизонтальну силу треба прикласти до верхньої точки однорідного куба вагою 100 Н, щоб перекинути його? (Відповідь: 50 Н).

4 Кулька масою 0.1 кг обертається на нитці довжиною 0.3 м у вертикальній площині. Яка сила натягу нитки в момент, коли кулька проходить верхнє положення із швидкістю 2.1 м/с? (Відповідь: 0.49 Н).

5 Тіло масою 1 кг поблизу екватора важить 9,78 Н. Приймаючи екваторіальний радіус Землі рівним 6378 км, визначити силу притягання цього тіла Землею. (Відповідь: 9,814 Н).

6 Тіло зісковзує вниз з вершини сфери радіусом R . На якій висоті h від вершини сфери тіло відірветься від її поверхні і полетить вниз? Тертям знехтувати. (Відповідь: $h = R/3$).

7 Дві маленькі кульки з масами 40 г і 120 г з'єднані жорстким невагомим стержнем довжиною 0,2 м. Визначити момент інерції цієї системи відносно осі, що проходить через середину стержня перпендикулярно до нього. (Відповідь: $1,6 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$).

8 Використовуючи умову задачі 7, визначити момент імпульсу системи, якщо вона обертається з частотою 3 Гц. (Відповідь: $2,26 \cdot 10^{-2} \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$).

9 Диск масою 0,5 кг і діаметром 0,4 м обертається з частотою 25 Гц. Визначити гальмівний момент, що діє на диск, якщо він зупиниться через 20 с. (Відповідь: 0,078 Н·м).

10 Вертикальний стовп висотою 5 м підпиляли біля основи і він падає на землю. Визначити швидкість його верхнього кінця в момент удару об землю. (Відповідь: 12,2 м/с).

11 Кулька діаметром 6 см котиться по підлозі і зупиняється через 2 с, пройшовши відстань 70 см. Визначити коефіцієнт тертя кочення, вважаючи його постійним. (Відповідь: $1,5 \cdot 10^{-3}$ м).

12* Діаметр підшипника осі залізнодорожного вагона дорівнює 27 см, а діаметр колеса 180 см. Коефіцієнт тертя в підшипнику дорівнює 0,01, а коефіцієнт тертя кочення колеса по рейках дорівнює 0,05 см. Визначити роботу переміщення вагона масою 50 т на шляху 1 км. (Відповідь: $\approx 10^6$ Дж).

13 Блок у вигляді диска масою 0,4 кг обертається під дією сили натягу нитки, до кінців якої підвішені вантажі масою 0,3 кг і 0,7 кг.

Визначити сили натягу нитки по обидва боки блоку. (Відповідь: 4,9 Н; 3,9 Н).

14 Визначити момент сили, який необхідно прикласти до блока, що обертається з частотою 12 Гц, щоб він зупинився через 8 с. Діаметр блока 30 см. Вважати, що маса блока рівна 6 кг і рівномірно розподілена по ободу. (Відповідь: 1,27 Нм).

15 Дошку, маса якої 10 кг, підперли на відстані $\frac{1}{4}$ її довжини. Яку силу, перпендикулярну до дошки, треба прикласти до її короткого кінця, щоб утримати дошку в рівновазі? Дошку вважати однорідною. (Відповідь: 100 Н).

16 До балки завдовжки 5 м, маса якої 200 кг, підвісили на відстані 3 м від одного з її кінців вантаж масою 250 кг. Своїми кінцями балка лежить на опорах. Обчислити силу тиску на кожен з опор. (Відповідь: 2500 Н; 2000 Н).

Тест для контролю вміння розв'язувати задачі:

1. Якою була б вага тіла масою 1 кг на екваторі, якщо б Земля оберталась в 10 разів швидше?

Варіанти відповіді: А – 10 Н; В – 8 Н; С – 6,4 Н; Д – 3,2 Н.

2. Дві маленькі кульки з масами 40 г і 120 г з'єднані жорстким невагомим стержнем довжиною 0,2 м. Визначити момент інерції цієї системи відносно осі, що проходить через центр маси системи.

Варіанти відповіді: А – $1,6 \cdot 10^{-3}$ кг·м²; В – $1,2 \cdot 10^{-3}$ кг·м²; С – $2,6 \cdot 10^{-3}$ кг·м²; Д – $6 \cdot 10^{-3}$ кг·м².

3. Куля скочується з похилої площини висотою 90 см. Визначити швидкість центра кулі в той момент, коли вона скотиться з похилої площини.

Варіанти відповіді: А – 3,55 м/с; В – 8 м/с; С – 2,5 м/с; Д – 3,4 м/с.

4. Нитка з прив'язаними до її кінців вантажами масою 50 г і 60 г перекинута через блок діаметром 5 см. Визначити момент інерції блока, якщо він обертається з кутовим прискоренням 2,5 рад/с².

Варіанти відповіді: А – 0,0032 кг·м²; В – 0,00186 кг·м²; С – 0,05 кг·м²; Д – 0,0003 кг·м².

5. По горизонтальній плоскій поверхні котиться диск із швидкістю 8 м/с. Визначити коефіцієнт опору, якщо диск під дією сили опору зупинився, пройшовши шлях 16 м.

Варіанти відповіді: А – 0,3; В – 0,08; С – 0,5; Д – 0,2.

Розділ 5. ЕНЕРГІЯ, РОБОТА ТА ПОТУЖНІСТЬ

Важливо розуміти, що фізиці сьогодення невідомо, що таке енергія.

Річард Фейнман

Існує факт, а строгіше, закон, який керує всіма явищами природи. Винятків із цього закону ніхто не знає, тобто він абсолютно точний. Це закон збереження енергії. Він стверджує, що існує певна величина, що називається енергією, яка не змінюється під час будь-яких перетворень, що відбуваються в природі. Це, по суті, математичний принцип, який стверджує, що існує деяка числова величина, яка не змінюється ні за яких обставин.

В цьому розділі почнемо знайомитись з однією із найпростіших форм енергії – *механічною енергією*, зокрема з такими її видами, як кінетична і потенціальна. Це необхідно для більш легшого освоєння інших форм енергії – *теплової*, пов'язаної з внутрішнім рухом молекул речовини; *електричної*, зумовленої притяганням і відштовхуванням електричних зарядів; *хімічної*, яка вивільняється в хімічних реакціях; *ядерної*, пов'язаної з розташуванням частинок в ядрі. І нарешті, теорія відносності видозмінює формулу кінетичної енергії, пов'язуючи її з новим поняттям: *енергії-маси* – тобто, будь-який об'єкт володіє енергією уже тому, що існує.

5.1 Механічна робота

Якщо сила, що діє на матеріальну точку, переміщає її на деяку відстань, то вважається, що ця сила здійснила над матеріальною точкою роботу. Робота (A) – скалярна фізична величина, яка є мірою зміни енергії тіла.

Робота залежить від величини та напрямку сили і від переміщення тіла під дією цієї сили (рис. 5.1):

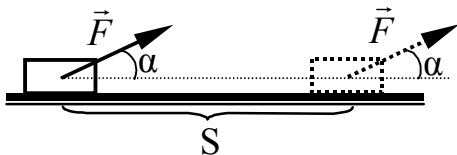


Рисунок 5.1 Дія сили на тіло під час виконання роботи

$$A = F \cdot S \cos \alpha. \quad (5.1)$$

Якщо $\alpha = 0$, то $A = F \cdot S$;

якщо $\alpha = 90$, то $A = 0$.

В системі СІ робота вимірюється в

джоулях, $[A] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} = \text{Дж}$.

Зверніть увагу на те, що робота може бути виконана силами різної природи: силами тертя, силою пружності, силою тяжіння і ін. Графічна залежність сили F від величини переміщення (стала сила) показана на рис. 5.2.а. Робота на цьому графіку зображується площею прямокутника ($A_1 = F_1 \cdot S_1$) для прямолінійного руху тіла (рис. 5.2.а) і

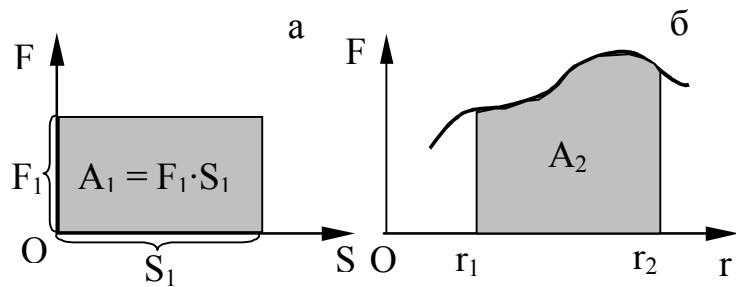


Рисунок 5.2 Графічне визначення роботи для прямолінійного (а) і криволінійного (б) руху

площею криволінійної трапеції (A_2) для руху по криволінійній траєкторії (рис. 5.2.б) для змінної сили.

Потрібно пам'ятати, що не вся виконана робота є корисною (A_K). Частина затраченої роботи йде на

перемагання різного виду сил опору (тертя, опір повітря і ін.). Для того, щоб оцінити, яка частина виконаної роботи (A_3) йде на користь, вводять коефіцієнт корисної дії (ККД):

$$\eta = \frac{A_K}{A_3} \cdot 100\%. \quad (5.2)$$

Зверніть увагу на те, що коли тіло бере участь в кількох різних процесах, пов'язаних з передачею або перетворенням енергії, то загальний коефіцієнт корисної дії дорівнює добутку ККД кожного із цих процесів:

$$\eta = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \dots \quad (5.3)$$

5.2 Потужність

Для оцінки здатності різних систем, пристроїв, машин виконувати певну роботу чи передавати енергію за певні проміжки часу використовують *потужність* – скалярну фізичну величину, значення якої визначається відношенням роботи (енергії) до проміжку часу, протягом якого вона виконана (спожита чи передана)

$$P = \frac{A}{t}. \quad (5.4)$$

Цю потужність ще називають середньою. **Миттєва потужність** або просто **потужність** – це границя, до якого прямує середня потужність, за умови, що проміжок часу прямує до нуля:

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} \equiv \frac{dA}{dt} \equiv \dot{A}. \quad (5.5)$$

Для потужності справедлива формула

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = F \cdot v \cdot \cos \alpha, \quad (5.6)$$

де $v = dr/dt$ – миттєва швидкість тіла (матеріальної точки), на яку діє миттєва (постійна на переміщенні dr) сила F , α - кут між векторами F і v .

В системі СІ потужність вимірюється у ватах (Вт)

$$[P] = \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{с}} = \text{Вт}.$$

Зверніть увагу на те, що за сталої потужності зміна швидкості призводить до зміни сили (зменшення швидкості призводить до збільшення тягової сили і навпаки).

