

**НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК**  
*частина 1*

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

*М.Є.Чернова*

# ФІЗИКА

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Частина 1

МЕХАНІКА ТВЕРДИХ ТІЛ,  
РІДИН І ГАЗІВ

Івано-Франківськ  
2011

УДК 53 (075.8)

ББК 22.3

**Ч–49**

**Рецензенти:**

**Я.В.Зауличний** – докт. фіз.-мат. наук, професор, завідувач кафедри металознавства та термічної обробки інженерно-фізичного факультету Національного технічного університету України «КПІ».

**С.І.Мудрий** – докт. фіз.-мат. наук, професор кафедри фізики металів Львівського національного університету ім. І.Франка.

**Т.І.Луцишин** – канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри фізики ІФНТУНГ.

*Рекомендовано*

*Міністерством освіти і науки України  
(лист №1/II-12269 від 29 грудня 2010р.)*

**Чернова М.Є.**

**Ч–49** Фізика: Навчальний. посібник. У 2–х ч. Ч.1. Механіка твердих тіл, рідин і газів. Івано-Франківськ: Факел, 2011р. – 221с.

ISBN

Навчальний посібник написаний відповідно до програми з фізики для студентів вищих технічних навчальних закладів напрямку підготовки 6.05.03.04 – «Нафтогазова справа». Він складається з 5-ти розділів, в яких викладено фізичні основи кінематики, динаміки твердого тіла, рідин та газів а також основи молекулярної фізики та термодинаміки.

УДК 53 (075.8)

ББК 22.3

ISBN

© Чернова М.Є., 2011

## ЗМІСТ

### **ЧАСТИНА I**

#### **Механіка**

7

#### Розділ I

##### **Кінематика**

10

##### §1 Механіка

10

##### 1.1 Механічний рух

10

##### 1.2 Система відліку

11

##### 1.3 Способи опису руху матеріальної точки

13

##### 1.4 Швидкість

14

##### 1.5 Прискорення

16

##### 1.6 Криволінійний рух точки. Прискорення при криволінійному русі

19

##### 1.7 Кінематика обертового руху тіла. Кутова швидкість і кутове прискорення

21

##### *Контрольні запитання*

25

#### Розділ II

##### **Динаміка**

27

##### §2 Динаміка матеріальної точки

27

##### 2.1 Поступальний рух. Перший закон Ньютона

27

##### 2.2 Суть взаємодії в механіці

29

##### 2.3 Сила. Третій закон Ньютона

30

##### 2.4 Маса. Другий закон Ньютона

30

##### 2.5 Сили в механіці

31

##### 2.6 Сили тертя

33

##### 2.7 Сили пружності

37

##### *Контрольні запитання*

49

##### §3 Закони збереження в механіці

52

##### 3.1 Імпульс. Закони зміни і збереження імпульсу

52

##### 3.2 Центр мас. Закон руху центра мас

57

##### 3.3 Робота постійної та змінної сил

59

##### 3.4 Потужність

65

##### 3.5 Кінетична енергія матеріальної точки

66

##### 3.6 Консервативні та дисипативні сили

67

##### 3.7 Закон збереження і перетворення енергії

68

##### *Контрольні запитання*

71

##### §4 Динаміка обертового руху твердого тіла

73

##### 4.1 Момент сили. Момент імпульсу. Основне рівняння динаміки обертового руху твердого тіла

73

##### 4.2 Закон збереження моменту імпульсу

75

##### 4.3 Момент інерції

77

|                                                                               |     |
|-------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.4 Робота, потужність і кінетична енергія при обертovому русі твердого тіла  | 79  |
| 4.5 Вільні осі                                                                | 82  |
| 4.6 Гіроскопи                                                                 | 84  |
| <i>Контрольні запитання</i>                                                   | 83  |
| §5 Механіка рідин і газів                                                     | 86  |
| 5.1 Елементи гідроаеростатики                                                 | 86  |
| 5.2 Ідеальні рідини. Лінії течії, трубки течії                                | 87  |
| 5.3 Умова неперервності струмини                                              | 88  |
| 5.4 Рівняння Бернуллі для ідеальної рідини. Наслідки з рівняння Бернуллі      | 89  |
| 5.5 Внутрішнє тертя в рідинах і газах                                         | 93  |
| 5.6 Ламінарний та турбулентний режими течії. Число Рейнольдса                 | 96  |
| 5.7 Формула Стокса                                                            | 98  |
| 5.8 Формула Пуазейля                                                          | 101 |
| <i>Контрольні запитання</i>                                                   | 105 |
| Розділ III                                                                    |     |
| <b>Молекулярна фізика</b>                                                     | 107 |
| §6 Молекулярно-кінетична теорія ідеальних газів                               | 107 |
| 6.1 Ідеальний газ                                                             | 107 |
| 6.2 Основні закони ідеальних газів                                            | 108 |
| 6.3 Швидкості газових молекул                                                 | 115 |
| 6.4 Функція розподілу Максвелла                                               | 116 |
| 6.5 Барометрична формула                                                      | 118 |
| 6.6 Функція розподілу Больцмана                                               | 121 |
| <i>Контрольні запитання</i>                                                   | 122 |
| §7 Явища переносу в газах                                                     | 124 |
| 7.1 Середня довжина вільного пробігу молекул                                  | 124 |
| 7.2 Явище дифузії                                                             | 126 |
| 7.3 Явище внутрішнього тертя в газах                                          | 130 |
| 7.4 Явище теплопровідності                                                    | 133 |
| <i>Контрольні запитання</i>                                                   | 137 |
| Розділ IV                                                                     |     |
| <b>Основи термодинаміки</b>                                                   | 138 |
| §8 Перший закон термодинаміки                                                 | 138 |
| 8.1 Основні поняття і означення                                               | 138 |
| 8.2 Число ступенів вільності молекул. Розподіл енергії за ступенями вільності | 140 |
| 8.3 Внутрішня енергія ідеального газу                                         | 141 |
| 8.4 Макроскопічна робота газу                                                 | 143 |

|                                                                             |     |
|-----------------------------------------------------------------------------|-----|
| 8.5 Кількість теплоти. Теплоємність газів                                   | 145 |
| 8.6 Перший закон термодинаміки                                              | 149 |
| 8.7 Політропний процес                                                      | 151 |
| 8.8 Адіабатний процес                                                       | 153 |
| 8.9 Робота термодинамічної системи                                          | 155 |
| 8.10 Стисливість газу                                                       | 155 |
| <i>Контрольні запитання</i>                                                 | 160 |
| §9 Другий закон термодинаміки                                               | 163 |
| 9.1 Обороти та необороти процеси                                            | 163 |
| 9.2 Цикл Карно та його ККД                                                  | 164 |
| 9.3 Робота теплової машини                                                  | 167 |
| 9.4 Холодильна машина                                                       | 168 |
| 9.5 Ентропія                                                                | 169 |
| 9.6 Технічні цикли                                                          | 175 |
| <i>Контрольні запитання</i>                                                 | 184 |
| Розділ V                                                                    |     |
| <b>Реальні гази, рідини, тверді тіла</b>                                    | 186 |
| §10 Реальні гази                                                            | 186 |
| 10.1 Відхилення від законів ідеальних газів                                 | 186 |
| 10.2 Рівняння Ван-дер-Ваальса                                               | 187 |
| 10.3 Ізотерми газу Ван-дер-Ваальса                                          | 189 |
| 10.4 Експериментальні ізотерми                                              | 191 |
| 10.5 Критичний стан речовини. Критичні параметри                            | 192 |
| 10.6 Внутрішня енергія реального газу                                       | 194 |
| 10.7 Ефект Джоуля-Томсона                                                   | 196 |
| <i>Контрольні запитання</i>                                                 | 200 |
| §11 Властивості рідин і твердих тіл. Фазові переходи                        | 202 |
| 11.1 Будова рідини. Близький порядок                                        | 202 |
| 11.2 Поверхневий шар рідини. Поверхневий натяг. Поверхнево активні речовини | 205 |
| 11.3 Умови рівноваги на межі рідини                                         | 210 |
| 11.4 Тиск під криволінійною поверхнею рідини. Формула Лапласа               | 213 |
| 11.5 Капілярні явища                                                        | 216 |
| 11.6 Будова твердих тіл                                                     | 217 |
| 11.7 Фазові переходи                                                        | 220 |
| 11.8 Фазові діаграми. Потрійна точка                                        | 223 |
| <i>Контрольні запитання</i>                                                 | 224 |

## ПЕРЕДМОВА ДО ВИДАННЯ

Цей посібник являє собою видання першої частини курсу загальної фізики, розробленого згідно нової програми, затвердженої Міністерством освіти і науки України з напрямку підготовки спеціалістів «Нафтогазова справа» для студентів Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

Дана програма передбачає поглиблення знань з основ фізики, на яких в подальшому базуються спецкурси вищезгаданого напрямку підготовки.

Автор буде вдячним усім особам та викладачам випускних кафедр, які поділяться думками щодо покращення даного курсу.

*М.Є.Чернова*

***Предмет фізики. Значення курсу фізики для підготовки спеціалістів за напрямом «Нафтогазова справа»***

Нас оточує дивовижний і нескінченно різноманітний світ речей і явищ. Він існував до нас, він буде існувати і після нас. Ми пізнаємо цей світ за допомогою органів чуття, живучи і діючи в ньому. Усе що нас оточує – це матерія у різноманітних своїх проявах, яка весь час рухається, призводячи до змін у світі.

Цей світ ми пізнаємо з буденних спостережень. Але знати про існування різноманітних явищ і властивостей предметів замало. Важливо знати, чому виникають ці явища, і який принцип їх дії та виникнення. І це важливо знати, інакше ми б не змогли використовувати ці явища і їх властивості для користі людства, не змогли б створити ту кількість речей, які нам так необхідні для життя, для розвитку людського суспільства.

Пізнанням законів світу займаються багато наук, але основою, на якій вони створюють свої теоретичні засади і вдосконалюють експериментальні методи дослідження була, є і залишається **фізика**.

**Що таке фізика?** Щоб це зрозуміти, запам'ятай-мо її основні завдання і напрямки розвитку.

**Перше** – фізика вивчає найбільш загальні форми руху матерії, що лежать в основі всіх природних явищ; встановлює закони цих рухів і їх взаємозв'язок між собою. Ці закони є такими, що їм підпорядковуються всі без виключення тіла, де б вони не знаходились, коли б вони не спостерігались і яким би змінам не піддавались. Такі форми руху матерії називаються **фізичними процесами** або **фізичними явищами**.

Так, *механічним явищам* підпорядковуються і тіла навколо нас, і в своєму русі зорі та галактики, і найменші невидимі частинки – атоми та їх складові. Механічні процеси належать до числа найбільш загальних форм руху матерії і є обов'язковими учасниками всіх явищ природи.

В житті і побуті ми неперервно зіштовхуємось з особливою взаємодією тіл, яка отримала назву *електромагнітних явищ*. Руйнівні блискавки, полярне сяйво, світло, електризація паперу і синтетичних тканин, притягання і відштовхування магнітів – все це прояв електричних і магнітних сил. Телефон, радіо, телебачення, побутові прилади – все це використання людиною електромагнітних явищ, які вивчає *електродинаміка*.

**Друге** – фізика вивчає властивості матеріальних тіл, визначає особливості їх внутрішньої будови, відшукує взаємозв'язок між властивостями тіл і їх будовою.

У кожному фізичному процесі, під час взаємодії тіл, під час зміни умов, в яких знаходяться ці тіла, ми виявляємо нескінчену різноманітність їх властивостей.

У механічних явищах ця різноманітність полягає в здатності тіл по-різному діяти одне на одне, в результаті чого виявляється, що одні тіла є міцними, твердими, інші – делікатними і крихкими, нездатними витримати навіть слабкий вплив інших тіл.

Під час нагрівання тіла по-різному розширюються. Одні тіла, виявляється, можуть залишатися в твердому стані при дуже високих температурах, а інші не можуть перейти у твердий стан навіть при дуже сильному охолодженні. Одні легко загоряються, інші не можуть загорітись і т.д.

Також по-різному тіла ведуть себе при електромагнітних та світлових явищах, по-різному пропускають електричний струм і світло.

Завдання фізики якраз і полягає в тому, щоб кількісно описати і порівняти властивості тіл, знайти і пояснити причини появи тих чи інших властивостей і їх різноманітність. Таке пояснення властивостей тіл стає можливим, якщо вдалося побудувати правильну модель внутрішньої будови тіл. Вирішенням цих завдань займаються такі розділи фізики як *молекулярна, квантова, атомна і ядерна фізика*.

**Третє** – фізика відшукує можливості, форми і методи використання законів, фізичних явищ і властивостей матеріальних тіл для потреб людства.

Вирішенням цього завдання займається *прикладна* або *технічна фізика*, яка дала поштовх розвитку всіх інженерних наук. Отже, для всіх технічних дисциплін, фізика стала відправною точкою у їх розвитку.

Пошуки шляхів практичного застосування законів механіки призвело до розвитку: технічної механіки, матеріалознавства, теорії механізмів і машин, теорії опору матеріалів.

Вчення про теплові явища стало основою всієї сучасної теплотехніки, теорії двигунів, стало невід'ємною частиною всіх хімічних та інших виробництв.

Пошуки шляхів практичного застосування законів електромагнітних явищ не тільки породили сучасну електро- і радіотехніку, але забезпечили разом з атомною і ядерною фізикою створення всієї сучасної енергетики.

Успіхи молекулярної фізики, електронної теорії і теорії твердого тіла дали можливість створити нові речовини, кристали з новими необхідними людству властивостями, що призвело до стрімкого розвитку сучасних електронних і лазерних технологій, які людство використовує як у корисних так і шкідливих для себе напрямках.

Але, як би там не було, зараз немає жодного закону фізики, який би «не працював» на виробництві. Аналогічно, немає жодної машини, устаткування, технології, в яких би не застосовувалось одночасно декілька фізичних законів. Отже, фізика неперервно пов'язана з усіма технічними науками.

Одним з найважливіших завдань, яке стоїть в Україні, є забезпечення енергоносіями. Вирішення даної проблеми не можливе без збільшення об'ємів буріння глибоких, похило спрямованих та горизонтальних свердловин, інтенсифікації видобутку нафти і газу, а також розробка та впровадження нових технологій альтернативних екологічно чистих енергоносіїв. На даному етапі є важливим створення високоякісного нафтового обладнання та високопродуктивних магістральних нафтогазопроводів, а ці процеси базуються на законах кінематики та динаміки механічного руху, динаміки рідин і газів,

молекулярної фізики, термодинаміки, електрики та магнетизму.

Ось чому, на даний час, при підготовці висококваліфікованих спеціалістів для різних галузей народного господарства велику роль відіграють фундаментальні науки, зокрема, *фізика*.

Тому, поглиблення знань з цієї величної і обширної науки починається з *механіки* – того розділу фізики, який розглядає найпростішу форму руху матерії – *механічний рух*.

## §1. МЕХАНІКА

### 1.1 Механічний рух

Згадаймо, що ми можемо спостерігати у навколишньому світі. Наприклад, ми можемо бачити, як пливуть хмари, летить літак, їде автомобіль, падає яблуко, котиться кулька по столі, коливається вантаж на пружині і т.д. Спільним у поведінці цих тіл є те, що вони *рухаються*, тобто, вони змінюють своє положення відносно інших тіл, отже, *з плином часу тіла можуть змінювати своє положення одне відносно одного*.

Якщо візьмемо невеличкий гумовий м'яч і почнемо його стискати, то помітимо, що змінюється відносне розміщення частин цього м'яча. Як бачимо, *частинки тіл теж можуть зміщуватися з плином часу одні відносно одних*.

Таким чином, *зміна положення тіл або частин тіла одне відносно одного з плином часу, називається механічним рухом*.

Механічний рух може бути різноманітним і досить складним, тому, механіка розбиває реальні рухи на більш прості, а вивчивши їх, переходить знову до більш складних. Найбільш простим механічним рухом є рух, матеріальної точки.

*Під матеріальною точкою розуміють в механіці таке тіло, розмірами і формою якого можна знехтувати в даній задачі*. Наприклад, розглядаючи кульку, що котиться, ми, в першому наближенні, формою і розмірами її можемо знехтувати і розглядати кульку як матеріальну точку. Але, якщо необхідно врахувати роль її обертання під час цього руху, то ми мусимо врахувати і форму, і розміри даного тіла.

Одне і те ж тіло в один і той самий час може виконувати різні рухи відносно різних тіл, наприклад, різним буде

рух пасажира, (що йде вздовж вагону рухомого поїзда), відносно вагону в цілому і відносно залізничного полотна.

Положення тіла в просторі може визначатись лише відносно інших тіл. Наприклад, є зміст говорити про рух літака чи автомобіля відносно Землі, про рух Землі відносно Сонця, про рух лижника відносно «старту», але неможна вказати їх положення в просторі «взагалі», без відношення до якогось конкретного тіла. Таким чином, поведінка довільного рухомого тіла може бути описана тільки по відношенні до інших тіл, тобто, **всі механічні рухи є відносними**. А це означає, що говорити про рух можна лише тоді, коли вказано не лише на рухоме тіло, а й на тіло відліку.

## 1.2 Система відліку

**Абсолютно тверде тіло, з яким жорстко зв'язана система координат і годинник, для визначення положення тіла або його частин у просторі з плином часу, називають системою відліку.**

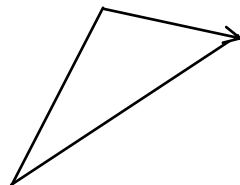
Визначаючи місцезнаходження довільного предмету, ми обов'язково вказуємо на дві ознаки: **напря́м**, вздовж якого видно цей предмет і його **віддале́ність**. Якщо жителя Івано-Франківська запитати про те, де знаходиться Київ, він скаже, що на північному сході, на віддалі 700 км. **Величину, яка одночасно вказує на напрям і віддаленість від точки відліку до предмету, називають радіус-вектором.**

У деякий момент часу  $t_1$  точка  $M$  займає на траєкторії положення  $M_1$ , (рис.1.1) яке характери-

зується радіус-вектором  $\overrightarrow{OM_1} = r_1$ . У на-

ступний момент часу  $t_2$  через деякий проміжок часу  $\Delta t = t_2 - t_1$  точка  $M$  займе на траєкторії положення  $M_2$ , яке характери-

зується радіус-вектором  $\overrightarrow{OM_2} = r_2$ .



Довжина дуги  $M_1M_2 = \Delta S$  являє собою шлях, який пройшла точка  $M$  за час  $\Delta t$ . Рисунок 1.1

Отже, вектор  $\overrightarrow{M_1M_2} = \Delta \vec{r}$ , проведений з початкового положення  $M_1$  у кінцеве положення  $M_2$  називається **вектором переміщення** точки  $M$  за час  $\Delta t$ . У даному випадку, як це видно з малюнка, шлях  $\Delta S$  і вектор переміщення  $|\Delta \vec{r}|$  не співпадають, (це співпадання існує лише для прямолінійного руху) але різниця між ними буде тим меншою, чим меншим є значення  $|\Delta \vec{r}|$ . Під час довільного криволінійного руху рівність  $|\Delta \vec{r}| = \Delta S$  може спостерігатися лише в границі для нескінченно малого проміжку часу, тобто, коли  $\Delta r \rightarrow 0$ :

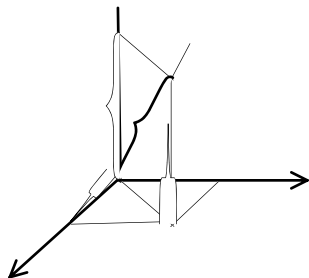
$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{|\Delta \vec{r}|} = 1 \quad (1.1)$$

З рисунка 1.1 видно, що

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \Delta \vec{r} \quad (1.2)$$

Визначення невідомого радіус-вектора через відомі, називають **векторним додаванням**. Довільна величина, яка задається напрямком і модулем, і підпорядковується правилу векторного додавання, називається – **вектором**. Такі величини нам відомі, наприклад – швидкість, сила. Для визначення кожної з них слід вказати напрям та модуль, і вони підпорядковуються правилу векторного додавання.

Поряд з радіус-вектором використовують інший спосіб визначення положення точки в просторі – метод координат.



Цей метод базується на визначенні координат точки, в декартовій системі прямокутних координат.

□ Положення точки  $A$  співпадає з кінцем радіус-вектора  $S$  (рис.1.2.), що *Рисунок 1.2*  
з'єднує початок координат  $O$  з точкою  $A$ . Тоді координати вектора  $S$  - це проєкції цього вектора на осі  $x, y, z$ .

### 1.3 Способи опису руху матеріальної точки

Отже, положення рухомої точки можна охарактеризувати або відрізком  $S$ , який є деякою функцією від часу  $t$ :  $S=f(t)$ , або її координатами  $x, y, z$ , які є також функціями від часу:

$$x=f(t); y=f(t); z=f(t). \quad (1.3)$$

Ці рівняння називають *кінематичними рівняннями руху точки*. Кількісною мірою зміни положення тіла є *вектор переміщення*.

**Вектором переміщення** називають вектор, що з'єднує початкову і кінцеву точки руху.

Знаючи вектор переміщення тіла за деякий проміжок часу, ми можемо вказати де тіло буде знаходитись у кінцевий момент цього часу, але про спосіб, яким тіло туди потрапило, ми сказати не зможемо нічого. Тому, нагадаємо три основні поняття: *траєкторія, шлях, переміщення*.

**Траєкторія** – це множина всіх тих точок, через які послідовно проходить тіло за час руху в даній системі відліку.

За формою траєкторії рух поділяють на *прямолінійний і криволінійний*.

**Шлях** – це довжина траєкторії, вздовж якої відбувався рух тіла. Шлях є функцією часу:  $S=f(t)$ .

**Переміщення** – це найкоротша віддаль між початковим і кінцевим положеннями тіла, яке воно здійснило за деякий проміжок часу.

Рівність, що виражає залежність довжини шляху від часу, називають **законом руху тіла по заданій траєкторії**, який дає уявлення про рух в цілому.

За **законом руху**, усі **рухи** поділяють на **рівномірні** і **нерівномірні**.

**Рівномірним** називається **такий рух**, під час якого за однакові проміжки часу, тіло проходить однаковий шлях.

**Траєкторія і закон руху** – це **незалежні характеристики**, і тому під час означення довільного руху, слід вказувати на кожну з цих характеристик. Наприклад, прямолінійний нерівномірний рух; криволінійний рівномірний рух; рівномірний рух по колу і т.д.

## 1.4 Швидкість

Рухи очевидним чином відрізняються один від одного тим, що однакові проміжки шляху можуть бути пройдені тілом за різний час і за однаковий час тіло може проходити різні віддалі (відрізки шляху). Ці розбіжності в рухах ми можемо охарактеризувати, володіючи таким поняттям, як **швидкість**.

**Швидкість рівномірного руху** – це **кількісна міра стану руху тіла, яка дорівнює відношенню вектора переміщення, до проміжку часу, за який це переміщення відбулося**.

Розглядаючи рух (рис.3.1) в одній площині довільний вектор швидкості може бути представленим у вигляді суми

двох векторів швидкості:  $v_x$ ;  $v_y$ , модуль і напрям яких може бути визначеним за співвідношеннями:

$$v_x = v \cos \varphi; \quad v_y = v \sin \varphi;$$

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2;$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v_y}{v_x}.$$

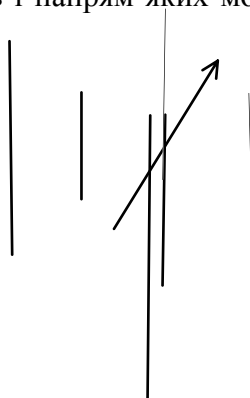


Рисунок 1.3

Оскільки, швидкість характеризується вектором переміщення, то маємо право твердити, що швидкість – це є векторна величина, а напрям цього вектора визначається за траєкторією руху тіла (по дотичній). Модуль цього вектора визначають за співвідношенням:

$$v = \pm \frac{\Delta S}{\Delta t}, \quad (1.4)$$

де знак вказує, в яку сторону по дотичній до траєкторії спрямований вектор швидкості.

Для довільного руху тіла (точки) є справедливим **принцип незалежності рухів**, який твердить: *в даній системі відліку рух тіла відносно кожної з координатних осей є незалежним, проекції не впливають одна на одну, і додаються як незалежні величини.*

Під час нерівномірного руху за однакові проміжки часу тіло проходить різний шлях. Тому, введемо поняття середньої швидкості руху. *Середня швидкість нерівномірного руху за проміжок часу  $\Delta t$  дорівнює швидкості такого рівномірного руху, під час якого тіло пройшло б той самий шлях за той самий час, якщо б воно рухалось рівномірно.* Середня швидкість на деякому шляху визначається:

$$\bar{v} = \frac{|\Delta r|}{\Delta t}, \quad (1.5)$$

– це швидкість такого рівномірного і прямолінійного руху, при якому точка перейшла з положення  $M_1$  в положення  $M_2$  (рис.1.4) за той самий проміжок часу, за який відбулося

переміщення по дузі. Вектор  $\bar{v}$  як і вектор  $\Delta r$  спрямований по січній  $M_1M_2$ . Переходячи до границі для нескінченно малого проміжку часу, ми вводимо поняття **МИТТЄВОЇ ШВИДКОСТІ В ТОЧЦІ  $M_2$** :

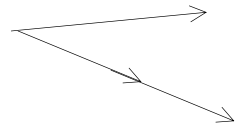


Рисунок 1.4

$$\vec{v} = \lim_{M_2 \rightarrow M_1} \vec{v}_{сеп} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad (1.6)$$

це векторна величина, що дорівнює першій похідній радіус-вектора рухомої точки по часу, а, оскільки, для нескінченно малого проміжку часу  $|\Delta \vec{r}| = \Delta S$ , то справедливим буде запис:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}, \quad (1.7)$$

тобто, величина миттєвої швидкості чисельно дорівнює границі відношення довжини шляху до проміжку часу (або першій похідній від шляху по часу), як і у випадку прямолінійного руху.

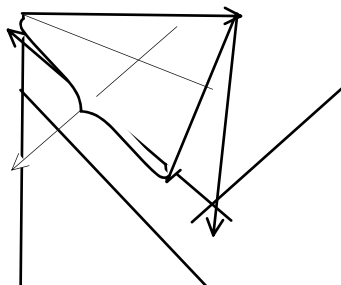
## 1.5 Прискорення

Вектор швидкості може змінюватись як за модулем, так і за напрямком, тому існує поняття повного прискорення руху тіла. Фізична величина, яка є кількісною мірою всіх змін вектора швидкості, називається **повним прискоренням руху тіла**.

Та частина повного прискорення, від якої залежить зміна модуля вектора швидкості, називається **тангенціальним прискоренням**.

Та частина повного прискорення, від якої залежить зміна напрямку вектора швидкості, називається **нормальним прискоренням**.

Рух, під час якого модуль швидкості за однакові



проміжки часу змінюється на однакову величину, називається **рівнозмінним рухом**.

Розглянемо траєкторію між точками  $M_1$  і  $M_2$ .

Швидкості в цих точках  $v_1$  і  $v_2$  спрямовані по дотичних до траєкторії і від-різняються одна від одної за ве-личиною і напрямком. Рисунок 1.5

Перенесе-мо вектор  $v_2$  паралельно самому собі в точку  $M_1$ , з'єднавши кінці векторів  $v_1$  і  $v_2$  одержимо вектор  $\Delta v$ , який є їхньою різницею:

$$\Delta v = v_2 - v_1, \quad (1.8)$$

тобто, це геометричний приріст вектора швидкості  $v$  за час  $\Delta t$ . Відношення

$$\frac{\Delta |v|}{\Delta t} = a_{\text{сеп}} \quad (1.9)$$

є вектором **середнього прискорення** за час  $\Delta t$ , а границя цього відношення називається вектором **миттєвого прискорення**:

$$a = \lim_{M_2 \rightarrow M_1} a_{\text{сеп}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \quad (1.10)$$

під час довільного руху точки  $M$ .

На відрітку  $M_1B$ , що відображає перенесений в точку  $M_1$  вектор  $v_2$ , відкладемо відрізок  $M_1C$ , який чисельно дорівнює довжині вектора  $v_1$  і з'єднаємо прямою точку  $A$  (кінець вектора  $v_1$ ) з точкою  $C$ . З рисунка (рис.1.5) видно, що вектор  $\Delta v$  може бути представленим як геометрична сума двох векторів:

$$\Delta \vec{v} = \Delta \vec{v}_\tau + \Delta \vec{v}_n \quad (1.11)$$

Вектор  $\Delta \vec{v}_\tau$  чисельно характеризує кількісну зміну величини швидкості за час  $\Delta t$ :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta |\vec{v}_\tau|}{\Delta t} = a_\tau \quad (1.12)$$

Ця зміна носить назву **тангенціального прискорення**.

Тангенціальне прискорення за напрямком співпадає з вектором швидкості і напрямлене по дотичній до траєкторії, а модуль і знак визначаються співвідношенням:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} \quad (1.13)$$

Для прямолінійного руху тангенціальне прискорення дорівнює повному прискоренню тіла (точки), тобто:  
 $a_\tau = a = dv/dt$ , оскільки зміни напрямку швидкості під час прямолінійного руху не відбувається.

Для визначення величини та напрямку вектора  $\vec{a}_n$  скористаємось наступними міркуваннями. З рис. 1.5 бачимо, що дуга  $M_1M_2$  яка дорівнює шляху  $\Delta S$  є відрізком кола з центром в точці  $O$  і радіусом

$$R \approx OM_1 \approx OM_2$$

Кут між лініями  $OM_1$  та  $OM_2$  дорівнює  $\Delta \alpha$  і з радіусом кола цей кут зв'язаний співвідношенням:

$$R \approx \frac{\Delta S}{\Delta \alpha}$$

У випадку довільної просторової кривої величина  $R$  і положення точки  $O$  визначаються із граничного співвідношення

$$R = \lim_{\Delta \alpha \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta \alpha},$$

де величину  $R$  називають *радіусом кривизни* траєкторії, а обернену до неї величину

$$K = \frac{1}{R} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta S}$$

називають *кривизною траєкторії* в даній точці. Для кола величини  $R$  і  $K$  є сталими в усіх точках. У випадку прямої лінії  $R$  і  $K$  є рівними нулю.

На рис. 1.5 трикутники  $OM_1M_2$  та  $M_1AC$  є подібними, тому з пропорційності сторін випливає є рівність

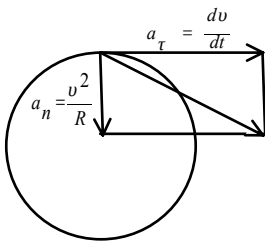
$$|\Delta v_n| = \frac{v_1}{R} |\Delta r|,$$

звідки величина вектора нормального прискорення буде дорівнювати:

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta v_n|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_1}{R} \cdot \frac{|\Delta r|}{\Delta t} = \frac{v_1^2}{R} = \frac{v^2}{R},$$

де в кінцевому варіанті ми опускаємо індекс, оскільки початкову точку можна вибрати довільно.

## 1.6 Криволінійний рух точки. Прискорення при криволінійному русі



Про нормальне прискорення можемо говорити лише стосовно криволінійного руху. Найпростішим випадком криволінійного руху є рух по колу.

Модуль вектора нормального прискорення в деякій точці є прямо пропорційним квадрату швидкості і обернено пропорційним радіусу заокруглення траєкторії в тій же точці, і напрямлений перпендикулярно до швидкості вектора центра кривизни траєкторії (рис.1.6).

Повне прискорення  $a$ , під час криволінійного руху, дорівнює векторній сумі нормального і тангенціального прискорень:

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau,$$

а напрям цього вектора утворює деякий кут  $\alpha$  з радіус-вектором  $R$ , або деякий кут  $\beta$  з дотичною:

Рисунок 1.6

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}, \quad (1.14.a)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_\tau}{a_n}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{a_n}{a_\tau}. \quad (1.14.б)$$

Закони рівнозмінного руху мають вигляд:

$$v = v_0 \pm at; \quad S = v_0 t \pm \frac{at^2}{2}. \quad (1.15)$$

Згідно з принципом незалежності рухів:

$$\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y; \quad S = S_x + S_y$$

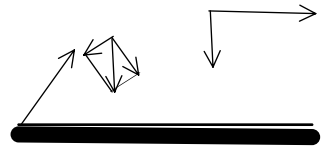
швидкість в довільний момент часу визначається рівнянням:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2},$$

а шлях:

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2}.$$

Для руху тіла, кинутого під кутом  $\alpha$  до горизонту з початковою швидкістю  $v_0$  (рис. справа), оскільки повне прискорення залишається сталим, то у верхній точці траєкторії:



$$a = \text{const} = g.$$

Як видно з рисунка, складові повного прискорення у кожній точці траєкторії є різними. Так, наприклад, у верхній точці траєкторії вертикальна складова швидкості рівна нулю,

тому  $v = v_0 \cos \alpha$ , тобто існує лише горизонтальна складова швидкості, яка є перпендикулярною до вектора повного прискорення. З цього випливає, що в цій точці повне прискорення дорівнює нормальній складовій прискорення  $a_n = g$ , звідки випливає, що

$$g = \frac{(v_0 \cos \alpha)^2}{R}.$$

З цього співвідношення легко визначити радіус кривизни у найвищій точці траєкторії.

## **1.7 Кінематика обертового руху тіла. Кутова швидкість і кутове прискорення**

Всі реально існуючі тіла більш або менш деформуються під впливом прикладених до них сил; окремі їх частини можуть зміщуватися одні відносно одних. Для того щоб спростити міркування, введемо поняття про *абсолютно тверде тіло*. Під ним розуміють таке *уявне тіло, яке зовсім не деформується під впливом прикладених до нього сил*. В абсолютно твердому тілі є неможливим переміщення окремих його частин одна відносно одної.

Рух абсолютно твердого тіла зводиться до поступального руху і обертового.

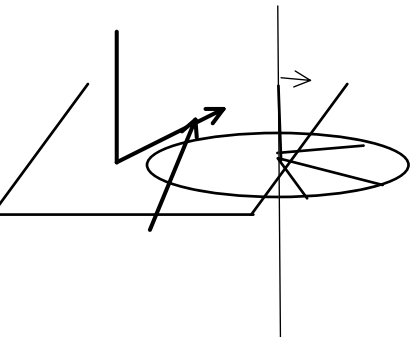
**Поступальний рух твердого тіла** – це є такий рух, при якому довільна пряма лінія, проведена в тілі, і не-змінно зв'язана з ним, залишається паралельною сама собі. Під час поступального руху тіла, всі його точки володіють однаковими швидкостями і прискореннями.

**Обертовий рух** – це такий рух, при якому всі точки твердого тіла описують кола, центри яких лежать на одній прямій, яка є віссю обертання.

У загальному випадку тверде тіло може виконувати одночасно поступальний та обертовий рухи, і сама вісь може міняти своє положення в просторі, тому для кожного моменту часу кажуть про обертання тіла навколо миттєвої осі.

Введемо поняття **кутової швидкості**. Визначимо положення деякої точки  $B$ , тіла що обертається за кутом  $\varphi$ , який утворений радіусом  $OB$  з деяким початковим радіусом  $OA$ . Під час обертання тіла кут  $\varphi$  неперервно змінюється. Отже, **кутовою швидкістю тіла, що рівномірно обертається**, називається фізична величина  $\omega$ , яка пропорційна куту  $\Delta\varphi$ , на який повернеться радіус-вектор, і обернено пропорційна до проміжку часу  $\Delta t$ , за який цей поворот відбувся:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \quad (1.16)$$



Вектор  $\vec{\omega}$  лежить на  
обертання, його напрям визна-  
чається за правилом свердлика і  
сам по собі є аксіальним век-  
тором, на відміну від звичайно-го вектора  
він немає конкретної точки  
прикладання.

**Кутова швидкість**  
характеризує швидкість зміни кута повороту, ви-  
мірюється в радіанах за секунд-ду, а в техніці – в обертах за  
хвилину:

Рисунок 1.7

$$1 \frac{\text{об}}{\text{хв}} = \frac{2\pi \text{ рад}}{60 \text{ с}} = \frac{\pi}{30} \text{ рад/с}$$

Значення кутової швидкості даного обертового руху  
твердого тіла не залежить від вибору точки на ньому, оскільки  
кут, на який повертається за даний час радіус  $OB$ , не залежить  
від положення точки  $B$ .

Зв'язок між кутовою і лінійною швидкостями маємо зі  
співвідношення:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R \Delta \varphi}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = R \omega, \quad (1.17)$$

де  $R$  – віддаль точки  $B$  до осі обертання.

З рівняння (1.17) випливає, що вектор лінійної швид-  
кості дорівнює векторному добутку вектора кутової швид-  
кості на радіус-вектор:

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{R}]$$

У векторному аналізі вво-  
диться поняття про, так  
званий, **векторний добуток**. Під векторним добутком  
векторів  $\vec{\omega}$  і  $\vec{R}$  розуміють такий вектор  $\vec{v}$ , чис-  
лове значення якого дорівнює

Рисунок 1.8

$$v = R \omega \sin \alpha, \quad (1.18)$$

де  $\alpha$  – кут між векторами  $\omega$  і  $R$ .

Вектор  $U$  спрямований перпендикулярно до площини, в якій лежать ці два вектори а напрям його таким, щоб з його кінця перехід від вектора  $\omega$  до вектора  $R$  відбувався проти годинникової стрілки, як показано на рисунку 1.8.

Зображення кутової швидкості за допомогою вектора пояснюється тим, що у випадку, коли тіло бере участь у двох обертових рухах, то його результуюче обертання характеризується вектором, напрям якого визначається додаванням векторів кутових швидкостей, що додаються за правилом паралелограма, а числове значення обчислюється, з використанням рівності (1.18.).

Якщо за час  $t$  тіло здійснює  $N$  обертів, то один повний оберт тіло здійснить за час:

$$T = \frac{t}{N}, \quad (1.19.1)$$

що називають *періодом обертання*. Але разом з тим, тіло, яке рівномірно обертається з деякою кутовою швидкістю за час, що рівний одному періоду повернеться на кут  $\varphi = 2\pi$ , тоді

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (1.19.2)$$

Число обертів за одиницю часу називають *частотою обертання*:

$$\nu = \frac{N}{t} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}, \quad (1.20)$$

оскільки, один оберт відбувається за час  $T$ , то за одиницю часу відбувається  $n$  обертів, тоді отримуємо ще одне співвідношення для кутової швидкості тіла при рівномірному обертанні:

$$\omega = 2\pi\nu. \quad (1.21)$$

Під час нерівномірного руху величина  $\omega$  може змінюватися з часом і за деякий проміжок часу  $\Delta t$  отримає приріст  $\Delta\omega$ , тому, для характеристики цієї зміни, введемо поняття **кутового прискорення**  $\varepsilon$ , яке представляє собою, у випадку рівнозмінного обертання, *фізичну величину, прямо пропорційну зміні кутової швидкості  $\Delta\omega$  і обернено пропорційну тому проміжку часу  $\Delta t$ , за який ця зміна відбулася*. У загальному випадку нерівномірного обертання **миттєве кутове прискорення** в деякий момент часу дорівнює:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \right) = \frac{d\omega}{dt}, \quad (1.22)$$

і вимірюється в  $\text{рад/с}^2$ .

**Тангенціальне прискорення** точок тіла визначається через кутову швидкість і кутове прискорення:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega R) = R \frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon, \quad (1.23)$$

а **нормальне прискорення**:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R. \quad (1.24)$$

При рівнозмінному обертанні, тобто коли  $\varepsilon = \text{const}$  маємо:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow d\omega = \varepsilon dt, \quad \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \varepsilon dt, \quad (1.25)$$

звідки

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t, \quad (1.26)$$

де  $\omega_0$  – кутова швидкість у початковий момент часу.

Проінтегрувавши вираз

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt},$$

з врахуванням (1.26) маємо:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t (\omega_0 + \varepsilon t) dt \Rightarrow \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} \quad (1.27)$$

Як бачимо з наведених вище рівнянь (1.26) та (1.27), що описують обертний рух точки, вони цілком співпадають по формі запису із законами поступального руху.

### ***Контрольні запитання***

1. Що називають механічним рухом?
2. Що розуміють під матеріальною точкою?
3. Чому всі рухи є відносними?
4. Що називають системою відліку?
5. Яку величину називають радіус-вектором?
6. Що таке вектор?
7. Що являє собою вектор переміщення?
8. Що таке траєкторія?
9. Що таке шлях?
10. Що таке переміщення?
11. Що називають законом руху тіла по заданій траєкторії?
12. На які поділяються рухи за законом руху?
13. Що представляє собою «швидкість рівномірного руху» і якими рівняннями вона описується?
14. У чому полягає принцип незалежності рухів?
15. В чому полягає поняття середньої швидкості нерівномірного руху?
16. Що таке миттєва швидкість в даній точці і чому вона дорівнює?

17. Що називають повним прискоренням?
18. Що називають тангенціальним прискоренням?
19. Що називають нормальним прискоренням?
20. Який рух називають рівнозмінним?
21. Що називають миттєвим прискоренням?
22. Що розуміють під абсолютно твердим тілом?
23. Що називають поступальним рухом твердого тіла?
24. Який рух називають обертовим?
25. Що називають кутовою швидкістю тіла, що рівномірно обертається?
26. Що називають кутовим прискоренням?
27. Чому дорівнює миттєве кутове прискорення?
28. Як виводяться рівняння для рівнозмінного обертотого руху?
29. Якими трьома ознаками характеризується вектор кутової швидкості?
30. Що розуміють під векторним добутком?

## § 2. Динаміка матеріальної точки

### *2.1 Поступальний рух. Перший закон Ньютона*

Як показує досвід, ніякий рух сам по собі виникнути не може. Завжди поява і зміна руху пов'язані з впливом на тіло оточуючих тіл. Тому, для вияснення причин, що спричинили рух, слід вміти правильно охарактеризувати ці впливи.

Насамперед, слід вияснити питання з вибором системи відліку. З кінематики нам вже відомо, що в одній системі рух може бути простим, в іншій – складним. Наприклад: якщо розглянути рух велосипедиста відносно нерухомого спостерігача, що стоїть на землі, то рух буде простим, якщо ж розглянути відносно спостерігача, що обертається на каруселі, то рух буде надто складним, наприклад, дерево, що росте неподалік, буде нам здаватись таким, що рухається навколо нас, то що вже казати про велосипедиста... Отже, невдалий вибір системи відліку, ускладнює можливість вияснення причин, що впливають на характер руху.

Рух абсолютно всіх тіл відбувається у полі тяжіння Землі. Уникнути цього впливу ми не можемо, але, в наслідок принципу незалежності рухів, ми можемо обійти цю проблему. Вивчаючи властивості руху тіла по горизонталі, ми маємо можливість не враховувати при цьому притягання Землі.

Із повсякденного життя нам відомо, що якщо тілу надати деякої початкової горизонтальної швидкості, то воно може продовжувати свій рух на протязі деякого проміжку часу. Зокрема, водій автомобіля або машиніст поїзда, використовують цю властивість для руху своїх транспортних засобів на горизонтальних ділянках шляху при вимкненому двигуні «по накату». Вчасно «погасити» швидкість такого двигуна можна за допомогою справних гальмівних пристроїв. Для зупинки сучасних літаків під час посадки, використовують, окрім звичайних гальм на колесах, спеціальні гальмівні парашути.

*Довільне тіло, що отримало яку-небудь горизонтальну швидкість відносно Землі, зберігає її, і для його зупинки кожен раз ми повинні затратити деяке зусилля.*

Вже ці всі факти дозволяють нам припустити, що будь-яке тіло, вільне від зовнішнього впливу, могло б зберігати відносно Землі стан спокою, або рівномірного прямолінійного руху.

Справедливість такого припущення ми можемо підтвердити кількома простими дослідами. Наприклад: з однієї і тієї ж похилої дерев'яної поверхні будемо скочувати одну і ту ж кульку на горизонтальну поверхню. В першому випадку горизонтальна поверхня буде висипана піском; в другому – вистелена шерстяною тканиною; в третьому – це поліроване гладке скло. З усіх випадків найдовшим буде шлях, що його пройде кулька по полірованому склі, а найкоротшим – по піску. Цей дослід показує, що *під час неперервного зменшення впливу оточуючих тіл, горизонтальний рух любого тіла відносно Землі необмежено наближається до рівномірного прямолінійного руху.*

Приблизно така послідовність дослідів, але більш скрупульозна, була проведена *Галілео Галілеєм*. Він першим сформулював свій знаменитий **закон інерції**. Закон отримав таку назву тому, що сам рух довільного тіла без впливу інших тіл називають *рухом по інерції* (від латинського *inertia* – бездіяльність): *тіла, вільні від зовнішнього впливу, зберігають стан спокою або рівномірного прямолінійного руху відносно Землі.*

Пізніше великий англійський вчений Ісак Ньютон включив цей закон в число загальних законів руху, тому цей закон частіше називають **першим законом Ньютона**.

Усі системи відліку, для яких виконується перший закон Ньютона, отримали назву **інерціальних систем відліку**. Землю ми можемо вважати інерціальною системою лише для вказаних обмежених інтервалів часу і віддалей. Якщо мова йде про визначення характеру руху повітряних мас в циклонах чи антициклонах, якщо мова йде про особливості океанічних течій, якщо мова йде про розрахунки для запуску балістичних ракет, то тут застосовувати припущення, що Земля

є інерціальною системою відліку неможна. Ми знаємо, що наша Земля обертається навколо власної осі і навколо Сонця – це є геліоцентрична система, яка описується іншими законами (Кеплера).

Отже, під час вивчення руху тіл, вважатимемо, що рух відбувається відносно *інерціальної системи відліку*, як-що застережень про вибір іншої системи відліку не було.

