

Г. Д. Матеїк

ФІЗИКА
КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
Частина I

Івано-Франківськ

2014

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**Івано-Франківський національний технічний
університет нафти і газу**

Г. Д. Матеїк

ФІЗИКА
КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
Частина I

Івано-Франківськ

2014

УДК 53
ББК 22.3
М-34

Рецензент: канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри загальної та прикладної фізики ІФНТУНГ
Солоничний Я. В.

*Рекомендовано методичною радою університету
(протокол № 5 від 17.04.2014 р.)*

Матеїк Г. Д.

М-34 Фізика. Конспект лекцій. - Івано-Франківськ: ІФНТУНГ, 2014. - 249 с.

МВ 02070855– 8072–2014

У конспекті лекцій розглянуто фізичні основи механіки, основні явища молекулярної фізики і термодинаміки, закони електрики і магнетизму, основи оптики, атомної і ядерної фізики. Навчальний матеріал подано стисло. Основна увага приділена формуванню основних фізичних законів і понять вказаних розділів фізики. Кожна тема закінчується контрольними запитаннями.

Конспект лекцій призначений для самостійного опрацювання лекційного матеріалу студентами усіх форм навчання напряму підготовки 6.040106 – «Екологія, охорона навколишнього середовища та збалансоване природокористування».

УДК 53
ББК 22.3

МВ 02070855– 8072–2014

© Матеїк Г. Д.
© ІФНТУНГ, 2014

ЗМІСТ

ВСТУП	8
1 МЕХАНІКА. КІНЕМАТИКА	9
1.1 Предмет фізики, її зв'язок іншими науками та технікою	9
1.2 Основні моделі класичної механіки	11
1.3 Поступальний рух. Траєкторія, шлях, переміщення. Швидкість і прискорення	14
2 КІНЕМАТИКА	20
2.1 Криволінійний рух. Прискорення при криволінійному русі. Нормальне і тангенціальне прискорення	20
2.2 Обертальний рух та його характеристики. Взаємозв'язок кутових кінематичних величин із лінійними кінематичними величинами	22
3 ДИНАМІКА	28
3.1 Динаміка матеріальної точки (тіла) при поступальному русі. Маса. Сила. Закони Ньютона	28
3.2 Сили у механіці. Сили тертя	30
3.3 Сили пружності. Закон Гука	32
3.4 Закон всесвітнього тяжіння	36
4 ЗАКони ЗБЕРЕЖЕННЯ В МЕХАНІЦІ	40
4.1 Імпульс. Закон збереження імпульсу	40
4.2 Центр мас. Теорема про рух центра мас	42
4.3 Робота і потужність	43
4.4 Кінетична енергія	45
4.5 Потенціальна енергія	46
4.6 Закон збереження і перетворення механічної енергії	50
5 ДИНАМІКА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА	52
5.1 Момент сили. Основне рівняння динаміки обертального руху	52

5.2 Момент імпульсу	54
5.3 Закон збереження моменту імпульсу	55
5.4 Момент інерції твердого тіла	58
5.5 Вільні осі обертання. Гіроскоп	60
5.6 Кінетична енергія обертального руху твердого тіла	62
5.7 Неінерціальні системи відліку. Сили інерції в системі, яка рухається прямолінійно	63
5.8 Сили інерції, що діють на нерухоме тіло в обертній системі. Відцентрова сила інерції	64
5.9 Сили Коріоліса	65
6 МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ ТА ХВИЛІ	67
6.1 Гармонічні коливання. Диференціальне рівняння коливань	67
6.2 Додавання коливань. Биття. Фігури Ліссажу	71
6.3 Математичний, пружинний та фізичний маятники	77
7 ЗГАСАЮЧІ ТА ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ. ХВИЛІ	82
7.1 Диференціальне рівняння згасаючих коливань пружинного маятника та його розв'язок	82
7.2 Диференціальне рівняння вимушених коливань та його розв'язок	85
7.3 Явище резонансу в природі	87
7.4 Хвилі у пружному середовищі. Характеристики хвилі	88
7.5 Диференціальне рівняння хвилі	90
7.6 Звук. Інтенсивність звуку. Швидкість звуку	93
7.7 Звукове забруднення. Ультразвук та інфразвук, дія на організм людини	98
8 МЕХАНІКА РІДИН ТА ГАЗІВ	104
8.1 Закони Паскаля і Архімеда	104
8.2 Стаціонарна течія. Рівняння нерозривності	105
8.3 Ідеальна рідина. Рівняння Бернуллі. Формула Торічеллі	106

8.4 Сили в'язкості	109
8.5 Ламінарна і турбулентна течії. Число Рейнольдса .	112
8.6 Рух рідин і газів по трубах. Формула Пуазейля	113
8.7 Формула Стокса	115
8.8 Рух твердих тіл у рідинах та газах	116
9 МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА	119
9.1 Статистичний і термодинамічний методи	119
9.2 Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії .	119
9.3 Рівняння стану ідеального газу. Основні газові закони та ізопроцеси	123
10 ЕЛЕМЕНТИ КІНЕТИЧНОЇ ТЕОРІЇ. ЯВИЩА ПЕРЕНОСУ	125
10.1 Елементи теорії ймовірності. Розподіл Максвелла	125
10.2 Барометрична формула. Розподіл Больцмана. Атмосфера планет	128
10.3 Середня довжина вільного пробігу молекули	132
10.4 Дифузія	134
10.5 Внутрішнє тертя	137
10.6 Теплопровідність	139
11 ПЕРШИЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМІКИ	141
11.1 Внутрішня енергія	141
11.2 Розподіл енергії за ступенями вільності. Внутрішня енергія ідеального газу	142
11.3 Робота при зміні об'єму	143
11.4 Перший закон термодинаміки	144
11.5 Теплоємність газів	145
11.6 Застосування першого закону термодинаміки до ізопроцесів	147
11.7 Адіабатний процес	151
12 ДРУГИЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМІКИ	155
12.1 Рівноважні і нерівноважні процеси. Оборотні та необоротні процеси	155
12.2 Робота циклу. Тепловий двигун	156

12.3 Другий закон термодинаміки	157
12.4 Цикл Карно	158
12.5 Нерівність Клаузіуса. Ентропія	160
13 РЕАЛЬНІ ГАЗИ. ВЛАСТИВОСТІ РІДИН І	
ТВЕРДИХ ТІЛ. ФАЗОВІ ПЕРЕХОДИ	163
13.1 Реальні гази. Рівняння Ван-дер-Ваальса	163
13.2 Ізотерми Ван-дер-Ваальса. Критичний стан речовини	165
13.3 Внутрішня енергія реального газу. Ефект Джоуля-Томсона	167
13.4 Рідини. Поверхневий натяг	169
13.5 Змочування	173
13.6 Тиск під викривленою поверхнею рідини. Капілярні явища	174
13.7. Властивості твердих тіл	177
13.8 Фази і фазові переходи	179
14 ЕЛЕКТРОСТАТИКА	183
14.1 Основні властивості електричного заряду. Закон Кулона	183
14.2 Напруженість електричного поля	184
14.3 Принцип суперпозиції. Силкові лінії електричного поля	185
14.4 Робота. Циркуляція вектора напруженості електростатичного поля	187
14.5 Потенціал	189
14.6 Потік вектора напруженості електричного поля ..	191
14.7 Теорема Гаусса та її застосування до розрахунків електричних полів	192
14.8 Еквіпотенціальні поверхні	197
15 ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ В РЕЧОВИНІ	199
15.1 Провідники в електричному полі	199
15.2 Ємність провідників і конденсаторів	201
15.3 З'єднання конденсаторів	203

15.4 Енергія електричного поля	204
15.5 Енергія зарядженого провідника і конденсатора ..	205
15.6 Електричний диполь. Типи діелектриків	207
15.7 Поляризація діелектриків	208
15.8 Зв'язані заряди. Діелектрична проникність	210
15.9 Теорема Гаусса для поля в діелектриках	212
15.10 Сегнетоелектрики	214
16 ПОСТІЙНИЙ ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ	216
16.1 Постійний електричний струм та його характеристики	216
16.2 Закон Ома для однорідної ділянки кола в інтегральній та диференціальній формах. Опір провідників, питомий опір, питома провідність	217
16.3 Робота і потужність струму. Закон Джоуля- Ленца	219
17 ПОСТІЙНИЙ ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ	222
17.1 Сторонні сили. Електрорушійна сила і напруга....	222
17.2 Закон Ома для неоднорідної ділянки кола	225
17.3 Правила Кірхгофа	226
18 ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ В МЕТАЛАХ, ГАЗАХ І ЕЛЕКТРОЛІТАХ	228
18.1 Класична теорія провідності металів	228
18.2 Недоліки класичної теорії провідності металів	231
18.3 Струм у газах	232
18.4 Види газових розрядів та їх практичне застосування	237
18.5 Струм в електролітах. Електроліз. Закони електролізу	240
18.6 Струм у вакуумі	243
Додаток	247
Перелік використаних джерел	249

ВСТУП

Фізика – наука про природу, про найбільш фундаментальні закономірності руху матерії, її будову, властивості та взаємодію. Головна мета фізики – встановити та пояснити закони, за якими відбуваються процеси та явища навколишнього світу.

Фізика необхідна студентам для подальшого успішного засвоєння обраної спеціальності.

Фізика – експериментальна наука з широко розвиненою системою методів наукових досліджень.

Знайомство з розвитком фізики у світі та Україні зокрема, з методологією розв’язання складних проблем, що виникли в її історії, є невичерпним джерелом творчого підходу до вирішення суто технологічних проблем. Класичні приклади використання аналогій, застосування моделювання фізичних процесів, створення ідеальних моделей та абстракцій навчають умінню виділяти головне в кожній проблемі, що виникатиме у повсякденній роботі.

Фізика – несе і виховну роль, підкреслюючи значення людського фактора в освоєнні природи та у посяганні на її таємниці. Біографії більшості видатних вчених можуть стати прикладом служіння науці і людству. Важливо донести, що фізика, перебуваючи завжди на вістрі технічного прогресу, виступала як джерелом, так і засобом розв’язання більшості проблем, зокрема, екологічних, даючи найбільш системний підхід до оцінювання екологічної ситуації, формуючи погляд про формальний взаємозв’язок у Природі, у центрі якої – найбільша цінність – Людина.

1. МЕХАНІКА. КІНЕМАТИКА

0.1 Предмет фізики, її зв'язок іншими науками та технікою

Що таке блискавка і чому вона супроводжується гуркотом грому? Чому і як ми чуємо і бачимо? Чому одні метали важчі за інші і чому одні метали піддаються корозії а інші ні? Чому ми бачимо зображення на телеекрані? Чому?...

На ці, та багато інших запитань дає відповідь фізика. Однак, вона не тільки дає відповіді на ті чи інші запитання, вона дозволяє передбачати і створювати нове, розуміти і проникати у невідоме. Із того, що ми знаємо в фізиці, формуються нові уявлення, відтворюються нові явища. І коли фізика дає відповіді на ті чи інші запитання, завжди виникають нові, часто складніші за попередні, запитання. Деякі із цих запитань ніколи б не виникли, якби їх не поставила саме фізика.

Перш за все фізика – це наука, яка є однією із найстародавніших наук. Грецьке слово "physis" у перекладі означає "природа", тому науку про природу стали називати **фізикою**. Починаючи з XVII ст., відбувається швидкий розвиток фізики. Із неї з часом виділяються нові науки про природу, наприклад, хімія. Всі науки, які вивчають явища природи, стали називати **природничими науками** (хімія, біологія, астрономія, геологія).

Природа є предметом вивчення багатьох наук, однією із яких є фізика. **Сучасна фізика** вивчає макроскопічні тіла, молекули, атоми, атомні ядра, елементарні частинки, гравітаційне, електромагнітне і ядерне поля та їх взаємозв'язок і взаємоперетворення.

Є чимало визначень фізики як науки, які в тій чи іншій мірі відбивають її зміст. Найбільш повним визначенням фізики

як науки є таке: **"Фізика є частиною природознавства, яка експериментальними методами, теоретичними узагальненнями і передбаченнями вивчає прості рухи матерії, кількісні та якісні її зміни, які пов'язані з будовою, взаємодією і перетворенням усіх її видів та станів"**. Таке вивчення фізики відповідає її сучасному стану, вказує на її межі та зв'язок з іншими науками.

Фізика – наука дослідна, експериментальна. Однак, фізичним дослідом (експериментом) є не кожне вимірювання, а тільки те, в якому всі впливи на досліджувану систему піддаються вимірюванню.

Важливою властивістю фізичного експерименту є його повторюваність. Повторення фізичного експерименту в іншій лабораторії з вимірювальними приладами інших конструкцій повинно дати ті ж результати, що і в першому досліді.

Багато фізичних явищ можна відтворити в лабораторних умовах, однак, не всі. У лабораторії не можна відтворити умови, в яких є речовина на Сонці, не вдається отримати штучну кульову блискавку. Для вивчення цих і подібних явищ користуються природними спостереженнями.

Важливою частиною фізики сьогодні є точні вимірювання. Незважаючи на те, що фізику часто називають точною наукою, ні одне вимірювання не є абсолютно точним, тобто з кожним вимірюванням зв'язана деяка похибка. Тому, представляючи вимірювання, необхідно вказати і точність цього вимірювання, тобто оцінку похибки або абсолютної похибки. Точність вимірювання часто характеризують величиною відносної похибки, яка є відношенням абсолютної похибки до виміряного значення (і помноженого на 100, якщо це відношення потрібно виразити у відсотках).

Різні величини доступні вимірюванню з різною точністю. Підвищення точності вимірювань розширює

можливості пізнання оточуючого світу і тому є важливою науковою та технічною проблемою.

На основі результатів фізичних експериментів формуються фізичні закони. Законом, як правило називають деякі короткі, але достатньо загальні твердження відносно характеру явищ природи (закони збереження енергії або імпульсу, закони термодинаміки,..). Іноді подібне твердження набуває форм певного математичного співвідношення між величинами, які описують явище (закон всесвітнього тяжіння

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}).$$

Ньютона, згідно з яким

Для того, щоб мати право називатися законом, твердження повинно витримати експериментальну перевірку в широкому класі спостережуваних явищ.

Дослідні факти, використані для формування даного фізичного закону, завжди обмежені як за точністю проведених вимірювань, так і за областю вимірювання фізичних величин. Тому кожний фізичний закон має певну область застосування. Фізичні закони, які мають найбільш широкі області застосування, називають **фундаментальними**. Фундаментальними законами є закон збереження енергії, закони Ньютона і Кулона... Закон Ома або закон Ампера не є фундаментальними законами.

Зауважимо, що досліді можуть призвести до зміни меж застосування будь-якого закону будь-якої теорії.

0.2 Основні моделі класичної механіки

Механіка – розділ фізики, який вивчає найпростішу форму руху тіл – механічний рух, тобто зміну взаємного положення тіл в просторі з часом.

На сьогоднішній день сформувались три вітки механіки: класична, релятивістська та квантова. **Класична механіка** вивчає відносно переміщення тіл з швидкостями, значно меншими від швидкості світла. В основу класичної механіки покладені закони Ньютона. При цьому простір і час вважається абсолютними (незалежними від розміщення і руху матеріальних об'єктів), тіла позбавлені квантових ефектів і не розглядається природа взаємодії між ними. **Основними моделями класичної механіки** є матеріальна точка, тверде тіло, суцільне середовище.

Матеріальною точкою називають тіло, розмірами якого нехтують в умовах даної задачі, а масу вважають зосередженою в точці.

Абсолютно тверде тіло – агрегатний стан речовини, який характеризується сталістю форми і об'єму.

Суцільне середовище – неперервне середовище, з однаковими в кожній точці властивостями.

Основними завданнями класичної механіки є вивчення положення тіла в просторі в будь-який момент часу. **Класичну механіку** поділяють на три частини: **кінематику**, яка вивчає рух тіл без врахування причин, що викликають цей рух; **статику**, яка описує рівновагу тіл; і **динаміку**, яка відповідає на питання про те, чому тіла рухаються саме таким чином. Ці частини механіки умовно самостійні, вони розв'язують різні задачі.

Рухом тіла називають зміну його положення в просторі з часом. Однак поняття руху має строго визначений зміст тільки тоді, якщо вказано тіло, (або система тіл), відносно якого відбувається рух розглядуваного тіла. У цьому суть фундаментальної властивості природи, зміст якої полягає в тому, що будь-який рух відносний. Тому опис руху можливий тільки за наявності системи відліку.

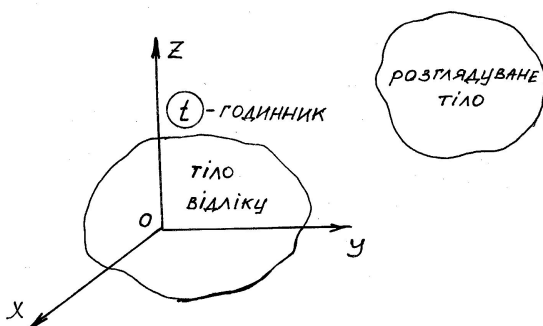


Рисунок 1.1 – Система відліку

Тіло відліку, пов'язану з ним систему координат і пристрій для вимірювання часу називають **системою відліку**. Точка перетину координатних осей X , Y , Z називають **початком системи відліку** (рис. 1.1).

Тіло, відносно якого судять про рух іншого тіла, вважають тілом відліку. Система координат дає можливість визначати положення тіла (точки) в просторі (три координати), на площині (дві координати) і на прямій (одна координата).

Системи відліку можуть бути інерціальні і неінерціальні. Оскільки немає абсолютно нерухомих тіл відліку, то немає й абсолютних систем відліку.

Система відліку, відносно яких рух матеріального тіла підлягає закону інерції, а єдиною причиною зміни вектора швидкості в такій системі є взаємодія між тілами, називають **інерціальними системами відліку**.

Рух інерціальної системи відліку не впливає на закони перебігу явищ у ній. Інерціальна система відліку – це абстракція, яка тоді точніше збігається з реальною системою відліку, якщо взяти тіла, які за час руху даного об'єкта

практично можна вважати непорушними. Так, система відліку, пов'язана з поверхнею Землі, тільки наближено може вважатися інерціальною, адже рух Землі навколо Сонця не є рівномірним, а от система відліку, пов'язана з Сонцем і далекими зорями Галактики, в більшій мірі інерціальна.

Системи відліку, які рухаються зі сталим вектором швидкості по відношенню до інерціальної системи відліку, також є інерціальними системами відліку. Якщо система відліку інерціальна, то інерціальними будуть системи, утворені такими способами:

- перенесенням початку координат;
- зміною початку відліку часу.

Системи відліку, які обертаються або рухається з прискоренням, є **неінерціальними**.

0.3 Поступальний рух. Трасекторія, шлях, переміщення. Швидкість і прискорення

Механічним рухом називається зміна з часом положення тіл чи їх частинок у просторі відносно інших тіл. При вивченні руху ми будемо користуватися поняттям **ідеалізованої частинки**. Така частинка розглядається як **матеріальна точка**, тобто у неї немає просторової протяжності (розмірів), і вона може здійснювати тільки поступальний рух.

Тіло, розмірами якого нехтувати не можна, розглядається як система матеріальних точок.

Розглядають два види руху: поступальний і обертальний.

Рух, під час якого будь-яка пряма, проведена в тілі, під час його руху залишається паралельна сама собі, називається

поступальним. Прикладом такого руху може бути рух автомобіля, поїзда, велосипеда і ін.

Рух, під час якого точки тіла описують кола, центри яких лежать на одній прямій, що є віссю обертання, називається **обертальним**.

Прикладом такого руху є обертання Землі навколо своєї осі, обертання коліс, шківів і ін.

Траєкторія – неперервна лінія, яку описує тіло (матеріальна точка) під час руху відносно вибраної системи координат.

Шлях – довжина траєкторії, якою рухається тіло. Шлях – скалярна величина і в системі СІ вимірюється в метрах (м), $[S]=\text{м}$.

За формою траєкторії поступальний рух може бути

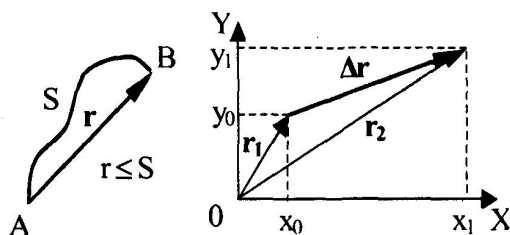


Рисунок 1.2 – Шлях і переміщення

прямолінійним: траєкторія – пряма лінія, і **криволінійним:** траєкторія – крива лінія. Найпростішим криволінійним поступальним рухом є рух тіла по колу. Не ототожнювати поступальний рух тіла по колу із обертальним рухом (чому?).

Напрявлений відрізок прямої, що сполучає початкове положення тіла з його наступним положенням, називають **переміщенням** (r) тіла (рис. 1.2).

Проекції вектора Δr на OX і OY :

$$\Delta r_x = x_1 - x_0,$$

$$\Delta r_y = y_1 - y_0.$$

Переміщення є не що інше, як зміна положення тіла. Щоб знайти положення тіла в будь-який момент часу, треба знайти його початкове положення і переміщення, здійснене до цього моменту часу. □

Швидкість (v) – векторна величина, яка характеризує зміну вектора переміщення з часом і визначається відношенням зміни переміщення (Δr) до проміжку часу (Δt), протягом якого тіло здійснило це переміщення

$$v = \frac{\Delta r}{\Delta t} \quad (1.1)$$

Якщо рух прямолінійний, то напрям швидкості співпадає з напрямом переміщення, а числове значення переміщення дорівнює числовому значенню шляху.

Прямолінійним рівномірним рухом називають рух, при якому точка за будь-які рівні проміжки часу проходить однакові шляхи.

Прямолінійний рівномірний рух, тобто рух зі сталою швидкістю, не дуже часто зустрічається на практиці. Значно частіше доводиться мати справу з такими рухами, під час яких швидкість руху з часом змінюється. Такі рухи називають **нерівномірними**.

У багатьох випадках, коли мають справу з нерівномірним рухом є зміст говорити про середню швидкість і швидкість, яку має тіло в даний момент часу в даній точці траєкторії (миттєва швидкість). Середня швидкість характеризує рух, який уже відбувся, а миттєва швидкість – відбувається в даний час. **Середня швидкість** (v_c) може бути

визначена відношенням переміщення (Δr) до проміжку часу (Δt), протягом якого тіло це переміщення здійснило $v_c = \Delta r / \Delta t$. Якщо рух прямолінійний, то $v_c = \Delta S / \Delta t$. Це співвідношення справедливе для характеристики будь-якого поступального руху тіла.

Миттєва швидкість визначається як границя співвідношення $\Delta r / \Delta t$, коли проміжок часу прямує до нуля, тобто

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt}. \quad (1.2)$$

Якщо рух прямолінійний, то

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}. \quad (1.3)$$

Про миттєву швидкість можна говорити і у випадку рівномірного руху. Відмінність лише в тому, що при рівномірному русі миттєва швидкість у будь-якій точці і в будь-який момент часу однакова, а при нерівномірному русі вона в різних точках і різні моменти часу різна.

Під час криволінійного руху вектор швидкості напрямлений вздовж дотичної до траєкторії в будь-якій її точці. Швидкість в системі СІ вимірюється в м/с, $[v] = \text{м/с}$.

Для характеристики зміни швидкості введена величина, яка називається прискоренням (a).

Прискорення – векторна величина, яка характеризує зміну вектора швидкості з часом визначається відношенням зміни швидкості до проміжку часу, протягом якого ця зміна відбувається

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (1.4)$$

Зміну швидкості за нескінченно малий проміжок часу називають **миттєвим прискоренням**. Миттєве прискорення дорівнює граничному значенню середнього прискорення при $\Delta t \rightarrow 0$:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \quad (1.5)$$

Величина $\frac{dv}{dt}$ називається похідною величини v по t .
 У певному сенсі можна сказати, що прискорення – це "швидкість зміни швидкості". Оскільки $a = \frac{dv}{dt}$, а $v = \frac{dS}{dt}$, то прискорення можна записати таким чином:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dS}{dt} \right) = \frac{d^2 S}{dt^2} \quad (1.6)$$

Тут величину $\frac{d^2 S}{dt^2}$ називають другою похідною шляху по часу. У випадку прискореного руху прискорення завжди додатне ($a > 0$); у випадку сповільненого руху прискорення від'ємне ($a < 0$).

Знаючи початкову швидкість тіла v_0 і його прискорення a , можна знайти швидкість тіла v в будь-який момент часу.

$$v = v_0 \pm at$$

(1.7)

Для випадку руху зі сталим прискоренням:
прискорення $a = \text{const}$;

швидкість $v = v_0 \pm at$,

відстань $S = v_0 t \pm \frac{at^2}{2}$.
(1.8)

У формулах (1.8) знак «+» відноситься до рівноприскореного руху, знак «-» – до рівносповільненого руху.

Контрольні запитання

1. Що вивчає фізика?
2. Яке завдання механіки, кінематики?
3. Який рух називається поступальним?
4. Що називається траєкторією руху? Які є види траєкторії?
5. Що розуміють під швидкістю і прискоренням?
6. Якими рівняннями описують рівномірні і рівнозмінні рухи?

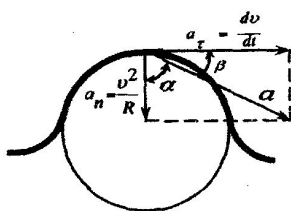
2 КІНЕМАТИКА

2.1 Криволінійний рух. Прискорення при криволінійному русі. Нормальне і тангенціальне прискорення

Про нормальне прискорення можемо говорити лише стосовно криволінійного руху. Найпростішим випадком криволінійного руху є рух по колу.

Модуль вектора нормального прискорення в деякій точці є прямо пропорційним квадрату швидкості і обернено пропорційним радіусу заокруглення траєкторії в тій же точці, і напрямлений перпендикулярно до напрямку вектора швидкості у бік центра кривизни траєкторії (рис. 2.1)

$$a_n = \frac{v^2}{R} \quad (2.1)$$



Тангенціальне

прискорення напрямлене по дотичній до траєкторії, а модуль і знак визначається співвідношенням:

Рисунок 2.1 – Тангенціальне та нормальне прискорення швидкості під час обертового руху

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} \quad (2.2)$$

Повне прискорення a , під час криволінійного руху, дорівнює векторній сумі нормального і тангенціального прискорень $a = a_n + a_{\tau}$,

а напрям цього вектора утворює деякий кут α з радіус-вектором R , або кут β з дотичною:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_{\tau}^2} = \sqrt{\left(\frac{v^2}{R}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2} \quad (2.3)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_{\tau}}{a_n}; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{a_n}{a_{\tau}} \quad (2.4)$$

Закони рівнозмінного руху мають вигляд:

$$v = v_0 \pm at; \quad s = v_0 t \pm \frac{at^2}{2} \quad (2.5)$$

Згідно з принципом незалежності рухів:

$$v = v_x + v_y; \quad S = S_x + S_y, \quad (2.6)$$

швидкість у довільний момент часу визначається рівнянням:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \quad (2.7)$$

а шлях:

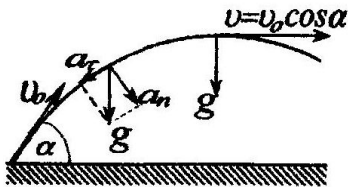


Рисунок 2.2 – Рух тіла, кинутого під кутом до горизонту

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} \quad (2.8)$$

Для руху тіла, кинутого під кутом α до горизонту з початковою швидкістю u_0 (рис 2.2), повне прискорення залишається сталим:

$$a = \text{const} = g \quad (2.9)$$

Складові повного прискорення у кожній точці траєкторії є різними. Так, наприклад, у верхній точці траєкторії вертикальна складова швидкості рівна нулю, тому $v = u_0 \cos \alpha$, тобто існує лише горизонтальна складова швидкості, яка є перпендикулярною до вектора повного прискорення.

$$g = \frac{(u_0 \cos \alpha)^2}{R} \quad (2.10)$$

З цього співвідношення легко визначити радіус кривизни у найвищій точці траєкторії.

2.2 Обертальний рух та його характеристики.

Взаємозв'язок кутових кінематичних величин із лінійними кінематичними величинами

До цього часу ми розглядали механічний рух матеріальних точок.

Однак, більшість тіл у природі є протяжні тверді тіла,

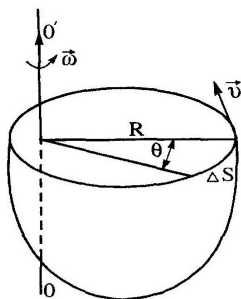


Рисунок 2.3 – Обертальний рух навколо нерухомої осі

які, як і матеріальні точки, можуть переміщуватися і обертатися. У механіці під **твердим тілом** розуміють незмінну систему матеріальних точок, тобто таку ідеалізовану систему, в якій за будь-яких рухів взаємні відстані між матеріальними точками системи залишаються незмінними. Тверді тіла володіють певною формою,

яка залишається сталою, якщо на тіло не діють помітні зовнішні сили.

Будь-який рух твердого тіла можна розглядати як сукупність поступального і обертального рухів.

Поступальним рухом твердого тіла називають такий рух, за якого будь-яка пряма, яка сполучає дві довільні точки твердого тіла, переміщується паралельно сама до себе. Це означає, що при поступальному русі твердого тіла траєкторії всіх точок тіла однакові. Швидкість і прискорення всіх точок тіла в даний момент часу рівні. Поступальний рух твердого є плоским рухом, оскільки траєкторії його точок лежать у паралельних площинах.

При обертальному русі твердого тіла навколо нерухомої осі траєкторіями всіх його точок є кола, які лежать у площинах, перпендикулярних до осі обертання OO' (рис. 2.3). Центри всіх цих кіл лежать на осі обертання. Обертальний рух

твердого тіла є також плоским рухом, оскільки траєкторії точок твердого тіла лежать у паралельних площинах.

При обертанні твердого тіла всі його точки обертаються з різними швидкостями. Для характеристики обертання тіла зручно користуватися вектором кута повороту φ через будь-яку точку.

Похідна вектора кута повороту по часу визначає кутову швидкість обертання

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

(2.11)

Кутова швидкість є величина векторна. У векторному вигляді формула (2.11) має вигляд:

$$\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{n}$$

(2.12)

Напрямок вектора кутової швидкості збігається з поступальним рухом свердлика, якщо його обертати в напрямку обертання тіла (рис. 2.4).

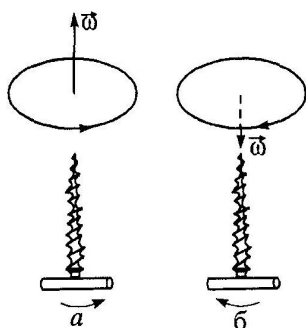


Рисунок 2.4 – Правило свердлика

Якщо обертання рівномірне, то

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

(2.13)

де T – період, ν – частота.

Період (T) – час, протягом якого тіло (матеріальна точка) проходить шлях рівний довжині кола. Одиницею вимірювання періоду є секунда (c), $[T] = c$.

Кількість обертів, яке здійснює тіло за одиницю часу, називають **частотою**. Одиницею вимірювання частоти є герц,

$$[v] = \text{Гц} \quad \text{Між періодом і частотою є зв'язок} \quad T = \frac{1}{\nu}.$$

Кутову швидкість ще іноді називають **циклічною частотою**.

Якщо початок координат вибрати на осі обертання, то лінійну швидкість будь-якої точки, що обертається можна визначити через її радіус і кутову швидкість тіла:

$$v = R \cdot \omega \quad (2.14)$$

У векторній формі

$$\vec{v} = \vec{\omega} \cdot R \quad (2.15)$$

Аналогічно до прискорення при поступальному русі для характеристики обертального руху твердого тіла вводиться величина **кутового прискорення**

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \quad (2.16)$$

У векторній формі

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad (2.17)$$

Вектор кутового прискорення збігається з вектором кутової швидкості при прискореному русі, і вони є протилежні при сповільненому русі. Зв'язок кутового прискорення ε з лінійним тангенціальним прискоренням a_τ виражається відомою формулою:

$$a_{\tau} = R \frac{d\omega}{dt} = R \cdot \varepsilon$$

(2.18)

або

$$a_{\tau} = R \cdot \varepsilon$$

(2.19)

Нормальне (доцентрове) прискорення виражається через кутову швидкість так:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{R^2 \omega^2}{R} = R \cdot \omega^2$$

(2.20)

або у векторній формі

$$a_n = \omega^2 \cdot R$$

(2.21)

На рисунку 2.5 зображено розташування векторів $v, \omega, R, \varepsilon, a_n, a_{\tau}$ (а – кутова швидкість збільшується, б – кутова швидкість зменшується).

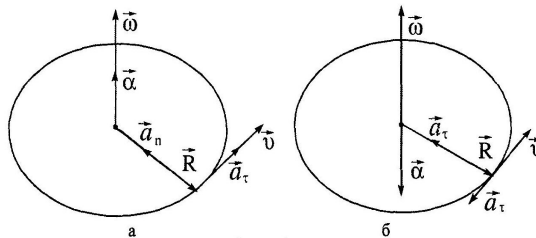


Рисунок 2.5 – Напрямок і відлік кутових характеристик для обертального руху

Із рисунка видно, що при збільшенні кутової швидкості напрямки векторів кутового прискорення і кутової швидкості співпадають (рис. 2.5,а) і, навпаки, при зменшенні кутової швидкості, вони протилежні (рис. 2.5,б). Теж саме можна сказати і про напрямки векторів тангенціального прискорення і лінійної швидкості.

Наведемо отримані шляхом інтегрування відповідних виразів рівняння кінематики обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі.

Рівняння рівномірного обертального руху:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t ,$$

(2.22)

Залежність кутової швидкості від часу при рівномірному обертальному русі:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t ,$$

(2.23)

Рівняння рівнозмінного обертального руху

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} .$$

(2.24)

Контрольні запитання

1. Який фізичний зміст нормального і тангенціального прискорень?
2. Як визначити швидкість тіла, кинутого під кутом до горизонту?
3. Який рух називається обертальним?
4. Які величини характеризують обертальний рух?

5. Який зв'язок між кутовими і лінійними швидкостями та прискореннями.
6. Якими рівняннями описують рівномірний обертальний рух?

3 ДИНАМІКА

3.1 Динаміка матеріальної точки (тіла) при поступальному русі. Маса. Сила. Закони Ньютона

У попередньому розділі ми розглянули рух, де основними поняттями були швидкість і прискорення. Причини руху до уваги не бралися. У цьому розділі ми спробуємо дати відповіді на питання: чому тіла рухаються таким чином, а не інакше? Що спонукає тіло, яке перебуває в стані спокою, почати рухатися? Що є причиною прискорення чи гальмування тіла? Чим викликаний рух по колу?

Динаміка – розділ механіки, в якому вивчаються зв'язки між рухами і причинами, що їх зумовлюють.

Маса – скалярна фізична величина, яка характеризує одночасно гравітаційні та інерційні властивості матерії.

Одиницею вимірювання в системі СІ є кілограм, $[m] = \text{кг}$.

Густина визначається відношенням маси тіла до об'єму:

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

Одиницею вимірювання густини є кг/м^3 , $[\rho] = \text{кг/м}^3$.

Сила – векторна величина, яка є мірою взаємодії матеріальних тіл, у результаті якої змінюється рух тіла, тобто виникає прискорення, або тіла деформуються. У системі СІ

сила вимірюється в ньютонах, $[F]_{\text{Н}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}$. Один ньютон – це сила, необхідна, щоб тілу масою 1 кг надати прискорення 1 м/с^2 .

Перший закон Ньютона: існують такі системи відліку, відносно яких тіла, що рухаються поступально, зберігають

свою швидкість сталою, коли на них не діють інші тіла, або дія інших тіл компенсується.

Системи, в яких виконується перший закон Ньютона, називаються **інерціальними**. **Інерціальні системи** – системи відліку, відносно яких тіло в разі компенсації зовнішніх дій рухається рівномірно і прямолінійно.

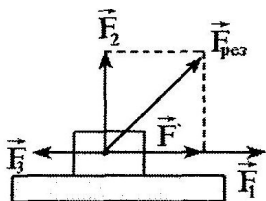
Властивість тіл зберігати стан спокою або стан рівномірного прямолінійного руху називається **інерцією**.

Другий закон Ньютона. Прискорений рух можна отримати тільки під дією прикладеної сили. Прискорення тіла прямо пропорційне прикладеній до нього силі і обернено пропорційне його масі. Тіло прискорюється в напрямку, який співпадає з напрямком прикладеної сили. Аналітично цей закон записується так

$$a \approx \frac{F}{m}, \quad (3.1)$$

де a – прискорення, F – сила, m – маса. Вираз **другого закону Ньютона**:

$$F = m \cdot a. \quad (3.2)$$



**Рисунок 3.1 –
Дія сил на тіло**

Другий закон Ньютона зв'язує рух з причиною, що його викликала – силою. Цей закон є основним рівнянням динаміки.

Якщо на матеріальну точку діє кілька сил, то кожна з них надає точці прискорення, яке визначається другим законом Ньютона так, ніби інших сил немає. Це явище називається принципом незалежності дії сил. Прискорення, якого набуває тіло внаслідок одночасної дії кількох сил, є таке саме, як коли б на тіло діяла лише одна сила, яка дорівнює векторній сумі всіх

діючих сил. Ця векторна сума називається рівнодійною, або результуючою силою.

Тому **другий закон Ньютона** сформулюємо так: добуток маси на його прискорення дорівнює рівнодійній усіх сил, які діють на тіло (рис. 3.1).

Третій закон Ньютона. Другий закон Ньютона кількісно описує вплив сили на рух тіла, але не дає відповіді на питання звідки береться сила, що є її джерелом. Сила сама по собі не існує, а завжди пов'язана з взаємодією тіл. Тобто єдиним джерелом сили, що діє на якесь тіло, є інше тіло.

Якщо одне тіло діє на друге, то друге діє на перше, причому ці дії рівні за величиною і протилежні за напрямом. Закон рівності дії і протидії є **третім законом Ньютона**.

Сили, з якими взаємодіють тіла, завжди рівні за величиною і протилежні за напрямом:

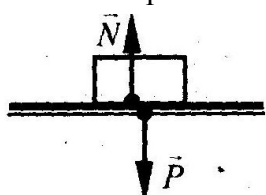


Рисунок 3.2 – Точки прикладання сил реакції опори та ваги

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \quad (3.3)$$

Сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ прикладені до різних тіл. (рис. 3.2)

P – сила, з якою тіло тисне на поверхню, вага тіла. Точка прикладання її лежить на поверхні. N – реакція опори – сила, з якою поверхня діє на тіло.

Точка прикладання цієї сили лежить на тілі.

3.2 Сили у механіці. Сили тертя

У механіці розглядають сили пружності, сили гравітації і сили тертя.

Будь-який механічний рух тіла супроводжується втратами механічної енергії. Це зумовлено наявністю сил

тертя. Сили тертя перешкоджають руху. Вони є гальмівними силами (силами опору). Тертя виникає між двома поверхнями твердих тіл або їх частинками. У першому випадку тертя називають зовнішнім, в другому – внутрішнім. Зовнішнє тертя поділяють на тертя спокою і тертя ковзання. Перший вид тертя виникає між взаємно нерухожими тілами, другий виникає при відносному русі тіл, що дотикаються.

Тертя спокою проявляється у всіх випадках, коли намагаються викликати відносний рух тіл, які доторкаються. Тертя спокою характеризує силу опору при будь-яких спробах зрушити тіло з місця. Припустимо, що на горизонтальній поверхні перебуває тіло в стані спокою. У цьому випадку на тіло діють тільки сила ваги mg і сила реакції N . Сила тертя в цьому випадку відсутня. Далі до тіла прикладаємо силу F і спробуємо зрушити його з місця. Відразу ж виникне сила опору (протилежна до F), яка і є силою тертя спокою $F_{от}$ (рис.3.3). Збільшення сили F призведе до збільшення сили опору $F_{от}$, і коли до тіла прикладена сила $F > F_{от}$, то воно зрушиться з місця. Для всіх інших випадків, коли $F < F_{от}$, то тіло залишиться в спокої. Отже, сила тертя спокою змінюється від нуля до максимального значення. Дослідним шляхом встановлено, що максимальне значення сили тертя спокою

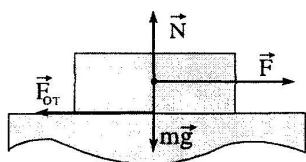


Рисунок 3.3 – Дія сил на тіло на горизонтальній поверхні

пропорційне нормальній силі (силі реакції) N і не залежить від площ дотикання тіл, тобто

$$F_{от} = \mu_0 N, \quad (3.4)$$

де μ_0 – коефіцієнт тертя спокою.

Якщо $F > F_{ог}$, то тіла рухаються прискорено, і сила тертя спокою переходить у силу тертя ковзання.

Силу тертя ковзання виражають формулою:

$$F_T = \mu N, \quad (3.5)$$

де μ – коефіцієнт тертя ковзання. Співвідношення (3.4) і (3.5) не є векторними, оскільки сила тертя і сила N перпендикулярні одна одній.

Тертя може справляти шкідливий вплив. Воно гальмує рухомі тіла, викликає нагрівання і знос частин механізмів. Щоб зменшити сухе тертя ковзання, його замінюють **тертям кочення** за допомогою підшипників, або внутрішнім тертям за допомогою мастил. Більш ефективно зменшити тертя можна, створивши між ковзаючими поверхнями повітряний прошарок. У цьому випадку повітряний прошарок створюється шляхом продування повітря через велику кількість отворів. Інший спосіб створення повітряного прошарку ґрунтується на використанні магнітного поля для підтримання тіла в повітрі.

Тертя приносить і велику користь. Наша здатність ходити ґрунтується на терті між підошвами і землею. Рух автомобіля, а також його стійкість, також залежить від тертя.

3.3 Сили пружності. Закон Гука

Будь-яке тіло під дією прикладених сил змінює свої розміри і форму, тобто **деформується**. **Пружною** називають таку деформацію, коли тіло після припинення дії зовнішніх сил повністю відновлює свої розміри і форму. **Пластичною** називають деформацію, яка повністю або частково зберігається

в тілі після припинення дії зовнішніх сил. Пружною буде деформація чи пластичною залежить як від природи самих тіл, так і від прикладених до них сил. Якщо сили не перевищують певної межі, яку називають межею пружності, деформація буде пружною. Коли зовнішні сили перевищують цю межу, деформація буде пластичною.

Сила пружності – це сила, що виникає під час деформації тіла і напрямлена в сторону, протилежну напрямку зміщення частинок тіла під час деформації.

Зв'язок між силою пружності і величиною деформації в межах пружності тіла встановлений Гуком в 1660 р.: сили, що виникають під час пружної деформації прямо пропорційні величині цієї деформації і напрямлені в сторону її зменшення:

$$F_{np} = -kx,$$

де F_{np} – сила пружності, x – величина деформації, k – коефіцієнт жорсткості (різний для різних матеріалів).

У теорії пружності всі види деформацій – *розтяг або стиск, зсув, згин і кручення*, – можна звести до деформацій розтягу (стиску) і зсуву. Розглянемо ці два види деформації більш детально.

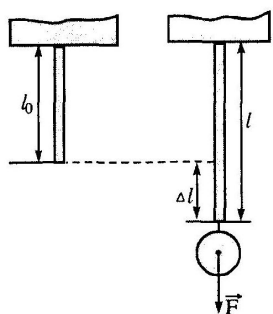


Рисунок 3.4 – Деформація розтягу (стиску)

Сила розтягу чи стиску, прикладена до тіла у формі стержня (рис. 3.4), розтягує його або стискує на деяку величину Δl .

Величина Δl (абсолютне видовження) залежить від початкових розмірів стержня, матеріалу, з якого

виготовлений стержень, величини прикладеної сили. Тоді **закон Гука** матиме вигляд:

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l_0}, \text{ або } \sigma = E \cdot \varepsilon, \quad (3.6)$$

де $\sigma = \frac{F}{S}$ – механічна напруга, S – площа поперечного перерізу стержня, F – прикладена сила, $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ – відносне видовження, E – модуль пружності (**модуль Юнга**). Для різних речовин модуль Юнга має різне значення (таблиця 3.1).

Величина α , обернено пропорційна модулю Юнга, називається **коефіцієнтом пружності** $\frac{1}{E} = \alpha$; $[\alpha] = \frac{\text{м}^2}{\text{Н}}$.

Таблиця 3.1 – Модуль Юнга

Матеріал	Модуль Юнга, $E \square 10\text{Н/м}^2$	Модуль зсуву, $G \square 10\text{Н/м}^2$	Модуль об'ємної пружності, $B \square 10\text{Н/м}^2$
Тверді тіла			
Чавун	100	40	20
Сталь	200	80	140
Бронза	100	35	80
Алюміній	7	25	70
Бетон	20	-	-
Цегла	14	-	-
Мармур	50	-	70
Граніт	45	-	45
Кістка	15	80	-

(кінцівки)			
Рідини			
Вода	-		2,0
Спирт	-		1,0
Ртуть	-		2,5

З діаграми напруг (рис. 3.5) видно, що закон Гука, тобто прямо пропорційна залежність $\sigma(\varepsilon)$, має місце лише у дуже вузьких межах.

