

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**Івано-Франківський національний технічний
університет нафти і газу**

Кафедра фізики новітніх технологій

Г.Д. Матеїк

ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА

Практикум

Для студентів спеціальностей
"Геодезія " і "Землевпорядкування та кадастр"

*Рекомендовано методичною
радою університету*

2009

УДК – 53(076.5)
ББК 22.3 я73

Матеїк Г.Д. Загальна фізика: Практикум. – Івано-Франківськ: ІФНТУНГ, 2009. – 112с.

У практикумі коротко, у доступній формі подано матеріал, згідно діючої навчальної програми дисципліни «Фізика» для вищих технічних закладів освіти.

Матеріал курсу розділений за окремими заняттями. Для кожного практичного заняття подаються короткі теоретичні відомості, основні закони і формули, підібрано приклади розв’язування задач і рекомендовані задачі для розв’язування в аудиторії та вдома.

Практикум передусім розрахований для студентів спеціальностей «Геодезія» і «Землевпорядкування та кадастр» та може бути використаний студентами інших спеціальностей вищих технічних навчальних закладів.

Рецензент: д-р фіз.-мат. наук, професор М.О.Галушак

© Матеїк Г.Д., 2009
© ІФНТУНГ, 2009

З М І С Т

ВСТУП.....	4
1 МЕХАНІКА СУЦІЛЬНОГО СЕРЕДОВИЩА.....	5
Основні закони і формули.....	5
Приклади розв'язування задач.....	7
Задачі до теми 1.....	14
2 АТОМНО-МОЛЕКУЛЯРНА БУДОВА РЕЧОВИНИ.....	15
Основні закони і формули.....	15
Приклади розв'язування задач.....	18
Задачі до теми 2.....	28
3 КОЛИВАННЯ. ГАРМОНІЧНІ КОЛИВАННЯ (МЕХАНІЧНІ ТА ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ)	30
Основні закони і формули.....	30
Приклади розв'язування задач.....	32
Задачі до теми 3.....	43
4 ГАРМОНІЧНІ КОЛИВАННЯ (ЗАГАСАЮЧІ ТА ВИМІШЕНІ)...	44
Основні закони і формули.....	44
Приклади розв'язування задач.....	47
Задачі до теми 4.....	57
5 ХВИЛІ. РІВНЯННЯ ХВИЛІ. ЕНЕРГІЯ ХВИЛІ. ЗВУКОВІ ХВИЛІ. ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ.....	58
Основні закони і формули.....	58
Приклади розв'язування задач.....	61
Задачі до теми 5.....	69
6 СТОЯЧІ ХВИЛІ. ДИСПЕРСІЯ ХВИЛЬ. ЕФЕКТ ДОПЛЕРА.....	70
Основні закони і формули.....	70
Приклади розв'язування задач.....	73
Задачі до теми 6.....	79
7 ОПТИКА. ОСНОВНІ ЗАКОНИ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ОПТИКИ. ІНТЕРФЕРЕНЦІЯ СВІТЛА.....	80
Основні закони і формули.....	80
Приклади розв'язування задач.....	82
Задачі до теми 7.....	89
8 ХВИЛЬОВА ОПТИКА. ДИФРАКЦІЯ СВІТЛА.....	91
Основні закони і формули.....	91
Приклади розв'язування задач.....	93
Задачі до теми 8.....	98
9 ПОЛЯРИЗАЦІЯ СВІТЛА. ЗАКОН МАЛЮСА. ПОГЛИНАННЯ І ВИПРОМІНЮВАННЯ СВІТЛА.....	100
Основні закони і формули.....	100
Приклади розв'язування задач.....	101
Задачі до теми 9.....	106
ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ ДОДАТОК.....	108
ДОДАТОК	109

ВСТУП

Фізика – наука про природу, про найбільш фундаментальні закономірності руху матерії, її будову, властивості та види взаємодії. Головна мета фізики – встановити та пояснити закони, за якими відбуваються процеси та явища навколишнього світу.

Пропонований практикум охоплює найбільш важливі питання курсу загальної фізики: фізика суцільного середовища; коливний і хвильовий процеси; основи геометричної та хвильової оптики. Матеріал розподілений за окремими темами, що розглядаються на практичних заняттях у даному семестрі. На початку кожної теми подано: основні закони і формули, які використовуються при розв'язуванні задач; наведено приклади розв'язування задач; підібрано по декілька задач з таким розрахунком, щоб одні з них розв'язувати на практичному занятті, а інші використати для домашнього завдання.

Ціль практикуму – систематизувати, поглибити і розширити знання і розуміння важливих фізичних явищ і законів, навчити студентів застосовувати закони фізики до розв'язування задач різної складності.

Всі величини в задачах переважно виражені в одиницях Міжнародної системи одиниць СІ.

Довідковий матеріал із «Додатку» допоможе при розв'язуванні задач.

Практикум призначено для викладачів фізики при проведенні практичних занять та для організації самостійної роботи студентів вищих технічних закладів освіти, в яких вивчається фізика.

1 МЕХАНІКА СУЦІЛЬНОГО СЕРЕДОВИЩА

Основні закони і формули

Кристалами називають тверді тіла, в яких атоми чи молекули розміщені впорядковано і утворюють внутрішню структуру, що періодично повторюється.

Тверді тіла, які мають єдину кристалічну решітку по всьому об'єму, називають **монокристалами**.

Тверді тіла, що складаються з великої кількості дрібних кристалів, які зрослися один з одним і розміщені один до одного цілком хаотично, називають **полікристалами**.

Кристали **анізотропні**, тобто їх властивості теплопровідність, електропровідність, твердість, міцність – різні у різних напрямках.

Аморфні тіла – тіла, що характеризуються неправильною геометричною будовою. Аморфні тіла – ізотропні, вони проявляють пружні властивості, як тверді тіла і текучі, як рідини. Вони не мають певної температури плавлення.

У природі немає абсолютно твердих тіл, оскільки всі реальні тіла під дією прикладених сил змінюють свою форму і об'єм, тобто **деформуються**. Під час деформації тіла під впливом зовнішніх сил його частинки зміщуються з початкових положень рівноваги в інші положення. Цим переміщенням протидіють сили взаємодії (внутрішні сили) між частинками. Якщо зсув частинок був не дуже великий, то після припинення дії зовнішніх сил вони під впливом внутрішніх сил повертаються в початкові положення. Таку деформацію називають **пружною**.

Пластичними називають деформації, які повністю або частково зберігаються в тілі після припинення дії зовнішніх сил.

Усі деформації твердих тіл (розтяг і стиск, зсув, згин, кручення) зводяться до розтягу (стиску) і зсуву.

Зсувом називають таку деформацію твердого тіла, при якій усі його плоскі шари, паралельні деякій площині, що називається площиною зсуву, зміщуються паралельно один одному, не змінюючись за розмірами і формою.

Величини, що характеризують деформацію:

1) абсолютне видовження: $\Delta l = l - l_0$;

$$\Delta \epsilon = \frac{\Delta l}{l_0},$$

2) відносне видовження:

де l_0 – початкова довжина тіла;

l – довжина деформованого тіла.

Одна з важливих величин, що характеризує механічні властивості твердих тіл – **механічна напруга**. Це фізична величина,

що дорівнює відношенню сили пружності до площі поперечного перерізу тіла:

$$\sigma = \frac{F_{np}}{S} \quad (1.1)$$

При малих деформаціях механічна напруга прямо пропорційна відносному видовженню (**закон Гука**)

$$\sigma = E \epsilon, \quad (1.2)$$

де E – модуль пружності (модуль Юнга).

Модуль пружності є однаковий для зразків будь-якої форми і

розмірів, виготовлених з одного матеріалу ($E = \frac{H}{m^2}$).

Графічне зображення залежності механічної напруги σ від відносної деформації $\frac{\Delta l}{l_0}$ називається **діаграмою розтягу**.

Максимальну напругу σ_m , що виникає в тілі перед руйнуванням, називають **межею міцності**.

Запас міцності визначається за формулою

$$k = \frac{\sigma_m}{\sigma} \quad (1.3)$$

Тепловим розширенням називається збільшення лінійних розмірів і об'ємів тіл, що виникає при підвищенні температури.

Лінійне теплове розширення характерне для твердих тіл.

Об'ємне теплове розширення виникає як у твердих тілах, так і в рідинах при їх нагріванні.

Лінійне теплове розширення характеризується коефіцієнтом лінійного розширення α в даному інтервалі температур:

$$\alpha = \frac{1}{l_0} \frac{\Delta l}{\Delta T}, \quad (1.4)$$

де l_0 – початкова довжина тіла при температурі T_0 ;

$\Delta l = l - l_0$ – збільшення довжини при нагріванні на $\Delta T = T - T_0$.

Довжина тіла l при температурі T визначається за формулою

$$l = l_0 [1 + \alpha \Delta T], \quad (1.5)$$

де l_0 – лінійний розмір тіла при 273 K;

$\Delta T = T - T_0$ – зміна температури тіла при його нагріванні від

$T_0 = 273 \text{ K}$ до T ;

α – коефіцієнт лінійного розширення.

Об'ємне теплове розширення твердих тіл і рідин характеризується коефіцієнтом об'ємного розширення α_v в даному інтервалі температур:

$$\alpha_v = \frac{1}{v_0} \frac{\Delta v}{\Delta T}, \quad (1.6)$$

де v_0 – початковий об'єм тіла при температурі T_0 ;

$\Delta v = v - v_0$ – збільшення об'єму тіла при нагріванні його на $\Delta T = T - T_0$.

Об'єм тіла v при температурі T визначається за формулою

$$v = v_0 [1 + \alpha_v \Delta T], \quad (1.7)$$

де v_0 – об'єм тіла при 273 К;

α_v – коефіцієнт об'ємного розширення, зв'язаний з коефіцієнтом лінійного розширення α_l співвідношенням $\alpha_v = 3\alpha_l$.

Приклади розв'язування задач

Задача 1

Які сили треба прикласти до кінців сталюї дротини довжиною 4 м і з перерізом 0,5 мм², щоб видовжити її на 2 мм?

Дано:

$$l_0 = 4 \text{ м}$$

$$S = 0,5 \text{ мм}^2 = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$$

$$\Delta l = 2 \text{ мм} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$E = 21,6 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$$

$$F = ?$$

Розв'язування

Згідно закону Гука

$$\Delta l = E \frac{\Delta l}{l_0},$$

де E – модуль Юнга для сталі.

Так як $\Delta l = \frac{F}{S}$ і $\Delta l = \frac{\Delta l}{l_0}$, то отримаємо

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l_0}.$$

Отже,

$$F = \frac{SE \Delta l}{l_0}$$

Перевіримо одиниці вимірювання:

$$[F] = \frac{\text{м}^2 \cdot \text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м}^2 \cdot \text{м}} = \text{Н}$$

$$F = \frac{0,5 \cdot 10^6 \cdot 21,6 \cdot 10^{10} \cdot 2 \cdot 10^{11}}{4} \text{ Н} = \frac{21,6 \cdot 10}{4} \text{ Н} = 5,4 \cdot 10 \text{ Н} = 54 \text{ Н}$$

Відповідь: до кінців сталюї дротини треба прикласти силу в 54 Н.

Задача 2

Верхній кінець сталюї дротини довжиною 5 м з площею поперечного перерізу 4 см² закріплено нерухомо, до нижнього підвішено тягар масою 2·10³ кг. Визначити : 1) нормальну напругу σ матеріалу дротини; 2) абсолютне Δl і відносне ϵ видовження дротини; 3) потенціальну енергію $E_{\text{роз}}$ розтягнутої дротини.

Дано:

$$l_0 = 5 \text{ м}$$

$$S = 4 \text{ см}^2 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$$

$$m = 2 \cdot 10^3 \text{ кг}$$

$$E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$$

$$\sigma = ?$$

$$\Delta l = ?$$

$$\epsilon = ?$$

$$E_{\text{роз}} = ?$$

Розв'язування

1 Нормальна напруга матеріалу розтягнутої дротини виражається формулою

$$\sigma = \frac{F}{S},$$

де F – сила, яка діє вздовж осі дротини.

В даному випадку F дорівнює силі тяжіння mg і тому можемо записати

$$\sigma = \frac{mg}{S}.$$

Перевіримо одиниці вимірювання:

$$[\sigma] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па}$$

$$\sigma = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 9,8}{4 \cdot 10^{-4}} \text{ Па} = \frac{19,6 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^{-4}} \text{ Па} = 4,9 \cdot 10^7 \text{ Па} = 49 \text{ МПа}$$

2 Абсолютне видовження вираховується за формулою

$$\Delta l = \frac{Fl_0}{ES},$$

де E – модуль Юнга.

Підставивши значення величини F, l_0, S в цю формулу (значення E взяти із таблиці) і обчислюючи, отримаємо

$$\Delta l = \frac{Fl_0}{ES} = \frac{mgl_0}{ES}.$$

Перевіримо одиниці вимірювання:

$$\Delta l = \frac{\frac{\text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{м}}{\frac{\text{Н}}{\text{м}^2}}} = \frac{\frac{\text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{м}}{\text{Н}}} = \frac{\frac{\text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{м}}{\frac{\text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2}}{\text{м}^2}}} = \text{м}.$$

$$\Delta l = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 9,8 \cdot 5}{2 \cdot 10^{11} \cdot 4 \cdot 10^{-4}} \text{ м} = \frac{98 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^7} \text{ м} = 12,25 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 1,22 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 1,22 \text{ мм}$$

Відносне видовження дротини

$$\Delta = \frac{\Delta l}{l_0}.$$

$$\Delta = \frac{1,22 \cdot 10^{-3}}{5} = 0,244 \cdot 10^{-3} = 2,44 \cdot 10^{-4}.$$

3 Потенціальна енергія розтягнутої дротини

$$\Delta = \frac{\Delta V}{V},$$

де V – об'єм тіла, який дорівнює Sl_0 .
Тому

$$\Delta = \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta V}{Sl_0}.$$

Перевіримо одиниці вимірювання:

$$\Delta = \frac{\frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{м}}{\text{Н} \cdot \text{м}} = \text{Дж}.$$

$$W = \frac{2,44 \cdot 10^{-4} \cdot 49 \cdot 10^6}{2} = 4 \cdot 10^{-4} \cdot 5 \text{ Дж} =$$

$$\frac{119,56 \cdot 10^2}{2} \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot 5 \text{ Дж} = 5978 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot 5 \text{ Дж} = 11,9 \text{ Дж}.$$

Відповідь: 1) нормальна напруга дротини 49 МПа; 2) абсолютне видовження дротини 1,22 мм; відносне видовження дротини $2,44 \cdot 10^{-4}$; 3) потенціальна енергія розтягнутої дротини 11,9 Дж.

Задача 3

Мідний дріт завдовжки 5 м підвішений за один кінець. Чи є загроза, що він обірветься під дією власної ваги?

Дано:

$$l_0 = 5 \text{ м}$$

$$\sigma_m = 2,4 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$$

$$\rho = 8,9 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$$

$$\sigma \ll \sigma_m \text{ ?}$$

$$\sigma \ll \sigma_m \text{ ?}$$

Розв'язування

Напруга, зумовлена власною вагою дроту, можна визначити за формулою

$$\sigma = \frac{F_{np}}{S}$$

Так як

$$F_{np} = mg = \rho V g = \rho l_0 S g,$$

отримаємо

$$\sigma = \frac{\rho l_0 S g}{S} = \rho l_0 g$$

Перевіримо одиниці вимірювання:

$$\frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{м}^3 \cdot \text{с}^2} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$$

Підставляючи числові значення, знайдемо

$$\sigma = 8,9 \cdot 10^3 \cdot 9,8 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 436,1 \cdot 10^3 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 4,4 \cdot 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$$

Порівнюємо з табличним значенням σ_m для міді $\sigma_m = 2,4 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$.

Бачимо, що $\sigma \ll \sigma_m$, і отже, загрози розриву немає.

Відповідь: оскільки $\sigma \ll \sigma_m$ то загрози розриву немає.

Задача 4

З вежі висотою 30 м звисає стальна дротина діаметром 2 мм. Визначити як зміниться довжина дротини, якщо до неї підвісити вантаж масою 60 кг. Чи матиме місце залишкова деформація, якщо

зняти вантаж? Визначити найбільшу масу вантажу, за якої дротина не розірветься.

Дано:

$$l_0 = 30 \text{ м}$$

$$d = 2 \text{ мм} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$m = 60 \text{ кг}$$

$$E = 22 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$$

$$\sigma_m = 6,8 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$$

$$\Delta l - ?$$

Розв'язування

а) Видовження дротини визначається за законом Гука

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{1}{E} \sigma_m,$$

де $\sigma_m = \frac{mg}{S}$, $S = \frac{\pi d^2}{4}$.

Тоді

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{1}{E} \frac{mg}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{1}{E} \frac{4mg}{\pi d^2}$$

Після підстановки в останню формулу дістанемо

$$\Delta l = \frac{l_0}{E} \frac{4mg}{\pi d^2}.$$

Перевіримо одиниці вимірювання:

$$\left[\frac{\Delta l}{l_0} \right] = \frac{\frac{\text{м}}{\text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2}}}{\frac{\text{Н}}{\frac{\text{м}^2}{\text{м}^2}}} = \frac{\frac{\text{м}}{\text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2}}}{\frac{\text{Н}}{\text{м}^2}} = \frac{\frac{\text{м}}{\text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2}}}{\frac{\text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2}}{\text{м}^2}} = \text{м}.$$

Оскільки $E = 22 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$, то

$$\Delta l = \frac{30 \cdot 4 \cdot 60 \cdot 9,8}{22 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 \cdot 4 \cdot 10^{-6}} \text{ м}$$

$$= \frac{70560}{276,32 \cdot 10^{10} \cdot 10^{-6}} \text{ м} = 255,3561 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 2,55 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 2,6 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

б) Щоб знайти, чи матиме місце залишкова деформація, потрібно порівняти діючу напругу з границею міцності сталі $\sigma_m = 6,8 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$. Діюча напруга дорівнює

$$\sigma \approx \frac{4mg}{\pi d^2}$$

Перевіримо одиниці вимірювання:

$$[\sigma] = \frac{\text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2}}{\text{м}^2} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$$

$$\sigma = \frac{4 \cdot 60 \cdot 9,8}{\pi \cdot 10^{-6}} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \frac{2352}{12,56 \cdot 10^{-6}} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 187 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 1,87 \cdot 10^8 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$$

Оскільки $\sigma < \sigma_m$, залишкової деформації не буде.