5.3 Кінетична енергія

Механічна енергія – здатність тіла виконати роботу.

Кінетична енергія матеріальної точки (тіла, системи) – фізична величина, яка є мірою її механічного руху і визначається роботою результуючої сили F , яка переміщує її в просторі: $W_k = A = F \cdot S$. Якщо тіло масою m із стану спокою набирає швидкості v , то механічна енергія тіла збільшується на величину

$$\Delta W_k = F \cdot S = m \cdot a \cdot S = m \cdot a \cdot \frac{v^2}{2 \cdot a} = \frac{m \cdot v^2}{2}. \quad (5.7)$$

Слід зауважити, що вимога рівнозмісності руху не є обов'язковою. Величину виконаної над тілом роботи під час його переміщення з точки 1 в точку 2 можна визначити як різницю значень кінетичних енергій тіла в цих точках:

$$A = F \cdot S_{12} = \frac{m \cdot v_2^2}{2} - \frac{m \cdot v_1^2}{2}. \quad (5.8)$$

Це співвідношення ще називають **теоремою про зв'язок кінетичної енергії і роботи**: робота всіх зовнішніх сил, що діють на матеріальну точку (тіло), рівна приросту кінетичної енергії цієї точки.

Енергія, як і робота, в системі СІ вимірюється в джоулях.

5.4 Види механічних сил

В механіці всі сили прийнято ділити на два види: *консервативні і неконсервативні*.

Консервативними (або **потенціальними**) називаються сили, робота яких не залежить від шляху переходу системи із одного стану в інший. Сила тяжіння і всі центральні сили є консервативними. **Центральними** називаються сили, завше спрямовані до однієї точки в просторі, яка називається *силовим центром*. Робота центральних сил визначається виразом (5.9):

$$A = \int_{r_1}^{r_2} F(r) dr. \quad (5.9)$$

Ця робота залежить тільки від вигляду функції $F(r)$, початкового r_1 і кінцевого r_2 положень точки, але *не залежить від форми траєкторії*. У відповідності з (5.9) робота консервативних сил у випадку будь-якої замкнутої траєкторії дорівнює нулю, тобто $A_{12} + A_{21} = 0$.

Всі інші сили називаються *неконсервативними*. Зокрема неконсервативними є дисипативні і гіроскопічні сили. **Дисипативними** називаються такі сили, повна робота яких для будь-яких рухів в замкнутій системі завше від'ємна: $A < 0$. Дисипативними є сили тертя і сили опору. Ці сили залежать від координат початкового і кінцевого положень тіл і від їх відносних швидкостей.

Гіроскопічними називаються сили, які залежать від швидкості тіла і діють завше *перпендикулярно до цих швидкостей*. Робота цих сил дорівнює нулю для будь-якого переміщення тіла (див. 5.1 і формулу (5.1)). Прикладами таких сил є сила Лоренца (див. рух заряджених частинок в магнітних полях – електромагнетизм) і сила Коріоліса (3.13).

5.5 Потенціальна енергія в полі тяжіння. Потенціал

Щоб збільшити відстань між тілом і Землею або розтягнути чи стиснути пружину, потрібно виконати деяку роботу. Ця робота витрачається на придбання тілом енергії.

Енергія, яку мають тіла або частини одного і того ж тіла внаслідок їх взаємного розміщення, називають *потенціальною енергією*.

Потенціальна енергія – це частина загальної механічної енергії системи. Величина цієї енергії залежить від взаємного розміщення матеріальних точок як складових цієї системи і від положення у зовнішньому силовому полі (гравітаційному, електромагнітному і

ін.). Якщо над тілом виконується робота силами поля, в якому воно знаходиться, то його потенціальна енергія зменшується на величину виконаної роботи:

$$W_1 - W_2 = A. \quad (5.10)$$

Потенціальна енергія має місце лише для консервативних систем, тобто систем, у яких робота діючих на тіло сил залежить лише від початкового і кінцевого положень системи.

Елементарна робота в полі тяжіння для переміщення тіла масою m на відстань dr буде рівна $dA = -Fdr$, а для переміщення з відстані r_1 до r_2 величина затраченої роботи буде рівна, враховуючи (3.2):

$$A = -\int_{r_1}^{r_2} Fdr = -\int_{r_1}^{r_2} G \frac{Mm}{r^2} dr = GMm \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = W_1 - W_2. \quad (5.11)$$

Із формули (5.11) видно, що значення виконаної в полі тяжіння роботи не залежить від форми траєкторії, а визначається тільки початковим і кінцевим положенням тіла, тобто сили тяжіння є дійсно консервативні, а поле тяжіння є потенціальним.

Для тіла в гравітаційному полі Землі - полі центральних сил, вважаючи за початок відліку потенціальну енергію нескінченно віддаленого тіла, значення потенціальної енергії тіла масою m визначатиметься формулою:

$$W_n = -G \frac{Mm}{R + h}, \quad (5.12)$$

де G - гравітаційна стала; R - радіус Землі; h - висота тіла над поверхнею Землі; M - маса Землі. Біля поверхні Землі поле сил тяжіння можна вважати однорідним. Тоді потенціальна енергія тіла масою m , в припущенні, що початок відліку енергії вибрано так, що на поверхні Землі ($h_0 = 0$) вона рівна нулю, визначається співвідношенням:

$$W_n = mgh.$$

Величина $\varphi = W/m = -GM/r$ є енергетичною характеристикою поля тяжіння і називається **потенціалом поля тяжіння**. Її значення рівне роботі переміщення одиничної маси із безмежності в дану точку гравітаційного поля. Потенціал пов'язаний із напруженістю поля співвідношенням $g = -d\varphi/d$. “-” вказує на протилежний напрям вектора напруженості до градієнта φ .

Зверніть увагу на те, що робота, виконана силою тяжіння, $A = mg(h_1 - h_2)$, $h_2 < h_1$, а робота, виконана проти сили тяжіння,

$A = mg(h_1 - h_2)$, $h_1 < h_2$, тобто в першому випадку потенціальна енергія зменшується, а в другому збільшується.

А потенціальна енергія пружно-деформованого тіла (стиснутої або розтягнутої пружини), вважаючи, що вона дорівнює нулю в недеформованому тілі, тобто для $x = 0$, визначатиметься співвідношенням:

$$W_n = \frac{kx^2}{2}, \quad (5.13)$$

де k - коефіцієнт пружності, x - величина деформації.

Потенціальна енергія, як і робота і кінетична енергія, вимірюється в джоулях.

5.6 Закон збереження механічної енергії

В замкнутій системі, на тіла якої діють тільки консервативні сили, сума механічних видів енергій залишається сталою:

$$W_n + W_k = W_{\text{пов}} = \text{const.} \quad (5.14)$$

Довести цей закон можна на прикладі вільного падіння тіла.

Нехай тіло масою m знаходиться над поверхнею Землі на висоті h , тоді його $W_n = mgh$ (рис. 5.3). Під час вільного падіння через час t

потенціальна енергія тіла в точці В стане рівною $W'_n = mgh_2$, бо частина її

перетвориться в кінетичну $W'_k = \frac{mv_1^2}{2}$.

Повна енергія в точці В

$$W = W'_n + W'_k = mgh_2 + \frac{mv_1^2}{2},$$

але $v_1 = gt$

$$h_1 = \frac{gt^2}{2} = \frac{gv_1^2}{2g^2} = \frac{v_1^2}{2g},$$

звідки $v_1^2 = 2gh_1$.

Тоді

$$W = mgh_2 + \frac{m2gh_1}{2} = mg(h_1 + h_2) = mgh,$$

бо $h = h_1 + h_2$, тобто повна енергія не змінилась. В точці С

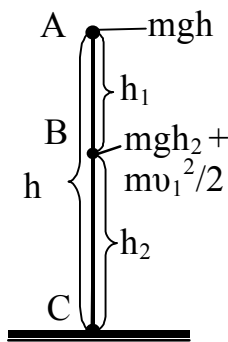


Рисунок 5.3 Взаємозв'язок кінетичної і потенціальної енергій в полі тяжіння

$$mgh = \frac{mv_2^2}{2}, \text{ але } v_2^2 = 2gh, \text{ тоді } mgh = \frac{m2gh}{2} = mgh.$$

Це означає, що і в точці С повна енергія дорівнює mgh . Таким чином, під час вільного падіння тіла його повна механічна енергія залишається незмінною.

Існує ще один вид систем – *дисипативні системи*, в яких механічна енергія під час дії сил тертя та опору поступово зменшується за рахунок перетворення в інші форми енергії (в першу чергу – в теплову). Цей процес отримав назву *дисипації енергії*. Але під час такого “зникнення” механічної енергії виникає еквівалентна кількість енергії іншого виду.

Енергія ніколи не зникає і не появляється знову, вона лише перетворюється із одних видів в інші – ось в чому фізична суть закону збереження і перетворення енергії.

Закон збереження енергії пов’язаний із фундаментальною властивістю часу – однорідністю. *Однорідність часу* означає, що механічні властивості замкнутої системи не залежать від вибору початку відліку часу.

Зверніть увагу на те, що для пружної взаємодії (*абсолютно пружний удар* – під час якого після деформації тіло повністю відновлює свою форму) виконується закон збереження імпульсу і закон збереження механічної енергії, а для непружної (*абсолютно непружний удар* – під час якого деформація тіла залишається, а попередня форма не відновлюється) виконується закон збереження імпульсу і не виконується закон збереження механічної енергії в механічних процесах (частина механічної енергії перетворюється у внутрішню).

Для пружного удару:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 &= m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' \\ \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} &= \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

а для непружного удару:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 &= (m_1 + m_2) \vec{v} \\ \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2} &= W \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

де W - внутрішня енергія.

5.7 Запитання для самоперевірки

Шановний читачу, перед тим, як приступити до розв'язування задач, постарайтесь дати відповіді на запитання:

1. Що таке механічна робота і від чого залежить її величина?
2. Що розуміють під другою космічною швидкістю і з якої умови визначається її значення?
3. В яких одиницях вимірюється робота, а в яких енергія?
4. Що таке потужність і в яких одиницях вона вимірюється?
5. Які є види енергії і механічної енергії, зокрема?
6. Сформулюйте закони збереження в механіці.
7. Сформулюйте теорему про зв'язок кінетичної енергії і роботи.
8. Які сили називаються центральними?
9. Що відбувається з механічною енергією під час дії на тіло дисипативних сил?
10. Що впливає на значення потенціальної енергії тіла?
11. Які системи називаються дисипативними?

Тест для контролю теоретичного матеріалу:

1. Чи залежить робота від кута між векторами сили і переміщення?