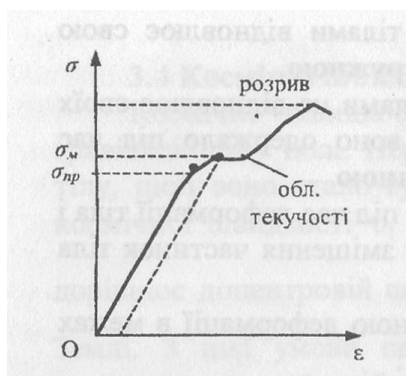


Рисунок 3.5 – Діаграма напруг

Для характеристики деформації твердих тіл в механіці використовують поняття:

а) напруга межі пружності

(σ_{pr}) – напруга, після зняття якої в тілі ще не спостерігається залишкова деформація;

б) напруга межі міцності

(σ_m) – максимальна напруга, для якої тіло ще не руйнується (має місце залишкова деформація);

в) запас міцності

$$k = \frac{\sigma_m}{\sigma_d}$$

(коефіцієнт безпеки σ_d) показує, у скільки разів напруга межі міцності більша від допустимої (експлуатаційної) напруги.

Коли напруга перевищує межі пружності, то тіло "тече" – область пластичної деформації, і повертається у висхідний стан із залишковою деформацією (пунктирна паралельна

лінія). Матеріали, в яких область текучості значна, називаються *в'язкими*, а ті, для яких вона практично відсутня, – *крихкими*. Однак ці властивості сильно залежать від способу впливу на тіло – під час короткотривалої дії тіла ведуть себе як крихкі, а під час тривалих, але слабких сил – як в'язкі.

Механічні напруги в поздовжньому напрямі, крім видовження, спричиняють ще поперечний стиск тіла, тобто зменшується поперечний переріз тіла товщиною d . При цьому відносна поперечна деформація прямо пропорційна відноській поздовжній деформації:

$$\frac{\Delta d}{d_0} = -\mu \frac{\Delta l}{l_0}, \quad (3.7)$$

або

$$\varepsilon_n = -\mu \cdot \varepsilon, \quad (3.8)$$

де μ – коефіцієнт Пуассона, означає, що видовження відповідає зменшенню поперечних розмірів тіла, а стиску – їх збільшення.

Якщо взяти тіло у вигляді паралелограма висотою h і до його паралельних площин прикласти "антипаралельні" сили, то ці площини змістяться одна відносно одної на величину ΔS . Таку деформацію зсуву характеризують кутом зсуву γ (рис. 3.6).

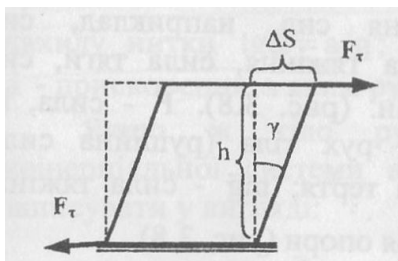


Рисунок 3.6 – Деформація зсуву

Для малих кутів $\gamma = \Delta S / h$.
Тоді за аналогією до закону Гука

$$\tau = \frac{F_\tau}{A} = G \cdot \gamma, \quad (3.9)$$

де A – площа поверхонь; F_{τ} – сили, що заставляють їх зміщуватись одна відносно одної; G – модуль зсуву.

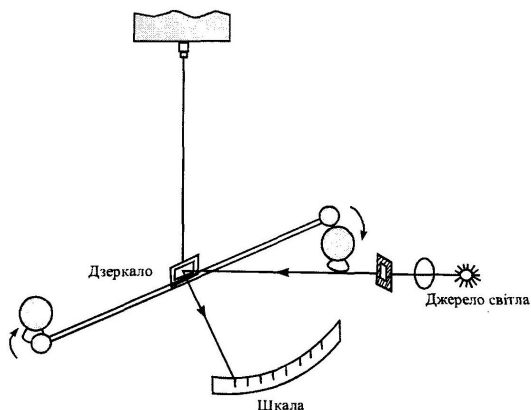
3.4 Закон всесвітнього тяжіння

Ньютон, аналізуючи рух Місяця навколо Землі, у 1666 р. відкрив **закон всесвітнього тяжіння**: кожна частинка у Всесвіті притягає будь-яку іншу частинку з силою, прямо пропорційною добутку їх мас і обернено пропорційною квадрату відстані між ними. Ця сила діє вздовж лінії, яка з'єднує ці частинки, тобто вона є центральною. Величина цієї сили може бути записна у вигляді

$$F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

(3.10)

де m_1 і m_2 – відповідно маси частинок, r – відстань між ними, G – гравітаційна стала, яка може бути виміряна експериментально і для всіх тіл має одне і те ж числове значення.



**Рисунок 3.7 – Пристрій Кавендиш
для визначення гравітаційної сталої**

Фізичний зміст гравітаційної сталої: це величина, яка чисельно дорівнює силі притягання між двома тілами масами по одному кілограму, розташованих на відстані одного метра одне від одного. Якщо переписати формулу (3.10) у вигляді $G = F \cdot r^2 / (m_1 m_2)$, то G вимірюється в $\text{Н} \cdot \text{м}^3 / \text{кг}^2$.

Щодо чисельного значення G , то його можна визначити тільки на досліді. Першим, кому вдалося експериментально виміряти силу, що діє між двома тілами звичайних розмірів, був англійський фізик Генрі Кавендиш (1798 р.) Схему пристрою, за допомогою якого Кавендиш експериментально виміряв силу гравітаційної взаємодії, наведено на рисунку 3.7.

За отриманими результатами з достатньо точністю йому вдалося розрахувати величину сталої G . Результат, отриманий Кавендишем, лише на 1 % відрізняється від значення G , прийнятого сьогодні: $G = (6,6720 \pm 0,0041) \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^3 / \text{кг}^2$.

Одним із проявів сили всесвітнього тяжіння є **сила земного тяжіння** – сила притягання тіл до Землі. Якщо масу Землі позначити через M_3 , її радіус через R_3 , масу даного тіла через m_T , то силу, що діє на тіло з боку Землі, знайдемо за формулою:

$$F = G \frac{M_3 \cdot m_T}{R_3^2} \quad (3.11)$$

Це і є сила земного тяжіння, яка направлена до центра Землі. Ця сила біля поверхні Землі надає тілу прискорення, яке є прискоренням вільного падіння g .

Застосуємо до сили тяжіння другий закон Ньютона. Тоді

$$F = m_T \cdot g \quad (3.12)$$

Прирівнюючи праві частини формул (3.11) і (3.12), отримаємо:

$$g = G \frac{M_3}{R_3^2} \quad (3.13)$$

Формула (3.13) дає можливість визначити масу Землі:

$$M_3 = \frac{g \cdot R_3^2}{G}$$

На силу тяжіння може вплинути неоднорідний розподіл мас у середині Землі. У зв'язку з цим g може мати різні значення навіть у тих точках Землі, які перебувають на однаковій географічній широті. Такі невеликі зміни g можна виміряти спеціальними приладами – **гравіметрами**. На основі подібних вимірів можна робити висновки про існування в земній корі корисних копалин.

Якщо тіло перебуває не на поверхні Землі, а на висоті h над нею, то модуль прискорення вільного падіння визначається за формулою

$$g = G \frac{M_3}{(R_3 + h)^2}$$

3.14)

Із формули (3.14) видно, видно що із збільшенням висоти h прискорення вільного падіння зменшується. Врахування висоти h має велике значення при розрахунку руху супутників Землі.

Контрольні запитання

1. Яке основне завдання динаміки?
2. Які системи відліку називаються інерціальними?
3. Сформулювати закони Ньютона.
4. Сила, її характеристики.
5. Сила тертя. Види тертя.
6. Яка різниця між пружною і пластичною деформаціями?
7. Сформулювати закон Гука.
8. Які сили називаються гравітаційними?

4 ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ В МЕХАНІЦІ

3.1 Імпульс. Закон збереження імпульсу

Імпульсом матеріальної точки називається величина, рівна добутку маси цієї точки на її швидкість:

$$P = mv$$

(4.1)

Імпульс – величина векторна. Напрямок імпульсу співпадає з напрямком швидкості. Візьмемо похідну від імпульсу по часу

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \frac{d}{dt}(mv) = m \frac{dv}{dt} = ma = F \\ \frac{dp}{dt} &= F \end{aligned}$$

(4.2)

Рівняння (4.2) – це другий закон Ньютона, в тій формі в якій його вивів сам Ньютон. Сучасною мовою цей закон можна сформулювати так: швидкість зміни імпульсу матеріальної точки рівна діючій на неї силі.

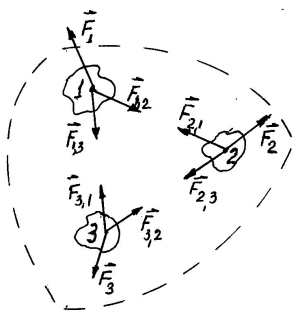


Рисунок 4.1 – Системи матеріальних точок

Розглянемо систему матеріальних точок. Сили з якими матеріальні точки системи взаємодіють між собою, назовемо внутрішніми силами, а сили, які діють на матеріальні точки з боку тіл,

що не входять до складу системи, – зовнішніми силами. На рисунку 4.1 внутрішні сили позначені подвійними індексами,

а зовнішні – одинарними. Для кожної сили F_{ik} знайдеться сила F_{ki} рівна їй за величиною і протилежна за напрямом. Нехай система має n матеріальних точок. Запишемо для кожної з них рівняння (4.2):

$$\begin{aligned}\frac{dp_1}{dt} &= F_{1,2} + F_{1,3} + \dots + F_{1,n} + F_1 = \sum_{k \neq 1} F_{1k} + F_1 \\ \frac{dp_2}{dt} &= F_{2,1} + F_{2,3} + \dots + F_{2,n} + F_2 = \sum_{k \neq 2} F_{2k} + F_2 \\ \frac{dp_n}{dt} &= F_{n,2} + F_{n,3} + \dots + F_{n,n} + F_n = \sum_{k \neq n} F_{n,k} + F_n\end{aligned}$$

Додамо всі рівняння:

$$\sum_i \frac{dp_i}{dt} = \sum_i \sum_{k \neq i} F_{ik} + \sum_i F_i \quad (4.3)$$

Доданок у правій частині $\sum_i \sum_{k \neq i} F_{ik} = 0$, бо це сума всіх внутрішніх сил системи, де кожній силі дії знайдеться сила протидії.

Отже,

$$\sum_i \frac{dp_i}{dt} = \sum_i F_i \quad (4.4)$$

Поміняємо місцями знак похідної і знак суми. $\frac{d}{dt} \sum_i p_i = \sum_i F_i$ і назвемо $\sum_i p_i = p$ імпульсом системи. Тоді:

$$\frac{dp}{dt} = \sum_i F_i \quad (4.5)$$

Швидкість зміни імпульсу системи матеріальних точок дорівнює сумі зовнішніх сил, що діють на цю систему. Якщо система замкнута, то зовнішні сили на систему не діють, отже,

$\sum_i \vec{F}_i = 0$. Тоді $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$, а це означає, що $\vec{p} = \text{const}$. Імпульс замкнутої системи матеріальних точок є величина стала. У цьому полягає **закон збереження імпульсу**.

Закон збереження імпульсу впливає з однорідності простору, яка полягає в тому, що при паралельному переносі в просторі замкнутої системи як цілого, її фізичні властивості і закон руху не змінюються, іншими словами не залежать від вибору початку координат інерціальної системи.

3.2 Центр мас. Теорема про рух центра мас

Центром мас (центром інерції) системи матеріальних точок називається точка простору С, положення якої характеризується розподілом мас цієї систем. Її радіус-вектор рівний:

$$\vec{r}_C = \frac{m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2 + \dots + m_n \cdot \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_i m_i \cdot \vec{r}_i}{m}, \quad (4.6)$$

де $m = \sum_i m_i$ – маса системи.

У декартовій системі координат координати центра мас рівні проєкціям $\vec{r}_C$ на координатні осі:

$$x_C = \frac{\sum_i m_i \cdot x_i}{m}; \quad y_C = \frac{\sum_i m_i \cdot y_i}{m}; \quad z_C = \frac{\sum_i m_i \cdot z_i}{m}. \quad (4.7)$$

Знайдемо швидкість руху центра мас системи:

$$v_c = \frac{dr_c}{dt} = \frac{\frac{d}{dt} \sum_i m_i \cdot r_i}{m} = \frac{\sum_i m_i \frac{dr_i}{dt}}{m} = \frac{\sum_i m_i \cdot v_i}{m}.$$

Враховуємо, що $m_i \cdot v_i = p_i$, а $\sum p_i$ є імпульс системи. Можна

записати: $v_c = \frac{p}{m}$, звідки отримаємо

$$p = mv_c.$$

(4.8)

Імпульс системи матеріальних точок рівний добутку маси системи на швидкість центра мас системи.

Візьмемо похідну по часу від лівої і правої частин рівняння:

$$m \frac{dv_c}{dt} = \frac{dp}{dt}.$$

Оскільки $\frac{dp}{dt} = \sum_i F_i$, де $\sum_i F_i$ – сума всіх зовнішніх сил,

що діють на систему; $\frac{dv_c}{dt} = a_c$ – прискорення центра мас системи.

Отже,

$$ma_c = \sum_i F_i.$$

(4.9)

Центр мас системи рухається так, як рухалась би матеріальна точка, маса якої рівна масі системи, на яку діє сила рівна геометричній сумі всіх зовнішніх сил, що діють на систему. Це і є **теорема про рух центра мас**. Якщо система замкнута, то $\sum F_i = 0$, а отже $a_c = 0$, тобто центр мас

замкнутої системи зберігає стан спокою, або рухається рівномірно і прямолінійно. Внутрішні сили не можуть змінювати рух центра мас системи.

3.3 Робота і потужність

Елементарною роботою dA сили F на нескінченно малому переміщенні dr називається скалярний добуток сили F на переміщення dr .

$$dA = F \cdot dr. \quad (4.10)$$

Розписавши скалярний добуток, одержимо:

$$dA = F|dr|\cos\alpha = Fds\cos\alpha, \quad (4.11)$$

де $ds = |dr|$ – шлях точки прикладання сили за час dt , α – кут між силою F і переміщенням dr .

Якщо $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ – робота сили додатна, якщо $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$

– робота від’ємна, якщо $\alpha = \frac{\pi}{2}$ сила роботи не виконує. Знайти роботу сили на скінченному шляху s можна так, знайти елементарні роботи на ділянках ds , а потім їх додати. Отже,

$$A = \int_L F \cos\alpha ds.$$

(4.12)

Рівняння (4.12) показує, що інтегрування потрібно проводити по кривій L , вздовж якої рухається точка прикладання сили. Якщо рух прямолінійний і сила стала, то робота шукається просто:

$$A = Fs \cos \alpha$$

(4.13)

Робота вимірюється в Джоулях. Джоуль – це робота сили в 1 Н на шляху 1 м, якщо напрям сили і переміщення співпадають.

Величина, яка показує швидкість виконання роботи, називається **потужністю**:

$$N = \frac{dA}{dt}$$

(4.14)

Якщо швидкість виконання роботи стала, то

$$N = \frac{A}{t}$$

(4.15)

Якщо врахувати, що $dA = Fv dt$, бо $dr = v dt$, то з формули (4.14) одержимо:

$$N = \frac{Fv dt}{dt} = Fv = Fv \cos \alpha$$

(4.16)

Потужність вимірюється у Ватах. Один Ват – це потужність, коли робота в 1 Дж виконується за 1 с. Для виконання роботи необхідно витрачати енергію. Енергія – це єдина кількісна міра різних форм руху матерії. Існує два види механічної енергії – кінетична і потенціальна.

3.4 Кінетична енергія

Кінетичною енергією називається енергія механічного руху тіла. Якщо швидкість тіла зростає, то кінетична енергія тіла зростає, а при зменшенні швидкості – зменшується.

Отже, якщо над тілом виконується робота, то кінетична енергія тіла змінюється, і саме робота є мірою зміни енергії

$$dW_k = dA = Fdr = m \frac{dv}{dt} dr = m \frac{dr}{dt} dv = mvdv \quad (4.17)$$

Скалярний добуток $v dv = |v| |dv| \cos \alpha$, де α – кут між векторами v і dv (рис. 4.2).

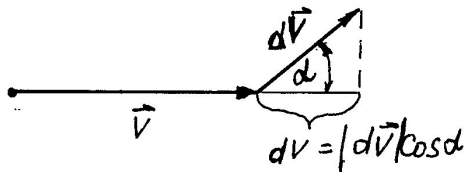


Рисунок 4.2 – Визначення кінетичної енергії тіла

З рисунка видно, що добуток $|dv| \cos \alpha$ рівний проекції вектора dv на напрям швидкості і рівний зростанню швидкості за величиною. Тому позначимо цей добуток через dv .

Отже,

$$|dv| \cos \alpha = dv \quad (4.18)$$

Не слід забувати, що $|dv| = dv$ тільки при прямолінійному русі.

З врахуванням сказаного рівняння (4.17) можна записати:

$$dW_k = mvdv \quad (4.19)$$

Проінтегруємо (4.19):

$$W_k = \int mvdv = \frac{mv^2}{2} + C$$

де C – стала інтегрування, яку знайдемо з початкових умов, які полягають у тому, що коли швидкість рівна нулю – кінетична енергія рівна нулю, звідси випливає:

$$\left. \begin{array}{l} V = 0 \\ W_k = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow C = 0$$

Отже,

$$W_k = \frac{mv^2}{2}$$

(4.20)

Якщо над тілом силою F виконується робота, то

$$A = \int_{v_1}^{v_2} m v dv = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = W_{k2} - W_{k1}$$

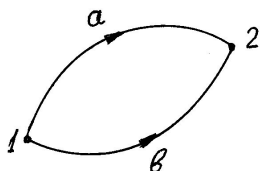
Робота дорівнює зміні кінетичної енергії тіла. Якщо зміна додатна – робота виконується над тілом, якщо зміна кінетичної енергії від’ємна, то тіло виконує роботу, віддаючи свою енергію.

3.5 Потенціальна енергія

Енергія, яка визначається взаємним розташуванням тіл, або частин тіл, і характером сил взаємодії між ними, називається **потенціальною**. Якщо кінетична енергія є енергія руху, то потенціальна енергія – це енергія взаємодії. При зміні взаємного положення тіл змінюються сили взаємодії, а значить змінюється їх потенціальна енергія.

Нехай взаємодія тіл здійснюється за допомогою силових полів. **Силовим полем**

називається частини простору, в кожній точці якої на тіло діє сила певної природи з боку інших тіл, яка змінюється від точки до точки за певним законом.



**Рисунок 4.3 –
Переміщення тіла з
одного положення в інше**

Якщо робота сил, що діють у силовому полі не залежить від того, по якому шляху тіло переміщається з положення 1 в положення 2, а визначається тільки положенням початкової і кінцевої точок переміщення, то такі сили називаються **консервативними**, а поле цих сил – потенціальним полем (рис. 4.3) На рисунку 4.3 показано приклад такого переміщення. Якщо сили консервативні, то робота по шляху $1 \rightarrow 2$ A_{1a2} рівна роботі переміщення по шляху $1 \rightarrow b \rightarrow 2$

$$A_{1a2} = A_{1b2} \quad (4.21)$$

Робота консервативних сил по замкнутому шляху рівна нулю. Дійсно, переведемо тіло з положення 1 в положення 2 по шляху $1 \rightarrow a \rightarrow 2$ і виконаємо роботу A_{1a2} . Потім переведемо тіло з положення 2 в положення 1 по шляху $2 \rightarrow b \rightarrow 1$, виконавши роботу A_{2b1} . Робота $A_{2b1} = -A_{1a2}$, бо в цьому випадку змінюється тільки напрям дії сили, а отже і знак роботи.

Робота по замкнутому шляху:

$$A = A_{1a2} + A_{2b1} = A_{1a2} - A_{1a2} = 0$$

Якщо робота сили залежить від шляху, по якому відбувається переміщення, то сили називаються **дисипативними**. Прикладом дисипативних сил є сили тертя. Робота цих сил по замкнутому шляху відмінна від нуля. Робота переміщення по якійсь кривій з точки 1 в точку 2

рівна криволінійному інтегралу $\int_L \vec{F} d\vec{r} = A$. Інтеграл $\int_1^2 \vec{F} d\vec{r}$, який виражає роботу переміщення з положення 1 в положення 2, визначається виключно початковою і кінцевою точками переміщення. А це означає, що існує деяка величина, різниця

значень якої в початковій і кінцевій точках рівна величині цього інтегралу, тобто роботі переміщення тіла з положення 1 в положення 2. Ця величина називається потенціальною енергією

$$A = \int_1^2 F dr = W_{n1} - W_{n2} = -\Delta W_n \quad (4.22)$$

Пояснимо, чому $A = -(W_{n2} - W_{n1})$, а не $A = W_{n2} - W_{n1}$. Справа в тому, що робота виконана силами поля вважається додатною. У даний час робота виконується завдяки потенціальній енергії, яка при цьому зменшується. Отже, $W_1 - W_2 > 0$, коли робота виконується силами поля і $A = -\Delta W$. Якщо кінетична енергія в усіх випадках має єдину формулу для її визначення, то формула, за якою визначається потенціальна енергія, залежить від того в полі яких сил знаходиться тіло, над яким виконується робота.

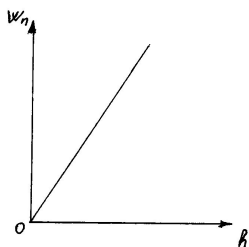
Тіло масою m знаходиться в однорідному полі сили тяжіння поблизу поверхні Землі. На тіло в такому полі діє сила $F = -mg$. Знак мінус вказує на те, що сила діє в напрямі, протилежному до напрямку вертикальної координати z . $dW_n = -dA = -(-mg)dz = mgdz$

$$W_n = \int mgdz = mgz + C,$$

де C – стала інтегрування. Якщо $z = 0$, то $W_n = 0$ звідки $C = 0$. Отже, $W_n = mgz$. На практиці замість z пишуть висоту тіла над поверхнею Землі h . Тому

$$W_n = mgh \quad (4.23)$$

Залежність W_n від h дана на рисунку 4. 4.



**Рисунок 4.4 –
Залежність
потенціальної енергії
від висоти тіла над
поверхнею Землі**

Розглянемо енергію деформованої пружини. За законами Гука $F_{np} = -kx$, де k – коефіцієнт пружності, x – абсолютна деформація. Тоді і потенціальна енергія

$$dW = -dA = -(-kx)dx = kx dx$$

$$W = \int kx dx = \frac{kx^2}{2} + C.$$

Сталу інтегрування визначимо з умови, що для недеформованої пружини, коли $x = 0$, енергія рівна нулю, звідси $C = 0$.

Отже, енергія деформованої пружини

$$W_n = \frac{kx^2}{2}.$$

(4.24)

3.6 Закон збереження і перетворення механічної енергії

Нехай маємо систему матеріальних точок, між якими діють тільки консервативні сили. Розглянемо і-ту матеріальну точку, яка переміщується під дією внутрішніх сил системи. Ці сили виконують над цією матеріальною точкою елементарну роботу dA , яка іде на зміну її кінетичної енергії

$$dA_i = dW_{ki} \quad (4.25)$$

З іншого боку, ця робота рівна зміні потенціальної енергії точки зі знаком мінус.

$$dA_i = -dW_{ni} \quad (4.26)$$

Прирівняємо праві частини рівнянь (4.25) і (4.26)

$$dW_{ki} = -dW_{ni},$$

або

$$dW_{ki} + dW_{ni} = 0$$

Знайдемо ці суми для всіх матеріальних точок системи і додамо їх:

$$\sum_i (dW_{ki} + dW_{ni}) = 0$$

Замінімо місцями знак суми і знак диференціалу:

$$d \sum_i (W_{ki} + W_{ni}) = 0$$

Вираз під знаком суми є сумарною енергією кінетичних і потенціальних енергій всіх матеріальних точок системи і називається **повною механічною енергією системи** W . Таким чином: $dW = 0$. Якщо диференціал якоїсь величини дорівнює нулю, то вона є сталою. Звідси маємо: механічна енергія замкнутої системи, в якій діють тільки консервативні сили, є величина стала. У цьому полягає **закон збереження механічної енергії**. Закон збереження механічної енергії є частинним випадком закону збереження і перетворення енергії, який є фундаментальним законом природи, згідно з яким енергія ніколи не зникає і не виникає, вона лиш перетворюється з одного виду в інший.

Контрольні запитання

1. У чому відмінність між поняттями енергії і роботи?
2. Які є види енергії?
3. У чому полягає закон збереження механічної енергії?
4. У чому полягає відмінність між консервативною і дисипативною силами?

5 ДИНАМІКА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА

5.1 Момент сили. Основне рівняння динаміки обертального руху

Щоб обернути тіло навколо якоїсь осі обертання, потрібно до тіла прикласти силу. Кутове прискорення, яке при цьому виникає, буде показувати, як швидко виходить тіло зі стану спокою. Величина кутового

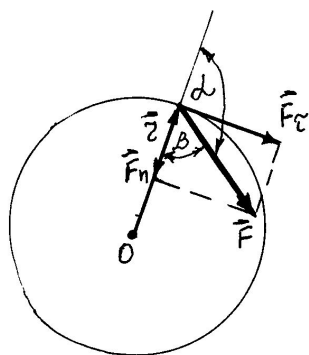


Рисунок 5.1 – Рух матеріальної точки, яка утримується на колі радіусом r за допомогою будь-якого зв'язку

прискорення, як показує дослід, залежить не тільки від величини сили, але й від точки прикладання сили і її напрямку. Зокрема, якщо лінія дії сили проходить через вісь обертання, то тіло взагалі обертатися не буде. З іншого боку, кутове прискорення при всіх інших рівних умовах залежить не тільки від маси тіла, але й від розподілу мас у цьому тілі. Тому для описання обертального руху твердого тіла потрібно вводити нові величини, а саме момент сили і

момент інерції.

Для того щоб зрозуміти зміст понять моменту сили і моменту інерції, розглянемо спочатку рух одної матеріальної точки з масою m , яка утримується на колі радіусом r за допомогою будь-якого зв'язку (рис. 5.1). Нехай на точку діє стала за величиною сила F , тоді точка набуває сталого

тангенціального прискорення a_τ , яке визначається тангенціальною складовою сили:

$$F_\tau = F \sin \beta = ma_\tau. \quad (5.1)$$

Нормальна складова сили F разом з реакцією зв'язку створює нормальне прискорення. Введемо кутове прискорення і зауважимо, що $\sin \alpha = \sin \beta$, тому що $\alpha + \beta = \pi$. Тоді рівність (5.1) заміниться виразом:

$$F \sin \alpha = m\varepsilon \cdot r.$$

Помножимо ліву і праву частини цього виразу на r , одержимо:

$$F \cdot r \sin \alpha = m\varepsilon \cdot r^2. \quad (5.2)$$

Зліва в цій рівності стоїть величина сили, радіус r , який показує, як далеко від точки обертання прикладена сила і $\sin \alpha$, який враховує напрям дії сили. Тому добуток у лівій частині (5.2) називають моментом сили відносно точки О

$$M = F \cdot r \sin \alpha. \quad (5.3)$$

З формули (5.3), момент сили відносно точки О можна представити як векторний добуток сили F і радіус-вектора r . Напрямок вектора M повинен співпадати з напрямком кутового прискорення. Отже,

$$\vec{M} = \vec{r} \cdot \vec{F}. \quad (5.4)$$

Моментом сили відносно точки простору О називається векторний добуток радіус вектора r , проведеного з точки О до точки прикладання сили, на вектор F . Величина $r \sin \alpha = l$, l – найкоротша відстань від точки О до лінії дії сили. Тому

$M = F \cdot l$. Момент сили дорівнює добутку сили на плече, де l – плече сили.

$$I = m \cdot r^2. \quad (5.5)$$

Добуток mr^2 називають **моментом інерції матеріальної точки** відносно осі, що проходить через точку O , яка є центром обертання.

$$M = I\varepsilon. \quad (5.6)$$

Рівняння (5.6) носить назву **основного рівняння динаміки обертального руху** для матеріальної точки.

4.2 Момент імпульсу

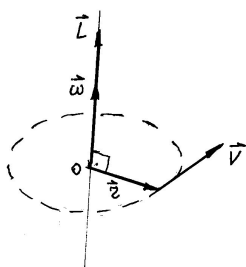
Моментом імпульсу матеріальної точки відносно заданої точки простору O називається векторний добуток радіус-вектора r , проведеного з точки O до матеріальної точки, на імпульс P цієї точки.

$$L = r \cdot p. \quad (5.7)$$

Для частинного випадку обертального руху матеріальної точки формулу (5.7) можна перетворити так:

$$L = [r m v] = m[r[\omega r]] = m\omega(rr) - r(r\omega)m. \quad (5.8)$$

Перший доданок у формулі (5.8) рівний $mr^2\omega$, а другий $mr(r\omega) = 0$ бо $\cos(r\omega) = 0$ (рис. 5.2).



**Рисунок 5.2 –
Момент імпульсу**

$$L = I\omega \quad (5.9)$$

Візьмемо похідну від лівої і правої частин рівності (5.9):

$$\frac{dL}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = I\varepsilon = M \quad (5.10)$$

Рівняння $\frac{dL}{dt} = M$, як і рівняння (5.6), називають **основним рівнянням динаміки обертального руху матеріальної точки**.

Зіставимо рівняння динаміки поступального і обертального рухів (таблиця 5.1)

Таблиця 5.1 – Рівняння динаміки поступального і обертального рухів

Поступальний рух	Обертальний рух
v - лінійна швидкість	ω - кутова швидкість
a - прискорення	ε - кутове прискорення
m - маса	$I = mr^2$ - момент інерції
$p = mv$ - імпульс	$L = I\omega$ - момент імпульсу
F - сила	M - момент сили
$F = ma$	$M = I\varepsilon$
$\frac{dp}{dt} = F$	$\frac{dL}{dt} = M$

4.3 Закон збереження моменту імпульсу

Момент імпульсу твердого тіла відносно заданої осі обертання рівний сумі моментів імпульсів всіх матеріальних точок відносно цієї осі обертання.

$$L_z = \sum_i m_i r_i^2 \omega_z = \omega_z \sum_i m_i r_i^2,$$

оскільки $\sum_i m_i r_i^2 = I$, то одержимо

$$L_z = I \omega_z. \quad (5.11)$$

Момент імпульсу твердого тіла відносно заданої осі обертання рівний добутку моменту інерції тіла відносно даної осі на кутову швидкість.

Розглянемо замкнуту систему матеріальних точок

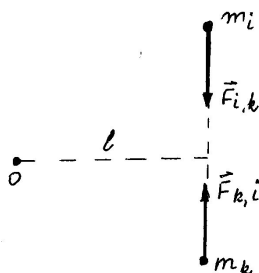


Рисунок 5.3 – Замкнута система матеріальних точок, на яку діють внутрішні і зовнішні сили

(тверде тіло так само можна розглядати як систему матеріальних точок). На цю систему діють сили зовнішні і внутрішні. Сумарний момент відносно точки О всіх внутрішніх сил, що діють на точки системи, рівний нулю. Дійсно, сили з якими взаємодіють одна з одною дві будь-які матеріальні точки, лежать на одній прямій (рис. 5.3). Їхні

моменти відносно довільної точки О рівні за величиною і протилежні за знаком:

$$F_{ik} l = -F_{ki} l.$$

Тому сума моментів всіх внутрішніх сил системи матеріальних точок (твердого тіла) рівна нулю. Це твердження

справедливе як для суми моментів відносно точки, так і для суми моментів відносно будь-якої осі.

Розглянемо довільну матеріальну точку системи. Для неї можна записати:

$$\frac{dL_i}{dt} = \frac{d}{dt} [r_i p_i] = \left[\frac{dr_i}{dt} p_i \right] + \left[r_i \frac{dp_i}{dt} \right] \quad (5.12)$$

Перший доданок у правій частині рівний нулю

$$\left[\frac{dr_i}{dt} p_i \right] = [v_i v_i] m = m v_i v_i \sin 0 = 0$$

Другий доданок розпишемо так:

$$\left[r_i \frac{dp_i}{dt} \right] = \vec{r}_i \left(\sum_{k \neq i} \vec{F}_{ik} + \vec{F}_i \right),$$

де $\sum_{k \neq i} \vec{F}_{ik}$ – це сума всіх внутрішніх сил, що діють на дану точку, а $\vec{F}_i$ – це зовнішня сила, що діє на цю точку. Останню рівність можна записати так:

$$\left[r_i \frac{dp_i}{dt} \right] = \sum_{i \neq k} [r_i F_{ik}] + r_i F_i = \sum_{i \neq k} M_{ik} + M_i$$

Отже, рівняння (5.12) має вигляд:

$$\frac{dL_i}{dt} = \sum_{i \neq k} M_{ik} + M_i \quad (5.13)$$

Складемо такі рівняння для всіх матеріальних точок системи і додамо їх почленно, одержимо:

$$\sum_i \frac{dL_i}{dt} = \sum_i \sum_{k \neq i} M_{ik} + \sum_i M_i \quad (5.14)$$

$$\sum_i \sum_{k=i}^n M_{ik} = 0$$

Сума $\sum_i \sum_{k=i}^n M_{ik}$, бо це сума всіх внутрішніх моментів сил системи. У лівій частині поміняємо місцями знаки суми і похідної:

$$\sum_i \frac{dL_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i L_i = \frac{dL}{dt},$$

де $\sum_i L_i = L$ – момент імпульсу системи.

Отже,

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i M_i. \quad (5.15)$$

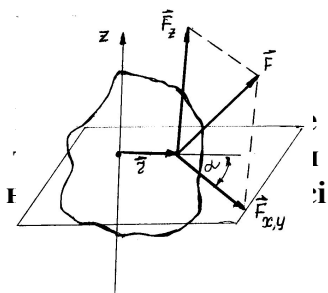
Якщо система замкнута, то $\sum_i M_i = 0$ і тоді рівняння (5.15)

набирає вигляду: $\frac{dL}{dt} = 0$, а значить $L = \text{const}$.

Отже, момент імпульсу замкнутої системи відносно заданої точки (осі) є величина стала. У цьому полягає **закон збереження моменту імпульсу**.

4.4 Момент інерції твердого тіла

Рівняння обертального руху твердого тіла аналогічні рівнянням, які описують обертання матеріальної точки. Нехай ми маємо тверде тіло, яке обертається навколо



нерухомої осі z під дією сили F (рис. 5.4). Проведемо площину перпендикулярну до осі z , так щоб вона проходила через точку прикладання сили O . Розкладемо силу F на дві складові F_z і $F_{x,y}$, де складова F_z паралельна до осі z і тому викликати обертання навколо неї не може. Складова сили F_{xy} викликає обертання.

Тому момент сили $F_{x,y}$ відносно осі z можна записати як векторний добуток радіус вектора проведеного в площині xy від осі до точки прикладання сили на величину складової сили F_{xy}

$$M_z = r \cdot F_{xy} \quad (5.16)$$

Слід зауважити, що момент сили відносно осі обертання є скалярна величина, але у випадку, коли вісь обертання фіксована, момент сили можна розглядати як вектор.

Основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла навколо фіксованої осі z має вигляд

$$M_z = I_z \cdot \varepsilon, \quad (5.17)$$

де I_z – момент інерції тіла відносно осі z .

Моментом інерції твердого тіла відносно заданої осі обертання називається сума добутків мас матеріальних точок на квадрат їх віддалей до осі обертання

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \quad (5.18)$$

Наведемо моменти інерції деяких тіл.

Момент інерції тонкостінного циліндра радіуса R відносно осі симетрії:

$$I = mR^2 \quad (5.19)$$

Момент інерції суцільного циліндра відносно осі циліндра:

$$I = \frac{1}{2} mR^2 \quad (5.20)$$

Момент інерції кулі відносно осі, що проходить через центр кулі:

$$I = \frac{2}{5} mR^2 \quad (5.21)$$

Момент інерції стержня довжиною l відносно осі, що проходить через край стержня перпендикулярно до нього :

$$I = \frac{1}{3} ml^2 \quad (5.22)$$

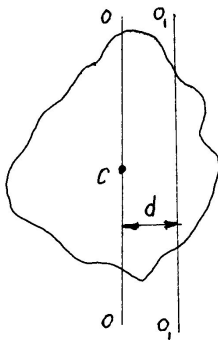


Рисунок 5.5 – Теорема Штейнера

Якщо вісь не проходить через центр мас, то для знаходження моменту інерції відносно неї в деяких випадках можна скористатись **теоремою Штейнера**: момент інерції відносно довільної осі обертання (O_1O_1) (рис. 5.5) рівний сумі моменту інерції відносно осі (OO), що проходить через центр мас тіла (C) паралельно даній, і добутку маси тіла на

квадрат віддалі d між осями

$$I_{O_1O_1} = I_{OO} + md^2 \quad (5.23)$$

4.5 Вільні осі обертання. Гіроскоп

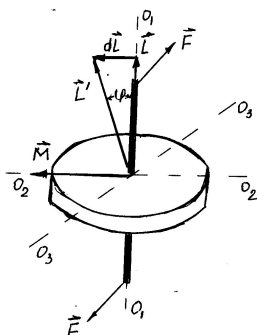


Рисунок 5.6 – Ефект гіроскопа

Вільні осі обертання (головні осі інерції) — це осі, які не змінюють своєї орієнтації в просторі при відсутності дії на тіло зовнішніх моментів сил. У будь-якому тілі існує три вільні осі, вони є взаємно перпендикулярні і проходять через центр мас. Моменти інерції тіла відносно головних осей інерції в загальному випадку

різні $I_1 \neq I_2 \neq I_3$. Для тіла з осьовою симетрією два головних моменти інерції мають однакову величину, а третій відмінний від них $I_1 = I_2 \neq I_3$. Для кулі будь-яка вісь, що проходить через центр кулі буде головною віссю інерції. В цьому випадку $I_1 = I_2 = I_3$. Тіла, в яких $I_1 = I_2 = I_3$ називають **кульовими дзигами**; тіла, для яких $I_1 = I_2 \neq I_3$ - **симетричними дзигами**; тіла, для яких $I_1 \neq I_2 \neq I_3$ - **асиметричними дзигами**.

Вільні осі, відносно яких моменти інерції мають екстремальні значення, є осями стійкого обертання, а вісь з проміжним значенням моменту інерції є віссю нестійкого обертання.

Властивість головних осей інерції зберігати своє положення в просторі знайшло застосування в гіроскопах.

Гіроскоп – масивне однорідне тіло, що обертається з великою кутовою швидкістю навколо осі симетрії, що є вільною віссю. Для гіроскопа характерний ефект, який полягає в наступному: якщо гіроскоп обертається, навколо осі

(O_1O_1) (рис. 5.6) і ми хочемо обернути його навколо осі (O_2O_2) прикладаючи пару сил F_iF , то гіроскоп повертається навколо третьої осі (O_3O_3), яка є перпендикулярною до перших двох. Пояснити таку поведінку гіроскопа можна так. Гіроскоп обертається навколо осі (O_1O_1) має момент імпульсу L . Ми прикладемо пару сил FF , створюючи момент пари сил M напрямлений вздовж осі (O_2O_2), тим самим створюємо момент імпульсу $dL = Mdt$ напрямлений вздовж осі (O_2O_2). Тоді сумарний момент імпульсу буде $L' = L + dL$. Як видно з рисунку, гіроскоп при цьому повертається на кут φ відносно осі (O_3O_3) і намагається при тривалій дії пари сил знайти таке положення, щоб напрям моменту пари сил M співпав з напрямом моменту імпульсу гіроскопу L' , а якщо це з якихось причин неможливо, то щоб кут між віссю обертання гіроскопа і напрямом моменту M був мінімальний.

Автопілоти керують рухом літаків за допомогою гіроскопів. Взагалі гіроскопічні ефекти потрібно враховувати так як вони можуть бути і шкідливими. Так при конструкції підшипників турбін на кораблях і реактивних літаках потрібно враховувати гіроскопічні сили, які виникають при поворотах і які бувають досить значними.

4.6 Кінетична енергія обертального руху твердого тіла

Щоб знайти енергію тіла, що обертається досить знайти суму кінетичних енергій всіх матеріальних точок цього тіла. Всі точки мають однакову кутову швидкість, тому для довільної точки тіла, що обертається, можна записати:

$$W_{ki} = \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{m_i (\omega r_i)^2}{2} = \frac{m_i r_i^2 \omega^2}{2}$$

Додамо енергії всіх матеріальних точок тіла

$$W_k = \sum_i W_{ki} = \sum_i \frac{m_i r_i^2 \omega^2}{2}$$

Винесемо $\frac{\omega^2}{2}$ за знак суми

$$W_k = \frac{\omega^2}{2} \sum_i m_i r_i^2$$

, але $\sum_i m_i r_i^2 = I$ – момент інерції відносно заданої осі обертання. Тому

$$W_k = \frac{I \omega^2}{2} \quad (5.24)$$

Якщо тіло котиться, обертаючись відносно центра мас, то його кінетична енергія рівна енергії обертального і поступального рухів:

$$W_k = \frac{m v^2}{2} + \frac{I \omega^2}{2} \quad (5.25)$$

де v – швидкість поступального руху центра мас.

4.7 Неінерціальні системи відліку. Сили інерції в системі, яка рухається прямолінійно

Будь-яка система відліку, яка рухається з прискоренням відносно інерціальної системи відліку, називається **неінерціальною системою** відліку. У такій системі закони Ньютона не виконуються.

Розглянемо приклади. Система рухається поступально відносно інерціальної системи відліку з прискоренням a . Будь-яке тіло, яке знаходиться в спокої відносно інерціальної системи K , відносно неінерціальної системи K' буде переміщуватись з прискоренням $-a$ (рис. 5.7).

З точки зору спостерігача, який перебуває в системі K'' , на тіло A діє якась сила, яка надає тілу прискорення. У той самий час будь-яка сила є результатом взаємодії тіл. Але як би ми не шукали тіло, яке, діючи на тіло A , надає йому прискорення $-a'$, знайти його неможливо. Тому величину

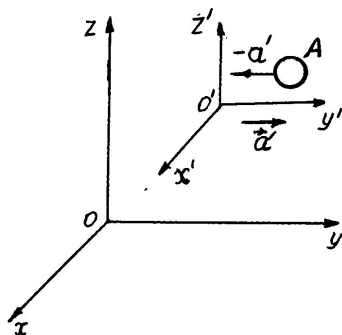


Рисунок 5.7 – Неінерціальна система відліку

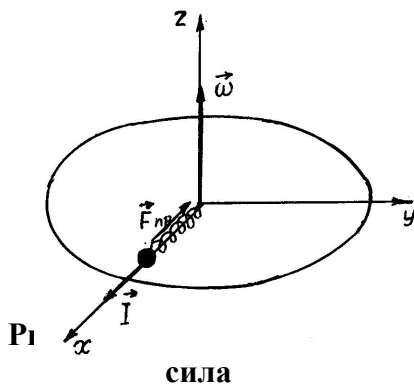
$$I = -ma' \quad (5.26)$$

називають **силою інерції**. Якщо ввести силу інерції, то другий закон Ньютона в неінерціальній системі відліку буде мати вигляд $F + I = ma$, де F – сила, що діє на

тіло A в неінерціальній системі відліку, I – сила інерції, a – прискорення тіла відносно неінерціальної системи відліку.

5.8 Сили інерції, що діють на нерухоме тіло в обертальній системі. Відцентрова сила інерції

Нехай тіло перебуває в спокої відносно системи відліку, яка обертається з кутовою швидкістю ω .



Розглядаємо диск, що обертається навколо перпендикулярної до нього осі z' з кутовою швидкістю ω . Разом з диском обертається настромлена на

спицю кулька, прикріплена до центра диску пружиною (рис. 5.8). Кулька при обертанні займає таке положення на спиці, при якому сила натягу пружини забезпечить доцентрове прискорення $\omega^2 r$ і буде рівною $F = m\omega^2 r$.

Спостерігачеві, який перебуває в системі відліку, пов'язаній з диском здається, що кулька знаходиться в спокої, але розтягує пружину. Тому спостерігачеві в системі K' здається, що на кульку діє сила, напрямлена по радіусу від центра.

$$\vec{I} = -\vec{F}, \quad (5.27)$$

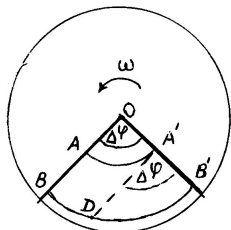
або в скалярній формі:

$$I = -m \cdot \omega^2 \cdot r. \quad (5.28)$$

Цю силу називають **відцентровою силою інерції**.