Відповідь: а) абсолютна зміна довжини дротини $2,6 \cdot 10^{-2}$ м; б)

Оскільки $\sigma < \sigma_m$, залишкової деформації не буде ($\sigma = 1,87 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$).

Задача 5

Із скількох сталених дротин діаметром 2 мм повинен бути трос, розрахований на піднімання вантажу масою 3,14 т, якщо запас міцності 3,4, а границя міцності сталі $6,8 \cdot 10^8$ Па?

Дано:

$$d = 2 \text{ мм} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$m = 3,14 \text{ т} = 3,14 \cdot 10^3 \text{ кг}$$

$$k = 3,4$$

$$\sigma_m = 6,8 \cdot 10^8 \text{ Па}$$

$$\sigma = ?$$

Розв'язування

Дротин треба взяти стільки, щоб механічна напруга, створювана вантажем, не перевищувала допустимої напруги.

Запас міцності

$$k = \frac{\sigma_m}{\sigma}$$

Звідси

$$\sigma = \frac{\sigma_m}{k}$$

З другого боку

$$\sigma = \frac{F}{S},$$

$$\text{де } F = mg, \quad S = n S_1 = n \frac{\pi d^2}{4}$$

Тоді

$$\frac{\Delta_m}{k} = \frac{mg}{\Delta \frac{d^2}{4}}$$

Звідки

$$\Delta = \frac{mgk4}{\Delta d^2 \Delta_m}$$

Перевіримо одиниці вимірювання:

$$\frac{N}{\frac{kg \frac{m}{s^2}}{m^2 \frac{m}{m^2}}} = \frac{kg \frac{m}{s^2}}{H} = \frac{kg \frac{m}{s^2}}{kg \frac{m}{s^2}} = 1$$

$$\Delta = \frac{3,14 \cdot 10^3 \cdot 9,8 \cdot 3,44}{3,14 \cdot 4 \cdot 10^{16} \cdot 6,8 \cdot 10^8} = \frac{418,4992 \cdot 10^3}{85,408 \cdot 10^2} = 4,9 \cdot 10^{-4} 49$$

Відповідь: із 49 сталевих дротин складається трос.

Задача 6

Стальна балка затиснута між двома стінами при температурі 10°C. З якою силою кінці балки тиснутимуть на стіни при температурі 35°C? Площа перерізу балки 50 см².

Дано:

$$T_1 = 10^\circ\text{C} = 283 \text{ K}$$

$$T_2 = 35^\circ\text{C} = 308 \text{ K}$$

$$E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$$

$$\alpha = 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}$$

$$S = 50 \text{ см}^2 = 50 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$$

$$F = ?$$

Розв'язування

Сила, з якою балка тисне на стіну:

$$F = \Delta S,$$

де Δ – механічна напружка, що виникає в балці при її деформації, яка викликана зміною температури.

За законом Гука

$$\Delta = E \epsilon.$$

Оскільки $\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$, $\Delta = \frac{1}{\alpha T} \frac{\Delta l}{l_0}$ маємо

$$\Delta = \frac{\Delta l}{l_0} = \alpha \Delta T,$$

де α – коефіцієнт лінійного розширення сталі.

$$\Delta T = T_2 - T_1.$$

Тоді

$$\Delta l = E \alpha \Delta T.$$

Отже

$$F = E \alpha T S.$$

Перевіримо одиниці вимірювання:

$$F \approx \frac{H \cdot K \cdot m^2}{m^2 \cdot K} = H.$$

$$F = 2 \cdot 10^{11} \cdot 1,10 \cdot 10^{-5} \cdot 25 \cdot 50 \cdot 10^{-4} \text{ Н} = 2750 \cdot 10^2 \text{ Н} = 2,7 \cdot 10^5 \text{ Н}.$$

Відповідь: з силою $2,7 \cdot 10^5 \text{ Н}$ кінці сталюї балки тиснутимуть на дві стіни.

Задача 7

Два сталюїх стержни покладено впритул при температурі 20°C . Яка напруга з'явиться в місці контакту при нагріванні до температури 80°C , якщо кінці стержня закріплені нерухомо?

Дано:

$$T_1 = 20^\circ\text{C} = 293 \text{ К}$$

$$T_2 = 80^\circ\text{C} = 353 \text{ К}$$

$$E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$$

$$\alpha = 1,10 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}$$

$$\Delta l = ?$$

Розв'язування

При нагріванні кожен стержень повинен набути довжини

$$l = l_0 (1 + \alpha \Delta T),$$

де l_0 – початкова довжина,

α – коефіцієнт лінійного розширення сталі.

Напруга, яка зможе перешкодити цьому видовженню, визначається законом Гука

$$\sigma = E \epsilon,$$

$$\sigma = E \frac{\Delta l}{l_0}.$$

Тоді:

$$\sigma = E \frac{\alpha l}{l_0}.$$

Враховуючи першу формулу, за якою

$$l = l_0 \sqrt{\frac{T_2}{T_1}},$$

маємо

$$E = \frac{F}{\Delta l} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}.$$

Перевіримо одиниці вимірювання:

$$\left[\frac{H}{m^2} \right] \cdot K = K = \frac{H}{m^2}.$$

Підставляємо числові дані у останню формулу і знаходимо:

$$E = 2 \cdot 10^{11} \cdot 1,10 \cdot 10^5 \cdot 353 \cdot 293 \frac{H}{m^2} =$$

$$= 132 \cdot 10^6 \frac{H}{m^2} = 1,32 \cdot 10^2 \cdot 10^6 \frac{H}{m^2} = 1,32 \cdot 10^8 \frac{H}{m^2}.$$

Відповідь: в місці контакту при нагріванні з'явиться напруга $1,32 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$.

Задачі до теми 1

1. Яка найбільша довжина свинцевої дротини, при якій будучи підвішена за один кінець, вона не обірветься від власної ваги? ($E = 15 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$; $\rho = 11,3 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$; $g = 9,8 \text{ м/с}^2$).
Відповідь: 135 м.
2. До дротини з вуглецевої сталі прикріплено вантаж масою 100 кг. Довжина дротини 1 м, діаметр 2 мм. Модуль Юнга для сталі $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$, границя міцності $\sigma_m = 330 \text{ МПа}$. На скільки збільшиться довжина дротини? Чи перевищує прикладена напруга границю пропорційності?
Відповідь: 1,56 мм; 312 МПа.
3. Стальна дротина завдовжки 1 м і перерізом $0,8 \text{ мм}^2$ закріплена одним кінцем у підвісному пристрої так, що легко може приймати будь-яке положення у вертикальній площині. До протилежного кінця дротини прикріплено вантаж у 49 Н. Розтягнуту дротину з вантажем відхиляють до висоти підвісу і відпускають. Визначити видовження дротини в нижній точці траєкторії руху вантажу. Власною вагою дротини знехтувати. ($E = 1,96 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$).
Відповідь: $9,38 \cdot 10^{-4} \text{ м}$.
4. Товстостінна стальна колона довжиною 3 м і зовнішнім діаметром 300 мм стискається силою 10 МН. Визначити товщину стінки і абсолютну зміну довжини, якщо допустима напруга 50 МПа. ($E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$).
Відповідь: 23 мм; 7 мм.

- 5 Стальний канат діаметром 9 мм витримує потрібну вагу нерухомої кабіни ліфта. Який діаметр повинен мати канат, якщо ліфт при раптовій зміні руху може мати прискорення до 7 g?
Відповідь: 15 мм.
- 6 Залізна лінійка при 15°C має довжину 1 м. На скільки зміниться довжина лінійки при охолодженні до -35°C ($\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$)?
Відповідь: $6 \cdot 10^{-4}$ м.
- 7 Різниця довжин алюмінієвого і мідного стержнів при будь-якій температурі становить 15 см. Яку довжину при 0°C будуть мати ці стержні ($\alpha_{\text{ал}} = 2,4 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$; $\alpha_{\text{м}} = 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$)?
Відповідь: 0,51 м; 0,36 м.
- 8 На нагрівання залізного бруска використано 1,68 МДж теплоти. Як зміниться об'єм бруска? ($\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$; $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$; $c = 0,46 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{K)}$).
Відповідь: $1,69 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3$.

2 АТОМНО-МОЛЕКУЛЯРНА БУДОВА РЕЧОВИНИ

Основні закони і формули

Основні положення молекулярно-кінетичної теорії будови речовини:

- 1 речовина складається із молекул – найменших частинок, яким ще притаманні її хімічні властивості;
- 2 молекули (атоми) речовини перебувають в безперервному хаотичному русі;
- 3 між частинками речовини (атоми, молекули) існують сили взаємодії (притягання, відштовхування).

Кількість речовини

$$\nu = \frac{m}{M}, \quad (2.1)$$

де m – маса речовини;
 M – молярна маса.

Маса однієї молекули

$$m_0 = \frac{M}{N_A}, \quad (2.2)$$

де M – молярна маса ;
 N_A – число Авогадро.

Концентрація молекул

$$n = \frac{N}{V}, \quad (2.3)$$

де N – число молекул;
 V – об'єм.

Закон Бойля - Маріотта

$$PV = \text{const} \quad \text{при} \quad T = \text{const} \quad \text{для} \quad m = \text{const}. \quad (2.4)$$

Закон Гей - Люссака

$$V = V_0 (1 + \alpha t) \quad \text{при} \quad P = \text{const} \quad \text{для} \quad m = \text{const}, \quad (2.5)$$

де V_0 – об'єм при 0°C ;

$\alpha = \frac{1}{273} \text{ K}^{-1}$;
 α – коефіцієнт;
 t – температура при шкалі Цельсія.

Закон Шарля

$$P = P_0 (1 + \alpha t) \quad \text{при} \quad V = \text{const} \quad \text{для} \quad m = \text{const}, \quad (2.6)$$

де P_0 – тиск при 0°C ;

$\alpha = \frac{1}{273} \text{ K}^{-1}$;
 α – коефіцієнт;
 t – температура при шкалі Цельсія.

Закон Дальтона: тиск суміші газів P дорівнює сумі парціальних тисків газів $P_1, P_2, \dots, P_n$, які утворюють суміш

$$P = P_1 + P_2 + \dots + P_n = \sum_{i=1}^n P_i. \quad (2.7)$$

Закон Авогадро: молі різних газів за однакових умов (однакові тиск і температура) займають однакові об'єми. При нормальних умовах цей об'єм дорівнює $22,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{моль}$.

Число Авогадро – це число молекул у молі будь-якої речовини

$$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}.$$

Рівняння стану ідеального газу (рівняння Клапейрона-Менделєєва)

$$PV = \frac{m}{M} RT, \quad (2.8)$$

де m – маса газу;

$R = 8,314 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{K}}$ – універсальна газова стала;

$\frac{m}{M}$

ν – кількість речовини (число молів);

M – молярна маса газу.

Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії

$$P = \frac{2}{3} n \frac{m_0 \overline{v_{кв}}^2}{2} \quad (2.9)$$

Середня енергія молекул

$$\bar{\epsilon} = \frac{i}{2} kT, \quad (2.10)$$

де $i = i_{\text{пост.}} + i_{\text{об.}} + 2i_{\text{кол.}}$;

$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж / К}$ – стала Больцмана;

T – абсолютна температура.

Залежність тиску від концентрації молекул і температури

$$p = nkT \quad (2.11)$$

Швидкості молекул :

ймовірна швидкість

$$v_i = \sqrt{\frac{2RT}{M}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}; \quad (2.12)$$

середня квадратична швидкість

$$v_{кв} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}; \quad (2.13)$$

середня арифметична швидкість

$$v = \sqrt{\frac{8RT}{M}} = \sqrt{\frac{8kT}{m}} \quad (2.14)$$

Закон Максвелла для розподілу молекул за швидкостями

$$\frac{dn}{n} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv, \quad (2.15)$$

де m – маса молекули;

k – стала Больцмана;

T – абсолютна температура.

Закон Максвелла-Больцмана

$$dn = \frac{4}{\sqrt{\pi}} n_0 \left(\frac{m}{2kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{U}{kT}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv \quad (2.16)$$

Барометрична формула

$$p = p_0 e^{-\frac{g}{RT} h} \quad (2.17)$$

де p_0 і p – тиск газу відповідно на висоті h_0 і h .

Розподіл Больцмана в зовнішньому потенціальному полі

$$n = n_0 e^{-\frac{mg(h-h_0)}{kT}}; \quad (2.18)$$

$$n = n_0 e^{-\frac{mu}{kT}}, \quad (2.19)$$

де n і n_0 – концентрації частинок (молекул) на рівнях h і h_0 .

Середня довжина вільного пробігу молекул газу

$$\bar{l} = \frac{1}{\sqrt{2} \sigma^2 n}, \quad (2.20)$$

де n – концентрація молекули;
 σ – ефективний діаметр молекули.

Середня кількість зіткнень однієї молекули за одиницю часу

$$\bar{z} = \sqrt{2} \sigma^2 n. \quad (2.21)$$

Кількість зіткнень усіх молекул в одиниці об'єму за одиницю часу

$$z = \frac{1}{2} \bar{z} n = \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma^2 n^2. \quad (2.22)$$

Середнє число ударів молекул за одиницю часу об одиничну плоску поверхню, розміщену в газі

$$Z_0 = \frac{1}{4} n \bar{z}. \quad (2.23)$$

Приклади розв'язування задач

Задача 1

Знайти концентрацію молекул кисню, якщо його тиск 0,2 МПа, а середня квадратична швидкість молекул 700 м/с.

Дано:

$$\sigma = 0,032 \text{ кг/моль}$$

$$P = 0,2 \text{ МПа} = 0,2 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

$$\sigma_{\text{кв}} = 700 \text{ м/с}$$

$$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$$

n – ?

Розв'язування

В основне рівняння МКТ газу

$$p = \frac{1}{3} m_0 n \sigma_{\text{кв}}^2$$

входить концентрація молекул, тому

$$n = \frac{3p}{m_0 \sigma_{\text{кв}}^2},$$

$$m_0 = \frac{m}{N_A}$$

де
Отже,

$$n = \frac{3pN_A}{\rho^2}$$

Перевіримо одиниці вимірювання:

$$n = \frac{\frac{\text{Па} \cdot \text{моль} \cdot \text{с}^2}{\text{кг} \cdot \text{моль} \cdot \text{м}^2}}{\frac{\text{Н} \cdot \text{с}^2}{\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^2}} = \frac{\frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^2}}{\frac{1}{\text{м} \cdot \text{м}^2}} = \text{м}^3$$

$$n = \frac{3 \cdot 0,2 \cdot 10^6 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{0,032 \cdot 700^2} \cdot \text{м}^3 = \frac{3,612 \cdot 10^{29}}{1,568 \cdot 10^4} \cdot \text{м}^3 = 2,3 \cdot 10^{25} \cdot \text{м}^3$$

Відповідь: $2,3 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$ – концентрація молекул кисню.

Задача 2

В балоні об'ємом $0,04 \text{ м}^3$ під тиском $1,5 \cdot 10^5 \text{ Па}$ і температурі 300 К знаходиться газ. Скільки молекул знаходиться в балоні?

Дано:

$$V = 0,04 \text{ м}^3$$

$$P = 1,5 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

$$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$$

$$R = 8,31 \text{ Дж/моль} \cdot \text{К}$$

$$T = 300 \text{ К}$$

$$N = ?$$

Розв'язування

Число молекул в даній масі

$$N = \frac{m}{M} N_A$$

З рівнянням Клапейрона – Менделєєва

$$PV = \frac{m}{M} RT$$

знаходимо кількість речовини

$$\frac{m}{M} = \frac{PV}{RT}$$

І підставляємо в перше рівняння

$$N = \frac{PV}{RT} N_A$$

Перевіримо одиниці вимірювання:

$$N = \frac{Pa \cdot m^3}{\frac{Дж}{\text{моль} \cdot K} \cdot K} \cdot \frac{\frac{H}{m^2} \cdot m^3}{\frac{H \cdot m}{\text{моль} \cdot K} \cdot K \cdot \text{моль}} \cdot \frac{m}{m} = 1$$

$$N = \frac{1,5 \cdot 10^5 \cdot 0,04}{8,31 \cdot 300} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} = \frac{0,06 \cdot 10^5}{2493} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} =$$

$$= 0,000024 \cdot 10^5 \cdot 6,02 \cdot 10^{23} = 14,5 \cdot 10^{23} = 15 \cdot 10^{23}.$$

Відповідь: $15 \cdot 10^{23}$ молекул знаходиться в балоні.

Задача 3

В балоні об'ємом 10 л знаходиться гелій під тиском 1 МПа при температурі 300 К. Після того як із балона був використаний гелій масою 10 г, температура в балоні понизилась до 290 К. Визначити тиск гелію, який залишився в балоні?

Дано:

$$V = 10 \text{ л} = 10 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$$

$$P_1 = 1 \text{ МПа} = 1 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

$$T_1 = 300 \text{ К}$$

$$m = 10 \text{ г} = 10 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$$

$$T_2 = 290 \text{ К}$$

$$\rho = 4 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$$

$$P_2 = ?$$

Розв'язування

Для розв'язку задачі використаємо рівняння Клапейрона-Менделєєва, примінивши його двічі до початкового і кінцевого положень газу.

Для початкового положення рівняння має вигляд

$$P_1 V = \frac{m_1}{\rho} R T_1, \quad (1)$$

а для кінцевого положення

$$P_2 V = \frac{m_2}{\rho} R T_2, \quad (2)$$

де m_1 і m_2 – маси гелію в початковому і кінцевому станах.