Варіанти відповіді: А – робота пропорційна синусу кута між векторами сили і переміщення; В – не залежить, робота визначається добутком сили на прискорення тіла; С – робота пропорційна косинусу кута між векторами сили і переміщення; Д – серед вищенаведених відповідей немає правильної.

2. Робота яких сил не залежить від форми шляху переходу системи із одного стану в інший?

Варіанти відповіді: А – всіх діючих на систему сил; В – дисипативних; С – консервативних або потенціальних; Д – гіроскопічних.

3. Робота сил тяжіння приводить до ...:

Варіанти відповіді: А – збільшення потенціальної енергії тіла; В – зменшення потенціальної енергії тіла; С – того, що потенціальна енергія тіла не змінюються; Д – серед вищенаведених відповідей немає правильної.

4. Під час руху системи по замкнутій траєкторії робота сили тяжіння....:

Варіанти відповіді: А – спричиняє зростання механічної енергії системи; В – спричиняє зменшення механічної енергії системи; С – дорівнює нулю; Д – дорівнює її кінетичній енергії.

5. За якої умови тіло може вийти із сфери впливу поля тяжіння Землі?

Варіанти відповіді: А – коли воно набуде першої космічної швидкості; В – коли воно набуде другої космічної швидкості; С – коли кінетична енергія тіла буде в 2 рази більша від потенціальної енергії тіла біля поверхні Землі; Д – тільки коли йому надати швидкості, більшої від третьої космічної швидкості.

5.8 Приклади розв'язування задач

Задача першого рівня складності

1 Яку роботу треба виконати, щоб стиснути пружину жорсткістю $3 \cdot 10^3$ Н/м на 5см?

Дано: $k=3 \cdot 10^3 \text{ Н/м}$ $x = 0,05 \text{ м}$ $A - ?$	Розв'язування Згідно закону збереження і перетворення енергії робота, виконана під час деформації пружини, піде на збільшення її потенціальної
--	---

енергії, яка визначається співвідношенням $W_n = kx^2/2$.

Тобто $A = W_n = kx^2/2$.

Перевіримо одиниці вимірювання: $[A] = \frac{\text{Н}}{\text{м}} \text{ м}^2 = \text{Нм} = \text{Дж}$.

Підставивши значення даних величин, отримуємо:

$$A = \frac{3 \cdot 10^3 \text{ Н/м} \cdot 0,05^2 \text{ м}^2}{2} = 3,75 \text{ Дж}.$$

Відповідь: Робота рівна 3,75 Дж.

Задача другого рівня складності

1. Визначити, з якої висоти впало тіло на землю, якщо в момент падіння воно мало імпульс 100 кгм/с і кінетичну енергію 500 Дж.

Дано:
 $p = 100 \text{ кгм/с}$
 $W_k = 500 \text{ Дж}$
 $h - ?$

Розв'язування
 Згідно закону збереження і перетворення механічної енергії, потенціальна енергія тіла на висоті h дорівнює його кінетичній енергії в момент падіння (силами опору повітря нехтуємо). Тобто $mgh = mv^2/2$, звідки $h = v^2/2g$.

Оскільки $p = mv$, а $W_k = mv^2/2 = p v/2$. Звідси $v = 2 W_k/p$. Тоді для висоти отримуємо кінцеву формулу: $h = \frac{2W_k^2}{gp^2}$.

Перевіримо одиниці вимірювання:

$$[h] = \frac{\text{Дж}^2 \text{с}^2 \text{с}^2}{\text{м} \cdot \text{кг}^2 \text{м}^2} = \frac{\text{кг}^2 \text{м}^4}{\text{с}^4} \frac{\text{с}^4}{\text{кг}^2 \text{м}^3} = \text{м}.$$

Підставивши значення даних величин, отримаємо:

$$h = \frac{2 \cdot 500^2}{10 \cdot 100^2} \text{ м} = 5 \text{ м}.$$

Відповідь: Тіло впало з висоти 5 м.

Задача третього рівня складності

1. На горизонтальному столі лежить куб масою M , шарнірно закріплений відносно прямої АВ (рис. 5.4). У куб потрапляє і застрягає в ньому куля масою m , що летіла горизонтально. Визначити мінімальну швидкість v кулі, за якої куб перекинеться. Сторона куба a . Траєкторія руху кулі проходить через центр куба. Маса кулі значно менша від маси куба ($m \ll M$). Втратами енергії в шарнірі АВ знехтувати.

Дано:
 M
 m
 a
 $v - ?$

Розв'язування
 Щоб куб перекинувся, він повинен повернутися навколо АВ так, щоб його діагональна площина стала. Отже, піднімаючи центр маси куба О на $h = \frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}a = \frac{a}{2}(\sqrt{2} - 1)$,

потрібно виконати роботу $A = Mgh = Mg \frac{a}{2}(\sqrt{2} - 1)$ $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}a \right)$

половина відрізка АД, $\frac{1}{2}a$ - половина сторони куба, на цій висоті

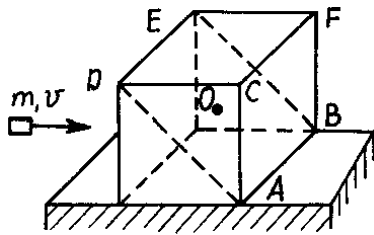


Рисунок 5.4

знаходиться центр маси куба в початковий момент). Куля до моменту удару має кінетичну енергію $W_K = \frac{mv^2}{2}$.

Ця енергія кулі повинна дорівнювати роботі, виконаній під час підніманні центра маси на висоту h , тобто

$$\frac{mv^2}{2} = Mg \frac{a}{2} (\sqrt{2} - 1),$$

звідки швидкість, яку повинна мати куля,

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{M}{m} ag (\sqrt{2} - 1)}$$

Перевірка одиниць вимірювання: $[v] = \sqrt{\frac{\text{кг}}{\text{кг}} \cdot \text{м} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2}} = \frac{\text{м}}{\text{с}}.$

5.9 Задачі для самостійних вправ

Рівень-1

1. Яку роботу виконує людина, рівномірно піднімаючи тіло масою 2 кг на висоту 1 м? (Відповідь: 20 Дж).
2. Камінь кинули вертикально вгору з швидкістю 10 м/с. На яку висоту піднімається камінь? Опором повітря знехтувати. (Відповідь: 5м).
3. Щоб стиснути пружину на 3 см, приклали силу 21 Н. Визначити потенціальну енергію стиснутої пружини. (Відповідь: 0,315 Дж).
4. Яку середню потужність розвиває тракторний двигун, якщо за 0,5 год він виконує роботу $36 \cdot 10^3$ кДж? (Відповідь: $2 \cdot 10^4$ Вт).
5. Яка повинна бути висота стовпа води, щоб його потенціальна енергія була рівна потенціальній енергії стовпчика ртуті висотою 10 см в такій же трубці ($\rho_v = 10^3$ кг/м³; $\rho_p = 13,6 \cdot 10^3$ кг/м³)? (Відповідь: 0,37 м).

Рівень-2

1. З гармати масою $5 \cdot 10^3$ кг вилітає куля масою 0,5 кг в горизонтальному напрямі. Кінетична енергія кулі в момент вилітання

дорівнює $7,5 \cdot 10^6$ Дж. Яку швидкість має гармата в результаті віддачі? (Відповідь: $\approx 0,55$ м/с).

2. Електропотяг в момент вимкнення струму рухався з швидкістю 10 м/с. Яку відстань він пройде по горизонталі до зупинки? Коефіцієнт опору 0,005. (Відповідь: 1000 м).

3. Тіло, маса якого 100 кг, сковзає з похилої площини завдовжки 1,4 м. Визначити роботу сили тяжіння, якщо кут нахилу площини до горизонту 30° . Тертя не враховувати. (Відповідь: 700 Дж).

4. Автомобіль, вага якого 15 кН, рухається з швидкістю 36 км/год. Коефіцієнт опору дорівнює 0,02. Яку потужність при цьому розвиває двигун автомобіля? Рух автомобіля вважати рівномірним. (Відповідь: 3000 Вт).

5. З якою швидкістю рухався залізничний вагон, якщо після наїзду на гальмовий пристрій вагон пройшов відстань 1 м і зупинився? Коефіцієнт тертя під час гальмування 0,2. (Відповідь: ≈ 2 м/с).

6. Баба копра масою 200 кг вільно падає з висоти 4,9 м. Визначити кінетичну і потенціальну енергію баби копра на початку та в кінці падіння і в середній точці шляху. (Відповідь: 0 і 9,8; 9,8 і 0; 4,9 і 4,9 кДж).

7. Імпульс тіла дорівнює 8 кг·м/с, а кінетична енергія 16 Дж. Визначити масу і швидкість тіла. (Відповідь: 2 кг, 4 м/с).

8. Яку роботу треба виконати, щоб однорідний стержень завдовжки 2 м і масою 100 кг, що лежить на землі, поставити вертикально? (Відповідь: 1 кДж).

9. Щоб розтягнути пружину на 4 мм, треба виконати роботу, яка дорівнює 0,02 Дж. Яку роботу треба виконати, щоб розтягнути цю саму пружину на 4 см? (Відповідь: 2 Дж).

Рівень-3

1. У воді з глибини 5 м піднімають до поверхні камінь, об'єм якого становить $0,6 \text{ м}^3$. Густина каменю дорівнює 2500 кг/м^3 . Визначити роботу, затрачену для піднімання каменю. (Відповідь: 45 кДж).

2. Які значення потенціальної та кінетичної енергій стріли масою 50 г, випущеної з лука з швидкістю 30 м/с вертикально вгору, через 2 с після початку руху? (Відповідь: 20 Дж; 2,5 Дж).

3. Хокейна шайба масою 160 г, яка летить із швидкістю 20 м/с, влетіла у ворота і вдарилася об сітку, що прогнулася при цьому на 6,4 см. Яка максимальна сила, з якою шайба подіяла на сітку? Вважати, що сила пружності сітки змінюється залежно від її прогинання за законом Гука. (Відповідь: 1 кН).

4. Визначити співвідношення між кінетичною енергією шроту, що вилітає під час пострілу разом з пороховими газами, і кінетичною енергією рушниці, якщо маса рушниці у 100 разів більша від маси набою. (Відповідь: шроту в 100 разів більша).

5. З похилої площини завдовжки l і кутом нахилу α зсувається тіло. Яку швидкість має тіло біля основи площини, якщо коефіцієнт тертя дорівнює μ ? (Відповідь: $v = \sqrt{2gl(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}$).