## 2.2 Суть взаємодії в механіці

Якщо нам треба (на Землі) вивести зі стану спокою якесь тіло, то на нього треба подіяти іншим тілом: тепловоз потягне вагон; в станку одні зубчаті колеса заставляють обертатись інші; футбольний м'яч виведеться зі стану спокою ударом ноги футболіста; сильний магніт викривить траєкторію прямолінійного руху сталльної кульки, що котиться з великою швидкістю і т.д. Отже, *дії навколишніх тіл можуть змінити модуль і напрямок швидкості даного тіла.*

Виникає запитання: за яким законом змінюється швидкість від постійної зовнішньої дії навколишніх тіл? Відповідь проста – *дія навколишніх тіл призводить до виникнення прискорення і цим змінює стан руху даного тіла (тобто модуль і напрям його швидкості).*

Ми слідували за особливостями руху тільки одного тіла, і вияснили, що може впливати на його рух – це дія інших тіл. Але ж що відбувається з цими іншими тілами, коли вони діють на наше пробне тіло? Пробуючи зсунути з місця важкий предмет, людина відчуває на собі його зворотну дію. Якщо предмет достатньо важкий, а людина стоїть на слизькій поверхні, то замість предмету почне рухатись сама людина, за рахунок зворотної дії тіла.

Отже всі дії тіл одне на одне є *двосторонніми*, і носять характер *взаємодії*: *всі дії, які можуть викликати рух, є двосторонніми, носять характер взаємодії тіл; під час якої дії одного тіла на інше виникає одночасна, рівна за модулем і протилежна за напрямком відповідна дія другого тіла на перше.*

Коротша форма цього висновку виражає фізичний зміст третього закону Ньютона: усякій дії є рівна за модулем і протилежна за напрямом протидія.

### **2.3 Сила.**

#### **Третій закон Ньютона**

Яка ж величина характеризує взаємодію між тілами?

*Фізична величина, яка кількісно характеризує взаємодію між тілами, під час якої тіла набувають прискорення, або деформуються, називається **си-лою**.*

Сила характеризується модулем, напрямком і точкою прикладання. Це векторна величина, оскільки вона підчиняється правилу векторного додавання.

Тепер сформулюємо **третій закон Ньютона**: *сили взаємодії двох матеріальних точок (тіл) в інерціальної системі відліку рівні за модулем і протилежні за напрямком, діють вздовж прямої, на якій лежать ці матеріальні точки*:

$$\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki} \quad (2.1)$$

Ці сили не можуть компенсувати одна одну, оскільки прикладені до різних точок.

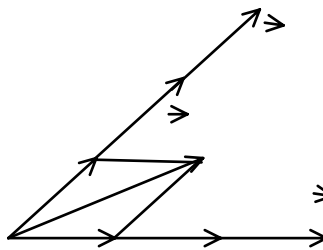
### **2.4 Маса.**

#### **Другий закон Ньютона**

Перш ніж розкрити суть другого закону Ньютона, зупинимось на понятті «маса».

Ми вже згадували, що дія навколишніх сил на тіло, призводить до виникнення прискорення. Величина прискорення залежить від властивостей рухомого тіла, які називають інертними властивостями. Тенісний м'яч має такі ж розміри як і більярдний, але замінити їх один одним – є абсурдом, бо відбити більярдний м'яч в польоті буде значно важче. Чому? Через його значно більшу масу.

**Маса** – це міра інертності тіла при пальному русі. Це скалярна величина.



⇒ посту-

Вона є адитивною, тобто, маса тіла дорівнює сумі мас всіх частинок цього тіла, відповідно, маса довільної механічної системи дорівнює сумі мас всіх матеріальних точок, на які уявно можна розбити цю систему.

Ітак, ми дали означення сили і маси, як величин, що характеризують взаємодію тіл і їх інертні властивості. Ми вияснили, що ця взаємодія призводить до виникнення прискорення. Тепер встановимо взаємозв'язок між цими трьома характеристиками тіл. Цей зв'язок знаходиться у фізичному змісті другого закону Ньютона, який твердить: вектор сили, що діє на матеріальну точку, дорівнює добутку маси точки на вектор прискорення, яке виникає під час дії цієї сили:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (2.2)$$

Другий закон Ньютона справедливий лише в інерціальних системах відліку!!!

## 2.5 Сили в механіці

Під час дії на тіло або матеріальну точку кількох сил виконується **принцип незалежності дії сил**: якщо на матеріальну точку діють одночасно декілька сил, то кожна з цих сил надає матеріальній точці прискорення, що визначається за II законом Ньютона так, ніби інших сил не було.

$$\vec{F} = m\vec{a} = \sum_{i=1}^N m\vec{a}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \quad (2.3)$$

Результуюче прискорення визначається векторною сумою усіх прискорень, а рівнодійна сила – наведеною формулою (2.3). Силу  $F$  називають **рівнодійною** або **головним вектором зовнішніх сил**.

Рисунок 2.1

Якщо дві сили (рис.2.1), прикладені до однієї точки, і напрямлені під деяким кутом одна до одної, то рівнодійна цих сил визначається за правилом паралелограма, а її модуль за формулою:

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha} \quad (2.4)$$

Усі тверді тіла, рідини і гази володіють механічними властивостями. Не знаючи механічних властивостей тіл, рідин, газів, ми не зможемо розв'язувати основні завдання механіки, а саме: за відомими силами розрахувати механічний рух.

Для розуміння природи тих чи інших сил, необхідно вивчити механічні властивості тіл, розглянути рух, який може відбуватися всередині тіл.

На основі спостережень за здатністю тіл зберігати свою форму і об'єм в умовах Землі, усі тіла поділили на три групи: тверді, рідкі і газоподібні.

**Твердими тілами** називають такі тіла, які у вільно-му стані здатні зберігати форму і об'єм незмінними, тобто такими, яких їм надали.

Зауважимо також, що і окремі частини цих тіл у вільному стані здатні зберігати незмінним своє розміщення одні відносно одних.

**Рідинами** називають такі тіла, які в земних умовах здатні зберігати об'єм, але не здатні зберігати форму. Саме в земних умовах, оскільки у космосі в космічному кораблі рідина завжди прийматиме форму кулі (через те що вона перебуває у стані невагомості). До характеристики рідин додамо ще й те, що всі її частини здатні вільно рухатись одна відносно одної.

**Газоподібними тілами** або **газами** називають такі тіла, які в земних умовах не здатні зберігати ні об'єм, ні форму.

Такий поділ, хоча і є досить грубим, але його слід враховувати під час визначення механічних властивостей речовин і розв'язку задач, пов'язаних з розрахунком руху тіл. Саме тому такий поділ призвів до розділення механіки на декілька самостійних напрямків: теорію пружності, гідромеханіку аеро- та газодинаміку.

## 2.6 Сили тертя

Механічний рух завжди супроводжується втратами енергії. Це зумовлюється наявністю в природі сил тертя і опору. **Сили тертя** – це сили, що виникають у процесі руху одних тіл, або їхніх частин по поверхні інших. Вони напрямлені по дотичних до поверхонь тіл і перешкоджають відносному їх переміщенню.

Тертя, що виникає під час відносного переміщення твердих тіл, які дотикаються, називається **зовнішнім** або **сухим**. Тертя, що виникає під час відносного руху між твердим тілом і рідиною або газом, а також між шарами цих середовищ, називають **внутрішнім**, або **в'язким**.

Саме по собі зовнішнє тертя поділяють на **статичне** тертя (так зване спокою) і **кінематичне**, тобто тертя руху (яке включає в себе тертя кочення і ковзання).

**Тертя спокою** – це сили, які виникають під час намагання викликати відносний рух тіл, що дотикаються. Величина сил тертя спокою може приймати значення від нуля до деякого максимального значення, після якого починає діяти сила ковзання (кочення). **Сила тертя ковзання завжди є трошки меншою за силу тертя спокою:**

$$0 \leq F_{\text{тр}} \leq F_{\text{тр.сн. max}} \quad (2.5)$$

Максимальна сила тертя спокою визначається:

1. Тим, що сила тертя спокою пропорційна силі нормального тиску, тобто силі, перпендикулярній до поверхні дотику тіл

$$F_{\text{тр.сп.мах.}} \sim N$$

безрозмірний коефіцієнт пропорційності  $\mu$ , який називають *коефіцієнтом тертя спокою* дає можливість записати цю пропорційність у вигляді рівності, яку називають *законом Кулона для сил тертя*:

$$F_{\text{тр}} = \mu N \quad (2.6)$$

де  $\mu$  – динамічний коефіцієнт тертя;

$N$  – сила нормального тиску;

2. При одній і тій же силі нормального тиску максимальна сила тертя спокою (а отже, і коефіцієнт  $\mu$ ) залежить від фізичної природи тіл, що дотикаються та обробки їх поверхонь.

3. При однаковій силі нормального тиску максимальна сила тертя спокою (а отже, і  $\mu$ ) не залежить від площі дотику цих поверхонь.

При збільшенні якості (чистоти) оброблених поверхонь, що дотикаються, сили тертя спокою і ковзання не зменшуються, а навпаки, зростають. Це пояснюється тим, що під час підвищення чистоти поверхні самі по собі нерівності на цих поверхнях стають за розмірами меншими, але кількість їх зростає. В ідеальному випадку дзеркальних поверхонь кожен атом поверхні представляє собою нерівність. Число атомів на поверхні є величезним, тому сила тертя – велика. При дуже доброму шліфуванні поверхонь, тіла, що дотикаються, прилипають одне до одного. Прилипання може бути таким же сильним, як зварювання. Цей спосіб використовується для холодного зварювання металів у вакуумі.

Отже, у грубо обробленій поверхні основну роль у виникненні сил тертя відіграє зчеплення нерівностей, а при високій чистоті поверхні – молекулярне зчеплення.

Максимальна сила тертя спокою залежить ще від того, скільки часу тіла знаходяться у контакті одне з одним. При значній силі нормального тиску і довготривалому контакті відбувається пластична деформація (стиск) виступів на поверхні тіл. Через «сплюснення» виступів збільшується площа

контакту і зростає роль молекулярного зчеплення, а це сприяє злипанню тіл і призводить до *підвищення максимальної сили тертя спокою*.

Тертя спокою має важливе значення в практичній діяльності людини, оскільки, саме завдяки цій силі, людина може ходити, сила тертя спокою є рушійною і гальмівною силою для всіх наземних колісних видів транспорту, саме завдяки їй передається рух від одної частини машини до іншої, сили тертя утримують на місці туго загвинчену гайку, згвинчене різьбове з'єднання бурильних труб і т.д.

Негативний вплив сили тертя спокою спостерігається у вимірювальних приладах, які містять частини, що труться, тоді показник зупиняється не точно на дійсному показі, а поблизу нього, ось чому записуючи «дійсний результат», слід враховувати похибку приладу.

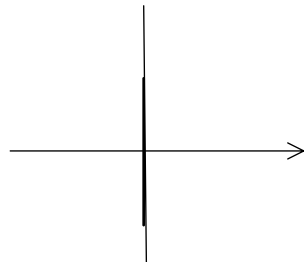
*Тертя ковзання виникає тоді, коли вимушуюча сила набуває значення, яке рівне максимальній силі тертя спокою.* Сили тертя ковзання діють вздовж поверхні контакту двох тіл і прикладені до обидвох поверхонь, що труться у відповідності до третього закону Ньютона. Сила тертя ковзання, що діє на одне з двох взаємодіючих тіл, має напрям протилежний до швидкості цього тіла по відношенні до другого. Мо-дуль сили тертя ковзання залежить від матеріалу тіл та стану поверхонь, а також від відносної швидкості руху тіл. Зі збільшенням швидкості сила тертя ковзання спочатку зменшується, а потім знову починає зростати.

Зменшення сили

невеликих швидкостях пояснюється тим, що під час руху тіла, мікроскопічні

*Рисунок 2.2*

ні виступи, які є на його поверхні, не встигають «западати» в заглиблення поверхні другого тіла як це є під час спокою. Оскільки деформуються лише верхівки виступів, то сила пружного опору зменшується. А збільшення сили тертя ковзання при великих швидкостях, пов'язане з руйнуванням виступів і їх роздробленням. Нагрівання поверхонь, що труться,



пояснюється тим, що під час «зриву» зачеплених виступів, вони ще деякий час коливаються, розсіюючи (перетворюючи) тим самим в теплоту енергію пружної деформації.

Сили тертя ковзання залежать від сили нормального тиску на поверхню ковзання. При однаковій швидкості сила тертя ковзання більша у тому випадку, де більшою є сила нормального тиску:

$$F_{тр.ковз.} = \mu_{ковз.} N$$

коефіцієнт –  $\mu_{ковз.}$  – залежить від матеріалу і стану поверхні тіла, а також від відносної швидкості руху.

**Кочення одного тіла по поверхні іншого – являє собою обертання його навколо миттєвої вісі, яка завжди є паралельною до поверхні того тіла, по якому відбувається кочення.**

**Кочення відрізняється від обертання** як такого тим, що під час кочення «миттєва» вісь, навколо якої крутиться тіло може змінювати свою орієнтацію відносно двох точок на тілі, які є діаметрально протилежними, а під час обертання тіла цього не відбувається. Наприклад: прикладом кочення є – рух більярдної або боулінгової кулі; прикладом обертання є – кручений м'яч під час гри в теніс, обертовий рух дитячої дзиги на підлозі, обертання каруселей навколо фіксованої вісі і т. д, а в техніці – це обертовий рух шарнірів, підшипників, всеможливих валів, обертовий рух бурильних колон, шарошок долота та багато ін.

Закон Кулона для **кочення** –

$$F_k = \mu_k \frac{N}{R}, \quad (2.7)$$

де  $R$  – радіус тіла що котиться;

$\mu_k$  – **коефіцієнт тертя кочення**, який має розмірність довжини.

Цей коефіцієнт не залежить від швидкості кочення і радіусу тіла, а залежить від матеріалу, з якого виготовлені тіла, що

взаємодіють, а також від стану чистоти поверхні:  $\mu_k$  зменшується зі збільшення твердості матеріалів і чистоти обробки.

Сила тертя ковчання для тіл з тих самих матеріалів є меншою ніж сила тертя ковзання, тому в техніці підшипники ковчання мають більше застосування ніж підшипники ковзання.

*Зменшити тертя*, як небажане явище, можна за рахунок заміни сухого тертя рідинним за допомогою мастил. При цьому мастила заповнюють впадини та тріщини тертьових поверхонь і утворюють між ними шар рідини, що призводить до зменшення сил тертя у  $8\div 10$  разів.

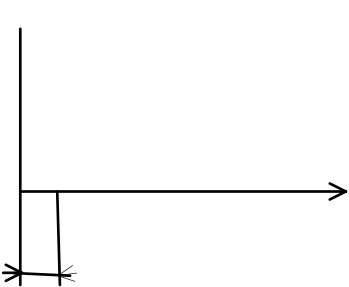
Сили опору, що виникають під час руху твердого тіла в рідині або газі, називають силами *рідинного* або *в'язкого тертя* (але про це в розділі «Явища переносу»).

## 2.7 Сили пружності

Усі реальні тіла під дією прикладених сил можуть змінювати свою форму і об'єм, тобто деформуватися. Розтягуючи гумовий шнур, ми *змінюємо його довжину*, надуваючи дитячу повітряну кульку спостерігаємо *зміну об'єму і розмірів*, скручуючи в просторі довгу металеву лінійку, ми спостерігаємо *зміну її форми* і т.д. *Довільні зміни форми, розмірів і об'єму тіла називають деформацією*. На спец предметі з опору матеріалів ви зможете переконатися, що всі складні деформації можна розділити на прості, які є основними (зсув, кручення, згин).

Для твердих тіл розрізняють два граничних випадки деформацій: *пружні і пластичні*. *Пружною* називають деформацію, яка зникає після припинення дії прикладених сил. *Пластичною* називають таку деформацію, яка повністю або частково зберігається в тілі після припинення дії зовнішніх сил. Якою саме буде деформація залежить не лише від природи тіла, а й від прикладених сил.

*Під час деформації тіла відбувається зміщення його частинок відносно положень рівноваги в інші*



**положення.** Цим зміщенням протидіють сили взаємодії між частинками. Такі сили в **механіці** є як внутрішні сили, що діють між окремими частинками деформованого тіла. Ці сили мають електричне походження і є результуючими сил притягання і відштовхування між зарядженими частинками.

На рис.2.3 маємо залежність сили взаємодії між атомами від відстані між ними. При пружній

Рисунок 2.3

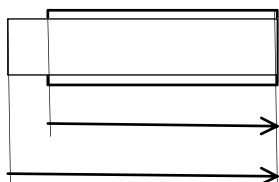
деформації, тобто коли  $r < r_0$ , частинки відштовхуються одна від одної. Розглядаючи ділянку кривої над віссю абсцис, бачимо, що вона йде досить круто вгору, а це свідчить про те, що незначне зближення частинок потребує великих зусиль.

Коли  $r > r_0$ , частинки притягуються. Якщо ж  $r = r_0$ , сила взаємодії між частинками дорівнює нулю, тобто сили притягання врівноважуються силами відштовхування. **Невеличку ділянку кривої КМ біля цього положення можна вважати прямою лінією, і незначні зміщення частинок від цього положення при деформації характеризують ту залежність коли сила пропорційна зміщенню.**

Коли пружна деформація встановиться, то результуюча внутрішніх пружних сил, що виникають в тілі у довільному його перерізі, врівноважує прикладені до нього зовнішні сили. Тому під час пружної деформації внутрішні пружні сили можна визначити через зовнішні сили, що діють на тіло. **Внутрішні сили характеризуються механічним напруженням, яке дорівнює відношенню результуючих пружних сил до площі перерізу тіла, тобто:**

$$\sigma = \frac{F_{\text{пружн}}}{S} \quad (2.8)$$

В теорії пружності цю величину називають **зусиллям** – зовнішня сила, що припадає на одиницю площі поперечного перерізу стержня.



Напруження називаються

**нормальним**, якщо сила  $F_{\text{пружн}}$  напрямлена перпендикулярно до поверхні  $S$ , і **тангенціальним**, якщо вона до-тична до цієї поверхні.

Найпростіший вид деформації – це розтяг або стиск. При цьому відбувається зміна довжини (рис. 2.4). Величину

Рисунок 2.4

$$\Delta l = l - l_0, \quad (2.9)$$

називають **абсолютною деформацією розтягу**,

де  $l_0$  – довжина стержня до деформації;  
 $l$  – довжина стержня після деформації.

Мірою деформації є **відносна деформація**, яка визначається відношенням абсолютної деформації до початкової довжини тіла:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}. \quad (2.10)$$

Для пружних деформацій механічне напруження пропорційне відносній деформації, що виражає **закон Гука**:

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{\alpha}, \quad (2.11)$$

де  $\alpha$  – коефіцієнт пропорційності, який називають **коефіцієнтом пружності**.

Величина, обернена до коефіцієнта пружності, називається **модулем Юнга**:

$$\frac{1}{\alpha} = E. \quad (2.12)$$

**Модуль Юнга** ( $E$ ) – це фізична величина, яка чисельно дорівнює механічному напруженню при відносній деформації стержня рівній одиниці, тобто: якщо

$$\frac{l - l_0}{l_0} = 1,$$

то

$$\sigma = E\varepsilon \Rightarrow \sigma = E \frac{\Delta l}{l_0} = E \quad (2.13)$$

Означення модуля Юнга має формальний характер, оскільки при таких великих деформаціях, більшість матеріалів руйнуються швидше, ніж їх розміри збільшать вдвічі (крім каучуку), тобто неможливо прикласти до стержня напруження, рівне модулю Юнга  $E$ .

Оскільки для даного матеріалу величини  $\alpha$  і  $E$  є константами, то справедливою є рівність, яка говорить, що відносне видовження є прямо пропорційним до розтягуючого зусилля:

$$\varepsilon = \alpha \sigma,$$

враховуючи (2.13) можемо записати:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \Rightarrow \frac{\sigma}{\varepsilon} = E,$$

враховуючи, що для модуля Юнга:

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} = 1,$$

а також прийнявши позначення  $l - l_0 = \Delta l = x$ , виводимо:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \Rightarrow \frac{x}{l} = \frac{F}{ES} \Rightarrow F = \frac{ES}{l} x \rightarrow F = kx$$

де

$$k = \frac{ES}{l}, \quad (2.14)$$

$E$  – модуль Юнга (табличне значення для даного матеріалу);

$S$  – площа поперечного перерізу зразка;

$l$  – довжина зразка.

Переважаю внутрішню силу, що діє на одиницю площі перерізу стержня, називають внутрішнім напруженням або просто напруженням, що виникає під дією зовнішньої сили. Для однорідного тіла (стержня) при однорідній деформації

напруження дорівнює зусиллю, тобто:  $\sigma = -\sigma_{np}$ , тоді закон Гука можна записати наступним чином:

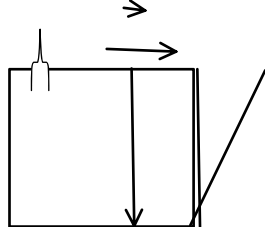
$$F = -kx,$$

або

$$\sigma_{np} = -E\varepsilon. \quad (2.15)$$

Саме в такій формі цей закон (закон Гука) застосовують в технічних дисциплінах – при малих деформаціях напруження, що виникає всередині тіла, є прямо пропорційним до відносної деформації.

Під час деформації розтягу чи стиску відбувається зміна поперечних розмірів тіл, яка характеризується відносним поперечним стиском чи розтягом:



$$\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d_0} \quad (2.16)$$

де  $\Delta d$  – абсолютна зміна поперечних розмірів тіла;

$d_0$  – поперечні розміри тіла до початку деформації.

*Відношення відносної поперечної деформації тіла до відносної поздовжньої деформації називають модулем поперечного стиску або коефіцієнтом Пуассона:*

$$\mu = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \quad (2.17)$$

Для більшості ізотропних тіл (і металів) коефіцієнт Пуассона становить  $\approx 1/4$ . Модуль Юнга залежить не лише від матеріалу стержня (конструкції) а й від його фізичного стану (температури, попередньої обробки), в той час як коефіцієнт Пуассона залежить тільки від матеріалу і є величина стала, яка характеризує пружні властивості ізотропних тіл.

Розглянемо деформацію зсуву. У квадраті (рис.2.5) нижню грань закріплено нерухомо, а на верхню грань прикладено дотичну силу. Тоді, в результаті деформації зсуву, квадрат перетвориться на ромб. Усі шари кристалічної ґратки, які паралельні нижній грані, характеризуються кутом зсуву  $\varphi$ . Оскільки цей кут дуже малий, то відношення:

Рисунок 2.5

$$\gamma = \frac{\Delta x}{l} = \operatorname{tg} \varphi \approx \varphi \quad (2.18)$$

називають *відносним зсувом*, – при малій деформації *відносний зсув дорівнює виміряному в радіанах куту зсуву*.

Абсолютний зсув тої грані, що зсувається виражається:

$$\Delta x = \beta \frac{lF}{S}, \quad (2.19)$$

де  $\beta$  – коефіцієнт пропорційності, який називають *коефіцієнтом зсуву – константа, що залежить лише від роду матеріалу*;

$l$  – віддаль від нерухомої грані до тої, що зсувається;

$F$  – зовнішня сила, що призводить до зсуву;

$S$  – площа грані, що зсувається.

На практиці використовують замість коефіцієнта зсуву – **модуль зсуву** – це величина, обернена до коефіцієнта зсуву:

$$N = \frac{1}{\beta}, \quad (2.20)$$

Відношення

$$\frac{F}{S} = \tau, \quad (2.21)$$

називають *сколюючим зусиллям*, воно чисельно дорівнює силі, що діє на одиницю площі поверхні і спрямоване по дотичній (тангенційно) до цієї поверхні.

Тоді справедливою є рівність:

$$\gamma = \beta \tau, \quad (2.22)$$

*Відносний зсув є прямо пропорційним до сколюючого зусилля.*

При статичній та однорідній деформації пружне тангенціальне напруження, що виникає в тілі, буде рівним по модулю, але протилежним за напрямком сколюючому зусиллю

$\sigma_\tau = -\tau$ , тоді закон Гука для зсуву буде мати вигляд:

$$\sigma_{\tau} = -N\varphi = -N\gamma, \quad (2.23)$$

де  $N$  – модуль зсуву;  
 $\gamma, \varphi$  – відносний зсув.

Для більшості однорідних ізотропних тіл модуль зсуву чисельно дорівнює модулю Юнга.

**Деформації розтягу (стиску) і зсуву належить до однорідних деформацій** (всі елементи тіла де-формовані однаково), але є і **неоднорідні деформації** – це такі деформації тіл під час яких при переході від однієї точки до іншої елементи тіла деформовані неоднаково. До неоднорідних деформацій належать де-формації кручення і згину.

Між модулями пружності  $N$  і  $E$  та коефіцієнтом Пуассона існує зв'язок, оскільки вони є характеристиками одного і того ж процесу, під час якого відбувається переміщення атомів у кристалічній ґратці під дією зовнішніх сил:

$$N = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (2.24)$$

Якщо зовнішня сила, що діє на тіло, розподілена по всій його поверхні, то зумовлена нею деформація буде об'ємною. Деформація усестороннього стиску (розтягу) або **об'ємна деформація**, це така деформація, під час якої відбувається лише зміна об'єму, а форма залишається тією ж. Наприклад: усесторонній стиск створює на Землі атмосферне повітря, в океанах – вода і т.д.

Окрім того, поздовжній розтяг (стиск) тіла супроводжується поперечним звуженням (потовщенням), а це призводить до зміни об'єму тіла.

Величиною об'ємної деформації є відносна зміна об'єму, то за законом Гука є справедливою рівність:

$$\frac{\Delta V}{V} = \chi \cdot \frac{F}{S} = 3(1 - 2\mu)\varepsilon, \quad (2.25)$$

$$\chi = \frac{1}{k}$$

де  $\chi$  називається **коефіцієнтом стисливості** – це фізична величина, яка чисельно дорівнює відносній зміні об'єму тіла при усесторонній дії на нього тиску рівного одиниці. Для твердих тіл цей коефіцієнт є дуже малим  $\sim 10^{-11} \text{ Па}^{-1}$ . Для тіл у яких  $\mu \approx 1/2$ , коефіцієнт стисливості дуже малий, такі тіла майже не стискаються, до них належать рідини.

Разом з тим відносно видовження за законом Гука ви-

$$\varepsilon = \alpha \frac{F}{S}$$

значається з рівності (2.25), то співвідношення (2.25) можна записати:

$$\frac{\Delta V}{V} = 3(1 - 2\mu)\alpha \frac{F}{S} = \chi \frac{F}{S},$$

$$\alpha = \frac{1}{E}$$

де  $\alpha$  – коефіцієнт пружності (не плутати з коефіцієнтом сили пружності, який ще називають коефіцієнтом жорсткості –  $k$ );

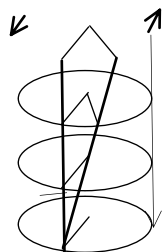
$$k = \frac{ES}{l}$$

– коефіцієнт сили пружності.

Зв'язок між модулями  $E$  і  $k$  та коефіцієнтом Пуассона:

$$k = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}. \quad (2.26)$$

**Кручення** – деформація неоднорідного зсуву, – вона виникає в стержні, якщо один кінець його закріпити, а другий – закручувати. При цьому різні по-перечні перерізи стержня будуть повертатися на різні кути відносно закріпленої



основи стер-жня. Під час кручення об'єм тіла не змінюється, оскільки не змінюються ні переріз ні довжина стержня. Як видно з рис.2.6, якщо верхній переріз повернувся на кут  $\varphi$ , то твірна  $OA$  повернулася на кут  $\theta$  ставши  $OA'$ . Кут  $\theta$  називають *кутом зсуву* або *кутом кручення*. Як видно з рис. при малих кутах:

Рисунок 2.6.

$$\gamma = \operatorname{tg} \theta \approx \theta = \frac{R\varphi}{l} . \quad (2.27)$$

Кут закручування  $\varphi$  верхньої площини пропорційний силі, прикладеній по дотичній до поверхні у верхній частині стер-жня:

$$\varphi \sim FR ,$$

оскільки  $FR = M$  – момент сили, тоді закон Гука буде мати вигляд:

$$\varphi = d \cdot M , \quad (2.28)$$

де  $d$  – коефіцієнт пружності при деформації кручення. Під час закручування стержня в ньому в середині виникають сили пружності, які створюють пружні напруження, які врівноважують зовнішній момент закручування:

$$\sigma_{\text{м}} = -M ,$$

а з врахуванням цього та рівняння (2.28) маємо ще один вигляд *закону Гука для деформації кручення*:

$$\sigma_{\text{м}} = -D\varphi , \quad (2.29)$$

де  $D = \frac{1}{d}$  – коефіцієнт жорсткості стержня на кручення.

Оскільки кручення призводить до деформації зсуву, то коефіцієнт  $D$  можна вирахувати через модуль зсуву і абсолютні розміри стержня:

$$D = \frac{\pi N R^4}{2l}, \quad (2.30)$$

де  $N$  – модуль зсуву;  
 $R$  – радіус стержня;  
 $l$  – довжина стержня

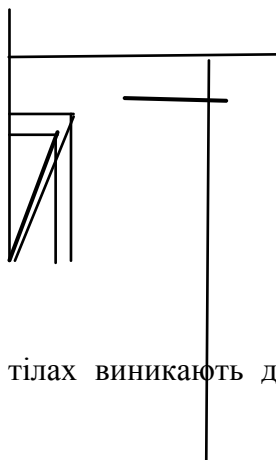
Наведені вище викладки враховуються під час розрахунків певних параметрів для бурильних колон на нафту і газ, оскільки на бурильну колону діють значні статичні та динамічні навантаження внаслідок впливу усіх вище згаданих видів деформації.

Пружні властивості реальних тіл в залежності від їхньої деформації, вивчають за так званою діаграмою деформації, це – графічна залежність між відносною деформацією розтягу  $\varepsilon$  і механічним напруженням  $\sigma$ . На рис. 2.7 представлена деформація розтягу металевого стержня.

З цієї діаграми видно, що закон Гука виконується в досить вузьких межах зміни деформацій і напружень. **Верхню межу напруження** (точка А), при якій ще виконується лінійна залежність між  $\varepsilon$  і  $\sigma$  називають **межею пропорційності**.

При напруженнях, які вищі за  $\sigma_1$  (від точки А до В), деформація має ще пружний характер, але залежність між  $\varepsilon$  і  $\sigma$  є нелінійною. **Граничне напруження, при якому ще не виникає залишкова деформація, називають межею пружності** ( $\varepsilon_2, \sigma_2$ ).

За межею пружності в тілах виникають деформації,  
 Рисунок 2.7



що зберігаються і після припинення дії зовнішніх сил. Це, так звана, залишкова деформація. Після припинення дії зовнішніх сил тіло повертається не в стан  $O$ , а в стан  $O'$ . Якщо повторно деформувати тіло, то межа пружності його збільшиться (ділянка  $O'B$  буде прямолінійною). **Зростання межі пружності тіла внаслідок його повторних деформацій називають зміцненням.**

Напруження, при якому виявляється помітна залишкова деформація ( $\sim 0,2\%$ ), називають **межею**

**текучості**  $\sigma^{0,2}$  (точка  $C$ ). За межею текучості лежить **об-ласть текучості** – неперервне зростання деформації тіла з часом при майже сталому напруженні (ділянка  $CD$ ). Максимальне напруження  $\sigma$ , що виникає в тілі перед початком його руйнування, називають **межею міцності**. При вищих напруженнях в одному з перерізів тіла його діаметр зменшується і утворюється «шийка», в якій відбувається руйнування.

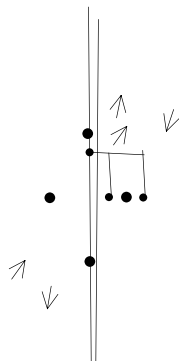
Пружність і пластичність тіл залежить від температури, тиску та структури матеріалу. Так, наприклад, сталь пружна при звичайних умовах і пластична при високих температурах і тисках; свинець пластичний при кімнатній температурі і стає пружним при низьких температурах.

Реальні тверді тіла проявляють досить складну залежність деформації від часу, ця залежність не знаходить місця в законі Гука і ми її ніде не враховуємо.

Дослідження показали, що після початку дії зовнішньої сили, деформація досягає певного значення не відразу, а лише через деякий проміжок часу.

Після припинення дії зовнішньої сили, деформація також не зникає миттєво: спочатку вона швидко спадає до деякого малого значення, а потім зникає досить повільно. Явище, під час якого тіло повільно відновлює свою форму, називають **пружною післядією**.

Розглянемо зразок, який ще **не піддавався деформації**. Під час **розтягу** в ньому виникає напруження  $\sigma$ , що змінюється зі



збільшенням  $\varepsilon$  по кри-вій  $OA$ . Після досягнення стану точки  $A$  будемо поступово змен-шувати  $\varepsilon$ . Тоді графік залежності  $\sigma$  від  $\varepsilon$  піде по нижній кривій  $AB$  і в точці  $B$  ( $\sigma=0$ ), зразок част-ково зберігає отриману ним деформацію.

Рисунок 2.8

Ділянка  $OB$  відображає залишкову деформацію. Щоб її позбутися, необхідно **СТИСНУТИ** тіло (тобто прикласти від'ємне зовнішнє зусилля), а цьому станові відповідає точка  $C$ , яка характеризується тим, що тіло повністю **ВІДНОВИЛО СВОЮ ФОРМУ** (розміри), але **володіє внутрішнім напру-женням**, величина якого відповідає значенню  $OC$ .

Якщо ж продовжувати **СТИСК** і далі, то залежність  $\sigma$  від  $\varepsilon$  піде по кривій  $CD$ . Якщо після досягнення зразком деякого стану  $D$  почнемо поступово **ЗМЕНШУВАТИ** зовнішнє зусилля, довівши його до нуля, то залежність  $\sigma$  від  $\varepsilon$  піде по кривій  $DF$ , а в стані точки  $F$  тіло буде володіти знову **ЗАЛИШКОВОЮ ДЕФОРМАЦІЄЮ** (стиску). Позбутися її можна, розтягнувши тіло на величину  $OM$ , а провівши **РОЗТЯГ** далі, характеристики будуть проходити по кривій  $MA$  до стану в точці  $A$ . При зміні зовнішнього навантаження залежність на-пруження  $\sigma$ , що виникає в тілі, (під час розтягу, стиску), від відносного видовження виражається кривою (рис.2.8) яку на-зивають **петлею пружного гістерезису**.

Явище пружного гістерезису полягає у відставанні де-формації від зміни напруження. Відставання для кожного зна-чення  $\sigma$  виражається горизонтальним відрізком, що з'єднує

криву  $OA$  з кривою  $ABC$ . Так, для  $\sigma = \sigma_0$  відставання вимі-рюється відрізком  $ab$ .

**Площа петлі гістерезису є пропорційною до енергії, яка виділяється в тілі** (спричинює нагрівання) при кожному циклі періодично змінюваної деформації. Для зменшення нагрівання, яке негативно впливає на пружні властивості тіл, важливі деталі машин виготовляють з мате-ріалів з вузькою петлею гістерезису.

**Пояснення** пружної післядії та гістерезису **базу-ється** на внутрішній будові тіл, бо всі тіла і навіть моно-кристали, складаються з мікроскопічних областей, які певним чином

дотикаються. Такі області під час пружної деформації можуть зміщуватися, повертаючись і зчіплюючись одні з одними, перекошуючись та розтягуючись, а звільнення від зчеплень відбувається поступово в наслідок неупорядкованого теплового руху. В таких областях відбувається виділення тепла, тому тіла нагріваються. Це проходить інтенсивніше при вищих температурах і повільніше при нижчих.

### ***Контрольні запитання***

1. Які системи відліку називають інерціальними?
2. Як формулюється перший закон Ньютона?
3. До чого призводить дія навколишніх тіл на дане тіло?
4. Що називають силою?
5. Як формулюється третій закон Ньютона?
6. Що таке маса тіла?
7. Що твердить другий закон Ньютона?
8. У чому полягає принцип незалежності дії сил?
9. Що називають «головним вектором зовнішніх сил»?
10. Які тіла називають твердими?
11. Які тіла називають рідинами?
12. Що називають газами?
13. Які сили в механіці називають «силами тертя»?
14. Що включає в себе поняття «статичне тертя», а що «кінематичне»?
15. Що називають силою тертя спокою?
16. Чим визначається максимальна сила тертя спокою?
17. Записати закон Кулона для сил тертя?
18. Навести приклади важливості і негативного впливу сил тертя спокою.
19. Коли виникає сила тертя ковзання?
20. Чим пояснюється зменшення сили тертя ковзання при невеликих швидкостях і її збільшення при великих швидкостях?
21. Що являє собою кочення одного тіла по поверхні іншого?
22. Чим кочення відрізняється від обертання?

23. Як запишеться закон Кулона для тертя кочення?
24. Яка розмірність коефіцієнта тертя кочення і від чого цей коефіцієнт залежить?
25. На скільки мастила зменшують сили тертя?
26. Що називають деформацією?
27. Яку деформацію називають пружною а яку пластичною?
28. Що відбувається під час деформації тіла?
29. Пояснити криву залежності сили взаємодії між атомами в залежності від відстані між ними; де на ній знаходиться ділянка, що характеризує поняття «сила пропорційна зміщенню».
30. Чим характеризуються внутрішні сили, що виникають під час пружної деформації?
31. Що називають зусиллям?
32. Яке напруження називають нормальним а яке – тангенціальним?
33. Яку величину називають абсолютною деформацією?
34. Що таке відносна деформація?
35. Що виражає закон Гука?
36. Що таке модуль пружності, а що таке коефіцієнт пружності і який зв'язок між ними?
37. Що таке модуль Юнга?
38. Як вираховується модуль пружності через модуль Юнга?
39. Що називають відносним стиском (розтягом)?
40. Що називають коефіцієнтом Пуассона?
41. Що називають відносним зсувом і чому він пропорційний?
42. Що називають коефіцієнтом зсуву і модулем зсуву, як вони між собою зв'язані?
43. Що називають сколюючим зусиллям?
44. Як зв'язані відносний зсув і сколююче зусилля?
45. Що називають однорідною деформацією, а що – неоднорідною; які види деформацій до них належать?
46. Який зв'язок між модулями  $N$  і  $E$  та коефіцієнтом Пуассона?
47. Що характеризує відносна об'ємна деформація?
48. Що називають коефіцієнтом стисливості?

49. Який зв'язок між модулями  $k$  і  $E$  та коефіцієнтом Пуассона?

50. Як виникає деформація кручення?

51. Що називають кутом кручення і чому він пропорційний?

52. Як виглядає закон Гука для кручення?

53. Як вираховується коефіцієнт жорсткості стержня на кручення?

54. Що собою представляє діаграма деформації? Пояснити її.

55. Що називають межею пропорційності?

56. Що називають межею пружності?

57. Що називають зміцненням?

58. Що називають межею текучості?

59. Що називають межею міцності?

60. Що таке пружна післядія?

61. Пояснити петлю пружного гістерезису.

62. Який фізичний зміст площі, обмеженої петлею пружного гістерезису?

## § 3. Закони збереження в механіці

### 3.1 Імпульс.

#### Закони зміни і збереження імпульсу

В ньютонівській механіці прискорення рівне зміні

$$a = \frac{dv}{dt},$$

де  $v$  – швидкість, тому рівняння, яке виражає другий закон Ньютона можна переписати у вигляді:

$$\frac{d}{dt}(mv) = F, \quad \text{або} \quad \frac{dp}{dt} = F. \quad (3.1)$$

Вектор  $P$  – фізична величина, що дорівнює добутку маси матеріальної точки на її швидкість, і називається **імпульсом матеріальної точки**.

В теоретичній механіці вектор  $mv$  називається **кількістю руху**. Імпульс матеріальної точки – одна з найважливіших її динамічних характеристик.

**Основний закон динаміки поступального руху матеріальної точки**, який записаний у вигляді (3.1) твердить, що **швидкість зміни імпульсу матеріальної точки дорівнює діючій на неї силі**.

Цей основний закон динаміки матеріальної точки виражає **принцип причинності в класичній механіці**, оскільки він встановлює одночасний зв'язок між зміною з плином часу стану руху і положення в просторі матеріальної точки і діючої на неї сили.

Переписавши рівняння (3.1) у вигляді:

$$dp = Fdt, \quad (3.2)$$

маємо рівняння, яке виражає зміну імпульсу.

Векторну величину  $\vec{F}dt$  називають **елементарним імпульсом сили**  $\vec{F}$  за малий проміжок часу  $dt$  її дії. Таким чином, з основного закону динаміки матеріальної точки і принципу незалежності дії сил випливає, що **зміна імпульсу матеріальної точки за малий проміжок часу  $dt$  дорівнює елементарному імпульсу за той же проміжок часу результуючої всіх сил, що діють на цю матеріальну точку.**

Зміну імпульсу матеріальної точки за кінцевий проміжок часу від  $t_1$  до  $t_2=t_1+\Delta t$ , знайдемо, інтегруючи рівняння (3.2):

$$p_2 - p_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt \quad (3.3)$$

Інтеграл являє собою імпульс сили  $\vec{F}$  за проміжок часу  $\Delta t = t_2 - t_1$ .

Якщо, на матеріальну точку діє стала сила  $\vec{F}$ , то  $p_2 - p_1 = \vec{F}(t_2 - t_1)$ .

У випадку змінної сили:  $p_2 - p_1 = \bar{\vec{F}}(t_2 - t_1)$ , де  $\bar{\vec{F}}$  – середнє значення змінної сили в проміжку часу від  $t_1$  до  $t_2$ .

Третій закон Ньютона в поєднанні з першим і другим дозволяє нам перейти від динаміки окремої матеріальної точки до динаміки довільної механічної системи.

Розглянемо довільну механічну систему, що складається з  $n$  матеріальних точок. Для  $i$ -ї матеріальної точки згідно другого закону Ньютона

$$\frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) = \vec{F}_i, \quad (3.4)$$

де  $m_i$  та  $\vec{v}_i$  – маса і швидкість  $i$ -ї точки;  
 $\vec{F}_i$  – рівнодійна всіх діючих на неї сил.

Усі тіла, що не входять у дану механічну систему будемо називати – **зовнішніми тілами**, а сили, що діють з боку цих тіл на тіла механічної системи, – **зовнішніми силами**. **Внутрішніми силами** будемо називати сили взаємодії частин самої системи. Тоді силу  $F_i$  з рівняння (3.4) можна представити у вигляді суми зовнішніх і внутрішніх сил:

$$F_i = F_i^{\text{зовн}} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N F_{ik}, \quad (3.5)$$

де  $F_i^{\text{зовн}}$  – результуюча всіх зовнішніх сил, що діють на  $i$ -ту точку системи;

$F_{ik}$  – внутрішня сила, що діє на  $i$ -ту точку з боку  $k$ -ї точки. Підставимо (3.5) в (3.4):

$$\frac{d}{dt}(m_i v_i) = F_i^{\text{зовн}} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n F_{ik}, \quad (3.5.1)$$

сумуючи ліві і праві частини цього рівняння, записані для всіх  $n$  матеріальних точок механічної системи, отримаємо:

$$\sum_{i=1}^n \frac{d}{dt}(m_i v_i) = \sum_{i=1}^n F_i^{\text{зовн}} + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n F_{ik}. \quad (3.5.2)$$

Отже, імпульсом системи є сума імпульсів усіх матеріальних точок цієї системи.

За третім законом Ньютона, сили взаємодії  $i$ -ї і  $k$ -ї точок системи є рівними за модулем і протилежними за напрямком, тобто:  $F_{ik} = -F_{ki}$ , так що  $F_{ik} + F_{ki} = 0$ , а отже **геометрична сума всіх внутрішніх сил в системі:**

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n F_{ik} = 0. \quad (3.6)$$

Геометрична сума всіх зовнішніх сил, що діють на систему:

$$\vec{F}^{\text{зовн}} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{зовн}}, \quad (3.7)$$

називається **головним вектором зовнішніх сил**.

**Імпульсом** (кількістю руху) механічної системи називається вектор  $\vec{P}$ , що дорівнює векторній сумі імпульсів всіх матеріальних точок цієї системи:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i. \quad (3.8)$$

За правилом диференціювання суми рівняння (3.8) буде мати вигляд:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} m_i \vec{v}_i, \quad (3.9)$$

таким чином, з рівнянь (3.5.2) – (3.9) випливає:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{\text{зовн}}, \quad (3.10)$$

це рівняння виражає **закон зміни імпульсу механічної системи**: зміна імпульсу з часом механічної системи дорівнює головному вектору зовнішніх сил, що діють на цю систему.

Якщо в якості найпростішої механічної системи ми розглянемо довільне тверде тіло, що рухається поступально, то швидкості всіх матеріальних точок, на які можна уявно розбити тіло є однаковими і дорівнюють швидкості  $\vec{v}$  поступального руху тіла, тому імпульс тіла дорівнює:  $\vec{P} = m\vec{v}$ , де  $m$  – маса цього тіла.

Рівняння (3.10) у цьому випадку являє собою **основний закон динаміки поступального руху твердого тіла**:

$$\frac{d}{dt}(mv) = F_{\text{зовн}} \quad \text{або} \quad a = \frac{1}{m} F_{\text{зовн}} \quad (3.10.1)$$

де  $a$  – прискорення тіла при поступальному русі.

Оскільки, на замкнуту систему зовнішні сили не діють, тому із закону зміни імпульсу (3.10) випливає закон, який називають **законом збереження імпульсу**: Імпульс замкнутої системи не змінюється з плином часу:

$$\frac{dp}{dt} = 0, \quad \text{або} \quad p = \sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n m_i v_i = \text{const} \quad (3.10.2)$$

де  $m_i$  та  $v_i$  – маса і швидкість  $i$ -ї матеріальної точки системи, що складається з  $n$  точок.