Виразимо маси m_1 і m_2 гелію із рівнянь (1) і (2)

$$m_1 = \frac{\rho P_1 V}{R T_1}, \quad (3)$$

$$m_2 = \frac{P_2 V}{RT_2} \quad (4)$$

Віднімаючи від рівняння (3) рівняння (4) отримаємо

$$m = m_1 - m_2 = \frac{P_1 V}{RT_1} - \frac{P_2 V}{RT_2}$$

Звідси знайдемо шуканий тиск

$$P_2 = \frac{RT_2}{V} \left(\frac{P_1 V}{RT_1} - m \right) = m \frac{T_2}{T_1} P_1 = \frac{m RT_2}{V} \quad (5)$$

Провіримо, чи дає права частина формули (5) одиницю тиску. Для цього виразимо всі величини, які входять в неї в відповідних одиницях. Одиниця, в якій виражається перший добуток не викликає

сумніву, так як відношення $\frac{T_2}{T_1}$ – величина безрозмірна. Перевіримо, в яких одиницях виражається другий добуток.

$$\frac{m \cdot R \cdot T_2}{V} = \frac{\text{кг} \cdot \frac{\text{Дж}}{(\text{К} \cdot \text{моль})} \cdot \text{К}}{\text{м}^3} = \frac{\text{кг} \cdot \text{Дж} \cdot \text{К} \cdot \text{моль}}{\text{кг} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{К} \cdot \text{моль}} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м}^2 \cdot \text{м}} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па}.$$

Впевнитись в тому, що права частина отриманої розрахункової формули дає одиницю шуканої величини – тиск, можемо підставивши в формулу (5) значення всіх величин і провести вимірювання.

В формулі (5) всі величини, крім молярної маси M гелію, відомі. Знайдемо її. Для гелію як одноатомного газу відносна молекулярна маса рівна його відносній атомній масі He .

Із таблиці Менделєєва знайдемо $He=4$.

Відповідно, молярна маса гелію $M = 4 \cdot 10^{-3} \text{ кг / моль}$.

Підставивши значення величини в формулу (5) отримаємо

$$P_2 = \frac{290}{300} \cdot 10^6 \cdot \frac{10 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{8,31 \cdot 290}{10 \cdot 10^{-3}} \text{ Па} = 0,97 \cdot 10^6 \cdot 2,5 \cdot 240,99 \cdot 10^3 \text{ Па} = 0,97 \cdot 10^6 \cdot 602,475 \cdot 10^3 \text{ Па} \\ p_2 = 970000 \cdot 602475 \text{ Па} = 367525 \text{ Па} = 3,67 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

Відповідь: тиск $3,67 \cdot 10^5 \text{ Па}$ залишився в балоні.

Задача 4

Обчислити середню кінетичну енергію молекул гелію при температурі 27°C .

Дано:

$$\rho = 4 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$$

$$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$$

$$T = 300 \text{ К}$$

$$U = ?$$

Розв'язування

Середня кінетична енергія молекул газу гелію дорівнює $\frac{m_{\text{кв}}^2}{2}$;
середня квадратична швидкість молекул газу дорівнює $\sqrt{\frac{3RT}{m}}$, тому

$$U = \frac{m_{\text{кв}}^2}{2} = \frac{3mTR}{2m} = \frac{3RT}{2N_A},$$

де $N_A = \frac{m}{m}$ – число Авогадро.

Замінюючи відношення $\frac{R}{N_A}$ сталою Больцмана k , дістанемо

$$U = \frac{3kT}{2}.$$

Перевіримо одиниці вимірювання:

$$U = \frac{\text{Дж} \cdot \text{К}}{\text{К}} = \text{Дж}.$$

$$U = \frac{3}{2} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \text{ Дж} = 2,07 \cdot 10^{-21} \cdot 300 \text{ Дж} = 6,21 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}.$$

Відповідь: середня кінетична енергія молекул гелію $6,21 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}$.

Задача 5

Яка частина молекул кисню при 0°C має швидкості, що перебуває в інтервалі від 100 м/с до 110 м/с ?

Дано:

$$v_1 = 100 \text{ м/с}$$

$$v_2 = 110 \text{ м/с}$$

$$\rho = 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$$

$$\frac{n}{n}$$

$$n = ?$$

Розв'язування

Закон розподілу молекул за швидкостями виражається формулою

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2 \Delta u,$$

де u – відносна швидкість.

$$u = \frac{v_1}{v_i}$$

У даному випадку v_i – найбільш ймовірна швидкість, яка дорівнює

$$v_i = \sqrt{\frac{2RT}{M}}.$$

$$v_i = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,31 \cdot 273}{32 \cdot 10^{-3}}} \frac{\text{м}}{\text{с}} = \sqrt{\frac{4537,26}{32 \cdot 10^{-3}}} \frac{\text{м}}{\text{с}} = \sqrt{141789,37} \frac{\text{м}}{\text{с}} = 376 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Отже,

$$u = \frac{100}{376} = 0,266.$$

Тоді

$$e^{-u^2} = e^{-0,071} = 0,93,$$

а

$$\Delta u = \frac{v_2 - v_1}{v_i}.$$

$$\Delta u = \frac{10}{376} = 0,0265957.$$

Шукана частина молекул, що має швидкості у заданому інтервалі, дорівнює

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot 0,93 \cdot 0,071 \cdot \frac{10}{376} = \frac{4}{1,7} \cdot 0,93 \cdot 0,071 \cdot 0,0265957 =$$

$$= 2,3 \cdot 0,93 \cdot 0,071 \cdot 0,026 = 0,004$$

або 0,4%.

Відповідь: 0,4% молекул кисню перебуває в заданому інтервалі.

Задача 6

На якій висоті над рівнем моря атмосферний тиск $78 \cdot 10^3$ Па, якщо температура повітря 17°C не змінюється з висотою, а тиск на рівні моря нормальний.

Дано:

$$P = 78 \cdot 10^3 \text{ Па}$$

$$\begin{aligned}
 p_0 &= 1 \cdot 10^5 \text{ Па} \\
 \rho &= 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль} \\
 T &= 290 \text{ К} \\
 g &= 9,8 \text{ м/с}^2 \\
 h &= ?
 \end{aligned}$$

Розв'язування

$$p = p_0 e^{\frac{mgh}{kT}},$$

де m – маса однієї молекули.

$$\frac{p}{p_0} = e^{\frac{mgh}{kT}},$$

врахувавши, що

$$m = \frac{\rho}{N_A} \quad \text{та} \quad k = \frac{R}{N_A}$$

маємо

$$\frac{p}{p_0} = e^{\frac{\rho gh N_A}{RT N_A}} = e^{\frac{\rho gh}{RT}}.$$

Логарифмуємо останній вираз

$$\ln \frac{p}{p_0} = \frac{\rho gh}{RT}.$$

Отже,

$$h = \frac{\ln \frac{p}{p_0} RT}{\rho g}.$$

Перевіримо одиниці вимірювання:

$$[h] = \frac{\frac{\text{Па} \cdot \text{Дж}}{\text{Па} \cdot \frac{\text{моль} \cdot \text{К}}{\text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2}}}}{\frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{моль} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2}}} = \frac{\text{м}}{\text{м}}.$$

$$h \approx \frac{\ln \frac{78 \cdot 10^3}{10^5} \cdot 8,31 \cdot 290}{29 \cdot 10^3 \cdot 9,8} \approx$$

$$\approx \frac{\ln 0,78 \cdot 2409,9}{284,2 \cdot 10^3} \text{ м} \approx \frac{0,25 \cdot 2409,9}{284,2 \cdot 10^3} \text{ м} \approx \frac{602,475 \cdot 10^3}{284,2} \text{ м} \approx 2120 \text{ м}.$$

Відповідь: на висоті 2120 м над рівнем моря.

Задача 7

Знаючи, що в'язкість водню при нормальних умовах ($P = 1,01 \cdot 10^5$ Па; $T = 273$ К) $8,6 \cdot 10^{-6}$ Па·с. Обчислити середню довжину вільного пробігу його молекул та їх ефективний діаметр.

Дано:

$$P = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

$$T = 273 \text{ К}$$

$$\eta = 8,6 \cdot 10^{-6} \text{ Па} \cdot \text{с}.$$

$$R = 8,31 \text{ Дж/моль} \cdot \text{К}$$

$$\rho = 2 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$$

$$V_m = 22,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{моль}$$

$$n = 2,7 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$$

$$\bar{l} = ?$$

$$d = ?$$

Розв'язування

Коефіцієнт в'язкості визначають за формулою

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \bar{l} v_{\text{ср}}$$

Знаходимо

$$\bar{l} = \frac{3\eta}{\rho v_{\text{ср}}},$$

де $v_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi m}}$;

$\rho = \frac{m}{V}$ – густина при нормальних умовах визначається поділивши масу одного моля газу ($M = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль) на об'єм, який займає моль газу при нормальних умовах ($V_m = 22,4 \cdot 10^{-3}$ м³/моль).

$$\bar{l} = \frac{3\rho V_m}{M} \sqrt{\frac{M}{8RT}}$$

Перевіримо одиниці вимірювання:

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{\text{Па} \cdot \text{с} \cdot \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}}{\frac{\text{кг}}{\text{моль}}} \cdot \sqrt{\frac{\frac{\text{кг}}{\text{моль}}}{\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}}} \\ &= \frac{\text{Па} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^3}{\text{кг}} \cdot \sqrt{\frac{\text{кг}}{\text{Дж}}} \cdot \frac{\text{Н} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^3}{\text{м}^2 \cdot \text{кг}} \cdot \sqrt{\frac{\text{кг}}{\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2}}} \cdot \frac{\text{Н} \cdot \text{с} \cdot \text{м}}{\text{кг}} \cdot \frac{\text{с}}{\text{м}} \\ &= \frac{\text{Н} \cdot \text{с}^2}{\text{кг}} \cdot \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{кг}} = \text{м} \end{aligned}$$

$$\bar{l} = \frac{3 \cdot 8,6 \cdot 10^{-6} \cdot 22,4 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} \cdot \sqrt{\frac{3,14 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{8 \cdot 8,31 \cdot 273}} \text{ м}$$

$$= 288,96 \cdot 10^{-6} \cdot \sqrt{\frac{6,28 \cdot 10^{-3}}{18149,04}} \text{ м} = 1,7 \cdot 10^{-7} \text{ м}$$

$$\bar{l} = \frac{1}{\sqrt{2} n^2}$$

З останньої формули знайдемо

$$n = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2} \bar{l} n}}$$

Перевіримо одиниці вимірювання:

$$\frac{1}{\sqrt{\text{м} \cdot \text{м}^{-3}}} = \frac{1}{\sqrt{\text{м}^{-2}}} = \frac{1}{\text{м}^{-1}} = \text{м}$$

$$n = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2} \cdot 3,14 \cdot 1,7 \cdot 10^{-7} \cdot 2,7 \cdot 10^{25}}} \text{ м}^{-1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{20,382493 \cdot 10^{18}}} \text{ м}^{-1} = \frac{1}{4,5 \cdot 10^9} \text{ м}^{-1} = 2,2 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$$

Відповідь: довжина вільного пробігу молекул $1,7 \cdot 10^{-7}$ м; ефективний діаметр $2,2 \cdot 10^{-10}$ м.

Задача 8

Знайти кількість зіткнень, які відбуваються протягом 1 секунди, між всіма молекулами в об'ємі 1 мм^3 водню при нормальних умовах (для водню $\sigma = 2,3 \cdot 10^{-10} \text{ м}$).

Дано:

$$\sigma = 2,3 \cdot 10^{-10} \text{ м}$$

$$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$$

$$V = 1 \text{ мм}^3 = 1 \cdot 10^{-9} \text{ м}^3$$

$$\rho = 2 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$$

$$p = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

$$R = 8,31 \text{ Дж/мольК}$$

$$T = 273 \text{ К}$$

$$Z = ?$$

Розв'язування

Для однієї молекули

$$z = \sqrt{2} \sigma^2 n \bar{v}$$

Для всіх молекул N :

$$Z = \frac{zN}{2}$$

(1/2 тому, що враховуємо попарну взаємодію між молекулами).

$$n = \frac{N}{V}$$

Звідси

$$N = nV$$

Отже,

$$Z = \frac{znV}{2},$$

де n – концентрація молекул.

Запишемо

$$Z = \frac{\sqrt{2} \sigma^2 n V n}{2}$$

Враховуючи

$$p = nkT;$$

$$n = \frac{p}{kT}; \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \sigma^2}}$$

Одержимо

$$Z = \frac{\sqrt{2} n^2 p^2 V}{2k^2 T^2} \sqrt{\frac{8RT}{n}}$$

Перевіримо одиниці вимірювання:

$$\frac{\frac{m^2 \cdot \text{Па}^2 \cdot \text{К}^2 \cdot \text{м}^3}{\text{Дж}^2 \cdot \text{К}^2} \cdot \frac{\text{Дж} \cdot \text{К} \cdot \text{моль}}{\text{К} \cdot \text{кг} \cdot \text{моль}}}{\frac{1}{\text{м}^4 \cdot \text{Н}^2 \cdot \text{м}^2} \cdot \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{кг}} \cdot \frac{\text{м}^5}{\text{м}^6} \cdot \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{кг}} \cdot \frac{1}{\text{м}} \cdot \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} \cdot \frac{1}{\text{м}} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot \frac{1}{\text{с}}}$$

$$\frac{1,4142 \cdot 3,14 \cdot 5,29 \cdot 10^{20} \cdot 1,0201 \cdot 10^{10} \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 1,904 \cdot 10^{46} \cdot 7,4529 \cdot 10^4} \cdot \sqrt{\frac{18149}{6,28 \cdot 10^{23}}} \cdot \frac{1}{\text{с}} \cdot \frac{23,962 \cdot 10^{19}}{28,381 \cdot 10^{42}} \cdot 699,99 \cdot \frac{1}{\text{с}}$$

$$Z = \frac{\sqrt{2} \cdot 3,14 \cdot 2,3 \cdot 10^{10} \cdot (1,01 \cdot 10^5)^2 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot (1,38 \cdot 10^{23})^2 \cdot (273)^2} \cdot \sqrt{\frac{8 \cdot 8,31 \cdot 273}{3,14 \cdot 2 \cdot 10^{23}}} \cdot \frac{1}{\text{с}}$$

$$\frac{1,4142 \cdot 3,14 \cdot 5,29 \cdot 10^{20} \cdot 1,0201 \cdot 10^{10} \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 1,904 \cdot 10^{46} \cdot 7,4529 \cdot 10^4} \cdot \sqrt{\frac{66,48 \cdot 273}{6,28 \cdot 10^{23}}} \cdot \frac{1}{\text{с}}$$

$$\frac{1,4142 \cdot 3,14 \cdot 5,29 \cdot 10^{19}}{2 \cdot 1,904 \cdot 7,4529 \cdot 10^{42}} \cdot \sqrt{\frac{18149}{6,28 \cdot 10^{23}}} \cdot \frac{1}{\text{с}} \cdot \frac{23,962 \cdot 10^{19}}{28,381 \cdot 10^{42}} \cdot 699,99 \cdot \frac{1}{\text{с}}$$

$$= 0,844 \cdot 699,99 \cdot 10^{23} \cdot \frac{1}{\text{с}} = 1434,79 \cdot 10^{23} \cdot \frac{1}{\text{с}} = 1,43479 \cdot 10^{26} \cdot \frac{1}{\text{с}}$$

$$\frac{1}{\text{с}}$$

Відповідь: $1,4 \cdot 10^{26} \text{ с}$ зіткнень.

Задачі до теми 2

- Камеру установки для термоядерних реакцій відкачують до розрядження порядку 10^{-11} Па. Скільки молекул є в 1 см^3 при такому тиску і температурі 27°C ?
Відповідь: $2,4 \cdot 10^3 \text{ см}^3$.
- Визначити 1) число молекул води, яка займає при температурі 4°C об'єм 1 мм^3 ; 2) масу молекули води; 3) діаметр молекули води, враховуючи, що молекули мають форму кульок, які доторкаються одна до одної.
Відповідь: $3,34 \cdot 10^{19}$ молекул; $2,99 \cdot 10^{-26} \text{ кг}$; $3,11 \cdot 10^{-10} \text{ м}$.
- Суміш кисню і газу при температурі 290 К і тиску $5,8 \text{ кПа}$ має
 $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$
густину $0,4 \text{ м}^3$. Визначити концентрацію молекул кисню в суміші.
Відповідь: $5 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$.
- Обчислити середню квадратичну швидкість вуглекислого газу при температурі 27°C .

- Відповідь: 412 м/с .
- 5 Який об'єм займає 1 кг кисню при температурі 273 К і тиску $8 \cdot 10^5$ Па? Задачу розв'язати через об'єм і густину при нормальних умовах.
Відповідь: $0,087 \cdot 10^{-6}$ м³.
- 6 Яку місткість повинен мати балон, щоб помістити 50 молекул газу, якщо для максимальної температури 360 К тиск в ньому не повинен перевищувати 6 МПа?
Відповідь: 25 л.
- 7 Визначити, яка частина молекул водню при температурі 300 К має значення швидкостей, що перебуває в інтервалі від $1900 \frac{м}{с}$ до $1905 \frac{м}{с}$.
Відповідь: $2,46 \cdot 10^{-3}$.
- 8 Використовуючи функцію розподілу молекул ідеального газу за відносними швидкостями
$$f(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2$$
, визначити число молекул, швидкості яких менші в 0,002 найбільш імовірної швидкості, якщо в об'ємі газу міститься $N = 1,67 \cdot 10^{24}$ молекул.
Відповідь: 10^{16} молекул.
- 9 Вважаючи температуру повітря і прискорення вільного падіння не залежним від висоти, знайти, на якій висоті над рівнем моря густина повітря в два рази менша від свого значення на рівні моря. Температуру повітря вважати рівною 273 К.
Відповідь: $5,5 \cdot 10^3$ м.
- 10 Барометр в кабіні літака, який летить весь час показує однаковий тиск 79 кПа, дякуючи якому льотчик тримає висоту незмінною. Однак температура повітря за бортом літака змінилася з 5°C до 1°C. Яку помилку в визначенні висоти допустить льотчик. Тиск на поверхні землі рахувати нормальним.
Відповідь: -28,5 м.
- 11 Визначити середню довжину вільного пробігу молекул повітря при температурі 290 К і нормальному тиску ($1,013 \cdot 10^5$ Па) Ефективний діаметр молекул повітря рівний $3 \cdot 10^{-10}$ м.
Відповідь: 10^{-7} м.
- 12 Визначити середню довжину та тривалість вільного пробігу молекул кисню при тиску $200 \frac{Н}{м^2}$ та температурі 27°C, якщо діаметр молекули кисню $2,9 \cdot 10^{-10}$ м.