4.9 Сили Коріоліса

Нехай тіло рухається зі сталою швидкістю v відносно системи, що обертається з постійною кутовою швидкістю ω . Спочатку розглянемо випадок, коли тіло має швидкість напрямлену вздовж радіуса диска. Якби диск був нерухомий, тіло перемістилось би за час Δt з точки A в точку B . Якби тіло було нерухоме, а диск обертався з кутовою швидкістю ω , то за час Δt диск повернувся би на кут $\Delta\varphi$, і тіло опинилось би в точці A' . Оскільки тіло рухається зі швидкістю v , а диск обертається, то тіло бере участь у двох рухах і опиниться в точці D .



**Рисунок 5.9 – Сила
Коріоліса**

Спостерігач, який знаходиться в неінерціальній системі (на диску) сподівається, що тіло повинно перейти в точку B' . Тому той факт, що тіло опиниться в точці D , він може пояснити тільки дією якоїсь сили, яка викривила його “прямолінійний” рух вздовж радіуса і примусила пройти додатковий шлях $B'D = s$. Знайдемо цей шлях. $s = \Delta\varphi A'B'$, $A'B' = v\Delta t$, де v – швидкість руху тіла, а Δt – час руху. Отже, $s = \Delta\varphi v\Delta t$. При рівномірному обертанні $\Delta\varphi = \omega\Delta t$. Тому:

$$s = \omega v(\Delta t)^2. \quad (5.29)$$

Якщо пройдений шлях пропорціональний квадрату часу,

то рух рівноприскорений. Отже, $s = \frac{at^2}{2}$ і $s = \omega v\Delta t^2$.

Прирівнявши праві частини цих рівнянь, одержимо:

$$a = 2v\omega. \quad (5.30)$$

Отже, спостерігачеві в інерціальній системі координат

буде здаватись, що на тіло діє додаткова сила $F = m2\omega v$, яка переміщує тіло в точку D .

Ця сила є інерціальною і носить назву сили Коріоліса. У векторній формі **сила Коріоліса** запишеться так:

$$F_k = m2[v\omega] \quad (5.31)$$

Рівняння (5.31) справедливе в усіх випадках, коли тіло рухається в системі координат, що обертається.

Сила Коріоліса проявляється при рухах по поверхні Земної кулі.

Наприклад, при русі вздовж меридіану в будь-якому напрямі (на північ, чи на південь) сила Коріоліса напрямлена по відношенню до напрямку руху вправо в північній кулі і вліво в південній. Це приводить до того, що в річках

підмивається правий берег в північній півкулі і лівий у південній, якщо ріки течуть в меридіальному напрямі. Цим же пояснюється і неоднаковий знос рейок при двоколійному русі.

Дією сили Коріоліса пояснюється відхилення падаючих тіл на схід.

Контрольні запитання

1. Що називається моментом сили?
2. Як формулюється основне рівняння динаміки обертального руху?
3. Що таке момент імпульсу?
4. Сформулюйте закон збереження моменту імпульсу.
5. Сформулюйте теорему Штейнера.
6. Що таке гіроскопи?

6 МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ ТА ХВИЛІ

6.1 Гармонічні коливання. Диференціальне рівняння коливань

Коливаннями називають процеси (рухи або зміни стану), що **повторюються з часом**. Характерною особливістю коливань є їхня періодичність, тобто повторюваність через рівні проміжки часу, які називаються **періодом коливального руху**.

Залежно від фізичної природи коливального руху розрізняють: механічні коливання (коливання

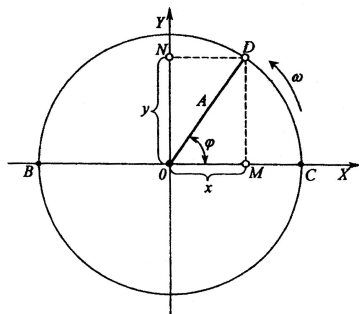


Рисунок 6.1 – Гармонічний рух матеріальної точки по колу

маятників, частин машин і механізмів, будинків, мостів та інших споруд, тиску повітря при поширенні в ньому звуку); електромагнітні (коливання змінного струму в колі); електромеханічні (коливання мембрани телефону) та інші.

Коливання називаються **гармонічними**, якщо фізична величина, яка їх характеризує, змінюється з часом за законом синуса або косинуса.

Основні характеристики гармонічного коливання встановимо з допомогою моделі, яка являє собою матеріальну точку D, що рівномірно обертається по колу радіуса A з кутовою швидкістю ω (рис. 6.1).

Проекція точки D (наприклад, на вісь OX) здійснюватиме гармонічні коливання. Запишемо залежність координати x точки M від часу t. З рисунка маємо

$$x = A \cos \varphi = A \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (6.1)$$

де x – зміщення коливальної точки від положення рівноваги; A – максимальне зміщення коливальної точки від положення рівноваги, яке називають **амплітудою** коливань; φ_0 – початкова фаза; $\varphi = \omega t + \varphi_0$ – **фаза коливань**, яка визначає зміщення коливальної точки в будь-який момент часу t; ω – циклічна або колова частота коливань. Період коливань точки

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (6.2)$$

Кількість коливань за одиницю часу називають **частотою**.

$$\nu = \frac{1}{T}. \quad (6.3)$$

Період коливань вимірюють у секундах (с), а частоту – у герцах (Гц).

Проекція точки D на вісь OY, тобто точки N (рис. 6.1), також здійснює гармонічні коливання за законом

$$y = A \sin \omega t = A \sin(\omega t + \varphi_0) = A \cos \left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2} \right). \quad (6.4)$$

Знайдемо швидкість точки, яка коливається, як похідну зміщення за часом

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi_0) = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}). \quad (6.5)$$

Прискорення коливальної точки знайдемо як похідну від швидкості за часом

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi_0) = \omega^2 A \cos(\omega t + \pi). \quad (6.6)$$

З рівнянь (6.5) і (6.6) видно, що швидкість і прискорення при гармонічних коливаннях змінюються з такою самою частотою як і зміщення, але зсунуті по фазі відповідно на $\pi/2$ і π .

Розглянемо прямолінійні гармонічні коливання матеріальної точки масою m вздовж осі координат OX під дією пружини (рис. 6.2). Тертям і масою пружини нехтуємо.

При зміщенні матеріальної точки від положення рівноваги на величину x на неї діятиме сила пружності

$$F = -kx, \quad (6.7)$$

де k – коефіцієнт пружності пружини.

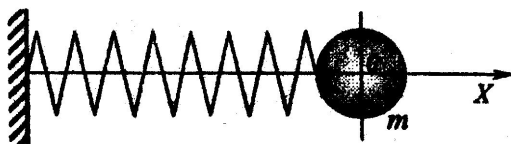


Рисунок 6.2 – Коливання матеріальної точки під дією пружних сил

На основі другого закону Ньютона запишемо

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

або

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad (6.8)$$

де $\omega^2 = \frac{k}{m}$.

Оскільки коефіцієнт ω^2 додатний, то рівняння (6.8) – **диференціальне рівняння вільних коливань**. Його розв'язком є функція (6.1).

Циклічна частота і період вільних або власних коливань дорівнюють відповідно:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (6.9)$$

Щоб тіло здійснювало гармонічні коливання, на нього не обов'язково повинна діяти пружна сила. Потрібно, щоб при зміщенні тіла від положення рівноваги сила, яка діє на нього, змінювалась за законом (6.7). Такі сили називають **квазіпружними**.

Повна енергії вільних коливань з часом залишається сталою і складається з кінетичної і потенціальної енергій

$$E = E_k + E_n, \quad (6.10)$$

де

$$E_k = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi_0), \quad (6.11)$$

а

$$E_n = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \phi_0), \quad (6.12)$$

бо потенціальна енергія визначається за такою ж формулою,

як і потенціальна енергія деформованої пружини, оскільки вільні коливання відбуваються під дією сил, які подібні до пружних сил.

Вирази (6.11) і (6.12) перепишемо у такому виді:

$$E_k = \frac{1}{4} m \omega^2 A^2 [1 - \cos(2\omega t - 2\varphi_0)] \quad (6.13)$$

$$E_n = \frac{1}{4} m \omega^2 A^2 [1 + \cos(2\omega t - 2\varphi_0)] \quad (6.14)$$

Кінетична і потенціальна енергії матеріальної точки періодично змінюється від 0 до $\frac{1}{2} m \omega^2 A^2$, виконуючи гармонічні коливання з циклічною частотою 2ω і амплітудою $\frac{1}{4} m \omega^2 A^2$ біля середнього значення $\frac{1}{4} m \omega^2 A^2$.

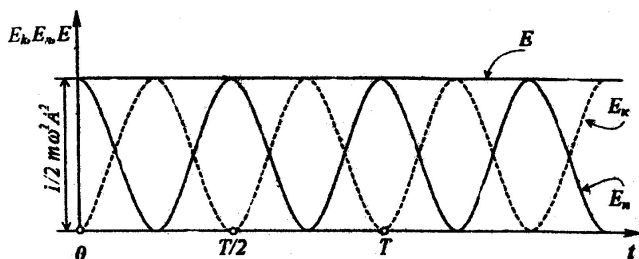


Рисунок 6.3 – Залежність кінетичної, потенціальної і повної енергії гармонічних коливань від часу

Коливання кінетичної і потенціальної енергій зсунуті по фазі на π , тому повна механічна енергія матеріальної точки не змінюється при гармонічних коливаннях:

$$E = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \quad (6.15)$$

Графіки залежностей E_k , E_n і E від часу t для випадку $\varphi_0 = 0$ наведено на рисунку 6.3.

6.2 Додавання коливань. Биття. Фігури Ліссажу

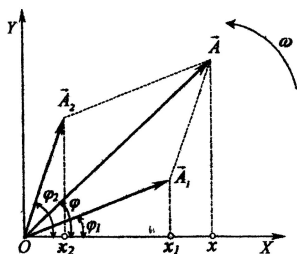


Рисунок 6.4 – Додавання гармонічних коливань однакових частот

Під додаванням коливань розуміють знаходження закону результуючих коливань системи у тих випадках, коли ця система бере участь одночасно в декількох коливальних рухах.

Розрізняють два граничні випадки:

- 1) додавання коливань однакового напрямку;
- 2) додавання взаємно перпендикулярних коливань.

Знайдемо рівняння руху тіла, яке бере участь у двох однаково напрямлених гармонічних коливальних рухах з однаковими частотами, застосувавши метод векторних діаграм (рис. 6.4):

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \quad (6.16)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2). \quad (6.17)$$

Оскільки вектори $\vec{A}_1$ і $\vec{A}_2$ обертаються з однаковою кутовою швидкістю ω , то зсув фаз між ними $(\varphi_2 - \varphi_1)$ з часом не змінюється і результуючий вектор $\vec{A}$ також здійснюватиме обертання з кутовою швидкістю ω , а тому результуюче коливання також буде гармонічним і його рівняння матиме такий вигляд:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (6.18)$$

де A – амплітуда результуючого коливання, φ – початкова

фаза.

Знайдемо A і φ , скориставшись рисунком 6.4:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}, \quad (6.19)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \quad (6.20)$$

Коливання можна додавати і аналітично. Розглянемо окремий випадок додавання однаково напрямлених коливань з різними частотами:

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos(\varphi_1 t + \varphi_1), \\ x_2 &= A_2 \cos(\varphi_2 t + \varphi_2). \end{aligned} \quad (6.21)$$

Для спрощення припустимо, що $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_0$ і $A_1 = A_2 = A_0$. Тоді результуюче зміщення

$$x = x_1 + x_2 = 2A_0 \cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} t + \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} t + \varphi_0, \quad (6.22)$$

тобто коливання буде негармонічним, тому що амплітуда результуючого коливання періодично змінюється з часом:

$$A = 2A_0 \cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} t + \varphi_0. \quad (6.23)$$

Оскільки період модуля косинуса дорівнює π , то період зміни амплітуди

$$T = \frac{2\pi}{\varphi_2 - \varphi_1}. \quad (6.24)$$

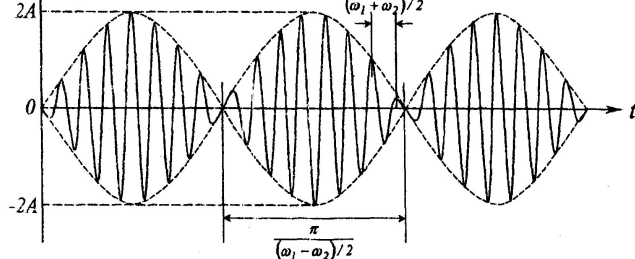


Рисунок 6.5 – Залежність зміщення гармонічних коливань від часу t при биттях

У випадку, коли частоти коливань ω_1 і ω_2 за величиною мало відрізняються, виникає явище **биття** і результуюче коливання буде періодичним коливанням з пульсуючою амплітудою і кутовою частотою, що дорівнює середньому арифметичному значенню частот складових коливань

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

. Характер залежності x від часу t при биттях показано на рисунку 6.5.

Явищем биття користуються настроювачі музичних інструментів, які судять про точне співпадання частоти струни з частотою еталонного джерела звуку (камертона) по зникненню биттів. Додавання коливань з близькими частотами застосовують також у радіоприймачах, які називаються гетеродинами.

Розглянемо випадок додавання двох взаємно перпендикулярних коливань, частоти яких однакові. Рівняння коливань відносно координатних осей OX і OY матимуть такий вигляд:

$$\begin{aligned} x &= A \cos(\omega t + \varphi_1), \\ y &= B \cos(\omega t + \varphi_2). \end{aligned} \quad (6.25)$$

Щоб знайти рівняння траєкторії результуючого коливального руху треба з (6.25) виключити час t . Зробимо це для декількох значень початкових фаз.

а) Різниця фаз дорівнює нулю, тобто $\varphi_2 = \varphi_1$. Тоді

$$\frac{x}{y} = \frac{A}{B}; \quad y = \frac{B}{A}x, \quad (6.26)$$

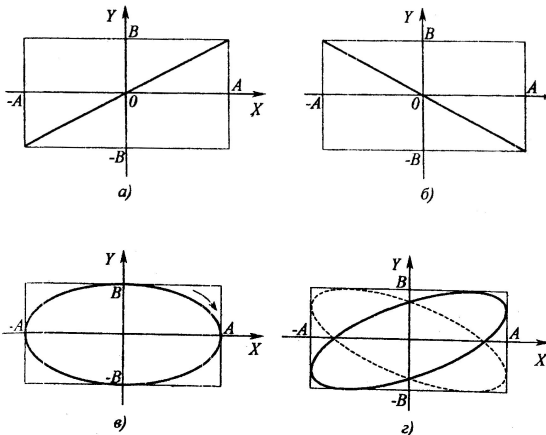
тобто траєкторією результуючого руху є пряма лінія – діагональ прямокутника зі сторонами $2A$ (по осі OX) і $2B$ (по осі OY) (рис. 6.6,а).

б) Нехай $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi$. У цьому випадку косинуси будуть відрізнятися знаком, і ми аналогічно отримаємо:

$$y = -\frac{B}{A}x, \quad (6.27)$$

тобто траєкторія буде другою діагоналлю прямокутника (рис. 6.6,б).

в) Різниця фаз дорівнює $\pi/2$, тобто $\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$. Траєкторію знайдемо таким способом:



**Рисунок 6.6 – Траєкторія руху тіл
при додаванні двох взаємно
перпендикулярних коливань**

$$\frac{x}{A} = \cos(\omega_1 t + \varphi_1),$$

$$\frac{y}{B} = \cos(\omega_1 t + \varphi_1 + \frac{\pi}{2}) = -\sin(\omega_1 t + \varphi_1).$$

Піднесемо до квадрату і додавши почленно, дістанемо

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = \cos^2(\omega_1 t + \varphi_1) + \sin^2(\omega_1 t + \varphi_1) = 1$$

або

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1, \quad (6.28)$$

отже, траєкторією буде еліпс (рис. 6.6,в). При $A = B$ траєкторія перетворюється в коло.

г) При $\varphi_2 = \varphi_1 - \pi/2$ траєкторія залишиться такою ж самою, але зміниться напрям обходу.

У випадку довільних значень φ_1 , і φ_2 , а точніше, їх різниці, траєкторія буде також еліпсом (подібним одному із показаних на рис. 6.6,г), вписаним у той самий прямокутник, тому що x і y завжди змінюються у межах $-A \leq x \leq A$, $-B \leq y \leq B$.

Більш складні траєкторії отримують при додаванні коливань з кратними частотами ($\omega_1 = n\omega_2$, n – правильний дріб). У даному випадку результуючі коливання носять назву **фігур Ліссажу**.

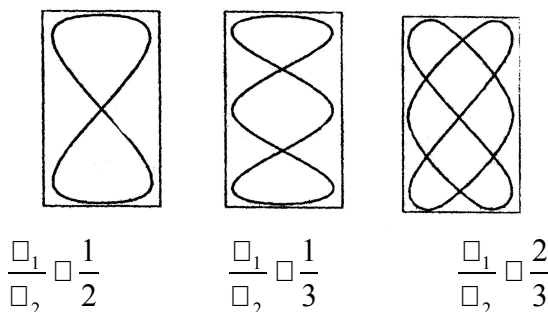
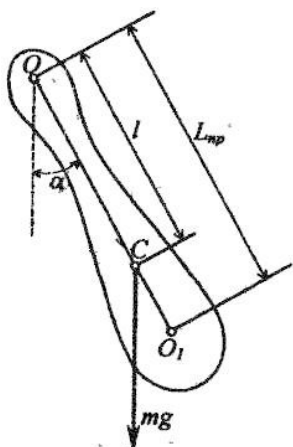


Рисунок 6.7 – Фігури Ліссажу

За формою замкненої кривої визначають, у скільки разів одна частота більша за другу (рис. 6.7 для $\omega_2 - \omega_1 = \pi/2$), тому що відношення числа точок дотикання фігур до відповідних сторін прямокутника збігається з відношенням частот складових коливань.

6.3 Математичний, пружинний та фізичний маятники

Прикладом гармонічних коливань може бути коливання маятника при малих кутових відхиленнях від положення рівноваги.



Маятником

називають тіло, що коливається під дією сили тяжіння $F = mg$. Розглянемо математичний, фізичний і пружинний маятники.

Фізичний маятник – тверде тіло, здатне здійснювати

Рисунок 6.8 – Фізичний маятник

коливання під дією своєї сили тяжіння mg навколо нерухомої горизонтальної осі O , яка не проходить через його центр мас і називається **віссю коливання маятника** (рис. 6.8).

Точка O - точка перетину осі коливання маятника з вертикальною площиною, що проходить через центр мас маятника, називається **точкою підвісу маятника**.

Якщо знехтувати силами тертя в підвісі маятника, то момент сили відносно осі коливання маятника створює тільки його сила тяжіння. При відхиленні маятника на кут α виникає обертальний момент $mg l \sin \alpha$, який намагається повернути маятник у положення рівноваги.

З основного закону динаміки обертального руху $M = I \ddot{\alpha}$ дістанемо рівняння руху фізичного маятника:

$$I \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = - mgl \sin \alpha, \quad (6.30)$$

де I – момент інерції маятника відносно осі O ; m – маса маятника; l – відстань від центра мас до осі коливання; g – прискорення вільного падіння; знак "мінус" вказує на те, що, кут відхилення α відраховують від положення рівноваги, а повертаючий момент намагається повернути маятник до положення рівноваги. При малих коливаннях маятника $\sin \alpha \approx \alpha$ і рівняння (6.30) має вигляд:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = - \frac{mgl}{I} \alpha = 0, \quad (6.31)$$

тобто кут α задовольняє диференціальне рівняння

гармонічних коливань $\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$, де

$$\omega^2 = \frac{mgl}{I}. \quad (6.32)$$

Таким чином, малі коливання фізичного маятника будуть гармонічними:

$$\alpha = \alpha_0 \sin \omega t \quad (6.33)$$

де α_0 – амплітуда коливань кута α , а

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I}} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}} \quad (6.34)$$

– циклічна частота і період коливань фізичного маятника відповідно.

Математичний маятник – матеріальна точка, підвішена на невагомій і нерозтяжній нитці, що коливається у вертикальній площині під дією сили тяжіння (рис. 6.9).

Коли маятник перебуває у положенні рівноваги, то сила тяжіння врівноважується силою натягу нитки. Якщо матеріальну точку відхилити на деякий кут α , то рівнодійна F

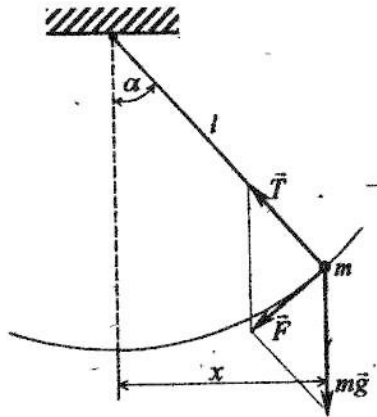


Рисунок 6.9 – Математичний маятник

сил тяжіння mg і натягу T намагається повернути маятник в положення рівноваги. Вираз для повертаючої сили має такий вигляд:

$$F = mg \sin \alpha \quad (6.35)$$

Для малих кутів можна записати, що $\sin \alpha \approx \frac{x}{l}$ і

$$F \approx mg \frac{x}{l}, \quad (6.36)$$

де l – довжина маятника.

На основі другого закону Ньютона запишемо рівняння руху математичного маятника:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} \approx - \frac{mg}{l} x \quad (6.37)$$

Позначимо

$$k \approx \frac{mg}{l} \quad \text{і} \quad \omega^2 \approx \frac{k}{m}, \quad \omega \approx \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Тоді

$$T \approx \frac{2\pi}{\omega} \approx 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (6.38)$$

З (6.38) випливає, що період коливань математичного маятника визначається його довжиною і прискоренням земного тяжіння даного місця на Землі та не залежить від маси маятника і амплітуди коливань для малих кутів відхилення α .

Якщо вважати математичний маятник граничним випадком фізичного маятника, вся маса якого зосереджена в його центрі мас, а момент інерції $I \approx ml^2$, то формулу (6.38) має вигляд

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}} \approx 2\pi \sqrt{\frac{ml^2}{mgl}} \approx 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (6.39)$$

Аналізуючи (6.39), приходимо до висновку, що I/ml відповідає довжині, а тому запишемо

$$\frac{I}{ml} \approx L,$$

де L – зведена довжина фізичного маятника.

Отже, математичний маятник має такий самий період коливань, що й фізичний маятник за умови рівності його довжини зведеної довжині фізичного маятника.

Маятники широко застосовують для вивчення коливань земної кори; у годинниках, у приладах для дослідження механічних властивостей твердих тіл, у гіроскопічних приладах, тощо.

Пружинний маятник – тягар масою m , підвішений на абсолютно пружній пружині, який здійснює коливання під дією пружної сили $F \approx -kx$, де k – коефіцієнт пружності.

Рівняння руху маятника

$$\frac{d^2x}{dt^2} m \approx -kx$$

або

$$\frac{d^2x}{dt^2} \approx -\frac{k}{m}x \approx 0.$$

Із виразу $\frac{d^2x}{dt^2} \approx -\frac{k}{m}x \approx 0$ випливає, що пружинний маятник здійснює гармонічні коливання за законом:

$$x \approx A \cos \omega_0 t \approx 0$$

з циклічною частотою

$$\omega_0 \approx \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (6.40)$$

і періодом

$$T \approx \frac{2\pi}{\omega_0} \approx 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (6.41)$$

Контрольні запитання

1. Які коливання називаються гармонічними?
2. Дайте визначення амплітуди, фази, періоду, частоти, циклічної частоти коливання.
3. Запишіть рівняння гармонічних коливань.
4. Енергія гармонічного коливання.
5. Додавання коливань близької частоти. Биття.
6. Що таке фігури Ліссажу?
7. Що називають фізичним маятником? Що називають його приведеною довжиною?
8. Залежність формули для обчислення періоду коливань пружинного маятника.

7 ЗГАСАЮЧІ ТА ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ. ХВИЛІ

7.1 Диференціальне рівняння згасаючих коливань пружинного маятника та його розв'язок

В ідеальному випадку, коли на тіло діє тільки одна пружна (квазіпружна) сила, коливання тіла будуть гармонічними і незгасаючими. У реальних умовах механічна енергія коливального руху тіла буде неперервно зменшуватись, витрачаючись на переборення опору середовища, на тертя в опорах, на створення хвиль, на виникнення непружних деформацій тощо. Внаслідок цього амплітуда коливань з часом зменшуватиметься і коливання стануть **згасаючими**.

Система називається **лінійною**, якщо параметри, які характеризують фізичні властивості системи, не змінюються в процесі коливань.

Лінійні системи описуються лінійними диференціальними рівняннями. Знайдемо диференціальне рівняння, яке описує вільні згасаючі коливання тіла під дією квазіпружної сили ($F_{\text{кв\text{п}р}}$) і сили опору (F_0).

За малих швидкостей руху сила опору прямо пропорційна першій степені швидкості і напрямлена проти руху, тобто

$$F_0 = -rv = -r \frac{dx}{dt}, \text{ (Equation Chapter 6 Section 6)}$$

6 SEQ MTEqn \r \h * MERGEFORMAT7.1)

де r – коефіцієнт опору, який залежить від властивостей середовища, форми і розмірів рухомого тіла.

Другий закон Ньютона матиме вигляд

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt}$$

або

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0 \quad (7.2)$$

Рівняння (7.2) – диференціальне рівняння згасаючих коливань.

Рівняння коливального руху тіла при цьому матиме вигляд

$$x = A_0 e^{\alpha t} \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (7.3)$$

з довільними значеннями сталих A_0 , ω , φ_0 і α . Введенням початкової фази φ_0 ми об'єднуємо синус і косинус в одну функцію. Обчисливши першу і другу похідні від виразу (7.2) і підставивши їх значення в (7.3), дістанемо

$$A_0 e^{\alpha t} \left[m \alpha^2 + r \alpha + k \right] \cos(\omega t + \varphi_0) +$$

$$- m \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) = 0,$$

звідки отримаємо два рівняння для знаходження α і ω :

$$m \alpha^2 + r \alpha + k = 0,$$

$$m \omega^2 - r \alpha = 0.$$

Розв'язуючи ці рівняння, знайдемо:

$$\alpha = -\frac{r}{2m}, \quad (7.4)$$

і

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}. \quad (7.5)$$

Вираз (7.3) є загальним розв'язком рівняння згасаючих коливань. Він відрізняється від чисто гармонічного коливання тим, що амплітуда коливання

$$A_{\text{eff}} = A_0 e^{\alpha t} \quad (7.6)$$

є спадна функція часу.

Формулу (7.5) можна переписати так:

$$\ddot{x} + \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} x = 0, \quad (7.7)$$

де $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ – циклічна частота вільних коливань.

Період згасаючих коливань дорівнює

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}. \quad (7.8)$$

З формули (7.8) видно, що період згасаючих коливань завжди більший від періоду вільних коливань ($T = 2\pi/\omega_0$).

При $\gamma \ll \omega_0$ знайдемо відношення двох амплітуд коливань в моменти часу, що відрізняються на один період:

$$\frac{A_{\tau}}{A_{\tau+T}} = \frac{A_0 e^{-\gamma \tau}}{A_0 e^{-\gamma(\tau+T)}} = e^{\gamma T}. \quad (7.9)$$

З (7.9) випливає, що дане відношення є величина стала для всього процесу згасання коливань.

Згасаючі коливання часто характеризують **часом релаксації**, під яким розуміють проміжок часу τ , протягом якого амплітуда згасаючих коливань зменшується в e разів, тобто

$$\frac{A_{\tau}}{A_0} = e^{-1}.$$

Звідси маємо

$$\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{2m}{r}. \quad (7.10)$$

Натуральний логарифм відношення (7.9) називається **логарифмічним декрементом згасання** і дорівнює

$$\ln \frac{A_0}{A_{0T}} = \frac{r}{2m} T = \frac{T}{N}, \quad (7.11)$$

де N – число коливань, протягом яких амплітуда зменшується в e разів.

У техніці часто замість логарифмічного декременту використовують величину, яку називають **добротністю коливальної системи**

$$Q = \frac{\omega}{\Delta\omega} = \frac{1}{\Delta T}. \quad (7.12)$$

Коливальна система, виведена з положення рівноваги і залишена сама на себе, здійснюватиме вільні згасаючі коливання, які залежать від опору середовища та параметрів системи. Для одержання незгасаючих коливань необхідно поповнювати втрати енергії системи на роботу проти сил опору. Одним із способів підтримання коливань системи є дія зовнішньої сили, яка змінюється з часом за гармонічним законом

$$F = F_0 \cos \omega t. \quad (7.13)$$

7.2 Диференціальне рівняння вимушених коливань та його розв'язок

Коливання системи, які здійснюються внаслідок роботи зовнішньої сили ($F = F_0 \cos \omega t$), називаються **вимушеними**, а силу F – **змушуючою**. Коли змушуюча сила діє протягом певного часу, то встановлюються гармонічні коливання такої самої частоти як у змушуючої сили.

Рівняння динаміки вимушених коливань матиме вигляд:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx + r \frac{dx}{dt} = F_0 \cos \omega t \quad . \quad \text{Equation Chapter 7}$$

Section 7 SEQ MTEqn \r \h * MERGEFORMAT(7.14)

Введемо такі позначення, поділивши рівняння (7.14) на масу тіла m :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad . \quad (7.15)$$

З врахуванням (7.15) рівняння (7.14) перепишемо так:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t \quad , \quad (7.16)$$

де α – коефіцієнт загасання, ω_0 – циклічна частота вільних коливань.

Загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння другого порядку складається із суми розв'язку однорідного рівняння (7.2) і частинного розв'язку неоднорідного рівняння (7.16). Розв'язок рівняння (7.2) характеризує згасаючі коливання, які через деякий час припиняються. Тому знайдемо частинний розв'язок рівняння (7.16). Будемо вважати, що під дією сили (7.13) коливання встановилися і тому розв'язок шукатимемо у вигляді:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) \quad .$$

Величини A і φ визначаються за формулами:

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2 + 4\alpha^2 \omega^2}} \quad , \quad (7.17)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\alpha\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad . \quad (7.18)$$

Розв'язок рівняння (7.16) має вигляд

$$x = \frac{f_0}{\sqrt{m_0^2 \omega^2 + 4m_0^2 \alpha^2}} \cos \left(\omega t - \arctg \frac{2\alpha}{\omega_0^2} \right) \quad (7.19)$$

Під дією періодичної змущуючої сили виникають гармонічні вимушені коливання з тією ж частотою ω . Амплітуда вимушених коливань (7.17) прямо пропорційна амплітуді змущуючої сили, залежить від характеристик коливальної системи m , k і α , а також є функцією частоти коливань змущуючої сили ω .

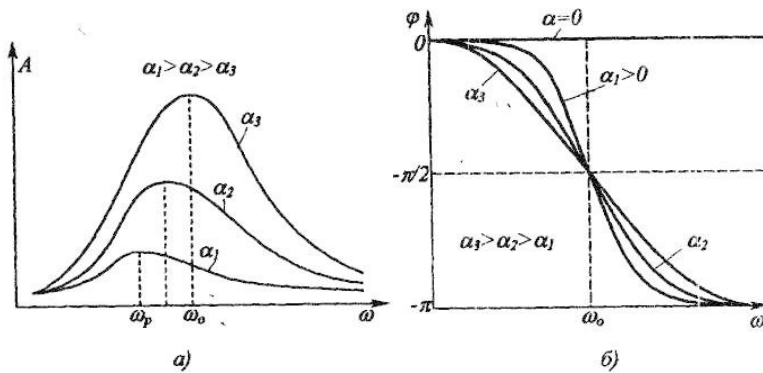


Рисунок 7.1 – Залежності амплітуди і фази вимушених коливань від частоти за різних значень коефіцієнта згасання

Графіки залежності A і зсуву фаз φ від ω для декількох значень α наведено на рисунку 7.1, а і б.

7.3 Явище резонансу в природі

Явище, за якого амплітуда вимушених коливань досягає максимуму, називають **резонансом**. Частоту зміни змушуючої сили, при якій амплітуда вимушених коливань досягає максимального значення, називають **резонансною частотою** ω_p . Амплітуда буде максимальною при мінімальному значенні підкореневого виразу у формулі (7.17). Умовою екстремуму є рівність нулю похідної за частотою підкореневого виразу

$$-4\omega_0^2\omega_p^2 + 8\omega_p^4 = 0$$

Звідси маємо, що

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 + 2\omega^2} \quad (7.20)$$

Значення амплітуди при резонансі матиме вигляд

$$A = \frac{f_0}{2\sqrt{\omega_0^2 + 2\omega^2}} \quad (7.21)$$

Явище резонансу необхідно враховувати під час конструювання різних споруд і машин. Їхня частота вільних коливань повинна суттєво відрізнятися від частоти змушуючих сил. У багатьох випадках явище резонансу відіграє позитивну роль у радіотехніці та акустиці.

7.4 Хвилі у пружному середовищі. Характеристики хвилі

Хвилею називають процес поширення збуджень, який супроводжується перенесенням енергії від джерел у навколишній простір.

Прикладами є рух хвиль на поверхні океану, звук, світло, ударна хвиля від надзвукового літака тощо.

Найчастіше бувають хвилі, породжені гармонічним джерелом. Наприклад, від камертону, який здійснює

гармонічні коливання сталої частоти, поширюються в повітрі звукові гармонічні хвилі. При цьому частинки повітря здійснюють гармонічні коливання біля положень рівноваги.

При поширенні механічної хвилі частки середовища не рухаються у напрямі поширення хвилі а коливаються біля свого положення рівноваги. Разом з хвилею від частинки до частинки передаються не тільки стан коливного руху, а й його енергія. Тому **основна властивість всіх хвиль** є перенос енергії без переносу речовини.

Пружні хвилі бувають поперечні і поздовжні.

У **поздовжніх хвилях** частинки середовища коливаються в напрямку поширення хвилі (рис. 7.2).

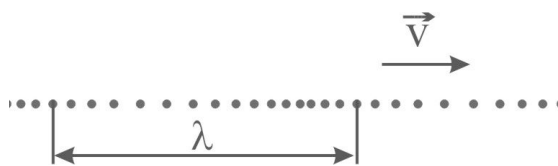


Рисунок 7.2 – Поздовжні хвилі

Ці хвилі можуть поширюватись у середовищах, в яких виникають пружні сили при деформації стику і розтягу і тому можуть

поширюватись в будь-якому середовищі – у твердому, рідкому і газоподібному. Прикладом таких хвиль є звукові хвилі у повітрі.

У **поперечних хвилях** частинки середовища коливаються в площинах, які перпендикулярні до напрямку поширення хвилі (рис. 7.3).

Поперечні хвилі можуть поширюватись в середовищі, в якому виникають пружні сили при деформації зсуву, тобто у твердих тілах і рідинах. Прикладом поперечних хвиль можуть служити хвилі, які поширюються вздовж струн музичних інструментів є електромагнітні хвилі.

Нехай точка, від якої йдуть коливання, коливається в суцільному середовищі. Коливання поширюються від джерела

в усі сторони. Поверхні, до якої доходить у деякий момент часу збудження називаються **фронтом хвилі**. **Фронт хвилі** – це поверхня, яка відокремлює частину простору, уже залучену у хвильовий процес, від області, в якій коливання ще не виникли.

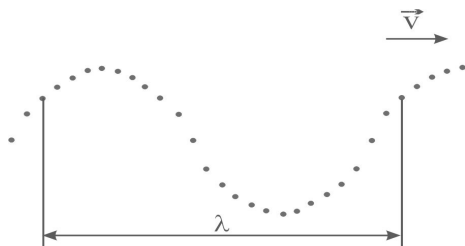


Рисунок 7.3 – Поперечні хвилі

Поверхня, в якій всі частинки коливаються в однаковій фазі, називається **хвильовою**. Хвильових поверхонь існує нескінченна множина, а хвильовий фронт в кожний момент часу лише один.

Хвильові поверхні залишаються нерухомими, а хвильовий фронт весь час переміщується. Хвильові поверхні можуть бути довільної форми.

Хвиля називається **плоскою**, якщо її хвильові поверхні мають вигляд площин, паралельних площині, що проходить через джерело хвиль.

Хвиля називається **сферичною**, якщо її хвильові поверхні мають вигляд концентричних сфер. Центр цих сфер називається центром хвилі.

Поширення в пружному середовищі збурень, збуджених джерелом хвиль, пов'язане з перенесенням хвилями енергій. Тому такі хвилі **називаються біжучими**.

7.5 Диференціальне рівняння хвилі

Рівнянням хвилі називається вираз, який дає зміщення коливної частинки як функцію її координат x , y , z і часу t .

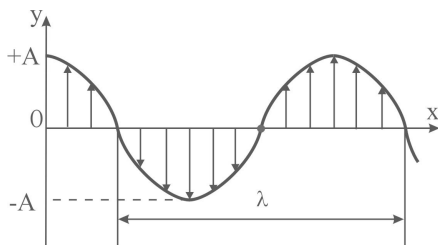
Виведемо рівняння хвилі.

Нехай джерело коливань вміщено в т. О і почало коливатися в момент часу $t = 0$ за законом синуса

$$y_0 = A \sin \omega t \quad (7.22)$$

Коливання точки О приведуть у рух сусідні частинки середовища.

Через якийсь час τ почне коливатись точка середовища,



яка віддалена від джерела коливань О на відстані x ($\tau = x/v$ бо $v = x/\tau$)

Рівняння (7.22)

– рівняння коливань точки О (рис. 7.4).

Рисунок 7.4 -

$$y = A \sin \omega(t - \tau) = A \sin \omega(t - x/v)$$

(7.23)

Рівняння (7.23) – рівняння коливань точки середовища, яка знаходиться на відстані x від джерела.

Якщо хвиля поширюється справа наліво, то її рівняння можна записати:

$$y = A \sin \omega(t + x/v) \quad (7.24)$$

Точки, в яких зміщення у частинок середовища досягає максимального значення називаються **гребенями** ($y = +A$), найменше значення – **впадинами** ($y = -A$)

Довжина хвилі – відстань між двома точками, які відрізняються по фазі на 2π . Крім того, **довжина хвилі** – це відстань, на яку поширюється хвиля за час, що дорівнює періоду коливань:

$$\lambda = v \cdot T \quad (7.25)$$

З урахуванням (7.25) вираз (7.23) можна переписати

$$y = A \sin(2\pi / T \cdot t - 2\pi / T \cdot x / v) = A \sin(\omega t - 2\pi x / \lambda) = A \sin(\omega t - kx) \quad (7.26)$$

– рівняння хвилі.

$$2\pi / \lambda = k \quad (7.27)$$

– **хвильове число**, яке показує скільки довжин хвиль λ вміщується у відрізок 2π , $2\pi / \lambda = k = \omega / v = 2\pi / vT$.

$$y = A \sin(\omega t - kx), \quad (7.28)$$

де A – амплітуда коливань, яка називається амплітудою хвилі;
 $2\pi / \lambda$ – циклічна частота хвилі.

Рівняння 7.28 – **рівняння біжучої плоскої хвилі**, що поширюється вздовж осі Ox .

Величина $\varphi = (\omega t - kx)$ називається **фазою плоскої хвилі**

Рівняння довільної хвилі є розв'язком рівняння, яке називається **хвильовим**.

Для виведення цього рівняння використаємо рівняння плоскої хвилі, що поширюється в довільному напрямку:

$$y = A \cos(\omega t - kx) = A \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z). \quad (7.29)$$

Продиференціюємо цю функцію двічі за кожною змінною:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -\omega^2 A \cos(\omega t - kx) = -\omega^2 y \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= -k_x^2 A \cos(\omega t - kx) = -k_x^2 y \\ \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} &= -k_y^2 A \cos(\omega t - kx) = -k_y^2 y \\ \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} &= -k_z^2 A \cos(\omega t - kx) = -k_z^2 y \end{aligned} \right\} \quad (7.30)$$

Додамо похідні за координатами.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)y = -k^2 y \quad (7.31)$$

Зіставимо цю суму з похідними за часом і врахуємо, що $\omega^2 = v^2 k^2$. Поширення хвиль в однорідному ізотропному середовищі описується **хвильовим рівнянням** – диференціальним рівнянням у частинних похідних

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

або

$$\Delta y = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad (7.32)$$

де v – фазова швидкість;
 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – **оператор Лапласа**.

У хвильовому рівнянні містися лише одна стала – це фазова швидкість v , яка не залежить від характеристик джерела, таких як частота або амплітуда, а повністю визначається властивостями середовища, в якому поширюється хвиля.

7.6 Звук. Інтенсивність звуку. Швидкість звуку

Розділ фізики, в якому вивчаються звукові хвилі, називають **акустикою**. До звукових хвиль належать пружні хвилі, частоти яких знаходяться у межах від 16 до 20000 Гц, тобто у межах сприймання органами слуху людини. Пружні

хвилі, частота яких менша від 16 Гц, називають **інфразвуковими**, а пружні хвилі, частота яких знаходиться в інтервалі від 20000 до 10^9 Гц, – **ультразвуком**. Звук характеризується об'єктивними характеристиками – частотою та інтенсивністю, та суб'єктивними характеристиками – чутністю, висотою звуку і тембром звуку. **Інтенсивність** або **сила звуку** – це енергія, що переноситься через одиницю площі поверхні у перпендикулярному до неї напрямі за одиницю часу. **Інтенсивність звуку** – це густина потоку енергії, яка визначається за формулою

$$I = j_c = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 v$$

(7.33)

Фізичному поняттю сили звуку відповідає фізіологічне поняття – гучність звуку. Людське вухо сприймає звуки, сила яких перевищує деяке мінімальне значення I_0 , різне для різних частот

$$I_0 = f(v) \quad (7.34)$$

Величина I_0 називається **порогом чутності звуку** і для середніх частот $v \approx 10^3$ Гц, що найкраще сприймаються вухом, дорівнює 10^{-12} Вт/м². Оскільки вухо сприймає приріст гучності при збільшенні сили звуку не менше, ніж на 10-20 %, то для характеристики сили звуку беруть величину, яка називається **рівнем сили звуку**

$$L_I = 10 \lg \frac{I}{I_0}, \quad (7.35)$$

яка вимірюється в белах (Б).

Із (7.35) випливає, що рівень сили звуку в 1 Б відповідає силі звуку $I = 10I_0$. Поряд з цією одиницею користуються в 10 раз меншою одиницею, яка називається децибелом (дБ):

$$L = 10 \lg \frac{I}{I_0} \text{ дБ} \quad (7.36)$$

Висота звуку визначається його частотою. Висота звуку збільшується із збільшенням частоти. Органи слуху людини дуже чутливі до зміни частоти. В інтервалі частот від 1,5 кГц до 2,0 кГц людина здатна розрізняти два тони, частоти яких відрізняються на 3-7 Гц.

Тембр звуку – це відтінок складного звуку, яким відрізняються один від одного звуки однакової висоти і інтенсивності.

Швидкість поширення звуку в різних середовищах різна.

Тіла, що коливаються у пружному середовищі із звуковою частотою, називаються **джерелами звуку**. Якщо розміри джерела малі в порівнянні з довжиною хвилі, то від нього поширюється в усі сторони сферична звукова хвиля. Якщо розміри джерела великі в порівнянні з довжиною хвилі, то внаслідок інтерференції і дифракції (огинання звуком перешкод) воно випромінює напрямлену звукову хвилю.

При зустрічі звукових хвиль з перешкодами великих розмірів спостерігається їх відбивання і повернення назад (ехо). У гірській місцевості завдяки багаторазовому відбиванню звуку спостерігається довгочасне ехо (до 5-10 с).

Зміна сили (інтенсивності) звуку з відстанню описується законом

$$I = I_0 e^{-\alpha x}, \quad (7.37)$$

де I_0 – початкова сила звуку, що входить у середовище; I – сила звуку. Величина коефіцієнта поглинання α прямо пропорційна квадрату частоти звуку, тому звуки малої частоти (низькі) поширюються далі високих. Коефіцієнт поглинання ультразвуку у воді приблизно в 1000 разів менший, ніж у повітрі.

Коливання з частотами нижче 16 Гц (інфразвуки) слабо поглинаються в різних середовищах, а тому поширюються у воді, повітрі та земній корі на великі відстані. Це явище застосовують для визначення місць сильних вибухів, епіцентрів землетрусів, передбачення цунамі. Приймають інфразвукові хвилі спеціальними гідрофонами, мікрофонами та вібраторами.

При русі джерела звуку у повітрі з швидкістю, яка менша від швидкості звуку, збуджені джерелом хвилі поширюються з швидкістю практично рівною швидкості звуку при атмосферному тиску. Зовсім іншим є характер поширення звуку у повітрі від джерела, що рухається з надзвуковою швидкістю. При такому русі джерела звуку відбувається його зіткнення з частинками повітря, які також починають рухатися і внаслідок цього поблизу джерела звуку виникають імпульси стиску, що поширюються в усіх напрямках із швидкістю звуку у вигляді сферичних хвиль.

Якщо, наприклад, на пероні вокзалу прислухатися до гудка прохідного поїзда, то з наближенням його відчувається підвищення тону гудка, а з віддаленням – помітне зниження. Зміну частоти хвиль при відносному русі джерела або приймача звуку називають **ефектом Доплера**.

Розглянемо різні взаємні стани джерела і приймача



Рисунок 7.5 – Ефект Доплера

хвиль.