Відповідно не змінюються і проекції імпульсу замкнутої системи на осі декартових координат інерціальної системи відліку:

$$p_x = \text{const}, \quad p_y = \text{const}, \quad p_z = \text{const}. \quad (3.10.3)$$

Отже, ми отримали закон збереження імпульсу, базуючись на законах Ньютона, оскільки з їх допомогою був виведений закон зміни імпульсу (3.10). Однак, закон збереження імпульсу на відміну від законів Ньютона є справедливим не тільки в рамках класичної механіки Ньютона, Наприклад, як показують експерименти, він однаково є справедливим як для макроскопічних систем тіл, так і для систем мікрочасток, хоча поведінка мікрочасток не описується ньютонівською, а квантовою механікою. Виконується цей закон і в релятивістській механіці, тобто незалежно від того, великі чи малі швидкості тіл або часток, що утворюють систему. При цьому слід мати на увазі, що імпульсом можуть володіти не тільки частки і тіла, але й поля (тиск електромагнітних хвиль, зокрема світла на поглинаючі чи відбиваючі поверхні).

### 3.2 Центр мас. Закон руху центра мас

В динаміці широко використовують поняття центра мас механічної системи.

**Центром мас** (центром інерції) системи матеріальних точок називається геометрична точка  $C$ , радіус-вектор якої дорівнює відношенню суми добутків мас всіх матеріальних точок системи на їх радіус-вектори до маси всієї системи:

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i, \quad (3.11)$$

де  $m_i$  та  $\vec{r}_i$  – маса і радіус-вектор  $i$ -ї матеріальної точки;  
 $n$  – загальне число цих точок в системі;

$$m = \sum_{i=1}^n m_i$$

– її сумарна маса.

Власне, якщо радіус-вектори проведені з центра мас  $C$  (позначимо їх  $\vec{r}_i^*$ ), то

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i^* = 0. \quad (3.11.1)$$

Таким чином, **центр мас** – це геометрична точка, для якої сума добутків мас всіх матеріальних точок, що утворюють механічну систему на їх радіус-вектори, проведені з цієї точки, дорівнює нулю.

У випадку неперервного розподілу маси в системі (у випадку подовженого тіла) радіус-вектор центра мас системи визначається з рівності:

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \int_0^m \vec{r} dm, \quad (3.11.2)$$

де  $\vec{r}$  – радіус-вектор малого елемента системи, маса якого дорівнює  $dm$ , а інтегрування проводиться по всіх елементах системи, тобто по всій її масі  $m$ .

**Швидкість центра мас механічної системи дорівнює відношенню імпульсу цієї системи до її маси:**

$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \frac{\vec{p}}{m}. \quad (3.12)$$

Відповідно, імпульс системи дорівнює добутку її маси на швидкість центра мас:  $\vec{p} = m\vec{v}_c$ , а підставивши цей вираз у рівняння (3.10), отримаємо **закон руху центра мас:**

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}_c) = \vec{F}^{\text{зовн}}. \quad (3.13)$$

З рівнянь (3.1) та (3.13) видно, що **центр мас механічної системи рухається як матеріальна точка, маса якої дорівнює масі всієї системи і на яку діє сила, рівна головному вектору прикладених до системи зовнішніх сил.**

Цей закон показує, що для зміни швидкості центра мас системи необхідно, щоб на систему діяла зовнішня сила. Внутрішні сили взаємодії частин системи можуть викликати зміни швидкостей цих частин (наприклад, під час розриву «снаряду» на декілька осколків), але вони не можуть вплинути на сумарний імпульс системи і швидкість її центра мас.

Для того, щоб зрозуміти вищесказане, розглянемо приклад: коли людина переходить з носа на корму човна, який стояв нерухомо відносно води, тоді човен починає рухатись відносно берега і води у протилежному напрямку. Це пояснюється тим, що під час руху людини, центр мас системи (людина-човен) зміщується відносно берега. А оскільки на човен діє горизонтальна зовнішня сила – сила опору води, то човен і зміщується у бік дії сили, тобто в напрямку «зміщення людини».

### 3.3 Робота постійної та змінної сил

Механічний рух ніколи не виникає безпричинно, він може виникнути лише внаслідок дії інших тіл або перетворення інших форм руху.

*Мірою різних форм руху матерії і відповідних їм взаємодій є скалярна величина, яка називається **енергією**.* Рух — це невід’ємна властивість матерії. Тому довільне тіло, система тіл, полів володіють енергією, а вірніше запасом енергії. У фізиці існують поняття різних видів енергії: механічної, внутрішньої, електромагнітної, ядерної і т.д. Ми розглянемо *механічну енергію, яка є мірою механічно-го руху* деякої системи, а також *мірою механічної взаємодії тіл* системи як одне з одним, так і з зовнішніми тілами.

Зміна механічного руху тіла, а отже його механічної енергії відбувається в процесі механічної дії на розглядуване тіло з боку інших тіл. *Тобто зміна механічної енергії відбувається під впливом діючих сил.* Для кількісного опису такого процесу в механіці вводять таке поняття як **робота сили**:

*елементарною роботою сили на малому шляху прикладання сили є векторний добуток:*

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r} = F v dt, \quad (3.14)$$

де  $\vec{r}$  — радіус вектор,

$$v = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$dt$  — швидкість точки,

$dt$  — малий проміжок часу, на протязі якого сила  $F$  виконує роботу  $\delta A$  .(рис.3.1)

Оскільки, скалярний добуток двох векторів має вигляд:

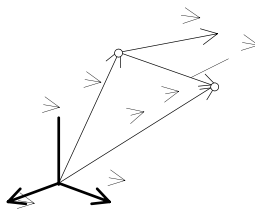
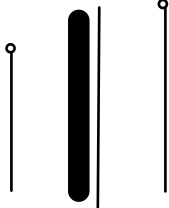


Рисунок 3.1



$$\delta A = F |dr| \cos \alpha = F_\tau ds, \quad (3.15)$$

де  $|dr| = ds$  – шлях точки за малий

проміжок часу  $dt$ ;

кут  $\alpha$  – кут між напрямом сили та елементарним переміщенням  $dr$  (або швидкістю) точки;

$F_\tau = F \cos \alpha$  – проекція сили на напрям переміщення.

З рівнянь (3.14) та (3.15) видно, що сила **не** виконує роботу у двох випадках:

а) якщо точка прикладання сили є *нерухомою* ( $dr=0$ );

б) кут  $\alpha = \pm \pi/2$ , тобто, якщо сила напрямлена перпендикулярно до напрямку руху.

Якщо  $F_\tau > 0$ , тобто кут  $\alpha$  – гострий, тоді  $\Delta A > 0$  така сила є рушійною, якщо ж  $F_\tau < 0$ , тобто кут  $\alpha$  – тупий, тоді  $\Delta A < 0$  така сила є гальмівною.

В прямокутних декартових координатах  $F = F_x i + F_y j + F_z k$  і  $dr = dx i + dy j + dz k$ . Тому, згідно скалярного множення векторів елементарна робота сили дорівнює:

$$\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz, \quad (3.16)$$

де  $x, y, z$  – координати точки прикладання сили;

$F_x, F_y, F_z$  – проекції сили на осі координат.

Оскільки сила, що діє на матеріальну точку залежить і від координат точки (наприклад сила тяжіння залежить від географічної широти і висоти над рівнем моря того місця, де знаходиться тіло) і від швидкості, тобто **сила є функцією**

~~декількох змінних~~ **тобто**

диференціалом довільної функції координат точки, через те елементарну роботу позначати-мемо не  $dA$ , а тільки  $\delta A$ .

Робота, що виконується силою під час переміщення точки з положення 1 в положення 2 дорівнює сумі елементарних робіт сили на всіх малих ділянках

*Рисунок 3.2*

траєкторії (рис.3.2). Ця сума зводиться до інтегралу:

$$A_{1-2} = \int_1^2 F dr = \int_{S_1}^{S_2} F_\tau ds = \int_{S_1}^{S_2} F \cos \alpha ds \quad (3.17)$$

в математиці цей інтеграл називається криволінійним інтегралом, він зводиться до знаходження площі, обмеженої віссю абсцис, графіком залежності даної функції і вертикальними прямими, тобто площі криволінійної трапеції.

**Сила, що діє на матеріальну точку, називається потенціальною (або консервативною), як-що робота цієї сили залежить лише від початкового і кінцевого положень точки** рис.3.3.

Робота потенціальної сили не залежить ні від вигляду траєкторії точки між початковим і кінцевим положеннями, ні від закону руху точки вздовж траєкторії:  $A_{1-a-2} = A_{1-b-2} = A_{1-2}$ , де кожна з цих частин рівності – це значення роботи потенціальної сили під час переміщення точки з положення 1 в положення 2.

Зміна напрямку руху точки вздовж малої ділянки траєкторії на протилежний, викликає зміну знаку проекції потенціальної сили  $F_\tau$  і знаку її елементарної роботи  $\Delta A = F dr$ , Тому **робота потенціальної (консервативної) сили вздовж замкнутої траєкторії 1-a-2-b-1 дорівнює нулю:**  
Рисунок 3.3

$$A_{1-a-2-b-1} = A_{1-a-2} + A_{2-b-1} = A_{1-a-2} - A_{1-b-2} = 0 \quad (3.18)$$

Точки і ділянки замкнутої траєкторії можна вибирати абсолютно довільно, таким чином, щоб **робота потенціальної (консервативної) сили вздовж довільної замкнутої траєкторії дорівнювала б нулю:**

$$\oint_{(L)} \vec{F} d\vec{r} = 0 \quad (3.19)$$

**Сили взаємодії частин системи є потенці-альними (консервативними), якщо ці сили зале-жать тільки від взаємного розміщення всіх частин даної системи.** Прикладом потенціальних (консервативних) сил є – сили тяжіння, сили електростатичної взаємодії заряд-жених часток, енергія пружно деформованого тіла і т.д.

Якщо поле з часом не змінюється, і це поле діє на ма-теріальну точку з силою  $\vec{F}$ , то таке **поле** називають **потен-ціальним** (або полем консервативних сил), якщо сила задо-вільняє рівність (3.19).

Отже: систему матеріальних точок можна ха-рактеризувати потенціальною енергією, якщо на неї діють тільки консервативні сили.

**Потенціальною енергією матеріальної точки в полі консервативних сил називається функція  $U$ , яка залежить тільки від поло-ження точки; різниця її значень між почат-ковим і кінцевим положеннями дорівнює ро-боті при переміщенні матеріальної точки між цими положеннями:**

$$U_1 - U_2 = -\Delta U = A_{12} \text{ або } U = -\int F(x)dx \quad (3.20)$$

**Робота консервативних сил при переміщенні матеріальної точки дорівнює зменшенню потенці-альної енергії точки.**

Для найпростішого випадку, тобто, коли потенціальне поле однорідне і незмінне в часі, проінтегрувавши рівняння (3.20) одержимо:

$$U = -\int Fdx = -Fx + C, \quad (3.21)$$

де  $x$  – координата точки;  
 $C$  – довільна стала інтегрування.

В усіх випадках неможливо відшукати процедуру визначення сталої  $C$  в даній точці поля, тому завжди вибирають деяку точку поля, в якій енергію приймають рівною нулю (тобто вибирають довільний нульовий рівень відліку), а в інших точках енергію відраховують від цього рівня. Практично визначають різницю потенціальних енергій у двох точках поля. Потенціальна енергія може приймати як додатне так і від'ємне значення (кінетична енергія тільки додатне). Числове значення і знак потенціальної енергії залежать від вибору умовного нульового положення системи.

### ***Потенціальна енергія в полі сил тяжіння поблизу поверхні землі:***

це силове однорідне поле, завжди напрямлене вниз до Землі по вертикалі, на тіло масою  $m$  діє стала сила  $F=mg$ , а потенціальна енергія системи **тіло-Земля** визначається за формулою (3.21).

Потенціальну енергію на поверхні Землі вважатимемо рівною нулю, тоді на деякій висоті  $h$  над поверхнею Землі вона буде рівна:

$$U_h = mgh, \text{ а на дні шахти: } U'_h = -mgh'$$

*Різниця* потенціальних енергій у цих двох точках поля буде:

$$\Delta U = mgh' \quad \text{або} \quad U'_h = \int_h^{h'} mg dx = mg(h' - h)$$

### ***Потенціальна енергія пружно деформованого тіла (стержня):***

нехай стержень довжиною  $l$  і площею поперечного перерізу  $S$  жорстко закріплений одним кінцем, а до другого кінця прикладено по нормалі до поперечного перерізу зовнішню силу, під дією якої стержень видовжується (стискається). При цьому в об'ємі стержня виникають сили пружності, які протидіють зовнішній силі.

Вважатимемо, що потенціальна енергія недеформованого стержня дорівнює нулю. Згідно рівняння (3.20) потенціальна енергія пружної деформації стержня:

$$U = - \int_0^{\Delta x} F_{np} dx = \int_0^{\Delta x} F dx, \quad (3.22)$$

оскільки зовнішня сила за величиною дорівнює результуючій силі пружності  $F = -F_{np}$ . Визначимо зовнішню силу, як функцію деформації  $x$  із узагальненого закону Гука:  $\sigma = E\varepsilon$  де  $E$  – модуль пружності; одночасно напруження в стержні –  $\sigma = F/S$ ; і  $\varepsilon = x/l$  – відносна деформація. Враховуючи ці позначення, із закону Гука одержимо:

$$F(x) = \frac{ES}{l} x, \quad (3.23)$$

підставивши цей вираз у попереднє рівняння, отримаємо значення *потенціальної енергії пружно деформованого стержня*:

$$\begin{aligned} U &= \frac{ES}{l} \int_0^{\Delta l} x dx = \frac{ES}{l} \frac{\Delta l^2}{2} = \\ &= \frac{E}{2} \left( \frac{\Delta l}{l} \right)^2 V = \frac{1}{2} EV \varepsilon^2 \end{aligned}, \quad (3.24)$$

де  $V = Sl$  – об'єм стержня,  
 $\Delta l/l = \varepsilon$  – відносна деформація.

Враховуючи рівність (2.14) §2 рівність (3.24) можна розписати:

$$U = \frac{ES}{l} \frac{\Delta l^2}{2} = k \frac{\Delta l^2}{2}, \quad (3.24.1)$$

де  $k$  – модуль пружності (коефіцієнт сили пружності).

*Робота, виконана зовнішньою силою при пружній деформації, накопичується в об'ємі стержня у вигляді потенціальної енергії.*

Ми вже згадували у попередньому параграфі, що коли механічні напруження досягають межі пружності ( $\sigma_2$ ), а потім зменшуються до нуля, то відносна деформація повністю не зникає, а зменшується до  $\epsilon_0$ . Розглянемо залежність відносної деформації від напруження (рис.3.4). Під час процесу деформації (розтягу), який характеризується збільшенням від-

носної деформації від 0 до  $\epsilon_1$ . Зовнішні сили виконують роботу ( $OA\epsilon_1$ ), а за рахунок цієї роботи виникає енергія пружної деформації. Коли ж відносна деформація зменшується ( $\epsilon_1 A \epsilon_0$ ), то пружні сили за рахунок енергії пружної деформації виконують роботу. Те ж відбувається, якщо деформацію проводити у зворотному напрямку (стиск).

Рисунок 3.4

Якщо здійснити повний цикл деформації тіла, то **робота зовнішньої сили** за цикл буде рівна площі фігури, обмеженої зовнішньою частиною петлі і вісі абсцис ( $A'\epsilon_1\epsilon_0 A\epsilon_1\epsilon_0 A'$ ). **Робота ж сили пружності** за той самий цикл буде рівною різниці площ ( $A'\epsilon_1\epsilon_0 A\epsilon_1\epsilon_0 A'$ ) і внутрішньої площі, обмеженої **петлею пружного гістерезису**.

Робота, що дорівнює площі, яка обмежена петлею витрачається на подолання сил внутрішнього тертя в тілі і в результаті поповнює запас енергії молекулярно-теплого руху в середині тіла, у цьому полягає фізичний зміст площі, обмеженої петлею пружного гістерезису. Отже, чим ширша петля, тим більше нагрівається деталь при її періодичних деформаціях. Тому деталі машин виготовляють із сортів сталі, для яких петля гістерезису є досить вузькою.

Одиниця роботи в СІ – **джоуль** (Дж). Один джоуль дорівнює роботі сталої сили в один ньютон на переміщенні в

один метр за умови, що напрям сили збігається з напрямом переміщення.

### 3.4 Потужність

Для характеристики роботи, яку виконує сила за одиницю часу, в механіці існує поняття *потужності*. Це є скалярна величина. **Потужністю сили називають відношення елементарної роботи, виконаної силою за малий проміжок часу до величини цього часу:**

$$N = \frac{dA}{dt} = F \frac{dr}{dt} = Fv \cdot \cos \alpha, \quad (3.25)$$

де  $v$  – швидкість переміщення точки прикладання сили.

$$1 \text{ Вт} = 1 \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = 1 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^3}$$

Одиницею потужності в СІ є *ват*

Слід підкреслити, що і робота і потужність сили не залежать від вибору системи відліку.

### 3.5 Кінетична енергія матеріальної точки

Відомо, що в механіці розрізняють два види механічної енергії: кінетичну і потенціальну.

**Кінетичною енергією механічної системи називають енергію механічного руху цієї системи.**

Зміна кінетичної енергії матеріальної точки відбувається під дією прикладеної до неї сили і дорівнює роботі, яку виконує ця сила:

$$dW_k = FdS = Fvdt, \quad (3.26)$$

де  $v$  – швидкість матеріальної точки.

З рівняння (3.2) підставимо:  $Fdt = dp$  в рівність (3.26), одержимо:

$$dW_{\kappa} = v dp = \frac{1}{m} p dp, \quad (3.27)$$

де  $p=mv$  – імпульс матеріальної точки;  
 $m$  – її маса, тоді:

$$W_{\kappa} = \int \frac{p dp}{m} = \frac{p^2}{2m} = \frac{mv^2}{2}. \quad (3.28)$$

Кінетична енергія механічної системи дорівнює сумі кінетичних енергій всіх частин (точок) цієї системи, тобто:

$$W_{\kappa} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}. \quad (3.29)$$

Робота сили в даному випадку матиме вигляд, врахо-

вуючи, що  $\frac{dS}{dt} = v$  :

$$\begin{aligned} A_{12} &= F dS = m \frac{dv}{dt} dS = \\ &= m \int_{v_1}^{v_2} v dv = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

На основі цього, **означення кінетичної енергії** є та-ким: кінетична енергія матеріальної точки (чи си-стеми) є мірою її механічного руху, вона вимірюєть-ся роботою, яку може здійснити ця точка (си-стема) при її гальмуванні до повної зупинки. Якщо робота  $A_{12}>0$ , то над матеріальною точкою (си-стемою) роботу виконують зовнішні сили і її кінетична енергія збільшується, якщо ж  $A_{12}<0$ , то ма-теріальна точка

*(система) віддає свою кінетичну енергію, здійснюючи роботу проти зовнішніх сил.*

У цьому випадку робота сили залежить від форми траєкторії руху матеріальної точки (системи). Такі системи називаються *неконсервативними*.

### **3.6 Консервативні та дисипативні сили**

Усі сили, які не являються *консервативними* називаються *неконсервативними силами*. Типовим прикладом неконсервативних сил є *дисипативні сили*: сили тертя ковзання, сили опору в рідинах і газах. Ці сили залежать від форми тіл і їхніх відносних швидкостей. *Робота цих сил ніколи не дорівнює нулю і завжди є від'ємною*, оскільки ці сили завжди напрямлені проти напрямку швидкості тіла відносно поверхні, по якій воно ковзає, чи відносно середовища, в якому тіло рухається. *Тільки у випадку*, коли рухається сама поверхня або середовище відносно тіла, тоді сила тертя чи опору *є додатною*. Такі сили називають рушійними. Неконсервативними є також гіроскопічні сили, які залежать від швидкості матеріальної точки і діють завжди перпендикулярно до вектора швидкості. Робота цих сил дорівнює нулю, але їх неможна вважати консервативними силами, оскільки вони залежать не тільки від положення, а й від швидкості рухомої матеріальної точки. Прикладом є сила Лоренца, що діє на рухому частинку в магнітному полі. У механіці гіроскопічними є сили Коріоліса, що описують рухому систему відліку, яка обертається відносно інерціальної системи. З рівності (3.30) зрозуміло, що робота консервативних сил по довільному замкненому шляху дорівнює нулю:

$$\oint (F dS) = 0 \quad (3.30.1)$$

### **3.7 Закон збереження і перетворення енергії**

Розглянемо систему, що складається із  $N$  матеріальних точок масами  $m_i$ , які рухаються відповідно зі швидкостями  $v_i$ , де  $i=1,2,3,\dots,N$ . У загальному випадку на кожну матеріальну точку системи діють як внутрішні консервативні і неконсервативні, так і зовнішні консервативні і неконсервативні сили. Позначивши через  $F_i$  – рівнодійну всіх консервативних (внутрішніх і зовнішніх) сил, які діють на  $i$ -ту точку, а через  $F_i^*$  – рівнодійну всіх неконсервативних (внутрішніх і зовнішніх) сил. Тоді рівняння другого закону Ньютона для  $i$ -ї матеріальної точки можна записати у вигляді:

$$m_i \frac{dv_i}{dt} = F_i + F_i^* \quad (3.31)$$

За проміжок часу  $dt$  кожна із матеріальних точок системи здійснює переміщення і змінює свою швидкість. Помножимо рівняння (3.31) на переміщення  $dr$ :

$$m_i \frac{dv_i}{dt} dr_i = F_i dr_i + F_i^* dr_i, \quad (3.32)$$

і переписавши це рівняння для кожної з матеріальних точок та просумувавши їх, одержимо:

$$\sum_i m_i \frac{dv_i}{dt} dr_i - \sum_i F_i dr_i = \sum_i F_i^* dr_i \quad (3.33)$$

Враховуючи, що  $dr_i = v_i dt$ , знаходимо, що перша сума дорівнює *зміні кінетичної енергії всієї системи* за проміжок часу  $dt$ :

$$\sum_i m_i \frac{dv_i}{dt} dr_i = \sum_i m_i v_i dv_i = d \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = dW, \quad (3.34)$$

друга сума в рівнянні (3.32) представляє собою зміну потенціальної енергії:

$$-\sum_i F_i dr_i = dU \quad (3.35)$$

тоді, врахувавши  $dW+dU=dE$  і рівняння (3.32) отримаємо:

$$dE = \sum_i F_i^* dr_i \quad (3.36)$$

Отже, зміна повної механічної енергії системи дорівнює сумарній роботі всіх діючих на матеріальні точки неконсервативних внутрішніх і зовнішніх сил.

Якщо, система рухається в полі тільки консервативних сил, то

$$\sum_i F_i^* dr_i = 0 \quad (3.37)$$

Отже,  $E=W+U=const$ . Таким чином можна сформулювати твердження: **повна механічна енергія системи, на яку діють тільки консервативні (і гіроскопічні) сили, зберігається, тобто не змінюється з часом.** – так формулюється закон збереження механічної енергії.

У консервативній системі потенціальна і кінетична енергії можуть перетворюватися одна в одну, але в будь-який момент часу їхня сума залишається сталою.

Якщо ж на систему діють крім консервативних сил ще й дисипативні, то, як випливає з рівняння (3.36) **механічна енергія системи змінюється, і ця зміна дорівнює сумарній роботі, виконаній за цей час всіма дисипативними силами.** Робота дисипативних сил завжди від'ємна, отже механічна енергія дисипативної системи зменшується. **Зменшення механічної енергії системи в процесі руху називається дисипацією (розсіянням) енергії.**

Дисипація енергії зумовлена перетворенням механічної енергії в роботу проти дисипативних сил у системі. Тобто механічна енергія витрачається проти сил тертя і опору. При

цьому тіла системи нагріваються і збільшується середня кінетична енергія теплового руху молекул, з яких складаються тіла. **Отже, енергія не зникає, а лише перетворюється з механічної у внутрішню енергію системи.** Так звучить загальний закон збереження енергії. Всі системи в природі певною мірою – дисипативні.

Закон збереження енергії – фундаментальний закон природи, обґрунтований численними дослідниками. Його відкрили в середині 19 століття незалежно один від одного німецькі вчені Ю. Майєр, Г. Гельмгольц, та англієць – Д. Джоуль.

### ***Контрольні запитання***

1. Що називають імпульсом матеріальної точки?
2. Що твердить основний закон динаміки матеріальної точки?
3. В чому полягає принцип причинності в класичній механіці?
4. Чому дорівнює зміна імпульсу матеріальної точки?
5. Що називають зовнішніми силами а що – внутрішніми?
6. Що називають головним вектором зовнішніх сил?
7. Що називають імпульсом механічної системи?
8. Вивести закон зміни імпульсу механічної системи.
9. Що являє собою основний закон динаміки поступального руху твердого тіла?
10. В чому полягає закон збереження імпульсу?
11. Що називають центром мас системи матеріальних точок?
12. Що таке центр мас?
13. Чому дорівнює швидкість центра мас механічної системи?
14. Сформулювати закон руху центра мас.
15. Що таке механічна енергія?
16. Що впливає на зміну механічної енергії?
17. Що характеризує робота сили?
18. У яких випадках сила роботу не виконує?

19. Яку силу називають консервативною (потенціальною)?

20. Чому дорівнює робота потенціальної (консервативної) сили?

21. Яке поле називають потенціальним (полем консервативних сил)?

22. Що називають потенціальною енергією матеріальної точки в полі консервативних сил?

23. Чому дорівнює потенціальна енергія в полі сил тяжіння поблизу землі?

24. Вивести чому дорівнює потенціальна енергія пружно деформованого тіла.

25. Де накопичується робота, виконана зовнішньою силою при пружній деформації?

26. Пояснити петлю пружного гістерезису.

27. Який фізичний зміст площі, обмеженої петлею пружного гістерезису?

28. Який фізичний зміст одиниці роботи?

29. Що називають потужністю сили?

30. Що називають кінетичною енергією механічної системи?

31. Дати означення кінетичної енергії матеріальної точки.

32. Які сили називають неконсервативними?

33. Вивести закон зміни повної механічної енергії системи.

34. В чому полягає закон збереження механічної енергії?

35. Що таке дисипація енергії і чому вона існує?

36. Як формулюється загальний закон збереження енергії?

## §4. Динаміка обертового руху твердого тіла

### 4.1 Момент сили. Момент імпульсу. Основне рівняння динаміки обертового руху твердого тіла

Рух матеріальної точки під дією сили вздовж довільної траєкторії можна розглядати як обертовий рух точки навколо миттєвої вісі. Для характеристики цього руху введемо такі основні поняття: момент інерції, момент імпульсу, момент сили.

**Моментом сили  $F$  відносно нерухомої точки  $O$**  називається векторний добуток радіус-вектора, проведеного з точки  $O$  в точку прикладання сили, на цю силу:

$$\vec{M} = [\vec{r} \cdot \vec{F}] \quad (4.1)$$

Напрямок вектора  $\vec{M}$  спрямований перпендикулярно до площини векторів  $\vec{r}$  і  $\vec{F}$  за правилом правого гвинта. Модуль моменту сили визначаємо:  $M = F \cdot r \cdot \sin \alpha = F \cdot l$ , де  $l$  – називають плечем сили.

**Моментом імпульсу матеріальної точки відносно нерухомої точки  $O$**  називається векторний добуток радіус-вектора матеріальної точки, проведеного з цієї точки  $O$ , на імпульс цієї матеріальної точки:

$$\vec{L} = [\vec{r} \cdot \vec{m} \cdot \vec{v}] \quad (4.2)$$

Відповідно момент імпульсу механічної системи відносно нерухомої точки є геометрична сума моментів імпульсу всіх матеріальних точок відносно тієї ж точки  $O$ :

$$\vec{L} = \sum_i^N \vec{L}_i = \sum_i^N \vec{r}_i \cdot \vec{m}_i \vec{v}_i \quad (4.2.1)$$

Продиференціювавши по часу це рівняння, одержимо:

$$\begin{aligned}
 \frac{dL}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N [r_i \cdot m_i v_i] = \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} [r_i \cdot m_i v_i] = \\
 &= \sum_{i=1}^N \left[ \frac{dr_i}{dt} \cdot m_i v_i \right] + \sum_{i=1}^N \left[ r_i \cdot \frac{d(m_i v_i)}{dt} \right] = \\
 &= \sum_{i=1}^N [v_i \cdot m_i v_i] + \sum_{i=1}^N \left[ r_i \cdot \frac{d(m_i v_i)}{dt} \right] = \\
 &= \sum_{i=1}^N [r_i \cdot F_i^{\text{зовн}}] + \sum_{i=1}^N \left[ r_i \cdot \sum_{k=1}^n F_{ik} \right] = \\
 &= \sum_{i=1}^N [r_i \cdot F_i^{\text{зовн}}] = M^{\text{зовн}}.
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

що випливає з рівнянь (3.5.1) і (3.5.2) § III, тобто:

$$\sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} (m_i v_i) = \sum_{i=1}^n F_i^{\text{зовн}} + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n F_{ik}$$

і врахувавши, що

$$\sum_{i=1}^N [v_i \cdot m_i v_i] = 0$$

оскільки векторний добуток двох однаково напрямлених векторів дорівнює 0. Другий доданок у рівнянні (4.3) рівний нулю на основі міркувань, викладених у § III до рівняння (3.6), (за третім законом Ньютона сума взаємодії всіх внутрішніх сил в замкнутій системі =0), отже, маємо:

$$\frac{dL}{dt} = M_{\text{зовн}} \quad (4.4)$$

зміна повного моменту імпульсу системи відносно довільної нерухомої точки дорівнює головному вектору моментів зовнішніх сил які прикладені до тіла.

Це рівняння виражає закон зміни моменту імпульсу, і є **основним рівнянням динаміки обертового руху матеріальної точки**. В проекціях на осі координат рівняння (4.4) має вигляд:

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x; \quad \frac{dL_y}{dt} = M_y; \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z$$

— це рівняння моментів відносно нерухомих координатних осей (проекції моменту імпульсу і результуючого моменту зовнішніх сил відносно точки), **тоді основне рівняння динаміки тіла, що обертається навколо нерухомої вісі матиме вигляд:**

$$\frac{dL}{dt} = M \quad (4.4.1)$$

**швидкість зміни моменту імпульсу тіла, що обертається відносно нерухомої вісі дорівнює головному моменту всіх зовнішніх сил, що діють на тіло відносно вісі обертання** — в цьому полягає фізичний зміст основного рівняння динаміки обертового руху твердого тіла.

## 4.2 Закон збереження моменту імпульсу

Для замкнутої системи матеріальних точок геометрична сума моментів зовнішніх сил відносно нерухомого початку (координат) дорівнює нулю, тому із співвідношення

(4.4) впливає **закон збереження моменту імпульсу** системи:

$$L = \sum_{i=1}^N [r_i \cdot p_i] = \sum_{i=1}^N [r_i \cdot m_i v_i] = \text{const} \quad (4.5)$$

у замкнутій системі матеріальних точок вектор повного моменту імпульсу відносно нерухомого по-чатку зберігається, тобто не змінюється з часом.

До простих обертальних рухів належать обертання твердих тіл навколо закріплених осей. **Закріпленими називаються** осі обертання, розміщення яких відносно частинок тіла, що обертаються, не змінюється.

Якщо тіло обертається з деякою сталою кутовою швидкістю, то лінійна швидкість часток матиме вигляд  $v_i = [\omega \cdot r_i]$ . Тоді момент імпульсу даного тіла відносно деякої закріпленої вісі буде мати вигляд:

$$L = \sum_{i=1}^N [r_i \cdot m_i v_i] = \sum_{i=1}^N m_i [r_i \cdot [\omega r_i]] = \sum_{i=1}^N m_i \omega r_i^2 = \omega \cdot \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 = I\omega, \quad (4.6)$$

де  $I$  — називається моментом інерції тіла, це є скалярна величина. Якщо система замкнена, то головний момент зовнішніх сил  $M=0$  і тоді:

$$L = I\omega = \text{const} \quad (4.7)$$

— ця рівність виражає **закон збереження моменту імпульсу**: повний момент імпульсу замкненої системи тіл відносно центра мас зберігається. Закон збереження моменту імпульсу системи проявляється у збереженні як модуля, так і напрямку вектора  $L$ . Цей закон можна спостерігати під час обертання фігуристки навколо власної осі, зокрема, коли змінюється її момент інерції за рахунок зміни положення рук, тоді змінюється її кутова швидкість.

### 4.3 Момент інерції

Спочатку ознайомимось з означенням моменту інерції матеріальної точки. **Моментом інерції матеріальної точки, яка обертається відносно нерухомої вісі – є добуток маси цієї матеріальної точки на квадрат її віддалі до вісі обертання, що виражається рівністю (4.8.1):**

$$I = mr^2 \quad (4.8.1)$$

**Моментом інерції тіла довільної форми відносно даної вісі обертання є сума добутків мас матеріальних точок тіла на квадрат їх віддалей до вісі обертання:**

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \quad (4.8)$$

для суцільного тіла:

$$I = \int r^2 dm = \int \rho r^2 dV \quad (4.9)$$

де інтеграл береться по всьому об'єму тіла;

$$\rho = \frac{dm}{dV} \text{ – густина маси тіла.}$$

Кожне тіло, незалежно від того, перебуває воно в стані спокою, чи обертається навколо деякої вісі обертання, має конкретне значення моменту інерції відносно конкретної вісі обертання.

**Фізичний зміст моменту інерції** полягає у тому, що це є міра інертності твердого тіла при обертальному русі.

Моменти інерції однорідних тіл, що мають правильну геометричну форму і, обертаються відносно вісі яка проходить через центр мас виражаються рівняннями:

а) порожнистий товстостінний циліндр, що обертається відносно геометричної вісі:

$$I = \frac{m(R_1^2 + R_2^2)}{2} ;$$

б) порожнистий тонкостінний циліндр:

$$I = mR^2 ;$$

в) суцільний циліндр (вал, диск):

$$I = \frac{mR^2}{2} ;$$

г) куля:

$$I = \frac{2}{5}mR^2 ;$$

д) для куба, якщо  $a$  – довжина ребра, а вісь обертання проходить перпендикулярно до граней:

$$I = \frac{ma^2}{6} ;$$

ж) для стержня довжиною  $l$ , якщо вісь обертання перпендикулярна до середини стержня:

$$I = \frac{1}{12}ml^2 ;$$

з) якщо вісь обертання стержня перпендикулярна до його кінця:

$$I = \frac{1}{3}ml^2 .$$

Якщо вісь обертання однорідного тіла не проходить через його центр мас, то обчислення моменту інерції відносно

цієї осі за формулою (4.8) ускладнюється. Тому, для обчислення моменту інерції відносно довільної осі, яка не проходить через центр мас тіла, використовують теорему Гюй-генса–Штейнера:

$$I = I_c + ma^2, \quad (4.10)$$

**момент інерції тіла відносно довільної вісі, яка не проходить через центр мас, дорівнює сумі: моменту інерції тіла відносно вісі, що проходить через центр мас і є паралельною даній осі, та добутку маси тіла на квадрат віддалі між цими осями.**

Базуючись на понятті моменту імпульсу, яке виражається через кутові величини, рівняння моменту сили для твердого тіла, яке обертається відносно закріпленої осі, що проходить через центр мас матиме вигляд:

$$M = \frac{dL}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = I\varepsilon, \quad (4.11)$$

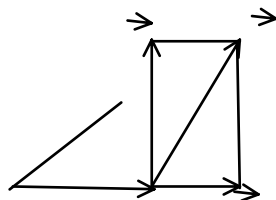
де  $\varepsilon$  – кутове прискорення тіла. Отже, у цьому випадку, момент сили тіла при обертотому русі можна обчислити як добуток моменту інерції цього тіла відносно заданої осі на його кутову швидкість.

#### **4.4 Робота, потужність і кінетична енергія при обертотому русі твердого тіла**

Під час обертання тіла навколо закріпленої осі зовнішній вектор сили виконує роботу.

Вектор сили  $\vec{F}$  є перпендикулярним до вісі обертання тіла.

Розкладемо вектор  $\vec{F}$  на дві складові – нормальну і тангенціальну (рис.4.1). Нормальна складова сили врівноважується реакцією опори осі, що проходить через центр мас тіла, а



тангенціальна складова переміщає точку (B) прикладання сили по колу радіусу  $r$ . При нескінченно малому переміщенні сила виконує елементарну роботу:

$$dA = F_{\tau} ds = F \sin \alpha ds, \quad (4.12)$$

де  $\alpha$  – кут між радіус вектором і силою. Враховуючи, що  $ds = r d\varphi$  рівняння (4.12) перепишемо:

Рисунок 4.1

$$dA = Fr \sin \alpha d\varphi = M d\varphi, \quad (4.12.1)$$

робота зовнішніх сил при повороті тіла на скінчений кут визначається як визначений інтеграл

$$A = \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} M d\varphi = M \Delta\varphi, \quad (4.13)$$

де  $\Delta\varphi$  – кут повороту, який можна визначити як число повних обертів:  $\Delta\varphi = 2\pi N$ . Щоб визначити миттєву потужність:

$$P = \frac{dA}{dt} = M \frac{d\varphi}{dt} = M\omega, \quad (4.14)$$

де  $\omega$  – кутова швидкість.

Робота, виконана під час обертання абсолютно Твердого тіла, дорівнює зміні його кінетичної енергії.

Для визначення кінетичної енергії обертального руху, розглянемо систему, що складається з  $N$  точок, жорстко зв'язаних між собою. Під час обертання такої системи навколо вісі частинки рухаються по колах, площини яких є перпендикулярними до вісі обертання. Кінетична енергія  $i$ -ї частинки масою  $m_i$  в даний момент часу буде:

$$W_i = \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{m_i r_i^2 \omega^2}{2}, \quad (4.15)$$

а для всієї системи точок (для твердого тіла) кінетична енергія обертового руху дорівнює сумі кінетичних енергій всіх його частинок:

$$W_i = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i r_i^2 \omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^N m_i r_i^2,$$

або, враховуючи рівність (4.8)

$$W = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{L^2}{2I}. \quad (4.16)$$

*Під дією моментів зовнішніх сил відносно нерухомої вісі обертання змінюється кутова швидкість тіла і відповідно його кінетична енергія, а отже виконується робота, яка дорівнює зміні кінетичної енергії:*

$$A = \frac{I\omega_2^2}{2} - \frac{I\omega_1^2}{2}. \quad (4.17)$$

***В окремих випадках тіло може обертатись навколо даної осі, а сама вісь може одночасно рухатись поступально (рух колеса велосипеда, автомобіля, складний рух шестерень в механізмах і т.д.), тобто відбувається ще й рух центра мас, тоді кінетична енергія буде складатися з суми кінетичних енергій поступального руху тіла зі швидкістю центра мас і обертового руху тіла навколо осі, що проходить через його центр мас.***

$$W = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_c \omega^2}{2}, \quad (4.18)$$

де  $I_c$  – момент інерції відносно осі, що проходить через центр мас.

## 4.5 Вільні осі

Якщо тілу, яке перебуває в обертальному русі відносно довільної вісі, надати можливість самостійно обертатися, то в загальному випадку орієнтація осі обертання в просторі змінюватиметься. Щоб вісь обертання твердого тіла не змінювала своєї орієнтації в просторі, на неї повинні діяти певні сили.

*Вісь, яка не змінює своєї орієнтації в просторі при відсутності дії на неї зовнішніх моментів сил, називається **вільною віссю обертання** або **головною віссю інерції**.*

Для будь-якого тіла існують три взаємно перпендикулярні осі, що проходять через його центр мас і є вільними.

*Вільні осі, момент інерції відносно яких є максимальним або мінімальним, називаються **осями стійкого обертання**.*

## 4.6 Гіроскопи

**Гіроскоп** – це масивне симетричне тіло, що швидко (з великою кутовою швидкістю) обертається навколо осі симетрії, яка є головною віссю інерції і може змінювати орієнтацію під дією головних моментів сил.

Щоб вісь гіроскопа могла вільно міняти своє положення в просторі, його монтують на карданному підвісі.

Якщо спробувати повернути вісь гіроскопа, то можна спостерігати своєрідне явище, яке називають **гіроскопічним ефектом**. Цей ефект проявляється в тому, що *рух осі гіроскопа визначається не напрямом дії зовнішньої сили, а напрямом її моменту*. Отже, якщо гіроскоп обертається навколо однієї з осей симетрії, а на нього подіяти деякою силою, що спрямована вздовж другої вісі симетрії, то гіроскоп почне обертатися відносно третьої вісі симетрії, яка є перпендикулярною до двох перших.

Якщо момент зовнішніх сил, що діють на гіроскоп, з часом не змінюється ні за величиною ні за напрямом, то виникає явище, яке називають **прецесією**. Це явище полягає в тому, що під час обертання гіроскопа відносно однієї з осей симетрії з великою швидкістю, гіроскоп рівномірно, з невеликою і сталою кутовою швидкістю обертається відносно вісі, яка весь час складає з нею кут  $90^\circ$ .

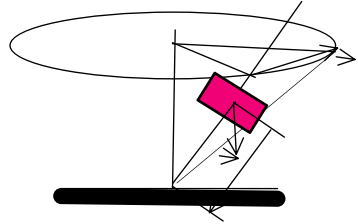


Рисунок 4.2

Прецесія матиме місце у випадку дії на гіроскоп **моменту сили тяжіння** –  $M = mgl \sin \alpha$ , (рис.4.2) який протягом часу  $dt$  спричинить приріст моменту імпульсу гіроскопа:

$$dL = Mdt = m \cdot g \cdot l \cdot \sin \alpha dt.$$

Зміна моменту імпульсу спричиняє повертання осі гіроскопа на кут  $d\varphi$  :

$$d\varphi = \frac{dL}{L \sin \alpha} = \frac{mgl \sin \alpha dt}{L \sin \alpha} = \frac{mgl dt}{L}. \quad (4.20)$$

Оскільки при повертанні осі гіроскопа момент сили  $M$  залишається перпендикулярним до неї (осі), то обертання осі гіроскопа буде рівномірним, і вона описуватиме конічну поверхню.

Тоді кутова швидкість прецесії буде:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{mgl}{L} = \frac{mgl}{I\omega}. \quad (4.21)$$

Щоб запобігти прецесії, на вісь гіроскопа діють сили з боку підшипників, ці сили називають **гіроскопічними силами**. Властивість зрівноваженого гіроскопа зберігати незмінним напрям своєї осі обертання використовується для

автоматичного управління рухом торпед, ракет, літаків, кораблів та інших апаратів. На кораблях застосовують гіроскопічні компаси. Ротори парових турбін на кораблях, турбінні гвинти літака, – це є приклади великих гіроскопів.

### *Контрольні запитання*

1. Що називають моментом сили відносно нерухомої точки?
2. Що називають моментом імпульсу матеріальної точки відносно нерухомої точки?
3. Сформулювати закон зміни моменту імпульсу і вивести його.
4. Сформулювати основне рівняння динаміки обертового руху твердого тіла.
5. Записати рівняння динаміки тіла, що обертається навколо нерухомої вісі.
6. Сформулювати і записати закон збереження моменту імпульсу системи.
7. Які осі обертання називаються закріпленими?
8. Чому рівний момент інерції тіла довільної форми відносно вісі обертання?
9. Який фізичний зміст моменту інерції тіла?
10. Записати момент інерції різних тіл правильної геометричної форми.
11. Зміст теореми Штейнера?
12. Рівняння моменту сили для твердого тіла, що обертається відносно вісі, яка проходить через центр його мас?
13. Чому дорівнює робота зовнішніх сил при повороті тіла на деякий кут?
14. Чому дорівнює миттєва потужність при обертовому русі?
15. Чому дорівнює робота при зміні кутової швидкості тіла, що обертається?
16. Чому дорівнює кінетична енергія тіла, яке котиться?
17. Яка вісь обертання називається вільною віссю обертання?

18. Які осі називаються осями стійкого обертання (головними)?
19. Що називають гіроскопом?
20. В чому полягає гіроскопічний ефект?
21. В чому полягає явище прецесії?
22. Як обчислюється кут, на який повертається вісь гіроскопа через зміну моменту імпульсу?
23. Які сили називають гіроскопічними силами?
24. Де застосовують гіроскопи?

## §5. Механіка рідин і газів

### 5.1 Елементи гідроаеростатики

**Гідроаеростатика** вивчає рівновагу рідин і газів. В механіці рідини і гази розглядають як **суцільні середовища** – це такі середовища, які мають властивість текучості, при цьому їх молекулярна будова не враховується. **Текучість** зумовлена рухливістю молекул. Якщо в середині рідини виділити довільний елементарний об'єм і розглянути сили, які на нього діють, то виявляється, що тут присутні і зовнішні і внутрішні сили. **Внутрішні сили** зумовлені взаємодією частинок рідини, але вони врівноважуються і їх рівнодійна рівна нулю. Зовнішні сили зумовлені дією сусідніх елементарних об'ємів, сил тяжіння і т.д. Якщо рідина перебуває в спокої, то її елементарні об'єми не змінюють взаємного розташування. Виділимо в такій рідині деякий об'єм, обмежений поверхнею, наприклад сфе-



Рисунок 5.1

ричної форми (рис.5.1). Розділимо цей об'єм на дві однакові половини площиною  $\Delta S$ , що проходить через центр сфери. Обидві частини об'ємів діють один на одного з пружними силами рівними по модулю і протилежними за напрямком. Якщо уявно вилучити одну з частин (ліву півкулю), то до площини  $\Delta S$  слід прикласти деяку силу  $\Delta F$ , яка дорівнює дії об'єму рідини, що вилучили щоб не порушити рівновагу. Напрямок цієї сили повинен бути перпендикулярним до площини  $\Delta S$ , інакше тангенціальна складова зумовить рух частинок рідини, внаслідок чого порушиться рівновага. **Величину, яка дорівнює відношенню сили, що діє перпендикулярно (нормально) на елемент поверхні, до її площі, називають тиском:**

$$P = \frac{\Delta F}{\Delta S} \quad (5.1)$$

Якщо *сила*, з якою рідина діє на поверхню площею  $\Delta S$ , *розподілена нерівномірно*, то говорять про *тиск в даній точці* рідини. Його величина визначається формулою:

$$P = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{dF}{dS} \quad (5.2)$$

Тиск – величина скалярна. Одиниці вимірювання в системі СІ

–  $1 \text{ Па} = 1 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$ . В побуті тиск вимірюють в атмосферах, технічних атмосферах, мм.рт.ст., барах і т.д.