- Відповідь: $5,49 \cdot 10^{-5}$ м; $1,23 \cdot 10^{-7}$ с.
- 13 Середня довжина вільного пробігу молекули вуглекислого газу при нормальних умовах дорівнює 40 нм . Обчислити середню арифметичну швидкість молекул і число співударів, які випробовує молекула в 1 с.
Відповідь: 362 м/с; $9,05 \cdot 10^9$ с⁻¹.
- 14 а) Скільки в єдньому зіткнень за 1 секунду при нормальних умовах відбувається в однієї молекули азоту, якщо її діаметр $3,1 \cdot 10^{-8}$ см?
б) Скільки в середньому зіткнень однієї молекули азоту відбуватиметься, якщо температура підвищиться на 273 К?
Відповідь: $5,2 \cdot 10^9$ с⁻¹; $3,68 \cdot 10^9$ с⁻¹.

3 КОЛИВАННЯ. ГАРМОНІЧНІ КОЛИВАННЯ (МЕХАНІЧНІ ТА ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ)

Основні закони та формули

Механічні коливання

Коливаннями називаються процеси (рухи або зміни стану), що повторюються з часом.

Кількість коливань за секунду називають частотою

$$\nu = \frac{1}{T}, \quad (3.1)$$

де T – період коливань.

Кутова частота коливань

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu, \quad (3.2)$$

де T, ν – період і частота коливань.

Вільними коливаннями називаються коливання, які проходять під дією сили тяжіння або пружності, які є внутрішніми силами.

Коливання називаються **гармонічними**, якщо фізична величина, яка їх характеризує, змінюється з часом за законом синуса або косинуса.

Диференціальне рівняння гармонічних коливань

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (3.3)$$

Розв'язок диференціального рівняння

$$x = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (3.4)$$

де x – зміщення;

A – амплітуда;

φ – початкова фаза;

$\omega t + \varphi$ – фаза коливань в момент t .

Швидкість матеріальної точки, яка виконує гармонічне коливання

$$v = -A\omega \sin(\omega t + \varphi) \quad (3.5)$$

Прискорення матеріальної точки, яка виконує гармонічне коливання

$$a = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.6)$$

Амплітуда A результуючого коливання при додаванні двох коливань з однаковими частотами, які проходять на одній прямій визначається по формулі

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1), \quad (3.7)$$

де A_1 і A_2 – амплітуди даних коливань;

φ_1 і φ_2 – їх початкові фази.

Початкова фаза результуючого коливання

$$\tan \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \quad (3.8)$$

Математичний маятник – матеріальна точка, підвішена на невагомій і нерозтяжній нитці, що коливається у вертикальній площині під дією сили тяжіння.

Період математичного маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (3.9)$$

де l – довжина маятника;

g – прискорення земного тяжіння.

Фізичним маятником називається тверде тіло, що здійснює під дією сили тяжіння коливання навколо горизонтальної осі підвісу, що не проходить через центр мас.

Період фізичного маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}, \quad (3.10)$$

де l – відстань від осі до центра тяжіння;

I – момент інерції маятника;

$$L = \frac{I}{ml}$$

– приведена довжина фізичного маятника.

Пружинний маятник – тягар масою m , підвішений на абсолютно пружній пружині, яка здійснює коливання під дією пружної сили.

Період коливань пружинного маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad (3.11)$$

де m – маса вантажу;

k – коефіцієнт жорсткості пружини.

Повна механічна енергія при гармонічних коливаннях

$$E = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2, \quad (3.12)$$

де ω – циклічна частота.

Електромагнітні коливання

Вільні коливання відбуваються за рахунок енергії, наданої контуру в початковий момент часу.

Диференціальне рівняння вільних електромагнітних коливань

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0, \quad (3.13)$$

де $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ – циклічна частота власних коливань.

Розв'язок диференціального рівняння

$$q = q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (3.14)$$

де q_0 – максимальне значення заряду;

φ – початкова фаза коливань.

Період вільних коливань (формула Томсона)

$$T = 2\pi \sqrt{LC}, \quad (3.15)$$

де L – індуктивність контуру;

C – електроємність конденсатора.

Заряджений в початковий момент часу конденсатор має максимальну енергію

$$W_C = \frac{q_{\max}^2}{2C}, \quad (3.16)$$

де C – електроємність конденсатора.

В момент часу, коли конденсатор розрядився, струм в котушці досягнув максимального значення $I_{\max}$, і вся енергія зосередилась у магнітному полі котушки

$$W_L = \frac{LI_{\max}^2}{2}. \quad (3.17)$$

Електрорушійна сила самоіндукції, яка виникає в котушці

$$\mathcal{E}_0 = L \frac{dl}{dt}. \quad (3.18)$$

Повна енергія коливального контуру дорівнює енергії електричного і магнітного полів

$$W = \frac{q_{\max}^2}{2C} = \frac{LI_{\max}^2}{2}. \quad (3.19)$$

Приклади розв'язування задач

Задача 1

Написати рівняння гармонічного коливання, амплітуда якого 10 см, період 10 с, початкова фаза дорівнює нулю. Знайти зміщення, швидкість і прискорення коливного тіла через 12 с після початку коливання.

Дано:

$$A = 10 \text{ см} = 0,1 \text{ м}$$

$$T = 10 \text{ с}$$

$$\varphi = 0$$

$$t_1 = 12 \text{ с}$$

$$x(t) = ?$$

$$v_1 = ?$$

$$a_1 = ?$$

$$a_1 = ?$$

Розв'язування

Рівняння гармонічних коливань

$$x(t) = A \sin \omega t = A \sin \frac{2\pi}{T} t$$

Отже,

$$x(t) = 0,1 \sin \frac{2\pi \cdot 14}{10} t = 0,1 \sin 0,628t$$

Зміщення для моменту часу t_1

$$x_1 = 0,1 \sin 0,628 \cdot 12 \text{ м} = 0,1 \sin 7,536 \text{ м} = 0,1 \cdot 0,95 \text{ м} = 0,095 \text{ м}$$

Так як

$$v(t) = x'(t) = A\omega \cos \omega t$$

$$v_1 = 0,1 \cdot 0,628 \cos 0,628t = 0,0628 \cos 0,628t$$

Тоді для моменту t_1

$$v_1 = 0,0628 \cos 0,628 \cdot 12 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$= 0,0628 \cos 7,536 \frac{\text{м}}{\text{с}} = 0,0628 \cdot 0,312 \frac{\text{м}}{\text{с}} = 1,95 \cdot 10^{-2} \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Прискорення

$$a(t) = x''(t) = -A\omega^2 \sin \omega t$$

$$a_1 = 0,1 \cdot 0,628^2 \sin 0,628t = 0,0393 \sin 0,628t$$

Тоді для моменту t_1

$$a_1 = 0,1 \cdot 0,628^2 \sin 0,628 \cdot 12 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$= 0,0393 \sin 7,536 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = 0,0393 \cdot 0,949 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = 3,73 \cdot 10^{-2} \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

Відповідь: зміщення 0,095 м, швидкість $1,95 \cdot 10^{-2}$ м/с і прискорення - $3,73 \cdot 10^{-2}$ м/с² коливного тіла через 12 с.

Задача 2

Через який проміжок часу після початку коливань зміщення точки із положення рівноваги буде дорівнювати половині амплітуди, якщо період коливань 24 с, початкова фаза дорівнює нулю.

Дано:

$$x_1 = \frac{A}{2}$$

$$T = 24 \text{ с}$$

$$\varphi = 0$$

$$t_1 - ?$$

Розв'язування

Рівняння гармонічних коливань

$$x = A \sin \omega t = A \sin \frac{2\pi}{T} t$$

За умовою задачі

$$x_1 = A \sin \frac{2\pi}{T} t_1 = \frac{1}{2} A,$$

або скорочуючи на A маємо

$$\sin \frac{2\pi}{T} t_1 = \frac{1}{2}.$$

Але $\sin \frac{1}{2}$, коли його аргумент дорівнює $\frac{\pi}{6}$, тобто

$$\frac{2\pi}{T} t_1 = \frac{\pi}{6}.$$

Звідки

$$t_1 = \frac{\pi T}{12\pi} = \frac{T}{12}.$$

Перевіримо одиниці вимірювання:

$$t = \pi c$$

$$t = \frac{24\pi}{12\pi} c = 2 c$$

Відповідь: через 2 с.

Задача 3

Два однаково напрямлені гармонічні коливання з рівними частотами й амплітудами 9 см і 6 см утворюють нове гармонічне коливання тієї ж самої частоти. Амплітуда результуючого коливання 7 см. Початкова фаза першого коливання 0,5 рад. Визначити початкову фазу другого коливання.

Дано:

$$A_1 = 9 \text{ см} = 9 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$A_2 = 6 \text{ см} = 6 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$A = 7 \text{ см} = 7 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$\varphi_1 = 0,5 \text{ рад}$$

$$\varphi_2 = ?$$

Розв'язування

Скористаємося формулою

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \varphi_1 - \varphi_2}$$

З неї визначаємо φ_2

Підносячи обидві частини цієї формули до квадрата, знаходимо

$$\varphi_1 \pm \varphi_2 = \arccos \frac{A^2 \pm A_1^2 \pm A_2^2}{2A_1A_2}.$$

Звідки

$$\varphi_2 = \varphi_1 \pm \arccos \frac{A^2 \pm A_1^2 \pm A_2^2}{2A_1A_2}.$$

Перевіримо одиниці вимірювання:

$$\varphi_2 \pm \varphi_1 \text{ рад} = \frac{m^2}{m \cdot m} = \text{рад}.$$

$$\varphi_2 = -1,77 \text{ рад}$$

Відповідь: початкова фаза другого коливання -1,77 рад.

Задача 4

Матеріальна точка масою 10 г коливається по закону $x = 0,05 \sin(0,6t + 0,8)$. Знайти максимальну силу, яка діє на точку, і повну енергію коливної точки.

Дано:

$$m = 10 \text{ г} = 10^{-2} \text{ кг}$$

$$x = 0,05 \sin(0,6t + 0,8)$$

$$F_{\max} = ?$$

$$E = ?$$

Розв'язування

Із співставлення рівняння гармонічного коливання в загальному вигляді $x = A \sin(\omega t + \varphi)$ з рівнянням, даним в задачі:

$$x = 0,05 \sin(0,6t + 0,8), \text{ впливає}$$

$$A = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \quad \omega = 0,6 \text{ рад/с}; \quad \varphi = 0,8 \text{ рад}.$$

Із виразу для сили, яка викликає гармонічні коливання

$$F = m A \omega^2 \sin(\omega t + \varphi),$$

отримаємо

$$F_{\max} = m A \omega^2.$$

Перевіримо одиниці вимірювання:

$$F_{\max} = \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \frac{\text{рад}^2}{\text{с}^2} = \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н}.$$

$$F_{\max} = 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 0,6^2 \text{ Н} = 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 0,36 \text{ Н} = 1,8 \cdot 10^{-4} \text{ Н}$$

Повна енергія коливної точки

$$E = \frac{mA^2\omega^2}{2}$$

Перевіримо одиниці вимірювання:

$$[E] = \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \frac{\text{рад}^2}{\text{с}^2} = \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}$$

$$E = \frac{10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 0,6^2}{2} \text{ Дж} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} \cdot 0,0025 \cdot 0,36 \text{ Дж} =$$

$$= 0,00045 \cdot 10^{-2} \text{ Дж} = 4,5 \cdot 10^{-6} \text{ Дж}.$$

$$E = 4,5 \text{ мкДж}$$

Відповідь: максимальна сила, яка діє на точку $1,8 \cdot 10^{-4} \text{ Н}$, повна енергія коливної точки $4,5 \text{ мкДж}$.

Задача 5

В кабіні підйомника висить маятник. Коли кабіна нерухома, його період коливань 1 с . Коли кабіна рухається з постійним прискоренням, то період коливань становить $1,2 \text{ с}$. Визначити величину прискорення кабін.

Дано:

$$T_1 = 1 \text{ с}$$

$$T_2 = 1,2 \text{ с}$$

$a = ?$

Розв'язування

Збільшення періоду коливань маятника при русі з постійним прискоренням матиме місце при опусканні кабін.

Період коливань маятника в нерухомій кабіні

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

а в кабіні, що опускається з прискоренням a

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g - a}}$$

Тоді

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{g+a}{g}}, \quad \frac{T_1^2}{T_2^2} = 1 + \frac{a}{g}.$$

$$a = \left(\frac{T_1^2}{T_2^2} - 1 \right) g.$$

Перевіримо одиниці вимірювання:

$$a = \frac{c^2}{c^2} = \frac{m}{c^2}.$$

$$a = 1 - \frac{1}{1,2^2} = 9,8 \text{ м/с}^2 = 1 - 0,83^2 = 9,8 \text{ м/с}^2$$

$$= 1 - 0,6889 = 9,8 \text{ м/с}^2 = 0,3111 \cdot 9,8 \text{ м/с}^2 = 3,04 \text{ м/с}^2 \approx 3 \text{ м/с}^2.$$

Відповідь: прискорення кабіни 3 м/с².

Задача 6

Годинник, період коливань маятника якого 1 с, на поверхні Землі йде точно. На скільки буде відставати цей годинник за добу, якщо його підняти на висоту 200 м над поверхнею Землі?

Дано:

$$T_1 = 1 \text{ с}$$

$$h = 200 \text{ м}$$

$$t = 86400 \text{ с}$$

$$R = 6,4 \cdot 10^6 \text{ м}$$

$$\Delta t = ?$$

Розв'язування

На поверхні Землі маятник за добу здійснить N_1 – коливань

$$N_1 = \frac{t}{T_1},$$

де – $T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_1}};$

g_1 – прискорення вільного падіння на поверхні Землі.

На висоті h над поверхнею Землі за той же час маятник здійснить N_2 – коливань

$$N_2 = \frac{t}{T_2},$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_2}};$$

де

g_2 – прискорення вільного падіння на цій висоті.

За добу маятник недовиконає число коливань

$$\Delta N = N_1 - N_2 = t \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right).$$

Годинник відстає за добу на час Δt

$$\Delta t = T_1 \Delta N = T_1 \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) t = \frac{T_1}{T_2} t - t = t \left(\frac{T_1}{T_2} - 1 \right) = t \left(\frac{2\pi \sqrt{\frac{l}{g_1}}}{2\pi \sqrt{\frac{l}{g_2}}} - 1 \right) = t \left(\sqrt{\frac{g_2}{g_1}} - 1 \right).$$

Оскільки,

$$g_2 = g_1 \frac{R^2}{R^2 + h^2},$$

то

$$\Delta t = t \left(\sqrt{1 + \frac{R^2}{R^2 + h^2}} - 1 \right) \approx t \frac{h^2}{R^2 + h^2}.$$

Якщо $h \ll R$, то

$$\Delta t \approx \frac{t h^2}{R^2}.$$

Перевіримо одиниці вимірювання:

$$\Delta t \approx \frac{c \cdot m}{m} = c.$$

$$\Delta t \approx \frac{86400 \cdot 200}{6,4 \cdot 10^6} \text{ с} \approx \frac{1728 \cdot 10^4}{6,4 \cdot 10^6} \text{ с} \approx 270 \cdot 10^{-2} \text{ с} \approx 2,7 \text{ с}.$$

Відповідь: годинник відстає за добу на 2,7 с.

Задача 7

Куля радіусом 7 см підвішена нитці довжиною 13 см. Яку помилку ми робимо, вважаючи її математичним маятником довжиною $l_1 = l + r$?

Дано:

$$l = 13 \text{ см} = 13 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$r = 7 \text{ см} = 7 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$\square - ?$$

Розв'язування

Куля є фізичним маятником і періодом її коливань можна визначити за допомогою формул

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mg}} \quad \text{і} \quad I = \frac{mb^2}{2},$$

де m – маса тіла;

b – відстань від центра ваги до осі обертання;

I – момент інерції відносно осі коливань.

Для цього треба визначити момент інерції кулі відносно осі, що проходить через закріплення нитки. Якби ця вісь проходила через центр кулі, то момент інерції дорівнював би

$$I = \frac{2}{5} mr^2,$$

де m – маса кулі.

Згідно теореми Штейнера

$$I = \frac{2}{5} mr^2 + m l^2 + r^2 \quad (1)$$

де $b = l + r$, тому

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mbg}} = 2\pi \sqrt{\frac{0,4r^2 + l^2 + r^2}{g(l + r)}} \quad (2)$$

Якщо вважати кулю як математичний маятник довжиною $l_1 = l + r$, то формула для періоду його малих коливань T' буде

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{l_1}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{l + r}{g}} \quad (3)$$

Відносна помилка (похибка) $\square$, яку при цьому робимо, буде

$$\square = \frac{T - T'}{T} \quad (4)$$

Підставимо (2) і (3) в (4)

$$\square = 1 - \frac{l + r}{\sqrt{0,4r^2 + (l + r)^2}}$$

$$\square = 1 - \frac{13 \cdot 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-2}}{\sqrt{0,4 \cdot 7^2 \cdot 10^{-2} + (13 \cdot 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-2})^2}} = 0,02$$

Відповідь: відносна похибка становить близько 2%.

Задача 8

Тягар, підвішений до пружини видовжує її на 4 см. Потім тягарець відхиляють у вертикальному напрямі і він починає коливатися. Визначити період цих коливань.

Дано:

$$l = 4 \text{ см} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$g = 9,8 \text{ м/с}^2$$

$$T = ?$$

Розв'язування

Сила, яка розтягує пружину, є вагою тягарця mg . Положення рівноваги відповідає такому видовженню пружини, при якому вага тягарця урівноважується пружною силою, що протидіє деформації пружини. Її можна записати у вигляді kx , де k – коефіцієнт пружності, x – величина видовження (мається на увазі абсолютна величина сили). Статичне видовження, що відповідає положенню рівноваги, відоме й дорівнює l . Тоді

$$kl = mg$$

Звідки

$$k = \frac{mg}{l}$$

За формулою

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{gm}{lm}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

За формулою

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Перевіримо одиниці вимірювання:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \left[\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right] = \frac{\text{с}^2}{\text{м}} \quad \left[\frac{\text{с}^2}{\text{м}} \right] = \text{с}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{4 \cdot 10^{-2}}{9,8}} \text{ с} = 6,28 \sqrt{0,408 \cdot 10^{-2}} \text{ с} = 6,28 \cdot 0,064 \text{ с} = 0,4 \text{ с}$$

Відповідь: період коливань 0,4 с.

Задача 9

Котушку з індуктивністю $3 \cdot 10^{-5} \text{ Гн}$ приєднано до плоского конденсатора з площею пластин $0,01 \text{ м}^2$ та відстанню між ними 1 мм . Знайти діелектричну проникність середовища, що заповнює простір між пластинами, якщо контур настроєний на довжину хвилі 750 м .