1. Джерело коливань S й приймач O нерухомі (відносно середовища, через яке передаються коливання) і розміщені на відстані l (рис. 7.5), частота коливання джерела ν_0 .

Приймач O перше з ν_0 коливань одержить через час

$t_1 = \frac{l}{v}$, де v – швидкість хвиль у даному середовищі, а

останнє – через $t_2 = \left(1 + \frac{1}{\nu_0}\right) \cdot \nu_0$. Усі ν_0 коливання приймач дістане через час $t_2 - t_1 = \frac{1}{\nu_0}$. Частота сприйнятих коливань точно дорівнює частоті коливань джерела. Спостерігач в точці O буде чути звук певної висоти (частоти ν_0).

2. Джерело коливань S віддаляється від приймача O з швидкістю u . Тоді перше з ν_0 коливань приймач в O дістане

через час $t_1 = \frac{l}{v}$, а останнє – через $t_2 = \left(1 + \frac{1+u}{v}\right) \cdot l$ з відстані $l+u \cdot t_2$. Усі ν_0 коливання дійдуть до приймача за час

$t_2 - t_1 = \left(1 + \frac{u}{v}\right) \cdot \frac{1}{\nu_0}$. Частота сприйнятих коливань

$$\nu_1 = \frac{\nu_0}{1 + \frac{u}{v}}. \quad (7.38)$$

Отже, частота сприйнятих коливань ν_1 менша від частоти джерела ν_0 . Тон звуку від джерела сприймається нижчим.

3. Якщо джерело коливань наближається до приймача O, то частоту сприйнятих коливань ν_2 можна знайти за виразом (7.39), узявши швидкість руху джерела u із знаком мінус, а саме:

$$v_2 = \frac{v_0}{1 - \frac{u}{v}} \quad (7.39)$$

Спостерігач сприйматиме коливання з частотою v_2 , більшою від частоти джерела v_0 , звук від джерела сприйматиметься вищим.

4. Джерело S нерухоме, а приймач O наближається до нього з швидкістю w . За 1 секунду приймач переміститься на відстань w , тому повз нього за 1 с пройде кількість хвиль

$$v_3 = v_0 \left(1 + \frac{w}{v} \right) \quad (7.40)$$

Звук від джерела сприйматиметься підвищеним.

5. Якщо приймач O віддаляється від джерела звуку S , то частоту сприйнятих коливань $\square_0$ можна знайти за виразом:

$$v_4 = v_0 \left(1 - \frac{w}{v} \right) \quad (7.41)$$

У цьому випадку звук джерела буде сприйматись нижчим.

7.7 Звукове забруднення. Ультразвук та інфразвук, дія на організм людини

Людина завжди жила у світі звуків та шумів. Під шумом розуміють усі неприємні та небажані звуки та їх поєднання, які заважають нормально працювати, відпочивати, сприймати необхідні звукові сигнали.

Шум – одна з форм фізичного (хвильового) забруднення природного середовища. Адаптація до нього практично неможлива.

Для всіх живих організмів, у тому числі, і людини звук є однією з дій навколишнього природного середовища. У

природі гучні звуки рідкісні, шум відносно слабкий і нетривалий. Поєднання звукових подразників дає тваринам і людині час, необхідний для оцінки їх характеру і формування у відповідь реакції.

Звук – це механічні коливання, які поширюються у твердих, рідких та газоподібних середовищах.

Природа ніколи не була безмовною, вона – безшумна. Звук – один з найстародавніших її проявів. Звуки завжди були і, навіть, жакливої сили і потужності. Але все-таки в природному середовищі переважали звуки шелестіння листя, дзюрчання струмка, легкий плескіт води і шум прибою, які завжди приємні людині – вони заспокоюють, знімають стреси. Статистика свідчить, що люди, які працюють у лісі, поблизу річки, на морі, рідше хворіють нервовими і серцево-судинними захворюваннями, ніж мешканці міст. Під впливом звукових хвиль водоспаду посилюється робота м'язів.

Позитивний вплив гармонійної спокійної музики був відомий з давніх-давен. Це поширені в усьому світі колисанки – тихі, ніжні монотонні наспіви.

Давно відома також негативна дія звуку. Одним з середньовічних покарань було жорстоке вбивство жертви звуками від ударів могутнього дзвона, коли приречений помирає у страшних муках від нестерпного болю у вухах.

Проте внаслідок винахідливості, діяльності "цивілізованої" людини звучання голосів природи стає все більш рідкісними, зникає зовсім або заглушається промисловими, транспортними та іншими шумами.

Сто років тому рівень шуму на центральних магістралях великих міст не перевищував 60 дБ. Нині у великих містах є райони, де він перевищує 70 дБ (санітарна норма для нічного часу – 40 дБ). 60–80 % міського шуму генерує автотранспорт.

На пристосування до сильного шуму організм людини витрачає велику кількість енергії, перенапружується нервова система, виникають втома, нервовий і психічний розлади.

Особливо важко переносяться раптові різкі високочастотні звуки. При рівні шуму понад 80 дБ послаблюється слух, виникають нервово-психічні захворювання, виразка шлунку, гіпертонія, підвищується агресивність. Дуже сильний шум (понад 110 дБ) призводить до так званого шумового сп'яніння, а потім – до руйнування тканин тіла, перш за все – слухового апарату. Жінки більш чутливі до дії сильного шуму, і у них за умов звукового дискомфорту виникають ознаки неврастенії.

Найпотужнішим джерелом шуму є гелікоптери та літаки, особливо надзвукові. Їхні шуми погіршують слух та призводять до інших захворювань робітників наземних служб аеропорту, а також мешканців населених пунктів над якими низько пролітають літаки. Негативна дія таких шумів на людину залежить не тільки від максимального рівня шуму, але й від тривалості дії.

Значним джерелом шуму є залізничний транспорт, який створює акустичний дискомфорт для великих груп населення. Помітну роль у звуковому режимі міста відіграють промислові підприємства.

Поряд із шумами, що проникають ззовні, суттєве значення мають шуми від внутрішніх джерел, в тому числі від інженерного та сантехнічного обладнання. Особливо несприятлива ситуація виникає у житлових будинках з вбудованими об'єктами громадського харчування, побутового обслуговування тощо. Джерелом шумів у житлових будинках часто є різноманітна побутова техніка, поведінка людей. Так, пилосос, що працює в квартирі, дає середньо частотний шум інтенсивністю в 70 – 80 дБ, магнітофон чи телевізор – 80 дБ.

Шум шкідливий не лише для людини. Встановлено, що рослини під впливом шуму повільніше ростуть, у них спостерігається надмірне виділення вологи через листя, можливі порушення клітин. Гинуть листя і квіти рослин, що розміщені біля гучномовця.

Аналогічно діє шум на тварин. Від шуму реактивного літака гинуть личинки бджіл, самі вони втрачають здатність орієнтуватися, в пташиних гніздах дає тріщини шкаралупа яєць. Від шуму знижуються надої, приріст у вазі свиней, несучість курей. Хворобливо переносять шум риби, особливо у період нерсту.

За сучасних умов боротьба з шумом є технічно складною, комплексною, дорогою. Важливо знижувати шум у джерелі його виникнення, створювати безшумні або мал шумні машини і технологічні процеси, транспортне і промислове устаткування, починаючи ще зі стадії проектування. При цьому розраховується очікувана величина шуму, розробляються заходи щодо зниження шуму до допустимого рівня.

Останнім часом усе більш широке поширення у виробництві знаходять технологічні процеси, засновані на використанні енергії ультразвуку. Ультразвук знайшов також застосування в медицині.

Ультразвукові коливання, генеруючи ультразвуком низькочастотним промисловим устаткуванням, впливають на організм людини. Тривалий систематичний вплив ультразвуку, що поширюється повітряним шляхом, викликає зміни нервової, серцево-судинної й ендокринної систем, слухового і вестибулярного аналізаторів. Найбільш характерним є наявність вегето-судинної дистонії й астеничного синдрому.

Міри попередження несприятливої дії ультразвуку на організм операторів технологічних установок, персоналу

лікувально-діагностичних кабінетів складається в першу чергу в проведенні заходів технічного характеру. До них відносяться створення автоматизованого ультразвукового устаткування з дистанційним керуванням; використання по можливості малопотужного устаткування, що сприяє зниженню інтенсивності шуму й ультразвуку на робочих місцях на 20 – 40 дБ; розміщення устаткування в звукоізованих приміщеннях з дистанційним керуванням; устаткування звукоізольованих пристроїв, кожухів, екранів з листової чи сталі дюралюмінію, покритих гумою, протишумовою мастикою й іншими матеріалами.

Для захисту рук від контактної дії ультразвуку рекомендується застосування спеціального робочого інструмента з віброізолюючою рукояткою.

Розвиток техніки і транспортних засобів, удосконалювання технологічних процесів і устаткування супроводжується збільшенням потужності і габаритів машин що обумовлює тенденцію підвищення низькочастотних складових у спектрах і поява інфразвуку, що є порівняно новим, не цілком вивченим фактором виробничого середовища.

Інфразвуком називають акустичні коливання з частотою 20 Гц. Цей частотний діапазон лежить нижче порога чутності і людське вухо не здатне сприймати коливання зазначених частот. Найбільшу інтенсивність інфразвукових коливань створюють машини і механізми, які мають поверхні великих розмірів, що роблять низькочастотні механічні коливання чи турбулентні потоки газів і рідин.

Дослідження біологічної дії інфразвуку на організм показали, що при рівні від 110 до 150 дБ і більш він може викликати в людей неприємні суб'єктивні відчуття і численні реактивні зміни, до числа яких варто віднести зміни в центральній нервовій, серцево-судинній і дихальній системах.

Найбільш ефективним і практично єдиним засобом боротьби з інфразвуком є зниження його в джерелі. При виборі конструкцій перевага повинна віддаватися малогабаритним машинам великої твердості, тому що в конструкціях із плоскими поверхнями великої площі і малої твердості створюються умови для генерації інфразвуку.

Необхідно вживати заходів для зниження інтенсивності аеродинамічних процесів – обмеження швидкостей руху транспорту, зниження швидкостей витікання рідин (авіаційні і ракетні двигуни, двигуни внутрішнього згоряння, системи скидання пари теплових електростанцій і т. д.).

Контрольні запитання

1. Які коливання називаються згасаючими?
2. Від чого залежить частота згасаючих коливань?
3. Які коливання називаються вимушеними?
4. У чому полягає суть явища резонансу?
5. Що називають хвилею? Запишіть рівняння плоскої хвилі.
6. Запишіть оператор Лапласа.
7. Швидкість поширення хвилі.
8. Яка природа звуку? Які пружні хвилі називають ультразвуком, а які – інфразвуком?

8 МЕХАНІКА РІДИН ТА ГАЗІВ

7.1 Закони Паскаля і Архімеда

Відомо, що речовина може перебувати в трьох агрегатних станах: твердому, рідкому, газоподібному.

Твердими тілами називаються такі тіла, які в звичайних умовах і у вільному стані здатні зберігати незмінними свою форму і об'єм.

Рідкими тілами або **рідинами** називаються такі тіла, які в земних умовах здатні зберігати об'єм, але не здатні зберігати свою форму.

Газоподібними тілами або **газами** називаються такі тіла, які в земних умовах не здатні зберігати ні форму, ні об'єм.

Рідини і гази поведуть себе, як пружні тіла тільки щодо зміни об'єму. У рідинах і газах практично доводиться мати справу тільки з всебічним стиском. У рідинах і газах при зсуві шарів пружні сили не виникають і сили, які діють на елемент рідини (газу) з боку іншого елемента зумовлені тільки деформацією стиску. Тому сила, яка діє з боку одного елемента на інший, завжди нормальна до площадки, на яку ця сила діє. Для всякої площадки в рідині (газі) існує тільки нормальна напруга:

$$p = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S}, \quad (8.1)$$

де F – сила, ΔS – площадка, на яку ця сила діє. Цю нормальну напругу називають **тиском** у рідині або газі. Тиск вимірюється в Паскалях: $1\text{Па}=1\text{Н/м}^2$.

З дослідів відомо, що стисливістю рідини можна знехтувати, тому ми будемо розглядати рідини (а в деяких випадках і газу) як абсолютно нестисливі. Тиск при рівновазі рідин (газів) підкоряється **закону Паскаля**: тиск у будь-якому місці рідини, що перебуває в спокої, однаковий у всіх напрямках, причому тиск однаково передається рідиною в усіх напрямках. Тиск стовпа рідини рівний:

$$p = \rho gh. \quad (8.2)$$

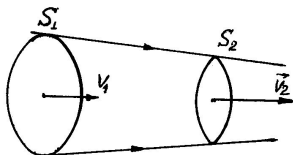
Сила тиску на нижню частину тіла буде більша, ніж на верхню, тому на тіло діє відштовхувальна сила, що визначається **законом Архімеда**: на тіло занурене в рідину (газ) діє відштовхувальна сила рівна вазі витісненої тілом рідини (газу).

$$F_A = \rho g V, \quad (8.3)$$

де ρ – густина рідини (газу), V – об'єм зануреної частини тіла.

7.2 Стаціонарна течія. Рівняння нерозривності

Рух рідини називається **течією**, а сукупність частин рухомої рідини – **поток**ом. Графічно рух рідин зображується



**Рисунок 8.1 –
Трубка течії**

за допомогою ліній течії, які проводять так, щоб дотична до них в будь-якій точці співпадала по напрямку з вектором швидкості рідини в цій точці.

Лінії течії проводять так, щоб густина їх, яка характеризується відношенням числа ліній до площі перпендикулярної їм площадки, через яку вони проходять, була більша там, де більша швидкість течії і пропорційно швидкості течії. Частина рідини, обмежена лініями течії, називається **трубкою течії**. Течія називається **стаціонарною**, якщо форма і розташування ліній течії, а також значення швидкостей в кожній точці з часом не змінюється. Розглянемо якусь трубку течії (рис. 8.1). Виберемо два перерізи S_1 і S_2 . За час Δt через переріз S проходить об'єм рідини $Svdt$, де v – швидкість течії. Оскільки рідина нестислива (суцільне середовище з однаковою в усіх точках густиною, яка не змінюється з часом) то об'єм, що проходить за час Δt через перерізи S_1 і S_2 , однаковий. Тому:

$$S_1 v_1 dt = S_2 v_2 dt$$

Після скорочення на Δt маємо:

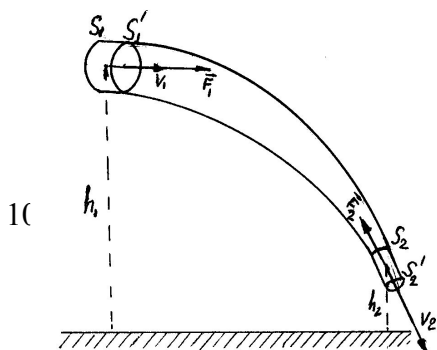
$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \quad (8.4)$$

Отже, добуток швидкості течії на поперечний переріз трубки течії є величина стала для даної трубки. Співвідношення (8.4) називають **рівнянням нерозривності**.

7.3 Ідеальна рідина. Рівняння Бернуллі. Формула Торічеллі

Розглянемо течію рідини, в якій немає внутрішнього тертя (в'язкості). Таку рідину називають **ідеальною**.

Виділимо в ідеальній рідині, течія якої



стаціонарна, трубку течії, обмежену перерізами S_1 і S_2 (рис. 8.2). Нехай там, де переріз S_1 , швидкість течії v_1 , тиск p_1 і висота перерізу h_1 . Аналогічно в місці перерізу S_2 , швидкість течії v_2 , тиск p_2 і висота h_2 . Через проміжок часу Δt рідина переміститься і займе положення між перерізами S'_1 і S'_2 . Причому Δt настільки малий проміжок часу, що $S_1 = S'_1$ і $S_2 = S'_2$.

При переміщенні з положення між перерізами $S_1 S_2$ в положення між перерізами $S'_1 S'_2$ над рідиною була виконана робота A , яка рівна зміні енергії рідини. Коли рідина буде в положенні між $S_1 S_2$ її енергія рівна енергії частини, що міститься між перерізами $S_1 S'_1$ і енергії решти рідини між перерізами $S'_1 S_2$, яку ми позначимо W . Отже, початкове значення енергії

$$W_1 = \frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 + W$$

де m – маса рідини між перерізами $S_1 S'_1$. Коли рідина міститься між перерізами $S_2 S'_2$ її енергія рівна енергії частини рідини між перерізами $S_2 S'_2$ плюс енергія між перерізами $S'_1 S_2$. Оскільки течія стаціонарна, то енергія між перерізами S'_1 і S_2 в обох випадках однакова. Оскільки рідина нестислива, то маса рідини між перерізами $S_1 S'_1$ рівна масі між перерізами $S_2 S'_2$.

$$W_2 = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2 + W$$

Отже,

Зміна енергії при переміщенні рідини в положення $S'_1 S'_2$:

$$\begin{aligned} \Delta W &= W_2 - W_1 = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2 + W - \frac{mv_1^2}{2} - mgh_1 - W = \\ &= \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2 - \frac{mv_1^2}{2} - mgh_1. \end{aligned}$$

Робота виконана при цьому рівна роботі сил тиску:

$$A = A_1 + A_2,$$

$$A_1 = F_1 l, \text{ де } F_1 = p_1 S_1, \text{ а } l = v_1 \Delta t \text{ значить } A_1 = p_1 S_1 v_1 \Delta t.$$

Аналогічно $A_2 = -p_2 S_2 v_2 \Delta t$. Знак “-” з'явився тому, що сила тиску F_2 діє в перерізі S_2 проти руху даної маси рідини.

$$\text{Остаточно } A = p_1 S_1 v_1 \Delta t - p_2 S_2 v_2 \Delta t.$$

Оскільки $A = \Delta W$, то маємо

$$\frac{mv_2^2}{2} + mgh_2 - \frac{mv_1^2}{2} - mgh_1 = p_1 S_1 v_1 \Delta t - p_2 S_2 v_2 \Delta t.$$

Згідно з рівнянням нерозривності об'єми $S_1 v_1 \Delta t$ і $S_2 v_2 \Delta t$ однакові і рівні об'ємам між $S'_1 S'_1$ і $S'_2 S'_2$. Розділимо рівняння

на цей об'єм, пам'ятаючи, що $\frac{m}{Sv\Delta t} = \rho$, і перенесемо всі доданки з індексом “1” в ліву частину, а з індексом “2” в праву.

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho gh_1 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho gh_2. \quad (8.5)$$

Ми одержали **рівняння Бернуллі**. Інакше його можна записати так:

$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho gh = \text{const} \quad (8.6)$$

У рівнянні Бернуллі p – статичний тиск, величина $\frac{\rho v^2}{2}$ – динамічний тиск, ρgh – гідростатичний тиск.

Для горизонтальної трубки течії $h_1 = h_2$ рівняння Бернуллі набирає вигляду:

$$p + \frac{\rho v^2}{2} = \text{const}$$

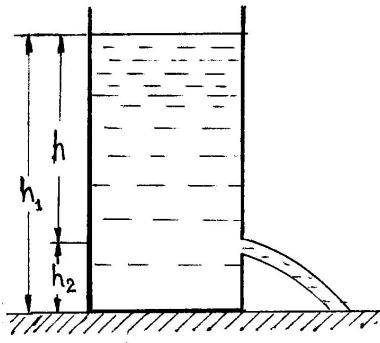


Рисунок 8.3 – Витікання рідини з вузького отвору

Величину $p + \frac{\rho v^2}{2} = p_0$ називають **повним тиском**.

Розглянемо витікання рідини з вузького отвору широкої посудини (рис. 8.3).

Розглянемо два перерізи рідини на висоті h_1 і в отворі з якого летить вода ($h_2 = 0$)

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho gh = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}$$

Тиски p_1 і p_2 однакові і дорівнюють атмосферному.

Якщо $S_1 \gg S_2$, то v_1 дуже мала і нею можна знехтувати.

Тоді

$$\rho gh = \frac{\rho v_2^2}{2}$$

Звідси

$$v = \sqrt{2gh}$$

(8.7)

Цей вираз дістав назву **формули Торрічеллі**.

7.4 Сили в'язкості

Ідеальна рідина, тобто рідина, що рухається без тертя – абстракція. Під час руху рідини виникають сили внутрішнього тертя або сили в'язкості.

Сили внутрішнього тертя (сили в'язкості) – це сили, які виникають при переміщенні одних шарів рідини відносно інших до поверхні шарів протилежного з цих шарів.

Для з'ясування закономірностей, яким підлягають сили внутрішнього тертя в рідинах, розглянемо такий дослід. У рідину занурені дві паралельні одна одній пластини (рис. 8.4). Нижня пластина утримується на місці за допомогою пружини, а верхня приводиться в рух з швидкістю v_0 . Для переміщення верхньої пластини з сталою швидкістю v_0

F' $F_{\tau p}$
Рисунок 8.4 – Сили внутрішнього тертя

необхідно діяти на неї з сталою за величиною силою F . Якщо пластинка не одержує прискорення, то дія цієї сили

врівноважується рівною їй за величиною і протилежною за напрямом силою, яка є силою тертя.

Змінюючи швидкість пластини v_0 , площу пластини S і відстань між пластинами d , можна одержати, що:

$$F_{mp} = \eta \frac{v_0}{d} S, \quad (8.8)$$

де η – коефіцієнт внутрішнього тертя або коефіцієнт динамічної в'язкості рідини.

Нижня пластина при русі верхньої теж виявляється під дією сили F'_{mp} , яка врівноважується за допомогою сили пружності. Таким чином, між пластинами існує взаємодія, яка передається через рідину і формула (8.8) визначає силу взаємодії між шарами рідини. Якщо швидкість між шарами в

напрямі змінюється за лінійним законом, то $\frac{v_0}{z} = \frac{dv}{dz}$. Отже, формула (8.8) може бути записана у вигляді:

$$F_{mp} = \eta \frac{dv}{dz} S. \quad (8.9)$$

Ця формула носить назву **формули Ньютона**.

Отже, сила внутрішнього тертя прямо пропорційна градієнту швидкості і площі дотику шарів рідини.

У формулу входять **коефіцієнт в'язкості η** , який чисельно дорівнює силі в'язкості, що діє на одиницю площі дотику шарів при градієнті рівному одиниці. В СІ одиницею в'язкості є така в'язкість, за якою на 1 м^2 дотику шарів діє

сила в 1 Н при градієнті швидкості $1 \frac{\text{м/с}}{\text{м}}$. Ця одиниця називається Паскаль-секунда ($\text{Па} \cdot \text{с}$).

$$1 \text{ Па} \cdot \text{с} = \frac{1 \text{ Н}}{1 \frac{(\text{м/с}) \text{ м}^2}{\text{м}}} = 1 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}^2}$$

Коефіцієнт в'язкості залежить від температури, причому характер залежності різний для рідин і газів. У рідинах коефіцієнт в'язкості сильно зменшується з підвищенням температури. У газах коефіцієнт в'язкості з температурою росте. Відмінність у характері поведінки η при зміні температури вказує на різний механізм внутрішнього тертя в рідинах і газах.

7.5 Ламінарна і турбулентна течії. Число Рейнольдса

Існує два режими течії рідини. Течія називається **ламінарною**, якщо вздовж потоку кожний виділений шар ковзає відносно сусідніх не перемішуючись з ними і **турбулентною**, якщо вздовж потоку відбувається інтенсивне перемішування рідини з різних шарів і утворення вихорів.

Ламінарна течія рідини спостерігається за невеликих швидкостей течії. Верхній шар рідини, що прилягає до

поверхні труби, в якій рідина тече, завдяки силам молекулярного зчеплення прилипає до неї і залишається нерухомим. Швидкість наступних шарів тим більша, чим більша їх відстань від стінки труби. При **турбулентній течії** частинки рідини набувають складових швидкостей, перпендикулярних до течії, і вони можуть переходити з одного шару в інший. Швидкість частин рідини швидко зростає у міру віддалення від поверхні труби, а потім змінюється досить повільно. Оскільки частинки переходять з шару в шар, то їх швидкості в різних шарах мало відрізняються. Через великий градієнт швидкостей біля поверхні труби відбувається утворення вихорів.

Англійський вчений Рейнольдс довів, що характер течії залежить від безрозмірної величини, яка дістала назву **число Рейнольдса**

$$Re = \frac{\rho <v> d}{\eta}, \quad (8.10)$$

де ρ – густина рідини, $<v>$ – середня швидкість течії, η – коефіцієнт в'язкості, d – характерний лінійний розмір, наприклад, діаметр труби. Величину η – називають динамічною в'язкістю. Крім динамічної розглядають **кінематичну в'язкість**

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}, \quad (8.11)$$

з врахуванням (8.11) формула (8.10) має вигляд:

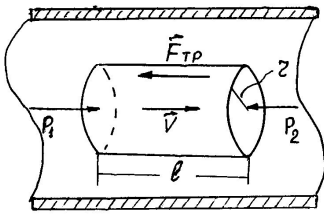
$$Re = \frac{<v> d}{\nu}. \quad (8.12)$$

При малих числах Рейнольдса ($Re < 1000$) спостерігається ламінарна течія, перехід від ламінарної до турбулентної течії відбувається в області $1000 < Re < 2000$, а при $Re = 2300$ течія турбулентна. Якщо число Рейнольдса однакове, то і режим течії різних рідин (газів) в трубах різних перерізів однаковий.

8.6 Рух рідин і газів по трубах. Формула Пуазейля

При течії рідини по круглій трубі швидкість течії дорівнює нулю біля стінок труби і максимальна на осі труби. Вважаючи течію ламінарною, знайдемо закон зміни швидкості з віддаллю r від осі труби.

Виділимо уявний циліндричний об'єм рідини радіуса r і довжини l (рис. 8.6). Вісь циліндра співпадає з віссю труби.



**Рисунок 8.6 –
Циліндричний об'єм
рідини радіуса r і
довжини l**

При стаціонарній течії в трубі сталого перерізу швидкості всіх частинок рідини лишаються незмінними.

Це означає, що сума всіх зовнішніх сил, прикладених до будь-якого об'єму рідини, рівна нулю. На основі виділеного циліндричного об'єму діють сили тиску, сума яких дорівнює $(p_1 - p_2)\pi r^2$. Ця сумарна сила діє в напрямі руху рідини. На бічну поверхню діє сила тертя,

напряmlена проти руху рідини, яка дорівнює $\eta \frac{dv}{dr} 2\pi r l$. Швидкість зменшується із зростанням віддалі від осі труби.

Умова стаціонарності має вигляд:

$$(p_1 - p_2)\pi r^2 = -\eta \frac{dv}{dr} 2\pi r l, \quad (8.13)$$

після перетворень одержимо:

$$dv = -\frac{(p_1 - p_2)}{2\eta l} r dr \quad (8.14)$$

Проінтегруємо останній вираз:

$$v = -\frac{(p_1 - p_2)}{2\eta l} \int r dr = -\frac{(p_1 - p_2)}{4\eta l} r^2 + C \quad (8.15)$$

Сталу інтегрування вибирають так, щоб швидкість перетворювалась у нуль на стінках труби, тобто при $R = r$ (R – радіус труби). За цієї умови:

$$C = \frac{(p_1 - p_2)R^2}{4\eta l}$$

Підставимо C у формулу (8.15) і одержимо

$$v(r) = (p_1 - p_2) \frac{(R^2 - r^2)}{4\eta l} \quad (8.16)$$

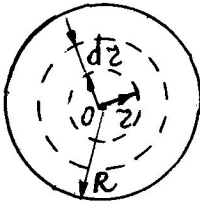


Рисунок 8.7 – Рух рідини через трубку

Обчислимо об'єм рідини Q , що протікає через поперечний переріз труби за час t . Розіб'ємо поперечний переріз труби на кільця шириною dr (рис.8.7). Через кільце радіуса r за час t пройде об'єм рідини

$$dQ = 2\pi t v r dr$$

Підставимо v з формули (8.16):

$$dQ = \frac{\pi(p_1 - p_2)t}{2\eta l} (R^2 r - r^3) dr$$

Проінтегруємо:

Інтегрування дає:

$$Q = \frac{\pi(p_1 - p_2)t}{2\eta l} \left(\frac{R^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Bigg|_0^R$$

звідки:

$$Q = \frac{\pi(p_1 - p_2)tR^4}{8\eta l} \quad (8.17)$$

Цей вираз називають **формулою Пуазейля**. Об'єм рідини, що протікає через трубу, пропорційний перепаду тисків на її кінцях, радіусу труби в четвертому степені, часу протікання, і обернено пропорційний коефіцієнту в'язкості і довжині труби.

7.7 Формула Стокса



**Рисунок 8.8 –
Рівномірний рух
кульки в рідині**

Інший метод визначення в'язкості запропонував Стокс, який показав, що на кульку радіуса r , яка рухається в рідині, що міститься в посудині, радіус якої $R \gg r$, діє сила опору:

$$F_{mp} = 6\pi\eta vr, \quad (8.18)$$

де η – в'язкість рідини, v – швидкість рівномірного руху кульки, r – радіус кульки.

При рівномірному русі кульки в рідині, на неї діють сили (рис. 8.8):

$$mg = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g \quad (\rho - \text{густина кульки}),$$

сила Архімеда $F_A = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho' g$ (ρ' – густина рідини) і сила

опору $F = 6\pi r v \eta$, причому $mg = F_A + F$, або

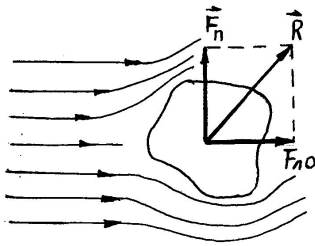
$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho' g + 6\pi r v \eta,$$

звідки

$$\eta = \frac{2(\rho - \rho')gr^2}{9\nu} \quad (8.19)$$

8.8 Рух твердих тіл у рідинах та газах

При русі твердого тіла в рідині або газі на нього діють сили, рівнодійну яких позначимо R (рис. 8.9). Розкладемо R на



дві складові: F_{lo} – напрямлену проти руху тіла, яку назвемо силою лобового опору, і F_n – напрямлену перпендикулярно до напрямку руху тіла, яку назвемо

підіймальною. В ідеальній рідині рівномірний рух тіла повинен відбуватися без лобового опору. При ламінарному обтіканні тіла рідиною (газом), лобовий опір зумовлений наявністю сил в'язкості.

У цьому випадку тонкий шар рідини прилипає до поверхні тіла і рухається з ним як одне ціле, захоплюючи за собою, внаслідок наявності сил в'язкості, наступні шари рідин. У міру віддалення від поверхні тіла, швидкість шарів стає все меншою і, нарешті, на деякій відстані від поверхні тіла, рідина

**Рисунок 8.9 – Рух
твердого тіла в рідині або
газі**

виявляється практично незбуреною рухом тіла. Таким чином, тіло виявляється оточеним шаром рідини, в якому є градієнт

швидкості. Цей шар називають приграничним шаром. У ньому діють сили тертя, які і призводять до виникнення лобового опору. Наявність приграничного шару призводить до того, що певне обтікання стає неможливим.

Дія сил тертя в поверхневому шарі призводить до відривання потоку від поверхні тіла, внаслідок чого позаду тіла виникають вихорі (рис. 8.10). Тиск у вихровій зоні, за

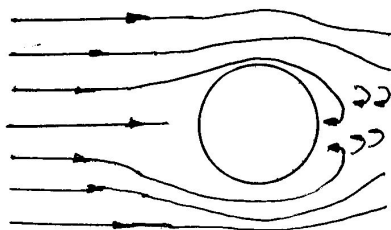


Рисунок 8.10 – Утворення вихорів

тілом, виявляється пониженим.

Тому результуюча сила тиску буде відмінна від нуля і в свою чергу обумовить лобовий опір. Таким чином, лобовий опір складається з опору тертя і опору тиску. При даних поперечних розмірах тіла, опір тиску сильно залежить від форми тіла.

Найменший опір тиску має тіло краплеподібної форми. Таку форму намагаються надати фюзеляжу і крилам літака, кузову автомобіля і т. д.

Для виникнення підйімальної сили потрібно, щоб тіло було несиметричним і швидкість обтікання верхньої частини тіла була більшою за швидкість обтікання нижньої. Тоді різниця тисків забезпечить наявність підйімальної сили.

Контрольні запитання

1. Які середовища називаються суцільними?
2. Закони Паскаля і Архімеда.
3. Рівняння Бернуллі для ідеальної рідини.
4. Формула Ньютона для сили внутрішнього тертя в рідині або газі.

5. Ламінарна та турбулентна течії. Число Рейнольдса.
6. Формула Пуазейля при русі рідини через трубку.
7. Рух тіла в рідині або газі. Опір тертя та опір тиску.
8. Формула Стокса при русі кульки в рідині або газі.

9 МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА

8.1 Статистичний і термодинамічний методи

При вивченні властивостей тіл і фізичних явищ, які відбуваються з тілами, застосовують два методи досліджень – статистичний і термодинамічний. **Статистичний метод** досліджень лежить в основі молекулярної фізики. **Молекулярна фізика** – це розділ фізики, що вивчає будову і властивості тіл, виходячи з молекулярно-кінетичних уявлень, які ґрунтуються на тому, що всі тіла складаються з молекул, що перебувають у безперервному русі. Властивості великої кількості молекул відмінні від властивостей окремої молекули і підлягають статистичним закономірностям. Вони вивчаються за допомогою статистичного методу. Метод заснований на тому, що властивості мікроскопічної системи визнаються середніми величинами, які характеризують рух величезної сукупності молекул. Звідси інша назва молекулярної фізики – статистична фізика.

Вивченням різних властивостей тіл і змін їхнього стану займається також і термодинаміка. Однак на відміну від статистичної фізики, **термодинаміка** вивчає макроскопічні тіла, не цікавлячись їх будовою. В основі термодинаміки лежать фундаментальні закони (начала термодинаміки), які встановлені на основі узагальнення великої сукупності експериментальних фактів. Внаслідок цього висновки термодинаміки мають загальний характер. Статистичний і термодинамічний методи взаємодоповнюють один одного.

8.2 Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії

Як приклад застосування статистичного методу розглянемо виведення основного рівняння молекулярно-кінетичної теорії для ідеального газу.

Ідеальним є газ, який відповідає таким вимогам:

- 1) газ складається з однакових за масою молекул, розмірами яких можна знехтувати;
- 2) молекули газу не взаємодіють на відстані;
- 3) удари між молекулами газу та між молекулами і стінками посудини розглядають як абсолютно пружні;
- 4) молекули газу перебувають у безперервному хаотичному русі.

Нехай маємо ідеальний газ, що міститься в посудині, яка

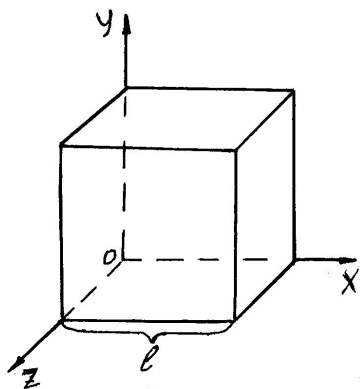


Рисунок 9.1 – Тиск газу на одну з граней паралелепіпеда

має форму прямокутного паралелепіпеда і будемо вважати, що стінки є “ідеально відбиваючими” (рис. 9.1). Вони відбивають молекули під тими ж кутами, під якими вони падають на стінку, без зміни величини швидкості. Визначимо тиск газу на одну з граней паралелепіпеда. Розглянемо грань перпендикулярну до вісі x . Оскільки при зіткненні міняється тільки перпендикулярна до поверхні

грані складова швидкості v_x , причому ця зміна зводиться тільки до зміни її знаку, то імпульс, що передається при одному зіткненні цій грані, рівний $mv_x - (-mv_x) = 2mv_x$, де m – маса молекули. Рухаючись як вільна, молекула проходить відстань між протилежними гранями l за час

рівний $\frac{l}{v_x}$ так, що вона повернеться назад до першої грані через час $\frac{2l}{v_x}$.

Тому середня сила, що діє на стінку за час $\frac{2l}{v_x}$ рівна:

$$f_x = 2mv_x \frac{v_x}{2l} = \frac{mv_x^2}{l} \quad (9.1)$$

Формула (9.1) визначає силу удару однієї молекули. Повна сила удару на стінку всіх молекул

$$F_x = N \frac{m \langle v_x^2 \rangle}{l}, \quad (9.2)$$

де $\langle v_x^2 \rangle$ – середнє значення квадратів складової v_x швидкості руху молекул, N – кількість молекул в посудині. Але оскільки всі напрями руху по відношенню до самого газу абсолютно рівноцінні, то

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle,$$

а

$$\begin{aligned} \langle v^2 \rangle &= \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle, \\ i \langle v_x^2 \rangle &= \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle, \end{aligned} \quad (9.3)$$

де $\langle v^2 \rangle$ – квадрат середньої квадратичної швидкості, який

визначається як $\langle v^2 \rangle = \frac{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_N^2}{N}$. Замінімо F_x на pS ,

де p – тиск газу, а S – площа грані, $i \langle v_x^2 \rangle$ на $\frac{1}{3} \langle v^2 \rangle$

$$pS = \frac{1}{3} \frac{Nm \langle v^2 \rangle}{Sl} \quad (9.4)$$

Врахуємо, що Sl – об'єм посудини, а $\frac{N}{Sl} = n$ концентрація молекул. Тоді рівняння (9.4) має вигляд:

$$p = \frac{1}{3} nm \langle v^2 \rangle \quad (9.5)$$

Рівняння (9.5) є основним **рівнянням молекулярно-кінетичної теорії**. Рівняння (9.5) можна записати в іншому вигляді

$$p = \frac{2}{3} n \langle E_k \rangle, \quad (9.6)$$

де $\langle E_k \rangle$ – середня кінетична енергія поступального руху молекул.

При нагріванні газу, йому передається енергія, а отже, збільшується середня енергія руху молекул. Тому середня кінетична енергія поступального руху молекул може бути вибрана як мірило температури. Прийнято визначати

температуру T як $\frac{2}{3}$ від цієї енергії. Оскільки температура вимірюється в Кельвінах, а енергія – в Джоулях, то потрібен

коефіцієнт переводу Кельвінів в Джоулі і навпаки. Таким

коефіцієнтом є стала Больцмана $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$. Отже,

$$kT = \frac{2}{3} \frac{m \langle v^2 \rangle}{2} \quad (9.7)$$

Підставивши (9.7) в (9.6), одержимо

$$p = nkT \quad (9.8)$$

Це ще одна з форм запису **основного рівняння молекулярно-кінетичної теорії газів.**

9.3 Рівняння стану ідеального газу. Основні газові закони та ізопроцеси

З основного рівняння молекулярно-кінетичної теорії можна одержати рівняння стану ідеального газу.

Візьмемо рівняння у формі (9.8)

$$p = nkT$$

і замінімо $n = \frac{N}{V}$, де V – об'єм, а N – загальна кількість молекул. Рівняння набирає вигляду

$$pV = NkT \quad (9.10)$$

Загальна кількість молекул газу

$$N = \nu N_A, \quad (9.11)$$

де ν – кількість молів газу, а N_A – число Авогадро, тому

$$pV = \nu N_A kT$$

(9.12)

Добуток $N_A k = R$, де R – універсальна газова стала.
Отже, маємо рівняння

$$pV = \nu RT, \quad (9.13)$$

або

$$pV = \frac{m}{M} RT \quad (9.14)$$

де m – маса газу, M – молярна маса.

Це і є **рівняння стану ідеального газу**, яке носить назву **рівняння Клапейрона-Менделєєва**.

З рівнянь (9.13) і (9.14) випливають відомі газові закони встановлені експериментально.

При $T = \text{const}$, $m = \text{const}$, маємо

$$pV = \text{const} \quad (9.15)$$

рівняння ізоермічного процесу (**закон Бойля-Маріотта**).

При $p = \text{const}$, $m = \text{const}$ маємо

$$\frac{V}{T} = \text{const} \quad (9.16)$$

рівняння ізобарного процесу (**закон Гей-Люссака**).

При $V = \text{const}$, $m = \text{const}$, маємо

$$\frac{p}{T} = \text{const} \quad (9.17)$$

рівняння ізохоричного процесу (**закон Шарля**).

Якщо у рівняннях (9.16) і (9.17) замінити температуру за шкалою Кельвіна на температуру за шкалою Цельсія

$T = (273 + t)$ і ввести величину $\alpha = \frac{1}{273} \cdot K^{-1}$, то рівняння (9.16) і (9.17) будуть мати вигляд

$$V = V_0(1 + \alpha \cdot t), \quad (9.18)$$

$$p = p_0(1 + \alpha \cdot t) \quad (9.19)$$

Контрольні запитання

1. Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії.
2. Сформулюйте закони ідеального газу.
3. Запишіть рівняння стану для
 - а) одного моля ідеального газу;
 - б) будь-якої маси ідеального газу.

10. ЕЛЕМЕНТИ КІНЕТИЧНОЇ ТЕОРІЇ. ЯВИЩА ПЕРЕНОСУ

10.1 Елементи теорії ймовірності. Розподіл Максвелла

Молекули газу рухаються з різними швидкостями, причому як і величина, так і напрям швидкості, кожної окремо взятої молекули, неперервно змінюються через зіткнення з іншими молекулами. Не можна ставити питання про те, яка частина молекул має якусь точно задану швидкість v , бо може виявитись, що саме такої швидкості немає жодна молекула. У той самий час можна ставити питання про те, скільки молекул мають швидкості, що лежать в інтервалі від v_1 до v_2 . Якщо взяти декілька порцій газу, що знаходяться в однакових умовах (при однакових P і T), то кількість молекул у даному інтервалі швидкостей ΔN_0 буде різна, але відношення

$$f(v) = \frac{\Delta N_0}{N \Delta v} \quad (10.1)$$

буде сталим для різних порцій газу.
Відношення

$$\frac{\Delta N_0}{N} = f(v) \Delta v \quad (10.2)$$

дає ймовірність того, що швидкість молекули буде мати значення в межах цього інтервалу. Якщо інтервал швидкостей взяти нескінченно малий, то формула (10.2) має вигляд

$$f(v) = \frac{dN}{N dv} \quad (10.3)$$

З формули (10.3) випливає, що $\int_0^{\infty} f(v) dv = \frac{1}{N} \int_0^{\infty} dN = 1$ Отже,

$$\int_0^{\infty} f(v) dv = 1 \quad (10.4)$$

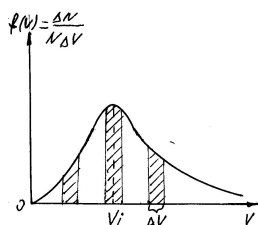
можна записати, що

Останній вираз являє собою ймовірність того, що швидкість молекули має одне з значень у межах від 0 до ∞ . Оскільки швидкість молекул має якесь значення, то вказана ймовірність є ймовірність достовірної події і, відповідно, дорівнює одиниці. **Функція розподілу** $f(v)$ була знайдена Максвеллом теоретично і має вигляд

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 \quad (10.5)$$

Підставивши (10.5) в (10.3) одержимо

$$\frac{dN}{N} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv \quad (10.6)$$



**Рисунок 10.1 –
Графік функції
розподілу**

У рівняннях m – маса молекули, k – стала Больцмана, T – абсолютна температура.

Графік функції розподілу даний на рисунку 10.1. Як видно з рисунка, функція розподілу проходить через максимум. Швидкість, що відповідає максимуму функції розподілу, буде найбільш ймовірною.

Знайшовши максимум функції розподілу, ми знайдемо і найбільш ймовірну швидкість. Візьмемо похідну по швидкості від функції розподілу і

прирівняємо її до нуля, при цьому величину $4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}}$, як стало, позначимо через A . Отже,

$$\frac{df}{dv} = \frac{d}{dv} \left(A e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 \right) = A e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v \left(2 - \frac{mv^2}{kT} \right) = 0$$

. Значення $v = 0$ і $v = \infty$, що задовольняють цій умові – відповідають мінімумам функції. Отже, значення v , що перетворює в нуль вираз у дужках, і буде шуканою найбільш ймовірною швидкістю

$$2 - \frac{mv^2}{kT} = 0 \Rightarrow v_i = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

(10.7)

Формулі (10.7) можна надати й іншого вигляду, помноживши чисельник і знаменник підкореневого виразу на N_A одержимо

$$v_i = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}, \quad (10.8)$$

$$f(v) = \frac{\Delta N}{N \Delta v}$$

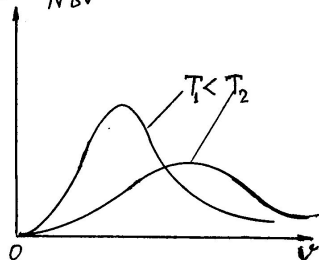


Рисунок 10.2 – Криві закону розподілу Максвелла за різних температур

де $R = kN_A$ і $M = mN_A$.

З формули (10.7) випливає, що при збільшенні температури максимум функції розподілу зміститься вправо (рис. 10.2). При нагріванні газу, частка молекул з малими швидкостями зменшується, а з великими – росте.