6. Яку роботу треба виконати, щоб по похилій площині з кутом нахилу 30° витягти вантаж масою 400 кг на висоту 2 м, якщо коефіцієнт тертя дорівнює 0,3? Який коефіцієнт корисної дії похилої площини? (Відповідь: 12 кДж; 66%).

7. Визначити середню корисну потужність, що її розвиває літак під час розбігу, виконуючи сільськогосподарські роботи, якщо маса літака становить 1 т, довжина розбігу 300 м, злітна швидкість 30 м/с, а коефіцієнт опору 0,03. (Відповідь: 27 кВт).

Тест для контролю вміння розв'язувати задачі:

1. Яку потужність має двигун автомобіля, якщо за 0,5 год він проїхав 18 км, переборюючи силу опору 500 кН

Варіанти відповіді: А – 20 кВт; В – $8 \cdot 10^3$ Вт; С – $50 \cdot 10^3$ Вт; Д – $3 \cdot 10^3$ Вт.

2. Вантаж, маса якого 50 кг, зі стану спокою піднімають вертикально з прискоренням $1,25 \text{ м/с}^2$. Визначити роботу на шляху 10 м.

Варіанти відповіді: А – 1,3 кДж; В – 5625 Дж; С – 6525 Дж; Д – 2525 Дж.

3. Швидкість тіла масою 4 кг у вільному падінні на якомусь шляху збільшилась з 2 до 8 м/с. Визначити роботу сили тяжіння на цьому шляху.

Варіанти відповіді: А – 120 Дж; В – 210 Дж; С – 320 Дж; Д – 150 Дж.

4. Якої кінетичної енергії набуває ракета масою 0,6 кг після вилітання з неї продуктів згоряння масою 30 г з швидкістю 800 м/с?

Варіанти відповіді: А – 320 Дж; В – 840 Дж; С – 420 Дж; Д – 480 Дж.

5. Двигун насоса, розвиваючи потужність 25 кВт, піднімає 100 м^3 нафти на висоту 6 м за 8 хв. Визначити коефіцієнт корисної дії установки.

Варіанти відповіді: А – 30%; В – 80%; С – 40%; Д – 20%.

Розділ 6. ЕЛЕМЕНТИ МЕХАНІКИ СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ

Один із основних напрямів розвитку сучасної фізики – вивчення властивостей тіл і речовин. І починається таке вивчення із найпростіших механічних властивостей тіл. На основі тривалих спостережень за властивістю тіл зберігати свою форму та об'єм в земних умовах всі тіла було поділено на три групи: тверді, рідкі і газоподібні.

6.1 Механічні властивості твердих тіл, рідин та газів

Твердими тілами називаються такі тіла, які в земних умовах і у вільному стані здатні зберігати незмінними свою форму і об'єм.

Рідкими тілами або рідинами називаються такі тіла, які в земних умовах здатні зберігати об'єм, але не здатні зберігати свою форму. Під дією сили тяжіння рідина приймає форму посудини, в якій перебуває, тобто вона володіє *текучістю*. Однак у вільному стані (в космосі, наприклад,) рідина має одну-єдину форму – форму кулі.

Газоподібними тілами або газами називаються такі тіла (системи), які в земних умовах не здатні зберігати зберігати ні форму, ні об'єм.

Будь-які зміни форми, розмірів та об'єму тіла називаються деформаціями.

Тверді тіла виявляють властивість пружно деформуватись і мають різні межі пружності і різні межі міцності. Завдяки цьому їх можна поділити на жорсткі і м'які, крихкі і пластичні, тощо (див. підрозділ 3.8).

Рідини виявляють здатність бути пружними під час спроби змінити їх об'єм і практично не стискаються.

Гази також проявляють пружні властивості під час їхнього стискання, але ці властивості є більш складними.

Всі тіла можуть діяти одне на одне силами пружності, тертя і всесвітнього тяжіння. Пояснення механічних властивостей тіл, відкриття зв'язків між цими властивостями і внутрішньою будовою тіл є однією із головних задач всіх наступних розділів фізики.

В молекулярно-кінетичній теорії буде показано, що майже всі властивості тіл можна пояснити особливістю руху і взаємодії атомів, іонів та молекул, з яких складаються всі тіла. В подальшому буде

показано, що сили пружності і сили тертя всіх видів мають електромагнітну природу – вони виникають внаслідок різних електричних взаємодій між електронними оболонками і ядрами атомів.

Хоч деякі властивості рідин і газів суттєво відрізняються, проте в цілому ряді механічних явищ їхня поведінка описується однаковими параметрами і ідентичними рівняннями. Тому розділ механіки, який вивчає умови рівноваги і руху рідин і газів, їх взаємодії як між собою, так і з твердими тілами, які вони обтікають, – **гідроаеромеханіка**, – використовує *єдиний підхід* до їх вивчення.

В рідинах, на відміну від газів, середня відстань між молекулами залишається практично незмінною, тому рідина має практично незмінний об'єм (а, значить, і густину), тоді як густина газів залежить від концентрації молекул, тобто від тиску. Але молекули і рідин і газів практично рівномірно розподіляються в усій зайнятій ними частині простору, тому, враховуючи малість міжмолекулярних відстаней в порівнянні з масштабом їхнього руху чи протяжності об'єктів, їх розглядають як **суцільні середовища**.

6.2 Рівняння нерозривності (неперервності) та рівняння Бернуллі для стаціонарної течії ідеальної рідини

В гідроаеродинаміці в багатьох випадках можна знехтувати стисливістю рідин і газів. Тому використовують згаданий вище єдиний підхід до вивчення їх поведінки, користуючись єдиним поняттям нестисливої рідини – суцільного середовища з однаковою в усіх точках густиною, яка не змінюється з часом.

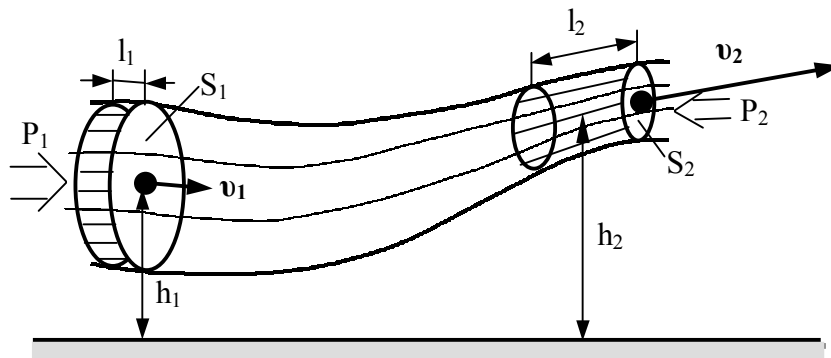


Рисунок 6.1 Труба струму для ламінарного потоку рідини

Це своєрідна модель ідеальної рідини, в якій не враховується наявне в рідині внутрішнє тертя.

Рух такої рідини називають течією, плином, струмінням, а сукупність частинок рідини, що тече, – *поток*ом. Графічно плин рідини зображається за допомогою *ліній струму*, – дотична до яких співпадає із напрямком швидкості в даній точці, а їх густина пропорційна величині швидкості. Частину рідини, обмежену лініями струму, називають *трубою струму* (рис. 6.1). Якщо форма і розташування ліній струму залишаються незмінними, постійними з часом, то рух рідини називається усталеним, стаціонарним. Під час усталеного плину рідини швидкість в будь-якій її точці залишається незмінною.

Коли нестислива рідина усталено тече, то для вибраної трубки струму через будь-який її поперечний переріз за однаковий проміжок часу перетікає однаковий об'єм, тобто $V = \text{const}$, або $V_1 = V_2$. Оскільки $V = S \cdot v \cdot t$, то із рівності $S_1 \cdot v_1 \cdot t_1 = S_2 \cdot v_2 \cdot t_2$ отримуємо:

$$S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2 . \quad (6.1)$$

Це співвідношення називається ***рівнянням нерозривності*** для даної трубки струму нестисливої рідини.

Для того, щоб ідеальна рідина рухалась, треба щоб зовнішні сили $F_1 = p_1 S_1$ і $F_2 = - p_2 S_2$ (сила направлена протилежно до швидкості) виконали роботу A по переміщенню деякої маси m рідини. Згідно закону збереження і перетворення енергії, ця робота повинна бути рівною зміні повної механічної енергії $E_2 - E_1$ рідини масою m в місцях трубки струму з перерізом S_1 і S_2 , відповідно. Ці значення повної енергії складаються із кінетичної і потенціальної енергій рідини:

$$E_1 = \frac{mv_1^2}{2} + mgh_1; E_2 = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2;$$

Тобто $\frac{mv_2^2}{2} + mgh_2 - \frac{mv_1^2}{2} - mgh_1 = F_1 l_1 + F_2 l_2$, звідки, поділивши рівняння на $V = S_1 \cdot v_1 \cdot t_1 = S_2 \cdot v_2 \cdot t_2$, отримуємо :

$$\frac{\rho v_2^2}{2} + mgh_2 + p_2 = \frac{\rho v_1^2}{2} + mgh_1 + p_1 = \text{const}. \quad (6.2)$$

Це рівняння вперше вивів Д.Бернуллі (1700-1782), тому воно називається ***рівнянням Бернуллі***. Воно справедливе також і для

деяких реальних рідин, в яких внутрішнє тертя не дуже велике (мала в'язкість). Величина p – статичний тиск; $\rho v^2/2$ – динамічний тиск; ρgh – гідростатичний тиск.

Для горизонтальної трубки струму рівняння Бернуллі має вигляд: $\frac{\rho v^2}{2} + p = \text{const}$ - повний тиск. Тобто у вузьких місцях горизонтальної трубки динамічний тиск більший, а статичний - менший, а в широких – навпаки.

Застосувавши рівняння Бернуллі до посудини з великим поперечним перерізом та малим отвором внизу (рис. 6.2), отримаємо формулу, яка визначає швидкість витікання рідини: $\rho gh = \rho v^2/2$, звідки

$$v = \sqrt{2gh} . \quad (6.3)$$

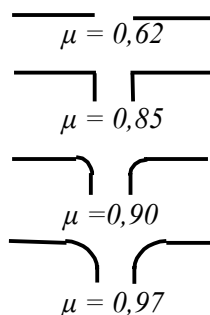
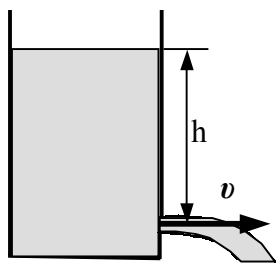


Рисунок 6.2 Витікання рідини з вузького отвору

Рисунок 6.3 Залежність коефіцієнта витікання від форми отвору

Цей вираз називається **формулою Е.Торічеллі** (1608 – 1647). Вона тільки наближено визначає швидкість витікання рідини. В реальних рідинах значення швидкості буде дещо менше, особливо якщо їх в'язкість значна, а отвір має необтічну форму. Коефіцієнт, який характеризує форму отвору, називається **коефіцієнтом витікання μ** (рис. 6.3). Тоді величину швидкості витікання рідини з даного отвору визначають за допомогою **модернізованої формули Торічеллі**:

$$v = \mu \sqrt{2gh} . \quad (6.4)$$

6.3 Вимірювання тиску в потоці

Статичний тиск $p_{ст}$ зумовлений потенціальною енергією рідини, що перебуває під тиском. Він вимірюється манометром,

встановленим перпендикулярно до напрямку потоку. В простіших випадках можна використовувати відкритий рідинний манометр (рис. 6.4,а).