Дано:

$$L = 3 \cdot 10^{-5} \text{ Гн}$$

$$S = 0,01 \text{ м}^2$$

$$d = 10^{-3} \text{ м}$$

$$\lambda = 750 \text{ м}$$

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$$

$$\epsilon - ?$$

Розв'язування

Контур настроєно на прийом електромагнітної хвилі, тому період вільних коливань у коливальному контурі дорівнює періоду коливань вектора напруженості електромагнітної хвилі.

З одного боку

$$T = 2\pi\sqrt{LC},$$

а з другого

$$T = \frac{\lambda}{c},$$

де $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ – швидкість поширення електромагнітної хвилі у вакуумі.

Ємність плоского конденсатора

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}.$$

Тоді

$$\frac{\lambda}{c} = 2\pi\sqrt{L \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}}.$$

Звідси

$$\epsilon = \frac{\lambda^2 d}{4\pi^2 c^2 L \epsilon_0 S}.$$

$$\epsilon = \frac{\frac{\text{м}^2}{\text{Гн}} \cdot \frac{\text{м}}{\text{Ф}} \cdot \frac{\text{м}}{\text{м}^2}}{\frac{\text{м}^2}{\text{Гн}} \cdot \frac{\text{Ф}}{\text{м}^2}} = \frac{c^2}{\text{Гн} \cdot \text{Ф}} = \frac{c^2 \cdot \text{А}}{B \cdot c \cdot \text{Ф}} = \frac{Kл}{B \cdot \text{Ф}} = \frac{Kл}{Kл} = 1.$$

$$\epsilon = \frac{750^2 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 3,14 \cdot 9 \cdot 10^{16} \cdot 3 \cdot 10^{-5} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,01} = 187,33.$$

Відповідь: діелектрична проникність середовища 187,33.

Задача 10

В коливальному контурі відбуваються вільні коливання. Знаючи, що максимальний заряд конденсатора дорівнює 10^{-8} Кл, а максимальний струм 2 А. Знайти довжину електромагнітної хвилі у вакуумі. Швидкість електромагнітної хвилі у вакуумі $3 \cdot 10^8$ м/с.

Дано:

$$q_{\max} = 10^{-8} \text{ Кл}$$

$$i_{\max} = 2 \text{ А}$$

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$$

$$\lambda - ?$$

Розв'язування

Довжина хвилі λ – це відстань, яку проходить хвиля за проміжок часу рівний періоду T

$$\lambda = cT$$

Період коливань у контурі визначається за формулою Томсона

$$T = 2\pi\sqrt{LC},$$

де L – індуктивність контуру;

C – електроємність конденсатора.

Максимальна енергія зарядженого конденсатора

$$W_C = \frac{q_{\max}^2}{2C}$$

Максимальна енергія магнітного поля струму

$$W_L = \frac{Li_{\max}^2}{2}$$

Якщо коливання не загасають, то

$$W_C = W_L \text{ або } \frac{q_{\max}^2}{2C} = \frac{Li_{\max}^2}{2}$$

Звідки

$$\sqrt{LC} = \frac{q_{\max}}{i_{\max}}$$

Знаходимо довжину хвилі, яку випромінює контур:

$$\lambda = c2\pi \frac{q_{\max}}{i_{\max}}$$

Перевіримо одиниці вимірювання:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{c}{\frac{Kl}{A}} = \frac{c}{\frac{A}{c}} = \frac{c^2}{A} = m$$

$$\lambda = 3 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot \frac{1 \cdot 10^{18}}{2} = 18,84 \cdot 10^8 = 0,5 \cdot 10^{18} \text{ м} = 9,42 \text{ м}$$

Відповідь: довжини електромагнітної хвилі у вакуумі 9,42 м.

Задачі до теми 3

- 1 Рівняння коливань записане в системі СІ має вигляд:
 $x = \sin[300t - 6]$. Вказати його амплітуду, початкову фазу, частоту і період.

Відповідь: 1 м; -6 рад; 300 с⁻¹; 2,1·10⁻² с.

- 2 Знайти амплітуду та початкову фазу гармонічного коливання, що утворилось внаслідок додавання, які описані рівняннями:

$$x_1 = 2 \sin[5t - \frac{\pi}{2}] \text{ см і } x_2 = 3 \sin[5t - \frac{\pi}{4}] \text{ см.}$$

Відповідь: 4,6 см; 62°47'.

- 3 Написати рівняння гармонічного коливання тіла, якщо повна енергія 3·10⁻⁵ Дж, максимальна сила, що діє на тіло 1,5 мН, період коливання 2 с і початкова фаза 60°.

$$x = 4 \cdot 10^{-2} \sin[\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{3}]$$

Відповідь:

- 4 Матеріальна точка масою 5 г здійснює гармонічні коливання з частотою 0,5 Гц. Амплітуда коливання 3 см. Визначити: 1) швидкість точки в момент часу, коли зміщення 1,5 см; 2) максимальну силу, яка діє на матеріальну точку; 3) повну енергію коливної точки.

Відповідь: 8,2 см/с; 1,49 мН; 22,1·10⁻⁶ Дж.

- 5 У Санкт-Петербурзі знаходиться найбільший у світі маятник довжиною 100 м. Які його найбільші швидкість і прискорення, якщо амплітуда коливань 7 м.

Відповідь: 2,19 м/с; 0,687 м/с².

- 6 Мідна кулька підвішена до пружини, здійснює вертикальні коливання. Як зміниться період коливань, якщо до пружини підвісити алюмінієву кульку, того ж радіуса? Густина мідної кульки 8,9·10³ кг/м³, густина алюмінієвої кульки 2,7·10³ кг/м³.

Відповідь: 1,8.

- 7 При підвішуванні вантажу масою 1 кг стальна пружина в положенні рівноваги подовжилася на 1 см. З яким періодом буде здійснювати коливання цей вантаж на пружині після зміщення його по вертикалі із положення рівноваги?

- Відповідь: 0,2 с.
- 8 Сила струму в коливальному контурі змінюється згідно рівнянню $i = 0,03 \sin 200\pi t$ А, індуктивність контуру 2 Гн. Знайти період коливань, ємність конденсатора, максимальну енергію магнітного поля.
Відповідь: 0,01 с; $1,27 \cdot 10^{-6}$ Ф; $9 \cdot 10^{-4}$ Дж.
- 9 Частота власних коливань коливального контуру дорівнює 60 кГц. Після заміни конденсатора в цьому контурі іншим вона стала рівною 80 кГц. Якою буде частота власних коливань при паралельному з'єднанні цих конденсаторів?
Відповідь: $4,8 \cdot 10^4$ Гц.
- 10 Коливальний контур складається із конденсатора ємністю 1,8 мкФ і котушки індуктивністю 0,2 Гн. Визначити максимальну силу струму в контурі, якщо максимальна різниця потенціалів на пластинах конденсатора 100 В.
Відповідь: 0,3 А.
- 11 Коливальний контур приймача, настроєний на довжину хвилі 500 м. Яка власна частота коливань контуру, якщо його індуктивність дорівнює $2 \cdot 10^{-6}$ Гн, а опір 100 Ом?
Відповідь: власна частота коливань контуру $45 \cdot 10^7$ с⁻¹.

4 ГАРМОНІЧНІ КОЛИВАННЯ (ЗАГАСАЮЧІ ТА ВИМУШЕНІ)

Основні закони та формули

Диференціальне рівняння загасаючих коливань

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0; \quad (4.1)$$

$$x = e^{-\beta t} (A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t), \quad (4.1a)$$

де $\beta = \frac{r}{2m}$ – коефіцієнт загасання;
 r – коефіцієнт опору;

$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ – циклічна частота.

Циклічна частота загасаючих коливань

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}. \quad (4.2)$$

Період загасаючих коливань

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}}. \quad (4.3)$$

Розв'язок диференціального рівняння загасаючих коливань (рівняння загасаючих коливань)

$$x = Ae^{\gamma t} \cos \omega t, \quad (4.4)$$

де $\gamma = \frac{r}{2m}$ – коефіцієнт загасання,
 $A = A_0 e^{\gamma t}$ – амплітуда загасаючих коливань.

Логарифмічний декремент загасання

$$\delta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)}, \quad (4.5)$$

де $A(t)$ і $A(t+T)$ – амплітуди двох послідовних коливань, які відстають по часу один від одного на період.

Добротність коливальної системи

$$Q = \frac{\omega}{\gamma} = \frac{\omega}{\omega T}. \quad (4.6)$$

Коефіцієнт загасання

$$\gamma = \frac{\delta}{T}. \quad (4.7)$$

Рівняння вимушених коливань

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t, \quad (4.8)$$

де $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ – циклічна частота вільних коливань;

$\gamma = \frac{r}{2m}$ – коефіцієнт загасання;

$$f_0 = \frac{F_0}{m}.$$

Амплітуда вимушених коливань

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}} \quad (4.9)$$

Резонансна частота

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2} \quad (4.10)$$

Резонансна амплітуда

$$A_{рез} = \frac{f_0}{2\alpha \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}} \quad (4.11)$$

Електромагнітні коливання

Диференціальне рівняння вільних загасаючих коливань

$$q'' + 2\alpha q' + \omega_0^2 q = 0, \quad (4.12)$$

де $\alpha = \frac{R}{2L}$ – коефіцієнт загасання;

$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ – циклічна частота.

Розв'язок диференціального рівняння загасаючих коливань (рівняння загасаючих коливань)

$$q = q_0 e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t \quad (4.13)$$

де $q_0 e^{-\alpha t} = A$ – амплітуда загасаючих коливань;

α – коефіцієнт загасання.

Частота загасаючих коливань

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}, \quad (4.14)$$

де ω_0 – власна частота коливального контуру.

Період загасаючих коливань

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} \quad (4.15)$$

Декремент загасання

$$\frac{q(t)}{q(t+T)} = \frac{q_0 e^{-\alpha t}}{q_0 e^{-\alpha(t+T)}} = e^{-\alpha T} \quad (4.16)$$

Логарифмічний декремент загасання

$$\ln \frac{q_0 e^{-\gamma t}}{q_0 e^{-\gamma T}} = \ln e^{-\gamma T} = -\gamma T \quad (4.17)$$

Добротність коливальної системи

$$Q = \frac{\omega}{\gamma} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (4.18)$$

де $\gamma = \frac{R}{2L}$;
 $T = 2\pi \sqrt{LC}$.

Диференціальне рівняння вимушених коливань

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\gamma \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{E_0}{L} \cos \omega t, \quad (4.19)$$

де $\gamma = \frac{R}{2L}$;
 $\omega_0^2 = \frac{1}{CL}$.

Амплітуда струму виражається формулою

$$I = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - L\omega\right)^2}}. \quad (4.20)$$

Резонансна частота

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}. \quad (4.21)$$

Приклади розв'язування задач

Задача 1

Знайти логарифмічний декремент загасання коливань маятника довжиною 50 см, якщо він за час 8 хв коливань витрачає 99 % своєї енергії.

Дано:

$$l = 50 \text{ см} = 50 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$t = 8 \text{ хв} = 480 \text{ с}$$

$$W$$

$$\frac{W}{W_0} = 0,01$$

$\square - ?$

Розв'язування

Енергія маятника, що коливається визначається за формулою

$$W = \frac{mA^2 \square^2}{2}$$

Амплітуда загасаючого коливання змінюється за законом

$$A = A_0 e^{-\frac{\square t}{T}}$$

Тоді

$$W = \frac{mA_0^2 e^{-\frac{2\square t}{T}} \square^2}{2}$$

За умовою задачі

$$\frac{W}{W_0} = e^{-\frac{2\square t}{T}} = 0,01$$

Логарифмуємо вираз

$$\ln 0,01 = -\frac{2\square t}{T}$$

З останнього виразу знайдемо

$$\square = -\frac{T \ln 0,01}{2t},$$

де $T = 2\square \sqrt{\frac{l}{g}}$.

Шуканий логарифмічний декремент загасання

$$\square = -\frac{T}{2t} \ln 0,01 = -2\square \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{\ln 0,01}{2t}$$

Перевіримо одиниці вимірювання:

$$\frac{[l]}{[c^2]} = \frac{[m]}{[c^2]} = \frac{1}{[c]} \square \frac{1}{[c^2]} \frac{1}{[t]} \square \frac{c}{c} \square 1$$

$$\square = -2 \cdot 3,14 \cdot \sqrt{\frac{0,5}{9,8}} \cdot \frac{\ln 0,01}{2 \cdot 480} = 1,4 \cdot \frac{4,6}{960} = 1,4 \cdot 0,00480 = 0,0067$$

Відповідь: логарифмічний декремент загасання 0,0067.

Задача 2

Математичний маятник завдовжки 24,7 см здійснює загасаючі коливання. Логарифмічний декремент загасання дорівнює 0,01. Через який час енергія коливань зменшиться в 9,4 рази?

Дано:

$$l = 24,7 \text{ см} = 0,247 \text{ м}$$

$$\lambda = 0,01$$

$$W_0$$

$$\frac{W}{W_0} = 9,4$$

$$t = ?$$

Розв'язування

Енергія загасаючих коливань маятника

$$W = W_0 e^{-\lambda t},$$

λ – коефіцієнт загасання.

Звідси

$$e^{-\lambda t} = \frac{W}{W_0}.$$

Логарифмуючи цей вираз, дістанемо

$$-\lambda t = \ln \frac{W}{W_0},$$

звідки

$$t = \frac{\ln \frac{W_0}{W}}{\lambda}.$$

Логарифмічний декремент

$$\lambda = \frac{1}{T},$$

де T – період коливань математичного маятника.

Для малих загасань

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Тоді

$$\lambda = \frac{1}{2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}}.$$

З останнього виразу знаходимо

$$\lambda = \frac{\pi \sqrt{g}}{2\pi \sqrt{l}}.$$

Підставляючи λ у формулу для визначення часу t , дістанемо

$$t = \frac{\ln \frac{W_0}{W} \cdot 2 \sqrt{l}}{\sqrt{g}}$$

Перевіримо одиниці вимірювання:

$$[t] = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{\frac{m}{c^2}}} = \sqrt{c^2} = c$$

$$t = \frac{\ln 9,4 \cdot 2 \sqrt{0,247}}{0,01 \sqrt{9,8}} \text{ с} = 223,5 \text{ с}$$

Відповідь: через 223,5 с

Задача 3

Відомо, що енергія коливань камертона протягом часу $t = 18$ с зменшилась у $n = 10^5$ раз. Знайти логарифмічний декремент загасання δ . Частота коливань камертона $\nu_0 = 500$ Гц.

Дано:

$$t = 18 \text{ с}$$

$$n = 10^5 \text{ раз}$$

$$\nu_0 = 500 \text{ Гц}$$

$$\delta = ?$$

Розв'язування

Повна енергія E тіла, що коливається, складається з кінетичної W_k і потенціальної U енергії.

Кінетичну енергію

$$W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\dot{x}^2}{2} \quad (1)$$

можна знайти, якщо використати формулу для x

$$x = A \cos(\nu_0 t)$$

$$W_k = \frac{mA^2\nu_0^2}{2} \cos^2 \nu_0 t \quad (2)$$

$$U = \frac{kx^2}{2} \text{ і}$$

Потенціальна енергія визначається формулами

$$x = A e^{\delta t} \cos \nu_0 t$$

Враховуючи також зв'язок між ω_0 і k , згідно з $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, матимемо

$$U = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2 \omega_0 t \quad (3)$$

Сума потенціальної і кінетичної енергії буде

$$E = W_k = U = \frac{m\omega_0^2}{2} A^2 = \frac{m\omega_0^2}{2} A_0^2 e^{-2\gamma t} \quad (4)$$

За умовою задачі в момент $t = t_0$,

$$E = \frac{E_0}{n}, \quad (5)$$

де $E_0 = \frac{m\omega_0^2}{2} A_0^2$ – початкова енергія камертона при $t = 0$. (6)

Підставляючи рівняння (6) і (4) у (5) для моменту часу $t = t_0$, знаходимо

$$e^{-2\gamma t_0} = \frac{1}{n}.$$

Звідси визначимо

$$\gamma = \frac{\ln n}{2t_0}$$

і згідно з $\gamma = \gamma T$, враховуючи $\gamma = \frac{1}{T} = \frac{2\gamma}{T}$, маємо

$$\gamma = \frac{\ln n}{2t_0 T}.$$

Перевіримо одиниці вимірювання:

$$\frac{1}{c} = \frac{c}{c} = 1.$$

Підставимо числові значення:

$$\gamma = \frac{\ln 10^5}{2 \cdot 500 \cdot 8} = 6,4 \cdot 10^{-4}.$$

Відповідь: логарифмічний декремент загасання $6,4 \cdot 10^{-4}$.

Задача 4

З досліду встановлено, що логарифмічний декремент загасання камертона, який коливається з частотою 100 с^{-1} , дорівнює 0,002. Через який проміжок часу амплітуда коливань збудженого камертона зменшиться в 100 раз? Як зміниться при цьому енергія коливань?

Дано:

$$\gamma = 100 \text{ с}^{-1}$$

$$\beta = 0,002$$

$$\frac{A_0}{A}$$

$$= 100$$

$$t - ?$$

$$\frac{W}{W_0}$$

$$- ?$$

Розв'язування

Амплітуда загасаючих коливань змінюється з часом за законом

$$A = A_0 e^{-\gamma t} = A_0 e^{-\frac{t}{T}} = A_0 e^{-\beta t},$$

де β – коефіцієнт загасання;

$$T = \frac{1}{\beta}$$

β – умовний період загасаючих коливань.

Отже

$$t = \frac{1}{\beta} \ln \frac{A_0}{A}.$$

Енергія коливань W пропорційна квадрату добутку частоти коливань на їх амплітуду. Частота коливань камертона стала, отже, відношення енергій коливань дорівнює квадрату відношення амплітуд:

$$\frac{W}{W_0} = \left(\frac{A}{A_0} \right)^2.$$

$$t = \frac{1}{0,002 \cdot 100} \ln 100 \text{ с} = \frac{1}{0,2} \ln 100 \text{ с} = 5,4,6 \text{ с} \approx 23 \text{ с}.$$

Перевіримо одиниці вимірювання:

$$t = \frac{1}{\text{с}^{-1}} = \text{с}.$$

$$\frac{W}{W_0} = \left(\frac{1}{100} \right)^2 = 0,01 = 10^{-4}.$$

Відповідь: через 23 с енергія зміниться в 10^{-4} .