Слід зауважити, що знаючи функцію розподілу, знаходять: середню арифметичну швидкість

$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} v f(v) dv = \sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{kT}{m}} \quad (10.9)$$

і середню квадратичну швидкість

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^{\infty} v^2 \cdot f(v) \cdot dv = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \quad (10.10)$$

У законі Максвелла функція розподілу залежить від температури та природи газу. Проте закон Максвелла можна звести до такого вигляду, що одна крива буде придатна для будь-яких температур і різних газів. Для цього випадку формула Максвелла:

$$\frac{dN}{NdU} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-U^2} U^2 ,$$

$$U = \frac{v}{v_{\text{ім}}} ,$$

де

10.2 Барометрична формула. Розподіл Больцмана. Атмосфера планет

Атмосферний тиск на висоті h обумовлений вою шарів газу, які лежать вище. Зміна тиску з ростом висоти на dh , рівна dp . При цьому

$$dp = -\rho g dh , \quad (10.11)$$

де ρ – густина повітря, g – прискорення земного тяжіння. Знак мінус показує, що з зростанням висоти тиск зменшується. Густина газу виразимо через тиск з рівняння Клапейрона-Менделєєва:

$$pV = \frac{m}{M}RT, \quad \rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}.$$

(10.12)

Підставимо вираз для ρ в рівняння (10.11) і одержимо:

$$dp = -\frac{pgM}{RT}dh,$$

звідки

$$\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT}dh.$$

(10.13)

Будемо вважати температуру сталою, тоді інтегрування

виразу (10.13) дає $\ln p = -\frac{Mg}{RT}h + C$, де C – стала інтегрування, яку визначимо з початкових умов. Якщо $h = 0$,

$p = p_0$, звідки $C = \ln p_0$. Тому $\ln p = -\frac{Mgh}{RT} + \ln p_0$. Після диференціювання одержуємо:

$$p = p_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}} \quad (10.14)$$

Ця формула називається **барометричною**. Вона показує, як змінюється тиск з висотою за сталої температури.

Замінивши в формулі (10.14) тиск через nkT , одержуємо закон зміни з висотою концентрації молекул

$$n = n_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}.$$

В одержаному виразі замінімо $M = mN_A$ і $R = kN_A$, будемо мати

$$n = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}} \quad (10.15)$$

У цій формулі n – концентрація молекул на висоті h , n_0 – концентрація молекул на нульовій висоті, m – маса молекули, k – стала Больцмана. Якщо враховувати, що $mgh = w_n$ – потенціальна енергія молекули в полі тяжіння, то вираз (10.15) має вигляд

$$n = n_0 e^{-\frac{w_n}{kT}} \quad (10.16)$$

Вираз (10.16), називається **розподілом Больцмана** в зовнішньому потенціальному полі. З нього випливає, що за сталої температури густина газу тим більша, чим менша потенціальна енергія молекул. Якщо частинки мають однакову масу і перебувають у стані теплового хаотичного руху, то розподіл Больцмана (10.16) справедливий в будь-якому зовнішньому потенціальному полі, а не тільки в полі тяжіння.

Атмосфера – це газова оболонка планети, що рухається разом з планетою в світовому просторі як єдине ціле. Своїми атмосферами володіють майже всі планети нашої сонячної системи, але тільки земна атмосфера здатна підтримувати життя.

Атмосфера **Землі** – атмосфера планети Землі, одна з геосфер, суміш газів, що оточують Землю, та утримуються завдяки силі тяжіння. Атмосфера в основному складається з азоту і кисню. Решта – це аргон та вуглекислий газ із неонам, гелієм, метаном, криптоном, воднем та невеликими

домішками інших газів. Відповідно до змін температури з висотою в атмосфері Землі виділяють такі шари:

тропосфера – до 8–10 км у полярних областях та до 18 км – над екватором. У тропосфері зосереджено майже 80 % атмосферного повітря, майже вся водяна пара, тут утворюються хмари і випадають опади. Умовною межею тропосфери вважають *тропопаузу*;

стратосфера – від тропопаузи до стратопаузи, яка розташована на висоті близько 50 – 55 км. У стратосфері розташовано шар озону, який захищає живі організми від згубного впливу ультрафіолетового випромінювання;

мезосфера – розташована на висотах 55 – 85 км;

термосфера – пролягає на висотах від 85 до 400 – 800 км.

Меркурій – найближча до Сонця планета нашої Сонячної системи. На цій планеті є сліди атмосфери: зафіксовані гелій, аргон, кисень, вуглець і ксенон. Тиск атмосфери на поверхні Меркурія надзвичайно малий: складає двохтрилліонну частку від нормального земного атмосферного тиску.

Венера. У 1761 році Михайло Ломоносов, спостерігаючи проходження Венери по диску Сонця, зауважив тоненький райдужний обідок, що оточував планету. Так була відкрита атмосфера Венери. Ця атмосфера потужна: тиск на поверхні виявився в 90 разів більшим, ніж у поверхні Землі. Атмосфера Венери на 96,5 % складається з вуглекислого газу. Не більше 3 % припадає на частку азоту. Крім того, виявлено домішки інертних газів.

Атмосфера Венери простягається до висоти 5500 км. Атмосфера Венери ділиться на дві області: *тропосферу* і *термосферу*.

Марс.

Атмосфера Марса на 95 % складається з вуглекислого газу. Близько 4 % припадає на частку азоту і складається з

вуглекислого газу. Близько 4 % припадає на частку азоту і аргону. Кисню і водяної пари в марсіанській атмосфері менше, ніж 1 %. Середній тиск атмосфери на рівні поверхні в 15000 разів менший, ніж на Венері, і в 160 разів менше ніж на поверхні Землі.

Юпітер являє собою рідку кулю, що обертається, з товстою атмосферою, яка тягнеться на 1000 км і складається в основному з водню і гелію. Знаменита Велика Червона пляма – це колосальний атмосферний вихор. Її ширина 1400 км, довжина 40000 км.

Сатурн. Його динамічна атмосфера також має пояси і зони. Над видимими хмарами – дуже товстий шар туману. Атмосфера Сатурна складається переважно з водню, гелію і метану.

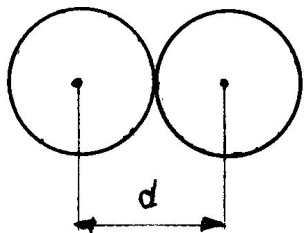
Уран і Нептун виглядають як гігантські близнюки. Обидві планети мають товстий покрив з воднево-метанових хмар.

Атмосфера на **Урані** потужна, товщиною не менше 8000 км. Вона складається приблизно з 83 % водню, 15 % гелію і 2 % метану. Атмосфера **Нептуна** – це здебільшого, водень і гелій з невеликою домішкою метану.

Плутон – найвіддаленіша і мало вивчена планета Сонячної Системи. Атмосфера планети розріджена і складається з газоподібного метану з можливою домішкою інертних газів. Тиск на поверхні менший від земного у 7 тисяч разів.

9.3 Середня довжина вільного пробігу молекули

Молекули газу, рухаючись хаотично, неперервно стикаються



одна з одною. Між двома послідовними зіткненнями молекула проходить якийсь шлях λ , який називається довжиною вільного пробігу молекули. Загалом довжина шляху між послідовними зіткненнями різна, але оскільки ми маємо справу з великим числом молекул, то можемо говорити про середню довжину вільного пробігу молекул $\langle \lambda \rangle$. **Середньою довжиною вільного пробігу молекули** називається середня відстань, яку проходить молекула між двома послідовними зіткненнями з іншими молекулами.

Мінімальна відстань, на яку можуть зблизитись центри двох молекул, називається **ефективним діаметром молекули** (рис.10.3).

За якийсь час Δt молекула зазнає певну кількість зіткнень N , проходячи при цьому шлях l . Тоді середня довжина вільного пробігу за час Δt рівна

$$\langle \lambda \rangle = \frac{l}{N}. \quad (10.17)$$

Довжина шляху l може бути знайдена як добуток середньої арифметичної швидкості на час руху $l = \langle v \rangle \Delta t$, а число зіткнень $N = \langle z \rangle \Delta t$, де $\langle z \rangle$ – середнє число зіткнень за одиницю часу. Підставивши в (10.17) вирази для l і N , одержимо

$$\langle \lambda \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle z \rangle}. \quad (10.18)$$

Середнє число зіткнень молекули з іншими знайдемо з таких міркувань. Уявимо

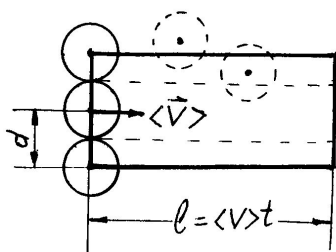


Рисунок 10.4 – Рух молекул за умови нерухомих інших

спочатку, що всі молекули, крім однієї, застигли нерухомо на своїх місцях. Прослідкуємо за рухом виділеної нами молекули. Вдарившись об одну з нерухомих молекул, вона буде летіти прямолінійно, доки не зіткнеться з якою-небудь іншою нерухомою молекулою. Припустимо, що після зіткнення напрям руху молекули не змінюється. Тоді наша молекула зачепить на своєму шляху всі ті молекули, центри яких лежать на відстані не більшій за d від прямої, вздовж якої вона рухається (рис. 10.4). Іншими словами, молекула зіткнеться за час Δt з усіма тими молекулами, центри яких лежать в середині циліндра довжиною $l = \langle v \rangle \Delta t$, з площею основи πd^2 , де d – ефективний діаметр молекули рівний радіусу циліндра. Кількість молекул у циліндрі, об'ємом $Sl = \pi d^2 \langle v \rangle \Delta t$, рівна добутку концентрації молекул n на об'єм циліндра. Отже, середнє число зіткнень рівне числу молекул у цьому циліндрі $N = n \pi d^2 \langle v \rangle \Delta t$, а середнє число

$$\langle z \rangle = \frac{N}{\Delta t} = n \pi d^2 \langle v \rangle$$

зіткнень за одиницю часу
(10.19)

$$\langle z \rangle = \sqrt{2} n \pi d^2 \langle v \rangle$$

(10.20)

Підставивши (10.20) в (10.17) знайдемо середню **довжину вільного пробігу молекули**

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} n \pi d^2} \quad (10.21)$$

10.4 Дифузія

Розглянемо явища, які виникають при відхиленні газу від рівноваги, коли ці відхилення невеликі. Ці явища дістали назву явищ переносу. До явищ переносу належать

теплопровідність (обумовлена переносом енергії), дифузія (обумовлена переносом маси) і внутрішнє тертя (обумовлене переносом імпульсу). Почнемо розгляд явищ переносу з дифузії. За сталої температури, явище дифузії полягає в переносі маси речовини з місць з більшою густиною в місця з меншою густиною. У найпростішому випадку, ми називаємо **дифузією** явище самовільного взаємного проникнення молекул двох тіл, газоподібних, рідких або твердих. У

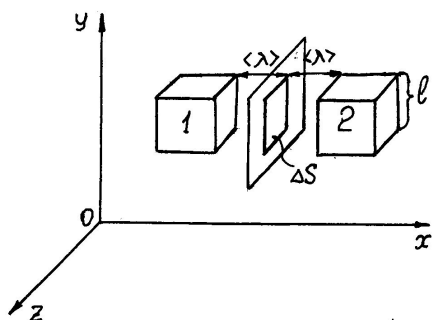


Рисунок 10.5 – Явище дифузії

хімічно-чистих речовинах, зокрема газах, дифузія виникає внаслідок різної концентрації молекул у різних частинах об'єму. При дифузії через деяку площадку ΔS переноситься тим більша маса газу ΔM , чим більші розміри площадки ΔS , чим більший проміжок часу Δt і чим швидше змінюється густина

речовини ρ , що дифундує. Математично ця залежність має вигляд:

$$\Delta M = -D(\text{grad} \rho) \Delta S \Delta t$$

(10.22)

і носить назву – **закон Фіка**.

Величина D називається **коефіцієнтом дифузії**. Знак мінус означає, що маса переноситься в бік зменшення густини.

Розглянемо цей процес у газах з точки зору молекулярно-кінетичної теорії.

Нехай концентрація молекул газу зростає вздовж осі x , лінійно зліва на право. Виділимо, справа і зліва від площадки ΔS на віддалі від неї рівній середній довжині вільного пробігу $\langle \lambda \rangle$, кубічні об'єми 1 і 2 (рис.10.5). Тоді можна вважати, що молекули, які вилітають з цих об'ємів у напрямі площадки ΔS , перетнуть її без зіткнень з іншими молекулами. Нехай, площа площадки ΔS , рівна площі грані куба $\Delta S = l^2$, де l – довжина ребра куба. Внаслідок того, що рух молекул

хаотичний, можна вважати, що $\frac{1}{3}$ молекул рухається вздовж кожної з координат осей, з них половина в додатному і половина у від'ємному напрямі осі. Таким чином, у напрямі

до площадки ΔS буде рухатись $\frac{1}{6}$ всіх молекул, що містяться в кожному з кубиків. Отже, через площадку ΔS пройде справа наліво $\frac{1}{6}N_2$, а зліва направо $\frac{1}{6}N_1$ молекул, що містяться в кубиках 1 і 2. І через площадку ΔS пронесеться маса

$$\Delta M = m \left(\frac{1}{6}N_1 - \frac{1}{6}N_2 \right) = \frac{1}{6}m(N_1 - N_2), \quad (10.23)$$

де m – маса одної молекули.

Кількість молекул у кубіку можна представити як добуток концентрації n на об'єм кубика ΔSl – де площа грані, а l – довжина ребра

$$\Delta M = \frac{1}{6}(mn_1 - mn_2)\Delta Sl. \quad (10.24)$$

Добуток $mn = \rho$ густина газу, а довжину ребра l можна виразити як добуток $\langle v \rangle \Delta t$, де Δt – час протягом якого остання молекула, що рухається вздовж осі x вилетить з кубика. Отже, Δt – час протягом якого маса ΔM буде пронесена через площадку ΔS ; $\langle v \rangle$ – середня арифметична швидкість молекул. Тоді,

$$\Delta M = \frac{1}{6}(\rho_1 - \rho_2)\Delta S \langle v \rangle \Delta t$$

(10.25)

Після перетворень

$$\Delta M = -\frac{1}{3} \left(\frac{\Delta \rho}{\Delta x} \right) \langle \lambda \rangle \langle v \rangle \Delta S \Delta t = -\frac{1}{3} \langle \lambda \rangle \langle v \rangle (\text{grad} \rho) \Delta S \Delta t \quad (10.26)$$

Знак мінус вказує на те, що маса переноситься в напрямі, протилежному до напрямку градієнта густини. **Коефіцієнт дифузії**

$$D = \frac{1}{3} \langle \lambda \rangle \langle v \rangle$$

(10.27)

10.5 Внутрішнє тертя

Другим явищем переносу є перенос імпульсу, з яким пов'язане внутрішнє тертя в газах. Якщо швидкість u шарів у потоці газу міняється від шару до шару, то на межі між суміжними шарами діє сила внутрішнього тертя, що визначається формулою Ньютона

$$F = \eta \frac{du}{dz} S, \quad (10.28)$$

$$\frac{du}{dz}$$

де $\frac{du}{dz}$ – градієнт швидкості руху шарів газу, S – площа дотику шарів, η – коефіцієнт в'язкості. З точки зору молекулярно-кінетичної теорії газів, у рухомому газі на швидкість неупорядкованого руху молекул $\langle v \rangle$ накладається швидкість u , однакова для всіх молекул даного шару і різна для різних шарів. Молекули, перелітаючи, завдяки хаотичному руху з більш швидкого шару в більш повільний,

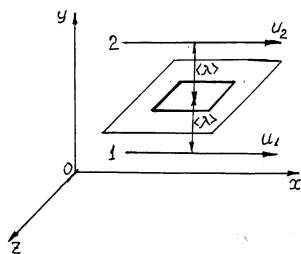


Рисунок 10.6 – Явище внутрішнього тертя

переносять з собою більшу складову імпульсу $p = mv$ і тим самим прискорюють більш повільний шар. Молекули, що потрапляють з більш повільного шару в більш швидкий, уповільнюють його.

Виділимо в газі площадку ΔS , паралельну до шарів, які течуть в напрямі осі x з швидкостями u_1 і u_2 ,

відстань від шарів до площадки $\langle \lambda \rangle$ (рис. 10.6). Тоді молекули, що летять з шару 1 по напрямку до площадки ΔS , досягнуть її без зіткнень. Те саме можна сказати і щодо молекул, що летять з шару 2. З розгляду явища дифузії можна сказати, що кількість молекул, які пройдуть крізь площадку

ΔS з шару 1 буде $\Delta n_1 = \frac{1}{6} n_0 \langle v \rangle \Delta S \Delta t$, і вони перенесуть з

собою імпульс Δp_1 рівний $\Delta p_1 = \frac{1}{6} n_0 \langle v \rangle \Delta S \Delta t m u_1$. Так само з шару 2 через площадку ΔS буде перенесено імпульс

$\Delta p_2 = \frac{1}{6} n_0 \langle v \rangle \Delta S \Delta t m u_2$. Концентрація молекул у шарах однакова. Внаслідок двох переносів імпульсу, через площадку буде перенесено імпульс

$$\Delta p = \Delta p_2 - \Delta p_1 = \frac{1}{6} n \langle v \rangle \Delta S \Delta t (m u_2 - m u_1), \text{ різниця}$$

$m u_2 - m u_1 = m(u_2 - u_1)$. Різниця $u_2 - u_1$ рівна градієнту

швидкості $\frac{\Delta u}{\Delta y}$, помноженому на відстань між шарами 2 і 1,

яка рівна $2\langle \lambda \rangle$, тому $u_2 - u_1 = \left(\frac{\Delta u}{\Delta y} \right) 2\langle \lambda \rangle$, звідки

$$m u_2 - m u_1 = m \left(\frac{\Delta u}{\Delta y} \right) 2\langle \lambda \rangle,$$

$$\Delta p = \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta u}{\Delta y} \right) \langle \lambda \rangle \langle v \rangle n m \Delta S \Delta t$$

і остаточно

$\frac{\Delta p}{\Delta t} = F$. Оскільки $\frac{\Delta p}{\Delta t} = F$, то для сили, яка діє між шарами газу одержимо вираз

$$F = \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta u}{\Delta y} \right) \langle \lambda \rangle \langle v \rangle \rho \Delta S$$

(10.29)

де $\rho = mn$ – густина газу, $\frac{\Delta u}{\Delta y}$ – градієнт швидкості. Для газів коефіцієнт в'язкості

$$\eta = \frac{1}{3} \langle \lambda \rangle \langle v \rangle \rho$$

(10.30)

10.6 Теплопровідність

Третім явищем переносу є теплопровідність. Дослідним шляхом встановлено, що у випадку, коли в деякому середовищі вздовж осі x температура не залишається сталою, то вздовж цієї осі буде переноситись тепло, кількість якого визначається формулою $\Delta Q = - \chi$

$$\frac{\Delta T}{\Delta x} S \Delta t = - \chi \Delta S \Delta t \text{grad} T, \quad (10.31)$$

де S – площа площадки перпендикулярної до x через яку

протікає тепло, $\frac{\Delta T}{\Delta x} = \text{grad} T$ – градієнт температури, Δt – час протікання, χ – коефіцієнт теплопровідності.

Якщо в одній області газу температура, а, отже, і кінетична енергія поступального руху молекул, вища, а в іншій нижча, то молекули з більш гарячої області будуть проникати в більш холодну, віддаючи більш холодним молекулам частину своєї енергії і навпаки.

Молекулярно-кінетична теорія для теплопровідності в газах має вигляд

$$\Delta Q = -\frac{1}{3} \rho \left(\frac{\Delta T}{\Delta x} \right) c_v \langle \lambda \rangle \langle v \rangle \Delta S \Delta t, \quad (10.32)$$

де c_V – питома теплоємність газу за сталого тиску, $\frac{\Delta T}{\Delta x}$ – градієнт температури, $\frac{\Delta Q}{\Delta S}$ – кількість теплоти, що передається через площадку ΔS за час Δt .

Для газів коефіцієнт теплопровідності

$$\chi = \frac{1}{3} \rho c_V \langle \lambda \rangle \langle v \rangle \quad (10.33)$$

Між коефіцієнтами дифузії внутрішнього тертя і теплопровідності є прямий зв'язок

$$D = \frac{1}{3} \langle \lambda \rangle \langle v \rangle$$

$$\eta = \frac{1}{3} \langle \lambda \rangle \langle v \rangle \rho = \rho D$$

$$\chi = \frac{1}{3} \rho c_V \langle \lambda \rangle \langle v \rangle = \eta c_V = \rho D c_V$$

Контрольні запитання

1. У чому полягає максвеллівський закон розподілу молекул за швидкостями?
2. Середня арифметична і середня квадратична швидкості молекул.
3. Барометрична формула і розподіл Больцмана.
4. Що називається середньою довжиною вільного пробігу? Як і чому вона залежить від температури?
5. Явища переносу. Закон дифузії Фіка. Закон в'язкості Ньютона. Закон теплопровідності Фур'є.
6. Зв'язок коефіцієнтів дифузії, в'язкості і теплопровідності для ідеальних газів.

11 ПЕРШИЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМІКИ

11.1 Внутрішня енергія

Важливою характеристикою термодинамічної системи є її внутрішня енергія. Внутрішня енергія містить у собі енергію від видів руху і взаємодій всіх частинок (молекул, атомів, електронів і т.д.), що утворюють систему. Кінетична енергія механічного руху системи як цілого і потенціальна енергія системи в зовнішньому полі (гравітаційному чи електричному) до внутрішньої енергії не належить.

Внутрішня енергія системи, яка перебуває в газоподібному стані складається з:

а) кінетичної енергії неупорядкованого поступального і обертального руху молекул, а також коливального руху атомів в молекулах;

б) потенціальної енергії, обумовленої силами міжмолекулярної взаємодії;

в) енергія взаємодії атомів у молекулах і енергія взаємодії електронів з атомним ядром;

г) енергії руху і взаємодії нуклонів в атомних ядрах.

Внутрішня енергія є однозначною функцією стану термодинамічної системи і її значення не залежить від того, яким чином система прийшла в цей стан.

Внутрішня енергія визначається з точністю до сталої U_0 , яка залежить від вибору стану, в якому внутрішня енергія приймається рівною нулю. Оскільки в усіх термодинамічних розрахунках визначається не абсолютне значення внутрішньої енергії, а її зміна ΔU , то вибір U_0 не грає ролі. Для газів ми будемо під внутрішньою енергією розуміти суму кінетичної енергії теплового руху і потенціальної енергії міжмолекулярної взаємодії молекул. Для ідеального газу

силами міжмолекулярної взаємодії нехтують, тому внутрішня енергія ідеального газу складається тільки з кінетичної енергії молекул.

11.2 Розподіл енергії за ступенями вільності. Внутрішня енергія ідеального газу

Щоб знайти кінетичну енергію молекули потрібно спочатку розглянути питання про число ступенів вільності молекул. Під **числом ступенів вільності** тіла розуміють число незалежних координат, які повністю визначають положення тіла в просторі. Або іншими словами, це число незалежних рухів, які може здійснювати тіло. Ми будемо говорити про число ступенів вільності різних молекул.

Одноатомну молекулу можна розглядати як матеріальну точку, і її положення в просторі однозначно задається трьома координатами x , y , z .

Це означає, що одноатомна молекула може здійснювати три незалежні поступальні рухи, і має три ступені вільності. Двоатомну молекулу можна розглядати як систему, що складається з двох матеріальних точок на відстані l одна від одної.

Якщо l стала (зв'язок між атомами жорсткий), то число ступенів вільності рівне п'яти. Три ступені вільності будуть **поберуванні** Двоатомна молекула з жорсткими зв'язками має п'ять ступенів вільності.

Для багатоатомних молекул (три і більше атомів), в яких зв'язки між атомами жорсткі і атоми не лежать на одній прямій, число ступенів вільності дорівнює шести. Багатоатомна молекула здійснює три незалежні поступальні і три незалежні обертальні рухи.

У статистичній фізиці виводиться закон Больцмана про рівномірний розподіл кінетичної енергії за ступенями вільності. Згідно з цим законом на одну ступінь вільності

$\frac{kT}{2}$ молекули припадає середня кінетична енергія рівна $\frac{kT}{2}$. При визначенні середнього значення енергії молекули ідеального газу потрібно врахувати, що коливальний ступінь вільності має вдвічі більшу енергетичну місткість тому, що на неї припадає не тільки кінетична, але й потенціальна енергія; причому, середні значення кінетичної і потенціальної енергій однакові.

Таким чином, середня кінетична енергія молекули

$$\langle E \rangle = \frac{i}{2} kT, \quad (11.1)$$

де i – кількість ступенів вільності молекули.

Отже, внутрішня енергія ідеального газу, що складається з N молекул рівна

$$U = N \frac{i}{2} kT. \quad (11.2)$$

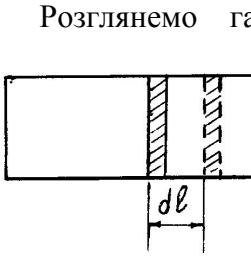
Відомо, що $N = N_A \nu$, де ν – кількість молів, N_A – число Авогадро. Оскільки $N_A k = R$, то формула (11.2) набирає вигляду:

$$U = \nu \frac{i}{2} RT, \quad (11.3)$$

або

$$U = \frac{m}{M} \frac{i}{2} RT. \quad (11.4)$$

11.3 Робота при зміні об'єму



**Рисунок 11.1 –
Робота при
розширенні газу**

Розглянемо газ, що знаходиться під поршнем в циліндричній посудині (рис.11.1). Нехай під дією сили тиску розширюється і пересуває поршень на нескінченно малу відстань dl . При цьому виконується робота $dA = Fdl = pSdl = pdV$, де S – площа поршня, $Sdl = dV$ – зміна об'єму системи. Таким чином ,

$$dA = pdV \quad (11.5)$$

Певну роботу, виконану газом при зміні його об'єму, знаходять інтегруванням виразу.

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV \quad (11.6)$$

11.4 Перший закон термодинаміки

Внутрішня енергія системи може змінюватись у результаті різних процесів, наприклад, здійсненням над системою роботи, або наданням системі деякої кількості теплоти. Таким чином, енергія механічного руху може перетворюватись в енергію теплову, і навпаки.

При таких перетвореннях повинен виконуватись закон збереження і перетворення енергії, чим по суті, і є перше начало термодинаміки, стосовно до теплових і механічних процесів. Перше начало термодинаміки було встановлено в

результаті узагальнення великої кількості дослідних фактів, що збиралися століттями. Його найпростіше можна сформулювати так: **теплота, надана системі, іде на зміну внутрішньої енергії системи і на здійснення системою роботи проти зовнішніх сил.**

Математично це можна записати так:

$$Q = \Delta U + A, \quad (11.7)$$

або для малої зміни стану системи

$$\delta Q = dU + \delta A. \quad (11.8)$$

Знаки δ біля Q і A вказують на те, що δA і δQ не є повними диференціалами. У той час як dU – повний диференціал. Слід пам'ятати правило знаків: якщо теплота ΔQ надається системі, то вона додатна, якщо відводиться від системи – від'ємна; якщо робота виконується системою над зовнішніми тілами, то вона додатна, якщо ж робота виконується над системою, то вона від'ємна. Якщо система періодично повертається в початковий стан, то зміна внутрішньої енергії системи рівна нулю, тоді з першим началом термодинаміки $\Delta Q = A$. Це вказує, що неможливо побудувати такий періодично діючий двигун, який би виконував більшу роботу, ніж надана йому кількість енергії. Іншими словами: вічний двигун першого роду неможливий.

11.5 Теплоємність газів

Розрізняють теплоємність тіла, питому теплоємність, молярну теплоємність. Між цими величинами існує зв'язок. **Теплоємністю** тіла називається величина, чисельно рівна кількості теплоти, яку потрібно надати тілу, щоб підвищити його температуру на один кельвін

$$c_{\text{тіла}} = \frac{dQ}{dT} . \quad (11.9)$$

Вимірюється теплоємність тіла в $\text{Дж} / \text{K}$.

Питомою **теплоємністю** тіла називають величину чисельно рівну кількості теплоти, яку затратили, щоб нагріти одиницю маси тіла на один кельвін.

$$c = \frac{1}{m} \frac{dQ}{dT} , \quad (11.10)$$

де m – маса тіла. Одиниця вимірювання питомої теплоємності $\text{Дж}/(\text{кг} \text{ K})$.

Молярною теплоємністю називається величина, чисельно рівна кількості теплоти, яку потрібно затратити, щоб нагріти один моль речовини на один Кельвін.

$$C = \frac{1}{\nu} \frac{dQ}{dT} , \quad (11.11)$$

або

$$C = \frac{M}{m} \frac{dQ}{dT} . \quad (11.12)$$

Тут ν – кількість молів. Одиниці вимірювання молярної теплоємності $\text{Дж}/(\text{моль} \text{ K})$. Ми будемо позначати молярну теплоємність великою літерою C , а питому – маленькою.

$$C = M \cdot c . \quad (11.13)$$

Для газів розрізняють теплоємності при сталому об'ємі і сталому тиску. Користуються в переважній більшості випадків молярними теплоємностями, тому надалі ми будемо говорити теплоємність газу, розуміючи під цим молярну теплоємність. Розглянемо нагрівання газу при сталому об'ємі, при цьому dV , а отже і робота розширення газу дорівнює нулю і перший закон термодинаміки набере вигляду:

$$dQ = dU. \quad \text{Маємо} \quad C = \frac{1}{\nu} \frac{dQ}{dT} = \frac{1}{\nu} \frac{dU}{dT} = \frac{1}{\nu} \frac{d}{dT} \left(\nu \frac{i}{2} RT \right) = \frac{i}{2} R.$$

Для всіх ідеальних газів

$$C_V = \frac{i}{2} R. \quad (11.14)$$

Нехай тепер газ нагрівають за сталого тиску, тоді

$$C_P = \frac{1}{\nu} \frac{dQ}{dT} = \frac{1}{\nu} \frac{dU}{dT} + \frac{1}{\nu} \frac{pdV}{dT}. \quad \text{Перший доданок у цьому}$$

рівнянні $\frac{1}{\nu} \frac{dU}{dT} = C_V$. Другий доданок перетворимо, використавши рівняння Клапейрона

$$pV = \nu RT \Rightarrow pdV = \nu R dT \Rightarrow \frac{pdV}{dT} = \nu R. \quad \text{Отже,}$$

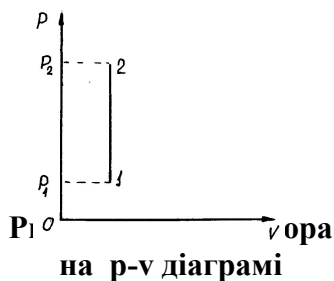
$$C_P = C_V + R. \quad (11.15)$$

Одержаний вираз для C_P носить назву – **рівняння Майєра**. Цьому виразу можна надати іншої форми

$$C_P = \frac{i+2}{2} R. \quad (11.16)$$

З рівняння (11.16) видно, що $C_P > C_V$. За сталого тиску теплоємність більша тому, що крім збільшення внутрішньої енергії потрібно ще затратити певну кількість тепла на роботу по розширенню газу.

11.6 Застосування першого закону термодинаміки до ізопроесів



Ізохорний процес – це процес за сталого об'єму.

Рівняння процесу має вигляд :

$$\frac{p}{T} = \text{const} \quad (11.17)$$

Діаграма цього процесу (ізохора) в координатах p, V має вигляд прямої, паралельної до осі ординат (рис. 11.2) Якщо представити залежність тиску від температури, що вимірюється за шкалою Цельсія, то рівняння (11.17) набере вигляду:

$$p = p_0(1 + \alpha t) \quad (11.18)$$

де p_0 – тиск при 0°C ,

$$\alpha = \frac{1}{273} \text{K}^{-1}$$

температурний

коефіцієнт тиску. У координатах p, t діаграма процесу має вигляд (рис. 11.3). Робота при ізохорному процесі не виконується, бо зміна об'єму дорівнює нулю. Тобто:

$$dA = p dV = 0$$

Тоді перший закон

термодинаміки набирає вигляду:

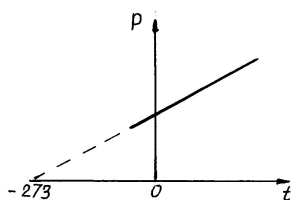
$$dQ = dU \quad (11.19)$$

звідки маємо

$$dQ = \frac{m}{M} \frac{i}{2} R dT$$

Теплоємність при ізохорному процесі:

$$C_V = \frac{i}{2} R$$



**Рисунок 11.3 –
Ізохора
на p-t діаграмі**

$$\text{тому } dQ = dU = \frac{m}{M} C_V dT$$

Рівняння **ізобарного процесу** має вигляд

$$\frac{V}{T} = \text{const} \quad (11.20)$$

Діаграма ізобарного процесу представлена на (рис. 11.4) в координатах p, V . Якщо міряти температуру за шкалою Цельсія, то залежність об'єму від температури задається формулою

$$V = V_0(1 + \alpha t), \quad (11.21)$$

де V_0 – об'єм газу при 0°C , $\alpha = \frac{1}{273} \text{K}^{-1}$ – температурний коефіцієнт об'ємного розширення. Діаграма процесу в координатах p, t дана на рисунку 11.5. Робота в ізобарному процесі

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p(V_2 - V_1) \quad (11.22)$$

рівна добутку тиску на зміну об'єму газу. На діаграмі в координатах p, V величина роботи рівна площі заштрихованого прямокутника (рис. 11.4).

Теплоємність при ізобарному процесі дорівнює

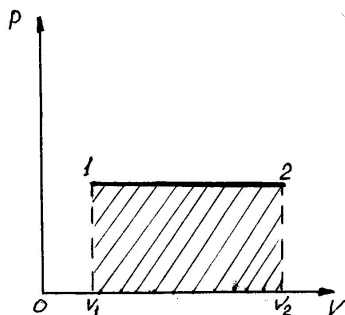


Рисунок 11.4 - Ізобара на p-v діаграмі

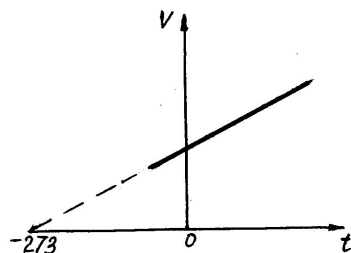


Рисунок 11.5 - Ізобара на v-t діаграмі

$$C_p = \frac{i+2}{2} R$$

Перший закон термодинаміки для ізобарного процесу має вигляд:

$$dQ = dU + dA,$$

або

$$\frac{m}{M} C_p dT = \frac{m}{M} C_v dT + dA$$

Ізотермічний процес – це процес за сталої температури ($T=const$) описується **рівнянням Бойля-Маріотта**

$$pV = const$$

Діаграма цього процесу в координатах pV являє собою гіперболу (рис. 11.6). Оскільки процес відбувається за сталої

температури, то $\Delta T = 0$, отже теплоємність ізотермічному процесі:

$$C_T = \frac{1}{v} \frac{\Delta Q}{\Delta T} \rightarrow \infty$$

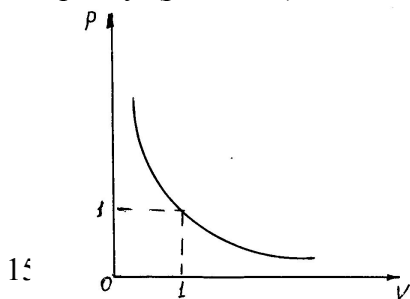


Рисунок 11.6 - Ізотерма на p-v діаграмі

Тобто за сталої температури все приведене тепло іде на виконання роботи, а температура не змінюється, отже теплоємність нескінченно велика. При ізотермічному процесі зміна внутрішньої енергії $dU = 0$. Тому перший закон термодинаміки має вигляд

$$dQ = dA \quad (11.23)$$

Знайдемо роботу розширення газу в ізотермічному процесі. Як відомо,

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

Виразимо з рівняння Клапейрона-Менделєєва $pV = \nu RT$ тиск

$$p = \frac{\nu RT}{V}$$

Підставимо вираз для p в рівняння роботи

$$A = \int_{V_1}^{V_2} \nu RT \frac{dV}{V} = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (11.24)$$

Отже, маємо вираз для роботи при ізотермічному процесі, якщо відомі початкові і кінцеві об'єми газу. Якщо відомі кінцеві і початкові тиски, то з рівняння Бойля-Маріотта маємо:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1},$$

тому робота може бути обчислена і так:

$$A = \nu RT \ln \frac{p_1}{p_2} \quad (11.25)$$

11.7 Адіабатний процес

Адіабатним називається процес, який проходить без теплообміну системи з навколишнім середовищем. Згідно з означенням маємо $dQ = 0$. Отже, перший закон термодинаміки для адіабатичного процесу набирає вигляду

$$dU + dA = 0. \quad (11.26)$$

Підставимо в це рівняння відповідні вирази для внутрішньої енергії та роботи:

$$\nu C_V dT + p dV = 0. \quad (11.27)$$

Виключимо з рівняння (11.27) dT . Для цього продиференціюємо рівняння Клапейрона-Менделєєва і знайдемо dT

$$p dV + V dp = \nu R dT,$$

звідки

$$dT = \frac{p dV + V dp}{\nu R}.$$

Підставимо dT в рівняння (11.27)

$$C_V p dV + C_V V dp + R p dV = 0,$$

звідки одержимо

$$\frac{C_V + R}{C_V} p dV + V dp = 0.$$

Позначимо $\frac{C_V + R}{C_V} = \frac{C_P}{C_V} = \gamma$ і розділимо змінні, маємо

$$\gamma \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0.$$

Проінтегруємо останній вираз

$$\gamma \int \frac{dV}{V} + \int \frac{dp}{p} = 0$$

Будемо мати $\gamma \ln V + \ln p = \text{const}$, де const – стала інтегрування.

Одержимо

$$pV^\gamma = \text{const} \quad (11.28)$$

Одержане рівняння є рівнянням адіабати – **рівняння Пуассона**.

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i+2}{i}$$

У рівнянні Пуассона називають **показником адіабати**. Для випадку одноатомних газів $i=3$ і $\gamma=1,67$. Якщо газ двоатомний і коливальні ступені вільності не збуджені, то $i=5$ і $\gamma=1,4$. Для багатоатомних газів за цих самих умов $i=6$ і $\gamma=1,33$.

З першого закону термодинаміки випливає, що для адіабатного процесу

$$dA = -dU$$

Знайдемо з цієї умови роботу розширення газу

$$dA = -d(\nu C_v T),$$

або

$$dA = -\nu C_v dT$$

$$A = -\nu C_v \int_{T_1}^{T_2} dT$$

Проінтегруємо вираз і одержимо

$$A = \nu C_v (T_1 - T_2) \quad (11.29)$$

З іншого боку, часто бувають відомі не початкова і кінцева температура, а кінцевий і початковий об'єм, тому цікаво виразити роботу саме через об'єми газу.

Елементарна робота

$$dA = p dV$$

Рівняння Пуассона можна записати так

$$p_1 V_1^\gamma = p V^\gamma,$$

де $p_1 V_1^\gamma$ – початкові значення об'єму та тиску. Ці величини для даних умов є сталими. Отже,

$$p = \frac{p_1 V_1^\gamma}{V^\gamma}$$

Підставимо p у вираз для елементарної роботи

$$dA = p_1 V_1^\gamma \frac{dV}{V^\gamma}$$

Проінтегруємо цей вираз.

$$A = p_1 V_1^\gamma \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^\gamma} = p_1 V_1^\gamma \frac{V^{1-\gamma}}{1-\gamma} \Big|_{V_1}^{V_2}$$

Отже, робота

$$A = \frac{p_1 V_1^\gamma}{\gamma - 1} (V_1^{1-\gamma} - V_2^{1-\gamma})$$

Ми поміняли місцями межі інтегрування і тому в знаменнику замість $1-\gamma$ пишемо $\gamma-1$.

Величину V_1^γ розглянемо як $V_1^\gamma = V_1 V_1^{\gamma-1}$ внесемо в дужки $V_1^{\gamma-1}$

$$A = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} (V_1^{1-\gamma} V_1^{\gamma-1} - V_2^{1-\gamma} V_1^{\gamma-1})$$

або

$$A = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right). \quad (11.30)$$

Знаючи що $p_1 V_1 = \nu R T_1$ можемо записати вираз для роботи і в такому вигляді:

$$A = \frac{\nu R T_1}{\gamma - 1} \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right). \quad (11.31)$$

Адіабатний процес можна здійснити в тому випадку, коли система ідеально ізольована від навколишнього середовища. Слід зауважити, що адіабатний процес належить до ізопроцесів. Сталою величиною в адіабатному процесі є ентропія.

Контрольні запитання

1. Внутрішня енергія ідеального газу.
2. Ступені вільності молекул.
3. Перший закон термодинаміки.
4. Теплоємність речовини. Молярна і питома теплоємності.
5. Робота при ізохорному, ізобарному та ізотермічному процесах. Перший закон термодинаміки при цих процесах.
6. Адіабатний процес. Перший закон термодинаміки при адіабатному процесі.
7. Рівняння Пуассона для адіабатного процесу.

12 ДРУГИЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМІКИ

11.1 Рівноважні і нерівноважні процеси. Оборотні та необоротні процеси

Будь-яка система може перебувати в різних агрегатних станах, які відрізняються температурою, тиском, об'ємом і т.д. Величини, які характеризують стан системи, називаються **параметрами станів системи**.

Рівноважним станом системи називають такий стан, за якого всі параметри системи мають певні значення, які залишаються при незмінних зовнішніх умовах сталими.

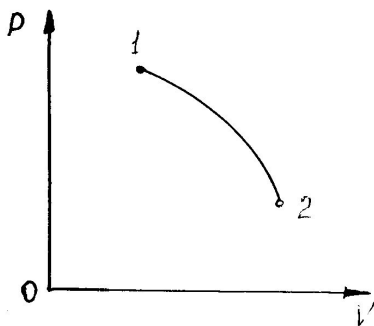


Рисунок 12.1 - Рівноважний стан та рівноважний процес на p - v діаграмі

Якщо по координатних осях відкладають значення двох будь-яких параметрів, то рівноважний стан можна зобразити на діаграмі точкою (рис.12.1).

Нерівноважний стан не може бути зображений таким способом, бо хоч один з параметрів не буде мати в нерівноважному стані сталого значення. Перехід системи з одного стану в інший називається **процесом**.

Процес, який складається з неперервної послідовності рівноважних станів, називається **рівноважним**. Щоб здійснити рівноважний процес, його потрібно проводити нескінченно повільно, тому всякий рівноважний процес є абстракцією.

Рівноважний процес може бути зображений на діаграмі лінією (рис. 12.1).

Оборотним називається процес, який може бути проведеним в зворотному напрямі таким чином, що система буде проходити через ті ж стани що і при прямому переході, але в зворотній послідовності. Оборотним може бути тільки рівноважний процес. **Круговим процесом (циклом)** називається процес, за якого система після ряду змін повертається у вихідний стан (рис.12.2).

11.2 Робота циклу. Тепловий двигун

Робота виконана при круговому процесі $(1,a,2,1)$ координатах $p - V$ чисельно дорівнює площі фігури обмеженої замкнутою

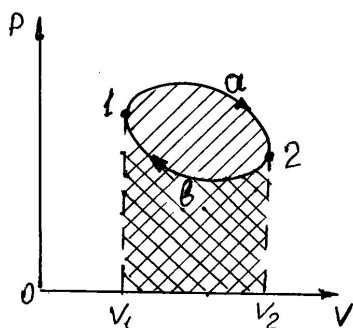


Рисунок 12.2 - Круговий процес

кривою, що зображає цикл (рис. 12.2). Дійсно, робота в прямому процесі $(1,a,2)$ визначається площею фігури $(1,a,2,V_2V_1,1)$. Ця робота розширення додатна. При зворотному процесі $(2,1)$ робота від'ємна і зображається площею фігури $(2,1,V_1V_2,2)$. Сума робіт зображується площею фігури $(1,a,2,1)$.

У результаті кругового процесу (циклу) система повертається у вихідний стан, тому повна зміна внутрішньої енергії дорівнює нулю. Згідно з першим законом термодинаміки, кількість теплоти одержана системою

$$Q_1 = U_2 - U_1 + A_1. \quad (12.1)$$

Кількість теплоти віддана системою

$$-Q_2 = U_1 - U_2 - A_2. \quad (12.2).$$

Додаючи рівняння, одержимо

$$Q_1 - Q_2 = A_1 - A_2, \quad (12.3)$$

де $A_1 - A_2$ є повна робота, виконана системою за цикл. Отже,

$$A = Q_1 - Q_2. \quad (12.4)$$

Будь-який тепловий двигун являє собою систему, що здійснює багаторазово деякий круговий процес. Тому робота, виконана тепловим двигуном, визначається формулою (12.4). З цієї формули випливає, що не вся одержана кількість теплоти Q_1 використовується для виконання роботи; частина теплоти Q_2 повинна бути віддана в навколишнє середовище. Теплову машину прийнято характеризувати **коефіцієнтом корисної дії η** , який визначається як відношення виконаної за цикл роботи до одержаної за цикл теплоти

$$\eta = \frac{A}{Q_1}.$$

Знаючи що $A = Q_1 - Q_2$, можна записати

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}. \quad (12.5)$$

11.3 Другий закон термодинаміки

Історично другий закон термодинаміки виник з аналізу роботи теплових двигунів. Бажано було б мати такий тепловий двигун, в якому все одержане тепло перетворювалося б у роботу, тобто коефіцієнт корисної дії такого теплового двигуна був би рівним одиниці. Такий тепловий двигун носить назву вічного двигуна другого роду.