Для рідин і газів, які перебувають у рівновазі, є справедливим **закон Паскаля**: *тиск у будь-якій точці рідини або газу, що перебувають у спокої, однако-вий в усіх напрямках і передається в усіх напрямках однаково.*

Другим законом, який відомий зі шкільного курсу фізики, є **закон Архімеда**: *на будь-яке тіло, занурене в рідину (газ), діє з боку рідини (газу) виштовхувальна сила, яка дорівнює вазі витісненої тілом рідини (газу).*

## **5.2 Ідеальні рідини. Лінії течії, трубки течії**

**Гідродинаміка** – розділ, в якому вивчається рух нестисливих рідин і взаємодія їх з твердими тілами.

**Завданням гідродинаміки** є – знаходження співвідношень, які дають можливість за величинами сил описати стан руху рідини, або навпаки, за станом руху рідини знайти діючі сили.

Рух рідини або газу можна вивчати двома методами. Перший полягає у тому, щоб вивчати рух кожної частинки зо-

крема, тобто визначати кінетичні характеристики руху (переміщення, швидкість, прискорення) частинок рідини під час переміщення їх у просторі і в часі. Це – метод *Лагранжа*, який є математично громіздким. На практиці використовують інший метод, а саме: в потоці рідини виділяють фіксований елементарний об'єм і вивчають зміни, які відбуваються в кожній точці цього об'єму з часом. Це, так званий, метод Ейлера. Тоді говорять не про швидкість і прискорення частинок рідини, а *потіку рідини*.

Під час вивчення руху рідини вважають, що вона є ідеальною. *Ідеальною вважають рідину, яка абсолютно нестислива і повністю позбавлена внутрішнього тертя. Потік рідини або газу називають стаціонарним, якщо його швидкість в усіх точках простору з часом не змінюється.*

Для полегшення аналізу руху рідини використовують поняття лінії або трубки течії. *Лінія течії, це така лінія, дотична до якої в кожній точці співпадає з на-прямом вектора швидкості.* Лінія течії характеризує на-прям руху нескінченної множини частинок, які в даний момент знаходяться на лінії.

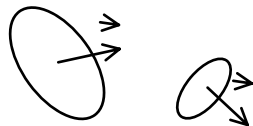
*Частину рідини, обмежену лініями течії, називають трубкою течії.* Всі частинки, що містяться всередині трубки течії, не виходять за межі трубки і жодна з частинок, що знаходяться за межами трубки течії, не проникає в неї. Це поняття можна собі уявити, як трубку з жорсткою бічною поверхнею, по якій протікає рідина.

### 5.3 Умова неперервності струмини

Розглянемо рисунок (5.2), виберемо на ньому два довільні перерізи, площі яких рівні  $S_1$  і  $S_2$ , швидкості в цих перерізах відповідно становлять  $U_1$  і  $U_2$ . Оскільки рідина є ідеальною, тобто в усіх точках густина однакова, то на основі

закону збереження маси, можна записати, що  $dm_1 = \rho v_1 dS_1$  – маса рідини, що протікає за одиницю часу через площу  $S_1$ , а  $dm_2 = \rho v_2 dS_2$  – маса рідини, що протікає за одиницю часу через площу  $S_2$ . Ці елементарні маси є однаковими, тобто справедливим є рівняння:

$$v_1 dS_1 = v_2 dS_2, \quad (5.3)$$



яке називають **рівнянням неперервності струми-ни**: **добуток швидкості течії ідеальної рідини або газу на площу поперечного перерізу трубки течії є величина стала для даної трубки течії.**  
Рисунок .5.2

Рівняння (5.3) можна застосовувати як для рідин так і для газів.

Оскільки переріз  $S$  можна вибрати довільно, рівняння (5.3) можна записати:

$$\rho v dS = dm_{сек} = const, \quad (5.4)$$

де  $dm_{сек} = \frac{dm}{dt}$  – називають секундний масовий розхід рідини; або

$$v dS = dV_{сек} = const, \quad (5.5)$$

де  $dV_{сек} = \frac{dV}{dt}$  – секундний об'ємний розхід рідини.

## 5.4 Рівняння Бернуллі для ідеальної рідини. Наслідки з рівняння Бернуллі

Встановимо **зв'язок** між **тиском** і **швидкістю** стаціонарного руху ідеальної рідини.

Виділимо в трубі течії (рис.5.3) довільний об'єм  $ABCD$ . Вважаємо, що рідина перебуває в полі земного тяжіння. Позначимо  $h_1$  і  $h_2$  висоти розміщення центрів перерізів  $AB$  і  $CD$  над деяким горизонтальним рівнем. За час  $\Delta t$  рідина переміститься з положення  $ABCD$  в положення  $A'B'C'D'$ . Визначимо зміну повної енергії, яка відбувається в цій області між  $AB$  і  $CD$ . За цей час маса рідини, що знаходиться між перерізами  $ABA'B'$  втікає в область  $ABCD$ , а маса, що знаходиться між перерізами  $CDC'D'$  – витікає з неї. Величина зміни повної енергії, яка є сумою кінетичної і потенціальної енергій маси  $\Delta m$  рідини, дорівнює різниці повних енергій мас, які втікають і витікають ( $\Delta m_1 = \Delta m_2 = \Delta m$ ):

$$\Delta E = \left( \frac{\Delta m v_2^2}{2} + \Delta m g h_2 \right) - \left( \frac{\Delta m v_1^2}{2} + \Delta m g h_1 \right). \quad (5.6)$$

За законом збереження енергії, енергія  $\Delta E$  дорівнює роботі зовнішніх сил, що переміщують масу  $\Delta m$  рідини від перерізу  $AB$  до перерізу  $CD$ :  $\Delta E = A$ . Ця робота зовнішніх сил дорівнює роботі, яка виконується при переміщенні всієї ділянки рідини, що знаходиться між перерізами  $AB$  і  $CD$ . За цей час буде перенесена маса рідини

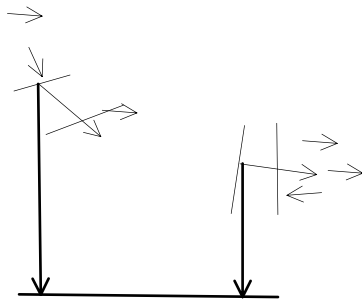


Рисунок 5.3

$\Delta m$ , яка пройде шлях:  $l_1 = v_2 \cdot \Delta t$  від перерізу  $AB$  і  $l_2 = v_1 \cdot \Delta t$  від перерізу  $CD$ . Сили, що діють на обидва кінці виділеної ділянки рідини, відповідно рівні:  $F_1 = p_1 \Delta S_1$  і  $F_2 = p_2 \Delta S_2$ .

Сили тиску, що діють на бічну поверхню роботи не виконують, оскільки вони завжди перпендикулярні до напрямку руху частинок рідини. Під час переміщення межі  $AB$  в положення  $A'B'$  виконується додатна робота, оскільки напрям дії сили тиску на межу збігається з напрямом

переміщення:  $A_1 = p_1 \Delta S_1 v_1 \Delta t$ . Робота виконана під час переміщення межі  $CD$  в положення  $C'D'$  буде від'ємною, оскільки напрям дії сили тиску на цю межу є протилежний до напрямку

переміщення:  $A_2 = p_2 \Delta S_2 v_2 \Delta t$ . Тоді загальна робота, виконана силами тиску буде:

$$A_1 - A_2 = \Delta A = p_1 \Delta S_1 v_1 \Delta t - p_2 \Delta S_2 v_2 \Delta t. \quad (5.7)$$

За законом неперервності струмини

$$S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t = \Delta V, \quad (5.7.1)$$

і враховуючи рівність (5.6), одержимо:

$$\begin{aligned} A &= p_1 \Delta V - p_2 \Delta V = \\ &= \frac{m_2 v_2^2}{2} + m_2 g h_2 - \frac{m_1 v_1^2}{2} - m_1 g h_1, \end{aligned} \quad (5.7.2)$$

тоді, в загальному, рівняння буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{m_2 v_2^2}{2} + m_2 g h_2 - \frac{m_1 v_1^2}{2} - m_1 g h_1 &= \\ &= p_1 \Delta S_1 v_1 \Delta t - p_2 \Delta S_2 v_2 \Delta t \end{aligned}, \quad (5.8)$$

або перепишемо:

$$\begin{aligned} \frac{m_1 v_1^2}{2} + m_1 g h_1 + p_1 \Delta S_1 v_1 \Delta t &= \\ &= \frac{m_2 v_2^2}{2} + m_2 g h_2 + p_2 \Delta S_2 v_2 \Delta t, \end{aligned} \quad (5.9)$$

враховуючи рівняння неперервності струмени вважаємо, що  $m_1 = m_2$  і  $v \Delta S \Delta t = \Delta V$  – об'єм теж сталий, то поділивши ліву і праву частину рівняння на об'єм, і, врахувавши, що відно-

шення  $\frac{\Delta m}{\Delta V} = \rho$  – це густина, одержимо в кінцевому варіанті:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2. \quad (5.10)$$

Співвідношення (5.10) називається **рівнянням Бернуллі для стаціонарного потоку ідеальної рідини**: пер-ші доданки – називаються **динамічним тиском**, другі – **гідростатичним тиском**, а треті – **статичним тиском**. Суму статичного і динамічного тисків називають **пов-ним тиском** або **напором**. **Фізичний зміст цього рівняння полягає у тому, що воно виражає закон збереження енергії для ідеального нестискува-ного потоку рідини або газу.**

Рівняння Бернуллі можна застосовувати для реальних рідин, в'язкість яких невелика, а також для газів, швидкість руху яких значно менша від швидкості поширення в них звуку.

**Н а с л і д к и:** 1) якщо  $S_1 \neq S_2$  а вісь трубки розмі-щена горизонтально ( $h=const$ ), то рівність (5.7) буде мати вигляд:

$$\frac{\rho v^2}{2} + p = \text{const} \quad (5.10.1)$$

звідки видно, що тиск більший там, де швидкість менша, тобто де більший переріз. Це пояснюється тим, що при переході рідини з ширшої частини у вужчу, швидкість рідини зростає, вона рухається з прискоренням. Поява прискорення зумовлена дією сили, напрям якої за другим законом Ньютона, збігається з напрямом прискорення, оскільки ця сила зумовлена різницею тисків, то тиск більший у ширшій частині трубки течії;

2) якщо  $S_1 = S_2$  і  $v_1 = v_2$ , то рівняння Бернуллі матиме вигляд:

$$\rho g h_1 + p_1 = \rho g h_2 + p_2,$$

звідки різниця тисків буде:

$$\Delta p_0 = p_2 - p_1 = \rho g (h_1 - h_2), \quad (5.10.2)$$

звідки випливає, що різниця тисків дорівнює гідростатичному тиску стовпа рідини.

3) якщо  $v_1 \neq v_2$ , то, в загальному випадку, різниця тисків буде:

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \rho g (h_1 - h_2) + \frac{\rho}{2} (v_1^2 - v_2^2) \quad (5.10.3)$$

з рівнянь (5.10.2) і (5.10.3) видно, що різниця тисків у рухомій і нерухомій рідинах для перерізів, які розміщені на різних висотах  $h_1$  і  $h_2$  не однакові. У другому випадку різниця тисків

більша на величину  $\frac{\rho(v_1^2 - v_2^2)}{2}$ .

Оскільки сума тиску і динамічного напору в потоці рідини стала, то в струмені тиск завжди менший, ніж у нерухомій рідині. Це явище застосовується у

пульверизаторах, карбюраторах, водо-струминних насосах та ін.

## 5.5 Внутрішнє тертя в рідинах і газах

Для з'ясування закономірностей, яким підлягають сили в'язкого тертя, розглянемо дві пластини (рис.5.4), що знаходяться у рідині, лінійні розміри яких значно перевищують віддаль між ними. Будемо вважати, що нижня пластина  $A$  – нерухома, а верхня  $B$  – рухається відносно

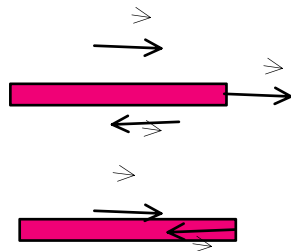


Рисунок 5.4

но нижньої зі швидкістю  $v_0$ , під дією незмінної сили  $F$ . Оскільки, пластина рухається без прискорення, то на неї діє у протилежному напрямі зрівноважуюча сила, яка є силою в'язкого тертя, тобто  $F_T = -F$ . Внаслідок руху шарів рідини, нижня пластина  $A$  також буде рухатися, а щоб цього не було, до неї треба прикласти силу  $F$ , але протилежного напрямку.

Ісаак Ньютон експериментально встановив, що прикладена сила пропорційна площі  $S$  пластин, швидкості  $v_0$  і обернено пропорційна віддалі між ними, тобто:

$$F = -\eta S \frac{v_0}{d}, \quad (5.11)$$

де  $\eta$  – коефіцієнт пропорційності, який залежить від природи і стану рідини. Його називають **коефіцієнтом динамічної в'язкості**. Знак «мінус» показує, що на більш швидкі шари газу діє сила тертя, напрямлена проти швидкості цих шарів. Рівність (5.11) справедлива і для випадку, коли обидві пластини рухаються рівномірно, але з різними швидкостями, тоді ця рівність буде мати вигляд:

$$F = -\eta S \frac{v_1 - v_2}{d} . \quad (5.11.1)$$

Оскільки зміну швидкості на одиницю відстані між шарами

називають *градієнтом швидкості* –  $\text{grad} v = \frac{dv}{dx}$ , то рівність (5.11.1) запишеться:

$$F = -\eta S \frac{dv}{dx} . \quad (5.11.2)$$

З цього рівняння маємо **фізичний зміст коефіцієнта динамічної в'язкості**: це фізична величина, яка чисельно дорівнює силі внутрішнього тертя, що діє на одиницю площі рухомих шарів рідини при градієнті швидкості рівному одиниці. Одиницею в'язкості в СІ є  $\text{Па} \cdot \text{с}$ .

Якщо реальна рідина рухається, наприклад, в горизонтально розміщеній трубі, то швидкість потоку в різних точках поперечного перерізу є різною. Максимальною швидкість буде в точках, які знаходяться на вісі симетрії труби, а мінімальною – біля стінок цієї труби. Оскільки шар рідини, що рухається вздовж стінок труби, ніби «прилипає» до неї, тоді внаслідок передачі кількості руху від одного шару рідини до іншого, усі сусідні шари сповільнюються тими, які рухаються повільніше за них, але разом з тим шари, що рухаються повільніше прискорюються тими шарами, що рухаються швидше. В результаті зміна швидкості шарів рідини спостерігається від центра труби до її стінок. **Сили, які призводять до зміни швидкості руху шарів рідини, називаються силами внутрішнього тертя.**

Відношення динамічної в'язкості до густини, носить назву **кінематичної в'язкості**:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

$$[\nu] = \frac{M^2}{C}$$

Одиниці вимірювання кінематичної в'язкості:

*Величина, обернена до динамічної в'язкості, носить назву – **текучість**.*

В'язкість рідин з температурою змінюється, а саме, з підвищенням температури в'язкість рідин зменшується, температурна залежність в'язкості рідини від температури дається співвідношенням:

$$\eta = Ae^{-\frac{E}{kT}}, \quad (5.12.1)$$

де  $A$  – константа для кожної рідини;

$E$  – енергія активації, тобто та енергія, яка необхідна для переходу молекули в нове положення ( $\sim 2 \div 3 \cdot 10^{-20}$  Дж);

$k$  – стала Больцмана;

$T$  – абсолютна термодинамічна температура.

Для **газів** навпаки – з підвищенням температури в'язкість підвищується за законом, який встановив І.П.Пуллой:

$$\eta = \eta_0 (1 + \alpha t)^n, \quad (5.12.2)$$

де  $\eta_0$  – коефіцієнт динамічної в'язкості газу при  $0^\circ \text{C}$ ;

$\alpha$  – коефіцієнт пропорційності;

$2/3 < n < 3/4$ .

Загалом для газів

$$\eta \sim T^n,$$

для  $T \geq C$   $n=1/2$ ; для  $T \ll C$   $n=3/2$ , де  $C$  – стала Сезерленда, яка для кожного газу є різною, а знайомство з цими константами буде на спецкурсах.

## 5.6 Ламінарний та турбулентний режими течії. Число Рейнольдса

Рух течії, що розглядався, тобто шаруватий рух, називають (по-латині) **ламінарним**. **Ламінарний рух**, це такий рух рідини, при якому шари рідини ковзають один відносно одного і не перемішуються, при цьому напрями швидкості частинок у довільному перерізі паралельні між собою. Ламінарна течія є стаціонарною.

Зі збільшенням швидкості руху рідини шаруватість порушується, рух стає складнішим, в кожній точці рідини відбувається хаотичне відхилення вектора швидкості від його середнього напрямку, такий рух називають **турбулентним**. Отже, рух рідини, що відбувається за рахунок перемішування шарів рідини, називають **турбулентним**. Внаслідок перемішування шарів, середня швидкість практично є однаковою в усьому потоці, і тільки в тонкому пристінковому шарі вона практично  $\approx 0$ . Тому турбулентні потоки, які є найбільш поширеним видом руху рідин і газів у природі, умовно розглядають як **стаціонарний** потік з усередненими характеристиками.

Рух рідини можна охарактеризувати такими основними характеристиками:

- 1) радіус-вектором;  $r$
  - 2) вектором швидкості елементарного об'єму;  $v$
  - 3) характерним розміром потоку;  $l$  або  $(D - \text{діаметр труби})$
  - 4) характерною швидкістю потоку;  $v_0$
  - 5) густиною;  $\rho$
  - 6) динамічною в'язкістю;  $\eta$
  - 7) стисливістю (або швидкістю поширення звуку в рідині);  $c$
  - 8) характерним часом, протягом якого відбуваються істотні зміни в потоці рідини;  $\tau$
- $r; v; v_0; l; \rho; \eta; c; g; \tau.$

Між цими величинами існує функціональний зв'язок, у вигляді безрозмірних комплексів:

$$Re = \frac{\rho l v_0}{\eta} = \frac{l v_0}{\nu} \quad - \text{число Рейнольдса};$$

$$Fr = \frac{v_0^2}{gl} \quad - \text{число Фруда};$$

$$M = \frac{v_0}{c} \quad - \text{число Маха};$$

$$S = \frac{v_0 \tau}{l} \quad - \text{число Струхаля}.$$

Ми зупинимось лише на числі Рейнольдса і Фруда, оскільки решта величин буде розглядатись у спецкурсі гідродинаміки. **Фізичний зміст числа Рейнольдса** полягає у тому, що воно визначає відношення кінетичної енергії рідини до втрат енергії, зумовленої роботою сил в'язкості на шляху, що дорівнює характерній довжині. Число Рейнольдса визначає відносну роль інерції і в'язкості рідини під час течії. При великих числах Рейнольдса основну роль відіграє інерція, а при малих – в'язкість.

**Число Фруда** за своїм порядком визначає відношення кінетичної енергії рідини до приросту енергії, зумовленої роботою сили тяжіння на шляху, що дорівнює характерній довжині.

Течії вважають *подібними*, якщо вони мають однакові числа Рейнольдса і Фруда.

**Швидкість** при якій ламінарний рух переходить у турбулентний називається **критичною**. За-мість критичної швидкості користуються числом Рейнольдса:  $Re_{кр}=1100$ , і це немає значення в наслідок чого це число має таку величину (чи через збільшення швидкості течії, чи через збільшення характерного розміру  $l$ , чи через зменшення в'язкості). Тому

число Рейнольдса є критерієм механічної подібності різних потоків.

### 5.7 Формула Стокса

Характер взаємодії між рідиною і тілом, що міститься в рідині, залежить від їхньої відносної швидкості. Сила, з якою діє рідина на тіло при їхньому відносному русі (немає значення чи тіло рухається в рідині, чи рідина рухається відносно тіла), залежить від форми тіла і, в загальному випадку, буде напрямлена під деяким кутом до напрямку їх відносного руху. Цю силу завжди можна розкласти на дві взаємно перпендикулярні складові: складову, що діє у напрямку потоку – її називають *силою лобового опору*; і складову, що перпендикулярна до напрямку потоку – її називають *підіймальною силою*.

*На симетричні тіла, вісь симетрії яких збігається з напрямком потоку, діє тільки сила лобового опору.* Вона залежить від форми та розмірів тіл, швидкості потоку рідини та її властивостей. Але, при обтіканні кулі потоком рідини лінії течії поблизу поверхні кулі зазнають симетричних викривлень, а оскільки відповідно до рівняння Бернуллі розподіл тисків буде симетричним то результуюча сила, що діє на поверхню кулі дорівнює нулю. Отже, при розміщенні симетричних тіл у *стаціонарному потоці ідеальної рідини сила лобового опору дорівнює нулю*. Це, так званий, парадокс д'Аламбера.

Взаємодія *реальних рідин* з твердими тілами є зовсім іншою і це пояснюється наявністю у реальних рідин *в'язкості*. В'язкість спричиняє появу навколо тіла тонкого шару рідини, який ніби «прилипає» до поверхні тіла. Відносна швидкість цього шару є рівною нулю, а по мірі віддалення від поверхні тіла швидкість слоїв рідини зростає, тобто існує дуже великий поперечний градієнт швидкості. Але це відбувається лише у *пристінковому шарі* рідини, який без посередньо дотикається до поверхні тіла і рухається з ним як одне ціле. Товщина  $\delta$  цього шару залежить від характерного

розміру  $l$  тіла і від числа Рейнольдса та визначається з рівності:

$$\delta = \frac{l}{\sqrt{Re}} \quad (5.13)$$

У цьому *пристінковому шарі*, як і під час течії в трубі, режими течії рідини можуть бути і ламінарними і турбулентними. Власне ці режими і визначають характер взаємодії тіла з потоком.

Під час переходу в *пристінковому шарі* ламінарного режиму течії в турбулентний – різко зростає опір рухові за рахунок опору тертя і опору тиску.

**Опір тертя.** При малих швидкостях ( $Re < 100$ ), тобто коли в пристінковому шарі має місце ламінарний режим течії, сила тиску на поверхню симетричного тіла буде рівна нулю, як і у випадку ідеальної рідини. Отже, на тіло буде діяти збоку рідини тільки сила внутрішнього тертя, яка залежить тільки від в'язкості  $\eta$ , відносної швидкості  $v_o$  (швидкість незбуреного потоку) і характерного розміру тіла (для кулі це радіус –  $R$ ).

Математично Джорж Габріель Стокс (*англ.*) встановив формулу, яка виражає залежність опору тертя від цих трьох параметрів:

**За законом Стокса, сила опору пропорційна відносній швидкості тіла і рідини, коефіцієнту в'язкості і лінійним розмірам тіла.** Зокрема для кулі це рівняння матиме вигляд:

$$F_{тер} = 6\pi r v_o \eta \quad (5.14)$$

Це є справедливим лише для значень  $v_o$  при яких зберігається плавне ламінарне обтікання тіла рідиною.

**Опір тиску.** При збільшенні швидкості потоку настає момент, коли за тілом з'являються збурення, що час від часу відриваються від тіла і відносяться потоком, утворюючи за тілом, так звану, «вихрову доріжку», яка «розчиняється» десь далеко від тіла (рис.5.5.).

Утворення збурень призводить до порушення симетрії в розподілі тиску рідини на поверхню тіла. Якщо в незбуреному потоці тиск рідини становить  $p_0$ , то в області утворення «вихро-

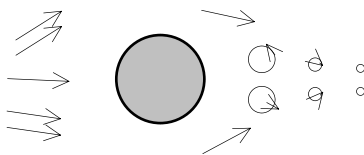


Рисунок 5.5

вої доріжки» тиск є меншим ніж  $p_0$ . З протилежного боку від «вихрової доріжки» тиск рідини згідно закону Бернуллі до-

рівнює  $p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2}$ , тобто є більшим ніж у незбуреному потоці. Отже, результуюча сил тиску, розподілена по поверхні тіла, є відмінною від нуля і має напрям (в наслідок симетрії) той самий, що й напрям потоку. Це і є **сила опору тиску**  $F_T$ , а, оскільки, різниця тисків попереду і позаду тіла оцінюється

величиною  $\frac{\rho v_0^2}{2}$ , то й ця сила опору залежить від густини рідини  $\rho$  і квадрату відносної швидкості між тілом і рідиною  $v_0$ . Отже, закон, якому підлягає сила опору при наявності збурень позаду тіла має вигляд:

$$F_{\text{тиску}} = C_x S \frac{\rho v_0^2}{2}, \quad (5.15)$$

де  $C_x$  – безрозмірний коефіцієнт, який називають коефіцієнтом лобового тиску, який залежить лише від форми тіла і не залежить від його розмірів (рис.5.6) (для двох тіл однакової форми, але різних за розміром цей коефіцієнт є однаковим);

$S$  – характерний розмір тіла – найбільша площа перерізу тіла у площині, перпендикулярній до напрямку потоку (так званий **міделів переріз**).

Як видно з рис.5.6 основний вплив на величину лобового опору має форма не передньої частини тіла, а зад-



ньої, тобто тої, позаду якої утворюються «збурення».  
Рисунок 5.6

На тіло в потоці рідини, при виникненні збурень, діє також і сила тертя, але оскільки ця сила пропорційна лише відносній швидкості в першій степені, в той час як сила тиску пропорційна квадрату цієї швидкості, то при великих швидкостях силою тертя нехтують.

## 5.8 Формула Пуазейля

Розглянемо як змінюється швидкість течії в залежності від відстані до вісі труби.

Розглянемо стаціонарний потік рідини у горизонтальній циліндричній трубі (рис.5.7) незмінного перерізу, радіус якої  $R$ . Виділимо в цій трубі циліндричний об'єм рідини радіуса  $r$  і довжини  $l$ .

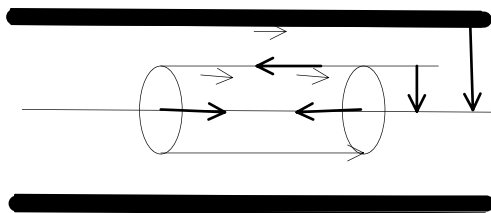


Рисунок 5.7

На основи циліндра діють сили тиску, рівнодійна яких збігається з напрямом течії:

$$F = (p_1 - p_2)\pi r^2, \quad (5.16)$$

На бічну поверхню циліндра діє сила тертя, яка на основі виразу (5.11.2) буде мати вигляд:

$$F_t = -\eta S \frac{dv}{dx} = -\eta 2\pi r l \frac{dv}{dr}, \quad (5.17)$$

де  $S = 2\pi r l$  – площа бічної поверхні циліндра.

Для стаціонарного потоку  $F = F_t$ , тобто:

$$(p_1 - p_2)\pi r^2 = -2\pi \eta r l \frac{dv}{dr}. \quad (5.18)$$

Оскільки, швидкість руху рідини з віддаленням від осі

труби зменшується, то  $\frac{dv}{dr} < 0$  і рівняння (5.18) набуває вигляду:

$$(p_1 - p_2)r = 2\eta l \frac{dv}{dr}, \quad (5.19)$$

звідки одержимо:

$$dv = \frac{p_1 - p_2}{2\eta l} r dr. \quad (5.20)$$

Проінтегрувавши (5.20), одержимо:

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} r^2 + C. \quad (5.21)$$

Сталу інтегрування визначасмо з граничних умов: для  $\Delta m$  тоді:

$$C = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} R^2. \quad (5.22)$$

Враховуючи це, рівність (5.21) буде мати вигляд:

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} (R^2 - r^2), \quad (5.23)$$

де  $R$  – внутрішній радіус труби;

$r$  – віддаль від вісі труби.

Рівняння (5.23) виражає залежність швидкості течії рідини в залежності від відстані до вісі труби. Швидкість

рідини є максимальної на вісі труби, де її значення обчислюється за формулою:

$$v_{max} = \frac{p_1 - p_2}{4l\eta} R^2 \quad (5.23.1)$$

Визначимо об'єм рідини, що протікає через поперечний переріз труби за проміжок часу  $t$ . Уявно поділимо поперечний переріз труби на концентричні кільця, ширина яких  $dr$  (рис.5.8). Площа заштрихованного кільця  $dS = 2\pi r dr$ . За час  $t$  через таке кільце протікає об'єм рідини:

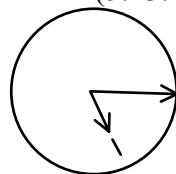


Рисунок 5.8

$$dV = v t dS = 2\pi r v t dr \quad (5.24)$$

Враховуючи рівняння (5.23), будемо мати:

$$dV = \frac{(p_1 - p_2)\pi t}{2l\eta} (R^2 - r^2) r dr \quad (5.25)$$

Проінтегрувавши цей вираз, одержимо:

$$V = \frac{(p_1 - p_2)\pi t}{2l\eta} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr = \frac{(p_1 - p_2)\pi t}{2l\eta} \left( \frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right) = \frac{\pi R^4 \Delta p t}{8l\eta} \quad (5.26)$$

Отже, об'єм рідини, що витікає за деякий час при сталому перепаді тисків визначається рівнянням, яке називають **формулою (законом) Пуазейля**:

$$V = \frac{\pi R^4 \Delta p l}{8 l \eta} , \quad (5.27)$$

де  $R$  – радіус труби;  
 $l$  – довжина труби,  
 $\Delta p$  – перепад тисків рідини.  
 Якщо врахуємо рівняння (5.5) у вигляді:

$$dV_{сек} = v dS \Rightarrow v_{сер} = \frac{dV_{сек}}{dS} , \quad (5.28)$$

що дає значення *середньої швидкості* течії рідини в трубі,  
 де  $S = \pi R^2$  – площа поперечного перерізу труби,  
 то рівність (5.27) набуде вигляду:

$$p_1 - p_2 = \Delta p = \frac{8 l \eta}{R^2} v_{сер} . \quad (5.29)$$

З цього рівняння випливає, що перепад тиску у в'язкій рідині є пропорційним середній швидкості, і це пояснюється тим, що зі збільшенням середньої швидкості потоку рідини в трубі зростає градієнт швидкості, оскільки в пристінковому шарі швидкість рівна нулю, а з ростом градієнта швидкості збільшуються сили в'язкого тертя між усіма шарами рідини.

*Формула Пуазейля справедлива лише для ламинарних потоків рідини, для турбулентних вона не є придатна.* Її застосовують для визначення в'язкості рідин. Прилади для визначення в'язкості називають *віскозиметрами*, а науку, яка займається вивченням властивостей в'язких рідин – *реологією*.

Закон Пуазейля використовують у вакуумній техніці під час розрахунків ступеня відкачки газів.

### **Контрольні запитання**

1. Чим зумовлена текучість речовин?
2. Що називають тиском?
3. Сформулювати закон Паскаля.
4. Сформулювати закон Архімеда.
5. Що вивчає гідродинаміка і які у неї завдання?
6. Яку рідину вважають ідеальною?
7. Який потік називають стаціонарним?
8. Що представляє собою лінія течії?
9. Що представляє собою трубка течії?
10. Що говорить рівняння неперервності струмینی?
11. Вивести рівняння неперервності струмینی.
12. Вивести рівняння Бернуллі для стаціонарного потоку ідеальної рідини.
13. Який фізичний зміст рівняння Бернуллі для стаціонарного потоку ідеальної рідини?
14. Записати і сформулювати основні три наслідки рівняння Бернуллі.
15. В чому полягає суть тертя в рідинах і газах?
16. Що називають коефіцієнтом динамічної в'язкості?
17. Який фізичний зміст коефіцієнта динамічної в'язкості?
18. Які сили називають силами внутрішнього тертя?
19. Що називають кінематичною в'язкістю?
20. Що таке текучість?
21. Який рух називають ламінарним?
22. Який рух називають турбулентним?
23. Що розуміють під поняттям «стаціонарний потік»?
24. Які є основні характеристики руху рідини?
25. У чому полягає фізичний зміст числа Рейнольдса?
26. На що вказує число Фруда?
27. Які течії вважають подібними?
28. Яку швидкість називають критичною?
29. Що таке пристінковий шар?
30. Чим визначається товщина пристінкового шару?
31. Що представляє собою «опір тертя»?
32. Що представляє собою «опір тиску»?
33. Що каже закон Стокса?
34. Від чого залежить коефіцієнт лобового тиску?

35. Вивести рівняння, яке виражає залежність швидкості течії шарів рідини від віддалі до вісі труби.
36. Вивести рівняння Пуазейля.
37. Межі справедливості рівняння Пуазейля?
38. Що таке реологія?

## РОЗДІЛ III

### МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА

---

#### §6. Молекулярно-кінетична теорія ідеальних газів

##### 6.1 Ідеальний газ

В молекулярній фізиці широко застосовують моделі. Для вивчення процесів, що протікають у газах, та кількісного їх опису, використовують модель газу – ідеальний газ. **Під ідеальним** розуміють такий **газ**, молекули якого мають форми куль, певної маси, але розмірами їх нехтують. Молекули такого газу взаємодіють між собою лише через пружне зіткнення. Окрім того припускають, що молекули рівномірно розподілені по всьому об'єму посудини, яку займає газ. Таким чином, за допомогою моделі – ідеального газу – ми можемо наближено виробити уявлення про фізичну природу реального газу.

*В основу молекулярно-кінетичної теорії газів покладено такі положення:*

- 1) однорідний газ складається з однакових за масою сферичних молекул, розмірами яких можна знехтувати, і силами взаємодії також;
- 2) у довільному малому об'ємі міститься дуже велика кількість молекул, найбільш ймовірна швидкість яких встановлюється за статистичним розподілом молекул за швидкостями;
- 3) зіткнення молекул відбуваються за законами абсолютно пружного удару;
- 4) інтервали часу між зіткненнями набагато більші за час самих зіткнень, а в інтервалах між зіткненнями молекули рухаються рівномірно і прямолінійно;
- 5) молекули газу рівномірно розподілені по всьому об'єму;

б) напрямки швидкостей молекул газу, в рівноважному стані, є рівно ймовірними в усіх напрямках.

Внутрішні процеси, що протікають у газі, кількісно описуються за допомогою певних величин, які називаються **параметрами**. Це – тиск, об'єм і температура. Для того щоб описати стан газу, необхідно знайти закон, за яким ці параметри будуть взаємозв'язані між собою.

**Рівноважним**, називають стан газу, при яко-му основні параметри є незмінними на тому про-міжку часу, під час якого ведеться спостереження.

## 6.2 Основні закони ідеальних газів

Розглянемо ідеальний газ в рівноважному стані, що знаходиться в посудині форми куба, ребро якого має довжину  $\Delta l$ . В посудині знаходиться  $n$  молекул. Оскільки простір 3-х мірний, а напрямки руху є рівно ймовірними, то об кожну зі стінок куба за деякий проміжок часу вдаряється  $1/3$  від усіх молекул. Швидкість будь-якої молекули можна виразити через проекції на координатні вісі. А, оскільки, модулі складових швидкостей при пружних ударах змінюватися не будуть, а напрямки змінюватимуться на протилежні, то обмежимося розглядом молекули, що рухається до однієї зі стінок перпендикулярно.

Кожна з молекул, що летить перпендикулярно до стінки куба з деякою швидкістю  $U$ , під час удару відскочить назад, в результаті чого її кількість руху зміниться на величину:

$$mU - m(-U) = 2mU, \quad (6.1)$$

а ця зміна кількості руху (за другим законом Ньютона) визначає імпульс сили, що діє збоку стінки на молекулу під час удару:

$$Ft = 2mU, \quad (6.2)$$

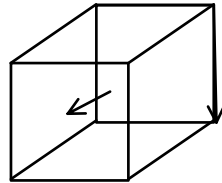


Рисунок 6.1

де  $F$  – сила удару;  
 $t$  – час удару.

Наступний удар відбудеться через деякий проміжок часу  $\Delta t$  за який молекула пройде шлях від цієї стінки до протилежної і назад:

$$\Delta t = \frac{2l}{v}, \quad (6.3)$$

де  $v$  – швидкість частинки. За одиницю часу таких зіткнень зі стінкою буде:

$$\nu = \frac{1}{\Delta t} = \frac{v}{2l}, \quad (6.4)$$

тоді *зміна кількості руху молекули за одиницю часу* визначиться середньою силою дії цієї молекули на стінку, яка буде рівною:

$$\overline{F}_{1x} = 2mv_{1x} \cdot \frac{v}{2l} = \frac{mv_{1x}^2}{l}, \quad (6.5)$$

для  $N$  молекул результуюча сила буде дорівнювати сумі:

$$F_x = \sum_{i=1}^N F_{ix}, \quad (6.6)$$

якщо силу поділити на площу грані куба  $S = l^2$ , отримаємо вираз для тиску:

$$\frac{F_x}{l^2} = p_x = \frac{1}{l^3} mv_x^2, \quad (6.7.1)$$

аналогічно для проекцій на осі  $y$  і  $z$ :

$$\frac{F_y}{l^2} = p_y = \frac{1}{l^3} m v_y^2, \quad (6.7.2)$$

i

$$\frac{F_z}{l^2} = p_z = \frac{1}{l^3} m v_z^2. \quad (6.7.3)$$

Оскільки, хаотичний рух молекул підчиняється принципу, згідно з яким, кожний напрям руху є рівно ймовірним, то й тиск на всі стінки посудини повинен би бути однаковим, тобто, справедливою є рівність:

$$3p = \frac{1}{l^3} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2), \quad (6.8)$$

або

$$p = \frac{2}{3l^3} \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2}, \quad (6.9)$$

де *сума квадратів швидкостей всіх молекул газу поділена на їх кількість дасть середню квадра-тичну швидкість:*

$$\langle v_{\text{кв}}^2 \rangle = \frac{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_N^2}{N}, \quad (6.10)$$

тоді рівняння (6.9) запишеться:

$$p = \frac{2}{3} n \frac{m_0 \langle v_{\text{кв}}^2 \rangle}{2}, \quad (6.11)$$

де  $n = \frac{N}{l^3}$  – кількість молекул в одиниці об'єму газу (концентрація);

$\frac{m_0 \langle v_{\kappa\theta}^2 \rangle}{2}$  – середня кінетична енергія поступального руху однієї молекули.

Рівняння (6.11) називають **основним рівнянням молекулярно-кінетичної теорії газів**. З нього випливає, що тиск газу, зумовлений ударами молекул об стінку в їхньому хаотичному русі, чисельно дорівнює двом третинам середньої кінетичної енергії поступального руху молекул, що містяться в одиниці об'єму.

Це рівняння виражає аналітичний зв'язок макроскопічних параметрів газу з мікроскопічними характеристиками молекул.

Якщо помножити ліву і праву частину рівняння (6.11) на об'єм одного моля газу, і врахувати, що  $nV_0 = N_A$  – число Авогадро, то на основі рівняння Менделєєва–Клапейрона для одного моля газу, рівність (6.11) набуде вигляду:

$$pV_0 = \frac{2}{3} N_A E_{\kappa} = RT, \quad (6.12)$$

звідки кінетична енергія однієї молекули буде рівна:

$$E_{\kappa} = \frac{m \langle v^2 \rangle}{2} = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T = \frac{3}{2} kT, \quad (6.13)$$

де  $\frac{R}{N_A} = k$  – стала Больцмана ( $1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К – встановлена дослідним шляхом), тоді рівність (6.13) буде мати вигляд:

$$E_{\kappa} = \frac{3}{2} kT. \quad (6.14)$$

Рівність (6.14) розкриває **фізичний зміст сталої Больцмана**: вона показує, на скільки змінюється енергія теплового поступального руху однієї молекули газу при зміні його температури на 1K (один Кельвін).

**Температура** – це макроскопічний параметр, який характеризує внутрішній тепловий стан тіла і визначається тепловим рухом його молекул.

**Температура** є статистичною величиною, а її **фізичний зміст** такий: абсолютна температура тіла в рівноважних умовах – це міра середньої кінетичної енергії хаотичного поступального руху його молекул. Статистично поняття температури має сенс лише для великої кількості молекул в певному об'ємі. Наприклад, у космічному просторі, де концентрація молекул дуже низька, поняття «температура» втрачає сенс. Те ж саме стосується систем, які перебувають у **не рівноважному** стані.

Нагадаємо основні закони і рівняння ідеального газу:

### 1. Рівняння стану ідеального газу

(Менделєєва–Клапейрона):

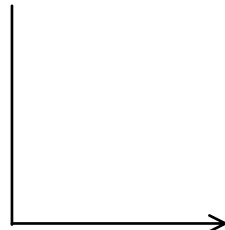
$$PV = \frac{m}{\mu} RT \quad (6.15)$$

### 2. Закон Бойля-Маріотта (ізотермічний процес):

$$P_1 V_1 = P_2 V_2, \quad (6.16)$$

стверджує, що для будь-якої маси газу при сталій температурі тиск змінюється обернено пропорційно до його об'єму. Цей закон дає можливість встановити залежність між густиною газу  $\rho$  і його тиском  $P$ . Для деякої маси газу зі зміною тиску змінюється його густина, а саме:

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2. \quad (6.16.1)$$



Враховуючи закон Бойля-Маріотта, одержимо:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{P_1}{P_2} \quad (6.16.2)$$

, Рисунок 6.1.1.

тобто, при ізотермічному процесі тиск газу змінюється прямо пропорційно до його густини. Це ще один найістотніший вираз закону Бойля-Маріотта, оскільки вираз не залежить від об'єму газу, а отже, і від його маси. Графічну залежність між  $p$  і  $V$  для різних температур на  $pV$  - діаграмі стану газу маємо на рис. 6.1.1.

### 3. Закон Гей-Люссака (ізобарний процес):

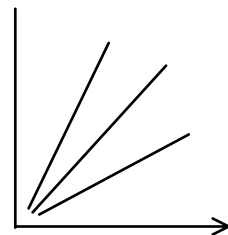
$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \quad (6.17)$$

*об'єм сталої маси ідеального газу під час ізобарного нагрівання прямо пропорційний до абсолютної температури.*

Теплове розширення деякої маси газу при  $P=const$  оцінюється температурним коефіцієнтом об'ємного розширення. Цей коефіцієнт не залежить від природи газу, тиску і набуває однакового значення для всіх *ідеальних* газів. Його числове значення приблизно дорівнює

$$\beta = \frac{1}{273,15} (K^{-1})$$

— це означає, що нагрівання ідеального газу на один градус при сталому тиску призводить до  $\frac{1}{273,15}$  збільшення його об'єму на



початкового значення  $V_0$ , а вираз закону Гей-Люссака у традиційній формі має вигляд:

Рисунок 6.1.2

$$V = V_0(1 + \beta t), \quad (6.17.1)$$

де  $t$  – температура газу ( $^{\circ}\text{C}$ ). Графіки ізобарних процесів мають вигляд ліній, що прямують до початку координат (рис. 6.1.2.)

#### 4. Закон Шарля (ізохорний процес):

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}, \quad (6.18)$$

суть якого полягає у тому, що коли газ, температура якого  $t_0 = 0^{\circ}\text{C}$ , нагріти при сталому об'ємі, то тиск його зростатиме за співвідношенням:

$$P = P_0(1 + \gamma t), \quad (6.18.1)$$

$$\gamma = \frac{1}{273} \text{ (K}^{-1}\text{)}$$

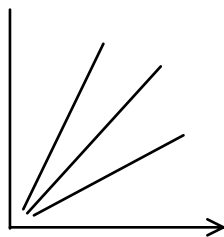
де  $\gamma$  – термічний коефіцієнт тиску, який виражає відношення збільшення тиску газу при його нагріванні при сталому об'ємі на один градус до тиску  $P_0$  при температурі  $0^{\circ}\text{C}$

і для всіх ідеальних газів він є приблизно однаковим. Графіки ізохорних

Рисунок 6.1.3

процесів мають вигляд ліній (рис. 6.1.3), що прямують до початку координат.

**5. Закон Дальтона:** тиск суміші газів дорівнює сумі парціальних тисків складових газів:



$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_n. \quad (6.19)$$

*Парціальним* називають тиск одного складника газу, який той створював би в даному об'ємі, якщо б він у ньому знаходився сам.

**6. Закон Авогадро:** у рівних об'ємах будь-якого газу при однакових тисках і температурах міститься однакова кількість молекул. За цим законом в  $1 \text{ м}^3$  будь-якого газу за нормальних умов ( $T=273 \text{ К}$ ,  $P=10^5 \text{ Па}$ ) міститься однакова кількість молекул –  $n=2,7 \cdot 10^{25}$  (називають числом Лошмідта).

На основі цього закону можна стверджувати, що *гази, які містять однакову кількість молекул при однакових тисках і температурах, займають однакові об'єми*, зокрема, один моль будь-якого ідеального газу за нормальних умов займає об'єм  $V_0=22,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{моль}$ .