Динамічний тиск $p_{дин}$ (напір) зумовлений кінетичною енергією рідини, що тече. Він дорівнює різниці повного і статичного тисків і тому вимірюється комбінацією відповідних приладів, яка називається напірною **трубкою Прандтля** (рис. 6.4,б). Особливо часто цей прилад застосовують для вимірювання швидкості газового потоку.

Повний тиск p_n в будь-якому потоці складається із статичного і динамічного тисків. Він вимірюється манометром, який встановлюють паралельно напрямку потоку, - так звана **трубка Піто** (рис. 6.4,в). Якщо ж збоку, паралельно до ліній струму, зробити додатковий отвір в зовнішній трубці, яка обіймає

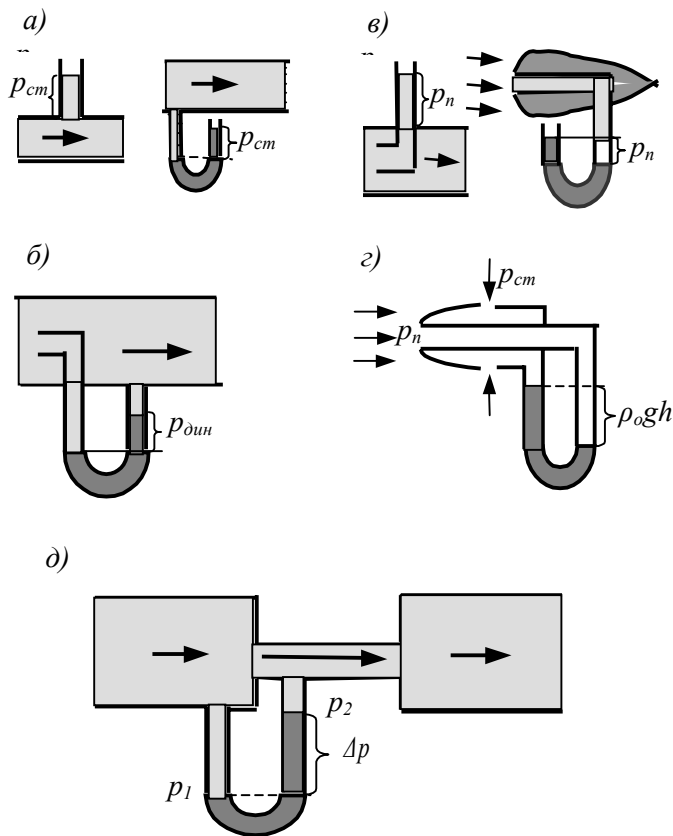


Рисунок 6.4 Пристрої для вимірювання різних тисків в потоці рідини

внутрішню трубку із торцьовим отвором, то перша вимірюватиме статичний тиск, а друга – повний. Такий манометр називається

трубкою Піто-Прандтля і вимірюватиме різницю тисків: $p_n - p_{ст} = \rho_o gh$, де ρ_o – густина рідини в манометрі (рис. 6.4,г).

Різниця двох статичних тисків в різних перерізах потоку Δp вимірюють за допомогою **трубки Вентурі** (рис. 6.4, д). Цей прилад дозволяє визначити швидкість течії рідини. Оскільки $\Delta p = p_1 - p_2 = \rho v_2^2/2 - \rho v_1^2/2$, а згідно рівняння нерозривності $v_2 = v_1 S_1/S_2$, то після підставлення отримаємо:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho \left[\left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 - 1 \right]}}. \quad (6.5)$$

Зменшення статичного тиску в точках, де швидкість потоку більша, покладене в основу роботи водоструминних насосів,- адже в місці звуження вода тече з такою великою швидкістю, що тиск в цьому місці стає менший від атмосферного. Тоді повітря захоплюється водою, змішується з нею, і, таким чином, в деякій посудині можна створити розрідження до тиску 100 мм рт.ст..

Рідина, що протікає через звужену частину трубки, перебуває в стані всебічного розтягу, що дозволяє використовувати це явище в пульверизаторах, карбюраторах та інших приладах для розпилення рідини та створення газорідинних сумішей.

6.4 Ламінарна та турбулентна течії. Сили в'язкого тертя

Спостереження, а також експериментальні дослідження показують, що під час руху рідин та газів відносно інших тіл (або тіл в рідинах чи газах) приповерхневі шари газу або ж рідини нібито прилипають до поверхонь тіл, з якими вони перебувають в контакті, і рухаються разом з ними. Тому відбувається ковзання сусідніх шарів рідини або газу, які рухаються з різними швидкостями, що має своїм наслідком виникнення сил опору, спрямованих вздовж цих шарів.

Властивість реальних рідин та газів чинити опір переміщенню однієї їх частини відносно іншої називається **в'язкістю** або ж **внутрішнім тертям**. Характерною особливістю цих сил тертя є їх складна залежність від швидкості відносного руху шарів та характеру течії.

Плин рідини чи газу за наявності внутрішнього тертя, під час якого сусідні шари ковзають, але не перемішуються з утворенням вихорів, називається **ламінарним**. Внутрішнє тертя виникає в рідині внаслідок взаємодії її молекул.

Якщо ж вздовж потоку відбувається інтенсивне утворення вихорів, в результаті чого сусідні шари перемішуються, то такий режим течії називається **турбулентним**. Для нього характерним є швидка і нерегулярна зміна з часом швидкості та тиску для текучої рідини, а для газів – нерегулярним чином змінюються ще й густина й температура. Тобто турбулентний плин рідин та газів є нестационарним, тоді як ламінарний - стаціонарний.

Експериментальні дослідження показали, що сили внутрішнього тертя або сили в'язкості прямо пропорційні площі S сусідніх шарів, а також градієнтові їх швидкості (зміні швидкості в певному напрямі) $\Delta v / \Delta a$, де a – відстань між шарами:

$$F_{\text{тр}} = \eta \frac{\Delta v}{\Delta a} S. \quad (6.6)$$

Коефіцієнт η називається **коефіцієнтом внутрішнього тертя** або **динамічною в'язкістю**. Одиниці СІ динамічної в'язкості: $[\eta] = \text{Па} \cdot \text{с}$ (Паскаль-секунда) = $\text{кг}/(\text{м} \cdot \text{с})$.

Зверніть увагу:

- якщо градієнт швидкості непостійний, то його необхідно замінити похідною dv/da ;

- динамічна в'язкість η рідин різко зменшується з підвищенням температури: $\eta \approx A e^{b/T}$, де A і b - емпіричні постійні;

- динамічна в'язкість η газів, навпаки, – збільшується з підвищенням температури;

- крім динамічної в'язкості використовуються поняття текучості і кінематичної в'язкості. **Текучістю φ** називається величина, обернена динамічній в'язкості: $\varphi = 1/\eta$. **Кінематичною в'язкістю ν** називається відношення динамічної в'язкості до густини середовища:

$$\nu = \eta / \rho. \quad (6.7)$$

6.5 Течія рідин та газів по трубах

Якщо рідина ламінарно тече по трубі, то окремі її шари рухаються з різними швидкостями. Біля стінок прямолінійної труби швидкість течії труби рівна нулю, а в центрі труби (на осі) вона максимальна. З відстанню r від осі труби ця швидкість змінюється за параболічним законом

$$v(r) = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right), \quad (6.8)$$

де R - радіус труби, v_o - швидкість рідини на осі труби, яка визначається формулою

$$v_o = \frac{\Delta p \cdot R^2}{4\eta l}. \quad (6.9)$$

Тут Δp - різниця тисків на кінцях труби довжиною l .

Тому для обчислення об'єму рідини, що протікає трубою за час t , уже не можна користуватись рівнянням нерозривності, а необхідно застосовувати **формулу Пуазейля**:

$$V = \frac{\pi \Delta p t R^4}{8\eta l}. \quad (6.10)$$

Кінетична енергія, що переноситься потоком рідини через поперечний переріз труби за одиницю часу, рівна

$$E_k = \frac{V v_o^2}{4t}, \quad (6.11)$$

а робота сил внутрішнього тертя

$$A = -\frac{4\eta v_o l V}{\rho R^2 t}. \quad (6.12)$$

За певних умов ламінарна течія стає нестійкою. Вона переходить в турбулентну під час збільшення швидкості руху рідини чи газу або ж збільшенні поперечних розмірів потоку. Характер течії рідини чи газу залежить від значення безрозмірної величини

$$Re = \rho v_c d / \eta = v_c d / \nu, \quad (6.13)$$

яка називається **числом Рейнольдса**, де v_c - середня по перерізу труби швидкість рідини; d - характерний лінійний розмір, який вказує поперечний розмір труби, по якій тече рідина, або розмір тіла, яке обтікає ця рідина. При малих значеннях числа Рейнольдса ($Re \leq 1000$) спостерігається ламінарна течія, перехід від ламінарної до турбулентної відбувається в області значень $1000 \leq Re \leq 2000$, а при $Re \geq 2300$ течія - турбулентна.

6.6 Рух твердих тіл у рідинах та газах

Коли тіла рухаються у в'язкому середовищі, то, по-перше, поблизу їх поверхонь утворюється пограничний шар із частинок, що прилипають до поверхні цих тіл і рухаються, відповідно, з меншими швидкостями. В результаті гальмівної дії цього шару частинки починають обертатись, і рух рідини в пограничному шарі стає

вихровим. Якщо тіло не має обтічної форми, то цей пограничний шар рідини може відриватися від поверхні тіла і утворювати вихорі, які обертаються в протилежні сторони. Товщина пограничного шару визначається формулою

$$\delta \cong \sqrt{\frac{\eta l}{\rho v_o}} = \frac{l}{\sqrt{Re}}, \quad (6.14)$$

де l – характерний розмір тіла, Re – число Рейнольдса. Так, наприклад, для повітря коли $l = 0,1$ м, $v_o = 30$ м/с, $\nu = 0,15 \cdot 10^{-4}$ м²/с (кінематична в'язкість повітря для 20°C) маємо $Re = 2 \cdot 10^5$ і тоді $\delta = 0,2$ мм.