Перший закон термодинаміки не забороняє побудови такого двигуна, бо це не суперечить закону збереження енергії

$$Q_1 = A,$$

але весь досвід набутий людством показує, що це неможливо.

Можна дати декілька формулювань другого закону термодинаміки: неможливий такий періодичний процес, єдиним результатом якого було б повне перетворення одержаної системою теплоти в роботу (формулювання належить Томсону).

Клаузіус дав інше більш глибоке формулювання другого закону: неможливі такі процеси, єдиним кінцевим результатом яких був би перехід тепла від менш нагрітого, до тіла більш нагрітого.

11.4 Цикл Карно

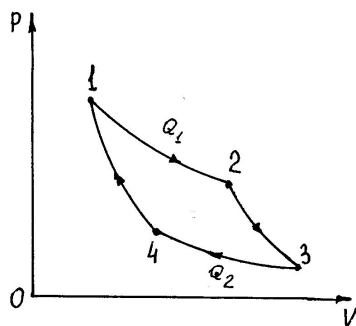


Рисунок 12.3 - Цикл Карно

Якщо не можна збудувати тепловий двигун з к.к.д., рівним одиниці, то бажано домогтися того, щоб він був якомога більшим. Вперше шлях до підвищення к.к.д. теплових машин був вказаний Карно, який розглянув цикл, що дістав назву циклу Карно.

Цей цикл являє собою оборотний круговий процес, що складається з двох ізотерм і двох адіабат (рис. 12.3).

При ізотермічному процесі внутрішня енергія не змінюється, тому кількість одержаного газом тепла Q_1 рівна роботі $A_{1,2}$ в ізотермічному процесі переходу з стану 1 в стан 2 при температурі T_1

$$Q_1 = A_{1,2} = \nu R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} . \quad (12.6)$$

Кількість теплоти відданої холодильнику Q_2 рівна роботі $A_{3,4}$, затраченій на стискання газу при ізотермічному переході з стану 3 в стан 4 при температурі T_2

$$Q_2 = A_{3,4} = \nu R T_2 \ln \frac{V_3}{V_4} . \quad (12.7)$$

Для того щоб цикл був замкнутим, потрібно щоб стани 1 і 4 лежали на одній адіабаті. Звідси випливає

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1} . \quad (12.8)$$

аналогічно, оскільки стани 2 і 3 є на одній і тій самій адіабаті, виконується умова

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1} . \quad (12.9)$$

Ділимо почленно рівняння (12.9) на (12.8) і одержуємо умову замкнутості циклу

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4} . \quad (12.10)$$

Підставимо вирази Q_1 і Q_2 у вираз для к.к.д. :

$$\eta = \frac{\nu R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - \nu R T_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{\nu R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}} . \quad (12.11)$$

Враховуючи (12.10) одержимо:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} . \quad (12.12)$$

Таким чином к.к.д. циклу Карно для ідеального газу залежить тільки від температур нагрівника і холодильника. У термодинаміці доведено, що к.к.д. всіх теплових машин, які

працюють за оборотним циклом Карно з одним і тим самим нагрівником і холодильником, однакові і не залежать від конструкції машини і роду робочого тіла. Отже, для всіх оборотних теплових машин к.к.д. залежить тільки від температур нагрівника і холодильника. Якщо машина необоротна, то к.к.д. такої машини менший за к.к.д. оборотної теплової машини.

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \leq \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad (12.13)$$

12.5 Нерівність Клаузіуса. Ентропія

У термодинаміці доведено, що для будь-якого оборотного кругового процесу к.к.д. не може бути більше за к.к.д. оборотного циклу Карно, що проходить між максимальною і мінімальною температурами цього кругового процесу.

Отже, для будь-якого циклу Карно існує нерівність

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \leq \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

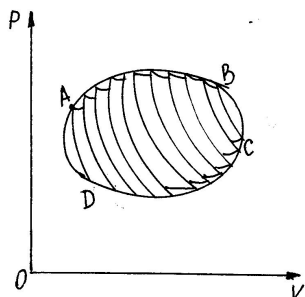


Рисунок 12.4 - Круговий процес розбитий на елементарні цикли Карно

звідки випливає, що

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} \leq 0$$

Врахуємо, що Q_2 - це кількість тепла віддана холодильнику, тому вона від'ємна і рівна $(-Q_2)$, тоді остання нерівність набирає вигляду:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0 \quad (12.14)$$

$$\frac{Q}{T}$$

Величина $\frac{Q}{T}$, яка вимірюється відношенням одержаної чи відданої теплоти в процесі до температури процесу, називається **приведеною теплотою**. Отже, для циклу Карно сума приведених теплот не може бути більшою за нуль. Ця остання нерівність носить назву – **нерівність Клаузіуса**. Ця нерівність може бути узагальнена на будь-який круговий процес. Для цього розіб'ємо цей круговий процес на елементарні цикли Карно (рис. 12.4). При здійсненні всіх цих циклів Карно частини кожної з адіабат, які проходять двічі в протилежних напрямках, випадають, залишаються ізотерми і краєві ділянки адіабат. Для кожного елементарного циклу Карно запишемо нерівність Клаузіуса:

$$\frac{\Delta Q_m}{T_m} + \frac{\Delta Q_n}{T_n} \leq 0 \quad (12.15)$$

де Q_m – одержана кількість тепла від нагрівника, а Q_n – кількість тепла віддана холодильнику. Знак рівності виконується, якщо всі процеси оборотні. Просумуємо всі вирази (12.15) для всіх елементарних циклів Карно, одержимо для кругового процесу:

$$\sum_i \frac{\Delta Q_i}{T_i} \leq 0 \quad (12.16)$$

У випадку, коли цикл оборотний, сума (12.16) перетворюється в інтеграл.

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0 \quad (12.17)$$

У 1906 році в результаті досліджень властивостей твердих тіл за низьких температур В. Нернст встановив третій закон термодинаміки (**теорема Нернста**): при абсолютному нулі ентропія системи в стані рівноваги дорівнює нулю. Тобто

$$\lim_{T \rightarrow 0} S = 0 \quad (12.18)$$

Як наслідок з нього маємо $\lim_{T \rightarrow 0} C_V = 0, \lim_{T \rightarrow 0} C_P = 0$

Третій закон термодинаміки заперечує можливість досягнення абсолютного нуля. Справді, всі процеси, які проходять з теплопередачею, супроводжуються зміною ентропії. Це означає, що при $S = \text{const}$ процес з теплопередачею неможливий, тобто при $T = 0$ система не віддає теплоти, бо не охолоджується. Отже, сформулюємо таке положення: не можна створити машину, яка здатна взяти всю теплоту від тіла, тобто охолодити його до абсолютного нуля. Досліди підтверджують третій закон термодинаміки.

Контрольні запитання

1. Оборотні і необоротні процеси.
2. Які основні частини теплової машини?
3. Коефіцієнт корисної дії теплового двигуна. Чи може його к.к.д. дорівнювати 100 %?
4. Другий закон термодинаміки.
5. З яких процесів складається цикл Карно?
6. Нерівність Клаузіуса.
7. Ентропія. Ентропія різних процесів.
8. У чому полягає третій закон термодинаміки?

13 РЕАЛЬНІ ГАЗИ. ВЛАСТИВОСТІ РІДИН І ТВЕРДИХ ТІЛ. ФАЗОВІ ПЕРЕХОДИ

13.1 Реальні гази. Рівняння Ван-дер-Ваальса

Поведінка реальних газів описується рівнянням Клапейрона-Менделєєва тільки за низьких тисків і досить високих температур. При збільшенні тиску і зменшенні температури розбіжності між теорією і експериментом стають досить значними.

У першому наближенні молекули реального газу можна розглядати як тверді кульки діаметром d , між якими існують тільки сили взаємного притягання. У той самий час, враховуючи кінцеві розміри молекул, не слід відкидати можливості виникнення між молекулами відштовхування. Таку модель газу прийняв Ван-дер-Ваальс, яка дозволила йому одержати рівняння, яке описує поведінку реального газу більш точно, ніж рівняння Клапейрона-Менделєєва. Ван-дер-Ваальс взяв за основу рівняння Клапейрона-Менделєєва, для

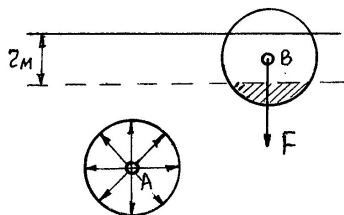


Рисунок 13.1 - Різне розміщення молекул

одного моля газу, але ввів у нього дві поправки. По-перше, він врахував, що об'єм для вільного руху молекул менший від геометричного об'єму посудини V_0 на величину b . Величина b рівна тій частині об'єму посудини, яку зайняли б молекули одного моля, якщо віддалі між їх центрами стали б рівним d , тобто їх ефективному діаметру. Можна показати, що

поправка в чотири рази більша за власний об'єм всіх N молекул моля газу. Отже, в рівнянні замість об'єму V_0 слід брати об'єм $(V_0 - b)$ де V_0 – об'єм моля газу. Друга поправка

зумовлена наявністю сил притягання між молекулами. Внаслідок швидкого зменшення сил притягання з віддалю, починаючи з деякої віддалі r_m , взаємодією між молекулами можна знехтувати. Ця величина r_m називається **радіусом молекулярної взаємодії**. Сферу радіусом r_m називають **сферою молекулярної взаємодії**. Якщо молекула міститься в середині газу, то сумарна сила притягання, що діє на неї з боку інших молекул, рівна нулю. Якщо молекула розміщена біля стінки посудини на відстані меншій ніж радіус молекулярної взаємодії, то сумарна сила притягання, що діє на неї з боку інших газових молекул, напрямлена в середину газу (рис. 13.1). Сила напрямлена в середину газу, буде діяти на всі молекули, що лежать поблизу стінки в шарі товщиною r_m . Число цих молекул пропорційно концентрації. З другого боку число молекул, які діють на ці молекули також пропорційно концентрації. Отже, сила, що діє в середину газу на поверхневий шар молекул, пропорційна квадрату

концентрації. Але $n = \frac{N}{V}$, де N – число молекул, а V – об'єм

газу. Тому $F \sim n^2 \sim \frac{1}{V^2}$. Ця сила, що діє на поверхневий шар,

буде створювати додатковий тиск на газ $p' = \frac{a}{V^2}$, де a – константа, так само як і константа b , носить назву – поправки Ван-дер-Ваальса. Отже, з урахуванням p' , тиск у газі буде $(p + p')$ де p – зовнішній тиск. Тому **рівняння Клапейрона-Менделєєва для одного моля газу** набере вигляду:

$$\left(p + \frac{a}{V_0^2} \right) (V_0 - b) = RT, \quad (13.1)$$

де, V_0 – об'єм одного моля газу.

Записати **рівняння Ван-дер-Ваальса** для **будь-якої кількості газу** можна, помноживши ліву і праву частину на

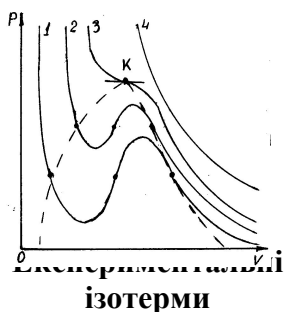
$$\frac{m}{M} \text{ і замінивши } V_0 \text{ на } \frac{V}{v}, \text{ де } v = \frac{m}{M}.$$

Одержимо

$$\left(p + \frac{m^2}{M^2} \frac{a}{V^2} \right) \left(V - \frac{m}{M} b \right) = \frac{m}{M} RT \quad (13.2)$$

13.2 Ізотерми Ван-дер-Ваальса. Критичний стан речовини

Рівняння Ван-дер-Ваальса є алгебраїчним рівнянням третього степеня відносного об'єму. Тому воно дає або одне, або три різні значення об'єму залежно від p і T .

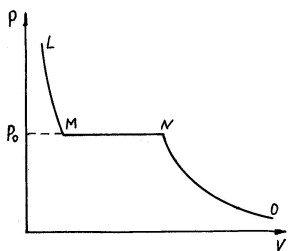


Графічні залежності p від V для різних температур з рівняння Ван-дер-Ваальса дані на рисунку 13.2. Для того щоб вияснити зміст цієї залежності, потрібно розглянути експериментальну ізотерму реального газу.

На рисунку 13.3 представлена

експериментальна ізотерма вуглекислого газу для низьких температур. При великих об'ємах CO_2 поводить себе як ідеальний газ (ділянка ON).

Але при певному тиску p_0 частина газу переходить у рідину.



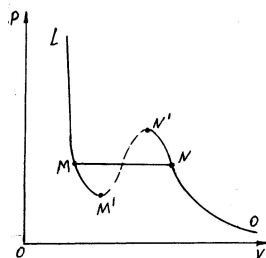
**Рисунок 13.3 -
Експериментальна ізотерна
вуглекислого газу для
низьких температур**

Система стає двофазною: насичена пара – рідина. Тиск насиченої пари від об'єму не залежить, тому на ізотермі маємо ділянку MN паралельну осі об'ємів. Точка M відповідає такому стану, коли вся пара перетворюється в рідину. Рідини практично нестисливі, тому ділянка ML , що відповідає рідкому

стану майже паралельна осі тисків.

На ізотермі Ван-дер-Ваальса (рис. 13.4), ділянка ON відповідає газоподібному стану, ділянка MN – рідкому стану. Ділянка NN' відповідає переохолодженій парі, а ділянка MM' – перегрітій рідині. Стан $N'M'$ в природі не спостерігається, що вказує на наближений характер рівняння Ван-дер-Ваальса. Ізотерна Ван-дер-Ваальса є така

ізотерма, яка називається критичною, а відповідна їй температура – критичною температурою. Ця ізотерна має



**Рисунок 13.4 -
Ізотерма Ван-дер-
Ваальса**

лише одну точку перегину K (крива 3, рис.13.2). Точка K називається **критичною точкою**, а відповідні їй об'єм і

тиск критичним тиском p_K і критичним об'ємом V_K .

Критична температура – це така температура, за якої рідина перетворюється в пару незалежно від тиску і питомого

об'єму рідини. При температурах, вищих за критичну, речовина може існувати тільки в газоподібному стані і ніяким стиском не може бути перетворена в рідину (крива 4, рис. 13.2).

Тиск насиченої пари не може бути більшим за p_K і об'єм речовини в рідкому стані не може бути більшим за критичний об'єм. Стан речовини, який відповідає точці K на критичній ізотермі, названо критичним.

Критичний стан – це стан, в якому зникає всяка різниця між рідиною і парою. З рівняння Ван-дер-Ваальса можна визначити значення критичних параметрів газу:

$$V_0 = 3b, \quad p_K = \frac{a}{27b^2}, \quad T_K = \frac{8a}{27Rb}. \quad (13.3).$$

13.3 Внутрішня енергія реального газу. Ефект Джоуля-Томсона

Внутрішня енергія реального газу складається з кінетичної енергії поступального руху і потенціальної енергії міжмолекулярної взаємодії. Взаємна потенціальна енергія молекул залежить від їх середньої відстані між ними. Тому потенціальна енергія повинна бути функцією об'єму газу. У випадку газу, який описується рівнянням Ван-дер-Ваальса, робота проти внутрішніх сил, що діють між молекулами

$$dA = p_i dV \quad \text{де} \quad p_i = \frac{a}{V_0^2}.$$

$$dW_n = dA = \frac{a}{V_0^2} dV$$

Прирівнявши, знайдемо

$$W_n = \int \frac{a}{V_0^2} dV = -\frac{a}{V_0} + const \quad (13.4)$$

Значення сталої інтегрування знайдемо з умови, що при нескінченно великому об'ємі потенціальна енергія взаємодії рівна нулю.

Отже,

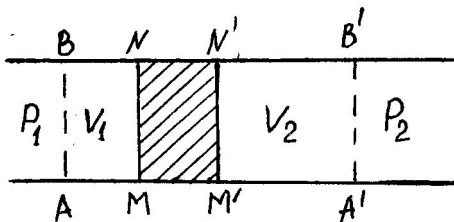
$$W_n = -\frac{a}{V_0} \quad (13.5)$$

Повна внутрішня енергія одного моля реального газу

$$W_0 = C_V T - \frac{a}{V_0} \quad (13.6)$$

Джоуль і Томсон відкрили важливе фізичне явище, яке дістало назву ефект Джоуля-Томсона. У досліджах Джоуля і Томсона, бралась циліндрична трубка, оточена теплоізолюючим матеріалом (рис. 13.5), в середині трубки між двома металічними сітками MN і MN' поміщалась

кроспресованої вати. Досліджуваний газ під дією різниці тисків повільно протікав через пробку, завдяки якій течія газу була повільною, тобто не виникало завихрень. Внаслідок повільності течії, кінетичною



енергією газу можна було знехтувати. У цих умовах газ по обидва боки від пробки перебував у термодинамічно рівноважних станах. Наявність теплового захисту робило процес адіабатичним. Тиски P_1 і P_2 підтримувались сталими. При стаціонарній течії по один бік пробки встановлювалась стала температура T_1 , а по іншій T_2 . Стаціонарна течія газу через пробку без теплообміну і виконання зовнішніх робіт називається процесом Джоуля-Томсона, а зміна температури при такому процесі – **ефектом Джоуля-Томсона**.

Виділимо зліва порцію газу, що займає при P_1 об'єм V_1 , після проходження крізь пробку ця порція буде займати об'єм V_2 при тиску P_2 . Відповідно, робота, виконана над газом, буде рівна

$$p_2 V_2 - p_1 V_1 = A.$$

Тепла газ не одержував, тому з другого закону термодинаміки:

$$U_2 - U_1 + A = 0,$$

або

$$U_2 - U_1 + p_2 V_2 - p_1 V_1 = 0,$$

звідки

$$U_1 + p_1 V_1 = U_2 + p_2 V_2. \quad (13.7)$$

Величина

$$I = U + pV \quad (13.8)$$

називається **ентальпією**. Отже, процес Джоуля-Томсона – це ізопроцес, в якому стала ентальпія. На дослідах було встановлено, що температура в процесі Джоуля-Томсона змінюється. Різниця $\Delta T = T_2 - T_1$ може бути як більшою так і меншою за нуль, тобто після проходження через пробку газ може як охолоджуватись так і нагріватись. Якщо $\Delta T < 0$ –

ефект Джоуля-Томсона додатний, якщо ж $\Delta T > 0$ – ефект від’ємний. Температура, за якої ефект рівний нулю, тобто $\Delta T = 0$, називають **температурою інверсії**.

13.4 Рідини. Поверхневий натяг

Рідини є агрегатним станом речовини, проміжним між газоподібним і твердим, тому вони мають властивості притаманні і газам і твердим тілам. Рідини, як і тверді тіла, мають певний об’єм, а подібно газам, вони набувають форми посудини, в якій вони містяться. У газах середня кінетична енергія теплового руху молекул значно більша за середню потенціальну енергію, обумовлену силами притягання. Тому молекули газу розлітаються в різні боки і газ займає наданий йому об’єм. У рідинах і твердих тілах сили притягання значні, тому середня кінетична енергія теплового руху молекул менша середньої потенціальної енергії взаємодії молекул, і її недостатньо для подолання цих сил. Тому рідини і тверді тіла мають певний об’єм. У газах нема ніякої закономірності у взаємному розташуванні молекул. Для твердих тіл характерний дальній порядок у розташуванні частинок, тому тверді тіла мають кристалічну будову. У розташуванні молекул рідини спостерігається так званий ближній порядок. Це означає, що щодо будь-якої молекули розташування найближчих сусідів є впорядкованим. У міру віддалення від даної молекули, впорядкованість в розташуванні молекул порушується і досить швидко зникає. У рідинах з видовженими молекулами спостерігається однакова орієнтація молекул у межах значного об’єму, чим зумовлюється анізотропія оптичних і деяких інших властивостей. Такі рідини дістали назву **рідких кристалів**. У них впорядкована тільки орієнтація, а не розташування

молекул. Молекула рідини протягом деякого часу коливається навколо певного положення рівноваги. Час від часу молекула стрибком переміщується в нове положення рівноваги, розташоване від попереднього на віддалі порядку розмірів самих молекул. Середній час коливань навколо положення рівноваги називається **часом осілого життя**, який зменшується з ростом температури. Тому з ростом температури сильно зростає рухливість молекул і знижується в'язкість рідин.

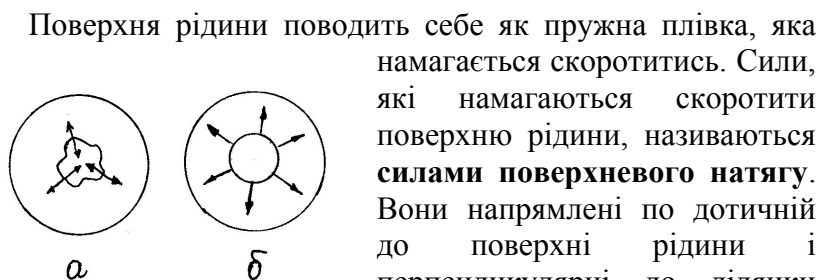
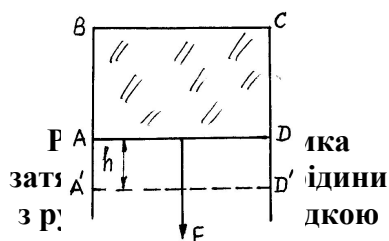


Рисунок 13.6 - Сила поверхневого натягу

Поверхня рідини поводить себе як пружна плівка, яка намагається скоротитись. Сили, які намагаються скоротити поверхню рідини, називаються **силами поверхневого натягу**. Вони напрямлені по дотичній до поверхні рідини і перпендикулярні до ділянки межі поверхні, на яку вони діють. Переконатись у наявності сил поверхневого натягу можна на такому досліді.

Можна затягнути дратяне кільце мильною плівкою (рис. 13.6,а). Якщо на поверхні цієї плівки покласти петлю з нитки, то вона збереже ту випадкову форму, якої набуває в перший момент. На кожну ділянку нитки діють однакові сили, що зрівноважують одна одну. Якщо проткнути частину плівки, що міститься в середині петлі, то сили не будуть більше



зрівноважуватись і зовнішня щодо петлі частина плівки розтягне її в коло (рис.13.6,б).

Сила, яка діє на межу поверхні контуру, прямопропорційна довжині цієї межі:

$$F = \sigma l. \quad (13.8)$$

Коефіцієнт σ носить назву **коефіцієнта поверхневого натягу**. З формули (13.8) випливає, що

$$\sigma = \frac{F}{l}, \quad (13.9)$$

тобто **коефіцієнт поверхневого натягу** σ чисельно рівний силі поверхневого натягу, що діє на одиницю довжини межі поверхні рідини. Вимірюється σ в $H/м$.

Розглянемо такий дослід. Рамка $ABCD$ зтягнута плівкою рідини (рис. 13.7), причому AD може вільно переміщуватись. При переміщенні відрізка AD в положення A_1D_1 на відстань h виконується робота $\Delta A = Fh$, де F – сила поверхневого натягу. Якщо довжина AD рівна l , то зміна площі (з урахуванням того, що плівка рідини на рамці має дві поверхні) буде

$$A = \sigma 2lh. \quad (13.10)$$

Але $2lh = \Delta S$ – зміна площі плівки, тому робота з розтягування плівки

$$A = \sigma \Delta S, \quad (13.11)$$

звідки

$$\sigma = \frac{A}{\Delta S}. \quad (13.12)$$

З формули (13.12) можна зробити висновок, що **коефіцієнт поверхневого натягу** чисельно рівний роботі з ізотермічного збільшення площі поверхні рідини на одиницю площі. Виконана робота іде на зміну поверхневої енергії $A = \Delta W$. Звідси:

$$\sigma = \frac{\Delta W}{\Delta S}, \quad (13.13)$$

коефіцієнт поверхневого натягу чисельно рівний поверхневій енергії, що припадає на одиницю площі поверхні рідини.

Коефіцієнт поверхневого натягу залежить від температури, з ростом якої він зменшується. Поверхневий натяг суттєво залежить від домішок. Речовини, які послаблюють поверхневий натяг, називають **поверхнево-активними**. Поверхнево-активними речовинами, що знижують поверхневий натяг води, є мило, спирт, ефіри, нафта.

13.5 Змочування

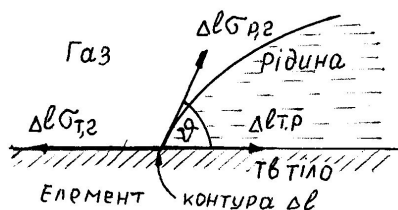


Рисунок 13.8 - Три агрегатні стани, які межують між собою

Якщо межують між собою відразу три агрегатних стани: твердий, рідкий і газоподібний (рис. 13.8), то вся система приймає конфігурацію, що відповідає мінімуму сумарної потенціальної енергії. З рисунку видно, що умова

рівноваги елемента контуру довжиною Δl запишеться так:

$$\sigma_{ГР}\Delta l = \sigma_{ТР}\Delta l + \sigma_{РГ}\Delta l \cos \vartheta, \quad (13.14)$$

де $\sigma_{ТГ}, \sigma_{ТР}, \sigma_{РГ}$ – коефіцієнти поверхневого натягу на межах тверде тіло – газ, тверде тіло – рідина, рідина – газ. Відкладемо в середині рідини кут ϑ між дотичними до поверхні твердого тіла і до поверхні рідини, який назовемо **крайовим**. З (13.14) випливає:

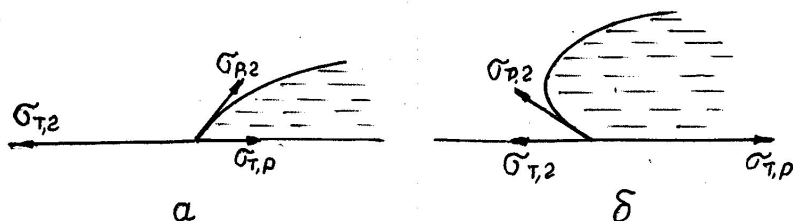
$$\cos \vartheta = \frac{\sigma_{ТГ} - \sigma_{ТР}}{\sigma_{РГ}}. \quad (13.15)$$

Крайовий кут визначається виразом (13.15) тільки за умови, що

$$\frac{|\sigma_{ТГ} - \sigma_{ТР}|}{\sigma_{РГ}} \leq 1 \quad (13.16)$$

Якщо $|\sigma_{ТГ} - \sigma_{ТР}| > \sigma_{РГ}$, то ні за яких значень ϑ рівновага не можлива. Це буває в двох випадках.

Випадок перший: $\sigma_{ТГ} > \sigma_{ТР} + \sigma_{РГ}$. Яким би малим не був б кут ϑ , $\sigma_{ТГ}$ перевищує суму двох інших коефіцієнтів (рис.13.9,а). У цьому випадку рідина необмежено розтікається



**Рисунок 13.9 - Повне змочування (а)
та повне незмочування (б)**

по поверхні твердого тіла і ми маємо **повне змочування**, за якого $\theta = 0$.

Випадок другий: $\sigma_{TP} > \sigma_{TG} + \sigma_{PG}$ (рис. 13.9,б). Як би не був близьким θ до π , σ_{TP} перевищує суму двох інших коефіцієнтів. У цьому випадку поверхня, по якій рідина межує з твердим тілом, стягується в точку. Має місце **повне незмочування** тіла, за якого крайовий кут дорівнює π .

13.6 Тиск під викривленою поверхнею рідини. Капілярні явища

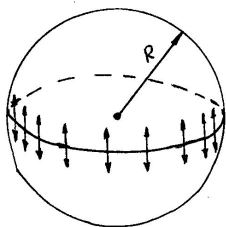
Якщо поверхня рідини не плоска, а викривлена, то намагання її скоротитись веде до виникнення додаткового тиску до того, що діє під плоскою поверхнею.

Обчислимо додатковий тиск під сферичною поверхнею. Для цього умовно розітнемо сферичну краплю діаметральною площиною на дві півкулі (рис.13.10). Через поверхневий натяг обидві півкулі притискаються одна до одної з силою:

$$F = l\sigma = 2\pi R\sigma$$

Ця сила діє на поверхню дотику півкуль $S = \pi R^2$.

Тому додатковий тиск



$$\Delta p = \frac{F}{S} = \frac{2\pi R\sigma}{\pi R^2} = \frac{2\sigma}{R} \quad (13.17)$$

Кривизна сферичної поверхні всюди однакова і визначається радіусом сфери R . Кривизну довільної поверхні характеризують середньою кривизною

**Рисунок 13.10 -
Сферична капля,
розітнена
діаметральною
площиною на дві
півкулі**

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (13.18)$$

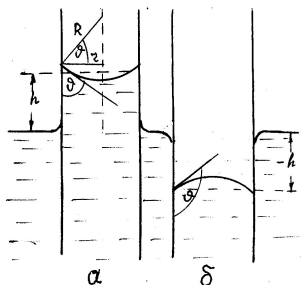
для будь-якої пари взаємно перпендикулярних нормальних перерізів, що проходять через дану точку поверхні, є величина стала для даної точки і є середньою кривизною поверхні в даній точці. Тому додатковий тиск визначається загалом:

$$\Delta p = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (13.19)$$

Якщо центр кривизни нормального перерізу лежить під поверхнею, то відповідний йому радіус додатний, а якщо над поверхнею, то радіус кривизни від'ємний. Для циліндричної поверхні $R_1 = R$, $R_2 = \infty$, тому додатковий тиск під викривленою циліндричною поверхнею:

$$\Delta p = \frac{\sigma}{R} \quad (13.20)$$

Формула (13.19) носить назву **формули Лапласа**. Додатковий



**Рисунок 13.11 -
Капілярні явища**

тиск під викривленою поверхнею обумовлює зміну рівня рідини в капілярних трубках, через це його називають деколи капілярним тиском. У вузькій капілярній трубці внаслідок існування крайового кута вся поверхня рідини викривлюється. Якщо рідина змочує стінки капіляра, поверхня має вгнуту форму і додатковий тиск під нею

від'ємний ($\Delta p < 0$), якщо рідина не змочує стінки, то поверхня рідини опукла і додатковий тиск під нею додатний (рис.13.11)

Такого роду викривлені поверхні називають **менісками**. Внаслідок існування додаткового тиску у випадку *a* рідина

буде підніматись у капілярі, доки зменшення тиску $\Delta p = \frac{2\sigma}{R}$ не зрівноважиться гідростатичним тиском $\Delta p = \rho gh$. Тут R – радіус кривизни поверхні, σ – коефіцієнт поверхневого натягу, h – висота підняття рідини. У випадку незмочування рідина опуститься в капілярі на висоту h , бо Δp – додатний.

Отже,

$$\rho gh = \frac{2\sigma}{R} \quad (13.21)$$

Радіус кривизни меніска R можна виразити через радіус

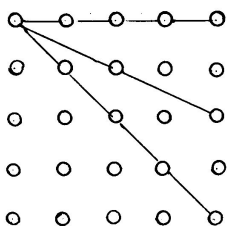
капіляра. З рисунка 13.11,а видно, що $R = \frac{r}{\cos \vartheta}$ де r – радіус капіляра, а ϑ – крайовий кут. Тоді

$$h = \frac{2\sigma \cos \vartheta}{\rho gr} \quad (13.22)$$

де h – висота підняття рідини в капілярі. Для випадку незмочування h – висота опускання рідини. Капілярні явища відіграють велику роль у природі і техніці. Наприклад, обмін вологою в ґрунті і рослинах здійснюється за допомогою підняття води по капілярах. На капілярності ґрунтується підняття рідини по гнотах, всмоктування вологи бетоном і т.д.

13.7 Властивості твердих тіл

Тверді тіла на відміну від рідин характеризуються постійністю об'єму і форми. Вони поділяються на дві групи: аморфні і кристалічні.



Дальний порядок

Кристалічні тверді тіла характеризуються наявністю дальнього порядку в розташуванні структурних елементів, з яких складається кристал. Якщо в кристалі провести лінію, то відстань між структурними елементами (атомами чи молекулами), що лежать по цій лінії в межах кристалу, будуть однаковими вздовж всієї лінії. Це і означає наявність дальнього порядку (рис. 13.12). В аморфних тілах дальній порядок не спостерігається, тому їх часто називають **переохолодженими рідинами**. Характерна риса кристалічного стану - анізотропія, тобто залежність фізичних властивостей (механічних, теплових, електричних і т.д.) від напрямку.

В аморфних твердих тілах анізотропія не спостерігається. Якщо все тіло складається з одного кристала, то воно називається **монокристалом**. Як правило, тверді тіла бувають у вигляді полікристалів. У полікристалах анізотропія спостерігається тільки в межах окремих кристалів, тіло ж у цілому внаслідок хаотичності орієнтації кристалів ізотропне.

Елементарною кристалічною коміркою є найменший структурний елемент, що має таку ж симетрію, як і кристал у цілому. За формою елементарної комірки всі кристали поділяються на 7 кристалічних сингоній.

1. Триклинна: $a \neq b \neq c$; $\alpha \neq \beta \neq \gamma$.
2. Моноклінна: $a \neq b \neq c$; $\alpha = \gamma = 90^\circ$ $\beta \neq 90^\circ$.
3. Ромбічна: $a \neq b \neq c$;
 $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$.
4. Тетрагональна: $a = b \neq c$; $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$.
5. Ромбоєдрична: $a = b = c$; $\alpha = \beta = \gamma \neq 90^\circ$.
6. Гексагональна: $a = b \neq c$; $\alpha = \beta = 90^\circ$ $\gamma = 120^\circ$.
7. Кубічна: $a = b = c$; $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$.

Елементарні комірки носять назву ґраток Браве. Всього є 14 ґраток Браве.

Залежно від природи структурних елементів у вузлах кристалічної ґратки і від природи сил взаємодії між ними розрізняють чотири типи кристалів: йонні, атомні, металічні і молекулярні.

Йонні кристали: у вузлах кристалічної ґратки розміщені йони різних знаків, зв'язок між якими обумовлений силами електростатичної взаємодії. Приклад – ґратка кам'яної солі $NaCl$.

Атомні кристали: у вузлах ґратки нейтральні атоми. Зв'язок між атомами ковалентний. Приклад: алмаз, графіт, германій, кремній.

Металічні кристали: в усіх вузлах ґратки розміщені додатні йони металу, а валентні електрони, колективізовані і рухаються між йонами на зразок електронного газу, зв'язуючи при цьому всі йони в одне ціле. Такий зв'язок називається металічним.

Молекулярні кристали: у вузлах ґратки містяться молекули. Сили взаємодії носять назву Ван-дер-ваальсівських, оскільки вони мають ту ж природу, що і сили притягання між молекулами, що приводять до відхилення газів від ідеальності. Приклад: кристали льоду, кристали CO_2 , O_2 , N_2 , B_2 , I . Твердий стан речовини може бути реалізований у декількох кристалічних модифікаціях. Наприклад, вуглець може існувати в вигляді графіту (гексагональна ґратка) і алмазу (кубічна ґратка).

13.8 Фази і фазові переходи

Фазою називається макроскопічна фізично однорідна частина речовини, відділена від решти частин системи

границями так, що вона може бути вилучена з системи механічним шляхом. Пояснимо це такими прикладами. У закритій посудині міститься вода, а над нею суміш повітря і водяної пари. У цьому випадку ми маємо справу з системою, що складається з двох фаз: одну фазу утворює вода, другу - суміш повітря і водяної пари. Якщо у воду додати декілька кусочків льоду, то ми вже будемо мати трифазну систему. Різні кристалічні модифікації речовини являють собою різні фази. Так наприклад алмаз і графіт є різними твердими фазами вуглецю. Перехід речовини з одної фази в іншу називається **фазовим переходом**. Прикладами таких фазових переходів можуть бути перехід із рідкого стану у газоподібний, що дістав назву **випаровування**, і зворотний перехід із газоподібного стану в рідкий, що має назву **конденсація**. Випаровування рідин відбувається за будь-якої температури, але найбільш інтенсивно воно йде при температурі кипіння. **Кипіння** – це процес випаровування всередині рідини. У центрах кипіння утворюються бульбашки повітря, в них випаровується рідина, бульбашки ростуть, піднімаються на поверхні рідини і там розриваються. Кипіння відбувається за сталої температури.

Перехід кристалічного тіла в рідину називається **плавленням** і відбувається за сталої для кожної речовини температури. Кількість тепла, яку необхідно затратити, щоб розплавити одиницю маси речовини за температури плавлення, називається **питомою теплотою плавлення**. Сталість температури при процесі плавлення зумовлюється тим, що підведене тепло іде на руйнування кристалічної ґратки, в той час як кінетична енергія руху молекул, що визначає температуру тіла, при цьому залишається сталою. Зворотний процес переходу рідини в кристалічне тіло так само відбувається за сталої температури. Тепло, яке відбирається від тіла при цьому процесі, компенсується

теплом, яке виділяється при утворенні кристалічної ґратки. Питома теплота кристалізації рівна питомій теплоті плавлення. Переходи: тверде тіло $\leftrightarrow$ рідина $\leftrightarrow$ газ називаються **агрегатними переходами**, які є яскравим прикладом фазових переходів першого роду.

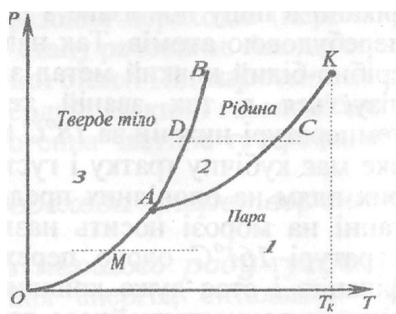
Фазові переходи першого роду характеризуються сталістю температури переходу і стрибкоподібною зміною об'єму, ентропії, внутрішньої енергії і т.д.

Фазові переходи, не пов'язані із поглинанням і виділенням тепла і зміною об'єму, називаються **фазовими переходами другого роду**.

Фазові переходи другого роду відбуваються в межах твердого агрегатного стану. Як і фазові переходи першого роду, вони характеризуються температурою переходу. Прикладами фазових переходів другого роду є: перехід феромагнетиків у парамагнетики, перехід сегнетоелектриків у звичайні діелектрики, перехід металів і деяких сплавів у надпровідний стан і ряд інших.

Фазові переходи можна зображати на p - T , p - V і T - V – діаграмах стану. Графічне зображення фазового переходу на одній із діаграм стану називають **фазовою діаграмою**.

Розглянемо найпростішу з них (рис. 13.13), для якої кожний агрегатний стан має лише одну фазу. Крива АК виражає залежність тиску насиченої пари від температури кипіння рідини, і називається кривою пароутворення,



розмежовує рідку і газоподібну фази. Точки вздовж кривої AK відповідають станам, у яких рідина і насичена пара перебувають у динамічній рівновазі. Крива пароутворення починається в

**Рисунок 13.13 - Фазова
діаграма**

точці А, а закінчується у критичній точці К, в якій зникає відмінність між рідиною і її насиченою парою.

Крива ОА (**сублімація** – процес переходу в газоподібний стан твердих тіл) – є лінією рівноваги твердої та газоподібної фази. Процес сублімації можливий в усьому інтервалі температур і тисків існування твердої і газоподібної фази. Тому крива починається в точці О, а закінчується в точці А.

Крива АВ – розмежовує тверду і рідку фази речовини. Точки вздовж кривої відповідають рівновазі рідкої і твердої фази, тобто процеси плавлення і кристалізації є рівноважними.

Всі три криві (сублімації, пароутворення і плавлення) перетинаються в одній точці А. Ця точка відповідає рівновазі між трьома фазами речовини – твердої, рідкої і газоподібної. Точка, яка відповідає рівновазі між трьома фазами речовини, називається **потрійною**.

Контрольні запитання

1. Відмінність реальних газів від ідеальних.
2. Рівняння стану реального газу для 1 моля.
3. Ізотерми Ван-дер-Ваальса. Критична ізотерма.
4. Зв'язок поправок а і в з критичними параметрами газу.
5. Суть ефекту Джоуля-Томсона.
6. Поверхневий натяг.
7. Змочування. Тиск лапласа під викривленою поверхнею рідини. Капілярність.
8. Фізичні типи кристалів. Зв'язок між молекулами.
9. Фазові переходи речовини. Фазова діаграма станів речовини.

14 ЕЛЕКТРОСТАТИКА

14.1 Основні властивості електричного заряду.

Закон Кулона

Відомо, що існує два типи електричних зарядів – додатні і від’ємні. Однойменні заряди відштовхуються, а різнойменні притягуються. Дослідним шляхом Миллікен довів, що електричний заряд дискретний, тобто заряд будь-якого тіла становить ціле кратне від деякого елементарного заряду $e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$. Електрон і протон є носіями, відповідно, елементарного негативного і позитивного зарядів.

З узагальнення дослідних даних було встановлено фундаментальний закон природи – закон збереження електричного заряду: алгебраїчна сума електричних зарядів будь-якої замкнутої системи (системи, яка не обмінюється зарядами з зовнішніми тілами) залишається сталою.

Одиницею електричного заряду в системі СІ є кулон.

Закон взаємодії нерухомих точкових електричних зарядів був відкритий в 1785 р. Кулоном. **Точковим** називається заряд, розміщений на тілі, яке щодо інших заряджених тіл можна розглядати як матеріальну точку.

Закон Кулона: сила взаємодії між двома точковими зарядами прямо пропорційна величині цих зарядів, обернено пропорційна квадрату віддалі між ними і напрямлена вздовж прямої, на якій лежать ці заряди:

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (14.1)$$

де k – коефіцієнт пропорційності, який залежить від вибору

системи одиниць вимірювань. У системі СІ $k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}$.

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

де $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\phi}{м} = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{Кл^2}{Н \cdot м^2}$ – електрична стала.

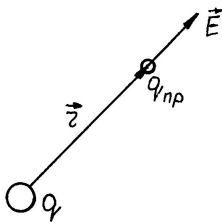
У раціоналізованій формі закон Кулона має вигляд

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (14.2)$$

У векторній формі закон Кулона можна записати так:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (14.3)$$

13.2 Напруженість електричного поля



**Рисунок 14.1 -
Напруженість
електричного поля**

Взаємодія між зарядами здійснюється через **електричне поле** – форму матерії, нерозривно зв'язану з електричними зарядами, за допомогою якої відбувається взаємодія між зарядами. Для того щоб з'ясувати, чи є в даному місці електричне поле, треба помістити туди електричний заряд і встановити: діє на нього сила чи ні. За величиною цієї сили можна робити висновок про “інтенсивність”

поля. Силовою характеристикою електричного поля є напруженість.

Напруженістю електричного поля називається фізична величина, яка чисельно дорівнює силі, що діє на одиничний, позитивний, точковий заряд, вміщений в дану точку поля

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \quad (14.4)$$

Вимога про те, щоб у точку був вміщений позитивний заряд зумовлена тим, що напруженість є величина векторна і за напрям вектора напруженості прийнято напрям сили, що діє на позитивний точковий заряд. Такий заряд називається пробним. Величина напруженості залежить від зарядів, які створюють поля, а не від пробних зарядів. Якщо поле створюється точковим зарядом q , то за формулою (14.4) напруженість у точці, положення якої задане радіус-вектором $\vec{r}$ (рис. 14.1) знаходять так:

$$E = \frac{F}{q_{np}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_{np}}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (14.5)$$

де q – заряд який створює поле, q_{np} – пробний заряд. У скалярній формі формула (14.5) набирає вигляду

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (14.6)$$

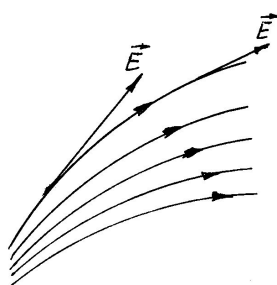
13.3 Принцип суперпозиції. Силкові лінії електричного поля

Дослід показує, що сила, з якою система зарядів діє на заряд, що не входить в цю систему дорівнює векторній сумі сил, з якими діє на даний заряд кожний з зарядів системи окремо $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n$.