В рівнянні стану ідеального газу (Менделєєва-Клапейрона) фігурує стала  $R = 8,31 \text{ (Дж / моль} \cdot \text{К)}$  з'ясуємо її фізичний зміст. Нехай один моль газу займає об'єм  $V_1$  при температурі  $T_1$  і тиску  $P$ , нагріємо цей газ на  $1 \text{ К}$  підтримуючи тиск сталим. При цьому руханий поршень переміститься на деяку віддаль  $\Delta x$  і при цьому буде виконана робота ( $p=\text{const}$ ):

$$A = F\Delta x = pS\Delta x = p\Delta V. \quad (6.20)$$

Початковий стан газу під поршнем опишеться рівнянням:

$$pV_1 = RT_1, \quad (6.21.a)$$

а кінцевий –

$$pV_2 = R(T+1), \quad (6.21.б)$$

тоді зміна стану газу буде виражатись як різниця рівнянь (6.21.a) і (6.21.б), при цьому одержимо:

$$p\Delta V = R, \quad (6.22)$$

а врахувавши зміст рівності (6.20), маємо висновок з якого випливає **фізичний зміст газової сталої**: вона **чи-сельно дорівнює роботі розширення одного моля іде-ального газу при ізобарному нагріванні його на 1 К.**

### 6.3 Швидкості газових молекул

Швидкості газових молекул, в наслідок їх хаотичного руху, відрізняються як за величиною, так і за напрямом. Швидкість довільної молекули в довільний момент часу. є величина випадкова. У молекулярно-кінетичній теорії газів використовують поняття «середньоарифметич-ної», «середньоквадратичної» та «найбільш імовірної» швидкостей. Ці швидкості задаються для рівноважних станів газу.

**Середньоквадратична швидкість** визнача-ється з рівності (6.11):

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_o}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}, \quad (6.23)$$

де  $m_o$  – маса молекули; а другу частину рівняння одержимо, помноживши чисельник і знаменник на число

Авогадро, і знаючи, що  $kN_A = R$  а  $m_o N_A = \mu$ ;

$k$  - константа Больцмана;

$R$  - газова стала;

$\mu$  - молярна маса;

$T$  - термодинамічна температура.

**Середньоарифметична швидкість** виводить-ся з досліду Штерна, що базується на визначенні швидкостей молекул срібла, під час їх випаровування у вакуумному середовищі:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_o}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} \quad (6.24)$$

**Найбільш імовірна швидкість** розрахована на основі закону статистичного розподілу Максвелла:

$$v_n = \sqrt{\frac{2kT}{m_o}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} \quad (6.25)$$

## 6.4 Функція розподілу Максвелла

Визначити точно швидкість молекули ми не можемо, оскільки, внаслідок теплового руху молекул газу, кожна з них зазнає постійного зіткнення з іншими молекулами, а отже, і постійної зміни своєї швидкості. Ми, на основі законів статистичної фізики, можемо вказати лише проміжок,  $v \div v + \Delta v$  в межах якого, імовірно, може знаходитись швид-

$$F(v)dv = \frac{dn}{n_0}$$

кість молекули. Добуток  $n_0$  – це **імовірність того, що модуль швидкості молекули знаходиться в межах  $v \div v + \Delta v$** .

$$\int_0^{\infty} F(v)dv = 1 \quad (6.26)$$

Це умова нормування, вона показує, що ймовірність існування швидкості молекули в межах від 0 до  $\infty$  рівна одиниці. Сама функція  $F(v)$  – називається **функцією розподілу молекул газу за модулями їх швидкостей**.

Величина  $dn$  – кількість молекул в одиниці об'єму, модулі швидкостей яких лежать в інтервалі



$v \div v + \Delta v$ , а  $n$  – загальна кількість молекул в одиниці того ж об'єму. Крива описує розподіл молекул за модулями швидкостей. Крива побудована на основі **закону розподілу Максвелла**:

Рисунок 6.2

$$dn = n_0 \left( \frac{m_o}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_o v^2}{2kT}} 4\pi v^2 dv \quad (6.27)$$

З рис.6.2 можна визначити, так звану, найбільш імовірну швидкість  $v_i$ , що відповідає максимуму на графіку функції  $F(v)$ . А з рівності (6.26) та поняття фізичного змісту функції  $F(v)$  стає зрозуміло, що вся площа, обмежена графіком і віссю абсцис, дорівнює одиниці.

Для різних температур криві розподілу молекул за швидкостями будуть мати вигляд, зображений на рис.6.3. З рисунка випливає: зі збільшен-



Рисунок 6.3

ням температури газу максимум кривої зміщується в сторону більших швидкостей, а його абсолютна величина зменшується. **Функція розподілу  $F(v)$  дорівнює нулю при  $v=0$  і прямує до нуля при  $v \rightarrow \infty$ . Це означає, що в газі немає нерухомих молекул, а також свідчить про те, що імовірність наявності молекул з  $v \rightarrow \infty$  близька до нуля.** Функція розподілу має максимум при найбільш імовірній швидкості. Але, сама крива вказує на те, що в газі найбільша частина молекул рухається зі швидкостями, значення яких близькі до найбільш імовірної швидкості. Імовірність того, що молекула рухається з точно заданою швидкістю дорівнює нулю, оскільки  $dv=0$  (для константи).

Отже, при нагріванні газу частина молекул, що володіють малими швидкостями зменшується, а частина молекул з більшими швидкостями збільшується. А це, в свою чергу, пояснює вплив температури на деякі фізико-хімічні процеси,

зокрема, прискорення хімічних реакцій при нагріванні сумішей, що реагують.

Закон розподілу Максвелла для практичного застосування зручно записати у такому вигляді:

$$\frac{dn}{n du} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-u^2} \cdot u^2, \quad (6.28)$$

$$u = \frac{v}{v_i}$$

де  $v_i$  відносна швидкість молекул;

$v$  – задана швидкість молекул;

$v_i$  – найбільш імовірна швидкість при даній температурі.

## 6.5 Барометрична формула

Досі ми вважали, що на молекули газу не діють зовнішні сили. Насправді молекули любого газу знаходяться в полі тяжіння Землі. Якщо б не існувало теплового руху молекул атмосферного повітря, то всі вони впали б на Землю, а якщо б не існувало тяжіння, то атмосферне повітря розсіялося б у Всесвіті. Сукупна дія теплового руху молекул і Земного тяжіння призводять до того, що концентрація молекул і тиск газу зменшуються зі збільшенням висоти над Землею.

Знайдемо закон зміни тиску атмосфери над Землею.

Виділимо на висоті  $h$  (рис.6.4) стовп газу висотою  $dh$ . **Різниця тисків газу на нижню і верхню основи стовпа дорівнює гідростатичному тиску стовпа газу:**

$$p - (p + \Delta p) = \rho g \Delta h,$$

(6.29)

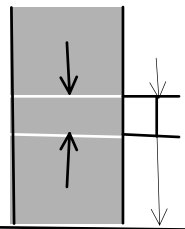


Рисунок 6.4

спростивши:

$$-\Delta p = \rho g \Delta h, \quad (6.30)$$

продиференціювавши:

$$-dp = \rho g dh, \quad (6.31)$$

і виразивши густину з рівняння Менделєєва–Клапейрона:

$$P = \frac{\rho}{\mu} RT \rightarrow \rho = \frac{P\mu}{RT}, \quad (6.32)$$

підставивши (6.32) у рівність (6.31), одержимо:

$$dp = -\frac{P\mu}{RT} g dh, \quad (6.33.a)$$

або

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g\mu}{RT} dh, \quad (6.33.b)$$

проінтегрувавши цей вираз по висоті від 0 до  $h$  і по тиску від  $p_o$  до  $p$ , одержимо:

$$\ln p - \ln p_o = -\frac{g\mu h}{RT}, \quad (6.34)$$

а після потенціювання:

$$p = p_o e^{-\frac{g\mu h}{RT}}, \quad (6.35)$$

де  $p_o$  – тиск на поверхні Землі.

Рівність (6.35) називається **барометричною формулою**. За зміною тиску можна визначити висоту:

$$h = \frac{RT}{g\mu} \ln \frac{p_o}{p} \quad (6.36)$$

З формул (6.35) і (6.36) можна зробити висновок, що тиск газу зменшується з висотою експоненціально і тим швидше, чим важчий газ (більше  $\mu$ ) і чим нижча температура.

Використовуючи рівняння стану ідеального газу

$$p = nkT, \quad (6.37)$$

можна визначити *співвідношення між концентраціями молекул газу на різній висоті*:

$$\frac{p}{p_o} = \frac{n}{n_o} \quad (6.38)$$

Тоді рівність (6.35) можна записати у вигляді:

$$n = n_o e^{-\frac{g\mu h}{RT}} \quad (6.39)$$

З урахуванням рівностей  $kN_A = R$  та  $m_o N_A = \mu$  рівняння (6.39) буде мати вигляд:

$$n = n_o e^{-\frac{m_o g h}{kT}}, \quad (6.40)$$

звідки випливає, що  $n \rightarrow n_o$  при  $T \rightarrow \infty$ , тобто, *підвищення температури призводить до вирівнювання концентрації газу по всьому представленому об'єму, а при  $T \rightarrow 0, n \rightarrow 0$ , тобто, молекули під дією сили тяжіння будуть опускатися на дно посудини.* Та-ким чином, наша атмосфера існує завдяки тепловому руху молекул повітря.

## 6.6 Функція розподілу Больцмана

Якщо врахувати, що  $mgh = W_{\kappa}$  – потенціальна енергія молекули в однорідному полі тяжіння поблизу поверхні Землі (при умові, що на рівні  $h=0$  потенціальна енергія молекули  $W_n=0$ ), то формула (6.40) переписється у вигляді:

$$n = n_o e^{-\frac{W_n}{kT}} \quad (6.41)$$

Рівність (6.41) виражає **закон Больцмана для розподілу часток у зовнішньому потенціальному полі**. З цього виразу видно, що чим менша потенціальна енергія молекул, тим більша їх концентрація.

Якщо до формули розподілу Максвелла (6.27) підставити значення  $n$  із закону Больцмана, то одержимо **формулу розподілу Максвелла-Больцмана** згідно з якою можна визначити **число молекул ідеального газу, швидкості яких лежать в інтервалі  $v \div v + \Delta v$  і мають потенціал  $gh$  в полі зовнішніх сил**:

$$dn = n_o \left( \frac{m_o}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_o gh}{kT}} e^{-\frac{m_o v^2}{2kT}} 4\pi v^2 dv \quad (6.42)$$

У цьому рівнянні є два незалежних множники: больцманівський –  $e^{-\frac{m_o gh}{kT}}$  – не залежить від розподілу молекул за

швидкостями, а максвелівський –  $e^{-\frac{m_o v^2}{2kT}}$  – не залежить від потенціалу молекул у полі зовнішніх сил.

### Контрольні запитання

1. Що розуміють під ідеальним газом?

2. Які основні положення покладено в основу молекулярно-кінетичної теорії ідеальних газів?

3. Якими величинами описуються процеси, що протікають у газі?

4. Який стан газу називають рівноважним?

5. Вивести основне рівняння МКТ газів.

6. Який висновок отримано з основного рівняння МКТ?

7. Який фізичний зміст константи Больцмана  $k$ ?

8. Який фізичний зміст температури з точки зору статистичної величини?

9. Сформулювати рівняння стану ідеального газу.

10. Сформулювати і охарактеризувати закон Бойля-Маріотта.

11. Сформулювати і охарактеризувати закон Гей-Люссака.

12. Сформулювати і охарактеризувати закон Шарля.

13. Сформулювати закон Дальтона.

14. Сформулювати закон Авогадро.

15. В чому полягає фізичний зміст газової константи  $R$ ?

16. Як визначається середньоквадратична швидкість газових молекул?

17. Як визначається середньоарифметична швидкість газових молекул?

18. Як визначається найбільш ймовірна швидкість газових молекул?

19. Записати і пояснити закон розподілу Максвелла.

20. Пояснити графік розподілу молекул за швидкостями при різних температурах.

21. Вивести барометричну формулу.

22. Пояснити як залежить концентрація молекул від висоти?

23. Пояснити закон розподілу Больцмана.

24. Пояснити розподіл Максвелла-Больцмана.

## **§7 Явища переносу в газах**

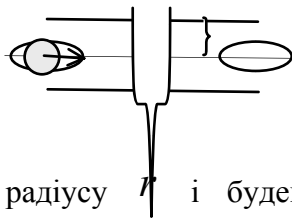
Якщо деяка ізольована система характеризується неоднаковими значеннями густини, температури чи хімічною неоднорідністю у різних частинах її об'єму, то в ній виникають необоротні процеси, після закінчення яких у системі встановлюється стан рівноваги. Процес встановлення рівноважного стану супроводжується переносом таких фізичних величин, як маса, енергія, імпульс. *Явища, при яких у макроскопічній*

системі відбувається незворотне перенесення маси, енергії чи імпульсу шляхом міграції молекул у напрямі спаду значення відповідної величини, називаються **явищами переносу**. До них належать дифузія, теплопровідність і внутрішнє тертя (або в'язкість).

## 7.1 Середня довжина вільного пробігу молекул

Швидкість теплового руху молекул становить  $\sim 10^3$  м/с. Проте, відстані, які проходить молекула, за одиницю часу, досить малі. Це добре видно з того прикладу, що, при великих швидкостях, пахощі вжитих парфум розповсюджуються не миттєво, а досить повільно. Це пояснюється тим, що рух молекул пахучої речовини у міжмолекулярному просторі іншої речовини відбувається зигзагоподібно, внаслідок численних зіткнень молекул між собою. Через велике число молекул, а отже і велику кількість зіткнень за одиницю часу, великих прямолінійних відрізків немає. Тому ми будемо говорити про «середнє число зіткнень» – « $Z$ » за одиницю часу і «середню довжину вільного пробігу молекул» – « $\lambda$ ».

**Під середньою довжиною вільного пробігу молекул розумітимемо: середню відстань, яку молекула проходить між двома послідовними зіткненнями.**



Розглянемо деяку молекулу радіусу  $r$  і будемо вважати що лише

Рисунок 7.1

вона рухається, а всі решта молекули є нерухомими. І будемо, також, вважати, що рухома молекула не змінює свого напрямку після зіткнення, а рухається у тому ж напрямі. Тоді рухома молекула зачепить усі ті молекули, центри яких знаходяться на віддалі, не більшій ніж  $2r$  від центра рухомої молекули. Таким чином, центри всіх молекул будуть знаходитись в середині циліндра радіусу  $R = 2r$  і довжини  $l$ , і яка чисельно дорівнює швидкості молекули за одиницю часу:

$$S = l = v \cdot t = v \cdot 1. \quad (7.1)$$

Число ж молекул, що попадуть всередину цього циліндра дорівнює:

$$z = \pi R^2 v n_0 = 4\pi r^2 v n_0, \quad (7.2)$$

для середньої швидкості молекул отримаємо вираз *середнього числа зіткнень за одиницю часу*:

$$\bar{z} = 4\pi r^2 \bar{v} n_0, \quad (7.3)$$

де  $n_0$  – число молекул в одиниці об'єму.

Оскільки, насправді, інші молекули також рухаються, то число зіткнень є трохи більшим, і як вияснилось математично, на  $\sqrt{2}$

$$\bar{z} = 4\sqrt{2}\pi r^2 \bar{v} n_0. \quad (7.4)$$

Значення *середньої довжини вільного пробігу молекули* отримаємо поділивши середній шлях, що проходить молекула за одиницю часу на число зіткнень за одиницю часу, врахувавши, що середній шлях за одиницю часу чисельно дорівнює середній швидкості згідно (7.1):

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{\bar{z}} = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi r^2 n_0} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi \sigma^2 n_0}, \quad (7.5)$$

де  $\sigma = 2r$  – називають, **ефективний діаметр молекули** – це *найменша відстань на яку зближуються центри двох молекул при зіткненні*. Ця величина є наближеним представленням про розміри молекули, оскільки сама молекула не є кулькою, а більш складною системою.

З формули (7.5) видно, що *середня довжина вільного пробігу молекул обернено пропорційна числу*

молекул в одиниці об'єму. А оскільки концентрація молекул пропорційна тиску, при сталій температурі, то

$$\frac{\bar{\lambda}_1}{\bar{\lambda}_2} = \frac{n_{02}}{n_{01}} = \frac{p_2}{p_1}, \quad (7.6)$$

з цього рівняння бачимо, що середня довжина вільного пробігу молекул обернено пропорційна тиску газу при сталій температурі.

## 7.2 Явище дифузії

Розглянемо явище дифузії – проникнення молекул однієї речовини у міжмолекулярний простір іншої. В даному випадку відбувається перенос маси.

Спостереження показують, що під час явища дифузії, через деяку площадку  $\Delta S$

переноситься деяка маса газу  $\Delta M$ , у виділених об'ємах густина газу, що дифундує відрізняється на  $\Delta \rho$ , віддаль між об'ємами  $\Delta x = 2\lambda$ , тоді ця маса газу, що дифундує описується рівнянням:

$$\Delta M = -D \left( \frac{\Delta \rho}{\Delta x} \right) \Delta S \Delta t. \quad (7.7)$$

Рівність (7.7) виражає **перший закон Фіка**, де вираз в дужках називається **градієнтом густини**, величина  $D$  – коефіцієнт дифузії, а знак «мінус» означає, що маса переноситься в сторону зменшення густини даного газу.

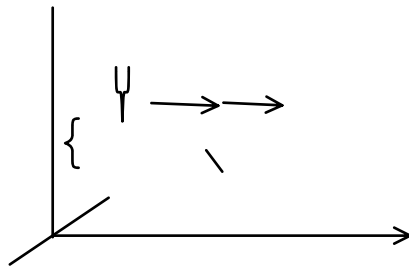


Рисунок 7.2

*Рівність (7.7) характеризує явище дифузії з макроскопічної точки зору, тому тепер розглянемо це явище з точки зору МКТ газів.*

Повернемось до рис.7.2. Підрахуємо число молекул (одного з двох газів), що пролітають крізь площадку  $\Delta S$  в напрямку зміни густини газу. Виділимо об'єми  $A$  і  $B$ , що знаходяться на віддальях середньої довжини вільного пробігу. Тоді, молекули, які рухаються з цих об'ємів, без зіткнення будуть долітати до площі  $\Delta S$ . З усіх молекул, що знаходяться в кожному з об'ємів за деякий проміжок часу до цієї площі

$\frac{1}{6}n$  долетить від усіх молекул (оскільки внаслідок рівномірності напрямів вздовж однієї з осей рухається  $\frac{1}{3}$  загальної кількості молекул, причому половина з них рухається справа наліво і половина зліва направо, тому маємо коефіцієнт  $1/6$ ), а за одиницю часу –

$$\Delta n = \frac{1}{6} \cdot \frac{n}{\Delta t}, \quad (7.8)$$

де  $\Delta t = \frac{l}{v}$ . Якщо за  $n'_0$  позначимо число молекул, що припадає на одиницю об'єму, то  $n = n'_0 \cdot l^3$ , тоді вираз (7.8) можна переписати:

$$\Delta n = \frac{1}{6} n \frac{\bar{v}}{l} = \frac{1}{6} n'_0 \bar{v} l^2 = \frac{1}{6} n'_0 \bar{v} \Delta S \quad (7.9)$$

аналогічною буде рівність для молекул з об'єму  $A$  і  $B$ , тоді різниця між числом молекул, що пролітають через площадку  $\Delta S$  зліва направо і справа наліво за деякий проміжок часу буде становити:

$$\Delta n = \frac{1}{6} \bar{v} (n'_0 - n''_0) \Delta S \Delta t \quad (7.10)$$

Помноживши масу однієї молекули на число молекул, що переносяться через площу  $\Delta S$  за час  $\Delta t$  отримаємо:

$$\Delta M = m \cdot \Delta n = \frac{1}{6} \bar{v} m (n'_o - n''_o) \Delta S \Delta t, \quad (7.11)$$

різниця в дужках дорівнює швидкості зміни числа молекул в одиниці об'єму в напрямку вісі OX, тобто величині  $\Delta n_o / \Delta x$ , помножених на віддаль між об'ємами A і B –  $2\lambda$ , а саме:

$$n''_o - n'_o = \frac{\Delta n_o}{\Delta x} \cdot 2\bar{\lambda}, \quad (7.12)$$

підставивши (7.12) в (7.11), і врахувавши, що  $m \cdot \Delta n = \Delta \rho$  – густина дифундуючої компоненти (парціальна густина газу) одержимо:

$$\Delta M = -\frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} \left( \frac{\Delta \rho}{\Delta x} \right) \Delta S \Delta t, \quad (7.13)$$

порівнявши формули (7.13) і (7.7) ми бачимо, що коефіцієнт дифузії дорівнює:

$$D = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda}. \quad (7.14)$$

Середня арифметична швидкість молекул  $\sim \sqrt{T}$  то і коефіцієнт дифузії теж прямо пропорційний кореню квадратному з абсолютної температури, а довжина вільного пробігу молекули обернено пропорційна до тиску газу, то й коефіцієнт дифузії є також обернено пропорційним до тиску газу, тобто:

$$D \sim \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad i \quad D \sim \frac{1}{p}.$$

Підставивши в формулу (7.14) значення середньої довжини вільного пробігу, одержимо:

$$D = \frac{\bar{v}}{3\sqrt{2}\pi\sigma^2 n_o}, \quad (7.15)$$

маємо зв'язок коефіцієнта дифузії з ефективним діаметром молекули.

Перенесення тієї чи іншої компоненти суміші, або групи молекул однієї і тієї ж речовини, спричинене різницею концентрацій, кількісно описується **дифузійним потоком**, що визначається кількістю молекул речовини, які в процесі дифузії проходять за одиницю часу через одиничну площину, перпендикулярну до напрямку руху молекул і розраховується за формулою:

$$J = \frac{N}{St} = -D \frac{dn}{dx},$$

де  $N$  – число молекул, які в результаті дифузії проходять через площину  $S$  за час  $t$ , і виражається рівнянням:

$$N = -D \frac{dn}{dx} St,$$

$D$  – коефіцієнт дифузії;

$\frac{dn}{dx}$

– градієнт концентрації в напрямку  $x$ .

У системі СІ коефіцієнта дифузії вимірюється в  $\text{м}^2 / \text{с}$ .

### 7.3 Явище внутрішнього тертя в газах

Внутрішнє тертя газів з *макроскопічної* точки зору описується рівнянням Ньютона, з яким ми зустрічалися у § 5:

$$F_{тр} = -\eta \left( \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) \Delta S, \quad (7.16)$$

де  $\eta$  – коефіцієнт внутрішнього тертя;

$\frac{dv}{dx}$

– градієнт швидкості в напрямку  $x$ ;

$S$  – площа, перпендикулярна до напрямку руху шарів.

З точки зору МКТ газів, *на швидкість хаотичного руху молекул накладається швидкість руху шарів рідини*. Кожен шар має різну швидкість руху.

Розглянемо рис.7.3.

Виділимо уявно площу  $\Delta S$ , яка є паралельною до шарів газу, що рухаються з різними швидкостями, і, нехай,

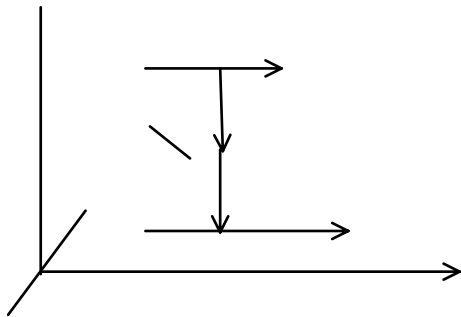
Рисунок 7.3

ці шари знаходяться один від одного на віддалі довжини вільного пробігу молекул.

Під час внутрішнього тертя відбувається *перенос кількості руху* (імпульсу). Імпульс напрямленого руху описується рівнянням:

$$P = -\eta \frac{\Delta v}{\Delta x} S t. \quad (7.16.1)$$

На основі викладок проведених вище (п.7.2), число молекул, що пролітають до площі  $\Delta S$  за час  $\Delta t$  з кожного з шарів 1 і 2 буде:



$$\Delta n = \frac{1}{6} n_o \bar{v} \Delta S \Delta t, \quad (7.17)$$

ці молекули через дану площадку перенесуть кількість руху  $\Delta P$  з шару 1:

$$\Delta P_1 = \frac{1}{6} n_o \bar{v} \Delta S \Delta t \cdot m v_1, \quad (7.18.a)$$

де  $v$  – швидкість шару,  
а з шару 2:

$$\Delta P_2 = \frac{1}{6} n_o \bar{v} \Delta S \Delta t \cdot m v_2, \quad (7.18.b)$$

тоді кількість руху в протилежних напрямках буде рівною:

$$\Delta P = \Delta P_2 - \Delta P_1 = \frac{1}{6} n_o \bar{v} \Delta S \Delta t \cdot m (v_2 - v_1), \quad (7.19)$$

різниця швидкостей рівна градієнту швидкостей, помноженому на віддаль між шарами:

$$v_2 - v_1 = \left( \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) 2\lambda, \quad (7.20)$$

тоді

$$\Delta P = \frac{1}{3} n_o m \bar{\lambda} \bar{v} \left( \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) \Delta S \Delta t, \quad (7.21)$$

оскільки добуток концентрації молекул в одиниці об'єму на масу однієї молекули це є густина, тобто:

$$n_o m = \rho, \quad (7.22)$$

то рівність (7.21) з врахуванням (7.22) перепишеться:

$$\Delta P = \frac{1}{3} \rho \bar{\lambda} \bar{v} \left( \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) \Delta S \Delta t \quad (7.23)$$

Оскільки сила, що діє з боку повільнішого шару на швидший дорівнює зміні імпульсу (кількості руху) з часом, то, справедливим буде запис:

$$F_{mp} = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{1}{3} \rho \bar{\lambda} \bar{v} \left( \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) \Delta S \quad (7.24)$$

Порівнявши (7.24) і (7.16) маємо висновок, що коефіцієнт внутрішнього тертя для газу рівний:

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\lambda} \quad (7.25)$$

Ця величина виражається через величини, що характеризують молекулярну структуру газу. Вияснимо, як залежить коефіцієнт внутрішнього тертя від тиску: *середня швидкість руху молекул від тиску не залежить, але, густина  $\rho \sim P$  – прямопропорційна тиску газу, а довжина вільного*

$$\lambda \sim \frac{1}{P}$$

*пробігу*  $P$  – обернено пропорційна тиску газу. Звідси висновок: **коефіцієнт внутрішнього тертя від тиску не залежить**. Це пояснюється тим, що під час зниження тиску, зменшується кількість часток, що переносять кількість руху з одного шару в інший, але зростає довжина вільного пробігу молекул, які потрапляють в даний шар з віддаленіших шарів. В результаті цих двох причин, що діють в протилежних напрямках, кількість руху, що переноситься з шару в шар, залишається ста-лою.

У системі СІ розмірність коефіцієнта внутрішнього тертя є Паскаль-секунда.  $1 \text{ Па} \cdot \text{с} = 1 \text{ Н} \cdot \text{с} / \text{м}^2 = 1 \text{ кг} / \text{м} \cdot \text{с}$ .

## 7.4 Явище теплопровідності

Розглянемо явище теплопровідності з точки зору МКТ газів. З *макроскопічної* точки зору явище теплопровідності полягає у перенесенні деякої кількості тепла від більш нагрітого тіла до більш холодного. Для кількості теплоти, що переноситься під час процесу теплопровідності за деякий час через деяку площу, розміщену перпендикулярно, можемо записати:

$$\Delta Q = -\chi \left( \frac{\Delta T}{\Delta x} \right) \Delta S \Delta t, \quad (7.26)$$

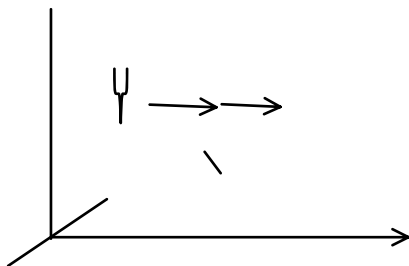
де  $\chi$  – величина, що залежить від умов при яких знаходиться газ, ця величина називається *коефіцієнтом теплопровідності*. Знак мінус означає, що кількість теплоти, переноситься в сторону зменшення температури.

Введемо поняття *потік теплоти*.

$$q = \frac{Q}{S t} = -\chi \frac{\Delta T}{\Delta x}, \quad (7.26.1)$$

це фізична величина, яка чисельно дорівнює кількості теплоти, яка переноситься за одиницю часу через одиницю площі поверхні, розміщену перпендикулярно до напрямку перенесення.

З молекулярно-кінетичної точки зору процес теплопровідності базується на тому, що молекули з гарячішо-



го шару, де вони мають більшу середню кінетичну енергію, про-

*Рисунок 7.4*

никають у більш холодний шар (рис.7.4), передаючи молекулам цього шару свою енергію в наслідок зіткнення з ними. Отже, з молекулярно-кінетичної точки зору перенесення через площадку  $\Delta S$  певної кількості тепла, означає перенесення кінетичної енергії хаотичного руху молекул.

На основі вище наведених викладок (п.7.3), число молекул, що пролетять через площадку  $\Delta S$  без зіткнень за деякий час в одному напрямку, буде такою ж як і в протилежному:

$$\Delta n = \frac{1}{6} n_o \bar{v} \Delta S \Delta t, \quad (7.27)$$

і кожна молекула перенесе з собою ту кінетичну енергію, яку вона мала (кожна в своєму об'ємі). Енергія складається з поступального, коливного і обертового рухів молекули, тому вона в середньому буде рівною:

$$W = \frac{i}{2} kT, \quad (7.28)$$

де  $i$  – **число ступеней вільності** – найменше число координат, які необхідно задати для того, щоб повністю визначити положення тіла у просто-рі, або – це та кількість незалежних рухів, які може виконувати дана молекула (тіло).

На основі викладок наведених вище (п.7.2), одержимо, що кількість тепла, яка перенесеться у двох протилежних напрямках через площу  $\Delta S$  буде:

$$\Delta Q = \frac{1}{6} \cdot \frac{i}{2} k (n'_o \bar{v}_1 T_1 - n''_o \bar{v}_2 T_2) \Delta S \Delta t. \quad (7.29)$$

Оскільки, концентрація часток  $n \sim \frac{1}{T}$  а швидкості часток пропорційні –  $v \sim \sqrt{T}$ , то добутки концентрації на середню швидкість можна вважати сталими при малій різниці температур:

$$n'_o \bar{v}_1 = n'_o \bar{v}_2 = n_o \bar{v}, \quad (7.30)$$

то рівняння (7.29) буде мати вигляд:

$$\Delta Q = \frac{1}{6} n_o \bar{v} \cdot \frac{i}{2} k (T_1 - T_2) \Delta S \Delta t, \quad (7.31)$$

і, врахувавши, що:

$$T_2 - T_1 = \left( \frac{\Delta T}{\Delta x} \right) \cdot 2\lambda, \quad (7.32)$$

одержимо:

$$\Delta Q = -\frac{1}{3} n_o \bar{v} \bar{\lambda} \cdot \frac{i}{2} k \left( \frac{\Delta T}{\Delta x} \right) \Delta S \Delta t, \quad (7.33)$$

рівність (7.33) виражає **закон Фур'є**, де  $\left( \frac{\Delta T}{\Delta x} \right)$  – називають градієнтом температур, а знак «-» вказує, що напрям перенесення теплоти є протилежним до напрямку градієнта температур.

Порівнюючи рівняння (7.33) і (7.26) одержуємо вираз для коефіцієнта теплопровідності:

$$\chi = \frac{1}{3} n_o \bar{v} \bar{\lambda} \frac{i}{2} k = \frac{1}{3} \cdot \frac{n_o}{N_A} \bar{v} \bar{\lambda} C_v, \quad (7.34)$$

де  $C_v$  – молярна теплоємність газу при сталому об'ємі;

а множник  $\frac{i}{2}k$  помножений і поділений на число Авогадро, дав співвідношення:

$$\frac{i}{2}k = \frac{i}{2}R \frac{1}{N_A} = C_v \frac{1}{N_A}. \quad (7.35)$$

Але, оскільки

$$\frac{n_o}{N_A} = \frac{\rho}{\mu} \quad \text{і} \quad \frac{n_o}{N_A} C_v = \rho \frac{C_v}{\mu} = \rho c_v,$$

де  $c_v = \frac{C_v}{\mu}$  – питома теплоємність газу при сталому об'ємі; то, з врахуванням цього рівність (7.34) запишеться:

$$\chi = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\lambda} c_v. \quad (7.36)$$

**Коефіцієнт теплопровідності  $\chi$**  як і коефіцієнт внутрішнього тертя від тиску *не залежить*, але при дуже низьких тисках теплопровідність починає залежати від тиску. На цьому принципі базується принцип збереження тепла термосом ( $\lambda > d$ ).

У міжнародній системі одиниць (СІ)  $\chi$  вимірюється у Ват на метр-Кельвін (Вт/м·К).

Співвідношення між коефіцієнтом теплопровідності і внутрішнього тертя має вигляд:

$$\frac{\chi}{\eta} = c_v, \quad (7.37)$$

внутрішнього тертя і дифузії:

$$\eta = \rho \cdot D, \quad (7.38)$$

теплопровідності і дифузії:

$$\chi = D \cdot c_v \cdot \rho. \quad (7.39)$$

Наявність цього зв'язку між коефіцієнтами процесів переносу обумовлена подібністю фізичної природи процесів переносу і тим, що всі вони описуються математично подібними рівняннями.

### ***Контрольні запитання***

1. Що називають явищем переносу?
2. Що називають середньою довжиною вільного пробігу молекул?
3. Вивести рівняння для середньої довжини вільного пробігу молекул.
4. Що називають ефективним діаметром молекули?
5. Чи залежить середня довжина вільного пробігу молекул від тиску газу?
6. Яке явище називають дифузією?
7. Що виражає перший закон Фіка?
8. Вивести рівняння для коефіцієнта дифузії газів.
9. Чи залежить коефіцієнт дифузії від тиску і температури газу?
10. Які одиниці вимірювання коефіцієнта дифузії в СІ?
11. Що представляє собою дифузійний потік газу?
12. Вивести коефіцієнт внутрішнього тертя для газів.
13. Чи залежить коефіцієнт внутрішнього тертя від тиску?
14. Які одиниці вимірювання коефіцієнта внутрішнього тертя в СІ?
15. Який фізичний зміст потоку теплоти?
16. Що є числом ступеней вільності?
17. Що виражає закон Фур'є?
18. Вивести коефіцієнт теплопровідності.

19. Чи залежить коефіцієнт теплопровідності від тиску і температури?

20. Який існує зв'язок між коефіцієнтами переносу в газах і чим це пояснюється?

## РОЗДІЛ IV

# ОСНОВИ ТЕРМОДИНАМІКИ

---

### §8. Перший закон термодинаміки

#### *8.1 Основні поняття і означення*

Робота теплових машин, перетворення теплової енергії в роботу призвели до виникнення такого розділу фізики як *термодинаміка*. У 20—му столітті термодинаміка виділилась в окрему науку, яка вивчає властивості газів, пари, рідин та твердих тіл, вивчає фазові рівноваги і фазові перетворення, закономірності протікання хімічних реакцій і т.д.

**Термодинаміка** вивчає загальні властивості макроскопічних фізичних систем, що знаходяться в стані термодинамічної рівноваги, та про процеси переходу між цими станами.

Предметом вивчення є – властивості речовин і різноманітних фізичних явищ, зумовлених тепло-вим рухом у макроскопічних системах поблизу стану рівноваги в них, без аналізу мікроскопічної будови тіл системи.

В основі термодинаміки лежать три фундаментальні закони, які є узагальненням відомих з досліду численних даних.

**Перший закон термодинаміки** – закон збереження та перетворення енергії макроскопічних систем в процесах, в яких бере участь теплота.

**Другий закон термодинаміки** показує напрямком перебігу термодинамічних процесів, які переводять систему з одного стану в інший.

**Третій закон термодинаміки** обмежує процеси, реалізація яких дала б змогу досягнути абсолютного нуля температури.

Для правильного розуміння процесів і законів термодинаміки слід засвоїти основні поняття і означення:

– **термодинамічною системою** називають систему, що складається з макроскопічних тіл і полів, які можуть взаємодіяти між собою і зовнішнім середовищем, обмінюватися енергією через роботу і теплообмін;

– **стаціонарним станом** називають стан, при якому параметри системи (тиск, об'єм, температура, густина, концентрація) не змінюються з часом;

– **рівноважним станом** називають такий стаціонарний стан, при якому незмінність системи в часі обумовлена зовнішніми діями;

**нерівноважним** називається термодинамічний процес переходу системи з одного рівноважного стану в інший через сукупність проміжних нерівноважних станів.

– **термодинамічною рівновагою** вважають такий стан системи, при якому макроскопічні фізичні параметри, що визначають її стан залишаються в часі незмінними, а стаціонарних потоків внаслідок дії зовнішніх джерел немає.

Важливою властивістю усякого рівноважного стану є його оборотність.

Також термодинаміка вивчає рівноважні процеси, які називають **квазістатичними** або **квазірівноважними**. В перекладі з латині «**квазі**» – майже. **Це такі процеси, які складаються з дуже великої кількості рівноважних станів, а перехід між цими станами є малопомітним і нескінченно повільним.** (Прикладом є покладання на рухомий поршень циліндру з газом тисячі піщинок, в результаті параметри термодинамічної системи будуть змінюватися нескінченно повільно.) До квазірівноважних процесів належать: ізобарний ( $p=const$ ), ізохорний ( $V=const$ ), ізотермічний ( $T=const$ ).

Якщо термодинамічна **система** не взаємодіє з навколишнім середовищем, то її називають **ізолюваною**, або замкнутою. В протилежному разі, її називають **відкритою**.

**Системи**, що не обмінюються з іншими тілами речовиною, але обмінюються енергією, називають **закритими**.

**Системи**, які виключають теплообмін із навколишнім середовищем, називають **теплоізолюваними** або **адіабатними**.

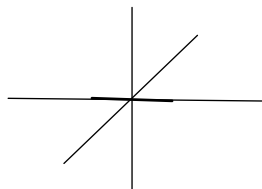
Термодинамічні системи розрізняють **гомогенні** і **гетерогенні**.

**Гомогенні** – це такі системи, в яких між довірними складовими немає границі розподілу, а властивості таких систем змінюються неперервно від точки до точки (гази, суміші газів, розчини).

**Гетерогенні** – це такі системи, які складаються з компонент, що розмежовані між собою поверхнями розділу (вода – масло, вода – пара – лід, різні кристалічні модифікації однієї і тієї ж речовини – біле і сіре олово; тверде залізо в різних модифікаціях – альфа, бета, гама, дельта і т.д.).

## **8.2 Число ступенів вільності молекул. Розподіл енергії за ступенями вільності**

В молекулярній фізиці атоми розглядають як матеріальні точки, а оскільки їх положення в просторі визначається трьома координатами, то можливі теплові рухи молекул і характеризуються відносно цих координат. **Число ступенів вільності** – це число незалежних рухів, які може виконувати дана молекула, або число незалежних координат, якими визначається рух даної молекули. Молекули бувають одно-, дво- і багатоатомні. Молекула може виконувати відносно свого



*цен-тра мас коливні та обертові ру-хи.* Якщо це одноатомний газ, то молекули виконують лише коливні рухи по трьох можливих координатних напрямках, для таких молекул число ступенів вільності рівне 3.  
Рисунок 8.1

Якщо це є двохатомний газ, ми можемо його молекули представити у вигляді «гантельки», тоді крім 3-х коливних ступенів вільності руху молекул, існують ще і незалежні обертові рухи відносно 2-х осей, що проходять через центр мас молекули (рис. 8.1). Оскільки третя вісь обертання проходить через обидва атоми так, що віддаль цих атомів до цієї вісі дорівнює нулю, то і момент інерції молекули відносно цієї

осі  $I_{об} = \sum m_i r_i^2 = 0$ , тому обертання молекули відносно цієї вісі не змінює її положення в просторі, а, тому не враховується. Отже, для двох атомного газу число ступенів вільності буде – 5 (3 – коливних і 2 – обертових).

Для 3-х і багатоатомних газів всі три моменти інерції відносно осей обертання відмінні від нуля (рис. 8.2), отже, у таких молекул число ступенів вільності дорівнює 6 (3 – коливних і 3 – обертових).

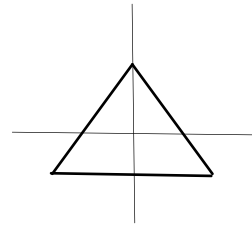


Рисунок 8.2

Існує **закон Больцмана рівномірного розподілу енергій за ступенями вільності молекул**, який базується на законах статистичної фізики, і який формулюється: **у стані теплової рівноваги на кожний класичний ступінь вільності руху частинок системи припадає середня енергія теплового хаотичного руху, що дорівнює в**

**середньому  $\frac{1}{2} kT$ .**

### 8.3 Внутрішня енергія ідеального газу

Щоб зрозуміти перший закон термодинаміки, розглянемо спочатку фізичний зміст таких основних термодинамічних величин, як **внутрішня енергія, робота.**

**Внутрішня енергія термодинамічної системи визначається як сума кінетичної енергії усіх видів руху частинок, з яких складається ця система та потенціальної енергії їх взаємодії.**

**Потенціальна енергія** взаємодії називається тепловою. Її можна змінити, відібрати, перетворити в роботу. В основному вона залежить від температури системи та її об'єму. **Кінетичну** ж енергію руху частинок системи ніяким охолодженням відібрати від системи неможна. Це так звана «нульова енергія», якою система володіє навіть при абсолютному нулі температури.

Внутрішня енергія є однозначною функцією стану фізичної системи. Це означає, що даному рівноважному стану відповідає цілком визначене значення внутрішньої енергії. В термодинаміці інтерес становить не сама внутрішня енергія системи, а її зміна  $\Delta U$  під час зміни стану системи. **Зміна стану характеризується лише різницею енергій і не залежить від проміжних станів у термодинамічних процесах:**

$$\Delta U = \int_{U_1}^{U_2} dU = U_2 - U_1 \quad (8.1)$$

Якщо термодинамічна система бере участь у коловому процесі, тобто виходить з певного стану, зазнає деяких змін і знову повертається у початковий стан, то зміна її енергії дорівнює нулю:

$$\Delta U = \oint dU = 0 \quad (8.2)$$

Отже, дійсно, внутрішня енергія є однозначною функцією стану і не залежить від характеру процесу, який привів до цього стану. Внутрішня енергія має властивість **Адитивності**, тобто:

$$U = \sum_{i=1}^N U_i \quad (8.3)$$

Якщо внутрішня енергія залежить і від об'єму і від тем-ператури, то її повний диференціал має вигляд:

$$dU = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV, \quad (8.4)$$

тобто, внутрішню енергію системи можна змінити підведенням або відводом теплоти, а також виконанням роботи, пов'язаної зі зміною її об'єму.

Для *ідеального газу*, молекули якого *не взаємодіють* між собою, внутрішня енергія визначається лише кінетичною енергією руху частинок, а отже, *не залежить від об'єму*, а є лише *функцією температури*

$$dU = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT. \quad (8.5)$$

Для одної молекули ідеального газу внутрішня енергія:

$$U = \frac{i}{2} kT, \quad (8.6)$$

де  $i$  – число ступенів вільності.

Для довільної кількості газу, враховуючи, що

$$N = \nu \cdot N_A$$

де  $N_A$  – число Авогадро;

$$\nu = \frac{m}{\mu}$$

$\mu$  – кількість речовини;

рівність (8.6) буде мати вигляд:

$$U = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{\mu} N_A kT = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{\mu} RT, \quad (8.6.1)$$

де  $N_A k = R$  – газова стала.

Отже, внутрішня енергія ідеального газу залежить від числа ступенів вільності молекул і абсолютної температури газу.

## 8.4 Макроскопічна робота газу

Розглянемо газ у циліндричній посудині (рис. 8.3) з легким рухомих поршнем площею  $S$ . Газ, збільшуючи об'єм, виконує роботу проти сил, зумовлених зовнішнім тиском, отже сила тиску рівна  $F = pS$ . Елементарна робота  $dA$  виконана газом під час нескінченно малого квазістатичного розширення і переміщення поршня на

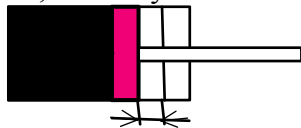


Рисунок 8.3

відстань  $dx$ , в результаті якого об'єм газу зросте на  $dV = Sdx$  при  $p = \text{const}$ , визначатиметься за формулою:

$$dA = Fdx = pSdx = pdV \quad (8.7)$$

Якщо роботу виконує газ, то така робота є додатною, а якщо робота виконується над газом (наприклад зовнішній тиск спричиняє зменшення об'єму газу під рухомих циліндром), то така робота вважається від'ємною і в рівнянні береться зі знаком «-» (мінус). Вираз (8.7) справедливий для довільного **квазістатичного процесу** зміни об'єму термодинамічної системи, що перебуває під сталим зовнішнім тиском. **Характерним для таких процесів є те, що системі надається або від системи забирається частина внутрішньої енергії шляхом зміни певних макроскопічних параметрів. Це зауваження є важливим, оскільки змінити енергію системи можна і без зміни макроскопічних параметрів, (наприклад шляхом пропускання через газ електричного струму, опроміненням...) тоді макроскопічна робота**

виконуватись не буде. Отже в **термодинаміці** **робота** – це **макроскопічна міра зміни внутрішньої енергії системи у квазістатичних процесах**. Для обчислення роботи потрібно проінтегрувати вираз (8.7):

$$A = \int p dV. \quad (8.8)$$

Обчислити цей інтеграл можна, якщо відома функціональна залежність зміни тиску від об'єму. Оскільки, тиск залежить ще й від температури, то досягнути кінцевого результату зміни одного параметру від іншого можна багатьма способами, і кожному з цих способів буде відповідати своя залежність. Отже робота не є однозначною функцією, як це було у випадку зміни внутрішньої енергії. Тобто, *під час переходу системи з деякого початкового стану в деякий кінцевий стан, значення виконаної роботи залежить від характеру процесу переходу і може набувати до-вольних числових значень*. Робота ідеального газу при різних квазістатичних процесах описується:

1. *Ізохорний процес:*  $V = \text{const}, \quad A = 0$ .
2. *Ізобарний процес:*  $p = \text{const},$

$$A = p \int_{V_1}^{V_2} dV = p(V_2 - V_1) \quad ; \quad (8.9)$$

3. *Ізотермічний процес:*  $T = \text{const},$

$$A = \int_1^2 P dV = \frac{m}{\mu} RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (8.10)$$

Як бачимо, робота при ізотермічному розширенні залежить не від різниці об'ємів, а від їхнього співвідношення.