По-друге, тіло, що рухається, затулює (захоплює) за собою частину рідини. Для її руху потрібна додаткова сила. В результаті виникає **лобовий опір**, спричинений дією двох сил: сили в'язкості і сили, зумовленої різницею тисків потоку на передню і задню частини тіла.

Лобовий опір R_x залежить від форми тіла і його положення відносно потоку чи швидкості руху тіла. Це враховується спеціальним безрозмірним коефіцієнтом опору C_x , який визначають експериментально. Тобто якщо рух середовища, яке обтікає тверде тіло, є турбулентним, то для не дуже великих швидкостей силу лобового опору підраховують за допомогою формули:

$$R_x = C_x \frac{\rho v^2}{2} S, \quad (6.15)$$

де ρ – густина середовища, v – швидкість руху тіла, S – найбільший поперечний переріз тіла – *мідель*.

Відривання пограничного шару від поверхні тіла в його задній частині і утворення вихорів спричиняють виникнення підіймальної сили, яка спрямована перпендикулярно до напрямку відносної швидкості і визначається формулою

$$R_y = C_y \frac{\rho v^2}{2} S, \quad (6.16)$$

де C_y – безрозмірний коефіцієнт підіймальної сили.

Рух кулі в ламінарному потоці підпорядковується **закону Стокса**, згідно якого сила в'язкості (внутрішнього тертя) прямо пропорційна швидкості руху тіла в середовищі:

$$F_C = 6\pi\eta v, \quad (6.17)$$

де r – радіус кулі.

6.7 Закон подібності Рейнольдса

Коефіцієнт лобового опору C_x залежить не тільки від форми тіла, але і від властивостей середовища, в якому відбувається рух. Він є функцією числа Рейнольдса, а саме – обернено пропорційний числу Re : $C_x = A / Re = A\eta / \rho v$, де A – безрозмірна стала, яка визначається формою тіла та його орієнтацією. Із цих формули видно, що число Рейнольдса не зміниться, якщо зменшити розміри тіла і відповідно збільшити швидкість потоку або зменшити в'язкість середовища.

Одинакові за характером течії мають однакові значення Re . Або – коефіцієнти C_x геометрично подібних тіл рівні, якщо рівні відповідні числа Рейнольдса. В цьому випадку обидва потоки подібні.

Цей закон дає можливість проводити експериментальні дослідження складних процесів, використовуючи моделі обтічних тіл.

6.8 Запитання для самоперевірки

1. Який рух рідини називається стаціонарним?
2. За яких умов буде справедливим рівняння нерозривності?
3. Запишіть рівняння Бернуллі і поясніть кожен його складову.
4. Від чого і як залежить швидкість витікання рідини із отвору?
5. Що таке ламінарний і турбулентний плин рідини?
6. Від чого залежить динамічна в'язкість і як вона пов'язана із кінематичною в'язкістю?
7. Від яких параметрів залежить число Рейнольдса і що воно характеризує?
8. Сформулюйте і запишіть закон Стокса.

Тест для контролю теоретичного матеріалу:

1. Для горизонтальної трубки струму з рівняння Бернуллі впливає, що...:

Варіанти відповіді: **А** – у вузьких місцях динамічний тиск більший, а статичний – менший, а в широких – навпаки; **В** – у вузьких місцях гідростатичний тиск більший, а динамічний – менший, а в широких – навпаки; **С** – у вузьких місцях статичний тиск більший, а динамічний – менший, а в широких – навпаки; **Д** – серед вищенаведених відповідей немає правильної.

2. Під час турбулентного режиму течії...:

Варіанти відповіді: **А** – лінії струму плавно розходяться під час збільшення швидкості рідини і сходяться – під час її зменшення; **В** – інтенсивно утворюються вихори, тобто сусідні шари рідини перемішуються; **С** – сусідні шари рідини “ковзають” один відносно іншого з деякою відносною швидкістю, зазнаючи дії сил внутрішнього тертя; **Д** – лінії струму сходяться, тому зростає величина статичного тиску.

3. Від чого залежить швидкість витікання даної рідини з вузького отвору в широкій посудині?

Варіанти відповіді: **А** – від ширини посудини і величини зовнішнього атмосферного тиску на рідину; **В** – від кута нахилу поверхні з отвором; **С** – від висоти рівня рідини над отвором і від форми самого отвору; **Д** – від величини гідродинамічного тиску.

4. Від чого залежить величина сили внутрішнього тертя для даної рідини?

Варіанти відповіді: **А** – вона прямопропорційна квадрату швидкості руху рідини (або ж тіла в цій рідині); **В** – вона прямопропорційна температурі і обернено пропорційна зовнішньому тиску на рідину; **С** – вона більша в ширших місцях потоку і менша у вузьких; **Д** – вона прямопропорційна площі контакту сусідніх шарів і градієнтови їх відносних швидкості.

5. Згідно закону Стокса сила в'язкості, що діє на кулю в ламінарному потоці, ...:

Варіанти відповіді: **А** – прямопропорційна її швидкості, радіусу та коефіцієнтови в'язкості рідини; **В** – завжди більша виштовхувальної сили, яка діє на кулю в рідині; **С** – завжди менша від сили тяжіння, яка діє на кулю; **Д** – прямопропорційна густині рідини і абсолютній температурі.

6.9 Приклади розв'язування задач

1. Скільки часу буде витікати рідина із голки шприца, якщо площа її отвору $0,5 \text{ мм}^2$, а на поршень площею 1 см^2 діє постійна сила 5 Н ? Хід поршня 4 см .

Дано:
$S_2 = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2$
$S_1 = 10^{-4} \text{ м}^2$
$F = 5 \text{ Н}$
$l = 0,04 \text{ м}$
$t - ?$

Розв'язування

Поставивши шприц горизонтально, запишем рівняння нерозривності та Бернуллі для даного випадку: $S_1 v_1 = S_2 v_2$, $p + \frac{\rho v_1^2}{2} = \frac{\rho v_2^2}{2}$, де v_1 і v_2 – швидкості поршня і витікання рідини, відповідно, а $p = F/S_1$. Оскільки об'єм рідини і поршня однакові,

то $S_1 l = S_2 v_2 t$. Звідки $t = S_1 l / S_2 v_2$. Значення v_2 знайдемо із перших двох рівнянь: $v_2 = \sqrt{\frac{2FS_1}{\rho(S_1^2 - S_2^2)}}$. Тоді кінцева формула для часу витікання

прийме вигляд: $t = \frac{S_1 l}{S_2} \sqrt{\frac{\rho(S_1^2 - S_2^2)}{2FS_1}}$. Враховуючи, що $S_1^2 \gg S_2^2$,

отримаємо кінцево: $t = \frac{S_1 l}{S_2} \sqrt{\frac{\rho S_1}{2F}}$.

Перевіримо одиниці вимірювання:

$$[t] = \frac{\frac{\text{м}^2 \text{м}}{\text{м}^2}}{\frac{\text{м}^2}{\text{м}^3 \text{Н}}} \sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{м}^3 \text{Н}}} = \text{м} \sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \text{с}^2}{\text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}}} = \text{с}.$$

Підставивши значення даних величин, отримаємо:

$$t = \frac{10^{-4} \cdot 0,04}{5 \cdot 10^{-7}} \sqrt{\frac{10^3 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 5}} \text{ с} = 0,8 \text{ с}.$$

Відповідь: Рідина витече за 0,8 с. 4 см.

2. У високу бочку налили воду висотою 1 м і зверху шар мазуту густиною 900 кг/м^3 . З невеликого отвору у дні вода витікає із швидкістю $9,5 \text{ м/с}$. Знайти висоту шару мазуту в бочці.

Дано:
$h_1 = 1 \text{ м}$
$\rho_1 = 1000 \text{ кг/м}^3$
$\rho_2 = 900 \text{ кг/м}^3$
$v = 9,5 \text{ м/с}$
$h_2 - ?$

Розв'язування

Записавши рівняння Бернуллі, отримаємо для даного випадку:

$$\rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 = \frac{\rho_1 v^2}{2},$$

звідки

$$h_2 = \frac{\rho_1 v^2}{2g\rho_2} - \frac{\rho_1 h_1}{\rho_2}.$$

Перевіримо одиниці вимірювання:

$$[h] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^2 \cdot \text{м}^3}{\text{м}^3 \cdot \text{с}^2 \cdot \text{м} \cdot \text{кг}} - \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{м}}{\text{м}^3 \cdot \text{кг}} = \text{м}.$$

Підставивши значення даних величин, отримаємо:

$$h_2 = \frac{10^3 \cdot 9,5^2 \text{ м}}{2 \cdot 9,81 \cdot 900} - \frac{1000 \cdot 1}{900} \text{ м} \approx 4 \text{ м}.$$

Відповідь: Висота шару мазуту приблизно 4 м.

6.10 Задачі для самостійних вправ

1 В посудину рівномірним струменем наливається вода, причому за 1 с наливається 150 см^3 води. В дні є отвір площею $0,5 \text{ см}^2$. На якій висоті буде утримуватись вода в посудині? (Відповідь: 0,46 м)

2 Циліндрична посудина висотою 70 см з площею дна 600 см^2 наповнена водою. В дні є отвір площею 1 см^2 . Скільки часу потрібно для того, щоб наполовину спорожнити посудину? (Відповідь: 162 с)

3 Краплинка води діаметром 0,01 мм перебуває у висхідному потоці теплого повітря, швидкість якого 2 см/с. Вважаючи рух повітря під час падіння краплинки в ньому ламінарним, знайти напрям руху і величину швидкості краплинки відносно землі, якщо динамічна в'язкість повітря $1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}$. (Відповідь: 0,003 м/с ввверх)

4 Вантажний автомобіль рухається із швидкістю 60 км/год. Яка його потужність витрачається на переборення опору повітря, якщо рух вважати турбулентним? Площа міделя автомобіля $3,75 \text{ м}^2$. Прийняти $C_x = 0,6$, а густина повітря $1,2 \text{ кг/м}^3$. (Відповідь: 12,5 кВт)

5 Свинцева кулька діаметром 5 мм рухається в повітрі із швидкістю 300 м/с. Знайти число Рейнольдса, якщо густина повітря $1,2 \text{ кг/м}^3$. (Відповідь: 10^5)

6 Визначити діаметр отвору в дні посудини, вода в якій залишається на сталому рівні 83 мм, якщо кожної секунди в неї вливають 0,2 л води. (Відповідь: $14 \cdot 10^{-3} \text{ м}$)

7 У скільки разів сила внутрішнього тертя, що діє на кульку, яка спливає в рідині з постійною швидкістю, більша від сили тяжіння, якщо густина рідини в три рази більша від густини матеріалу кульки? (Відповідь: у 2 рази)

Тест для контролю вміння розв'язувати задачі:

1. Скільки часу потрібно для того, щоб повністю спорожнити посудину з площею дна 600 см^2 і висотою 70 см, яка наповнена водою, якщо в дні є отвір площею 1 см^2 ?