Звідси випливає, що напруженість поля системи зарядів рівна векторній сумі напруженостей полів, створених кожним із зарядів окремо

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n = \sum_i \vec{E}_i \quad (14.7)$$

Це твердження носить назву принципу суперпозиції полів. Якщо відомий вектор напруженості поля в кожній точці, то можна досить просто визначити силу, яка діє на точковий заряд у кожній точці поля. З формули (14.4) маємо $\vec{F} = q\vec{E}$, так як $\vec{E}$ вектор, який крім величини в даній точці характеризується і напрямом, то доцільно поле зобразити графічно, вказавши величину і напрям вектора $\vec{E}$ в кожній точці. Але якщо ми поставимо вектори $\vec{E}$ в кожній точці поля, то розібратись буде просто неможливо внаслідок накладання векторів один на одного. Тому поля графічно зображають за допомогою силових ліній або ліній напруженості. Напрямок вектора $\vec{E}$ співпадає з напрямом силової лінії, який



**Рисунок 14.2 -
Лінії
напруженості**

визначається так: силові лінії виходять з позитивних зарядів і входять у негативні. Густота ліній вибирається так, щоб ліній, які перетинають одиницю поверхні, перпендикулярної до ліній, було рівне чисельному значенню напруженості вектора $\vec{E}$. Тоді з картини ліній напруженості можна робити висновок про величину і напрям $\vec{E}$ в різних точках поля (рис. 14.2). Якщо напруженість електричного поля однакова в усіх точках поля, таке поле називається **однорідним**. З означення випливає, що силові

лінії однорідного поля паралельні і всюди мають однакову густину.

13.4 Робота. Циркуляція вектора напруженості електростатичного поля

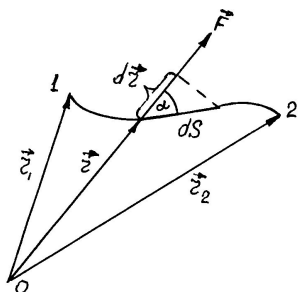


Рисунок 14.3 - Робота переміщення заряду в полі іншого точкового заряду

Розглянемо роботу переміщення точкового електричного заряду q_0 в полі іншого точкового заряду q з точки 1 в точку 2 (рис. 14.3) на нескінченно-малому шляху ds .

Елементарна робота $dA = Fds \cos \alpha$.

Але, як видно з рисунка 14.3, $ds \cos \alpha = dr$, тому елементарна робота

$$dA = Fdr. \quad (14.8)$$

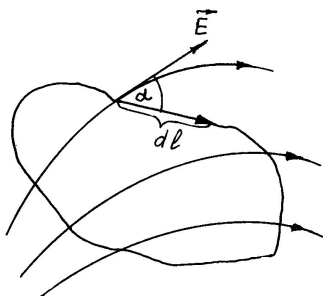
Підставимо в (14.8) вираз для сили з закону Кулона:

$$dA = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} dr. \quad (14.9)$$

Щоб знайти роботу переміщення заряду q_0 з положення 1 в положення 2, проінтегруємо вираз (14.9) в межах від r_1 до r_2 ,

$$A_{12} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q_0q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (14.10)$$

З одержаного результату, робота переміщення точкового заряду в полі іншого точкового заряду не залежить від траєкторії, по якій відбувається переміщення, а залежить тільки від положення початкової і кінцевої точок переміщення. Це означає, що електростатичні сили консервативні, а електростатичне поле – потенціальне.



**Рисунок 14.4 -
Переміщення точкового
заряду в електро-
статичному полі по
замкнутій траєкторії**

Розглянемо переміщення точкового заряду в електростатичному полі по замкнутій траєкторії l (рис. 14.4). Якщо поле, в якому переміщується точковий заряд q , не є полем точкових зарядів, то сила, яка діє на цей заряд, визначається з умови $F = qE$. Отже, елементарна робота

$$dA = qE dl \cos \alpha = qEdl \quad (14.11)$$

Робота консервативних сил на замкнутому шляху дорівнює нулю.

$$\oint_L dA \equiv 0$$

(14.12)

Підставимо у (14.12) вираз для елементарної роботи:

$$\oint_L qEdl = q \oint_L Edl \equiv 0$$

В останньому виразі $q \neq 0$. Отже,

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} \equiv 0 \quad (14.13)$$

Інтеграл $\oint_L \vec{E} d\vec{l}$ називають **циркуляцією вектора**

напруженості електростатичного поля. Нагадаємо, що $\oint_L$ означає інтеграл по замкнутому контуру.

Таким чином, циркуляція вектора напруженості електростатичного поля по будь-якому замкнутому контуру дорівнює нулю.

Це твердження називають теоремою про циркуляцію вектора напруженості $\vec{E}$.

13.5 Потенціал

Для електростатичного поля, крім силової характеристики $\vec{E}$, існує ще і енергетична характеристика, яка називається **потенціалом**.

Оскільки електростатичне поле потенціальне, то робота переміщення точкового заряду з точки 1 в точку 2 дорівнює різниці потенціальних енергій

$$A_{12} = -\Delta W_n = W_{n1} - W_{n2} \quad (14.14)$$

В останній формулі W_{n1} і W_{n2} – потенціальні енергії точкового заряду в точках 1 і 2. Якщо поле створене точковим зарядом, то

$$A_{12} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r_2},$$

Отже, потенціальна енергія точкового заряду q_0 в цьому випадку дорівнює:

$$W_n = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (14.15)$$

Відношення потенціальної енергії точкового заряду, вміщеного в дану точку поля, до величини цього заряду називається **потенціалом поля** в даній точці:

$$\varphi = \frac{W_n}{q_0} \quad (14.16)$$

З формули (14.16) знайдемо потенціал поля точкового заряду:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (14.17)$$

При користуванні формулою (14.17) заряд q пишуть без

нульового індексу, тому формула має вигляд $\varphi = \frac{W}{q}$.

Потрібно усвідомлювати, що в формулу (14.16) входить заряд, внесений у поле (пробний заряд), а в формулу (14.17) входить заряд, який створює поле. Потенціальна енергія точкового заряду q в точці поля з потенціалом φ дорівнює:

$$W_n = q\varphi \quad (14.18)$$

Отже, робота сил поля при переміщенні заряду з точки 1 в точку 2 дорівнює:

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (14.19)$$

В СІ за одиницю потенціалу (вольт) приймають потенціал такої точки поля, в якій точковий заряд в 1 Кулон має потенціальну енергію в 1Джоуль

$$1В = \frac{1Дж}{1Кл}$$

В однорідному полі $E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{l}$, де φ_1 і φ_2 – потенціали двох точок на силовій лінії, а l – відстань між цими точками. Дійсно, при переміщенні вздовж силової лінії однорідного поля заряду q

$$A = qEl \quad ; \quad A = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Отже,

$$qEl = q(\varphi_1 - \varphi_2), \text{ звідки}$$

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{l}. \quad (14.20)$$

За одиницю напруженості електричного поля прийнято $1 \frac{B}{m}$.

13.6 Потік вектора напруженості електричного поля

Кількість силових ліній, які перетинають дану поверхню чисельно дорівнює потоку вектора $\vec{E}$ через цю поверхню. Якщо поле однорідне, а поверхня плоска і перпендикулярна до силових ліній, то кількість ліній, яка через неї проходить, дорівнює добутку ES . Потік позначається буквою Φ . Отже потік вектора $\vec{E}$ в однорідному полі через площадку S (рис. 14.5) дорівнює:

$$\Phi = ES. \quad (14.21)$$

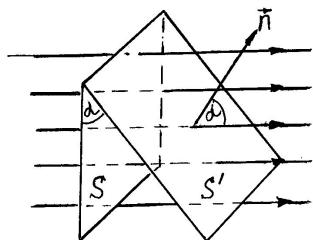


Рисунок 14.5 - Потік вектора напруженості в однорідному полі через площадку S

Якщо площадка не перпендикулярна до силових ліній, то потрібно спроектувати її на перпендикулярну площину і знайти потік вектора E через одержану проекцію, так як в цьому випадку кількість силових ліній через площину S' (рис. 14.5) і її проекцію S , буде однакою. Таким чином,

$$\Phi = ES' \cos \alpha, \quad (14.22)$$

де α – кут між площиною S' і площиною, перпендикулярною до силових ліній. Кут між площинами S' і S дорівнює куту між силовою лінією, а отже між вектором $\vec{E}$, і вектором нормалі $\vec{n}$ до площини S' (рис. 14.5), вектор $\vec{n}$ – це одиничний безрозмірний вектор $|\vec{n}| = 1$. Формулу (14.22) можна переписати у вигляді

$$\Phi = nES' \cos(\vec{n}, \vec{E}).$$

Але остання формула являє собою скалярний добуток векторів $\vec{n}$ і $\vec{E}$.

Тому

$$\Phi = \vec{n} \vec{E} S. \quad (14.23)$$

Тут ми пишемо S замість S' , розуміючи площу будь-якої плоскої поверхні в однорідному полі. Якщо поле не однорідне, а поверхня не плоска, то вибирають настільки малий елемент поверхні dS , щоб його можна було вважати плоским, а поле в межах цього елемента поверхні –

однорідним. Тоді елементарний потік $d\Phi$ через елементарну поверхню dS буде дорівнювати

$$d\Phi = \vec{n} \vec{E} dS, \quad (14.24)$$

а потік через всю поверхню S визначається за допомогою інтеграла

$$\Phi = \oint_S \vec{n} \vec{E} dS. \quad (14.25)$$

Потік – величина скалярна і його знак залежить від вибору напрямку вектора нормалі до елементарної площадки dS . Якщо $\angle \alpha$ між $\vec{n}$ і $\vec{E}$ гострий, то потік додатний, якщо тупий, то потік від’ємний. Коли поверхня замкнута, то вектор $\vec{n}$ проводять так, щоб він був напрямлений назовні. Такий вектор називають зовнішньою нормаллю.

13.7 Теорема Гаусса та її застосування до розрахунків електричних полів

Розглянемо теорему, яка носить назву **теорема Гаусса**: потік вектора напруженості електростатичного поля через будь-яку замкнуту поверхню у вакуумі дорівнює алгебраїчній сумі зарядів, що міститься в середині цієї поверхні, поділений на ϵ_0 .

$$\Phi_E = \oint_S \vec{n} \vec{E} dS = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0}. \quad (14.26)$$

Кружок у знаку інтеграла вказує, що інтегрування ведуть по замкнутій поверхні.

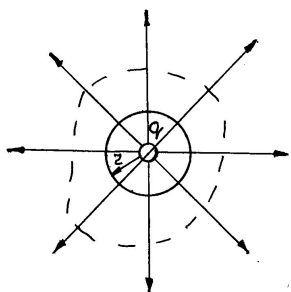


Рисунок 14.6 - Силві лінії точкового заряду

Доведемо цю теорему спочатку для одного точкового заряду. У цьому випадку силві лінії будуть радіальними і перпендикулярними до будь-якої сферичної поверхні, центр якої співпадає з місцеположенням заряду (рис. 14.6). Напруженість поля в усіх точках такої сфери буде однакою і перпендикулярна до поверхні сфери. Тому потік через сферичну поверхню радіуса r дорівнюватиме:

$$\Phi = ES = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (14.27)$$

Розглянемо тепер довільну поверхню, яка охоплює сферичну поверхню. Як видно з рисунка 14.6, кількість силвих ліній, яка пронизує обидві поверхні, однакою, а це означає, що в нашому випадку потоки через ці поверхні також однакові.

Нехай тепер в середині деякої замкнутої поверхні міститься декілька точкових зарядів довільних знаків $q_1, q_2, \dots$. За означенням потік дорівнює:

$$\Phi = \oint_S \vec{n} \vec{E} dS$$

а згідно з принципом суперпозиції полів

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots = \sum_i \vec{E}_i$$

Отже, потік вектора $\vec{E}$ буде:

$$\Phi = \oint_S \vec{n} \sum_i \vec{E}_i dS$$

Поміняємо місцями знак інтегралу і знак суми

$$\Phi = \oint \vec{n} \vec{E} dS = \sum_i \oint_S \vec{n} \vec{E}_i dS$$

але

$$\oint \vec{n} \vec{E}_i dS = \frac{q_i}{\epsilon_0},$$

отже ,

$$\Phi = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0}. \quad (14.28)$$

Цей вираз можна записати і так

$$\oint \vec{n} \vec{E} dS = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0}. \quad (14.29)$$

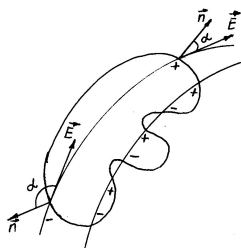
Таким чином, теорема Гаусса доведена.

Якщо в середині поверхні заряди відсутні, потік вектора $\vec{E}$ через таку поверхню дорівнює нулю. У цьому випадку кожна лінія напруженості поля перетинає поверхню парне число разів, виходячи назовні стільки разів, скільки і входячи в середину (рис. 14.7). Виходячи, лінії створюють позитивний потік, а входячи – негативний, в результаті сумарний потік через замкнуту поверхню, що не містить в собі електричних зарядів дорівнює нулю.

Якщо заряд розподілений в середині замкнутої поверхні з об'ємною густиною зарядів ρ , то сума зарядів дорівнює:

$$\sum_i q_i = \int_V \rho dV,$$

і теорема Гаусса запишеться так:



19 **Рисунок 14.7 - Потік вектора напруженості**

$$\oint_S \vec{n} \vec{E} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV \quad (14.30)$$

Об'ємна густина заряду ρ визначається

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} \quad (14.31)$$

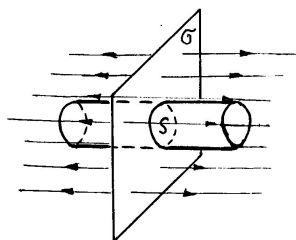
Розрізняють поверхневу густину :

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S}, \quad (14.32)$$

і лінійну густину:

$$\tau = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} \quad (14.33)$$

Наведемо приклади застосування теореми Гаусса до розрахунку деяких електростатичних полів у вакуумі.



**Рисунок 14.8 -
Поверхнева густина
заряду**

Поле рівномірно зарядженої нескінченної площини

Поверхнева густина заряду σ на площині є величиною сталою. У цьому випадку силові лінії електричного поля мають однакову густину і напрямлені перпендикулярно до площини (рис.14.8). Виберемо замкнуту поверхню у вигляді циліндра, твірна якого

перпендикулярна до площини, а основи паралельні до площини. Основи розміщені на однакових відстанях від площини.

Розглянемо потік вектора $\vec{E}$ як суму потоків через бічну поверхню Φ_{ϕ} і через основи $2\Phi_{oc}$. Загальний потік $\Phi = \Phi_{\phi} + 2\Phi_{oc}$. Оскільки твірна циліндра перпендикулярна до площини, то силові лінії паралельні до неї, а отже, потік вектора $\vec{E}$ через бічну поверхню дорівнює нулю. Для основ потік дорівнює ES , тому що лінії напруженості перпендикулярні до основи. В середині поверхні заряд дорівнює σS , тому згідно з теоремою Гаусса маємо:

$$2ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0},$$

звідки:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (14.34)$$

З формули (14.34) видно, що E не залежить від довжини циліндра, тобто напруженість поля не залежить від віддалі по величині і має однаковий напрям. Тому поле одної рівномірно зарядженої нескінченної площини однорідне.

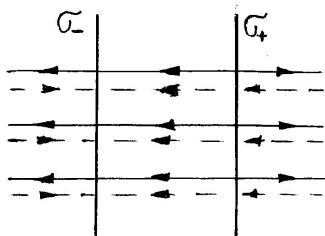


Рисунок 14.9 - Поле двох паралельних нескінченних площин

Знайдемо поле двох паралельних нескінченних площин, заряджених різнойменними зарядами з однаковою за величиною поверхневою густиною σ . На рисунку 14.9 силові лінії позитивно зарядженої площини показані суцільними лініями, а негативно зарядженої площини – пунктирними. Легко побачити, що в області за площинами

результуюче поле дорівнює нулю, тоді як в області між площинами поля додаються. Результуюча напруженість:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (14.35)$$

13.8 Еквіпотенціальні поверхні

Для наглядного зображення розподілу потенціалу в електростатичному полі користуються еквіпотенціальними поверхнями. **Еквіпотенціальною** називається поверхня, потенціал якої в усіх її точках однаковий. Лінії напруженості перпендикулярні до еквіпотенціальних поверхонь. Якщо силова лінія перпендикулярна до еквіпотенціальної поверхні, то і вектор напруженості поля E в точці перетину силової лінії з цією поверхнею перпендикулярний до неї, бо він є дотичним до силової лінії.

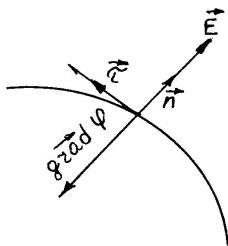


Рисунок 14.10 - Дотична до еквіпотенціальної поверхні

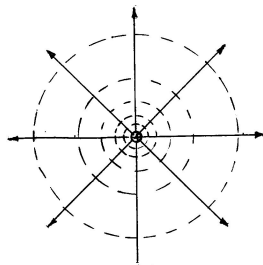


Рисунок 14.11 - Еквіпотенціальні поверхні

Щоб переконатись у цьому, проведемо в деякій точці дотичну до еквіпотенціальної поверхні (рис.14.10). При зміщенні вздовж τ на нескінченно малу величину $d\tau$

потенціал φ не зміниться, тому що $\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = 0$. Але $\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}$, з точністю до знаку дорівнює проекції вектора E на напрям τ . Це означає, що тангенціальна складова вектора E дорівнює нулю. Отже, вектор E перпендикулярний до екіпотенціальної поверхні. Градієнт потенціалу так само перпендикулярний до екіпотенціальної поверхні, направлений в бік, протилежний до E . Екіпотенціальну поверхню можна провести через будь-яку точку поля. Домовились проводити поверхні таким чином, щоб різниця потенціалів між двома сусідніми поверхнями $\varphi_{i+1} - \varphi_i$ була однаковою. За густотою екіпотенціальних поверхонь можна зробити висновок про величину напруженості поля. Дійсно, чим густіше розташовані екіпотенціальні поверхні, тим швидше змінюється потенціал в напрямі нормалі до поверхні. Отже, в даному місці більший $\overrightarrow{\text{grad}} \varphi$, а значить і E . На рисунку 14.11 показані екіпотенціальні поверхні точкового заряду. Відповідно до характеру зміни E екіпотенціальні поверхні густіші при наближенні до заряду.

Контрольні запитання

1. Закон Кулона у вакуумі і речовині.
2. Напруженість електричного поля. Одиниці вимірювання.
3. Принцип суперпозиції електричних полів.
4. Робота з переміщення заряду в електричному полі іншого заряду.
5. Теорема Гаусса.
6. Потенціал точкового заряду. Об'ємна густина заряду

7. Еквіпотенціальні поверхні.

15 ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ В РЕЧОВИНІ

14.1 Провідники в електричному полі

Провідники – це речовини, що містять вільні електричні заряди, які під дією електричного поля можуть вільно переміщатись по об'єму і поверхні цих речовин. Провідники є тверді, рідкі і газоподібні. До твердих провідників належать метали, носіями вільних зарядів яких є електрони. Металічні провідники називають провідниками першого роду.

Якщо провіднику надати електричний заряд, то рівновага зарядів може спостерігатись тільки тоді, коли напруженість поля всередині провідника дорівнює 0. Це означає, що потенціал всередині провідника сталий, а поверхня провідника – екіпотенціальна. Отже, лінії напруженості поля перпендикулярні до поверхні провідника.



**Рисунок 15.1 -
Замкнута циліндрична
поверхня з площами
основ**

Якщо надати провідникові якийсь заряд, то він розподілиться так, щоб виконувалась умова рівноваги. При рівновазі зарядів поле всередині провідника відсутнє.

Тому потік вектора E через будь-яку замкнуту поверхню всередині провідника дорівнює 0, а отже, і алгебраїчна сума зарядів у середині цієї поверхні дорівнює 0. Тому в зарядженому провіднику заряд розміщується по поверхні провідника.

Знайдемо напруженість поля поблизу поверхні провідника, який знаходиться в діелектрику з діелектричною проникністю ϵ . Розглянемо невелику замкнуту циліндричну

поверхню, утворену нормлями до поверхні провідника з площами основ dS , одна з яких розташована всередині, а друга – назовні провідника паралельно до його поверхні (рис.15.1). Потік вектора індукції через цю поверхню $\Phi = nDdS$, де D – величина вектора індукції поблизу поверхні провідника, а dS – площа верхньої основи. Потік через бічну поверхню рівний 0, бо вектор D паралельний до її площини, а потік через основу, яка є всередині, дорівнює 0, бо D в середині провідника дорівнює 0. Заряд в

середині поверхні $\sum_i q_i = \sigma dS$. Згідно з теоремою Гаусса $D \cos \alpha dS = \sigma dS$, бо $\cos \alpha = 1$, тому $D = \sigma$, але $D = \epsilon_0 \epsilon E$, звідки:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon} \quad (15.1)$$

З формули (15.1) випливає, що напруженість поля провідника більша там, де більша густина зарядів. Густина зарядів більша там, де більша кривизна поверхні. Вона росте із збільшенням додатньої кривизни (опуклості) і зменшується із збільшенням від'ємної кривизни (вгнутості). Особливо велика густина на вістрях, тому напруженість поля поблизу вістря може бути настільки великою, що відбудеться йонізація молекул повітря. Йони протилежного знака, ніж знак заряду провідника, притягуються до нього і нейтралізують його заряд. Йони того ж знака, що і заряд провідника, починають рухатися від провідника і захоплюють з собою молекули повітря, виникає електричний вітер.

Якщо внести незаряджений провідник в електричне поле, то носії зарядів приходять в рух. Електрони рухаються проти поля і створюють на одному з кінців негативний заряд. Біля

протилежного кінця виникає нестача електронів і цей кінець провідника заряджується позитивно. Заряди на кінцях провідника називають індукованими. Поле індукованих зарядів буде напрямлене протилежно до зовнішнього поля. Розподіл зарядів буде відбуватись доти, доки поле всередині провідника не стане рівним нулю. Індуковані заряди розподіляються по зовнішній поверхні провідника. Якщо всередині провідника порожнина, то поля всередині цієї порожнини немає. На цьому ґрунтується електростатичний захист. Якщо якийсь прилад хочуть захистити від дії зовнішніх полів, його оточують провідним футляром.

14.2 Ємність провідників і конденсаторів

Розглянемо провідник, віддалений від інших тіл настільки, що поля зарядів на цих тілах у місці розташування провідника дорівнюють нулю. Для вилученого (окремого) провідника відношення заряду до потенціалу цього провідника є величина стала, яку називають **ємністю провідника**:

$$C = \frac{q}{\varphi} . \quad (15.2)$$

Ємність чисельно дорівнює заряду, який потрібно надати відокремленому провіднику, щоб змінити його потенціал на одиницю.

$$1\Phi = \frac{1Kл}{1В} .$$

Одиницею ємності в СІ є Фарад,

Ємність в 1Φ – це ємність такого відокремленого провідника, якому потрібно надати заряд в 1 Кл , щоб змінити його потенціал на 1 В . Знайдемо ємність сферичного провідника. Потенціал сфери радіуса R рівний:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \frac{q}{R}$$

Тому після підстановки φ в формулу (15.2) одержимо

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon R \quad (15.3)$$

з останньої формули випливає, що $\epsilon_0 = \frac{C}{4\pi\epsilon R}$ і її можна вимірювати в Ф/м.

Як видно з формули (15.3), для того щоб провідник мав велику ємність, його розміри повинні бути дуже великими. На практиці необхідні пристрої, які можуть за невеликих розмірів нагромаджувати великі заряди. Такими пристроями є конденсатори.

Система двох провідників, поле яких при наданні їм рівних за величиною і протилежних за знаком зарядів, повністю або практично повністю, локалізуються в частині простору, обмежений цими провідниками, називається **конденсатором**.

Провідники цієї системи називаються **обкладками конденсатора**.

Ємність конденсатора дорівнює:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} \quad (15.4)$$

або

$$C = \frac{q}{U} \quad (15.5)$$

де $U = \varphi_1 - \varphi_2$ – різниця потенціалів між обкладками. Ємність не залежить ні від q ні від U , а визначається геометрією

конденсатора і діелектричними властивостями середовища між обкладками.

Знайдемо формулу для ємності плоского конденсатора. Якщо площа обкладки S , а заряд на ній q , то напруженість поля між обкладками

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon S}$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = Ed = \frac{qd}{\varepsilon_0 \varepsilon S}$$

Поле між обкладками однорідне, тому

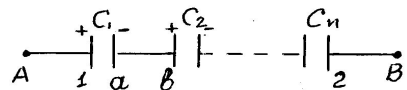
Підставимо цей вираз у формулу (15.4) і одержимо:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}, \quad (15.5)$$

де S – площа одної обкладки, d – відстань між обкладками, ε – діелектрична проникність середовища між обкладками.

15.3 З'єднання конденсаторів

Паралельне з'єднання конденсаторів показане на (рис. 15.2). У цьому випадку різниця потенціалів на обкладках кожного з конденсаторів однакові і дорівнюють різниці потенціалів батареї, а заряд батареї дорівнює сумі зарядів всіх конденсаторів



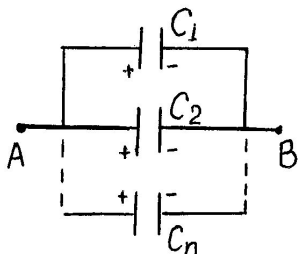


Рисунок 15.2 - Паралельне з'єднання конденсаторів

Рисунок 15.3 - Послідовне з'єднання конденсаторів

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n \quad q = q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_n$$

$$C = \frac{q}{U} = \frac{q_1 + q_2 + \dots + q_n}{U} = \frac{q_1}{U} + \frac{q_2}{U} + \dots + \frac{q_n}{U}$$

З останнього виразу маємо

$$C = \sum C_i \quad (15.6)$$

При послідовному з'єднанні (рис. 15.3) заряд кожного з конденсаторів однаковий і рівний заряду батареї. Це впливає з того, що заряди від джерела живлення подаються тільки на обкладки 1 і 2. На інших обкладках заряди, рівні q виникають по індукції, а при додаванні сумарний заряд обкладок a і b виявиться рівним нулю. Напруга на батареї дорівнює сумі напруг.

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n \quad , \quad q = q_1 = q_2 = \dots = q_n$$

$$\frac{1}{C} = \frac{U}{q} = \frac{U_1 + U_2 + \dots + U_n}{q} = \frac{U_1}{q} + \frac{U_2}{q} + \dots + \frac{U_n}{q} ,$$

звідки:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \quad \text{або} \quad \frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i} \quad (15.7)$$

15.4 Енергія електричного поля

Оскільки електричне поле потенціальне, то система зарядів має потенціальну енергію взаємодії. Знайдемо енергію системи двох точкових зарядів (рис. 15.4).

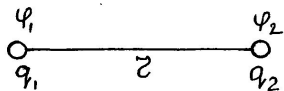


Рисунок 15.4 - Точкові заряди

Позначимо потенціал точки, де знаходиться заряд, тим самим індексом, що і заряд.

Коли заряди віддалені один від одного на нескінченність, вони не взаємодіють і їх енергія взаємодії дорівнює нулю. Залишимо другий заряд нерухомим, а перший перенесемо з нескінченності в точку 1. Тоді робота $A_{12} = q_1\phi_1 = W$. Якщо, навпаки, будемо переносити заряд 2, а заряд 1 залишимо нерухомим, то робота $A_{21} = q_2\phi_2 = W$. Якщо в обох випадках віддалі між зарядами будуть однаковими, то і роботи $A_{1,2}=A_{2,1}$. Отже, енергія взаємодії однакова $W = q_1\phi_1 = q_2\phi_2$.

Для того щоб у вираз енергії входили обидва заряди, перепишемо цей вираз так $W = \frac{1}{2}q_1\phi_1 + \frac{1}{2}q_2\phi_2$. Для будь-якої кількості точкових зарядів, що входять у систему, енергія взаємодії дорівнює

$$W = \frac{1}{2}q_1\phi_1 + \frac{1}{2}q_2\phi_2 + \dots + \frac{1}{2}q_n\phi_n = \frac{1}{2}\sum q_i\phi_i \quad (15.8)$$

15.5 Енергія зарядженого провідника і конденсатора

Нехай маємо відокремлений провідник, потенціал якого φ , а заряд q . Розіб'ємо цей провідник на такі елементи, щоб заряди на них можна вважати точковими. Потенціал провідника в усіх точках однаковий, тому:

$$W = \frac{1}{2} \sum q_i \varphi = \frac{1}{2} \varphi \sum q_i = \frac{1}{2} q \varphi, \quad (15.9)$$

де φ – потенціал, q – заряд провідника.

$$C = \frac{q}{\varphi}$$

Використовуючи формулу φ , з формули (15.9) можна одержати :

$$W = \frac{C \varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2C}. \quad (15.10)$$

Енергія зарядженого конденсатора дорівнює енергії зарядів на двох обкладках :

$$W = \frac{1}{2} q \varphi_1 - \frac{1}{2} q \varphi_2 = \frac{1}{2} q (\varphi_1 - \varphi_2).$$

Аналогічно з попереднім випадком можна показати

$$W = \frac{1}{2} q U, \quad W = \frac{1}{2} C U^2, \quad W = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}. \quad (15.11)$$

$$W = \frac{1}{2} C U^2$$

Підставимо у формулу вирази для $C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}$ і для $U = Ed$, одержимо :

$$W = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} S d = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} V, \quad (15.12)$$

де $V = Sd$ – об'єм конденсатора.

Об'ємна густина енергії поля дорівнює

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} \quad (15.13)$$

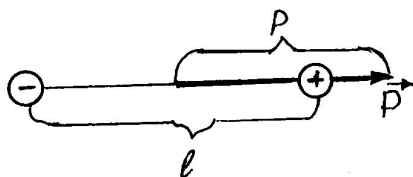
В ізотропному діелектрику напрями векторів D і E співпадають, тому, використовуючи співвідношення $D = \epsilon_0 \epsilon E$, формулу (15.13) можна переписати так

$$w = \frac{DE}{2} \quad (15.14)$$

Формули (15.13) і (15.14) виведені для випадку однорідного поля, але вони справедливі і для випадку неоднорідних полів.

14.6 Електричний диполь. Типи діелектриків

Діелектриками називаються речовини, які за звичайних умов практично не проводять електричний струм. Згідно з класичними уявленнями в діелектриках нема вільних носіїв зарядів, які могли б під дією електричного поля прийти в напрямлений рух. Всі молекули діелектрика нейтральні. Сумарний заряд електронів і атомних ядер у молекулі рівний нулю, але незважаючи на це, молекули мають електричні



**Рисунок 15.5 –
Електричний диполь**

властивості. У першому наближенні молекулу можна розглядати як **Електричним диполем** називається система двох різноіменних точкових зарядів рівних за

величиною, віддаль між якими l набагато менша від віддалі r до точки, в якій розглядається поле цієї системи. Віддаль l між зарядами диполя називається **плечем диполя**, а добуток заряду на плече – **моментом диполя**:

$$p = ql \quad (15.15)$$

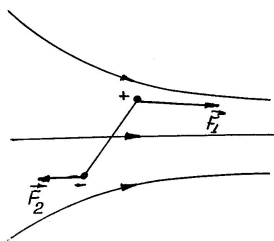


Рисунок 15.6 - Диполь в електричному полі

Момент диполя або дипольний момент – величина векторна, напрямлена вздовж плеча диполя від негативного до позитивного заряду (рис. 15.5). В електричному полі диполь буде орієнтуватись у напрямі силової лінії в тому місці, де він розташований і втягуватись в область більш сильного поля (рис. 15.6). Дійсно сили F_1 і F_2

будуть обертати диполь, орієнтуючи його вздовж силової лінії, а оскільки $F_1 > F_2$, то ще й зміщувати його в область більш сильного поля. В однорідному полі $F_1 = F_2$ і диполь під дією поля буде тільки змінювати орієнтацію.

Є декілька типів діелектриків. До першого різновиду належать діелектрики, молекули яких мають асиметричну будову: тобто центри “ваги” додатних і від’ємних зарядів не співпадають. Такі молекули можна розглядати, як електричні диполі. Молекули таких діелектриків називаються полярними.

Прикладом таких діелектриків є H_2O , NH_3 , CO ...

До другого різновиду належать діелектрики, молекули яких не полярні, тобто центри “ваги” додатних і від’ємних зарядів співпадають. Але під дією електричного поля електрони молекул зміщуються і молекула набуває

дипольного моменту тим більшого, чим сильніше поле.

Прикладами таких діелектриків є $N_2, O_2, H_2 \dots$

Третю групу становлять діелектрики з йонною кристалічною ґраткою ($NaCl, KCl, KBr \dots$). У кристалах цих речовин є дві кристалічні підґратки, одна з яких складається з позитивних, а інша з негативних йонів. При накладанні електричного поля відбувається відносне зміщення підґраток, що приводить до виникнення дипольних моментів.

14.7 Поляризація діелектриків

За відсутності електричного поля сумарний дипольний момент будь-якого діелектрика дорівнює нулю. Під сумарним дипольним моментом розуміють векторну суму дипольних

моментів всіх молекул діелектрика $\sum_i \vec{p}_i$.

У діелектриків з полярними молекулами ця сума дорівнює нулю внаслідок хаотичної орієнтації дипольних моментів. У діелектриків з неполярними молекулами, або з

йонною кристалічною ґраткою $\sum_i \vec{p}_i$ дорівнює нулю, тому що дипольні моменти молекул за відсутності поля відсутні.

Якщо внести діелектрик в електричне поле, то $\sum_i \vec{p}_i$ буде відмінною від нуля і тим більшою, чим інтенсивніше поле. У діелектриках з полярними молекулами дипольні моменти молекул будуть орієнтуватись по полю і якби не було теплового руху, то всі вони в однорідному полі стали б паралельними. Тепловий рух вносить дезорієнтацію, але $\sum_i \vec{p}_i$

тепер відмінна від нуля. Якщо $\sum_i p_i$ відмінна від нуля, то діелектрик є поляризованим. Чим більша напруженість поля, тим ця сума більша. Описана поляризація називається орієнтаційною. У діелектрику з неполярними молекулами під дією поля виникають дипольні моменти молекул тим більші, чим більша “електронна” деформація, яка приводить до збільшення плеча диполя l і залежить від напруженості поля E . Цей вид поляризації носить назву електронної поляризації. Подібна картина спостерігається в йонних діелектриках, але поляризація називається йонною. Якщо поле або діелектрик неоднорідні, то ступінь поляризації в різних місцях діелектрика буде різним. Щоб характеризувати поляризацію в даній точці, потрібно виділити фізично малий об’єм, який містить у собі цю точку, знайти суму дипольних моментів молекул у цьому об’ємі і взяти відношення:

$$P = \frac{\sum_i p_i}{\Delta V} \quad (15.15)$$

Векторна величина P називається **вектором поляризації** або поляризованістю діелектрика. Фізично малим об’ємом називають такий об’єм, в якому міститься достатня для усереднення кількість молекул, а густину, температуру, напруженість поля і т.д. можна вважати в його межах сталими. Якщо діелектрик і поле, в якому він перебуває, однорідні, то P – поляризованість дорівнює чисельно сумі дипольних моментів всіх молекул в одиниці об’єму.

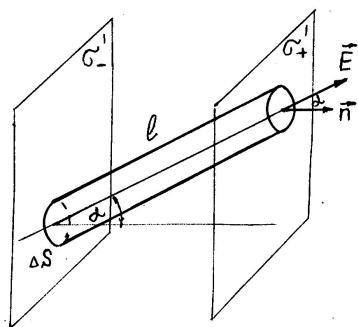
Для діелектриків всіх різновидів (крім сегнетоелектриків) вектор поляризації зв’язаний з напруженістю поля співвідношенням:

$$P = \chi \epsilon_0 E \quad (15.16)$$

де χ – безрозмірна величина названа діелектричною сприйнятливістю.

15.8 Зв'язані заряди. Діелектрична проникність

Між вектором поляризації P і поверхневою густиною зарядів σ' існує зв'язок. Для його знаходження розглянемо нескінченну плоскопаралельну пластину з однорідного діелектрика, вміщену в однорідне електричне поле (рис. 15.7). Виділимо в пластині елементарний об'єм у вигляді дуже тонкого циліндра з твірними, паралельними E в діелектрику, і з основами площею ΔS , що лежать на гранях пластини. Величина цього об'єму дорівнює: $\Delta V = l \Delta S \cos \alpha$, де α – кут між нормаллю n і вектором E .



**Рисунок 15.7 -
Нескінченна
плоскопаралельна
пластина**

Дипольний електричний момент об'єму ΔV дорівнює: $ql = \sigma' \Delta S l$.

З другого боку, $\sigma' \Delta S l = |\Sigma p_i|$.

Чисельне значення вектора поляризації P у межах циліндра знайдемо, розділивши $|\Sigma p_i|$ на об'єм $\Delta V = l \Delta S \cos \alpha$ одержимо:

$$P = \frac{|\Sigma p_i|}{\Delta V} = \frac{\sigma' \Delta S l}{l \Delta S \cos \alpha} = \frac{\sigma'}{\cos \alpha},$$

звідки: $\sigma' = P \cos \alpha$.

Але, оскільки вектор P і вектор E мають однакові напрями, то $P \cos \alpha = P_n$, звідки:

$$P_n = \sigma' \quad (15.17)$$

Поверхнева густина зв'язаних зарядів σ' чисельно дорівнює нормальній складовій вектора поляризації.

Наявність зв'язаних зарядів σ' приводить до виникнення додаткового електричного поля E' , яке напрямлене проти зовнішнього поля E_0 і послаблює його. Результируюче поле в середині діелектрика $E = E_0 - E'$. У нашому випадку вектори E_0 і E' колінеарні, тому $E = E_0 - E'$. Поле $E' = \sigma' / \epsilon_0$, як поле створене двома нескінченними різноіменно зарядженими площинами, тому

$$E = E_0 - \chi E. \quad (15.18)$$

З цієї формули знаходимо

$$E_0 = (1 + \chi)E. \quad (15.19)$$

Величину $(1 + \chi)$ позначають буквою ϵ і називають **діелектричною проникністю** діелектрика. Формула (15.19) набирає вигляду

$$E_0 = \epsilon E. \quad (15.20)$$

З формули (15.20) одержимо

$$\epsilon = \frac{E_0}{E}. \quad (15.21)$$

Діелектрична проникність це фізична величина, яка показує в скільки разів послаблюється поле в діелектрику порівняно з полем у вакуумі, якщо ці поля створені одними і тими ж вільними електричними зарядами.

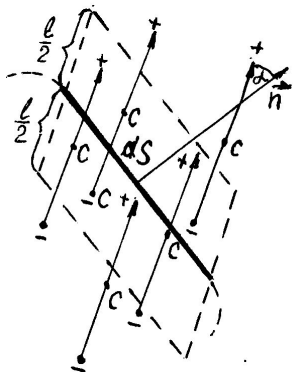
15.9 Теорема Гаусса для поля в діелектриках

Згідно з теоремою Гаусса потік вектора E через замкнуту поверхню рівний сумі зарядів всередині цієї поверхні, поділений на ϵ_0 . Але всередині поверхні опиняються, як вільні заряди q , так і зв'язані заряди q' , тому:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{\sum_i q_i + \sum_k q'_k}{\epsilon_0} \quad (15.22)$$

Підрахуємо заряд $\sum_k q'_k$. Некомпенсований зв'язаний заряд створює всередині поверхні тільки ті молекули, які будуть перерізані цією поверхнею. Візьмемо елемент поверхні dS . Припустимо, що поблизу елемента dS всі дипольні моменти молекул однакові по величині і напрямку і дорівнюють $p = ql$. Осі диполей утворюють з зовнішньою нормаллю n до dS кут α . Елемент dS перетне тільки ті молекули, центри яких C лежать всередині косої циліндра з основою dS і твірною l (рис.15.8). Число диполей в одиниці об'єму дорівнює n_0 . Тоді число перетнутих молекул буде $n_0 l dS \cos \alpha$. Кожна перетнута молекула утворює всередині замкнутої поверхні від'ємний заряд q , якщо l утворює з напрямком n гострий кут. Таким чином, некомпенсований заряд під елементом поверхні dS дорівнює

$$-n_0 ql \cos \alpha dS \quad (15.23)$$



Але $n_0 q l$ – це сумарний дипольний момент одиниці об'єму, тобто вектор поляризації $n_0 q l = P$. Отже, $-P \cos \alpha dS$.

Повний зв'язаний заряд, який міститься всередині

$$\sum_k q'_k = - \oint_s P \cos \alpha dS$$

поверхні, рівний

Або у векторній формі:

$$\sum_k q'_k = - \oint_s n P dS \quad (15.24)$$

Підставимо (15.24) в (15.22) і одержимо:

$$\oint_s n E dS = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0} - \oint_s \frac{n P}{\epsilon_0} dS \quad (15.25)$$

Після перетворень одержимо:

$$\oint_s n (\epsilon_0 E + P) dS = \sum_i q_i \quad (15.26)$$

Векторну суму $\epsilon_0 E + P = D$ позначають буквою D і називають вектором електростатичної індукції.

Остаточно маємо:

$$\oint_s n D dS = \sum_i q_i \quad (15.27)$$

Це і є теорема Гаусса для діелектриків: потік вектора електростатичної індукції через замкнуту поверхню дорівнює алгебраїчній сумі вільних зарядів, що містяться всередині цієї поверхні.

15.10 Сегнетоелектрики

Для більшості діелектриків ϵ становить величину порядку декількох одиниць. Найбільше значення діелектричної проникності спостерігається у воді $\epsilon = 81$. Але існує цілий ряд речовин, в яких за певних умов ϵ становить величину порядку $10^3 \div 10^4$. Такі речовини дістали назву **сегнетоелектрики**. Аномально висока діелектрична проникність сегнетоелектриків пояснюється тим, що вони складаються з невеликих областей-доменів, які самовільно, без дії зовнішнього електричного поля, є поляризовані, при цьому ступінь поляризації цих областей максимальна. За відсутності зовнішнього поля орієнтації вектори поляризації P в різних доменах різні і тому їх сума дорівнює нулю. Сегнетоелектрик не поляризований. При внесенні його в зовнішнє поле відбувається переорієнтація дипольних моментів доменів, які орієнтуються по полю, але не всі відразу. Тільки за певної величини напруженості поля орієнтація векторів P стане однаковою. Тому ϵ має аномально високе значення. Якщо припинити дію зовнішнього електричного поля, то орієнтація доменів не зникає повністю і сегнетоелектрик залишається частково поляризованим. Для кожного сегнетоелектрика існує температура, вище від якої орієнтація дипольних молекул у доменах зникає (домени “руйнуються”) і сегнетоелектрик перетворюється в звичайний діелектрик. Ця температура називається точкою Кюрі.

Контрольні запитання

1. Електроємність провідника.
2. Конденсатор. Ємність сферичного конденсатора.
3. Ємність паралельно і послідовно з'єднаних конденсаторів.
4. Енергія зарядженого конденсатора.
5. Об'ємна густина енергії електричного поля.

6. Дипольний момент молекули. Типи діелектриків.
7. Поляризація діелектриків.
8. Діелектрична проникність.
9. Теорема Гаусса для поля в діелектриках.

16 ПОСТІЙНИЙ ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ

16.1 Постійний електричний струм та його характеристики

Якщо в провіднику створити електричне поле, то електричні заряди придуть в упорядкований рух.

Впорядкований рух електричних зарядів називається **електричним струмом**. Струм характеризують силою струму. **Сила струму** – це величина чисельно рівна заряду, який переноситься через поперечний переріз провідника за одиницю часу. Якщо ж за час dt переноситься заряд dq , то

$$I = \frac{dq}{dt} \quad (16.1)$$

Електричний струм може бути розподілений нерівномірно по площі поперечного перерізу, через який він протікає, тому вводять поняття **густини струму**, яка чисельно дорівнює силі струму, що припадає на одиничну площу поперечного перерізу провідника:

$$j = \frac{dI}{dS} \quad (16.2)$$

Напрямок вектора j співпадає з напрямком впорядкованого руху додатніх носіїв електричних зарядів. Густина струму можна виразити через швидкість впорядкованого руху електричних зарядів. Якщо концентрація носіїв струму n і кожен з них має заряд q , то за час dt через поперечний переріз S перенесеться заряд

$$dQ = nq \langle v \rangle S dt,$$

де $\langle v \rangle$ – швидкість впорядкованого руху носіїв струму в провіднику.

Сила струму

$$I = \frac{dQ}{dt} = nq \langle v \rangle S,$$

а густина струму

$$j = nq \langle v \rangle \quad (16.3)$$

15.2 Закон Ома для однорідної ділянки кола в інтегральній та диференціальній формах. Опір провідників

Ом експериментально встановив, що сила струму в однорідній ділянці кола прямо пропорційна напрузі на цій ділянці.

$$I = kU, \quad (16.4)$$

де k – коефіцієнт пропорційності, який називається **провідністю**. На практиці замість k використовують

обернену величину, яку називають **опором** $R = \frac{1}{k}$. Тоді **закон Ома** запишеться:

$$I = \frac{U}{R}. \quad (16.5)$$

Сила струму прямо пропорційна напрузі і обернено пропорційна опору однорідної ділянки кола. За одиницю

опору прийнято $1\Omega = \frac{1\text{В}}{1\text{А}}$, тобто опір такого провідника, в якому при напрузі в один вольт проходить струм в один Ампер.