Виконання роботи відкритою термодинамічною системою або зовнішнім середовищем над системою призводить до зміни її макроскопічних параметрів, або деяких з них. Оскільки *робота* пов'язана з переміщенням мас макроскопічних розмірів (зокрема поршень), то *в термодинамічному розумінні вона є будь-якою макрофізичною формою передачі енергії*.

Іншою формою передачі енергії є теплообмін.

### **8.5 Кількість теплоти. Теплоємність газів**

Під час процесу передачі тепла від більш нагрітого тіла до менш нагрітого, відбувається передача енергії. *Процес передачі енергії без виконання макроскопічної роботи називають теплообміном*, а *кількість переданої енергії – кількістю теплоти*, що є кількісною мірою теплообміну. Кількість теплоти – це енергія у формі молекулярного руху. Під час теплообміну процеси відбуваються на мікроскопічному, молекулярному рівні, тому теплообмін – це мікроскопічна робота, виконувана молекулярними силами в процесі дії молекул зовнішнього середовища на молекули тіла (наприклад під час опромінення тіла світлом від зовнішнього джерела, під час нагрівання на відкритому вогні, і т.д.). Енергія у вигляді теплоти може надаватись системі, тоді вона зі знаком «+», а якщо забирається від системи, то зі знаком «-». *Кількість теплоти як і робота є функцією процесу*. І кількість теплоти і робота є мірами процесу передачі енергії, а числове їх значення залежить від виду цих процесів. Єдина між ними відмінність полягає у тому, *що робота – це макрофізична форма передачі енергії впорядкованого руху, а теплота – це сукупність мікрофізичних процесів передачі енергії*.

Поняття кількості теплоти пов'язане з іншою термодинамічною величиною – *теплоємністю*. *Теплоємність тіла – це фізична величина, яка дорівнює відношенню кількості теплоти, яку одержало тіло при нескінченно*

малій зміні його стану в певному процесі до зміни температури тіла:

$$C_0 = \frac{dQ}{dT} \quad (8.11)$$

Теплоємність хімічно однорідного тіла пропорційна його масі:

$$C_0 = mc, \quad (8.12)$$

де  $c$  – **питома теплоємність** – фізична величина, яка чисельно дорівнює кількості теплоти, що її треба надати одиниці маси даної речовини, щоб підвищити її температуру на один Кельвін:

$$c = \frac{dQ}{mdT}, \quad (8.13)$$

$C$  – **молярна теплоємність**: це фізична величина, яка чисельно дорівнює кількості теплоти, що її необхідно надати одному молю речовини, для підвищення її температури на один кельвін:

$$C = \frac{dQ}{\nu dT}, \quad (8.14)$$

$$\nu = \frac{m}{\mu}$$

де  $\mu$  – кількість молей газу.

Зв'язок молярної і питомої теплоємностей:

$$C = \mu c, \quad (8.15)$$

Теплоємність системи залежить від виду процесу, при якому відбувається теплообмін, тому розрізняють теплоєм-

ність при сталому тиску  $C_p$  і теплоємність при сталому об'ємі  $C_v$ .

Теплоємність при сталому об'ємі ( $V = \text{const}$ ) визначається з тих міркувань, що робота зовнішніх сил у цьому випадку рівна нулю, а отже, вся теплота, надана газу йде на збільшення його внутрішньої енергії. Тому, **молярна теплоємність** (з точки зору енергії) чисельно дорівнює зміні внутрішньої енергії одного моля газу при підвищенні його температури на 1 К, тобто за рівнянням (8.6.1) ця зміна буде дорівнювати:

$$\Delta U = \frac{i}{2} R(T + 1) - \frac{i}{2} RT = \frac{i}{2} R, \quad (8.16)$$

отже, молярна теплоємність при сталому об'ємі:

$$C_v = \frac{i}{2} R, \quad (8.17)$$

де  $R = 8,31451 \text{ Дж / (моль} \cdot \text{К)}$ .

Під час нагрівання газу при сталому тиску ( $p = \text{const}$ ), надана газу теплота йде не лише на збільшення його внутрішньої енергії, а й на виконання деякої роботи проти зовнішніх сил:

$$C_p = C_v + A. \quad (8.18)$$

Тобто, **теплоємність при сталому тиску** більша від теплоємності при сталому об'ємі на ту роботу, яку повинен виконати один моль газу під час розширення, що відбувається в наслідок збільшення його температури на 1 К при сталому тиску.

Зміна об'єму одного моля газу під час підвищення його температури на 1 К при сталому тиску дорівнює:

$$\Delta V = V_2 - V_1 = \frac{R}{p}(T + 1) - \frac{R}{p}T = \frac{R}{p} \quad (8.19)$$

Підставимо вираз (8.19) у (8.8) і знайдемо роботу, виконану одним молем газу під час розширення, що відбувається при нагріванні його на 1 К при сталому тиску:

$$A = p\Delta V = p \frac{R}{p} = R \quad (8.20)$$

Отже, ця робота чисельно дорівнює газовій сталій. Підставивши вираз роботи у рівність (8.18), отримаємо співвідношення між молярними теплоємностями при сталому тиску  $C_p$  і при сталому об'ємі  $C_v$ :

$$C_p = C_v + R \quad (8.21)$$

а враховуючи рівність (8.17) цей вираз ще можна записати:

$$C_p = \frac{i}{2}R + R = \frac{i+2}{2}R \quad (8.22)$$

Рівність (8.21) називають *рівнянням Майєра*. З нього випливає, що при ізобарному процесі кількість теплоти, яку отримує ідеальний газ іде не тільки на збільшення його внутрішньої енергії, **а й на виконання роботи в процесі розширення газу**, в чому якраз і полягає *фізичний зміст газової сталої*.

З розглянутої теорії слідує також, що теплоємність газів не залежить від температури, а лише від числа ступеней вільності. Що стосується реальних газів, то на основі проведених експериментів можна сказати, що теплоємність газів

при середніх температурах описується з класичної точки зору, а при досить високих ( $\sim 1000\text{ K}$ ) і низьких ( $\sim 100\text{ K}$  і менше) температурах – ця теорія непридатна. Тут температурну залежність теплоємності пояснює квантова фізика.

## 8.6 Перший закон термодинаміки

Змінити стан системи і, отже, її внутрішню енергію можна двома способами: виконанням системою роботи проти зовнішніх сил (або виконанням роботи зовнішніми силами над системою) і наданням системі (або її відведенням) певної кількості теплоти. Довільний з цих випадків **описується законом збереження енергії** з урахуванням особливої форми передачі енергії у вигляді теплообміну. Цей закон є фундаментальним законом термодинаміки. Він встановлений на основі ЕК-спериментальних і теоретичних досліджень в галузі хімії, фізики, а також на основі факту еквівалентності теплоти і роботи.

Розглянемо суть такого досліду (рис.8.4): у вертикальній теплоізолюваній посудині, яка переділена горизонтально теплопровідною нерухомою перегородкою  $AB$ , знаходиться у верхній і нижній частинах однаковий за складом але різний за масою газ. Зверху посудина закрита теплоізолюваним поршнем, який може вільно і без тертя рухатися. Таким чином, обидві порції газу, що знаходяться у посудині можуть обмінюватися між собою теплою, а з навколишнім середовищем – ні.

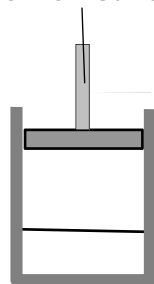


Рисунок 8.4

Внутрішня енергія такої термодинамічної системи рівна сумі внутрішніх енергій газів, що знаходяться у обох частинах посудини

$U = U_1 + U_2$ . Якщо газ у верхній частині посудини розшириться, то він виконає роботу, перемістивши поршень вгору. Тоді внутрішня енергія газів, що знаходяться

над і під перегородкою  $AB$  будуть мати нові значення  $U'_1$  і  $U'_2$  відповідно. На основі закону збереження енергії ця виконана робота буде дорівнювати зміні внутрішніх енергій газів:

$$\begin{aligned}
 A &= U_1 + U_2 - (U'_1 + U'_2) = \\
 &= U_1 - U'_1 + (U_2 - U'_2).
 \end{aligned}
 \tag{8.23}$$

Зміна внутрішньої енергії газу, що знаходиться під перегородкою (частина 2), за означенням, є кількістю теплоти, яку отримує газ, що знаходиться над перегородкою. То справедливою є рівність:

$$A = U_1 - U'_1 + Q, \tag{8.24}$$

Якщо позначимо зміну внутрішньої енергії, що відбулася у верхній частині посудини через:

$$\Delta U = U'_1 - U_1, \tag{8.25}$$

то рівняння (8.24) набуде вигляду:

$$A = -\Delta U + Q, \tag{8.26}$$

або

$$Q = \Delta U + A \tag{8.26.1}$$

– це аналітичний запис першого закону термодинаміки в інтегральній формі.

**Перший закон термодинаміки** стверджує: *кількість теплоти, надана системі, частково йде на збільшення внутрішньої енергії системи, а частково на виконання системою роботи.* У диференціальній формі він записується:

$$\delta Q = dU + \delta A, \tag{8.26.2}$$

де  $dU$  – зміна внутрішньої енергії;  
 $\delta Q$  – кількість теплоти передана системі;  
 $\delta A$  – робота виконана над системою.

Отже, за законом збереження енергії, зміна внутрішньої енергії системи дорівнює сумі переданої їй кількості теплоти і виконаної роботи над системою:

$$dU = \delta Q + (-\delta A). \quad (8.26.3)$$

Звідси маємо важливий висновок, що робота дорівнює нулю, якщо  $Q=0$  і  $\Delta U = 0$  тобто, *не може існувати машини, яка б виконувала роботу, не затрачаючи ніякої енергії*. Таку машину назвали вічним двигуном (*perpetuum mobile*) першого роду. Система може виконувати роботу лише тоді, коли вона одержує енергію від середовища, або коли змінюється її внутрішня енергія. Отже, вічний двигун першого роду є неможливим.

## 8.7 Політропний процес

Стосовно ідеального газу, ми вияснили, що теплоємність не залежить від температури, а отже, кількість теплоти, надана системі, пропорційна до підвищення температури системи. *Процес, який відбувається у системі за сталої теплоємності, називається політропним.*

При політропному процесі передана кількість теплоти  $\delta Q$  призводить до зростання температури системи на  $dT$ :

$$\delta Q = CdT. \quad (8.27)$$

Враховуючи перший закон термодинаміки у вигляді:

$$\delta Q = dU + PdV, \quad (8.28)$$

а також, що  $dU = C_v dT$ , запишемо:

$$CdT = C_v dT + PdV, \quad (8.29)$$

або

$$(C - C_v)dT = PdV . \quad (8.30)$$

$$P = \frac{RT}{V} ,$$

Враховуючи з рівності Менделєєва-Клапейрона, що одержимо:

$$\frac{C - C_v}{R} \cdot \frac{dT}{T} = \frac{dV}{V} , \quad (8.31)$$

а проінтегрувавши, отримаємо:

$$\frac{C - C_v}{R} \ln T = \ln V + \ln const , \quad (8.32)$$

пропотенціювавши цей вираз:

$$T^{\frac{C-C_v}{R}} V^{-1} = const , \quad (8.33)$$

перетворимо цю рівність, використавши рівняння Менделєєва-Клапейрона:

$$(PV)^{\frac{C-C_v}{R}} V^{-1} = const , \quad (8.34)$$

одержимо:

$$PV^{\frac{C-C_p}{C-C_v}} = const . \quad (8.35)$$

Введемо позначення:

$$\frac{C - C_p}{C - C_v} = n , \quad (8.36)$$

де  $n$  — називається *показник політропи* (його значення

лежать в межах  $\frac{C_p}{C_v} \div 1$ );

де  $C$  – молярна теплоємність газу.  
Тоді (8.35) матиме вигляд:

$$PV^n = \text{const} \quad (8.37)$$

Цей вираз є *рівнянням політропного процесу*. У координатах  $T, V$  рівняння політропи має вигляд:

$$TV^{n-1} = TV^{-\frac{R}{C-C_V}} = \text{const}, \quad (8.37.1)$$

а в змінних  $T, P$ :

$$TP^{\frac{1-n}{n}} = \text{const} \quad (8.37.2)$$

При наближенні показника політропи до значення  $\frac{C_P}{C_V}$  термодинамічний процес наближається до адіабатного, а при наближенні показника адіабати до одиниці, процес наближається до ізотермічного, отже, політропний процес можна вважати узагальненим, бо його характеристики є спільними для інших процесів зміни стану ідеального газу.

## 8.8 Адіабатний процес

**Адіабатним** називається такий термодинамічний процес, який відбувається у повній ізоляції між системою і навколишнім середовищем. Оскільки під час такого процесу система не поглинає і не віддає теплоти, тобто  $\delta Q = 0$ , то теплоємність системи дорівнює нулю. Адіабатний та інші ізопроекти в газах є окремими випадками політропного процесу.

Зв'язок між термодинамічними параметрами при адіабатному процесі можна записати у вигляді рівнянь:

$$\begin{aligned}
 PV^\gamma &= const; \\
 TV^{\gamma-1} &= const; \\
 TP^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} &= const,
 \end{aligned}
 \tag{8.38}$$

які називають *рівнянням Пуассона*,

де  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$  — показник адіабати або коефіцієнт Пуассона.

*Перший закон термодинаміки, для адіабатного процесу*, враховуючи, що  $\delta Q = 0$ , тобто термодинамічна система з навколишнім середовищем теплою не обмінюється, має вигляд:

$$\delta A = -dU, \tag{8.39}$$

тобто, *робота виконується за рахунок зміни внутрішньої енергії системи*. Газ при адіабатному розширенні охолоджується ( $dT < 0$ ), а при адіабатному стиску робота над газом призводить до зростання його внутрішньої енергії — нагрівання ( $dT > 0$ ).

Робота газу при адіабатному процесі виражається рівняннями:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{m}{\mu} \frac{R}{\gamma-1} (T_1 - T_2), \\
 A &= \frac{m}{\mu} \frac{RT_1}{\gamma-1} \left( 1 - \frac{T_2}{T_1} \right), \\
 A &= \frac{m}{\mu} \frac{RT_1}{\gamma-1} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right],
 \end{aligned}$$

$$A = \frac{m}{\mu} \frac{RT_1}{\gamma - 1} \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]$$

де  $\gamma$  – показник адіабати для даного ідеального газу,

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i+2}{i}; \quad i - \text{число ступенів вільності.}$$

### 8.9 Робота термодинамічної системи

Розглядаючи роботу при зміні об'єму газу (п.8.4), одержано рівність (8.8), що виражає роботу у загальному випадку будь-якого переходу ідеального газу зі стану 1 у стан 2:

$$A = \int_1^2 P dV$$

З рівняння політропи випливає:

$$P_1 V_1^n = P_2 V_2^n = P V^n \Rightarrow P = P_1 \left( \frac{V_1}{V} \right)^n,$$

тоді

$$A = P_1 V_1^n \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^n} = \frac{P_1 V_1}{n-1} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{n-1} \right]. \quad (8.40)$$

Враховуючи, що

$$n - 1 = -\frac{R}{C - C_V},$$

одержимо:

$$A = -\frac{P_1 V_1 (C - C_V)}{R} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{-\frac{R}{C - C_V}} \right], \quad (8.41)$$

загальну формулу роботи політропного процесу. При відповідних значеннях молярної теплоємності отримаємо формули роботи для конкретних термодинамічних процесів:

а) при **ізохорному** процесі  $C = C_V$

$$A = -\frac{P_1 V_1 (C_V - C_V)}{R} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{-\frac{R}{C_V - C_V}} \right] = 0;$$

б) при **ізобарному** процесі  $C = C_P$

$$A = -\frac{P_1 V_1 (C_P - C_V)}{R} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{-\frac{R}{C_P - C_V}} \right] = P_1 (V_2 - V_1);$$

в) при **адіабатному** процесі  $C = 0$

$$A = -\frac{P_1 V_1 C_V}{R} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{-\frac{R}{C_V}} \right] = \frac{P_1 V_1}{\gamma - 1} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right];$$

г) при **ізотермічному** процесі  $C = \infty$

$$A = -\frac{P_1 V_1}{R/(C - C_V)} \left[ \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{-\frac{R}{C - C_V}} - 1 \right] = P_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Робота, яка виконується газом при адіабатному розширенні менша ніж при ізотермічному. Це пояснюється тим, що при адіабатному розширенні відбувається охолодження газу, тоді як при ізотермічному – температура підтримується постійною за рахунок припливу ззовні еквівалентної кількості теплоти. На рис.8.5 зображено графічні залежності адіабати (крива «а») та ізотерми (крива «б»). При адіабатному процесі тиск змінюється обернено пропорційно до об'єму  $V^\gamma$ , причому  $\gamma > 1$ , а при ізотер-

$$P \sim \frac{1}{V}$$

мічному розширенні. Тому адіабата не є гіпер-болою, вона крутіша за ізотерму. Рисунок 8.5

З фізичної точки зору, це пояснюється тим, що під час адіабатного розширення ідеального газу тиск зменшується не лише через збільшення об'єму, а й через зниження температури.

З огляду на рівняння (8.40) теплоємність залежить від значення показника політропи, вияснимо як саме. Враховуючи рівність (8.36) маємо:

$$C = C_v - \frac{R}{n-1} . \quad (8.42)$$

Оскільки

$$C_v = \frac{R}{\gamma - 1} , \quad (8.43)$$

то

$$C = R \frac{n - \gamma}{(n - 1)(\gamma - 1)} . \quad (8.44)$$

Табл. 1 Характеристика деяких термодинамічних процесів ідеального газу

| Процес              | Рівняння процесу      | Показник політропи | Теплоємність |
|---------------------|-----------------------|--------------------|--------------|
| <b>Ізотермічний</b> | $PV = const$          | 1                  | $\pm\infty$  |
| <b>Ізобарний</b>    | $\frac{V}{T} = const$ | 0                  | $C_p$        |
| <b>Ізохорний</b>    | $\frac{P}{T} = const$ | $\pm\infty$        | $C_v$        |
| <b>Адіабатний</b>   | $PV^\gamma = const$   | $\gamma$           | 0            |

## 8.10 Стисливість газу

Газ, як і будь-яке інше тіло, може змінювати свій об'єм зі зміною тиску. Ця властивість газу називається **СТИСЛИВІСТЮ** і характеризується коефіцієнтом стисливості  $\chi$ , який визначається **відносною зміною об'єму при зміні тиску на одиницю**. В загальному випадку:

$$\chi = -\frac{1}{V} \left( \frac{dV}{dP} \right) \quad (8.45)$$

Оскільки, об'єм газу при зміні тиску може змінюватись при сталій температурі або без обміну теплотою між газом і навколишнім середовищем, то розрізняють *ізотермічну*  $\chi_T$  та *адіабатну*  $\chi_a$  стисливість. Ізотермічний коефіцієнт стисливості ідеального газу обернений до його тиску:

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = \frac{1}{P} \quad (8.46)$$

З адіабатною зміною тиску змінюється об'єм газу та його температура, а зміна температури впливає на загальну зміну об'єму. Оскільки при адіабатному збільшенні тиску об'єм газу зменшується, збільшуючи при цьому температуру газу, а адіабатне збільшення температури газу призводить в свою чергу до зростання об'єму газу. Тому загальна зміна об'єму рівна:

$$\Delta V_{\text{заг}} = \Delta V_T - \Delta V_P$$

З першого закону термодинаміки маємо:

$$dQ + \delta A = 0 \rightarrow C_v dT + PdV = 0$$

Продиференціювавши другу рівність, одержимо:

$$dT = \frac{PdV + VdP}{R},$$

тоді:

$$C_v \frac{PdV + VdP}{R} = -PdV,$$

або

$$C_v PdV + C_v VdP = -RPdV.$$

Оскільки  $R = C_p - C_v$ , одержимо:

$$C_v VdP + C_p PdV = 0 \rightarrow \frac{dV}{dP} = -\frac{1}{\gamma} \frac{V}{P},$$

де  $\gamma$  – показник адіабати:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}.$$

Отже, адіабатна стисливість газу рівна:

$$\chi_a = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dP} = \frac{1}{P\gamma}. \quad (8.47)$$

Зіставивши рівності (8.46) і (8.47) бачимо, що

$$\chi_T = \gamma \chi_a, \quad (8.48)$$

адіабатна стисливість газу менша за ізотермічну у  $\gamma$  разів, тобто у стільки разів у скільки відношення молярної теплоємності при сталому тиску є більшим від молярної теплоємності при сталому об'ємі для даного газу. Розрахунки показали, що для одноатомного газу  $\gamma \approx 1,664$ , для двоатомного газу  $\gamma \approx 1,399038$ , для багатоатомного газу  $\gamma \approx 1,33(3)$ .

### *Контрольні запитання*

1. Що вивчає термодинаміка?
2. Що представляє собою перший закон термодинаміки?
3. Що показує другий закон термодинаміки?
4. Які процеси обмежує третій закон термодинаміки?
5. Що називають термодинамічною системою?
6. Який стан називають стаціонарним?
7. Який стан є рівноважним?
8. Який процес називають нерівноважним?
9. Що таке термодинамічна рівновага?
10. Які процеси називають квазістатичними або квазірівноважними?
11. Яку систему називають ізольованою?
12. Яку систему називають закритою?
13. Яку систему називають адіабатною?
14. Які системи називають гомогенними а які гетерогенними?
15. Що називають числом ступенів вільності молекул?
16. Як формулюється закон Больцмана рівномірного розподілу молекул за ступенями вільності?
17. Чим визначається внутрішня енергія термодинамічної системи?
18. Що означає той факт, що внутрішня енергія системи є однозначною функцією стану?
19. Чим визначається внутрішня енергія молекул ідеального газу?
20. В чому полягає суть роботи в термодинаміці?
21. Записати рівняння роботи при різних квазістатичних процесах.
22. Що представляє собою робота в термодинамічному розумінні?
23. Який процес називають теплообміном?
24. Що представляє собою поняття «кількість теплоти»?
25. Яка різниця між теплотою і роботою з точки зору фізичних процесів?
26. Що включає в себе поняття «теплоємність»?
27. Що таке питома теплоємність?

28. Що таке молярна теплоємність?
29. Який зв'язок між питомою та молярною теплоємностями?
30. В чому суть  $C_p$  і  $C_V$  та який зв'язок між ними?
31. Вивести рівняння Майєра.
32. В чому полягає фізичний зміст газової сталої в рівнянні Майєра?
33. Як і в якому випадку пояснюється теплоємність газів з класичної точки зору і з квантової?
34. Яким чином можна змінювати стан системи стосовно енергії?
35. Суть першого закону термодинаміки?
36. В чому суть вічного двигуна першого роду?
37. Який процес називають політропним?
38. В чому зміст рівняння політропного процесу?
39. В яких межах може знаходитись показник політропи?
40. В якому випадку політропний процес може наблизитись до адіабатного чи ізотермічного?
41. Який процес є адіабатним?
42. Суть рівняння Пуассона?
43. Зміст показника адіабати?
44. Як формулюється перший закон термодинаміки для адіабатного процесу?
45. Як виражається робота при адіабатному процесі?
46. Як записується загальна формула роботи політропного процесу?
47. Як отримати формулу роботи для ізохорного процесу з рівняння роботи політропного процесу?
48. Як отримати формулу роботи для ізобарного процесу з рівняння роботи політропного процесу?
49. Як отримати формулу роботи для адіабатного процесу з рівняння роботи політропного процесу?
50. Як отримати формулу роботи для ізотермічного процесу з рівняння роботи політропного процесу?
51. Пояснити графічну залежність адіабати та ізотерми в координатах  $PV$ .
52. Як залежить теплоємність від показників політропи та адіабати?

53. В чому суть ізотермічної та адіабатичної стисливості газу та який зв'язок між ними?

## §9. Другий закон термодинаміки

### 9.1 Оборотні та необоротні процеси

Для опису термодинамічних процесів одного першого закону термодинаміки недостатньо, оскільки цей закон виражає лише закон збереження і перетворення енергії, у якому бере участь теплота. Невідомо жодного процесу, під час перебігу якого спостерігалися б відхилення від цього фундаментального закону термодинаміки. Але він нічого не говорить про напрям протікання того чи іншого процесу і з погляду на нього, можна було б вважати, що кожен напрям є можливий, якщо він не суперечить принципу збереження енергії. Тому, узагальнення величезного експериментального досвіду призвело до відкриття і формулювання другого закону термодинаміки.

Для того, щоб перейти до вивчення другого закону термодинаміки, необхідно зрозуміти і засвоїти деякі поняття.

**Термодинамічний процес** називається **оборотним**, під час якого у зворотному напрямі система повертається в початковий стан, через ті самі проміжні стани, що й в прямому процесі, а стан тіл поза системою залишається незмінним.

Прикладом оборотного процесу можуть бути незага-снаючі коливання в механіці і в електромагнітному коливному контурі; рухи в механіці, що відбуваються без тертя.

**Необоротний**, це такий процес, який немов-на здійснити у зворотному напрямі без відповідних змін або в самій системі, або в тілах, що оточують її.

Всі реальні процеси – необоротні. Прикладом необоротного процесу є – дифузія, розширення газу у вакуум, процеси, що супроводжуються тертям, дисипацією енергії і т.д.

Поняття оборотних та необоротних процесів мають важливе значення для розуміння явищ, пов'язаних із другим законом термодинаміки і процесів перетворення теплоти в роботу за допомогою теплових машин.

Велике теоретичне значення мають і колові (замкнуті) процеси, які називають **циклами**. **Циклом** називають такий термодинамічний процес, у результаті якого система повертається в початковий стан, тобто кінцевий і початковий стани збігаються.

## 9.2 Цикл Карно та його ККД

Розглянемо коловий процес, який вперше розглянув Карно, а тому цей процес носить назву **цикл Карно**.

Цей цикл являє собою оборотний коловий процес, що складається з двох ізотерм і двох адіабат. Для впровадження цього циклу слід мати нагрівач, який надасть робочій речовині (наприклад газу) певну кількість тепла, під час його ізотермічного розширення, і охолоджувач (холодильник), який зможе забрати певну кількість тепла від робочої речовини під час його ізотермічного стиску.

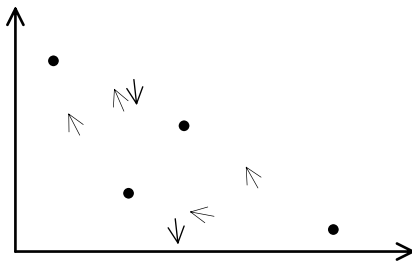


Рисунок 9.1

Кількість тепла, передану нагрівником (газу) позначимо  $Q_1$ , ту кількість тепла, яку забере холодильник, позначимо  $Q_2$ . Роботу, виконану газом під час розширення вважаємо додатною  $A_1$ , роботу, виконану над газом під час стиску  $A_2$  – від'ємною.

Розглянемо цикл Карно, вибравши в якості робочої речовини один моль ідеального газу, який у початковий момент часу знаходився в стані (1) і характеризувався параметрами ( $p_1, V_1, T_1$ ). Змусимо цей газ ізотермічно розширитись до стану (2), який буде характеризуватися параметрами ( $p_2, V_2, T_1$ ) і під час цього ізотермічного розширення газ отримає від нагрівника деяку кількість тепла  $Q_1$  та виконає роботу  $A_1 = Q_1$ .

Зі стану (2) дамо газу можливість адіабатично розширись до стану (3), який буде характеризуватися параметрами ( $p_3, V_3, T_2$ ), при цьому температура газу знизиться до  $T_2 < T_1$ .

Зі стану (3) почнемо ізотермічно стискати газ при сталій температурі  $T_2$  до стану (4), який буде характеризуватися параметрами  $(p_4, V_4, T_2)$  і під час цього процесу газ віддасть холодильнику кількість тепла  $Q_2$  і при цьому виконається робота  $A_2 = -Q_2$ .

Останнім процесом буде перехід від стану (4) до стану (1) – адіабатний стиск, під час якого температура газу підвищиться до початкової температури  $T_1$  і газ буде характеризуватися параметрами  $(p_1, V_1, T_1)$ .

Визначимо роботу, яка буде виконана під час цього циклу:

$$A = A_1 + A_2 = Q_1 - Q_2. \quad (9.1)$$

Визначимо коефіцієнт корисної дії (ККД) цього циклу. Оскільки  $Q_1$  – це кількість тепла, взята від нагрівника і перетворена в роботу, то

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}. \quad (9.2)$$

*Величина, що дорівнює відношенню роботи, виконаної робочим середовищем (тілом) в прямому оборотному циклі до кількості теплоти, наданої в цьому процесі робочому середовищу (тілу) нагрівником, називають термічним коефіцієнтом корисної дії циклу.*

$Q_1$  – кількість тепла, отримана від нагрівника одним молем газу при ізотермічному розширенні – цикл (1)→(2), то

$$Q_1 = A_1 = RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}, \quad (9.3)$$

$Q_2$  – кількість тепла, отримана холодильником при ізотермічному стиску – цикл (3)→(4), то

$$-Q_2 = A_2 = RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3} = -RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}. \quad (9.4)$$

Згадаємо з попереднього параграфу, що для адіабатного процесу справедливим є рівняння Пуассона:

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}, \quad (9.5)$$

то, стосовно розглядуваного циклу, справедливими будуть рівності:

$$\left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_2}{T_1} \quad \text{та} \quad \left(\frac{V_1}{V_4}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_2}{T_1}. \quad (9.6)$$

Порівнюючи рівності (9.6) можемо записати:

$$\frac{V_2}{V_3} = \frac{V_1}{V_4}. \quad (9.7)$$

Тоді коефіцієнт корисної дії можна виразити:

$$\eta = \frac{T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - T_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}, \quad (9.8)$$

оскільки рівність (9.7) можна переписати:

$$\frac{V_3}{V_4} = \frac{V_2}{V_1}, \quad (9.7a)$$

то рівність (9.8) перепишеться у вигляді:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad (9.9)$$

Як бачимо, згідно рівності (9.9), розглянутий *цикл Карно являє собою цикл, за яким працюють ідеальні теплові машини, коефіцієнт корисної дії яких визначається тільки температурами  $T_1$  – нагрівника і  $T_2$  – холодильника.*

### 9.3 Робота теплової машини

Схема роботи теплової машини представлена на рис.9.2. Під час проходження одного циклу газ виконує роботу:

$$A = Q_1 - Q_2 = \eta Q_1, \quad (9.10)$$

або

Рисунок 9.2

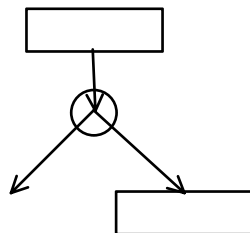
$$A = \int_{1,2}^3 p dV + \int_{4,3}^1 p dV = A_{1-3} - A_{3-1}, \quad (9.10.1)$$

і визначається заштрихованою площею (рис.9.1), що охоплюється кривою 1,2,3,4,1.

*Якщо за цикл виконується додатна робота  $A > 0$  (цикл відбувається за годинниковою стрілкою), то він називається прямим.*

А кількість тепла, яку отримав холодильник  $Q_2$  дорівнює:

$$Q_2 = Q_1 - A = (1 - \eta) Q_1. \quad (9.11)$$

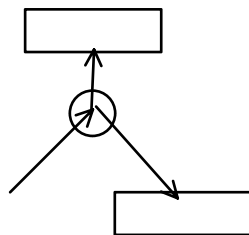


Реальні машини для перетворення теплоти в механічну роботу (парові машини, турбіни, двигуни внутрішнього згорання) працюють циклічно. Складовою частиною таких машин є робоче тіло, яким може бути будь-яка термодинамічна система (ідеальний газ, рідина + насичена пара та ін.) що здатна до розширення під час нагрівання. При циклічній роботі машини передача кількості теплоти робочому тілу періодично повторюється. Це означає, що робоче тіло зазнає колового процесу. При такій циклічній роботі вся кількість теплоти, надана робочому тілу, не може повністю перетворитися в механічну роботу. Цьому заперечує рівність (9.11) і відповідний їй другий закон термодинаміки.

**Висновок:** чим вища температура нагрівника і чим нижча температура холодильника, тим більший ККД, тим більша частина тепла, отримана від нагрівника перетворюється в роботу і тим меншу кількість тепла отримає холодильник. ККД міг би  $= 1$ , якщо  $T_2=0$  (абсолютному нулю, що є неможливим). А це означає, що за ідеальних умов всю кількість теплоти, яка надходить від нагрівника, не-можна повністю перетворити у механічну роботу. Отже, **другий закон термодинаміки** говорить: не-можливо створити вічний двигун другого роду, оскільки неможливо забезпечити такий періодичний процес, єдиним результатом якого було б перетворення в роботу всієї кількості теплоти, взятої від одного джерела.

## 9.4 Холодильна машина

Оборотність циклу Карно дозволяє провести його в зворотному напрямку. Такий **зворотний цикл Карно** являється **ідеальною холодильною машиною** – це періодично діюча установка, в якій за рахунок роботи зовнішніх сил теплота переноситься до тіла з вищою температурою. Розглянемо схему холодильної машини (рис.9.3), що працює по зворотному циклу Карно.



При цьому від холодильника буде отримано кількість теплоти  $Q_2$  а відношення цієї теплоти до роботи, затраченої в цьому циклі, називається **холодильним ко-ефіцієнтом**:  
Рисунок 9.3

$$\frac{Q_2}{A} = \varepsilon_{\kappa} \quad (9.12)$$

Холодильний коефіцієнт оборотного циклу Карно рівний:

$$\varepsilon_{\kappa} = \frac{Q_2}{|Q_1| - Q_2} = \frac{T_2}{T_1 - T_2} \quad (9.13)$$

Робочим тілом в холодильній машині слугують пари рі-дин, які легко «киплять»: аміак, фреон та ін. А сам процес від-бувається за рахунок виконання роботи зовнішніми силами. Енергія підводиться до машини від електричної мережі, за ра-хунок чого і відбувається перехід теплоти від холодильної ка-мери до більш нагрітого тіла, тобто – до навколишнього сере-довища

Відомі дві теореми Карно, які стосуються роботи теп-лових (холодильних) машин, що працюють за циклом Карно.

**Перша теорема Карно:** Усі оборотні маши-ни, які працюють за циклом Карно при тих самих значеннях температур нагрівника і холодильника, мають однаковий ККД незалежно від природи робо-чої речовини.

**Друга теорема Карно:** Якщо дві машини виконують цикл Карно, причому перша оборотна, а друга необоротна, то ККД необоротної машини не може бути більшим ніж ККД оборотної, за умови, що обидві машини мають спільний (однаковий) на-грівник і холодильник.

Реальні машини працюють за необоротними циклами, у них витрачається теплота на теплообмін з середовищем і на роботу проти сил тертя. У техніці використовують цикли, які

близькі до циклу Карно. У двигунах внутрішнього згоряння є найбільш вживаними цикли передачі тепла:

цикл Отто ( $V=\text{const}$ ),

цикл Дизеля ( $P=\text{const}$ ),

цикл Тринклера (частково  $V=\text{const}$ , частково  $P=\text{const}$ ).

## 9.5 Ентропія

Термодинамічний ККД машини, яка працює за оборотним циклом Карно і виражається рівняннями (9.2) і (9.9) можна переписати у вигляді:

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}, \quad (9.14)$$

звідки легко бачити:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{Q_2}{Q_1}, \quad (9.14.1)$$

або

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}, \quad (9.14.2)$$

або

$$\frac{Q_1}{T_1} + \left( -\frac{Q_2}{T_2} \right) = 0. \quad (9.14.3)$$

*Відношення кількості теплоти, якою система (робоче тіло, середовище) обмінюється з резервуаром теплоти, до абсолютної температури цього резервуару, називають **зведеною кількістю теплоти**.*

Під час реалізації циклу Карно зведені теплоти процесів ізотермічного розширення і стиску є однаковими, про що свідчать рівності (9.14) ÷ (9.14.3).

Для необоротного циклу (необоротної теплової машини) ці рівняння перетворюються в нерівності, зокрема:

$$\frac{Q_1}{T_1} < \frac{Q_2}{T_2} \quad (9.15)$$

Тоді, об'єднавши формули для оборотних і необоротних теплових машин, і вважаючи додатною ту кількість теплоти, яка віддана тілу нагрівником, а ту, яка віддана тілом холодильнику – від'ємною, одержимо:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0 \quad (9.16)$$

де знак «=» – стосується оборотних процесів,  
а «<» – необоротних.  
Або в загальному вигляді:

$$\sum_i \frac{Q_i}{T_i} \leq 0 \quad (9.16.1)$$

називають **нерівністю Клаузіуса**: алгебраїчна сума зведених теплот, які отримало робоче тіло під час оборотного циклу Карно дорівнює нулю, а під час необоротного менше одиниці.

Під час неперервної зміни стану тіла можна вважати, що теплообмін його відбувається з великою кількістю нагрівників і холодильників, кожен з яких віддає робочому тілу або забирає від нього нескінченно малі кількості теплот  $\delta Q$ , тоді сума (9.16.1) перетвориться в інтеграл:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0 \quad (9.17)$$

Цю нерівність записують (на основі певних доведень та математичного аналізу) для оборотного процесу у вигляді **інтегралу Клаузіуса**:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0, \quad (9.17.1)$$

*інтеграл зведених теплот будь-якого колового рівноважного процесу для всіх речовин дорівнює нулю. Зміна цієї величини (зведеної теплоти) не залежить від виду процесу, під час якого вона перейшла з одного стану в інший, а лише від початкових і кінцевих параметрів стану.*

*Зміну зведеної теплоти називають **ентропією**:*

$$dS = \frac{\delta Q}{T}. \quad (9.18)$$

За цим означенням зміна ентропії при оборотному процесі виражається:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{dU + \delta A}{T}. \quad (9.19)$$

Зміна ентропії при деяких квазістатичних термодинамічних процесах обчислюється рівностями:

а) **плавлення** (кристалізація):

$$\Delta S = \frac{1}{T} \int \delta Q = \pm \frac{Q}{T} = \pm \frac{m\lambda}{T}, \quad (9.20)$$

б) **випаровування** (конденсація)

$$\Delta S = \int \frac{\delta Q}{T} = \pm \frac{rm}{T}, \quad (9.21)$$

в) *нагрівання* (оохолодження):

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{cm dT}{T} \pm cm \ln \frac{T_2}{T_1} . \quad (9.22)$$

В незалежних змінних  $P$  і  $T$  зміна ентропії має вигляд:

$$\Delta S = C_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{P_2}{P_1} . \quad (9.26)$$

В незалежних змінних  $P$  і  $V$  зміна ентропії записується:

$$\Delta S = C_p \ln \frac{V_2}{V_1} + C_v \ln \frac{P_2}{P_1} . \quad (9.27)$$

Зміна ентропії моля ідеального газу під час довільного його оборотного переходу з одного рівноважного стану в інший:

а) *ізотермічний процес* ( $T=\text{const}$ ):

$$\Delta S = R \ln \frac{V_2}{V_1} , \quad (9.23)$$

б) *ізохорний процес* ( $V=\text{const}$ ):

$$\Delta S = C_v \ln \frac{T_2}{T_1} , \quad (9.24)$$

в) *ізобарний процес* ( $P=\text{const}$ ):

$$\Delta S = C_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{T_2}{T_1} = C_p \ln \frac{T_2}{T_1} , \quad (9.25)$$

г) *адіабатний процес*.

оскільки  $\delta Q = 0$  то зміна ентропії  $\Delta S = 0$ .

Отже, *оборотні адіабатні процеси* протікають при сталій ентропії, тобто вони є *ізоентропійними*.

Вияснимо фізичний зміст ентропії. При високій температурі передачі кількості теплоти робочому тілу ефективність теплової машини зростає, тобто більша кількість переданої теплоти перетворюється в роботу. З другого боку, чим більша температура нагрівника, тим ентропія буде меншою, а чим менша температура нагрівника, тим ентропія є більшою (рівність 9.19). Отже, цінність переданої нагрівником певної кількості теплоти  $\delta Q$  залежить від температури. А, оскільки, ентропія більше зростає при низьких температурах, є зрозумілим, що великому зростанню ентропії відповідає мала цінність нагрівника (буде низький ККД). Отже, **ентропія – це міра знецінення енергії тіла, міра теплової непрацездатності тіла.**

Для необоротних процесів:

$$dS > 0. \quad (9.28)$$

Оскільки, реальні процеси є необоротними, то ентропія кожної замкненої системи повинна зростати. Властивість ентропії зростати притаманна їй так само, як властивість енергії – зберігатися при будь-яких процесах, що відбуваються у замкненій системі. **Закон зростання ентропії виражає другий закон термодинаміки для необоротних процесів.** Цей закон характеризує ентропію як міру необоротності процесів в ізольованій системі і формулюється таким чином: **ентропія замкненої системи або зростає, якщо в системі відбуваються необоротні процеси, або залишається незмінною, якщо система перебуває в рівновазі і всі процеси в ній є оборотними.**

Необоротними є усі природні явища, оскільки, кожний процес супроводжується тертям, теплообміном при скінчених різницях температур, тобто існує дисипація енергії. Тому сума ентропії тіл ізольованої системи, які беруть участь у цих процесах, завжди зростає, але лише до певної межі, характерної

для цієї системи. Таке максимальне значення ентропії відповідає стану рівноваги, в якому в системі, що не зазнає зовнішніх впливів, не можуть відбуватися ніякі зміни. У неізолюваних термодинамічних системах ентропія може збільшуватися, може зменшуватися, а може не змінюватися в залежності від характеру процесу та впливу зовнішнього середовища.

Як було сказано, ентропія в ізолюваних системах зростає до певної межі. До якої саме?

Ізолювана система, яка з якихось причин не перебуває в стані рівноваги, в результаті необоротного процесу переходить у рівноважний стан. Перехід системи до рівноважного стану є більш можливим (ймовірним), ніж перехід у будь-який нерівноважний стан. Тому, між ентропією системи в тому чи іншому стані та ймовірністю реалізації цього стану існує зв'язок, який виражається рівнянням Больцмана:

$$S = k \ln W, \quad (9.29)$$

- ентропія системи дорівнює добутку константи Больцмана на натуральний логарифм термодинамічної ймовірності макростану, в якому вона перебуває.

Рівноважному стану системи відповідає найбільша термодинамічна ймовірність  $W$ , а отже, і максимальне значення ентропії. Цей стан реалізується найбільшою кількістю мікростанів і є найбільше неупорядкованим. Таким чином, ентропія – міра наближення ізолюваної системи до рівноважного стану, або міра неупорядкованості (хаотичності) системи. Зокрема, під час конденсації пари ентропія зменшується, оскільки в просторовому розподілі молекул рідини є вираженим ближній порядок, і ступінь неупорядкованості є меншим, ніж у газах. Під час кристалізації розплавів формується кристалічна структура тіл з геометрично правильним розміщенням складових частинок (атомів, молекул, іонів), отже, ентропія, як міра неупорядкованості системи для даного процесу – зменшується.

З точки зору статистичної фізики тлумачення другого закону термодинаміки полягає в тому, що усі процеси поділяються не на можливі і неможливі, а на ймовірні і малоймовірні, тобто, всякий процес у природі

протікає так, що система переходить до того стану, ймовірність якого є більшою.

## 9.6 Технічні цикли

Здійснити на практиці зворотній цикл Карно неможливо; наближення до нього є можливим лише при дуже повільному протіканні процесу, що з технічної точки зору не є прийнятним. Технічні цикли, що застосовуються у теплових машинах є незворотними і насправді навіть незамкненими, оскільки їхня робоча речовина (пара, суміш, що згоріла) по закінченні циклу викидаються назовні. Але, завданням техніки є створення таких циклів, ККД яких, по-можливості, наближається до ККД циклу Карно. Ось деякі з них, що застосовуються.