Варіанти відповіді: А – 200 с; В – 227 с; С – 50 с; Д – 30 с.

2. Стальна кулька рухається в посудині із касторовою оливою із сталою швидкістю 0,2 м/с. Визначити радіус кульки, якщо динамічна в'язкість касторової оливи $2 \text{ Н}\cdot\text{с}/\text{м}^2$.

Варіанти відповіді: А – 0,5 мм; В – 5 мм; С – 0,65 мм; Д – 2,5 мм.

3. Вважаючи, що критичне значення числа Рейнольдса $Re = 2000$, знайти максимальне значення швидкості потоку води в трубі діаметром 20 см, для якого рух рідини ще залишається ламінарним.

Варіанти відповіді: А- 1,2 м/с; В – 0,2 м/с; С– 0,1 м/с; Д – 1,5 м/с.

4. Вважаючи, що парашут у відкритому стані має форму півсфери діаметром 12 м із коефіцієнтом лобового опору 1,3 і масою 32 кг, знайти максимальну швидкість руху парашутиста масою 65 кг, якщо густина повітря $1,29 \text{ кг}/\text{м}^3$.

Варіанти відповіді: А – 32 м/с; В – 8 м/с; С – 2 м/с; Д – 3,17 м/с.

5. Свинцева кулька (густина $11\,300 \text{ кг}/\text{м}^3$) діаметром 5 мм рухається в повітрі із швидкістю 300 м/с. Приймаючи для кулі $C_x = 0,25$, знайти прискорення, з яким рухається куля в повітрі густиною $1,2 \text{ кг}/\text{м}^3$. 360

Варіанти відповіді: А – $360 \text{ м}/\text{с}^2$; В – $80 \text{ м}/\text{с}^2$; С – $400 \text{ м}/\text{с}^2$; Д – $20 \text{ м}/\text{с}^2$.

Розділ 7 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ

У 1905 році А. Ейнштейном створена фізична теорія простору-часу (спеціальна теорія відносності), а в 1907-1915 рр. ним розроблено узагальнення цієї теорії на неінерціальні системи – теорія тяжіння (загальна теорія відносності). Спеціальна теорія відносності стала узагальненням принципу відносності класичної фізики на всі фізичні явища в інерціальних системах відліку, розширила знання про простір і час, розкрила специфіку динаміки тіл з великими швидкостями, визначила межі застосування класичної фізики.

7.1 Передумови спеціальної теорії відносності. Постулати Ейнштейна

В кінці XIX століття в результатів дослідження явищ електрики, магнетизму і світла інтерес до принципу відносності зріс. Максвелл підсумував в своїх знаменитих рівняннях електромагнітного поля результати детальних досліджень цих явищ. Його рівняння зводять воедино електрику, магнетизм і світло. Але виникли сумніви щодо їх правильності, тому що їх вид не залишався незмінним, якщо перетворити їх за допомогою перетворень Галілея (2.26). Однак додаткові перевірки, і експериментальні в тому числі, підтвердили їх справедливність.

Тоді Лоренц зауважив, що якщо здійснити їх перетворення за допомогою інших співвідношень (7.1), то форма рівнянь Максвелла не зміниться. Стало зрозумілим, що потрібно внести відповідні корективи в закони Ньютона, і тоді вони прекрасно узгоджуються з рівняннями Максвелла.

Щоб зрозуміти, що означають нові перетворення, і фізикам-теоретикам і фізикам-експериментаторам треба було переосмислити свої уявлення, своє розуміння властивостей простору і часу. Цьому значно посприяв знаменитий дослід Майкельсона і Морлі в 1887 році. Вони експериментально встановили, що швидкість світла однакова в усіх напрямках і не залежить від руху приймача або джерела, а також руху середовища, в якому світло поширюється.

Тому в основу теорії відносності і покладено вищезгадані два фундаментальних принципи, які є постулатами теорії і були сформульовані А.Ейнштейном так:

Перший постулат – це принцип відносності: всі закони природи інваріантні (незмінні, однакові) щодо переходу від однієї інерціальної системи відліку до іншої.

На практиці це означає, що за допомогою дослідів (механічних, електричних, оптичних тощо) всередині інерціальної системи відліку неможливо визначити (зафіксувати), чи перебуває ця система відліку у стані спокою, чи рухається рівномірно і прямолінійно.

Другий постулат – принцип інваріантності швидкості світла: швидкість світла у вакуумі не залежить від швидкості руху джерела або спостерігача і є стала в усіх інерціальних системах відліку.

7.2 Перетворення координат Лоренца

Ейнштейн показав, що в теорії відносності класичні перетворення Галілея (2.26), які описують перехід від однієї інерціальної системи відліку K (нерухома) до іншої K' , яка рухається відносно нерухомої з великою швидкістю v (див. рис. 2.13), замінюються перетвореннями Лоренца (7.1), які задовільняють постулатам Ейнштейна:

$$\begin{array}{l} K \rightarrow K' \\ \left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{l} K' \rightarrow K \\ \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ y = y', \\ z = z', \\ t = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \end{array} \right. \end{array} \quad (7.1)$$
$$\beta = v/c.$$

З постулатів теорії відносності та перетворень Лоренца випливають такі головні висновки.

7.3 Відносність довжини та проміжку часу. Інтервал між подіями

1. Лінійні розміри тіл в різних рухомих інерціальних системах відліку – різні. Лінійні розміри тіл у напрямі руху залежать від швидкості руху тіла відносно системи відліку, з якою пов'язаний спостерігач (система K).

Позначимо через l_0 довжину стержня в системі відліку K' (рис. 2.13). Відносно системи K' стержень не рухається і розташований вздовж осі $O'X'$. Система K' рухається з швидкістю $\vec{v}$ відносно системи K таким чином, що вектор $\vec{v}$ паралельний осі OX . Тоді в системі відліку K довжина стержня визначається за формулою

$$l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}, \quad (7.2)$$

де l – релятивістська довжина. З цієї формули випливає, що коли вектор $\vec{v}$ паралельний до осі OX і сам стержень розташований вздовж неї, то $l < l_0$. Таке скорочення розмірів тіла у напрямі його руху і складає суть релятивістського ефекту скорочення розмірів тіл. Слід при цьому зазначити, що розміри тіла у напрямках, перпендикулярних до напрямку руху, не змінюються.

2. Тривалість подій в різних рухомих інерціальних системах відліку різна. Нехай в системі координат K' в точці з координатою X' , яка рухається відносно системи відліку K , через проміжок часу τ_0 відбуваються дві події. В системі відліку K ці дві події будуть відбуватись вже в різних точках, бо система K' рухається відносно системи K з швидкістю v . Згідно з теорією відносності проміжок часу між цими подіями за годинником системи K буде більшим, ніж τ_0 . Інтервали часу τ_0 і τ пов'язані співвідношенням

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (7.3)$$

З цієї залежності випливає, що годинник, який рухається відносно нерухомого годинника, іде повільніше. Це явище і складає суть релятивістського ефекту уповільнення плину часу.

3. Основна відмінність спеціальної теорії відносності від класичної полягає в тому, що *вимога інваріантності (незмінності) проміжку часу $(t_2 - t_1)$ замінюється в ній вимогою інваріантності інтервала S_{12}* .

$$S_{12}^2 = c^2 \Delta t_{12}^2 - \Delta r_{12}^2 = c^2 (\Delta t'_{12})^2 - (\Delta r'_{12})^2 = (S'_{12})^2, \quad (7.4)$$

де $\Delta r_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ і аналогічно визначається $\Delta r'_{12}$. Тобто в спеціальній теорії відносності доказано, що *простір і час* не можна розглядати відокремлено – приходить ся аналізувати чотиривимірний всесвіт: простір-час. В спеціальній теорії відносності *інтервал* виступає аналогом трьохвимірної відстані. Тобто ми

розширюєм цим самим поняття вектора. В класичній механіці він міг мати тільки просторові компоненти, а тепер включаєм в це поняття і часову компоненту, тобто переходим до чотиривимірного простору-часу.

Якщо викласти це на мові імпульсу, то перетворення дасть три просторові складові, подібні до звичайних компонент імпульсу, і четверту компоненту – часову складову, яка є ні чим іншим, як енергією.

7.4 Релятивістський закон додавання швидкостей

Вивчаючи релятивістський закон додавання швидкостей, слід знати, що він відрізняється від закону додавання швидкостей у класичній механіці. Математично цей закон має такий вигляд:

$$\vec{u} = \frac{\vec{u}' + \vec{v}}{1 + \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}}{c^2}}, \quad (7.5)$$

де u і u' - швидкості тіла в системах K і K' , а v - швидкість системи K' відносно системи K . Якщо $v \ll c$ і $u' \ll c$, то $\vec{u} = \vec{u}' + \vec{v}$, тобто у нерелятивістському випадку рівняння переходить у класичний закон додавання швидкостей (2.27).

7.5 Основний закон релятивістської динаміки. Релятивістський імпульс

Релятивістською називається механіка, яка враховує закони теорії відносності і вивчає закони руху тіл з швидкостями, близькими до швидкості світла.

Наведемо головні рівняння релятивістської динаміки.

Другий закон Ньютона має формально такий же вигляд:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad (7.6)$$

де $\vec{F}$ - результуюча сила, але імпульс в релятивістській динаміці вже не прямопропорційний швидкості, а, як це впливає із перетворень Лоренца, має іншу залежність від швидкості.

Релятивістський імпульс $\vec{p}$ має більш складну залежність від швидкості, що забезпечує його збереження, наприклад, у випадках релятивістського розсіяння:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (7.7)$$

де m - маса тіла.

Якщо $v \ll c$, релятивістський імпульс збігається з класичним: $\vec{p} = m\vec{v}$.

Твердження ж про залежність маси від швидкості, яке можна зустріти в деяких старих книгах по теорії відносності, зумовлено помилковим трактуванням присутності квадратного кореня у формулі (7.7). Не розуміючи, що цей корінь появився в результаті переходу від власного часу до координатного (7.1 і 7.3), автори цих книг помилково приписали його походження збільшенню інертних властивостей тіла, яке розганяється, вважаючи, що $\vec{p} = m^*\vec{v}$, де

$m^* = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}$ - маса, яка залежить від швидкості. Насправді ніякої

зміни внутрішніх інертних властивостей тіла не відбувається, і тому формальне введення величини m^* не можна називати масою.