Задача 5

Початкова кутова амплітуда коливань маятника довжиною 1 м дорівнює 4° . Через 3 хв, амплітуда $0,9^\circ$. Визначити логарифмічний

декремент загасання маятника і знайти, через який час амплітуда буде дорівнювати $0,01^\circ$.

Дано:

$$l = 4 \text{ м}$$

$$A_0 = 4^\circ$$

$$t' = 3 \text{ хв.} = 180 \text{ с}$$

$$A' = 0,9^\circ$$

$$A'' = 0,01^\circ$$

$$\square - ?$$

$$t'' - ?$$

Розв'язування

Амплітуда загасаючих коливань змінюється згідно виразу

$$A \square A_0 e^{\square \square t} \quad (1)$$

Застосовуючи формулу (1) для моменту $t \square t'$, коли $A \square A'$, знаходимо

$$\begin{aligned} \frac{A_0}{A'} &\square e^{\square \square t'}; \\ \square \square t' &\square \ln \frac{A_0}{A'}; \\ \square &\square \frac{1}{t'} \ln \frac{A_0}{A'} \end{aligned} \quad (2)$$

Враховуючи, що період коливань $T \square 2 \square \sqrt{\frac{l}{g}}$, за формулою знаходимо

$$\square \square \frac{2 \square}{t'} \ln \frac{A_0}{A'} \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Перевіримо одиниці вимірювання:

$$\begin{aligned} \square \square \square \frac{1}{\text{с}} \frac{\frac{\text{м}}{\text{м}} \text{с}^2 \square^{\frac{1}{2}}}{\text{м}} \square \frac{1}{\text{с}} \frac{\text{с}^2 \square^{\frac{1}{2}}}{\text{с}} \square \frac{\text{с}}{\text{с}} \square 1 \\ \square \square 1,7 \square 10^{\square 2} \end{aligned}$$

Підставляємо в (1) $t \square t''$ і $A \square A''$, визначимо t''

$$t'' \square \frac{1}{\square} \ln \frac{A_0}{A''} \quad (3)$$

Підставляємо (2) у (3), знаходимо

$$t'' = t' \frac{\ln \frac{A_0}{A''}}{\ln \frac{A_0}{A'}}.$$

Перевіримо одиниці вимірювання:

$$\frac{t''}{t'} = \frac{c}{c}.$$

$$t'' = 730 \text{ c}.$$

Відповідь: логарифмічний декремент загасання $1,7 \cdot 10^{-2}$; час 730 с.

Задача 6

Знайти добротність осцилятора у якого: а) амплітуда зміщення зменшується в два рази через кожні 110 періодів коливань; б) власна частота 100 c^{-1} і час релаксації 60 с.

Дано:

$$N = 110$$

$$n = 2$$

$$\omega_0 = 100 \text{ c}^{-1}$$

$$\tau = 60 \text{ c}$$

$$Q = ?$$

Розв'язування

а) Підставляючи в формулу для амплітуди зміщення

$$A = A_0 e^{-\gamma t}$$

значення $A = \frac{A_0}{n}$ і $t = N \cdot T$ (T – період), отримаємо

$$\frac{1}{n} = e^{-\gamma N T}$$

Звідки

$$\gamma T = \frac{\ln n}{N}, \quad Q = \frac{\omega_0}{\gamma T} = \frac{\omega_0 N}{\ln n} = 500.$$

б) Використовуючи формули

$$\gamma = \frac{1}{\tau}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad \text{і} \quad \gamma = \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \text{отримаємо}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{\gamma T} = \frac{1}{2} \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2} = 1.$$

$$Q \approx 3 \cdot 10^3$$

Відповідь: добротність осцилятора $3 \cdot 10^3$.

Задача 7

Тіло масою m , підвішене на невагомій пружині, здійснює вимушені коливання з амплітудою A і частотою ω . Власна частота коливань системи дорівнює ω_0 . Знайти середню за період механічну енергію даного осцилятора.

Дано:

m

ω_0

A

ω

$E_{cp} = ?$

Розв'язування

Як витікає із умови задачі, закон руху записується у вигляді

$$x = A \sin \omega t$$

Звідси знаходимо механічну енергію

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{m \dot{x}^2}{2} = \frac{m \omega^2 x^2}{2} = \frac{m \omega_0^2 x^2}{2} = \frac{m \omega^2}{2} A^2 \cos^2 \omega t = \frac{m \omega_0^2}{2} A^2 \sin^2 \omega t$$

Вирахуємо середнє значення E за період T

$$E_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T E dt = \frac{1}{4} m \omega^2 A^2$$

Відповідь: середня за період механічна енергія осцилятора

$$E_{cp} = \frac{1}{4} m \omega^2 A^2$$

Задача 8

Коливальний контур складається з конденсатора ємністю $0,2 \text{ мкФ}$ і котушки індуктивністю $5,07 \text{ мГн}$. При якому логарифмічному декременті загасання різниця потенціалів на пластинах конденсатора за 1 мс зменшиться втричі?

Дано:

$$C = 2 \cdot 10^{-7} \text{ Ф}$$

$$L = 5,07 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}$$

$$\Delta t = 0,001 \text{ с}$$

$$\frac{U_{\Delta t}}{U_{\Delta t + \Delta t}} = 3$$

β – ?

Розв'язування

Електромагнітні коливання в контурі – загасаючі.

Напруга на пластинах конденсатора змінюється за законом

$$U = U_0 e^{-\beta t}$$

де β – коефіцієнт загасання, пов'язаний з логарифмічним декрементом загасання співвідношенням

$$\beta = \frac{1}{T}.$$

Тоді

$$\beta = \frac{1}{T}.$$

$$U(t) = U_0 e^{-\beta t} = U_0 e^{-\frac{1}{T} t}.$$

Звідси

$$\frac{U(t)}{U_0} = e^{-\frac{1}{T} t}.$$

Логарифмуємо здобутий вираз

$$\ln \frac{U(t)}{U_0} = -\frac{1}{T} t.$$

З останнього виразу знаходимо

$$\beta = \ln \frac{U_0}{U(t)} \frac{1}{t},$$

де $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$ – період загасаючих коливань.

Вважаючи загасання в контурі малим $\beta^2 \ll \omega_0^2$, знаходимо

$$T \approx \frac{2\pi}{\omega_0} \approx 2\pi \sqrt{LC}.$$

Підставивши T у формулу для β , дістанемо

$$\beta \approx \ln \frac{U_0}{U(t)} \frac{2\pi \sqrt{LC}}{t}.$$

Перевіримо одиниці вимірювання:

$$\frac{1}{\text{с}} \cdot \frac{\text{с}}{\text{с}} = 1.$$

Обчислимо

$$\approx \frac{\ln 3 \cdot \sqrt{5,07 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^7}}{10^3} \approx 0,22$$

Відповідь: при логарифмічному коефіцієнті загасання 0,22.

Задача 9

Коливальний контур складається із конденсатора ємності 4,0 мкФ і котушки індуктивності 2,0 мГц і активним опором 10 Ом. Знайти відношення енергії магнітного поля котушки до енергії електричного поля конденсатора в момент максимуму струму.

Дано:

$$C = 4,0 \text{ мкФ} = 4,0 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$$

$$L = 2,0 \text{ мГн} = 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}$$

$$R = 10 \text{ Ом}$$

$$\frac{E_m}{E_e} = ?$$

Розв'язування

Згідно теорії вільних загасаючих коливань, заряд на пластинах конденсатора і струм в котушці можна записати в вигляді (початкову фазу для простоти припускаємо рівну нулю)

$$q = q_m e^{-\gamma t} \cos \omega t$$

$$I = \omega q_m e^{-\gamma t} \cos \omega t$$

$$\cos \omega t = \frac{q}{q_m}, \sin \omega t = \frac{I}{\omega q_m}$$

Моменту максимуму струму відповідає рівність $\cos \omega t = 1$ або $\omega t = 2\pi n$ (n – ціле число). При цьому

$$I = \omega q_m e^{-\gamma t}, \quad q = \frac{q_m}{\omega} e^{-\gamma t}$$

Вираховуючи відношення магнітної E_m і електричної E_e енергій, отримаємо

$$\frac{E_m}{E_e} = \frac{\frac{1}{2} L I^2}{\frac{1}{2} q^2} = \frac{L C I^2}{q^2} = \frac{4 L}{R^2 C}$$

$$\frac{E_m}{E_e} = 20$$

Відповідь: відношення енергії магнітного поля котушки до енергії електричного поля конденсатора в момент максимуму струму дорівнює 20.

Задачі до теми 4

- 1 Амплітуда загасаючих коливань маятника за 120 с зменшилась в 2 рази. Визначити коефіцієнт загасання.
Відповідь: $5,18 \cdot 10^{-3} \text{с}^{-1}$.
- 2 Куля масою 0,5 кг підвішена на пружині, жорсткість якої 32 Н/м, і здійснює загасаючі коливання. Визначити їх період у двох випадках: 1) за час, протягом якого відбулося 88 коливань і амплітуда зменшилась в 2 рази; 2) за час двох коливань ($n=2$) амплітуда зменшилась в 20 разів.
Відповідь: 0,78 с; 0,81 с.
- 3 Осцилятор масою m рухається по закону $x = A \sin \omega t$ під дією вимушеної сили $F_x = F_0 \cos \omega t$. Знайти коефіцієнт загасання β осцилятора.
Відповідь: $\beta = \frac{F_0}{2Am\omega}$.
- 4 Стрілка чутливого приладу коливається біля положення рівноваги. Її послідовні положення такі: $n_1 = 26,4$; $n_2 = 10,7$; $n_3 = 20,5$. Знайти поділку, яка відповідає рівноважному положенню стрілки, якщо її декремент загасання є сталим у часі.
Відповідь: 20,8.
- 5 Ресори вагонів поїзда, що прогинаються на величину 15 мм під дією навантаження 1 Т, навантажені 6 Т. При якій швидкості поїзда ресори коливатимуться найбільше, якщо довжина рейок 12,5 м?
Відповідь: 20,8 м/с.
- 6 Кулька масою m може здійснювати незгасаючі гармонічні коливання біля $x = 0$ з власною частотою ω_0 . В момент $t = 0$, коли кулька знаходилася в стані рівноваги, до неї приклали вимушену силу $F = F \cos \omega t$, яка співпадає по напрямку з віссю x . Знайти закон вимушених коливань кульки $x(t)$.
- 7 Кулька масою $m = 50 \text{ г}$ підвішена на невагомій пружині жорсткістю $k = 20,0 \text{ Н / м}$. Під дією вимушеної вертикальної гармонічної сили з частотою $\omega = 25,0 \text{ с}^{-1}$ кулька здійснює коливання, які встановилися. При цьому зміщенні кульки відстає $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ по фазі від вимушеної сили на $\frac{3\pi}{4}$. Знайти добротність даного осцилятора.
Відповідь: 2,2.

- 8 Коливальний контур складається з конденсатора ємністю $\frac{1}{3} \cdot 10^{-8}$ Ф і котушки з індуктивністю $12 \cdot 10^{-6}$ Гн. Знайти період вільних коливань контуру, коефіцієнт загасання і логарифмічний декремент загасання, якщо опір котушки 60 Ом.
Відповідь: $14,8 \cdot 10^{-7}$ с; $2,5 \cdot 10^6$ с⁻¹; 3,7.
- 9 Між полюсами електромагніту, який живиться змінним струмом, натягнуто стальну струну, натяг якої, а значить і частоту коливань, можна змінювати. При частоті 130 Гц її амплітуда коливань максимальна і дорівнює 4 мм. При частоті 135 Гц амплітуда коливань зменшується до 2 мм. Встановивши амплітуду A_0 , електромагніт забирають, після чого відбуваються власні загасаючі коливання струни. Протягом якого часу амплітуда цих коливань зменшиться до A' ?
Відповідь: 0,78 с.
- 10 У коливальному контурі, індуктивність якого 0,01 Гн, заряд конденсатора зменшується в 10 раз за період 10^{-5} с. Визначити опір конденсатора.
Відповідь: 4605 Ом.

5 ХВИЛІ. РІВНЯННЯ ХВИЛІ. ЕНЕРГІЯ ХВИЛІ. ЗВУКОВІ ХВИЛІ. ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ

Основні закони та формули

Хвилею називають процес поширення збуджень, який супроводжується перенесенням енергії від джерела в навколишній світ.

Рівняння біжучої плоскої хвилі описується рівнянням

$$y = A \sin \left(2\pi \left(t - \frac{x}{v} \right) \right) \quad (5.1)$$

Довжиною хвилі називають відстань між точками середовища, які коливаються із різницею фаз 2π .

$$\lambda = vT; \quad (5.2)$$

Коли $\lambda = \frac{v}{f}$,
тоді

$$\lambda = \frac{v}{f}, \quad (5.2)$$

де v – швидкість хвилі;
 ν – частота.

Хвильове число

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega T} \quad (5.3)$$

З врахуванням (5.3) рівняння (5.1) набирає вигляду

$$y = A \sin(\omega t - kx) \quad (5.4)$$

(5.4) – рівняння біжучої плоскої хвилі.

Рівняння сферичної хвилі

$$y = \frac{A}{x} \sin[\omega t - kx] \quad (5.5)$$

де x – відстань від центра хвилі до точки середовища, яка розглядається.

Швидкість поперечних хвиль у твердих тілах

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (5.6)$$

Швидкість поширення повздовжніх хвиль у пружному середовищі

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (5.7)$$

де E – модуль Юнга;
 ρ – густина середовища.

Швидкість поперечних хвиль в струні

$$v = \sqrt{\frac{F}{\rho S}}, \quad (5.8)$$

де F – сила натягу струни;
 ρ – густина матеріалу;
 S – площа поперечного перерізу струни.

Частота основних коливань струни

$$\nu = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho}}, \quad (5.9)$$

де L – довжина струни;
 T – натяг струни.

Швидкість повздовжніх хвиль у рідинах

$$v_p = \sqrt{\frac{K}{\rho}}, \quad (5.10)$$

де ρ – густина рідини;

K – об’ємний модуль пружності.

Амплітуда тиску звукової хвилі

$$\Delta P = \Delta_0 A \cos(\omega t - kx) \quad (5.11)$$

Кінетична енергія хвильового руху в об’ємі ΔV

$$W_k = \frac{1}{2} \Delta V \Delta^2 A^2 \cos^2(\omega t - kx) \quad (5.12)$$

Потенціальна енергія хвильового руху в об’ємі ΔV

$$W_n = \frac{1}{2} \Delta V \Delta^2 A^2 \cos^2(\omega t - kx) \quad (5.13)$$

Повна енергія

$$W = \Delta V \Delta^2 A^2 \cos^2(\omega t - kx) \quad (5.14)$$

Середнє значення об’ємної густини енергії за часом

$$\bar{W} = \frac{1}{2} \Delta^2 A^2 \quad (5.15)$$

Потік енергії хвилі

$$\Phi = \bar{W} S v, \quad (5.16)$$

де S – площа поверхні, через яку переноситься енергія хвилі;

v – швидкість поширення хвилі.

Середнє значення густини енергії хвилі (вектор Умова)

$$j = \bar{W} v \quad (5.17)$$

Інтенсивність звуку (сила звуку)

$$I = \frac{1}{2} \Delta^2 A^2 v = \frac{\Delta^2 P_0^2}{2 \Delta}, \quad (5.18)$$

де $\Delta P_0 = \Delta A$ – амплітуда звукового тиску.

Рівень гучності звуку в децибелах

$$L = 10 \lg \frac{I}{I_0},$$

де I – інтенсивність звуку певної частоти;

I_0 – інтенсивність звуку на порозі чутності.

Електромагнітні хвилі

Електромагнітні хвилі це змінне електромагнітне поле, яке поширюється в просторі.

Швидкість поширення електромагнітної хвилі

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}, \quad (5.19)$$

де ϵ_0 і μ_0 – електрична і магнітна сталі;

ϵ і μ – відносні діелектрична і магнітна проникності середовища.

Швидкість поширення електромагнітної хвилі у вакуумі

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}, \quad (5.20)$$

де $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{м}}$;
 $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\Gamma_{\text{н}}}{\text{м}}$.

Швидкість поширення електромагнітних хвиль у вакуумі дорівнює швидкості світла у вакуумі і $v = c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$.

Диференціальне рівняння електромагнітної хвилі

$$\Delta u = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (5.21)$$

де v – фазова швидкість;

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{– оператор Лапласа.}$$

Густина енергії електромагнітної хвилі

$$W = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \sqrt{EH}. \quad (5.22)$$

Модуль густини потоку енергії

$$S = W = EH \quad (5.23)$$

Вектор Умова-Пойнтінга

$$S = \vec{E} \times \vec{H} \quad (5.24)$$

Приклади розв'язування задач

Задача 1

Хвилі рухають човен біля берега. Рибалка нарахував 15 коливань за півхвилини. На око він визначив довжину хвилі – 6 м. Скільки часу рухались ці хвилі від джерела, віддаленого від човна на відстань 840 м?

Дано:

$$N = 15$$

$$t_1 = 0,5 \text{ хв} = 30 \text{ с}$$

$$\lambda = 6 \text{ м}$$

$$S = 840 \text{ м}$$

$$t = ?$$

Розв'язування

Період коливань човна

$$T = \frac{t_1}{N}$$

Швидкість руху хвиль

$$v = \frac{S}{T}$$

Від джерела хвилі рухаються за час

$$t = \frac{S}{v} = \frac{ST}{N} = \frac{St_1}{N}$$

Перевіримо одиниці вимірювання:

$$\left[\frac{m \cdot s}{m} \right] = s$$

$$t = \frac{840 \cdot 30}{6 \cdot 5} \text{ с} = \frac{25200}{90} \text{ с} = 280 \text{ с} = 4 \text{ хв } 40 \text{ с}$$

Відповідь: хвилі рухались 4 хв. 40 с.

Задача 2

Стрілець почув звук удару кулі в мішень через 1 с після того, як він вистрілив. На якій відстані від нього поставлено мішень? Температура повітря 0°C. Куля летить із середньою швидкістю 500 м/с.

Дано:

$$t = 1 \text{ с}$$

$$v = 500 \text{ м/с}$$

$$v_{\text{зв}} = 340 \text{ м/с}$$

$$S = ?$$

Розв'язування

Час, який заданий в задачі

$$t = t_{\text{к}} + t_{\text{зв}}$$

де $t_{\text{к}}$ – час руху кулі до мішені,

$t_{\text{зв}}$ – час, протягом якого дійшов звук.

$$t_{\text{к}} = \frac{S}{v}, \quad t_{\text{зв}} = \frac{S}{v_{\text{зв}}}$$

де $v_{\text{зв}}$ – швидкість звуку.