**1. Робочий цикл ідеальної поршневої парової машини (рис. 9.4):**

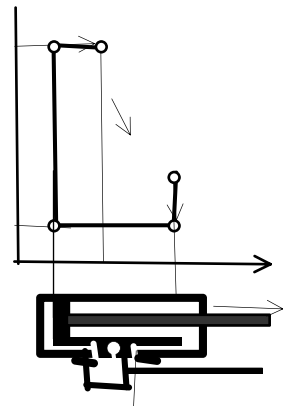
при наявності доступу пари в циліндр тиск в циліндрі піднімається від значення  $p_0$  (що відповідає тиску пари в холодильнику) до значення  $p_1$  (що відповідає тиску пари в нагрівнику). Це відбувається при сталому об'ємі  $V_0$  (ділянка  $EA$ ), робота при цьому *ізохорному розширенні дорівнює нулю*;

пара, що продовжує поступати з нагрівника у циліндр починає рухати поршень з ліва ( $\rightarrow$ ) на право, за рахунок чого об'єм збільшується при сталому тиску від значення  $V_0$  до  $V_1$  (ділянка  $AB$ ), а робота при *ізобарному розширенні* буде:

$$A_1 = p_1(V_1 - V_0),$$

при подальшому рухові поршня направо доступ пари в циліндр припиняється, в наслідок чого відбувається адіабатне розширення пари від об'єму  $V_1$  до  $V_2$  (ділянка  $BC$ ), а робота при *адіабатному розширенні*

Рисунок 9.4



буде рівною:

$$A_2 = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right],$$

коли поршень буде знаходитись у крайньому правому положенні, відкривається золотник і пара з циліндра виходить у холодильник, при цьому відбувається швидкий спад тиску в циліндрі до значення  $p_0$  (практично при постійному об'ємі  $V_2$  – ділянка  $CD$ ), а *робота при ізохорній зміні тиску дорівнює нулю*;

під час зворотного руху ( $\leftarrow$ ) поршень виштовхує залишки пари при сталому тиску  $p_0$  зменшуючи її об'єм від  $V_2$  до  $V_0$  (ділянка  $DE$ ), і при ізобарному стиску робота буде:

$$A_3 = -p_0(V_2 - V_0),$$

тоді повна робота:

$$A = p_1(V_1 - V_0) - p_0(V_2 - V_0) + \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right].$$

В парових турбінах ККД складає всього 20 %, що для теперішнього часу є дуже низьким значенням, хоча на початку 19 століття це було «вершиною» техніки.

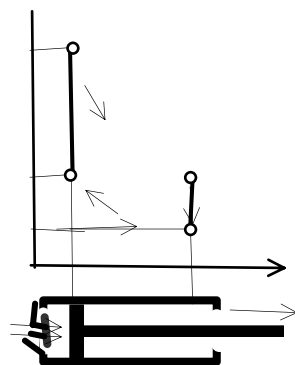
## 2. Робочий цикл чотирьохтактного двигуна внутрішнього згорання (рис. 9.5):

під час першого ходу поршня зліва ( $\rightarrow$ ) направо (перший такт) в циліндр всмоктуються через клапан  $a$  горюча суміш (пара бензину з повітрям), це відбувається *при сталому тиску*  $p_0$ , яке дорівнює атмосферному, об'єм при цьому збільшується від  $V_1$  до  $V_2$  (ділянка  $EA$ ), робота, яка виконується при цьому процесі буде дорівнювати:

$$A_1 = p_0(V_2 - V_1),$$

протягом другого ходу (другий такт) поршень, рухаючись вліво ( $\leftarrow$ ) **адіабатично стискає** всмоктану суміш, зменшуючи її об'єм від  $V_1$  до  $V_2$  підвищуючи при цьому температуру суміші від  $T_o$  до  $T_1$  і, разом з тим збільшуючи тиск від  $p_o$  до  $p_1$  (ділянка  $AB$ ), при цьому буде виконана робота:

$$A_2 = \frac{RT_o}{\gamma - 1} \cdot \frac{m}{\mu} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right],$$



за допомогою електричної іскри, що проскакує біля свічки  $M$ , стиснута **суміш вибухає** (це третій такт), спочатку відбувається миттєве (без зміни об'єму – гілка  $BC$ ) **зростання тиску** до значення  $p_2$  і **температури** – до значення  $T_2$  за рахунок тепла, що виділяється під час вибуху:

$$A_3 = 0 \quad \text{бо} \quad \Delta V = 0,$$

і тут же поршень рухаючись зліва направо ( $\rightarrow$ ) спричинює **адіабатичне розширення** газу до об'єму  $V_1$  що ще й супроводжується **спадом температури** від  $T_2$  до  $T_3$  (гілка  $CD$ ):

$$A_4 = - \frac{RT_3}{\gamma - 1} \cdot \frac{m}{\mu} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right],$$

але при крайньому правому положенні поршня (в точці  $D$ ), **відкривається випускний клапан**  $b$  і тут при сталому об'ємі  $V_1$  **тиск падає** до значення  $p_o$  і **температура** та-кож **спадає** до значення  $T_o$  (гілка  $DA$ ), робота при цьому буде рівною нулю:

$$A_5 = 0 \quad \text{бо} \quad \Delta V = 0,$$

під час останнього четвертого такту поршень двигуна рухається вліво ( $\leftarrow$ ) виштовхуючи через клапан  $b$  відпрацьовані гази назовні (гілка  $AE$ ), робота при цьому буде рівною роботі  $A_1$  але з протилежним знаком:

$$A_6 = -p_0(V_2 - V_1)$$

Оскільки роботи  $A_1$  та  $A_6$  однакові, але протилежні за знаком, то їхня сума рівна нулю; роботи  $A_3$  та  $A_5$  є рівними нулю, то в кінцевому результаті загальна робота цього циклу Карно буде дорівнювати сумі робіт  $A_2$  та  $A_4$ :

$$A = A_2 + A_6 = \frac{R}{\gamma - 1} \cdot \frac{m}{\mu} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right] (T_0 - T_3) \quad , \quad (9.30)$$

враховуючи з §8 співвідношення

$$\left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = \frac{T_2}{T_3} = \frac{T_1}{T_0} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{T_0}{T_3} ; \quad \frac{R}{\gamma - 1} = C_\nu \quad ,$$

рівність (9.30) можна записати:

$$\begin{aligned} A &= \frac{m}{\mu} C_\nu \left( 1 - \frac{T_1}{T_2} \right) (T_2 - T_3) = \\ &= \frac{m}{\mu} C_\nu \left[ (T_2 - T_3) - \frac{T_1}{T_2} (T_2 - T_3) \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{m}{\mu} C_v \left[ (T_2 - T_3) - \frac{T_1 T_2}{T_2} + \frac{T_1 T_3}{T_2} \right] = \\
&= \frac{m}{\mu} C_v (T_2 - T_3 - T_1 + T_0)
\end{aligned}
\tag{9.31}$$

Рівність (9.31) отримана для сумарної роботи, що виконувалась під час циклу на окремих гілках цього циклу, але аналогічний результат можна отримати, виходячи із закону збереження енергії:

$$A = Q_1 - Q_2,$$

де  $Q_1$  – кількість теплоти, яку система отримала в результаті вибуху горючої суміші;

$Q_2$  – кількість відданої системою теплоти.

Кількість теплоти, що отримана через вибух, описується рівністю:

$$Q_1 = \frac{m}{\mu} C_v (T_2 - T_1),$$

а та кількість, що віддається системою при ізохорному охолодженні і зображається на рис. 9.5 гілкою  $DA$  запишеться рівнянням:

$$Q_2 = \frac{m}{\mu} C_v (T_3 - T_0)$$

тоді рівняння для роботи з точки зору кількості теплоти запишеться:

$$\begin{aligned}
 A = Q_1 - Q_2 &= \frac{m}{\mu} C_V [(T_2 - T_1) - (T_3 - T_0)] = \\
 &= \frac{m}{\mu} C_V (T_2 - T_1 - T_3 + T_0)
 \end{aligned}
 \tag{9.32}$$

Як видно рівності (9.31) та (9.32) співпадають.

Чотирьохтактні двигуни, що працюють за вищеописаним циклом, мають досить широке застосування, бензинові автомобільні двигуни працюють саме за таким циклом, хоча в реальних умовах стиск (гілка  $AB$ ) і розширення (гілка  $CD$ ) не протікають строго адіабатично, оскільки стінки циліндра і поршень поглинають тепло (нагріваються). Переважно на один вал працюють декілька циліндрів (чотири, шість). Робоча фаза кожного циліндра зсунута відносно робочої фази на однаковий період, чим і досягається плавність ходу.

**3. Робочий цикл чотирьохтактного двигуна внутрішнього згорання Дизеля** (рис. 9.6):

Двигун *Дизеля* працює подібно до розглянутого вище двигуна внутрішнього згорання, але головна відмінність у тому, що тут застосовується дуже великий ступінь стиску (до 30–35  $at$  і більше). Оскільки *стиск відбувається приблизно адіабатично*, то досягається велике підвищення температури, а цього підвищення достатньо для запалювання горючої суміші, тому двигун *Дизеля* не потребує постійного запалювання суміші іскрою. Горюча суміш вприскується в циліндр по закінченні стиску, причому вприскується поступово, що зумовлює відносно повільне її згорання під час ізобарного розширення. Ці особливості двигуна *Дизеля* дозволяють отримати більш високий ККД, ніж у чотирьохтактних двигунах із запалюванням іскрою.

Робочий цикл двигуна *Дизеля* відбувається наступним чином:

під час першого такту поршень всмоктує в циліндр атмосферне повітря, процес є *ізобарним* при атмосферному тиску  $p_o$  (гілка  $EA$ ), при цьому робота буде:

$$A_1 = p_0(V_2 - V_1),$$

під час другого такту поршень стискає це повітря *адіабатично* до високого тиску  $p_1$ , в результаті чого температура підвищується від  $T_0$  до  $T_1$  (гілка  $AB$ ) при цьому виконується робота:

$$A_2 = \frac{p_0 V_2 (T_0 - T_1)}{(\gamma - 1) T_0},$$

на початку третього такту в циліндр вприскується паливе, яке запалюється в гарячому повітрі і згорає, викликаючи переміщення поршня *при сталому тиску*  $p_1$ ; температура при цьому за рахунок згорання підвищується від  $T_1$  до  $T_2$  (гілка  $BC$ ), при цьому робота рівна:

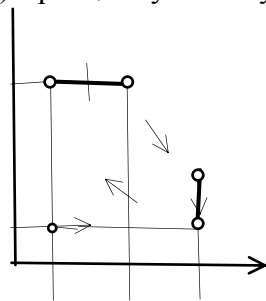


Рисунок 9.6

$$A_3 = p_1 \Delta V = \frac{m}{\mu} R (T_2 - T_1),$$

після цього суміш продуктів згорання і повітря *адіабатично* розширюється (гілка  $CD$ ), робота при цьому:

$$A_4 = \frac{RT_2}{\gamma - 1} \frac{m}{\mu} \left( 1 - \frac{T_3}{T_2} \right),$$

в кінці третього такту (точка  $D$ ) відкривається випускний клапан, в результаті чого тиск в циліндрі падає при сталому об'ємі  $V_2$  до атмосферного тиску  $p_0$  (гілка  $DA$ ), робота при цьому дорівнює нулю, оскільки зміна об'єму не відбувається:

$$A_5 = 0 \quad \text{бо} \quad \Delta V = 0,$$

під час останнього – четвертого такту – суміш продуктів згорання виштовхується циліндром назовні (гілка  $AE$ ),

робота при цьому є рівною по величині, але протилежною за знаком до  $A_I$ :

$$A_6 = -p_o(V_2 - V_1).$$

Сумарна ж робота буде:

$$A = A_2 + A_3 + A_4 = \\ = \frac{p_0 V_2 (T_0 - T_1)}{(\gamma - 1) T_0} + \frac{m}{\mu} R (T_2 - T_1) + \frac{R T_2}{\gamma - 1} \frac{m}{\mu} \left( 1 - \frac{T_3}{T_2} \right)$$

врахувавши співвідношення між параметрами при адіабатному та ізобарному процесах в кінцевому варіанті одержимо рівність для роботи, що описує даний цикл:

$$A = \frac{m}{\mu} C_v [\gamma (T_2 - T_1) - (T_3 - T_0)] \quad (9.33)$$

З точки зору *закону збереження енергії* для визначення роботи що виконається під час циклу *Дизеля* :

$$A = Q_1 - Q_2,$$

де  $Q_1$  – теплота, що виділилась при згоранні суміші;

$Q_2$  – теплота, віддана навколишньому середовищу.

Оскільки згорання суміші відбувається ізобарно, то

$$Q_1 = \frac{m}{\mu} C_p (T_2 - T_1)$$

Процес, пов'язаний з віддачею теплоти (гілка  $DA$ ) відбувається ізохорно, тому:

$$Q_2 = \frac{m}{\mu} C_v (T_3 - T_0)$$

а в загальному отримаємо:

$$A = \frac{m}{\mu} C_v [\gamma(T_2 - T_1) - (T_3 - T_3)] \quad (9.34)$$

Як видно рівняння (9.33) та (9.34) однакові, отже підхід з обох точок зору до даної проблеми є справедливим.

### ***Контрольні запитання***

1. Який термодинамічний процес називають оборотним?
2. Який термодинамічний процес називають необоротним?
3. Який процес називають циклом?
4. Що собою представляє цикл Карно?
5. Описати цикл Карно.
6. Що називають термодинамічним коефіцієнтом корисної дії циклу?
7. Як виражається ККД циклу Карно для ідеальної теплової машини?
8. Як виражається робота ідеальної теплової машини виконана газом?
9. Яка різниця між ідеальною та реальною тепловими машинами?
10. Що говорить другий закон термодинаміки?
11. В чому суть ідеальної холодильної машини?
12. Що називають холодильним коефіцієнтом?
13. Суть першої теореми Карно?

14. Суть другої теореми Карно?
15. Що називають зведеною кількістю теплоти?
16. В чому суть нерівності Клаузіуса?
17. Що називають ентропією?
18. Як виражається зміна ентропії при оборотних процесах (нагрівання, плавлення, випаровування)?
19. Як виражається зміна ентропії при ізопроцесах та адіабатному процесі?
20. В чому полягає фізичний зміст ентропії?
21. В чому полягає суть закону зростання ентропії для необоротних процесів?
22. Що виражає рівняння Больцмана стосовно ентропії ізольованої системи?
23. Як розуміти другий закон термодинаміки з точки зору статистичної фізики?

## РОЗДІЛ V

### РЕАЛЬНІ ГАЗИ, РІДИНИ, ТВЕРДІ ТІЛА

---

#### §10. Реальні гази

##### 10.1 Відхилення від законів ідеальних газів

Вивчені на попередніх лекціях закони ідеального газу наближено описують поведінку реальних газів та їх властивості. Закони ідеальних газів справедливі для реальних газів лише тоді, коли вони перебувають при низьких тисках і високих температурах, тобто коли можна знехтувати власними розмірами молекул і силами взаємодії між ними, оскільки, це і є умова ідеалізації газу.

Розглянемо, який об'єм, за величиною, приблизно, займають в об'ємі газу, об'єм самих молекул. Якщо прийняти, що радіус молекули становить приблизно  $10^{-10}$  м, то об'єм однієї молекули, становитиме:

$$V_0 = \frac{4}{3} \pi r^3 = 4,19 \cdot 10^{-30} \text{ м}^3$$

За нормальних умов у  $1 \text{ м}^3$  газу міститься  $2,7 \cdot 10^{25}$  молекул, тоді у цьому ж метрі кубічному об'ємі, що його займатимуть самі молекули, в наслідок своїх розмірів буде становити:

$$V = 4,19 \cdot 10^{-30} \cdot 2,7 \cdot 10^{25} = 1,1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3$$

Отже, врахування власного об'єму молекул під час експериментів при дослідженні властивостей газів є важливим. Окрім того, ми повинні враховувати сили взаємодії між мо-

лекулами газу, оскільки сама по собі ця взаємодія є достатньо складною, внаслідок складності будови молекул газів.

## 10.2 Рівняння Ван-дер-Ваальса

Відхилення реального газу від ідеального враховані на основі теоретичних досліджень нідерландським вченим Ван-дер-Ваальсом. Об'єм, в якому вільно можуть рухатися молекули, насправді є меншим від геометричних розмірів посудини  $V$  на величину  $b$ . Власне цю поправку, пов'язану з власним об'ємом молекули, можна вважати сталою для даного газу, і для одного моля вона визначається:

$$b = 4v_0 N_A, \quad (10.1)$$

де  $v_0$  – власний об'єм молекули деякого газу.

Отже, *поправка на об'єм чисельно дорівнює чотирикратному об'ємові всіх молекул одного моля газу*. Це пояснюється тим, що під час взаємодії двох молекул одна з одною, віддаль між їхніми центрами становить  $2r$  (рис.10.1), тоді всі решта молекули не зможуть потрапити у середину сфери, радіус якої становить  $2r$ , а об'єм цієї сфери рівний:

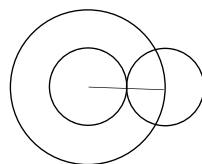


Рисунок 10.1

$$V_{\text{заб}} = \frac{4}{3} \pi (2r)^3 = 8v_0, \quad (10.2)$$

у перерахунку на одну молекулу, заборонений об'єм становить  $4v_0$ , а для всіх молекул  $4v_0 N$ .

Друга поправка стосується того, що *молекули, знаходячись на деякій віддалі одна від одної взаємно притягаються*, а ці сили в свою чергу *спричиняють виникнення додаткового тиску*, який *називають внутрішнім або молекулярним тиском*.

Якщо розглянути молекули в середині об'єму газу, то, **в середньому**, сили взаємодії між молекулами компенсують одна одну, а ті молекули, що знаходяться біля стінки посудини відчують взаємодію з тими молекулами, що знаходяться від стінки на віддалі більшій  $2r$ ;

де  $r$  – радіус молекулярної взаємодії.

Число молекул на віддалі  $2r$  є пропорційним концентрації молекул  $n_0$ , таким чином, дія сили притягання, що відтягує молекули від стінки є пропорційною  $n_0$ . Окрім того, число молекул, що вдаряються об стінку теж є пропорційним  $n_0$ . Таким чином, сила, що діє на молекули, які знаходяться біля

стінки є пропорційною  $F \sim n_0^2$ . Ця сила, поділена на одиницю площі і представляє собою **внутрішній тиск**  $p_i$ . А, оскільки, кількість молекул є обернено пропорційною до об'єму

$n_0 \sim \frac{1}{V_0}$ , що його займає один моль газу, то поправка має вигляд:

$$p_i = \frac{a}{V_0^2}, \quad (10.3)$$

де числове значення коефіцієнта  $a$  залежить від характеру сил притягання між молекулами, тобто від природи газу і обрховується за певними параметрами для кожного газу окремо. Таким чином, **рівняння Ван-дер-Ваальса для одного моля газу має вигляд:**

$$\left( p + \frac{a}{V_0^2} \right) \cdot (V_0 - b) = RT, \quad (10.4)$$

а для деякої маси газу:

$$\left( p + \frac{m^2}{\mu^2} \cdot \frac{a}{V^2} \right) \cdot \left( V - \frac{m}{\mu} b \right) = \frac{m}{\mu} RT \quad (10.4a)$$

Числові значення  $a$  і  $b$  різні для різних газів (табл.2) і для деяких газів залежать від температури.

Гази, які точно підпорядковуються рівнянню Ван-дер-Ваальса, називають газами Ван-дер-Ваальса. Для газів з великою густиною рівняння Ван-дер-Ваальса є непридатним у кількісному відношенні, а в якісному – його поведінку воно передає правильно. У цих випадках рівняння (10.4) є наближеним напівемпіричним рівнянням.

Таблиця 2

| Газ                    | $a, \text{Н} \cdot \text{м}^4 / \text{моль}^2$ | $b, \cdot 10^5 \text{ м}^3 / \text{моль}$ |
|------------------------|------------------------------------------------|-------------------------------------------|
| Водень                 | 0,024                                          | <b>2,63</b>                               |
| Кисень                 | 0,137                                          | <b>3,16</b>                               |
| Азот                   | 0,136                                          | <b>3,85</b>                               |
| Вода (пара)            | 0,545                                          | <b>3,06</b>                               |
| Гелій                  | 0,003                                          | <b>2,34</b>                               |
| <b>Вуглекислий газ</b> | <b>0,361</b>                                   | <b>4,28</b>                               |

### 10.3 Ізотерми газу Ван-дер-Ваальса

Після математичних перетворень рівняння Ван-дер-Ваальса має вигляд:

$$V^3 - \left( \frac{RT}{P} + b \right) V^2 + \frac{a}{P} V - \frac{ab}{P} = 0 \quad (10.5)$$

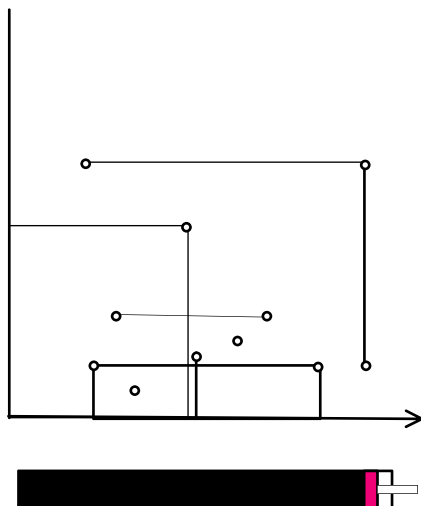
Це - кубічне рівняння відносно об'єму  $V$ .

На основі рівняння Ван-дер-Ваальса, за теоретичними розрахунками, були побудовані ізотерми Ван-дер-Ваальса (рис.10.2), які дають якісну характеристику реальних газів. Розглянемо ці ізотерми в координатах тиску  $p$  і об'єму  $V$ . Кожна крива відповідає певній температурі. Верхні ізотерми відповідають вищим температурам, а нижчі – нижчим.

Характерним для цих ізотерм є те, що для кривих, які знаходяться вище точки  $K$ , будь-яка ізобара перетинає ізотерму в одній точці, а для ізотерм, що знаходяться нижче точки  $K$ , довільній ізобарі відповідає три значення об'єму  $V_1, V_2, V_3$ . Це пояснюється тим, що рівняння Ван-дер-Ваальса є кубічним рівнянням, а отже воно може мати три розв'язки, всі три з яких можуть бути різними і дійсними, або один дійсний і два уявні. Розглянемо ізотерму, що відповідає температурі  $T_1$ . Крива  $ab$  характеризує плавну зміну тиску і об'єму, а об'єм  $V_3$  відповідає найбільшому з трьох точок перетину, отже при цьому значенні речовина має найменшу густину, то природно вважати, що крива  $ab$  відповідає газоподібному стану речовини.

Точка  $f$  відповідає найменшому об'єму  $V_1$  і, як бачимо, крива різко підіймається вгору – при невеликій зміні об'єму, тиск різко зростає, що властиве рідинам, отже, можна стверджувати, що цей об'єм відповідає речовині в рідкому стані.

Таким чином, загальний аналіз теоретичних ізотерм підводить до висновку, що рівняння Ван-дер-Ваальса описує не тільки



газоподібний стан ідеа-

Рисунок 10.2

льного газу, а й перехід його від газоподібного стану до рідкого. Цей висновок підтверджується і експериментально.

Продовжимо розгляд цих ізотерм. Ділянка  $bc$  відповідає газоподібному стану речовини, який називають *пересиченою (або переохолодженою) парою*, а ділянка  $ef$  – відповідає рідкому стану, який називають *перегрітою рідиною*. Експериментально, за певних умов, ці стани речовини можуть бути відтворені, але ці стани є *нестабільними*, вони легко руйнуються, їх ще називають *метастабільними станами* речовини. Лінія ізотерми  $cde$  відповідає абсолютно нестійкому стану речовини, який послідовно не може бути реалізованим. Тому стан речовини, який відповідає цій ділянці ізотерми має лише теоретичний інтерес. З підвищенням температури (наприклад  $T_2$ ) горизонтальна хвилеподібної частини ізотерми, звужується, мінімум і максимум хвилі зменшуються, а при деякій температурі  $T_k$  ізотерма має лише одну точку перегину  $K$ , в якій всі три значення об'єму збігаються, що відповідає трьом дійсним і рівним за значеннями кореням рівняння (10.5). Температура  $T_k$ , відповідна їй ізотерма і точка  $K$  називаються *критичними*. При цій температурі зникає різниця між різними станами речовини і коефіцієнт поверхневого натягу дорівнює нулю. Для точки  $K$  відповідні їй тиск  $p_k$  і об'єм  $V_k$  також називаються критичними. Значення  $p_k$ ,  $V_k$ ,  $T_k$  характеризують стан речовини, який називається критичним. У цій точці зникає межа між рідиною і парою. Над критичною ізотермою речовина знаходиться лише в газоподібному стані. *Пара відрізняється від інших газоподібних станів тим, що при ізотермічному стиску відбувається процес зрідження, а газ, який знаходиться в стані при температурі, що вища за критичну, не може бути перетвореним в рідину ні при якому стиску.* Термін «критична температура» ввів англійський фізик Т. Ендрю (1813–1885) на основі досліджень зрідження газів у 1869 році.

## 10.4 Експериментальні ізотерми

Фізика явищ, що пов'язані з поведінкою реальних газів, і поняття «критичного стану» речовини найкраще можуть бути встановлені і проаналізовані шляхом порівняння теоретичних ізотерм газу Ван-дер-Ваальса з відповідними експериментальними ізотермами.

Розглянемо експериментальні (рис. 10.3). Ізотерми Як вияснилося, вони не мають тих хвилеподібних перегинів, що є на теоретичних ізотермах, вони переходять в горизонтальні прямі.

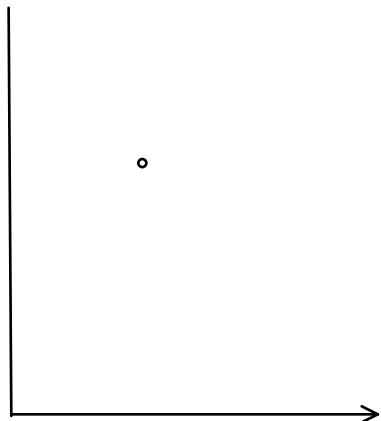


Рисунок 10.3

Початок цієї прямої (справа) відповідає *початку* процесу *зрідження* газу, а кінець (зліва) – відповідає *завершенню процесу зрідження газу*.

Починаючи з деякої точки  $d$  тиск у системі перестав підвищуватися і в цей момент з'являються крапельки рідини: однофазна система поділяється на дві співіснуючі в рівновазі фази – газоподібну і рідку.

Тиск  $p_0$ , при якому починається процес зрідження називається *пружністю насиченої пари при даній температурі*. На ділянці стиснення  $df$  густина речовини в рідкому і газоподібному станах не змінюється. В процесі стиснення маса речовини в газоподібному стані увесь час зменшується, а в рідкому – збільшується.

Таким чином, знаходячись в області, відміченій *пунктиром*, речовина знаходиться у двох агрегатних станах (*в двох фазах*) – рідкому і газоподібному. Справа – *не заштрихована* область відповідає газоподібному стану речовини, а зліва – *заштрихована* – рідкому стану.

Так само як і на рис.10.2, на цій діаграмі є криві, які знаходяться повністю в області газоподібного стану. Це говорить про те, що не всі гази зріджуються навіть при досить ве-

ликих тисках. Численними експериментами, які проводились ще у XIX столітті було встановлено, що підвищенням тиску можна зрідити газ лише тоді, коли його температура нижча за критичну.

### **10.5 Критичний стан речовини. Критичні параметри**

Але, як бачимо, серед ізотерм (рис.10.2, 10.3), є така ізотерма, яка немає перегинів і горбів, а проходить через точку  $K$ . Ця ізотерма називається **критичною**, а параметри, які їй відповідають у цій точці називають  $T_K, p_K, V_K$  – **критичними параметрами для даного газу**. В критичній точці пропадає всяка різниця між рідиною і парою. В цей момент відбувається помутніння речовини, яке називають **опалесценцією**. Суть цього явища полягає в тому, що в критичному стані речовина стає мутною через значне розсіювання світла і його поглинання в неоднорідному середовищі (подібне явище розсіювання світла спостерігається мінералом, який називається **опал**, звідсіля і назва явища «опалесценція»).

**З наведених експериментальних ізотерм (рис. 10.3) маємо такі висновки:**

1) при температурі, вищій за критичну, речовина може існувати лише в газоподібному стані. **Газ, що має температуру вищу за критичну, ніяким стиском не може бути зрідженим**. При температурах, які нижчі від критичної, речовина може існувати або в рідкому, або в газоподібному стані, або в двох фазах одночасно: рідина і насичена пара, в залежності від тиску;

2) значення пружності насиченої пари  $p_0$  не може бути більшим від значення критичного тиску для даної речовини  $p_K$ ;

3) величина об'єму речовини в рідкому стані не може бути більшою від величини критичного значення об'єму цієї речовини.

Розв'язуючи рівняння Ван-дер-Ваальса для критичної точки, отримали значення критичних величин  $T_{\kappa}$ ,  $p_{\kappa}$ ,  $V_{\kappa}$  через константи  $a$  і  $b$ :

$$T_{\kappa} = \frac{8a}{27bR}; \quad V_{\kappa} = 3b; \quad p_{\kappa} = \frac{a}{27b^2}. \quad (10.6)$$

Таким чином, знаючи сталі Ван-дер-Ваальса можна оцінити критичні параметри одного моля речовини. Власне оцінити, бо обчислені параметри за рівняннями 10.6 не співпадають з отриманими експериментально.

Для того, щоб для кожного газу не проводити безліч досліджень, а на основі деяких даних порівнювати гази між собою і будувати ізотерми, існує зведене рівняння Ван-дер-Ваальса.

Введемо *зведені параметри*, під якими розуміють *відношення змінної величини до її критичного значення*:

$$\theta = \frac{T}{T_{\kappa}};$$

$T_{\kappa}$  — зведена температура;

$$\pi = \frac{p}{p_{\kappa}};$$

$p_{\kappa}$  — зведений тиск;

$$\omega = \frac{V}{V_{\kappa}};$$

$V_{\kappa}$  — зведений об'єм.

Тоді отримаємо *зведене рівняння Ван-дер-Ваальса*

$$\left( \pi + \frac{3}{\omega^2} \right) (3\omega - 1) = 8\theta, \quad (10.7)$$

яке не містить констант, що характеризують окрему речовину. Воно є універсальним і ґрунтується на **законі від-повідних станів**: якщо різні за хімічною природою речовини

мають два (з трьох) однакових зведених параметри, то і третій параметр для цих речовин буде теж однаковим. Речовини, що підпорядковуються цьому закону називаються *термодинамічно подібними*. Закон відповідних станів ввів бельгійський вчений О. Хєєн.

## 10.6 Внутрішня енергія реального газу

Внутрішня енергія реального газу складається з кінетичної енергії теплового руху його молекул ( $U_{\kappa}$ ) і потенціальної енергії міжмолекулярної взаємодії ( $U_n$ ). Кінетична енергія теплового руху молекул однозначно визначається абсолютною температурою газу. Ця складова внутрішньої енергії дорівнює сумі кінетичної енергії усіх видів руху молекул газу, тобто:

$$U_{\kappa} = N \frac{i}{2} kT = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} RT \quad (10.8)$$

Потенціальна енергія газу зумовлена лише силами притягання між молекулами, а чисельно дорівнює роботі, яку необхідно виконати проти сил притягання, щоб віддалити одну молекулу від іншої на нескінченну віддаль. Сили притягання між молекулами призводять до виникнення внутрішнього молекулярного тиску  $P'$  на газ, тому потенціальна енергія виражається макроскопічно

$$U_n = -A = - \int_V^{\infty} P' dV, \quad (10.9)$$

де  $m$  — для деякої маси газу

$$P' = \left( \frac{m}{\mu} \right)^2 \frac{a}{V^2}. \quad (10.10)$$

Робота, яка затрачається для подолання сил притягання, що діють між молекулами газу, або проти внутрішнього тиску, йде на збільшення потенціальної енергії системи:

$$\begin{aligned} dA &= p_i dV = \int dE_n = \int \left( \frac{m}{\mu} \right)^2 \frac{a}{V^2} dV = \\ &= - \left( \frac{m}{\mu} \right)^2 \frac{a}{V} + const, \end{aligned} \quad (10.11)$$

звідки

$$U_n = - \left( \frac{m}{\mu} \right)^2 \frac{a}{V}, \quad (10.12)$$

де константа для граничних умов при  $V \rightarrow \infty, U_n \rightarrow 0$  дорівнює нулю;

знак «-» означає, що молекулярні сили, які створюють внутрішній тиск є силами притягання.

Отже, для внутрішньої енергії реального газу маємо:

$$U = U_\kappa + U_n = \frac{m}{\mu} \left( \frac{i}{2} RT - \frac{m a}{\mu V} \right). \quad (10.13)$$

Якщо цей вираз переписати у вигляді:

$$U = \frac{m}{\mu} \left( C_\nu T - \frac{m a}{\mu V} \right), \quad (10.14)$$

де  $C_\nu = \frac{i}{2} R$  – молярна теплоємність газу при сталому об'ємі, звідки маємо висновок, що кінетична енергія реального газу,

як і ідеального визначається теплоємністю при сталому об'ємі, тобто:

$$E_{\kappa} = C_{\nu} T, \quad (10.15)$$

отже, внутрішня енергія для одного моля реального газу:

$$U = C_{\nu} T - \frac{a}{V}, \quad (10.16)$$

і вона зростає зі збільшенням температури і об'єму газу.

### 10.7 Ефект Джоуля-Томсона

Д.Джоуль та В.Томсон виконали у 1852–1862 рр серію дослідів, суть яких полягала в наступному: у термоізововану трубу між двома поршнями, які можуть ковзати без тертя, поміщують нерухому

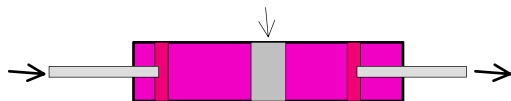


Рисунок 10.4

пористу перегородку. З одного боку від неї знаходиться газ під тиском  $P_1$ , а з другого – під тиском  $P_2$ , причому  $P_1 > P_2$ . У наслідок різниці тисків газ повільно протікає через перегородку в напрямку меншого тиску (на рис. зліва направо). Гідродинамічний опір перегородки призводить до втрати на ній частини тиску газу, який виходить з перегородки при нижчому тиску. Через значне тертя у перегородці швидкість газового потоку досить мала і тому його кінетичною енергією можна нехтувати. Легко ковзаючи, без тертя, поршні забезпечують підтримання постійних тисків з обох боків. За таких умов газ з обидвох сторін пористої перегородки у довільний момент часу перебуває в термодинамічних рівноважних станах. Оскільки  $P_2 < P_1$ , то газ після проходження крізь пористу перегородку розширюється, тобто його об'єм перевищує значення об'єму, який він займав до протискування. Розширення газу крізь пористу перегородку називається дроселюванням, а пориста перегородка, через яку

пропускається газ – дроселем. Процес дроселювання *реального* газу супроводжується зміною його температури.

Отже, ефектом *Джоуля-Томсона* називають *процес зміни температури газу при його адіабатному розширенні дроселюванням від одного сталого тиску до іншого незмінного тиску*.

Будемо вважати, що внаслідок руху лівого поршня зліва направо, деяка порція газу  $\Delta V$  (наприклад один моль) почне протискуватися через пористу перегородку (рис.10.4), щоб тиск у лівій частині залишився тим же  $P_1$ . Після просочування за деякий час через перегородку порції газу в праву частину, об'єм в ній збільшиться, оскільки розширення газу за перегородкою призведе до переміщення правого поршня зліва направо, щоб тиск  $P_2$  залишився незмінним. Проштовхування газу крізь пори перегородки потребує затрат роботи і вона дорівнює:

$$A_1 = -P_1 V_1, \quad (10.17.a)$$

де знак «-» означає, що робота виконана над системою, тобто газом. За перегородкою (справа) газ рухає поршень, тобто виконує роботу:

$$A_2 = P_2 V_2. \quad (10.17.b)$$

Тоді повна робота буде:

$$A = -P_1 V_1 + P_2 V_2. \quad (10.18)$$

Оскільки система є ізольованою, то процес є адіабатним, а за першим законом термодинаміки для адіабатного процесу ( $Q=0$ ):

$$(U_2 - U_1) + A = 0, \quad (10.19.a)$$

а з врахуванням рівняння (10.18) одержимо:

$$U_1 + P_1 V_1 = U_2 + P_2 V_2. \quad (10.19.b)$$

Зазначимо, що функція, яка фігурує в цьому рівнянні, а саме:

$$H = U + PV, \quad (10.20)$$

називається *ентальпією* або тепловою функцією (у техніці вона називається *тепловмістом*). Ентальпія – це функція стану і може бути параметром, що визначає стан газу, якщо він змінюється при сталому тиску.

Як вже згадувалося вище, процес дроселювання супроводжується зміною температури газу, тобто газ може нагріватися, або його температура може знижуватися. Вияснимо від чого і як це залежить...

У пункті 10.6 цього параграфу зазначається, що внутрішня енергія реального газу складається з кінетичної енергії теплового руху молекул і потенціальної енергії взаємодії між ними. Якщо результуюча сил притягання і відштовхування дорівнює нулю, то між молекулами встановлюється рівноважна відстань  $r_0$ , якій відповідає мінімальне значення сил взаємодії. Оскільки, *середня віддаль* на яку можуть зблизитися молекули, *залежить від температури і густини газу*, то при високій температурі молекули підходять на ближчі відстані одні до одних, тобто  $r < r_0$ , а на таких відстанях сили відштовхування домінують над силами притягання, тому під час адіабатного розширення газу у цьому випадку, через пористу перегородку, віддаль між молекулами збільшується, а потенціальна енергія зменшується. В результаті середня кінетична енергія молекул збільшується, тому газ після дроселювання нагрівається, тобто відбувається *від'ємний ефект Джоуля-Томсона*.

Якщо ж перед процесом дроселювання у газі переважають сили притягання між молекулами ( $r > r_0$ ), то після проходження газу через пористу перегородку у цьому випадку, потенціальна енергія газу зростає за рахунок зменшення кінетичної енергії молекул, і газ охолоджується, а цей *ефект Джоуля-Томсона називають додатнім*.

Як показали дослідження, в реальному газі обидва ефекти Джоуля-Томсона існують одночасно. Все залежить від співвідношення значень констант ( $a$  і  $b$ ) Ван-дер-Ваальса, оскільки вплив їх є протилежним. При більш низьких температурах домінуючими є сили притягання (можна вважати, що  $b=0$ ), і молекули газу під час процесу дроселювання будуть

виконувати роботу проти сил притягання за рахунок їхньої кінетичної енергії (вона буде зменшуватись), в результаті газ буде охолоджуватись. При більш високих температурах домінуючими є короткодійні сили відштовхування (можна вважати, що  $\alpha=0$ ), тоді саме вони виконують роботу. В результаті відбувається збільшення кінетичної енергії молекул газу і газ нагрівається.

В залежності від початкових параметрів тиску  $p$  і температури  $T$  реального газу в початковому стані ефект Джоуля-Томсона може бути як додатнім, так і від'ємним.

Температура, при якій знак ефекту Джоуля-Томсона змінюється на протилежний, називається **температурою інверсії**, а крива (рис.10.5), яка характеризує цю зміну, називається кривою інверсії. Максимум кривої інверсії на  $p$ – $T$ -діаграмі називають

**критичною точкою інверсії**. Ізобари (горизонтальні лінії на рис.10.5) які відповідають тискам  $p < p_i$  двічі перетинають криву інверсії, а ефект Джоуля-Томсона при збільшенні температури двічі змінює знак. При тисках  $p > p_i$  та довільній температурі ефект Джоуля-Томсона завжди буде від'ємним.

Адіабатне дроселювання широко застосовується у техніці при зрідженні газів, які в свою чергу призводять до одержання низьких і наднизьких температур, що дає змогу змінювати фізичні, механічні, електричні, оптичні властивості досліджуваних речовин.

Кожен газ має свій інтервал температур кипіння і тверднення: азот: 77–63 К, кисень: 90–54 К, водень: 20–14 К, гелій кипить при 4,21 К, а знижуючи його тиск до 0,293 Па його температуру знизили до 0,7 К. Для одержання ще нижчих температур використовують новий метод охолодження – метод адіабатного розмагнічування парамагнітної солі (залізоамонієвого галуна), найнижча температура, яка досягнута за допомогою цього методу дорівнює  $14 \cdot 10^{-4}$  К.

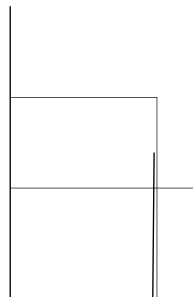


Рисунок 10.5

Другий шлях до абсолютного нуля має в своїй основі використання ядерного магнетизму. У цьому разі сили взаємодії проявлятимуться лише при  $10^{-5}$  К. За цим методом вдалося одержати спінові температури близько  $10^{-6}$  К.

### *Контрольні запитання*

1. За яких умов закони ідеального газу є справедливими для реальних газів?
2. Що слід враховувати в реальних газах порівняно з ідеальними?
3. Які дві поправки слід ввести при дослідженні реальних газів і що вони визначають?
4. Записати і пояснити рівняння Ван-дер-Ваальса.
5. Пояснити теоретичні ізотерми Ван-дер-Ваальса.
6. Що відбувається в критичній точці?
7. Чим відрізняється пара від інших газоподібних станів?
8. Пояснити експериментальні ізотерми Ван-дер-Ваальса і чому вони не співпадають з теоретичними?
9. Що таке опалесценція і чим вона характерна?
10. Які висновки випливають з аналізу ізотерм Ван-дер-Ваальса?
11. Що собою представляють зведені параметри і для чого вони існують?
12. Який вигляд має зведене рівняння Ван-дер-Ваальса?
13. В чому полягає закон відповідних станів?
14. З чого складається внутрішня енергія реального газу?
15. Чим визначається кінетична складова енергії?
16. Чим зумовлена потенціальна енергія газу?
17. Записати вираз для внутрішньої енергії реального газу? Від чого залежить її зростання?
18. Що називають дроселюванням?
19. Що називають ефектом Джоуля-Томсона?
20. Що таке ентальпія?
21. В чому полягає додатний ефект Джоуля-Томсона?
22. В чому полягає від'ємний ефект Джоуля-Томсона?

23. Як пояснюється одночасність існування додатного і від'ємного ефекту Джоуля-Томсона в реальних газах?
24. Що таке температура інверсії?
25. Що таке критична точка інверсії?
26. Де застосовують адіабатне дроселювання?

## **§11 Властивості рідин і твердих тіл. Фазові переходи**

### **11.1 Будова рідини. Ближній порядок**

З молекулярно–кінетичної точки зору три стани речовини – твердий, рідкий і газоподібний – відрізняються між собою *інтенсивностями взаємодії молекул та їхнього теплового руху*.

У рідинах, на відміну від газів, молекули сильніше взаємодіють. Це пов'язано зі структурою рідин. Структура рідин характеризується, так званим, «*ближнім порядком*». Якщо розглянути тверде тіло, що має певну кристалічну будову, то тут ми можемо сказати, що відносно якоїсь фіксованої молекули, в кристалі зберігається певний порядок розміщення молекул як на близькій, так і на віддаленій відстані. Про рідини ми цього сказати не можемо. Для рідин характерне певне упорядкування молекул на близькій віддалі від деякої фіксованої молекули (на віддалі, що рівна кільком діаметрам молекул), а чим далі від неї, спостерігається деяка розупорядкованість. Вперше цю ідею висунув учений Я.І.Френкель у 30–х роках 20–го століття.

*Структура і фізичні властивості рідини залежать від хімічної індивідуальності її частинок, а також від сил міжмолекулярного зв'язку.* Тому, з огляду на ці фактори рідини поділяють на прості та складні. *До простих рідин належать:* зріджені інертні гази, розплавлені метали, деякі багатоатомні рідини з неполярними молекулами, (наприклад  $CCl_4$ ). *Прості рідини характеризуються ненаправленим міжмолекулярним зв'язком.*

*До складних належать ті рідини, які характеризуються направленими міжмолекулярними силами:* це вода, у якій сили зчеплення реалізуються в основному водневими зв'язками між молекулами; розплавлені багатокомпонентні напівпровідникові сполуки, які зберігають напівпровідникові

властивості у рідкому стані. В рідинах закладена та інформація, яка з часом дасть змогу керувати процесами кристалізації у напрямку одержання твердих тіл з наперед заданими властивостями.

Тепловий рух молекул рідини – це локальні нерегулярні коливання навколо деяких положень рівноваги та неперервні стрибкоподібні переміщення з одного положення рівноваги в сусіднє. Це так звані трансляційні рухи, які передбачають існування в рідині вакантних місць «дірок» або «локальних розріджень». Середній час коливання молекул біля положення рівноваги становить біля  $10^{-12}$  с. Трансляційні рухи призводять до високої дифузійної здатності рідин, а також зумовлюють їх текучість.

Головними особливостями рідин є їхня здатність зберігати свій об'єм, який під дією сил тяжіння набуває форми посудини, та існування в рідині *вільної поверхні*.

Для рідин є характерною мала стисливість  $\beta$ , тому вони мають певний власний об'єм. Стисливість рідин залежить від тиску і температури. Зі збільшенням тиску стисливість зменшується а зі збільшенням температури – збільшується. Стисливість рідин досліджують за допомогою приладів, які називаються *п'єзометрами*.

Величина, яка характеризує теплові властивості рідин є коефіцієнт теплового розширення  $\alpha$ . Він залежить від роду рідини, температури і зовнішнього тиску. Вимірюють залежність коефіцієнта теплового розширення від температури приладами, які називають *дилатометрами*.

Теплове розширення рідин враховується і широко використовується в науці і техніці. Результатом теплового розширення є конвекційні рухи у рідинах, який відіграє значну роль при теплообміні в різних нагрівальних та охолоджувальних системах, зокрема це водяне опалення приміщень, система охолодження двигунів внутрішнього згорання та багато ін.

Теплоємність рідин, як правило, мало відрізняється від теплоємностей твердих тіл і значно перевищують теплоємності газів. Це пояснюється тим, що для газів взаємодія між молекулами є незначною, і теплота витрачається на збільшення кінетичної енергії, а для конденсованого стану речовини

(рідина, тверде тіло) теплота перерозподіляється між кінетичною та по-тенціальною формами енергії.

$$C_p - C_V \neq R \quad (C_p - C_V = \frac{\alpha^2}{\beta} V_M T)$$

Для рідин  
де  $\alpha$  – коефіцієнт теплового розширення;  
 $\beta$  – коефіцієнт стисливості рідини;  
 $V_M$  – об'єм молекули.