7.6 Взаємозв'язок маси і енергії

З теорії відносності випливає також універсальне співвідношення між повною енергією тіла та його масою

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (7.8)$$

Це рівняння виражає фундаментальний закон природи, **закон взаємозв'язку маси і енергії**.

Третім головним співвідношенням є формула для кінетичної енергії:

$$E_k = E - E_o = \frac{m c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - mc^2, \quad (7.9)$$

де $E_o = mc^2$ – енергія тіла в стані спокою.

Четверте співвідношення зв'язує повну енергію з релятивістським імпульсом:

$$E = c\sqrt{p^2 + m^2 c^2}. \quad (7.10)$$

7.7 Границі застосовності класичної механіки

Якщо v близьке до c , то закони релятивістської механіки уже докорінно відрізняються від законів класичної механіки. Наприклад, вектор прискорення, як правило, не паралельний силі. Тільки коли

сила напрямлена паралельно швидкості, то $\vec{F}_{\parallel} = m_0 \vec{a} / \left(1 - v^2/c^2\right)^{3/2}$, і

коли сила перпендикулярна швидкості, тоді $\vec{F}_{\perp} = m_0 \vec{a} / \left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}$.

Тобто розганяти релятивістську частинку значно трудніше, ніж заставити її відхилитись.

Зверніть увагу на те, що найважливішим висновком теорії відносності є відкриття зв'язку між простором і часом. Згідно з теорією відносності час і простір утворюють єдину форму існування матерії: простір-час (матерія існує в просторі і часі). Висновки теорії про еквівалентність маси та енергії прекрасно підтвердились в дослідах по анігіляції матерії – перетворенні речовини в енергію.

7.8 Запитання для самоперевірки

1. Які принципи лежать в основі теорії відносності?
2. За яких умов і які спостерігаються релятивістські ефекти?
3. Запишіть релятивістський закон додавання швидкостей.
4. Як змінюється імпульс тіла від його швидкості?
5. Що називається релятивістським імпульсом?
6. Запишіть закон взаємозв'язку маси тіла та його енергії.
7. Який головний висновок впливає з теорії відносності?
8. Запишіть перетворення Лоренца.
9. Які наслідки впливають із перетворень Лоренца?

Тест для контролю теоретичного матеріалу:

1. Спеціальна теорія відносності (СТВ) ...:

Варіанти відповіді: **А** – повністю заперечила закони класичної механіки і сформулювала нові; **В** – вказала межі застосування законів класичної механіки – для тіл з відносно великими масами і невеликими швидкостями; **С** – це механіка мікросвіту – для об'єктів з малими масами і малими швидкостями; **Д** – це механіка небесних тіл – планет, їх супутників, комет, метеоритів...

2. Перший постулат СТВ твердить, що....:

Варіанти відповіді: **А** – всі закони природи інваріантні (незмінні) відносно переходу від однієї інерціальної системи до іншої; **В** – маса тіла зростає з ростом його швидкості; **С** – енергія тіла за будь-яких швидкостей залишається незмінною; **Д** – тіло під час руху з великими швидкостями зазнає поперечних деформацій.

3. В скільки разів буде відрізнятись тривалість деякого процесу в нерухомій і рухомій інерціальних системах відліку?

Варіанти відповіді: **А** – в $\left(1 + 1/\sqrt{1-\beta^2}\right)$ раз; **В** – в $\sqrt{1-\beta^2}$; **С** – в $1/\sqrt{1-\beta^2}$ раз; **Д** – в $(\sqrt{1-\beta^2} - 1)$ раз.

4. В СТВ інтервал між двома подіями це....:

Варіанти відповіді: **А** – $(t_2 - t_1)$; **В** – $(c \cdot \Delta t_{12}^2 - \Delta r_{12}^2)$; **С** – $(l_2 - l_1)$; **Д** – $(E_2 \cdot t_2 - E_1 \cdot t_1)$.

5. З ростом швидкості тіла релятивістський імпульс....:

Варіанти відповіді: **А** – зростає пропорційно швидкості; **В** – залишається незмінним; **С** – зменшується пропорційно $\sqrt{1-\beta^2}$; **Д** – зростає пропорційно $1/\sqrt{1-\beta^2}$.

7.9 Приклади розв'язування задач

1. Для якої відносної швидкості руху тіла релятивістське скорочення довжини складає $0,25 \cdot l_0$?

Дано: $\frac{l_0 - l}{l_0} = 0,25$	Розв'язування Згідно з теорією відносності лінійні розміри тіла змінюються за законом
$v - ?$	$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$

де v - швидкість руху тіла відносно системи відліку K .

$$\frac{l}{l_0} = 0,75; \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0,75; 1 - \frac{v^2}{c^2} = (0,75)^2 = 0,5625.$$

З останньої рівності $\beta = \frac{v}{c} = \sqrt{0,4375} = 0,6615$. Звідки швидкість

$$v = \beta \cdot c = 0,6615 \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}} = 1,98 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Відповідь: Відносна швидкість тіла $1,98 \cdot 10^8 \text{ м/с}$.

2. У скільки разів зростає час життя нестабільної частинки, якщо вона рухається з швидкістю, що становить 99% швидкості світла?

Дано: $v = 0,99 \cdot c$	Розв'язування У системі, що рухається, час уповільнюється:
$\frac{\tau}{\tau_0} - ?$	$\tau = \tau_0 / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

З цього рівняння

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)^{-1} = \left(\sqrt{1 - (0,99)^2} \right)^{-1} = 7,1.$$

Відповідь: Час життя зростає в 7,1 рази.

3. Визначити результуючу швидкість u , якщо $u' = c$.

Дано: $u' = c$	Розв'язування Запишемо релятивістський закон додавання швидкостей:
$u - ?$	

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$$

Оскільки $u' = c$, то

$$u = \frac{c+v}{1 + \frac{v}{c}} = \frac{c+v}{c+v} c = c.$$

Відповідь: Таким чином, $u = c$, тобто не більше швидкості світла.

4. За якої швидкості електрона його енергія зросте удвічі ?

Дано: $E = 2E_0$	Розв'язування Під час руху електрона його енергія зростає згідно з законом
$v - ?$	

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Тому що $E = 2E_0$, то $2E_0 = mc^2 / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ і $4\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 1$. З цієї

рівності:

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2} c = 2,6 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Відповідь: При швидкості $2,6 \cdot 10^8 \text{ м/с}$.

7.10 Задачі для самостійних вправ

1 З якою швидкістю повинно рухатися тіло, щоб його поздовжні розміри зменшилися у 2 рази? (Відповідь: $v = 2,6 \cdot 10^8 \text{ м/с}$).

2 Скільки часу пройде на Землі, якщо у ракеті, яка рухається з швидкістю $0,99 c$, годинник відраховує 10 років? (Відповідь: 71 рік).

3 На скільки збільшиться імпульс α -частинки при її прискоренні до швидкості, що дорівнює $0,9 c$? (Відповідь: на $2,3 \cdot 10^{-18} \text{ кг} \cdot \text{м/с}$).

4 З якою швидкістю наближаються один до одного два фотони, якщо вони рухаються назустріч? (Відповідь: $3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$).

5 Яку відстань подолає ракета за одну годину, якщо її швидкість становить $0,99 c$? Час відраховується за годинником, який встановлений на ракеті. (Відповідь: $7,58 \cdot 10^{12} \text{ м}$).

6 Маса поїзда, що перебуває у стані спокою, 2000 т. На скільки збільшується його імпульс під час руху з швидкістю 15 м/с ? (Відповідь: на $32,5 \cdot 10^{-9} \text{ кг м/с}$).

7 Визначити кінетичну енергію електрона в (MeV), який рухається з швидкістю $0,6c$. (Відповідь: $0,13 \text{ MeV}$).

Тест для контролю вміння розв'язувати задачі:

1. Тіло рухається з постійною швидкістю відносно інерціальної системи відліку К. Для якого значення швидкості поздовжні розміри тіла зменшаться в 1,5 раза для спостерігача в цій системі відліку?

Варіанти відповіді: А – $2,3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$; В – $1,2 \cdot 10^8 \text{ м/с}$; С – $1,5 \cdot 10^8 \text{ м/с}$; Д – $3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$.

2. Визначити зміну енергії, що відповідає зміні маси тіла на величину маси протона ($m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$).

Варіанти відповіді: А – $0,5 \cdot 10^{-10} \text{ Дж}$; В – $5,5 \cdot 10^{-10} \text{ Дж}$; С – $1,5 \cdot 10^{-10} \text{ Дж}$; Д – $2,5 \cdot 10^{-10} \text{ Дж}$.

3. Прискорювач розганяє протони до значення кінетичної енергії 76 ГеВ. Знайти швидкість протонів, якщо $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг.

Варіанти відповіді: А – $0,9999 \cdot c$; В – $0,5 \cdot c$; С – $0,755 \cdot c$; Д – $0,85 \cdot c$.

4. Під час опромінення поверхні платини фотонами високих енергій фотоелектрони вилітають з його поверхні із швидкістю $2,7 \cdot 10^8$ м/с. Визначити імпульс такого фотоелектрона.

Варіанти відповіді: А – $0,26 \cdot 10^{-22}$ кг·м/с; В – $5,6 \cdot 10^{-22}$ кг·м/с; С – $0,75 \cdot 10^{-22}$ кг·м/с; Д – $2,8 \cdot 10^{-22}$ кг·м/с.

5. Дві ракети рухаються рівномірно і прямолінійно з відносною швидкістю $0,6 \cdot c$ (c – швидкість світла). В першій ракеті подія тривала 8 с. Скільки часу триватиме вона для спостерігача в другій ракеті?

Варіанти відповіді: А – 2 с; В – 6 с; С – 5 с; Д – 10 с.

Р.М. Лучицький

Фізика. ч.1. МЕХАНІКА. Навч. посібник. Івано-Франківськ:
Факел, 2004. – 124 с.

ISBN 966-694-034-5

Посібник для самостійної роботи студентів денної та заочної форми навчання.

У посібнику коротко, у доступній формі подано матеріал, згідно навчальної програми нормативної дисципліни «Фізика» для вищих технічних закладів освіти (затв. Міносвіти України 1998 р.).

Основою даного посібника є електронний посібник для дистанційного навчання для студентів всіх спеціальностей. Кожний розділ завершується контрольними запитаннями для самоперевірки, тестом для контролю засвоєння теоретичного матеріалу, прикладами розв'язування задач, задачами для самостійного розв'язування і тестом – контрольною роботою, яку контролюватиме викладач.

ББК 22.3