Величина опору залежить від розмірів провідника і роду матеріалу. Для однорідного провідника зі сталим перерізом

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (16.6)$$

де l – довжина провідника, S – площа поперечного перерізу, ρ – питомий опір, який чисельно дорівнює опору провідника одиничної довжини з одиничною площею поперечного перерізу.

Для більшості металів у досить широкому температурному інтервалі опір лінійно залежить від температури за законом

$$R = R_0(1 + \alpha t), \quad (16.7)$$

де R_0 – опір при 0°C , t – температура за шкалою Цельсія, α – температурний коефіцієнт опору.

Розглянемо циліндричний провідник довжиною l з площею поперечного перерізу S , на кінцях якого є різниця потенціалів $\Delta\varphi$ і по ньому проходить струм I . Згідно з законом Ома

$$I = \frac{\Delta\varphi}{R} = \frac{\Delta\varphi S}{\rho l}.$$

Пригадаємо, що $\frac{\Delta\varphi}{l} = E$, де E – напруженість поля в провіднику, а $\frac{I}{S} = j$, маємо:

$$j = \frac{1}{\rho} E. \quad (16.8)$$

Вираз (16.8) називають **законом Ома в диференціальній формі**. У цьому законі замість ρ беруть

обернену величину $\gamma = \frac{1}{\rho}$, яку називають **питомою провідністю**. Тоді закон (16.8) буде мати вигляд:

$$j = \gamma E, \quad (16.9)$$

або у векторній формі

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}. \quad (16.10)$$

15.3 Робота і потужність струму. Закон Джоуля-Ленца

Нехай до однорідного провідника прикладена напруга U . За час t через переріз провідника переноситься заряд $q = It$. При цьому виконується робота

$$A = qU = IUt \quad (16.11)$$

Якщо струм змінний, то формулу (16.11) можна записати

$$dA = IUdt \quad (16.12)$$

За допомогою формули (16.11) можна обчислити роботу електричного струму. Якщо опір провідника R , то, використовуючи закон Ома, з виразу (16.11) можна одержати, замінивши U на IR :

$$dA = I^2 R dt, \quad (16.13)$$

а виразивши струм як, $I = \frac{U}{R}$, будемо мати:

$$dA = \frac{U^2}{R} dt \quad (16.14)$$

Оскільки потужність $P = \frac{dA}{dt}$, то одержимо вираз для потужності:

$$P = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R} \quad (16.15)$$

Якщо струм проходить по провіднику, то провідник нагрівається. Джоуль і незалежно від нього Ленц показали експериментально, що кількість тепла, що виділяється в

провіднику, прямо пропорційна квадрату сили струму опору і часу проходження струму:

$$Q = I^2 R t \quad (16.16)$$

Якщо струм змінний, то:

$$Q = \int_0^t I^2 R dt \quad (16.17)$$

Співвідношення (16.16) і (16.17) виражають **закон Джоуля - Ленца**.

Величина, яка чисельно дорівнює потужності, що виділяється в одиниці об'єму провідника, називається **питомою потужністю**. За означенням :

$$w = \frac{Q}{Vt} \quad (16.18)$$

Якщо провідник циліндричний довжиною l і перерізом S , то

його об'єм $V = lS$, а опір $R = \rho \frac{l}{S}$. Використавши закон Джоуля- Ленца, перепишемо вираз

$$w = \frac{I^2 R t}{Vt} = \frac{I^2 R}{V} \quad (16.19)$$

і підставимо в нього вираз для V і R , після скорочень одержимо:

$$w = \rho \frac{I^2}{S^2} = \rho j^2, \quad (16.20)$$

де j – густина струму. З закону Ома в диференціальній формі

$$j = \frac{1}{\rho} E, \text{ тому}$$

$$w = \frac{1}{\rho} E^2 = \gamma E^2 \quad (16.21)$$

Вираз (16.21) носить назву **Закон Джоуля-Ленца в диференціальній формі.**

Контрольні запитання

1. Електричний струм. Величина струму.
2. Густина струму, величина і напрям.
3. Закон Ома Для однорідної ділянки кола, для повного кола.
4. Потужність електричного струму.
5. Робота електричного струму.
6. Закон Джоуля-Ленца в диференціальній формі.

17 ПОСТІЙНИЙ ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ

16.1 Сторонні сили. Електрорушійна сила і напруга

Розглянемо два провідники A і B , які мають потенціали φ_A і φ_B . Сполучимо їх провідником (рис. 17.1).

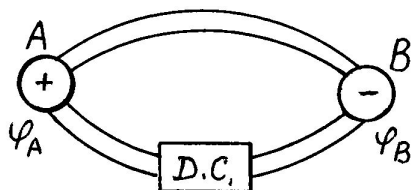


Рисунок 17.1 - Два провідники з потенціалами

На кінцях провідника різниця потенціалів $\varphi_A - \varphi_B$, у ньому виникає поле з напруженістю

$$E = \frac{\varphi_A - \varphi_B}{l}$$

, де l – довжина провідника, і під дією поля носії електричного струму

приходять в напрямлений рух. Іде струм. Цей струм буде короткочасним. Внаслідок перетікання зарядів, потенціали φ_A і φ_B стануть однаковими і електричне поле в провіднику стане рівним нулю. Щоб струм ішов постійно, потрібно підтримувати різницю потенціалів на кінцях провідника. Це можна робити таким чином. Забирати заряд Δq , який прийшов на провідник B за час Δt з провідника A і передавати його провіднику A . Тоді різниця потенціалів на кінцях довгого провідника буде постійною і струм буде іти як завгодно довго. Але для того щоб перенести заряди в A проти сил електричного поля, потрібні сили не електричного походження. Такі сили можуть бути магнітного, механічного, чи якогось іншого походження. І називаються вони **сторонніми силами**. Пристрій, в якому за допомогою

сторонніх сил заряди переносяться проти сил електричного поля, називається джерелом струму. Сторонні сили, переміщаючи електричні заряди, виконують роботу. Фізична величина, яка чисельно дорівнює роботі з переміщення сторонніми силами одиничного додатного електричного заряду по замкнутому колу, називається **електрорушійною силою**, що діє в цьому колі:

$$\mathcal{E} = \frac{A}{q} \quad (17.1)$$

За аналогією з напруженістю електричного поля введемо вектор напруженості поля сторонніх сил:

$$E_{CT} = \frac{F_{CT}}{q} \quad (17.2)$$

Робота сторонніх сил при переміщенні заряду по замкнутому колу:

$$A = \oint F_{CT} dl = \oint q E_{CT} dl = q \oint E_{CT} dl$$

За означенням електрорушійна сила, що діє в колі

$$\mathcal{E} = \frac{A}{q} = \oint E_{CT} dl \quad (17.3)$$

Таким чином, електрорушійна сила, що діє в замкнутому колі, дорівнює циркуляції вектора напруженості сторонніх сил. Електрорушійна сила, що діє на ділянці кола чисельно дорівнює роботі сторонніх сил по цій ділянці кола:

$$\mathcal{E}_{1,2} = \frac{A_{1,2}}{q},$$

або:

$$\mathcal{E}_{1,2} = \int_1^2 E_{CT} dl \quad (17.4)$$

Крім сторонніх сил на заряд діє і електрична сила, тому результуюча сила

$$F = F_{CT} + F_{EL} = q(E_{CT} + E_{EL})$$

Величина, яка чисельно дорівнює роботі електричних і сторонніх сил при переміщенні одиничного позитивного заряду по ділянці кола, називається **спадом напруг** або просто напругою на цій ділянці кола.

$$A_{1,2} = \int_1^2 q(E_{CT} + E_{EL})dl = q \int_1^2 E_{CT}dl + q \int_1^2 E_{EL}dl = q \mathcal{E}_{1,2} + q(\varphi_1 - \varphi_2)$$

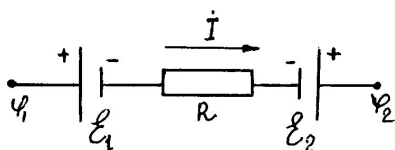
$$U_{1,2} = \frac{A_{1,2}}{q}$$

Оскільки за означенням , то:

$$U_{1,2} = \mathcal{E}_{1,2} + (\varphi_1 - \varphi_2) \quad (17.5)$$

На ділянці може бути декілька джерел струму, тому формулу (17.5) треба записати так:

$$U_{1,2} = \sum_i \mathcal{E}_i + \varphi_1 - \varphi_2 \quad (17.6)$$



**Рисунок 17.2 -
Електрорушійні сили**

Електрорушійні сили слід додавати, враховуючи їх знаки. Якщо електрорушійна сила діє в напрямі проходження струму на ділянці кола, то вона додатна (рис. 17.2)

$$U_{1,2} = (\varphi_1 - \varphi_2) - \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$$

Якщо на ділянці кола діють електрорушійні сили, то така ділянка називається неоднорідною. У протилежному випадку ділянка – однорідна. Для однорідної ділянки $U = \varphi_1 - \varphi_2$.

16.2 Закон Ома для неоднорідної ділянки кола

Розглянемо неоднорідну ділянку кола. Якщо провідники, які утворюють ділянку, нерухомі, то єдиним результатом проходження струму є нагрівання ділянки кола. Як ми показали вище $dA = \mathcal{E}_{1,2}dq + (\varphi_1 - \varphi_2)dq$.

Згідно з законом Джоуля-Ленца:

$$dQ = I^2 R dt = IR(Idt) = IRdq.$$

Оскільки робота всіх сил, виконана щодо перенесення заряду, дорівнює кількості виділеного тепла, то

$$IRdq = \mathcal{E}_{1,2}dq + (\varphi_1 - \varphi_2)dq.$$

Після скорочення на dq знайдемо:

$$I = \frac{\mathcal{E}_{1,2} + (\varphi_1 - \varphi_2)}{R}. \quad (17.7)$$

У цій формулі замість $\mathcal{E}_{1,2}$ можна записати $\sum_i \mathcal{E}_i$ і вираз (17.7) набирає вигляду:

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \sum_i \mathcal{E}_i}{R}. \quad (17.8)$$

Формула (17.8) виражає **закон Ома для неоднорідної ділянки кола**. Якщо коло замкнуте, то формула (17.8) набирає вигляду

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \sum_i \mathcal{E}_i}{R} = \frac{\mathcal{E}}{R},$$

де $\mathcal{E}$ – електрорушійна сила, що діє в колі, а R – сумарний опір кола:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}. \quad (17.9)$$

Рівняння (17.9) називають **законом Ома для повного кола**. Символом R позначають зовнішній опір кола, а символом r – опір джерела струму. У цьому випадку рівняння має вигляд

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}. \quad (17.10)$$

16.3 Правила Кірхгофа

Закони Ома дають можливість досить просто розраховувати струми в нерозгалужених колах або на ділянках кола. Якщо ж доводиться розраховувати складні (розгалужені) кола, то задача ускладнюється. Її можна спростити, якщо користуватися правилами (законами) Кірхгофа.

Назвемо **вузлом** точку, в якій сходиться не менше трьох провідників зі струмами.

Перше правило Кірхгофа: алгебраїчна сума струмів у вузлі дорівнює нулю.

$$\sum_i I_i = 0 \quad (17.11)$$

Правило знаків: струми, які входять у вузол, мають знак, протилежний до знака струмів, що виходять з вузла. Можна брати для струмів, що входять – знак “+”, виходять – знак “–”. А можна навпаки.

Якщо в колі є N вузлів, то число незалежних рівнянь буде $N-1$.

Друге правило Кірхгофа: у будь-якому замкнутому контурі алгебраїчна сума добутоків сил струмів на опори відповідних ділянок дорівнює алгебраїчній сумі електрорушійних сил, що діють у цьому контурі.

$$\sum_i I_i R_i = \sum_k \mathcal{E}_k \quad (17.12)$$

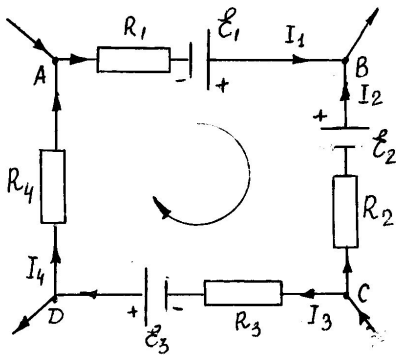


Рисунок 17.3 - Правила Кірхгофа

Користуючись цим правилом так: вибирають довільним чином напрями струмів (якщо вони не вказані), потім вибирають напрям обходу контура. Наприклад, за стрілкою годинника (але можна і навпаки) (рис. 17.3).

Правило знаків:

якщо напрям струму співпадає з напрямом обходу – струм додатній,

якщо е.р.с. підвищує потенціал в напрямі обходу – вона додатна.

Для контуру на рисунку 17.3 запишемо

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 + I_3 R_3 + I_4 R_4 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3$$

Таким чином, складається система рівнянь, число яких дорівнює числу невідомих.

Якщо після розв'язку системних рівнянь струми виходять додатними, то їх напрями вгадані правильно, а в разі, коли струми вийшли від'ємними, потрібно їх напрями змінити на протилежні.

Контрольні запитання

1. Електрорушійна сила. Сторонні сили.
2. Закон Ома для неоднорідної ділянки кола.
3. Перше правило Кірхгофа.
4. Друге правило Кірхгофа.

18. ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ В МЕТАЛАХ, ГАЗАХ І ЕЛЕКТРОЛІТАХ

18.1 Класична теорія провідності металів

Почнемо розгляд цієї теми з струму в металах. У кінці XIX століття дослідним шляхом було доведено, що носіями струму в металах є вільні електрони. Існування вільних електронів можна пояснити тим, що при утворенні кристалічної ґратки від атомів відділяються найменше всього зв'язані (валентні) електрони, які стають “колективною власністю” всього куска металу. Виходячи з уявлення про вільні електрони Друде розробив класичну теорію провідності металів, яка потім була вдосконалена Лоренцом. Згідно з цією теорією вільні електрони в металі можна розглядати як ідеальний електронний газ. Середня швидкість хаотичного

(теплого) руху $\langle u \rangle = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{kT}{m}$, де m – маса електрона. Як показують підрахунки $\langle u \rangle$ становить величину порядку 10^5 м/с. У той самий час швидкість напрямленого руху електронів навіть при дуже великих значеннях густини струму становить величину порядку 10^{-3} м/с. Тому середній час вільного пробігу електронів буде залежити саме від швидкості теплового руху електронів, сама ж середня довжина вільного пробігу електрона зумовлена зіткненням електронів з йонами кристалічної ґратки.

За наявності електричного поля з напруженістю E на кожний електрон діє сила $F = eE$. Під дією цієї сили електрон за час вільного пробігу рухається з прискоренням:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m} \quad (18.1)$$

і в кінці його набуває швидкості напрямленого руху $\langle v_K \rangle = a \langle t \rangle$. Оскільки рух електрона на шляху вільного пробігу рівноприскорений, то середня швидкість на цьому шляху

$$\langle v \rangle = \frac{\langle v_K \rangle}{2} = \frac{a \langle t \rangle}{2} \quad (18.2)$$

Середній час вільного пробігу визначається швидкістю теплового руху $\langle u \rangle$, то:

$$\langle t \rangle = \frac{\langle \lambda \rangle}{\langle u \rangle} \quad (18.3)$$

Підставимо в формулу (18.2) вираз (18.1) і (18.3) маємо:

$$\langle v \rangle = \frac{e \langle \lambda \rangle}{2m \langle u \rangle} E \quad (18.4)$$

Поскілки $j = en \langle v \rangle$, і з врахуванням (18.4) маємо:

$$j = \frac{e^2 n \langle \lambda \rangle}{2m \langle u \rangle} E \quad (18.5)$$

де n – концентрація електронів.

За сталої температури для даного провідника $\frac{e^2 n \langle \lambda \rangle}{2m \langle u \rangle}$ є величина стала, тому вираз (18.5) є не що інше як закон Ома в диференціальній формі $j = \gamma E$. Тому

$$\frac{e^2 n \langle \lambda \rangle}{2m \langle u \rangle} = \gamma \quad (18.6)$$

де γ – питома провідність металу.

Отже, електронна теорія теоретично приводить до закону Ома, який був встановлений експериментально. Підрахуємо питому потужність, яка виділяється при проходженні струму. **Питоною потужністю** називається

фізична величина, що чисельно дорівнює кількості теплоти, яка виділяється в одиницю об'єму провідника за одиницю часу. Рухаючись під дією електричного поля, електрони на шляху вільного пробігу набувають кінетичної енергії, зв'язаної з швидкістю напрямленого руху. Цю енергію вони при зіткненнях з атомами віддають кристалічній ґратці. Таким чином, метал нагрівається завдяки роботі сил електричного поля. Швидкість $\langle v_k \rangle = a \langle t \rangle$. Згідно з формулами (18.1) і (18.3) одержимо

$$\langle v_k \rangle = \frac{eE \langle \lambda \rangle}{m \langle u \rangle} \quad (18.7)$$

Отже, кінетична енергія, віддана при одному зіткненні

$$W_K = \frac{m \langle v_k \rangle^2}{2} = \frac{e^2 E^2 \langle \lambda \rangle^2}{2m \langle u \rangle^2} \quad (18.8)$$

За одиницю часу кожен електрон у середньому зіткнеться $\langle z \rangle$ разів:

$$z = \frac{\langle u \rangle}{\langle \lambda \rangle}$$

Якщо врахувати, що електронів в одиниці об'єму буде n , то енергія, виділена в одиниці об'єму за одиницю часу буде

$$w = \frac{1}{2} \frac{n e^2 \langle \lambda \rangle}{m \langle u \rangle} E^2 \quad (18.9)$$

Врахувавши формулу (18.6) можна записати

$$w = \gamma E^2$$

що співпадає з законом Джоуля-Ленца в диференціальній формі.

Відеман і Франц експериментально встановили, що відношення теплопровідності до питомої електропровідності є величина для всіх металів стала за одної і тієї ж температури

$$\alpha / \gamma = \beta T, \quad (18.10)$$

де α – коефіцієнт теплопровідності, T – абсолютна температура, β – коефіцієнт пропорційності. Класична теорія провідності металів показала, що

$$\beta = 3 \left(\frac{k}{e} \right)^2, \quad (18.11)$$

де k – стала Больцмана, e – заряд електрона.

18.2 Недоліки класичної теорії провідності металів

Таким чином, класична теорія провідності металів пояснила закони Ома і Джоуля-Ленца, а також якісно пояснила закон Відемана-Франца. Однак ця ж теорія зіткнулася з рядом труднощів. По-перше, в законі Відемана-Франца співпадання теорії з експериментом випадкове. Якщо застосувати до електронного газу статистику Максвелла-Больцмана, врахувавши розподіл за швидкостями, то

величина $\beta = 2 \left(\frac{k}{e} \right)^2$, що значно гірше узгоджується з дослідом.

По-друге, з експерименту відомо, що питома провідність $\gamma \sim \frac{1}{T}$. З теорії випливає, що $\gamma = \frac{1}{2} \frac{ne^2 \langle u \rangle}{m}$. З усіх величин, які входять до цієї формули, від температури

залежить тільки швидкість теплового руху електронів $\langle u \rangle \sim \sqrt{T}$. Отже, згідно з теорією $\gamma \sim \frac{1}{\sqrt{T}}$, що протирічить експерименту.

По-третє, згідно з класичною теорією електронний газ повинен мати молярну теплоємність $\frac{3}{2}R$. Додаючи цю величину до теплоємності кристалічної ґратки, яка дорівнює $3R$, одержимо для молярної теплоємності металів значення $4,5R$, а насправді вона дорівнює $3R$, як і для випадку неметалічних хімічно простих кристалів.

Вказані труднощі електронної теорії пояснюються квантовою теорією металів. Але класична теорія, незважаючи на її приблизність, не втратила свого значення, оскільки в багатьох випадках вона дає правильні якісні результати, і є, порівняно з квантовою теорією, більш наочною.

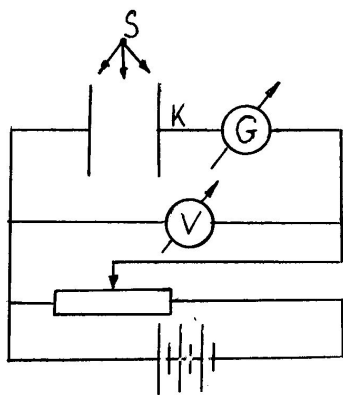
18.3 Струм у газах

Гази при тисках, близьких до атмосферного і більших, є добрими ізоляторами. Це означає, що в них немає вільних електронів або будь-яких інших носіїв вільних зарядів. Однак, якщо газ йонізувати, то він стане провідником. Йонізувати газ можна нагріванням до температури, за якої молекули дисоціюють на йони, або опромінюючи газ рентгенівськими, ультрафіолетовими чи радіоактивними променями. Провідність під дією йонізатора називають **несамостійною провідністю**.

При припиненні дії йонізатора струм у газі припиняється. Поряд з тим, за певних умов струм у газі підтримується за рахунок йонів, що утворюються в результаті

ударів заряджених частинок в нейтральні молекули. Така провідність носить назву **самостійної**.

Спостерігати струм у газах можна за допомогою установки, схема якої дана на (рис. 18.1).



**Рисунок 18.1 -
Установка для
спостереження струму в
газах**

Як тільки простір між пластинками конденсатора йнізується за допомогою йонізатора S , гальванометр починає реєструвати струм у колі. За допомогою потенціометра R можна регулювати напругу на обкладках конденсатора, а отже і струм у колі.

Нехай в одиниці об'єму є n_0 йонів кожного знаку. Внаслідок рекомбінації в одиниці об'єму за одиницю часу зникає $\Delta n_0'$ йонів, а

електричний струм в газі виносить $\Delta n_0''$ йонів кожного знаку за одиницю часу з одиниці об'єму, тоді загальна кількість йонів, що зникли за одиниці часу з одиниці об'єму, буде:

$$\Delta n_{0\text{зн}} = \Delta n_0' + \Delta n_0'' \quad (18.12)$$

Кількість йонів $\Delta n_0'$, що рекомбінували, буде пропорційна як числу додатних так і числу від'ємних йонів.

Тих j інших в одиниці об'єму є n_0 , тому

$$\Delta n_0' = \gamma n_0^2, \quad (18.13)$$

де γ – коефіцієнт рекомбінації.

Нехай сила струму між електродами I , тоді за час t буде перенесено заряд $Q = It$, і число йонів одного знака, які досягли електрода за час t буде $\frac{It}{q}$, а за одиницю часу $\frac{I}{q}$, де q – заряд одного йона. Нехай S – площа кожної з пластин конденсатора, l – відстань між пластинками, тоді Sl – об'єм газу між пластинками. Тому струм виносить з одиниці об'єму за одиницю часу число йонів

$$\Delta n_0'' = \frac{I}{qSl} \quad (18.14)$$

Але $\frac{I}{S} = j$, тому

$$\Delta n_0'' = \frac{j}{ql} \quad (18.15)$$

При рівновазі кількість йонів, які створює йнізатор в одиниці об'єму за одиницю часу Δn_0 , дорівнює кількості йонів, що зникли за одиницю часу з одиниці об'єму, отже умова рівноваги має вигляд :

$$\Delta n_0 = n_0^2 + \frac{j}{ql} \quad (18.16)$$

Розглянемо два крайні випадки. Спочатку припустимо, що густина струму настільки мала, що:

$$\frac{j}{ql} \ll n_0^2 \quad (18.17)$$

тобто числом йонів, які виносяться струмом, можна знехтувати порівняно з числом йонів, що рекомбінують. Тоді умова рівноваги запишеться так:

$$\Delta n_0 = \Delta n_0' = \gamma n_0^2. \quad (18.18)$$

Через переріз газового проміжку, який має площу S рівну площі електродів і паралельний їм, за одиницю часу пройде $n_0 v_+ S$ додатних і $n_0 v_- S$ від'ємних йонів. Тут v_+ і v_- відповідно швидкості напрямленого руху позитивних і негативних йонів. Густина струму $j = j_+ + j_-$, отже:

$$j = q n_0 (v_+ + v_-), \quad (18.19)$$

де q – заряд одного йона.

Введемо рухливість йонів. **Рухливістю** називається величина, яка чисельно дорівнює швидкості, якої набуває йон в електричному полі одиничної напруженості:

$$u = \frac{v}{E}. \quad (18.20)$$

Виразимо швидкості через рухливості йонів і підставимо їх у формулу (18.19):

$$j = q n_0 (u_+ + u_-) E, \quad (18.21)$$

де u_+ і u_- відповідно рухливості додатних і від'ємних йонів.

Оскільки q_0, u_+, u_- і n_0 за даних умов є величини сталі, то і вся величина $\gamma = q n_0 (u_+ + u_-)$ стала. Отже, рівність (18.21) виражає собою закон Ома:

$$j = \gamma E,$$

де γ – питома провідність газу. Отже, при дуже малих густинах струму в газах при несамостійному розряді виконується закон Ома.

Розглянемо другий крайній випадок, коли γ настільки велика, що рекомбінація не встигає відбутись, тобто

$$\frac{j}{ql} \gg \gamma n_0^2$$

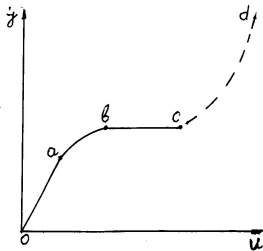
Тоді умова рівноваги набирає вигляду:

$$\Delta n_0 = \frac{j}{ql} \quad (18.22)$$

Позначимо густину струму через j_H , одержимо:

$$j_H = \Delta n_0 ql \quad (18.23)$$

З цієї рівності випливає, що j_H не залежить від напруженості поля, а отже і від напруги між електродами. Ця густина струму називається густиною струму насичення. На рисунку 18.2 показано залежність сили струму від напруженості електричного поля при несамоствійному розряді. Ділянка $0a$ відповідає слабким полям, коли виконується закон Ома. Ділянка ab являє собою перехідну область, де закон Ома не виконується. Ділянка bc відповідає струму насичення.



**Рисунок 18.2 -
Залежність сили струму
від напруженості
електричного поля при
несамоствійному розряді**

Сильне електричне поле може викликати появу самоствійного розряду в газах, коли струм іде і при припиненні дії іонізатора. Зростання сили струму на ділянці cd обумовлене виникненням ударної йонізації. Електричні заряди, які містяться в полі, під дією поля розганяються на довжині вільного пробігу настільки, що набувають кінетичної енергії, достатньої

для йонізації молекул, з якими вони стикаються. При цьому, внаслідок такої йонізації, кількість зарядів зростає лавиноподібно, бо новоутворені заряди в свою чергу йонізують нейтральні молекули і т.д. Струм різко зростає, але для того щоб розряд у газі став самостійним, потрібно щоб утворювались йонні лавини двох знаків, які йдуть назустріч одна одній. Для того щоб енергія йонів була достатня для ударної йонізації, потрібно або збільшувати напруженість поля E , або збільшувати довжину вільного пробігу йонів, що можна досягти розрідженням газів.

17.4 Види газових розрядів та їх практичне застосування

Розрізняють декілька типів самостійних газових розрядів: тліючий, коронний, іскровий і електричну дугу.

Тліючий розряд – спостерігається в газах за низьких тисків ($\sim 10^3$ Па і менше) – це такий самостійний газовий розряд, в якому звільнення електронів з катоду відбувається внаслідок бомбардування його позитивними йонами і фотонами, що утворюються в газі.

Область застосування цього виду самостійного розряду є досить широкою:

- газорозрядні трубки з малою напругою запалювання розряду (~ 70 В) використовують у неонових лампах, а такі лампи використовують як індикатори;
- оскільки речовина катода в тліючому розряді поступово може переходити у параподібний стан, то такий розряд широко використовують для катодного розпилення металів по поверхні предметів і саме так виготовляють металеві дзеркала високої якості;

- тліючий розряд використовують як джерело світла (лампи денного світла, рекламні газорозрядні трубки та ін.);
- стабілізатори напруг;
- у водневій енергетиці – для відновлення оксиду вуглецю з вуглекислого газу: $2CO_2 \rightarrow 2CO + O_2$.

Коронний розряд – виникає за нормального тиску в газі, що перебуває в дуже неоднорідному електричному полі, наприклад поблизу ліній проводів високої напруги; таке поле може виникнути між двома електродами, поверхня одного з яких повинна б мати велику кривизну. Коли напруженість електричного поля біля електрода досягає $3 \cdot 10^6$ В/м, навколо нього виникає свічення, яке має вигляд корони, що оточує електрод, тому розряд називають **коронним**. Свічення виникає як біля позитивного, так і біля негативного електрода.

Якщо **корона є негативною**, то позитивні йони, що утворилися електричними лавинами, прискорюються неоднорідним електричним полем біля катода і зумовлюють вторинну електронну емісію, які в свою чергу породжують нові електронні лавини. Оскільки електричне поле є неоднорідним – напруженість з віддаленням від електроду зменшується, то ці електронні лавини з віддаленням від електроду обриваються, а це і є товщиною корони.

Якщо корона є позитивною, то електронні лавини виникають біля зовнішньої границі корони, внаслідок об'ємної фотоіонізації випромінюванням коронного шару біля анода. Позитивні йони рухаються під дією поля до катода, які і є носіями струму, а електрони рухаються до анода, який коронує. Між позитивною і негативною коронами існує так звана "темна зона", яка зі збільшенням напруги між електродами, зникає і виникає **іскровий розряд**.

Коронний розряд може виникати в природних умовах під дією напруженості атмосферного електричного поля на

верхівках корабельних щогл (у давнину викликали страх у моряків, оскільки були передвісниками морських бур та шторму).

Явище коронного розряду необхідно враховувати в енергетиці під час прокладання високовольтних повітряних ліній електропередач, оскільки використовуються провідники досить великого діаметру, а порушення гладкості поверхні призводить до шкідливих витоків струму і значних втрат електричної енергії.

Але є і корисне застосування коронного розряду, що виникає на одному провіднику – це електричні фільтри, призначені для очищення промислових газових викидів у атмосферу.

Іскровий розряд – виникає при збільшенні напруги між двома електродами, розміщеними в газі за нормального тиску. У природі це блискавка, яка має вигляд пучка яскравих зигзаподібних розгалужених тонких ниток, які пронизують простір і швидко гаснуть, а на їх місці з'являються нові. Такі нитки називають **іскровими каналами**, вони можуть починатися як від позитивного, так і негативного електрода, а також від довільної точки між ними. Іскровий розряд у газах – це пробій газового діелектрика, який відбувається у разі досягнення певного значення напруженості електричного поля, яке називають **напругою пробою**. Після того як проміжок між електродами "пробито", опір цього проміжку стає малим і крізь канал проходить короткочасний імпульс струму, значення якого є дуже великим.

Є виділення великої кількості теплоти. Температура газу в розрядному проміжку сягає 10^4 К. Миттєво нагрітий газ розширюється з утворенням циліндричних ударних хвиль, наявність яких супроводжується звуковими ефектами (гуркіт, тріск та ін.).

За малої відстані розрядного проміжку іскровий розряд спричинює специфічне руйнування анода, а це використовується в електроіскровому методі різання металу, його свердління та інших видах точної обробки.

Електрична дуга утворюється при атмосферному тиску від потужного джерела струму при наближенні двох електродів майже до дотику. У місці контакту виникає великий електричний опір, від цього електроди, між якими існує певна різниця потенціалів, дуже нагріваються і виникає розряд у вигляді дуги. Під час горіння дуги відстань між електродами становить – 5 мм, а сила струму – 10-20 А. Напруга між електродами – 40-50 В. Електроди можуть бути металеві чи вуглецеві.

Застосовують такий вид газового розряду в катодних ртутних лампах, де як електрод є стовпчик рідкої ртуті, а ртутна дуга є потужним джерелом ультрафіолетового випромінювання. Такі лампи застосовують у медицині, наукових дослідженнях.

Оскільки дуговий розряд – це інтенсивне джерело теплової енергії, тому в техніці його використовують для електрозварювання, а також у дугових електричних печах у металургії під час виплавлення сталі, феросплавів; вакуумно-дугові розряди лежать в основі вакуумних вимикачів, запобіжників, у ртутних випрямлячах, які перетворюють змінний електричний струм у постійний; у вакуумно-плазмовій технології отримання тонких плівок та покриттів для сучасних електронних технологій.

Частково чи повністю йонізований газ, у якому кількість позитивних і негативних зарядів однакова, завдяки чому він залишається електрично нейтральним, дістав назву **плазми**. Плазма характеризується ступенем йонізації, температурою (холодна – низькотемпературна і гаряча – високотемпературна). Плазму використовують у

газорозрядних джерелах світла, магнітогідродинамічних генераторах, плазмотронах для зварювання металів, керованій реакції термоядерного синтезу.

17.5 Струм в електролітах. Електроліз. Закони електролізу

Згідно з теорією електролітичної дисоціації молекули солей, лугів і кислот складаються з двох видів йонів. Сили притягання між цими йонами забезпечують цілість молекули. Коли ж ці молекули перебувають в оточенні молекул води, то зв'язки між йонами, які утворюють молекулу, дуже ослаблені. За таких умов зіткнення між молекулами внаслідок їх теплового руху призведе до розпаду молекул на йони, тобто до **дисоціації** молекул.

Позитивні йони – це атоми або молекули, які втратили один або кілька електронів; а негативні йони – атоми або молекули, що мають один або кілька зайвих електронів.

В електролітах поряд з процесом дисоціації відбувається зворотний процес перетворення йонів у нейтральні молекули. Цей процес називається **молізацією**. У результаті одночасного проходження обох процесів дисоціації і молізації в розчині встановлюється рухома рівновага між числом утворених йонів і числом йонів, які об'єднуються в молекули.

Йони в електроліті, як і молекули, рухаються хаотично, але коли створити в електроліті електричне поле, приклавши напругу до електродів, то крім хаотичного теплового руху, в електроліті виникає напрямлений рух йонів. Позитивні йони рухаються до катода (негативний електрод), а негативні – до анода (позитивний електрод). Дійшовши до відповідних електродів, йони віддають їм свої заряди і, ставши

звичайними атомами або молекулами, виділяються на електродах або вступають у хімічні реакції.

Отже, **електричний струм в електролітах** – це напрямлений рух масивних частинок – йонів, кожний з яких, окрім власного заряду q_0 , переносить до відповідного електроду масу m_0 , яку можна знайти за допомогою молярної маси речовини, що виділяється на електроді:

$$m_0 = \frac{\mu}{N_A}, \quad (18.24)$$

де N_A – число Авогадро.

Явище виділення речовини на електродах під час проходження струму через електроліт називається **електролізом**.

Очевидним є той факт, що N йонів перенесуть за деякий час до електроду заряд $q = Nq_0$ і, відповідно, масу $m = Nm_0$. Тобто виділена на електроді маса речовини прямо пропорційна величині перенесеного цими йонами заряду.

$$N = \frac{m}{m_0} = \frac{q}{q_0}$$

Визначивши число йонів N , одержимо кількісний взаємозв'язок між масою та зарядом:

$$m = \frac{m_0}{q_0} q = \frac{\mu}{N_A q_0} q.$$

Заряд кожного йона є кратний елементарному заряду і залежить від валентності n : $q_0 = n \cdot e$.

Тоді кінцеве співвідношення набуде вигляду:

$$m = \frac{\mu}{N_A n e} q = \frac{\mu}{n N_A e} \cdot I \cdot t, \quad (18.25)$$

де I – сила струму через електроліт.

Одержане співвідношення (18.25) називають **об'єднаним законом Фарадея для електролізу**. Ще задовго до розуміння суті електролізу англійський фізик Майкл Фарадей, вимірявши масу речовини, яка виділялась на електродах, коли він пропускав струм через різні електроліти, встановив у 1833-1834 рр. прямо пропорційну залежність маси виділеної на електродах речовини із величиною заряду, що протікав через електроліт:

$$m = k \cdot q \quad (18.26)$$

Величина k названа **електрохімічним еквівалентом речовини**, чисельно дорівнює масі речовини, яка виділяється з електроліту на відповідному електроді під час проходження через електроліт заряду в один кулон. Значення **електрохімічного еквіваленту речовини** визначається її молярною масою і валентністю її йонів:

$$k = \frac{\mu}{n \cdot N_A \cdot e} \quad (18.27)$$

Експериментально визначаючи k , можна знайти заряд електрона:

$$e = \frac{\mu}{n \cdot N_A \cdot k} = \frac{\mu \cdot q}{n \cdot N_A \cdot m}$$

Величина заряду $F = N_A \cdot e = 96500$ Кл необхідно для

$\frac{\mu}{n}$ кг будь-якої речовини. Цей заряд був експериментально встановлений Фарадеєм і носить назву **числа (сталої) Фарадея**.

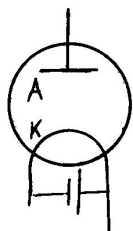
17.6 Струм у вакуумі

Вакуум є ідеальним ізолятором, тому що в ньому відсутні носії електричних зарядів. Але, якщо у вакуум ввести якимось чином носії електричних зарядів і накласти електричне поле, то у вакуумі будемо мати напрямлений рух електричних зарядів. Тобто у вакуумі буде йти електричний струм. Ввести у вакуумі такі носії електричних зарядів як електрони можна за допомогою термоелектронної емісії. Як показує дослід, вільні електрони при кімнатних температурах практично не виходять з металу. Це вказує на існування в поверхневому шарі металу електричного поля, яке перешкоджає виходу електронів з металу у вакуум. Електрони провідності металу, здійснюючи хаотичний рух, можуть тимчасово вилітати за межі металу, щоб потім в нього повернутись. Ці електрони лише тимчасово виходять з металу і їх не можна вважати такими, які покинули метал. Але ці електрони утворюють електронну хмарку над поверхнею металу, заряджену негативно. Разом з тим, сам метал заряджується позитивно. Цей заряд разом з зарядом електронної хмарки утворює тонкий подвійний електричний шар, електричне поле якого протидіє вильоту електронів з металу. Робота, яку повинен виконати електрон провідності для виходу з металу у вакуум, називається роботою виходу електрона з металу.

Робота виходу виконується електроном завдяки зменшенню його кінетичної енергії. Вона складається з роботи проти сил поля подвійного електричного шару, а також проти сил притягання з боку додатного заряду на поверхні металу, який індукується електроном, що вилітає.

Випускання електронів тілами називається електронною емісією.

Якщо це випускання здійснюється нагрітими тілами, то воно носить назву – термоелектронна емісія. За допомогою термоелектронної емісії можна ввести носії електричного струму у вакуум і одержати в ньому струм. Найпростішим



**Рисунок 18.3 -
Вакуумний діод**

вакуумним приладом, в якому за допомогою термоелектронної емісії проходить електричний струм, є двоелектродна лампа, що називається також вакуумним діодом. Вона являє собою металічний або скляний балон, в якому створенно вакуум. У балоні міститься два електроди: анод і катод.

Конструктивно електроди можуть бути виконані різними способами. У найпростішому випадку катод має форму тонкої прямої нитки, анод – коаксимального з нею циліндра.

У сучасних лампах катод являє собою циліндр, всередині якого є спіраль, яка за допомогою електричного струму, що по ній проходить, розжарюється і підігріває катод.

Схематичне зображення вакуумного діода дано на рисунку 18.3.

Якщо між анодом і катодом прикласти напругу, то в лампі буде спостерігатись напрямлений рух електронів від катода до анода, тобто піде струм, який дістав назву анодного струму.

Залежність сили анодного струму від напруги між анодом і катодом можна дослідити за допомогою установки, схема якої дана на рисунку 18.4.

Сила струму в колі розжарення регулюється змінним резистором R_p . За допомогою батареї B_A і потенціометра R між анодом і катодом створюється анодна напруга, що

вимірюється вольтметром V . Сила анодного струму вимірюється міліамперметром mA .

Якщо встановити розжарення катода і зняти залежність сили анодного струму I_A від анодної напруги U_A , то одержимо криву, зображену на рисунку 18.5 (різні криві відповідають різним температурам).

Ця крива називається вольт-амперною характеристикою.

При $U_0=0$ електрони, що вилетіли з катода, утворюють біля нього від'ємно заряджену електронну хмарку. Ця хмарка відштовхує електрони, що вилітають з металу і більша їх частина повертається назад. Все ж невелике число електронів проходить крізь хмарку до анода і в колі при нульовій анодній напрузі спостерігається слабкий струм.

Щоб припинити повністю анодний струм потрібно між анодом і катодом прикласти деяку від'ємну напругу. Отже, вольт-амперна характеристика діода починається не з початку координат, а дещо лівіше в області від'ємних напруг.

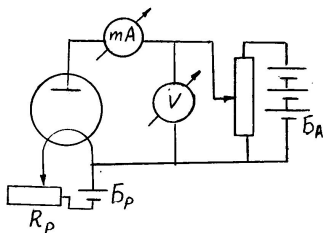


Рисунок 18.4 - Схема установки

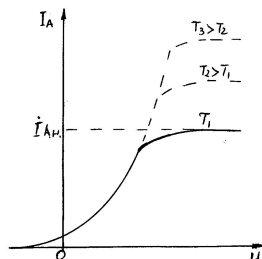


Рисунок 18.5 - Залежність сили анодного струму від анодної напруги

При малих додатних напругах сила анодного струму змінюється за законом

$$I_A = BU_A^{\frac{3}{2}}, \quad (18.26)$$

де B – коефіцієнт пропорційності, U_A – анодна напруга. Закон (18.26) називають законом трьох других, або **законом Богуславського-Ленгмюра**.

Контрольні запитання:

1. Основні положення класичної електронної теорії провідності металів.
2. Закон Джоуля-Ленца з точки зору електронної теорії.
3. Закон Відемана-Франца.
4. Самостійний і несамостійний газовий розряд.
5. Види самостійного газового розряду. Ударна іонізація.
6. Число Фарадея. Обчислення електрохімічного еквівалента.
7. Вольтамперна характеристика струму у вакуумі.

Додаток

Таблиця 1 – Одиниці СІ фізичних величин

Одиниця	Найменування	Позначення	Розмірність
Основні одиниці			
Довжина	метр	м	м
Маса	кілограм	кг	кг
Час	секунда	с	с
Сила струму	ампер	А	А
Температура	кельвін	К	К
Сила світла	кандела	Кд	Кд
Кількість речовини	моль	моль	
Похідні одиниці			

Площа	квадратний метр	м^2	м^2
Об'єм	кубічний метр	м^3	м^3
Період	секунда	с	с
Частота	герц	Гц	с^{-1}
періодичного процесу			
Густина	кілограм на кубічний метр	$\text{кг}/\text{м}^3$	$\text{м}^{-3} \cdot \text{кг}$
Швидкість	метр за секунду	$\text{м}/\text{с}$	$\text{м} \cdot \text{с}^{-1}$
Прискорення	метр за секунду в квадраті	$\text{м}/\text{с}^2$	$\text{м} \cdot \text{с}^{-2}$
Сила	ньютон	Н	$\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2}$
Тиск	паскаль	Па	$\text{м}^{-1} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2}$

Продовження таблиці 1

Робота, енергія, кількість теплоти -	джоуль	Дж	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2}$
Потужність	ват	Вт	$\text{тм}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-3}$
Електричний заряд	кулон	Кл	$\text{с} \cdot \text{А}$
Напруга, різниця потенціалів, е.р.с.	вольт	В	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{А}^{-1}$
Напруженість електричного	вольт на метр	$\text{В}/\text{м}$	$\text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{А}^{-1}$

поля			
Електрична ємність	фарад	Ф	$\text{м}^{-2} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-4} \cdot \text{А}^2$
Опір	ом	Ом	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{А}^{-2}$

Таблиця 2 – Деякі основні фізичні сталі

Назва	Позначення	Числове значення
Радіус Землі	R	$6,37 \cdot 10^6 \text{ м}$
Маса Землі	M	$5,97 \cdot 10^{24} \text{ кг}$
Прискорення вільного падіння	g	$9,8 \text{ м/с}^2$
Гравітаційна стала	G	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \text{ с}^2)$
Стала Авогадро	N_A	$6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
Універсальна газова стала	R	$8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$
Стала Больцмана	k	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$
Об'єм моля за нормальних умов	V_o	$22,41 \text{ м}^3/\text{моль}$

ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Савельєв И. В. Курс общей физики. /в 5 т. – М.: Высшая школа, 1991.
2. Кучерук І. М., Горбачук І. Т., Луцик П. П. Загальний курс Фізики. / в 3-х т. – Київ: Техніка, 1999-2002.
3. Трофимова Т. И. Курс физики. М.: Высшая школа, 1990.
4. Галушак М.О. Курс загальної фізики. Кн. 1.– Івано-Франківськ: Факел, 2000.
5. Галушак М.О., Калугін А. Г., Татарина С. А. Загальна фізика. Механіка. Лабораторний практикум. Частина І. – Івано- Франківськ: ІФНТУНГ, 2012.- 92 с.

6. Галушак М. О., Антощук А. І., Подвальних Г. С., Фреїк Д. М. Курс фізики, Основи молекулярної фізики і термодинаміки. – К.: УСЛОУ, 1993.
7. Лопатинський І. С. Курс фізики. Фізика для інженерів. – Л.: Бескид-Біт, 2002.
8. Бушок Г. Ф. та ін.. Курс фізики. Кн. І, ІІ. – К.: Либідь.