Тоді

$$t = \frac{S}{v} = \frac{S}{\frac{S}{\lambda}} = \frac{S \lambda}{S} = \lambda$$

Звідки

$$\lambda = \frac{v t}{f}$$

Перевіримо одиниці вимірювання:

$$\lambda = \frac{\frac{m}{s} \cdot \frac{m}{s}}{\frac{1}{s}} = \frac{m^2}{s^2} \cdot s = m$$

$$\lambda = \frac{500 \cdot 40}{500 \cdot 340} m = 202 m$$

Відповідь: на відстані 202 м.

Задача 3

Поперечна хвиля поширюється вздовж пружного шнура зі швидкістю 15 м/с. Період коливання точок шнура 1,2 с, амплітуда коливань 2 см. Визначити довжину хвилі, фазу і зміщення точки, яка знаходиться на відстані 45 м від джерела коливань.

Дано:

$$v = 15 \text{ м/с}$$

$$T = 1,2 \text{ с}$$

$$A = 2 \text{ см} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$x = 45 \text{ м}$$

$$t = 4 \text{ с}$$

$$\lambda = ?$$

$$\varphi = ?$$

$$y = ?$$

Розв'язування

Довжина хвилі

$$\lambda = v T = 15 \cdot 1,2 \text{ м} = 18 \text{ м}$$

Фаза і зміщення будь-якої точки може бути знайдена із рівняння хвилі

$$y = A \sin \left(2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right)$$

Фаза коливань дорівнює аргументу синуса в рівнянні хвилі

$$\varphi = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = \frac{2\pi}{T} t - \frac{2\pi}{\lambda} x$$

$$\varphi = \frac{2\pi \cdot 14}{1,2} = 4\pi = \frac{45}{15} \pi \text{ рад} = 5,24 \text{ рад}$$

Зміщення точки

$$y = 2 \cdot 10^{-2} \sin 5,24 \text{ м} = 1,73 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

Відповідь: довжина хвилі 18 м; фаза коливань 5,24 рад; зміщення точки – $1,73 \cdot 10^{-2}$ м.

Задача 4

Вздовж деякої прямої поширюються коливання з періодом 0,25 с і швидкістю 48 м/с. Через 10 с після виникнення коливань в початковій точки, на відстані 43 м від неї, зміщення точки стало рівним 3 см. Визначити в цей же момент часу зміщення і фазу коливань в точці, на відстані 45 м від джерела коливань.

Дано:

$$T = 0,25 \text{ с}$$

$$v = 48 \text{ м/с}$$

$$x_1 = 43 \text{ м}$$

$$x_2 = 45 \text{ м}$$

$$y_1 = 3 \text{ см} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$t = 10 \text{ с}$$

$$y_2 = ?$$

$$\varphi_2 = ?$$

Розв'язування

Рівняння коливання точок, які відстають від джерела коливань на відстанях x_1 і x_2 мають вигляд

$$y_1 = A \sin \left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{x_1}{v} \right),$$

$$y_2 = A \sin \left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{x_2}{v} \right),$$

або, враховуючи, що $\frac{2\pi}{T}$ отримаємо

$$y_1 = A \sin \left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{x_1}{v} \right),$$

$$y_2 = A \sin \left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{x_2}{v} \right).$$

Амплітуду коливань знайдемо із рівняння для y_1

$$A = \frac{y_1}{\sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{x_1}{v}\right)}$$

$$A = \frac{3 \cdot 10^{-2}}{\sin\left(\frac{2\pi}{0,25}10 - \frac{43}{48}\right)} \text{ м} = 6 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

Із рівняння для y_2 знайдемо фазу коливання φ_2 , в точці, яка знаходиться на відстані x_2 від джерела коливань

$$\varphi_2 = \frac{2\pi}{T}t - \frac{x_2}{v}$$

$$\varphi_2 = \frac{2\pi}{0,25}10 - \frac{45}{48} \text{ рад} = 145\frac{\pi}{2} \text{ рад} = 227,65 \text{ рад}$$

Зміщення в точці, яка знаходиться на відстані x_2 від джерела коливань, в момент часу t дорівнює

$$y_2 = A \sin \varphi_2$$

$$y_2 = 6 \cdot 10^{-2} \sin\left(145\frac{\pi}{2}\right) \text{ м} = 6 \cdot 10^{-2} \sin\frac{\pi}{2} \text{ м} = 6 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

Відповідь: фаза коливань 227,65 рад; зміщення коливань $6 \cdot 10^{-2}$ м.

Задача 5

Довжина струни дорівнює $L = 40$ см. Після вкорочення струни (при незмінному натягові) на величину l частота її основного коливання зросла в $n = 2$ рази. Визначити l .

Дано:

$$L = 40 \text{ см.}$$

$$n = 2$$

$$l = ?$$

Розв'язування

Позначимо частоти основних коливань невикорченої і викорченої струни відповідно ν і ν' .

Згідно з формулою

$$\nu = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad (1)$$

$$\nu' = \frac{1}{2(L-l)} \sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad (2)$$

За умовою задачі $\lambda = n \cdot l$.

Підставляючи сюди формули (1) і (2) матимемо

$$\frac{1}{L - l} = \frac{n}{L}. \quad (3)$$

З рівняння (3) знаходимо

$$l = \frac{L - n \cdot l}{n}.$$

$$l = 20 \text{ см} = 0,2 \text{ м}$$

Відповідь: довжина струни після вкорочення 0,2 м.

Задача 6

Амплітуда хвилі тиску для звуку частотою 3000 Гц дорівнює 0,01 дин/см² (1 дин/см²=0,1 Н/м). Визначити амплітуду значень частинок повітря в такій хвилі.

Дано:

$$\nu = 3000 \text{ Гц}$$

$$P = 0,01 \text{ дин/см}^2$$

$$\rho_0 = 1,29 \text{ кг/м}^3$$

$$c = 332 \text{ м/с}$$

$$A = ?$$

Розв'язування

Скористаємось формулою

$$P = \rho_0 A \omega^2,$$

де ρ_0 – густина середовища до приходу хвилі, і розв'язуємо її відносно A

$$A = \frac{P}{\rho_0 \omega^2} = \frac{P}{2\pi^2 \rho_0 \nu^2}.$$

Перевіримо одиниці вимірювання:

$$A = \frac{\text{Па}}{\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}} = \frac{\frac{\text{Н}}{\text{м}^2}}{\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}} = \frac{\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} \cdot \frac{1}{\text{м}^2}}{\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}} = \frac{\frac{1}{\text{с}} \cdot \frac{1}{\text{м}}}{\frac{1}{\text{м}^2} \cdot \frac{1}{\text{с}}} = \frac{\text{м}^2 \cdot \text{с}}{\text{с} \cdot \text{м}} = \text{м}.$$

Вважаючи густину повітря рівною 1,29 кг/м³, а швидкість повітря 332 м/с, знаходимо:

$$A = \frac{0,001}{2 \cdot 3,14 \cdot 3000 \cdot 1,29 \cdot 332} \text{ м} = \frac{0,001}{8068795,2} \text{ м} = \frac{1 \cdot 10^{-3}}{8 \cdot 10^6} \text{ м} = 1,2 \cdot 10^{-8} \text{ м}.$$

Відповідь: амплітуда значень частинок $1,2 \cdot 10^{-8}$ м.

Задача 7

Джерело звуку невеликих розмірів має потужність 1 Вт при частоті 400 Гц. Вважаючи, що звук в повітрі поширюється від джерела однаково в усі сторони, і нехтуючи поглинанням звуку, визначити амплітуду звукового тиску, а також амплітуду швидкості і зміщення частинок повітря на відстані 100 м від джерела звуку.

Дано:

$$N = 1 \text{ Вт}$$

$$\nu = 400 \text{ Гц}$$

$$r = 100 \text{ м}$$

$$c = 332 \text{ м/с}$$

$$\rho = 1,29 \text{ кг/м}^3$$

$$P_0 = ?$$

$$v_0 = ?$$

$$A = ?$$

Розв'язування

Амплітуда звукового тиску зв'язана з інтенсивністю звуку I виразом

$$I = \frac{1}{2} \rho c A^2 \nu = \frac{P_0^2}{2\rho c}, \quad (a)$$

де $P_0 = \rho A v_0$,

яка в свою чергу зв'язана з потужністю N джерела

$$I = \frac{N}{4\pi r^2}, \quad (1)$$

де r – відстань від джерела, в якій визначається величина I . Формула (1) витікає із визначення інтенсивності звуку. Згідно умови задачі від джерела поширюються сферичні хвилі. Тому у знаменнику формули (1) стоїть площа поверхні сфери, через яку проходить вся звукова енергія, що випромінюється джерелом.

Прирівнюючи праві частини формул (a) і (1), маємо

$$P_0 = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{N \rho c}{2}}.$$
$$P_0 = \frac{1}{100} \sqrt{\frac{1 \cdot 332 \cdot 1,29}{2 \cdot 3,14}} \text{ Па} = 8,3 \cdot 10^{-2} \text{ Па}$$

У загальному випадку величини v_0 , A обчислюють за формулами

$$v_0 = \sqrt{\frac{P}{\rho}},$$

де P і ρ – тиск і густина газу перед поширенням в ньому хвиль;

κ – відношення молярних теплоємностей газу при сталому тиску і об'ємі.

$$pV = \frac{m}{\mu} RT$$

Так як згідно умови задачі повітря знаходиться при нормальних умовах, то значення μ і ρ беремо із таблиць і за формулою (2) обчислюємо величину ΔP_0 .

Тепер, використовуючи співвідношення між амплітудою звукового тиску ΔP_0 і амплітудою швидкості v_0 частинок повітря у звуковій хвилі

$$\Delta P_0 = \rho v_0$$

і формулу (2), отримаємо

$$v_0 = \frac{\Delta P_0}{\rho} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{N}{2\pi\nu\rho}} \quad (3)$$

$$v_0 = \frac{1}{100} \sqrt{\frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 32 \cdot 1,29}} \frac{\text{м}}{\text{с}} = 1,9 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Враховуючи зв'язок між величинами A , v_0 в гармонічному коливанні ($x = A \cos(\omega t + \phi)$), можна записати, що

$$v_0 = A \omega = 2\pi\nu A,$$

звідки знайдемо амплітуду зміщення частинок повітря у звуковій хвилі A

$$A = \frac{v_0}{2\pi\nu} = \frac{1}{2\pi\nu r} \sqrt{\frac{N}{2\pi\nu\rho}} \quad (4)$$

$$A = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 400} \sqrt{\frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 32 \cdot 1,29}} \text{ м} = 7,6 \cdot 10^{-8} \text{ м}$$

Відповідь: амплітуда звукового тиску $8,3 \cdot 10^{-2}$ Па; амплітуда швидкості $1,9 \cdot 10^{-4}$ м/с; зміщення частинок повітря $7,6 \cdot 10^{-8}$ м.

Задача 8

В вакуумі поширюється вздовж осі плоска електромагнітна хвиля. Амплітуда напруженості магнітного поля хвилі 0,05 А/м. Визначити інтенсивність хвилі.

Дано:

$$H_m = 0,05 \text{ А/м}$$

$$\epsilon = 4\epsilon \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$$

$$I - ?$$

Розв'язування

Інтенсивністю I електромагнітної хвилі в даній точці простору називається модуль середнього за часом значення вектора Пойтінга

$$I = \langle S \rangle = \langle \vec{E} \vec{H} \rangle$$

Амплітуди напруженостей електричного і магнітного полів в вакуумі зв'язані співвідношенням $\epsilon_0 E_m^2 = \mu_0 H_m^2$ ю. Звідси:

$$E_m = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} H_m \quad (1)$$

В випадку плоскої хвилі напрямок вектора Пойтінга в будь-якій точці залишається незмінним, тому модуль його середнього значення дорівнює середньому від модуля.

$$I = \langle \vec{E} \vec{H} \rangle = \langle E_m \cos[\omega t - kx] H_m \cos[\omega t - kx] \rangle =$$

$$= E_m H_m \langle \cos^2[\omega t - kx] \rangle = \frac{E_m H_m}{2}$$

З врахуванням формули (1)

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} H_m^2$$

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{1\pi \cdot 9 \cdot 10^9}} \cdot 0,05 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} = 0,47 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$$

Відповідь: інтенсивність хвилі $0,47 \text{ Вт/м}^2$.

Задача 9

Коливальний контур складається з конденсатора ємністю 500 пФ і варіометра, індуктивність якого може змінюватися $0,5 \text{ мГн} \leq L \leq 1,5 \text{ мГн}$. Знайти діапазон хвиль, які випромінюються контуром.

Дано:

$$C = 500 \text{ пФ}$$

$$0,5 \text{ мГн} \leq L \leq 1,5 \text{ мГн}$$

$$\lambda \text{ — ?}$$

Розв'язування

Довжина електромагнітної хвилі

$$\lambda = cT,$$

де $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ – швидкість поширення електромагнітних хвиль у вакуумі.

Так як

$$T = 2\pi\sqrt{LC},$$

то

$$2\pi\sqrt{L_1 C} = 2\pi\sqrt{L_2 C},$$

де $L_1 = 0,5 \text{ мГн}$; $L_2 = 1,5 \text{ мГн}$.

Обраховуємо

$$942 \text{ м} = 1632 \text{ м}.$$

Відповідь: 942 м і 1632 м .

Задачі до теми 5

- 1 Зміщення із положення рівноваги точки, яка знаходиться на відстані 4 см від джерела коливань, через проміжок часу $T/6$ дорівнює половині амплітуди. Знайти довжину хвилі.

Відповідь: 0,48 м.

- 2 Дві точки знаходяться на відстанях 6 м і 12 м від джерела коливань. Знайти різницю фаз коливань цих точок, якщо період коливань 0,04 с, а швидкість їх поширення 300 м/с.

Відповідь: $\pi \text{ рад}$.

- 3 Плоска хвиля з періодом 1,2 с та амплітудою коливань 2 см поширюється зі швидкістю 15 м/с. Чому дорівнює зміщення і швидкість точки, що міститься на відстані 45 м від джерела хвиль, через 4 с. Визначити різницю фаз коливань двох точок, віддалених одна від одної в напрямі поширення хвилі 50 см.

Відповідь: 0.119 рад.

- 4 У скільки разів зміниться довжина звукової хвилі при переході хвилі з повітря у воду? Швидкість поширення звуку в повітрі 340 м/с і у воді 1450 м/с.

Відповідь: у 4,3рази.

- 5 Від джерела розміщеного біля поверхні Землі, поширюються звукові хвилі. Через який проміжок часу вони досягнуть висоти $h = 10,0 \text{ км}$, якщо температура повітря біля поверхні Землі $t_0 = 16^\circ\text{C}$, а градієнт температури в атмосфері $\Delta T / \Delta h = 7,0 \cdot 10^{-3} \text{ К/м}$?

Відповідь: 30 с.

- 6 Дві струни з однакової речовини, але різної товщини мають однакові натяги. Радіус першої струни в $n=3$ рази більший, ніж

радіус другої. Визначити співвідношення коливань обох струн $\square_1$ і $\square_2$.

$$\frac{1}{3}$$

Відповідь: $\frac{1}{3}$.

- 7 Амплітуда тиску звукової хвилі дорівнює 6 Н/м^2 . Визначити кількість енергії, що потрапляє протягом часу 2 с у вухо людини, розташоване перпендикулярно до напрямку поширення хвилі. Площа вуха 4 см^2 . Густина повітря $1,3 \cdot 10^{-3} \text{ г/см}^3$.
Відповідь: $3,34 \cdot 10^{-5} \text{ Дж}$.

6 СТОЯЧІ ХВИЛІ. ДИСПЕРСІЯ ХВИЛЬ. ЕФЕКТ ДОПЛЕРА

Основні закони та формули

Явище накладання хвиль, при якому відбувається їх взаємне підсилення в одних точках середовища і послаблення в інших в залежності від співвідношення між фазами цих хвиль, називається **інтерференцією хвиль**.

Окремим випадком інтерференції є стоячі хвилі. **Стоячою хвилею** називається хвиля, що утворюється при накладанні двох зустрічних синусоїдних хвиль з однаковими амплітудами і частотами.

При накладанні двох когерентних хвиль **утворюється стояча хвиля**

$$Y = Y_1 = Y_2 = 2A_0 \cos kx \sin \omega t, \quad (6.1)$$

де $Y_1 = A_0 \sin \omega t \pm kx$

$Y_2 = A_0 \sin \omega t \mp kx$,

$$A = 2A_0 \cos kx = 2A_0 \cos \frac{2\pi x}{\lambda}$$

– амплітуда коливання точок у стоячій хвилі.

Точки, в яких амплітуда стоячої хвилі дорівнює нулю, називаються **вузлами**, а точки, в яких амплітуда максимальна ($A = 2A_0$), називаються **пучностями** стоячої хвилі.

Координати вузлів і пучностей визначається з умов

$$x_n = 2n \cdot \frac{\lambda}{4} = n \cdot \frac{\lambda}{2}; \quad (6.2)$$

$$x_n = \frac{2n\lambda}{4} = n\frac{\lambda}{2}, \quad (6.3)$$

де $n = 0, 1, 2, \dots$ – номер пучності.

Відстань між сусіднім вузлом і пучністю

$$x_v = x_n = \frac{\lambda}{4}. \quad (6.4)$$

У стоячій хвилі всі точки між двома вузлами коливаються з різними амплітудами, але з однаковими фазами, оскільки аргумент синуса у рівнянні не залежить від координати x .

На відміну від біжучої хвилі у стоячій хвилі не відбувається перенесення енергії. Це зумовлюється тим, що падаюча і відбита хвилі мають однакові амплітуди, а тому переносять однакову енергію у протилежних напрямках. Повна енергія стоячої хвилі з часом не змінюється, відбувається тільки перехід кінетичної енергії в потенціальну і навпаки. Саме через це стоячі хвилі і одержали свою назву.