Молярна теплоємність рідин  $C_p$  залежить від структури молекул рідини. *Чим більше атомів входить до складу молекули, тим більша її теплоємність.*

Оскільки у рідинах молекули коливаються відносно положень рівноваги, тому *дифузія* у рідинах відбувається порівняно швидко, хоч і повільніше ніж у газах. Дифундуюча молекула чи атом повинні мати надлишок енергії для переходу від одних молекул до інших, щоб перебороти дію сусідніх атомів. Цей надлишок енергії є значно меншим ніж у випадку твердих тіл, доводом є хоча б те, що під час плавлення твердо-го тіла, коефіцієнт дифузії зростає у сотні разів. Для рідин є справедливим закон Фіка (рівність 7.7 §7).

Теоретичні та експериментальні дослідження довели, що *дифузія у рідинах тісно пов'язана з в'язкістю:*

$$D = \frac{kT}{6\pi\eta r}, \quad (11.1)$$

де  $\eta$  – коефіцієнт в'язкості рідини,  
 $r$  – радіус частинки (молекул, що дифундують).  
Рівність називають *рівністю Стокса-Айнштейна (Ейнштейна).*

В'язкість – це властивість рідини чинити опір переміщенню однієї її частини відносно іншої під дією зовнішніх сил. Коефіцієнт в'язкості рідин  $\eta$ , як і газів, визначається за законом Ньютона.

Механізм в'язкості рідин дещо відрізняється від механізму внутрішнього тертя газів. Оскільки положення молекули в рідині визначається дією на неї сусідніх молекул,

то і в'язкість рідин зумовлена силами міжмолекулярної взаємодії, які обмежують рухливість молекул. В той час, як в'язкість газів (внутрішнє тертя) є результатом перенесення імпульсу спрямованого руху від одного шару до іншого внаслідок обміну молекулами між шарами.

Зі збільшенням температури в'язкість рідин зменшується, а отже, як видно із формули (11.1) коефіцієнт дифузії при цьому збільшується. Це ми прослідковуємо на тому факті, що зі збільшенням температури розчинника речовина розчиняється швидше, оскільки зі збільшенням температури полегшується взаємне переміщення молекул.

*Температурну залежність в'язкості рідини виражає формула Френкеля:*

$$\eta = Ae^{\frac{U}{kT}}, \quad (11.2)$$

де  $A$  – константа,

$U$  – енергія активації в'язкої течії, яка теж зменшується при підвищенні температури та при зменшенні тиску.

Коефіцієнт теплопровідності рідин, як і газів та твердих тіл визначається законом Фур'є (рівність 7.33 §7), але сам механізм теплопровідності у рідин відрізняється від механізму передачі тепла в газах і наближається до механізму теплопровідності у твердих тілах. Пояснюється це характером теплового руху молекул у рідинах.

## **11.2 Поверхневий шар рідини. Поверхневий натяг. Поверхнево активні речовини**

*До головних особливостей рідин належить факт існування у них вільної поверхні, та пов'язане з ним явище поверхневого натягу.*

Молекули всередині рідини і на її поверхні знаходяться не в однакових умовах. Ті молекули, що знаходяться в середині рідини і оточені з усіх сторін іншими молекулами, взаємодіють одні з одними. Рівнодійна сил взаємодії молекул в

середині рідини рівна нулю. Інша картина спостерігається у поверхневому шарі цієї ж рідини. Оскільки поверхня рідини межує з іншим середовищем (власна пара, інша рідина, газ, тверде тіло), то молекули поверхневого шару взаємодіють як з молекулами рідини, так і з молекулами іншого середовища. Але взаємодія між молекулами поверхневий шар – рідина є сильнішою за взаємодію поверхневий шар – пара. Оскільки, одна і та ж молекула поверхневого шару має різних «сусідів», взаємодія з якими є також різною, то сили, що діють на кожну молекулу поверхневого шару не врівноважуються, рівнодійна їх не рівна нулю, а напрямлена всередину рідини. А це зумовлює виникнення **внутрішнього молекулярного тиску**, який завжди спрямований всередину рідини вздовж перпендикуляра до поверхні рідини. За нормальних умов внутрішній тиск для води становить  $2 \cdot 10^4 \text{ атм}$ . Внаслідок цього рідина зазнає всебічного тиску.

Разом з тим, тіло, занурене в рідину не розчавлюється під дією такого тиску, оскільки біля поверхні тіла утворюється поверхневий шар, і створений ним **внутрішній молекуляр-ний тиск** напрямлений від цього шару в середину рідини. Це свідчить про те, що занурені у рідину тіла не зазнають дії збоку **внутрішнього тиску** (не плутайте з тиском стовпа рідини на тіло на деякій глибині від поверхні цієї рідини).

Таким чином, молекули поверхневого шару мають надлишок потенціальної енергії, яку називають **поверхневою**. Цей надлишок призводить до того, що на поверхні рідини весь час **відбувається рух**: одні молекули опускаються в нижчі шари, туди куди спрямована рівнодійна, інші ж вивільняються з цієї поверхні – випаровуються. Тобто весь час виконується робота, величина якої пропорційна площі:

$$dU = -dA = \sigma dS, \quad (11.3)$$

де знак «—» означає, що робота виконується за рахунок сил поверхневого шару,

$\sigma$  – коефіцієнт пропорційності, який називається **коефі-цієнтом поверхневого натягу**,

$U$  – поверхнева енергія.

Звідки:

$$dU = \sigma dS \Rightarrow \sigma = \frac{dU}{dS}, \quad (11.4)$$

$\sigma$  – коефіцієнт поверхневого натягу, це фізична величина, яка чисельно дорівнює величині вільної енергії, що припадає на одиницю площі поверхні рідини.

Відомо, що довільна система прагне мати мінімум енергії, а для рідини це можливе, маючи мінімально можливу по-верхню. Сили, що забезпечують існування цієї поверхні, або перешкоджають її збільшенню, називаються **силами поверхневого натягу**. Напрямок цих сил збіга-ється з напрямком дотичної до поверхні рідини.

Розглянемо рамку з мильною плівкою, у якої нижня перемичка рухома (рис. 11.1).

Перемичка буде рухатись у напрямку зменшення площі рамки до тих пір, поки вага перемички не зрівноважиться силою поверхневого натягу рамки.

$$2f = F, \quad (11.5)$$

де  $2f$  – сила поверхневого натягу мильної плівки;  
 $F$  – вага перемички.

Мильна плівка – це тонкий шар рідини, який має дві поверхні, в кожній з яких діє сила поверхневого натягу  $f$ , тому сила поверхневого натягу мильної плівки  $= 2f$ . Нехай під дією цієї сили плівка скоротиться на величину  $dh$ , при цьому буде виконана робота:

$$dA = 2fdh, \quad (11.6)$$

тоді

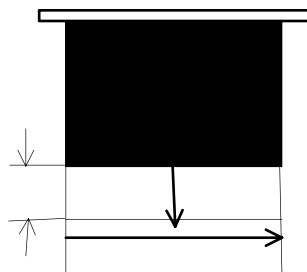


Рисунок 11.1

$$2fdh = 2\sigma ds = 2\sigma ldh, \quad (11.7)$$

де  $l$  – довжина перемички. Звідки:

$$\sigma = \frac{f}{l} \quad (11.8)$$

Отже, **коефіцієнт поверхневого натягу** чи-сьельно дорівнює силі, що діє перпендикулярно до контуру по дотичній до поверхні рідини, віднесений до одиниці довжини контуру, що обмежує її поверхню.

Коефіцієнт поверхневого натягу залежить від природи рідини, її температури, а також від природи та стану середовища, з яким межує її поверхня. **Підвищення температури рідини призводить до зменшення** коефіцієнта поверхневого натягу за лінійним законом, це пояснюється тим, що зменшується різниця між густинами рідини та її насиченої пари. **В критичній точці коефіцієнт поверхневого натягу рівний нулю**, оскільки густина рідини і пари є однаковими.

**Мінімальне значення вільної поверхневої енергії можна досягнути не лише за рахунок зменшення площі поверхні рідини, а й за рахунок зменшення коефіцієнта поверхневого натягу.** Якщо в рідину долити іншу рідину, коефіцієнт поверхневого натягу якої менший, то вона буде поглинатися у поверхневих шарах, що призведе до зменшення поверхневого натягу основної рідини. Такі речовини називають поверхнево активними (ПАР). Вони **адсорбуються** у поверхневому шарі розчину, де їх концентрація може бути у сотні разів більшою за об'ємну. До таких речовин належать органічні речовини, які складаються з полярних молекул, до яких приєднуються неполярні молекули основної рідини.

На поверхнях твердих тіл також утворюються адсорбційні плівки, які відіграють величезну роль у явищах, пов'язаних з поверхнею.

заних з тертям, міцністю матеріалів та ін. Змащувальна здатність мастил пов'язана з наявністю орієнтованих адсорбційних шарів мастила, як поверхнево активної речовини, що утворюється на поверхні твердого тіла. Дослідженнями встановлено, що товщина граничних шарів становить десятки мономолекулярних шарів. Вони мають аномально високу в'язкість і не видавлюються з зазорів поверхонь, що труться. Тому, принцип дії процесу змащування між твердими тілами полягає у ковзанні між кінцями неполярних гнучких ланцюгів молекулярних шарів, які орієнтовані на тертьових поверхнях. При цьому зменшуються макро- і мікрошорсткості на стичних поверхнях твердих тіл. Взаємне тертя між орієнтованими шарами поверхнево активних речовин (ПАР) менше, ніж при безпосередньому контакті не змащених поверхонь.

**Адсорбція ПАР на поверхні твердих тіл веде до адсорбційного зниження міцності твердих тіл (це ефект Ребіндера).** Явище це широко використовується для інтенсифікації важливих технологічних процесів, пов'язаних з руйнуванням твердих тіл, а саме: буріння гірських порід, тонке подрібнення твердих тіл у звичайних умовах та при вібрації, подрібнення під дією ультразвуку та ін.

Дія ПАР призводить до якісних змін механічних властивостей матеріалу, наприклад адсорбційне зниження *границі міцності* може зробити її значно *меншою* за *границю текучості*. А це веде, в свою чергу, до крихкого розриву тих тіл, які є пластичними при звичайних умовах (ламаються сталеві осі, коли плавиться бабіт у підшипниках). Отже, рідкі метали та їхні сплави можуть бути ПАР. Водні розчини ПАР можуть також знижувати міцність аморфних тіл.

**Механізм ефекту Ребіндера** полягає у тому, що акт адсорбції ПАР на поверхні твердих тіл зумовлює зменшення поверхневої енергії тіла при одночасному розриві зв'язків між елементами його структури. Адсорбція ПАР призводить до проникнення їхніх молекул у мікро тріщини твердого тіла, до появи додаткового «розклинюючого» тиску, розвитку нових мікро тріщин і навіть до руйнування тіла під дією незначних навантажень.

Адсорбція відбувається також на межі «тверде тіло-газ». Тіло, на поверхні або в об'ємі пор якого відбувається явище адсорбції, називають **адсорбентом**, а речовину, що адсорбується з газової фази – **адсорбтив**.

Фізична адсорбція спричиняється дією молекулярних сил: неспецифічних (дисперсійні сили) і специфічних (орієнтаційні, індукційні сили та водневі зв'язки). Для явища адсорбції є характерним зменшення вільної поверхневої енергії системи. Адсорбція, з термодинамічної точки зору, це – самовільний оборотний процес. Перехід молекул речовини з газової або рідкої фази в адсорбований стан призводить до втрати цими молекулами, щонайменше, одного ступеня вільності, а це, в свою чергу, призводить до зменшення ентропії системи.

Є речовини, які збільшують поверхневий натяг рідин: – для води – сіль, цукор.

Сили поверхневого натягу, які стягують поверхню рідини, є одним із чинників, що визначають її форму. **Дійсна форма, якої набуває рідина визначається співвідношенням трьох сил: сили поверхневого натягу, сили тяжіння та сили взаємодії молекул рідини зі стінками посудини.** Сила тяжіння діє на весь об'єм рідини. Під впливом цієї сили рідина намагається розлитися і набути форми молекулярної плівки, яка відповідає мінімальній потенціальній енергії у полі тяжіння. Якщо вилучити усі зовнішні сили (або якщо їх рівнодійна рівна нулю), то будь яка маса рідини набуває сферичної форми, при якій поверхня, а отже, і поверхнева енергія є мінімальною.

### **11.3 Умови рівноваги на межі рідини**

Поверхнева енергія рідини залежить не лише від її властивостей, а й від середовища, з яким вона межує. Вище ми розглядали випадок, коли рідина межує зі своєю власною парою чи іншим газом. Якщо тиск газу (пари) малий, то поверхнева енергія не залежить від присутності цієї пари чи газу. Іншою є картина, коли рідина межує з таким середовищем, густина якого є співрозмірною з густиною самої

рідини. Таким середовищем може бути інша рідина, тверде тіло або газ під великим тиском. У цьому випадку нехтувати силами взаємодії між молекулами рідини та іншого середовища не можна.

З'ясуємо умови, за яких на межі дотику дві рідини, що не змішуються між собою, перебувають у рівновазі. Нехай крапля легкої рідини  $a$  розміщується на поверхні важчої рідини  $b$ . Крапля легшої рідини  $a$  набуває форми лінзи (рис. 11.2). Межею дотику трьох середовищ (рідина –  $a$ , рідина –  $b$ , газ –  $z$ ) є коло, яке обмежує краплю. Виділимо елемент довжини  $dl$  вздовж лінії дотику трьох середовищ.

Сили поверхневого натягу, які діють на цей елемент довжини будуть рівними:

$$f_{ab} = \sigma_{ab} dl \quad - \text{ на межі двох рідин;}$$

$$f_{az} = \sigma_{az} dl \quad - \text{ на межі легшої рідини і газу;}$$

$$f_{bz} = \sigma_{bz} dl \quad - \text{ на межі важчої рідини і газу.}$$

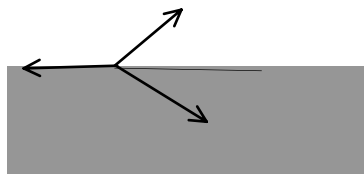


Рисунок 11.2

Якщо сили  $f_{ab}$  і  $f_{az}$  стягують краплю, намагаються зменшити її поверхню, тобто наблизити її до сферичної форми, то сила  $f_{bz}$  її розтягує і тим самим зменшує поверхню рідини  $b$ . Отже, умовою рівноваги рідини  $a$  буде рівність нулю проєкцій цих сил на координатні осі. За цієї умови:

$$\begin{aligned} \sigma_{bz} &= \sigma_{ab} \cos \theta_b + \sigma_{az} \cos \theta_a \\ \sigma_{ab} \sin \theta_b &= \sigma_{az} \sin \theta_a \end{aligned} \quad , \quad (11.9)$$

де кути  $\theta_a, \theta_b$  між дотичними до поверхонь краплі  $a$  і поверхнею рідини  $b$  називаються **крайовими**.

Співвідношення між коефіцієнтами  $\sigma_{ab}$ ,  $\sigma_{az}$  і  $\sigma_{bz}$  може бути таким, що  $\cos\theta=1$ , отже  $\theta=0$ . Це означає, що крапля рідини  $a$  розтікається по поверхні рідини  $b$  у вигляді тонкого молекулярного шару. У такому разі рідина  $a$  повністю змочує рідину  $b$  або навпаки.

Умова повного змочування рідини  $b$  краплею рідини  $a$  запишеться у вигляді:

$$\begin{aligned} f_{bz} &> f_{ab} + f_{az} \\ \sigma_{bz} &> \sigma_{ab} + \sigma_{az} \end{aligned}$$

(11.10)

А умова плавання краплі рідини  $a$  на поверхні рідини  $b$  може реалізуватися лише при умові:

$$\begin{aligned} f_{bz} &\leq f_{ab} + f_{az} \\ \sigma_{bz} &\leq \sigma_{ab} + \sigma_{az} \end{aligned}$$

(11.11)

Поверхневий натяг властивий не тільки рідинам, а й твердим тілам. Як і у випадку рідин, сили поверхневого натягу твердого тіла зумовлені взаємним притяганням між його молекулами. Форма якої може набути рідина, що перебуває на поверхні твердого тіла, визначається співвідношенням сил взаємодії між молекулами рідини, з одного боку, і сил взаємодії молекул рідини і твердого тіла – з другого боку.

Крапля набуває форми під впливом взаємодії трьох середовищ: твердого тіла  $t$ , рідини  $p$  і повітря або газу  $z$  (див. рис. 11.3).

На одиницю довжини контура  $dl$ ,

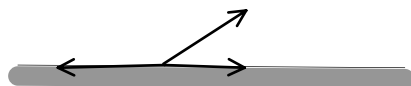


Рисунок 11.3

який обмежує краплю рідини на поверхні твердого тіла, будуть діяти три сили  $f_{mp}, f_{ep}, f_{et}$ , чисельні значення яких відпо-відно пропорційні коефіцієнтам поверхневого натягу:  $\sigma_{mp}$  – на межі твердого тіла і рідини,  $\sigma_{pe}$  – на межі рідини і газу,  $\sigma_{et}$  – на межі газу і твердого тіла. З рис. 11.3 видно, що рідина буде перебувати в рівновазі, якщо буде виконуватися умова:

$$f_{et} = f_{mp} + f_{ep} \cos \theta, \quad (11.12.a)$$

або

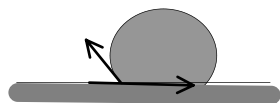
$$\sigma_{et} = \sigma_{mp} + \sigma_{ep} \cos \theta, \quad (11.12.б)$$

Крайовий кут  $\theta$  – це кут між дотичними до поверхонь твердого тіла і рідини у точці дотику їх меж. З рівняння (11.12.б) бачимо, що

$$\cos \theta = \frac{\sigma_{et} - \sigma_{mp}}{\sigma_{ep}}. \quad (11.13)$$

Якщо кут  $\theta$  знаходиться в межах  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ , то спостерігається явище **змочуваності**, а при  $\theta=0$  відбувається повне змочування, при цьому крапля рідини не буде перебувати в рівно-вазі, а необмежено буде розтікатися тонким шаром по поверхні твердого тіла. Явище повного змочування спостерігається для гасу на металі або для води на чистому склі.

Якщо ж  $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$  (див. рис. 11.4) сила  $f_{mp}$  більша за суму двох інших, а це призводить до того, ~~рідиною переважає~~ **рідиною переважає** во якій твердим тілом, стягується в точку, а сама рідина намагається відділитися від



поверхні твердого тіла і набути сферичної форми, хоча цьому їй заважає сила тяжіння. В цьому випадку спостерегається

*Рисунок 11.4*

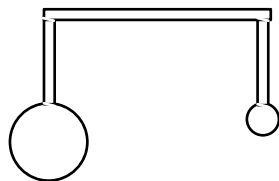
ється явище **незмочуваності**. Це

явище має цікаві особливості: змащена жиром голка може утримуватися на поверхні води, а ситом, нитки якого покриті парафіном, можна «носити воду».

На різному змочуванні речовин ґрунтується явище фло-тації (англ. *float* – спливання), яке має виняткове значення для очистки промивальних рідин, що їх застосовують під час процесу буріння на нафту і газ для виносу пустої породи на поверхню.

## 11.4 Тиск під криволінійною поверхнею рідини. Формула Лапласа

Розглянемо видуті мильні бульбашки, діаметр яких є різним, на кінцях скляної трубки з краником (рис.11.5). Як бачимо, кривизна поверхні бульбашки *A* є меншою, ніж бульбашки *B*. Якщо відкрити краник, то будемо спостерігати таке: бульбашка *A* буде збільшуватись, а бульбашка *B* зменшуватись з часом взагалі зникне. Цей дослід говорить про те, що



*Рисунок 11.5*

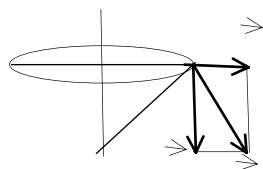
**тиск плівки на повітря, яке знаходиться всередині бульбашки, залежить від кривизни поверхні її плівки.** Якщо кривизна поверхні більша, то й тиск більший.

Додатковий тиск, який виникає в результаті дії сил поверхневого натягу, що викривляють поверхню рідини, можна вирахувати, виходячи з таких міркувань. Уявно перетнемо кулю площиною, виділяючи кулястий сегмент, який відмежований від решти поверхні плівки колом (рис.11.6), радіус

якого  $r_o = r \sin \varphi$ . Нехай на кожний елемент довжини цього кола в напрямку дотичної до поверхні сегмента діє сила поверхневого натягу

$$\Delta f = \sigma \Delta l \quad (11.14)$$

Якщо розкласти цю силу на дві складові, то одержимо:



$$\begin{aligned} \Delta f_1 &= \Delta f \sin \varphi \\ \Delta f_2 &= \Delta f \cos \varphi \end{aligned} \quad (11.15)$$

Геометрична сума складових  $\Delta f_2$  для всього периметра кола, яке відмежовує даний сегмент дорівнює нулю. Сума ж складових  $\Delta f_1$  визначає силу  $f$ , яка перпендикулярна до площини перетину.

$$f = \sum \Delta f_1 = \sum \Delta f \sin \varphi = \frac{\sigma \cdot r_o}{r} \sum \Delta l \quad (11.16)$$

Оскільки

$$\sum \Delta l = 2\pi r_o,$$

то

$$f = \sigma \frac{2\pi r_o^2}{r} \quad (11.17)$$

Під дією цієї сили виділений сегмент буде притискуватися до решти частини мильної кулі. Оскільки, площа основи сегмента рівна  $S = \pi r_o^2$ , то для додаткового тиску, зумовленого кривизною поверхні:

$$P = \frac{f}{S} = \frac{2\sigma}{r} \quad (11.18)$$

Лаплас показав, що рівність (11.18) є справедливою для поверхні довільної форми. Якщо поверхня рідини відрізняється від сферичної, то її характеризують середньою кривизною  $H$ , яка може мати різне значення для різних точок поверхні. Середня кривизна поверхні в точці дорівнює півсумі обернених радіусів кривизни у двох взаємно перпендикулярних площинах, які проходять через нормаль до поверхні, тобто:

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right), \quad (11.19)$$

а з врахуванням цієї формули, у загальному випадку рівність (11.18) можна записати:

$$P = \sigma \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right), \quad (11.20)$$

це – формула Лапласа.

Якщо поверхня рідини циліндрична, то один з головних радіусів кривизни  $=\infty$ , а другий збігається з радіусом циліндра. Тоді для цього випадку додатковий тиск, створений кривизною поверхні:

$$P = \frac{\sigma}{r}. \quad (11.21)$$

Для плоскої поверхні  $r_1 = r_2 = \infty$ , тому додатковий тиск  $=0$ . *Отже, додатковий тиск, який виникає в результаті дії сил поверхневого натягу, що викривляють поверхню рідини, визначається за формулою Лапласа.*

Цей тиск спрямований до центра кривизни поверхні. Якщо поверхня рівна, то додатковий тиск рівний нулю. Якщо поверхня випукла, то центр випуклості знаходиться всередині рідини, тоді додатковий тиск буде додаватися до тиску під

яким перебуває поверхня рідини. Для вгнутої поверхні її центр кривизни знаходиться поза рідиною, тоді додатковий тиск бу-де відніматися, отже, у цьому випадку тиск всередині рідини буде меншим за тиск, якому відповідає плоска поверхня.

## 11.5 Капілярні явища

Сили взаємодії молекул рідини і твердого тіла помітно впливають на форму поверхні рідини біля стінок посудини, в якій вона міститься. Якщо величина поверхні невелика (рідина налита у вузьку посудину), то вплив стінок посудини поширю-ється на всю поверхню рідини. Вона стає викривленою і набу-ває форми вгнутого або випуклого меніска в залежності від того, чи рідина змочує чи не змочує стінки посудини. **Явища, які пов'язані зі змочуванням або незмочуванням по-верхні вузьких трубок чи мікропор рідиною, нази-ваються капілярними.**

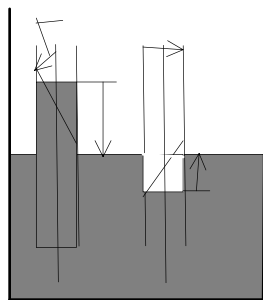
Чому при змочуванні рідина піднімається по трубочці а при незмочуванні – опускається? Це пояснюється різним тиском, спричиненим кривизною поверхні рідини, який обрахо-вується за рівнянням Лапласа. Оскільки, як згадувалось вище, тиск, спричинений кривизною поверхні завжди спрямований до центра цієї кривизни, то у випадку змочуваності це веде до підймання рідини на деяку висоту, а при незмочуваності – до опускання рідини в трубочці.

Процес підймання (опускання) рідини відбувається до тих пір, поки додатковий тиск, зумовлений кривизною поверх-ні рідини, зрівноважиться гідростатичним тиском, а саме:

$$\rho gh = \frac{2\sigma}{r_o}, \quad (11.22)$$

де –

$$r_o = \frac{r}{\cos \theta}, \quad (11.23)$$



$r$  – радіус трубочки (див. рис. 11.7).  
Для висоти  $h$  одержимо формулу:

Рисунок 11.7

$$h = \frac{2\sigma \cos \theta}{\rho g r}, \quad (11.24)$$

з якої випливає, що висота підняття (опускання) рідини в трубочці прямо пропорційна коефіцієнтові поверхневого натягу і обернено пропорційна до густини рідини та радіусу капіляра.

## 11.6 Будова твердих тіл

Тверді тіла, це речовини, які за нормальних умов зберігають свою форму, об'єм і структуру. Усі тверді тіла поділяють за структурою *на кристалічні та аморфні*. Кристалічні в свою чергу поділяються *на монокристалічні та полікристалічні*. Для кристалічних твердих тіл є характерним наявність як «ближнього порядку» так і «дальнього порядку». *Дальній порядок* – це упорядкованість у просторовому розміщенні атомів, яка повторюється на необмежено великих віддалях.

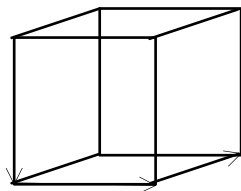
Численні експериментальні дослідження показали, що внутрішня будова твердих тіл суттєво відрізняється від будови ідеальних кристалів. Будова кристалічної ґратки в них порушується дефектами. Дефекти бувають **макроскопічні**: тріщини, порожнини, чужорідні макроскопічні вкраплення в кристалічну ґратку та ін. **Мікроскопічні**: точкові дефекти, дислокації (порушення правильності чергування атомних площин).

У твердих тілах розрізняють такі *типи зв'язку*: іонний, металевий, ковалентний, ван-дер-ваальсівський та водневий.

Кристали – це тверді тіла, атоми, іони або молекули яких розміщені в певній закономірності і утворюють *просторові кристалічні ґратки*. Така періодичність і є тим, що визначає поняття *дальній порядок*. Часто кристали мають

природні форми багатогранників. Поверхня кристалу обмежена площинами – *гранями*, лінії перетину яких є *ребрами* а точки перетину ребер – *вершинами*. Певна геометрична закономірність у зовнішній будові кристалів зумовлена внутрішньою будовою. А внутрішня будова кристалів задається впорядкованим просторовим розміщенням структурних частинок, закономірності якого визначаються характером міжчастинкової взаємодії.

Складовою частиною просторової ґратки є елементарна комірка – паралелепіпед (рис. 11.8), побудований на векторах  $a, b, c$ , взаємне розміщення яких задається кутами  $\alpha, \beta, \gamma$ . Ці вектори називаються основними або базисними, а їхні довжини – періодами ґратки.



Елементарна комірка, в якій атоми знаходяться лише у вершинах, називається примітивною. Ця комірка вміщує лише один атом, оскільки кожна вершина паралелепіпеда (вузол) одночасно належить вісьмом елементарним коміркам.

Рисунок 11.8

Складній кристалічній ґратці відповідає елементарна комірка, в якій атоми містяться не лише у вершинах, але й на гранях і всередині об'єму. Прикладом складних кристалічних ґраток є: кубічна об'ємноцентрована – ОЦК – де крім атомів у вершинах, ще один атом знаходиться в її центрі; і кубічна гранецентрована – ГЦК – де атоми містяться у вершинах та в центрі кожної грані. Докладніше про симетрію кристалів та кристалографічні системи, ґратки Браве йдеться у спецкурсі з кристалографії.

Усі тверді тіла єднає лише те, що вони складаються з величезної кількості атомів, молекул або іонів, взаємодія яких між собою та із зовнішніми полями зумовлюють їхні різноманітні властивості.

При відсутності зовнішніх впливів тверді тіла перебувають у рівноважному стані, в якому встановлюються певні відстані між частинками та їхнє взаємне розташування. У такому стані сили притягання частинок урівноважуються силами відштовхування. Рівноважний стан тіла може порушитися під впливом механічного навантаження,

магнітних і електричних полів, під час нагрівання та ін. Дія цих чинників призводить до зміни структурних параметрів твердих тіл та їхніх фізичних властивостей.

Незаперечним є той експериментальний факт, що *під час нагрівання тверді тіла розширюються*. Це пояснюється тим, що з підвищенням температури зростає енергія теплового руху атомів, а отже, збільшується і амплітуда коливань навколо незмінних положень рівноваги. Та саме збільшення амплітуди не може привести до теплового розширення, слід взяти до уваги сили, які діють між атомами твердого тіла і спричиняють їх коливання навколо положень рівноваги. Атоми кристалічної ґратки здійснюють не гармонічні, а ангармо-нічні коливання. Згадаємо, що на великих відстанях між час-тинками переважають сили притягання, а на малих – відштовхування. Внаслідок нагрівання тіла амплітуда коливань атомів збільшується і при цьому ангармонічність забезпечує зближення атомів, яке призводить до виникнення сил відштовхування між ними. Одночасно діють і сили притягання, але за величиною вони значно менші від сил відштовхування, тому ефект відштовхування переважає. В кінцевому результаті це призводить до збільшення середньої віддалі між атомами, тоб-то до зміни об'єму твердого тіла під час нагрівання.

Кількісно теплове розширення твердих тіл характеризується коефіцієнтами лінійного і об'ємного розширення:

$$\begin{aligned} l_t &= l_o (1 + \alpha \Delta t) \\ V_t &= V_o (1 + \beta \Delta t), \end{aligned} \quad (11.25)$$

де  $l_o$  – початкова довжина тіла;  
 $V_o$  – початковий об'єм тіла.

З цих рівностей маємо:

$$\alpha = \frac{\Delta l}{l_o \cdot \Delta t}, \quad \beta = \frac{\Delta V}{V_o \Delta t}. \quad (11.26)$$

Отже, коефіцієнт лінійного розширення  $\alpha$  чисельно дорівнює відносній зміні довжини тіла при зміні температури на  $1^\circ\text{C}$ . Коефіцієнт об'ємного розширення  $\beta$  чисельно дорівнює відносній зміні об'єму тіла при зміні його температури на  $1^\circ\text{C}$ . Коефіцієнти  $\alpha$  і  $\beta$  вважаються характеристиками речовини.

Серед речовин, які нас оточують, є багато таких, для яких у твердому стані є характерним лише ближній порядок, тобто періодичність у розміщенні частинок, з яких вони складаються, у них відсутня, – це так звані *аморфні тіла*. Відсутність «дальнього порядку» веде до того, що частинки в середньому розташовані у будь-якому напрямку з однаковою густиною, а це зумовлює ізотропію (однаковість) їх фізичних властивостей в усіх напрямках.

Аморфні тіла можна розглядати як переохолоджені рідини, в'язкість яких настільки збільшилась, що речовина *перестає бути рідиною* у звичайному розумінні цього слова.

Деколи одні і ті ж речовини можуть знаходитись як в кристалічному так і в аморфному стані (кварц, вуглець та ін.). За однакових умов (тиску і температури) аморфні тіла мають більший питомий об'єм, більшу внутрішню енергію, і більшу ентропію ніж кристали. Відсутність дальнього порядку у внутрішній будові аморфних речовин призводить до того, що розрив міжатомних зв'язків у них відбувається не при якійсь фіксованій температурі, як це спостерігається у кристалах. Саме тому для аморфних тіл відсутня чітка температура плавлення, вони під час нагрівання поступово переходять у рідкий стан.

В аморфному стані за певних умов перебувають низько-молекулярні сполуки (скло, сірка, селен та ін.) і високомолекулярні сполуки або полімери (смоли, каучук, пластмаси та ін.). Швидким охолодженням розплавів  $\sim 10^6 \text{ K/s}$  та вакуумним напиленням на підкладку отримують аморфні метали і напів-провідники, які за низкою електричних, механічних магнітних характеристик перевершують традиційні матеріали.

## 11.7 Фазові переходи

Стан кожної речовини визначається термодинамічними параметрами. Наприклад, вода при одних значеннях термодинамічних параметрів (тиску, температурі) може бути лише у рідкому стані, а при інших у твердому чи газоподібному. Тобто, в залежності від тиску і температури вода перебуває у різних фазах.

Отже, в залежності від термодинамічних параметрів, що характеризують любую термодинамічну систему ( $P, V, T$ ) речовина може знаходитись в різних фазах. Під **фазою** розуміють сукупність частин термодинамічної системи, які мають однакові фізичні та хімічні властивості що не залежать від кількості речовини.

Якщо система однофазна, то вона фізично однорідна, або **гомогенна**. Прикладом однофазної системи є окремо взяті лід, вода, водяна пара, крапля ртуті, кусок заліза, та ін. Багатофазна система – фізично неоднорідна, або **гетерогенна**. Фази гетерогенної системи при рівноважних умовах здатні до співіснування і відокремлені одна від одної макроскопічними поверхнями розділу. Прикладом багатофазної системи є взяті разом: вода, лід, водяна пара; вода і ртуть; лід і сіль та ін. – названі речовини між собою не змішуються і між ними існує межа поділу. Якщо до води долити спирт, то одержимо гомогенну – однофазну систему, оскільки спирт розчиняється у воді і різкої границі поділу між ними не існує. А якщо до води долити олію, отримаємо двофазну – гетерогенну систему, оскільки між водою та олією існує межа поділу. Суміш газів завжди дасть гомогенну – однофазну систему, оскільки гази завжди змішуються між собою. Таким чином в системі може існувати тільки одна газоподібна фаза (бо гази змішуються) і безліч рідких чи твердих фаз.

Але не слід вважати, що дві різні фази однієї і тієї ж речовини обов'язково характеризуються різними агрегатними станами. Так, наприклад, вуглець у твердому стані може представляти собою алмаз і графіт – агрегатний стан один а фази дві; в двох фазах існує фосфор – білий і червоний; олово – блискуче і сіре; тверде залізо має чотири модифікації –  $\alpha$ -,  $\beta$ -,  $\gamma$ - та  $\delta$ -залізо; в двох фазах існує рідкий *He*: *He I* – звичайний

зріджений і *He II* – надплинний стан; в двох фазах існує газ кисень –  $O_2$  та озон  $O_3$ .

Перехід речовини з однієї фази в іншу, називають **фазовим переходом**. Прикладом фазових переходів (перетворень) може бути зміна агрегатного стану речовини. Але не слід плутати поняття «фаза» і «агрегатний стан». Під **агрегатним станом речовини** розуміють твердий, рідкий і газоподібний стан речовини. А **фаза** – це гомогенна частина гетерогенної системи.

**Розрізняють фазові переходи (перетворення) першого і другого роду.**

Під час фазових переходів **першого роду** густина і термодинамічні функції (внутрішня енергія, ентальпія, ентропія, вільна енергія) змінюються стрибкоподібно у точці переходу. Такі переходи супроводжуються поглинанням або виділенням системою теплоти, яку називають прихованою теплою фазового переходу. Температура і тиск під час такого переходу залишаються сталими. До фазових переходів першого роду належать: плавлення, випаровування, конденсація, кристалізація, алотропія, сублімація, і т.д. Для цього фазового переходу є характерними переохолодження та перегрів.

**Плавлення** – це рівноважний фазовий перехід твердого кристалічного тіла в рідкий стан, який супроводжується поглинанням теплоти, а подальше нагрівання спричинює процес випаровування, обумовлений відривом молекул з найбільшою енергією з поверхні тіла.

Крім рідин можуть випаровуватися і тверді тіла без проміжного переходу через рідкий стан. Рівноважний фазовий перехід з твердої фази в газоподібну, минаючи рідкий стан, називають **сублімацією або возгонкою**. Прикладом є зникнення снігу без танення під час наявності холодного вітру, висихання замерзлої білизни на морозі, наявність різкого запаху у твердих органічних сполук (нафталін, камфора, нашатир та ін.). Сублімація існує в усьому інтервалі тисків і температур, при яких існує як тверда так і газоподібна фази.

Безпосередній перехід речовини з газоподібного стану в твердий називають **аблімацією**.

**Пароутворення** – фазовий перехід речовини з рідкого стану в стан пари. Швидкість цього процесу пропорційна вільній поверхні рідини та її температурі. Внутрішня енергія рідини під час процесу випаровування зменшується. Пару, яка перебуває у динамічній рівновазі зі своєю рідиною, називають насиченою.

**Аллотропія** – явище переходу речовин з однієї модифікації в іншу пов'язане з перебудовою кристалічної ґратки і перебудовою атомів. Так наприклад, звичайне «біле» олово – срібно-білий ковкий метал з густиною  $7,3 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$  – кристалізується в так званій тетрагональній системі, але при температурі нижчій за  $18^\circ\text{C}$  біле олово перетворюється в сіре, яке має кубічну ґратку і густину  $5,85 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ . Така поява сірих плям на олов'яних предметах при довготривалому зберіганні на морозі носить назву «олов'яна чума». А при температурі  $161^\circ\text{C}$  олово переходить у третю ромбічну модифікацію і стає дуже крихким. Прикладом алотропії є також витримування звичайного графіту на протязі декількох годин під тиском  $10^{10} \text{ Па}$  і температурі  $2300 \text{ K}$ , у результаті чого утворюється штучний алмаз. Штучні алмази мають цінне промислове застосування, зокрема в головках доліт для буріння свердловин.

Під час фазового переходу **другого роду** густина і всі термодинамічні функції змінюються неперервно, а фізичні властивості (параметри) – стрибкоподібно (теплоємність, температурний коефіцієнт об'ємного розширення, ізотермічний коефіцієнт стисливості та ін.) Під час такого переходу система не вбирає і не виділяє теплоту. Фазові переходи другого роду можуть відбуватися лише у твердих тілах. Винятком є перехід рідкого гелію у надтекучий стан. До фазових переходів другого роду належать: перехід феромагнетиків у парамагнетики (при точці Кюрі), стрибкоподібний спад опору при низьких температурах (надпровідність) та ін.

## **11.8 Фазові діаграми. Потрійна точка**

Під час переходу речовини з однієї фази в іншу між ними встановлюється динамічна рівновага. При такій динамічній рівновазі співіснуючі фази системи мають однакові тиск і температуру. Зміна температури рівноважного стану фаз, при фазових переходах першого роду, пов'язана зі зміною тиску термодинамічним рівнянням Клапейрона-Клаузіуса, на основі якого будують графічну залежність у координатах тиск-температура. Цю залежність називають фазовою діаграмою стану. Знаючи тиск і температуру, за діаграмою стану можна визначити фазу, в якій перебуває речовина.

Для визначення термодинамічних параметрів, що характеризують ту чи іншу фазу також користуються фазовими діаграмами. Розглянемо найпростішу з них (рис.11.9), для якої кожний агрегатний стан має лише одну фазу. Крива **АК** виражає залежність тиску насиченої пари від температури кипіння рідини, і на-

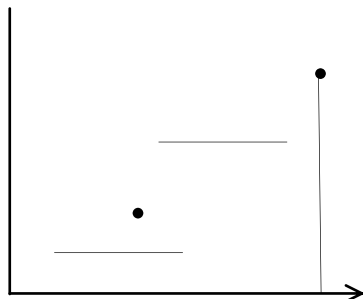


Рисунок 11.9

зивається кривою пароутворення. Розмежовує рідку і газоподібну фази. Точки вздовж кривої **АК** відповідають станам, у яких рідина і насичена пара перебувають у динамічній рівновазі. Крива пароутворення починається в точці **А**, а закінчується у критичній точці К, в якій зникає відмінність між рідиною і її насиченою парою.

Крива **ОА** (сублімації – процес переходу в газоподібний стан твердих тіл) – є лінією рівноваги твердої і газоподібної фази, графічно виражає температурну залежність тиску насиченої пари над поверхнею твердого тіла. Процес сублімації можливий в усьому інтервалі температур і тисків існування твердої і газоподібної фази. Тому крив починається в точці **О**, а закінчується в **А**.

Крива **АВ** – розмежовує тверду і рідку фази речовини. Точки вздовж кривої відповідають рівновазі рідкої і твердої фази, тобто процеси плавлення і кристалізації є рівноважними

(при параметрах, що відповідають цій кривій не відбувається ні плавлення ні кристалізація).

Всі три криві (сублімації, пароутворення і плавлення) перетинаються в одній точці **A**. Ця точка відповідає рівновазі між трьома фазами речовини – твердої, рідкої і газоподібної **Точка – яка відповідає рівновазі між трьома фазами речовини, називається потрійною.**

Прості фазові діаграми бувають у речовин, які не зазнають ніяких перетворень у рідкому чи твердому стані. Якщо в речовині відбуваються поліморфні перетворення, то її фазова діаграма значно ускладнюється. Є сплави речовин фазові діаграми яких мають декілька потрійних точок. З такими складними фазовими діаграмами ознайомитесь на спецкурсі з матеріалознавства.

### **Контрольні запитання**

1. Чим між собою відрізняються три стани речовини з молекулярно–кінетичної точки зору?
2. Які рідини належать до простих і чим вони характеризуються?
3. Які рідини належать до складних і чим вони характеризуються?
4. Що вимірюють п'єзометрами?
5. Що вимірюють дилатометрами?
6. Як дифузія рідин пов'язана з в'язкістю (р-ня Стокса-Анштайна)?
7. Чим зумовлена в'язкість рідин?
8. Як залежить в'язкість рідин від температури (р-ня Френкеля)?
9. Чим є зумовлений внутрішній молекулярний тиск в середині рідини?
10. Який фізичний зміст коефіцієнта поверхневого натягу?
11. Які сили називають силами поверхневого натягу?
12. Чому рівний коефіцієнт поверхневого натягу?
13. Від чого і як залежить коефіцієнт поверхневого натягу?

14. В якому випадку коефіцієнт поверхневого натягу рівний нулю?
15. Що таке ПАР?
16. У чому полягає ефект Ребіндера який його механізм?
17. Яка різниця між адсорбентом і адсорбтивом?
18. Що визначає форму поверхні рідини?
19. Які умови рівноваги двох рідин, які контактують, але не змішуються?
20. Який кут називають крайовим?
21. Чим визначається форма краплі, що знаходиться на поверхні твердого тіла?
22. У чому полягає явище змочуваності та незмочуваності рідинами твердих тіл?
23. Що таке флотація?
24. Від чого залежить тиск плівки на повітря, яке знаходиться всередині бульбашки?
25. Вивести рівняння Лапласа для додаткового тиску, що його створює дія сил поверхневого натягу.
26. Які явища називають капілярними?
27. Вивести рівняння для визначення висоти підняття (опускання) рідини в капілярі.
28. Як поділяють тверді тіла за структурою?
29. Як поділяють кристалічні тіла?
30. Що представляє собою дальній порядок?
31. Що представляють собою макротріщини і мікротріщини?
32. Що таке кристали?
33. Від чого може змінюватися рівноважний стан твердого тіла?
34. Який зміст коефіцієнта лінійного розширення ?
35. Який зміст коефіцієнта об'ємного розширення ?
36. Що собою представляють аморфні тіла і як вони можуть утворюватися?
37. Що розуміють під поняттям «фаза»?
38. Які фази вважають гомогенними?
39. Які фази вважають гетерогенними?
40. Яка різниця між фазою та агрегатним станом?
41. Що є фазовим переходом першого роду?
42. Що є фазовим переходом другого роду?

- 43. Що називають плавленням?
- 44. Що називають сублімацією або возгонкою?
- 45. Що називають аблімацією?
- 46. Що є пароутворенням?
- 47. Що таке алотропія?
- 48. Що називають фазовою діаграмою і що вона виражає?
- 49. Що представляє собою критична точка на фазовій діаграмі?
- 50. Яку точку називають потрійною?

## ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Н.В.Александров, А.Я.Яшкин.* Курс общей физики. Механіка. – М.: Просвещение, 1978. – 416с.
2. *Ф.Ф.Детлаф, Б.М.Яворский.* Курс физики. – М.:Высш.шк., 1989. – 609с.
3. *Г.А.Зисман, О.М.Тодес.* Курс общей физики, т. I, – М.:Наука, 1972. – 340с.
4. *М.М.Клим, П.М.Якібчук.* Молекулярна фізика. – Львів: Львівський національний університет імені Івана Франка, 2003, 543с.
5. *І.М.Кучерук, І.Т.Горбачук, П.П.Луцик.* Механіка Молекулярна фізика і термодинаміка т.І – Київ: Техніка, 1999, с.532.
6. *І.Є.Лопатинський* Курс фізики. – Львів: Афіша, 2003. с.375.
7. *С.Э.Фриш, А.В.Тиморева.* Курс общей физики, т.І, – М.:Физматгиз, 1962. – 432с.
8. *Б.М.Яворський, Ф.Ф.Детлаф,* Курс фізики т.І, – К.:Вища школа 1970. – 356с.
9. *Б.М.Яворский, А.А.Пинский,* Основы физики т.І. – М.: Наука, 1981 – 360с.