Дисперсією світла називають явища, зумовлені залежністю показника заломлення речовини від частоти (або довжини) світлової хвилі

$$D = \frac{dn}{d\lambda}. \quad (6.5)$$

Якщо із збільшенням частоти λ світла показник заломлення n

збільшується $\frac{dn}{d\lambda} > 0$, дисперсію називають **нормальною**, а якщо із збільшенням частоти світла показник заломлення зменшується $\frac{dn}{d\lambda} < 0$ – **аномальною**.

Усі приймачі світла реагують на енергію, тому в дослідах вимірюють швидкість перенесення енергії світловим сигналом і називають її **груповою швидкістю**. Вона відрізняється від швидкості поширення фази монохроматичної хвилі, яку називають **фазовою швидкістю**. Фазова швидкість являє собою чисто розрахункову величину.

Фазова швидкість хвилі v визначається за формулою

$$v = \frac{\omega}{k}. \quad (6.6)$$

Під групою хвиль розуміють хвильове утворення, яке займає настільки малу ділянку спектра, в межах якої можна вважати величину зміни фазової швидкості пропорційною зміні довжини хвилі. **Групова швидкість хвилі**

$$u \approx \frac{d\lambda}{dk} \approx \frac{d\lambda}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)} \approx -\lambda^2 \frac{d\lambda}{d\lambda} = -\lambda, \quad (6.7)$$

де $\lambda = \frac{v}{k}$;
 $\lambda = \frac{v}{k}$.

Зміну частоти хвиль при відносному русі джерела або приймача звуку називають **ефектом Доплера**.

Приймач нерухомий, джерело коливань віддаляється від приймача з швидкістю u

$$\lambda_1 \approx \frac{\lambda_0}{1 - \frac{u}{v}}, \quad (6.8)$$

де v – швидкість хвиль у даному середовищі;

λ_0 – частота коливань приймача.

Приймач нерухомий, джерело коливань наближається до приймача з швидкістю u

$$\lambda_2 \approx \frac{\lambda_0}{1 + \frac{u}{v}}, \quad (6.9)$$

де v – швидкість хвиль у даному середовищі;

λ_0 – частота коливань приймача.

Джерело нерухоме, приймач наближається до джерела з швидкістю w

$$\lambda_3 \approx \lambda_0 \left(1 + \frac{w}{v}\right), \quad (6.10)$$

де v – швидкість хвиль у даному середовищі;

λ_0 – частота коливань джерела.

Джерело нерухоме, приймач віддаляється від джерела з швидкістю w

$$\lambda_4 \approx \lambda_0 \left(1 - \frac{w}{v}\right), \quad (6.11)$$

де v – швидкість хвиль у даному середовищі;

λ_0 – частота коливань джерела.

Джерело або приймач (або обидва одночасно) рухаються

$$\lambda_5 = \lambda_0 \frac{w}{v} \quad (6.12)$$

Приклади розв'язування задач

Задача 1

Відстань між другою і шостою пучностями стоячої хвилі 20 см. Визначити довжину стоячої хвилі.

Дано:

$$\lambda_{6,2} = 20 \text{ см} = 0,2 \text{ м}$$

$\lambda = ?$

Розв'язування

За умовою задачі

$$\lambda_{6,2} = x_6 - x_2,$$

де x_6 – відстань від джерела до шостої пучності;

x_2 – відстань від джерела до другої пучності.

Відстань r від джерела до відповідної пучності зв'язана з довжиною хвилі λ відношенням

$$x_n = \frac{2n\lambda}{4},$$

де n – номер пучності.

Тоді

$$x_6 = \frac{2 \cdot 6 \lambda}{4} = 3\lambda;$$

$$x_2 = \frac{2 \cdot 2 \lambda}{4} = \lambda.$$

$$\lambda_{6,2} = 3\lambda - \lambda = 2\lambda.$$

З останнього виразу знайдемо λ

$$\lambda = \frac{\lambda_{6,2}}{2}.$$

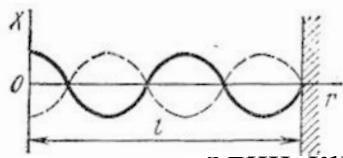
Перевіримо одиниці вимірювання:

$$\frac{\text{м}}{2} = \text{м}.$$

$$\lambda = \frac{0,2}{2} \text{ м} = 0,1 \text{ м}.$$

Відповідь: довжина стоячої хвилі 0,1 м.

Задача 2



На шнурі довжиною 3 м, один кінець якого прив'язаний до стіни, а другий коливається з частотою 5 Гц, виникають стоячі хвилі. При цьому між джерелом і стіною утворюється шість вузлів. Знайти швидкість поширення хвилі в шнурі.

Дано:

$$l = 3 \text{ м}$$

$$\nu = 5 \text{ Гц}$$

$$\nu = ?$$

Розв'язування

Швидкість поширення хвилі

$$\nu = \frac{v}{T}$$

З рисунку 6.1 видно

Рисунок 6.1

$$l = \frac{11\lambda}{4}$$

Звідки

$$\lambda = \frac{4l}{11}$$

Тоді

$$\nu = \frac{4l\nu}{11}$$

Перевіримо одиниці вимірювання:

$$\frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$\nu = \frac{4 \cdot 3 \cdot 5}{11} \frac{\text{м}}{\text{с}} = 5,45 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Відповідь: швидкість поширення хвилі в шнурі 5,45 м/с.

Задача 3

Знайти групову швидкість u хвиль, фазова швидкість v яких змінюється наступним чином в залежності від довжини хвилі:

1) акустичні хвилі в повітрі: $v = A$, де A – константа;

2) поперечні пружні хвилі в стержні: $v = \frac{A}{\lambda}$;

3) глибоководні хвилі: $v = \sqrt{\lambda}$;

4) капілярні хвилі: $v = \frac{A}{\sqrt{\lambda}}$;

5) іоносферичні електромагнітні хвилі: $v = \sqrt{c^2 - A^2 \lambda^2}$, де c – швидкість світла у вакуумі.

Розв'язування

Групова швидкість синусоїдних хвиль, кожна з яких характеризується кутовою частотою ω і хвильовим числом $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, виражається

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d\omega}{d\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)} = \frac{d\omega}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{d\omega}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)} \cdot \frac{d\lambda}{d\lambda} = \frac{d\omega}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)} \cdot \lambda^2 \cdot \frac{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{d\lambda} = \frac{d\omega}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)} \cdot \lambda^2 \cdot \left(-\frac{1}{\lambda^2}\right) = -\frac{d\omega}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)} \cdot \frac{1}{\lambda} = -\frac{d\omega}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)} \cdot \frac{\lambda}{\lambda} = -\frac{d\omega}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)} \cdot \lambda$$

де $\frac{d\omega}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)}$;
 $\frac{d\omega}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)}$.

1) $v = A$. Якщо v стала величина, середовище не володіє

дисперсією, $\frac{d\omega}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = 0$, а $u = v$.

2) $v = \frac{A}{\lambda}$; $\frac{d\omega}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{A}{\lambda^2}$; $u = \frac{A}{\lambda} = \frac{A}{\lambda^2} \cdot \lambda = \frac{A}{\lambda}$.

3) $v = A\sqrt{\lambda}$; $\frac{d\omega}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{A}{2\sqrt{\lambda}}$; $u = A\sqrt{\lambda} = \frac{A}{2\sqrt{\lambda}} \cdot \frac{A}{2} \sqrt{\lambda} = \frac{A}{2} \sqrt{\lambda}$.

4) $v = \frac{A}{\sqrt{\lambda}}$; $\frac{d\omega}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{A}{2\sqrt{\lambda^3}}$; $u = \frac{A}{\sqrt{\lambda}} = \frac{A}{2\sqrt{\lambda^3}} \cdot \frac{A}{2} \sqrt{\lambda} = \frac{3}{2} \frac{A}{\sqrt{\lambda^3}} = \frac{3}{2} v$.

5) $v = \sqrt{c^2 - A^2 \lambda^2}$; $\frac{d\omega}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{2A^2 \lambda}{2\sqrt{c^2 - A^2 \lambda^2}}$;

$$u = \sqrt{c^2 - A^2 \lambda^2} = \frac{2A^2 \lambda}{2\sqrt{c^2 - A^2 \lambda^2}} = \frac{c^2}{\sqrt{c^2 - A^2 \lambda^2}} = \frac{c^2}{\lambda}$$

Відповідь: 1) $u = \lambda$; 2) $u = 2\lambda$; 3) $u = \frac{\lambda}{2}$; 4) $u = \frac{3\lambda}{2}$; 5) $u = \frac{c^2}{\lambda}$.

Задача 4

Показник заломлення прозорої речовини для невеликого інтервалу довжин хвиль, поодаль від лінії поглинання, пов'язаний з довжиною

хвилі співвідношенням $n = A + \frac{B}{\lambda^2}$, ($A, B > 0$). Визначити: а) дисперсію речовини; б) фазову швидкість; в) групову швидкість.

Розв'язування

а) дисперсія речовини

$$D = \frac{dn}{d\lambda} \quad (1)$$

Диференціюючи $n = A + \frac{B}{\lambda^2}$, отримаємо

$$D = -\frac{2B}{\lambda^3}, \quad D < 0 \text{ при } B > 0. \quad (2)$$

Дисперсія є **нормальною**.

б) фазова швидкість світла в речовині

$$\lambda = \frac{c}{n} \quad (3)$$

Підставляючи в (3) значення $n = A + \frac{B}{\lambda^2}$, маємо

$$\lambda = \frac{c}{A + \frac{B}{\lambda^2}} = \frac{c\lambda^2}{A\lambda^2 + B} \quad (4)$$

в) групова швидкість

$$u = \frac{d\lambda}{d\omega} \quad (5)$$

Диференціюючи (4), отримаємо

$$\frac{d\lambda}{d\omega} = \frac{2cB}{A\lambda^2 + B} \quad (6)$$

Підставивши значення λ із (4) і $\frac{d\lambda}{d\omega}$ із (6) в (5) маємо

$$u = \frac{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (7)$$

Відповідь: а) $D = \frac{2B}{\lambda^2}$, $D = 0$ при $B = 0$; б) $u = \frac{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

Задача 5

З якою швидкістю віддаляється від Сонячної системи деяка туманність, якщо лінія водню 434 нм в її спектрі зміщена в сторону довгих хвиль на 13 нм?

Дано:

$$\lambda = 434 \text{ нм} = 434 \cdot 10^{-9} \text{ м}$$

$$\Delta\lambda = 13 \text{ нм} = 13 \cdot 10^{-9} \text{ м}$$

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$$

λ – ?

Розв'язування

Зміщення в спектральній лінії відбувається в наслідок ефекту Доплера

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}, \quad (1)$$

де v – швидкість, з якою віддаляється туманність від Сонячної системи.

Враховуючи, що $\lambda_0 = \frac{c}{\nu}$, а $\lambda = \frac{c}{\nu'}$ формулу (1) перепишемо

$$\frac{c}{\nu'} = \frac{c}{\nu} \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} \quad \text{або} \quad \frac{\nu'}{\nu} = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} \quad (2)$$

Розв'язуючи рівняння відносно v , отримаємо

$$v = c \frac{\left(\frac{\nu'}{\nu}\right)^2 - 1}{\left(\frac{\nu'}{\nu}\right)^2 + 1}. \quad (3)$$

Перевіримо одиниці вимірювання:

$$\frac{434 \cdot 10^9}{3 \cdot 10^8} \frac{m}{s}$$

Підставляємо в формулу (3) числові значення відповідних величин

$$3 \cdot 10^8 \frac{434 \cdot 10^9}{434 \cdot 10^9 - 13 \cdot 10^9} \frac{m}{s} = 8851656,9 \frac{m}{s}$$

Відповідь: з 8851656,9 м/с віддаляється туманність від Сонячної системи.

Задача 6

Електропоїзд віддаляється від спостерігача з швидкістю 80 км/год і дає гудок. Спостерігач чує тон з частотою 200 Гц. Знайти частоту тону нерухомого електропоїзда, а також частоти гармонік основного тону, що їх сприймає спостерігач. Якою буде частота основного гудка, якщо електропоїзд наближатиметься до спостерігача з тією самою швидкістю?

Дано:

$$v = 80 \text{ км/год} = 22,2 \text{ м/с}$$

$$f' = 200 \text{ Гц}$$

$$u = 332 \text{ м/с}$$

$$f_0 = ?$$

Розв'язування

Для розв'язування задачі скористаємося з формули

$$f' = f_0 \frac{u}{1 - \frac{v}{u}}$$

З цієї формули знаходимо f_0 , враховуючи правило знаків

$$f_0 = f' \frac{1 - \frac{v}{u}}{1}, \quad (1)$$

де u – швидкість звуку в повітрі;

f_0 – частота нерухомого електропоїзда;

v – швидкість електропоїзда.

Перевіримо одиниці вимірювання:

$$f_0 = f' \frac{1}{c} \frac{1}{s} = \text{Гц}$$

Підставляємо в формулу (1) числові дані, знаходимо

$$\nu_0 = 1 \cdot \frac{22,2}{332} \cdot 200 \text{ Гц} = 213,4 \text{ Гц}$$

Оскільки закон зміни частоти внаслідок руху джерела однаковий як для основного тону, так і для гармонік, частоти останніх будуть цілими кратними від ν'

$$\nu'_n = n\nu',$$

де $n = 2, 3, 4, \dots$

Якщо електропоїзд наближається до спостерігача з швидкістю u

$$\nu' = \frac{\nu_0}{1 - \frac{u}{v}},$$

, останній сприймає звук з частотою ν'' , причому, згідно з

$$\nu'' = \frac{\nu_0}{1 - \frac{u}{v}}.$$

(2)

Підставляючи замість ν_0 вираз (1), знаходимо:

$$\nu'' = \nu' \cdot \frac{1 - \frac{u}{v}}{1 - \frac{u}{v}}.$$

Перевіримо одиниці вимірювання:

$$\nu'' = \nu' \cdot \frac{1}{1} = \text{Гц}.$$

$$\nu'' = 200 \cdot \frac{1 - \frac{22,2}{332}}{1 - \frac{22,2}{332}} \text{ Гц} = 200 \cdot \frac{1,067}{0,933} \text{ Гц} = 200 \cdot 1,147 \text{ Гц} = 228,7 \text{ Гц}$$

Відповідь: частота тону гудка нерухомого електропоїзда 213,4 Гц; частота основного тону гудка коли електропоїзд наближається до спостерігача 228,7 Гц.

Задачі до теми 6

- 1 Людське вухо може сприймати звуки, які відповідають граничним частотам 16 Гц і 20000 Гц. Знайти область сприйняття звукових хвиль, якщо швидкість поширення звуку в повітрі 343 м/с.

Відповідь: (0,017 – 21,4).

- 2 Визначити інтенсивність звуку ($\text{Вт}/\text{м}^2$), рівень інтенсивності якого становить 67 дБ. Інтенсивність звуку на порозі чутності $I_0 \approx 10^{-12} \text{ Вт} / \text{м}^2$
- 3 На відстані 100 м від точкового джерела звуку рівень гучності при частоті 500 Гц дорівнює 20 дБ. Визначити потужність джерела звуку.
Відповідь: 10^{-10} Вт .
- 4 Два електропоїзди їдуть назустріч один одному із швидкостями 20 м/с і 15 м/с. Перший електропоїзд дає сигнал на частоті 600 Гц. Знайти частоту звуку, який почує пасажир другого електропоїзда: до зустрічі електропоїздів; після зустрічі. Швидкість поширення звуку в повітрі 340 м/с.
Відповідь: 666 Гц; 542 Гц.
- 5 По ріці рухається катер, свисток подається на частоті 400 Гц. Спостерігач, який стоїть на березі, сприймає звук свистка частотою 395 Гц. Швидкість звуку в повітрі 340 м/с. Визначити: швидкість руху катера; наближається чи віддаляється катер від спостерігача.
Відповідь: 4,3 м/с.

7 ОПТИКА. ОСНОВНІ ЗАКОНИ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ОПТИКИ. ІНТЕРФЕРЕНЦІЯ СВІТЛА

Основні закони та формули

Закони відбивання:

- 1 падаючий і відбитий промені і нормаль до межі поділу лежить в одній площині;
- 2 кут падіння α дорівнює куту відбивання β .

Закони заломлення:

- 3 падаючий і заломлені промені і нормаль до межі поділу лежить в одній площині;
- 4 відношення синуса кута падіння до синуса кута заломлення дорівнює відношенню показника заломлення другого середовища відносно першого

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}, \quad (7.1)$$

де n_{21} – відносний показник заломлення другого середовища відносно першого.

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (7.2)$$

Граничний кут повного внутрішнього відбивання

$$\sin \alpha_{\text{гр}} = n_{21}, \quad (7.3)$$

де n_{21} – відносний показник заломлення другого середовища відносно першого.

Лінза – прозоре тіло, обмежене двома прозорими поверхнями, які заломлюють світлові промені.

Величина, обернена фокусній відстані лінзи F , називається **оптичною силою D лінзи**

$$D = \frac{1}{F}. \quad (7.4)$$

В опуклих лінзах оптична сила додатна, а у вгнутих – від’ємна.

Оптичну силу лінзи можна розрахувати за формулою

$$\frac{1}{F} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \quad (7.5)$$

де n – відносний показник заломлення речовини, з якої зроблена лінза;

R_1 і R_2 – радіуси сферичних поверхонь лінзи.

Формула лінзи

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}, \quad (7.6)$$

де d – відстань предмета до лінзи;

f – відстань зображення до лінзи;

F – фокусна відстань.

Відношення лінійного розміру зображення H до розміру предмета h називається **лінійним збільшенням лінзи**

$$\Gamma = \frac{H}{h} = \frac{f}{d}. \quad (7.7)$$

Інтерференцією називають явище, яке виникає в процесі накладання двох (або кількох) когерентних хвиль внаслідок чого енергія у просторі перерозподіляється.

Когерентність – рівність їх частот і стала в часі різниця фаз.

Умова максимуму – коли різниця ходу додавання хвиль дорівнює парному числу півхвиль або цілому числу довжин хвиль

$$\Delta = 2k \frac{\lambda}{2} = k\lambda, \quad (7.8)$$

де $k = 1, 2, 3, \dots$;

λ – довжина хвилі.

Умова мінімуму – коли різниця ходу додавання хвиль дорівнює непарному числу півхвиль

$$\Delta = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad (7.9)$$

де $k = 1, 2, 3, \dots$,

λ – довжина хвилі.

При інтерференції світла в тонких плоскопаралельних пластинках у прохідному світлі умова максимуму має вигляд

$$2dn \cos r = \frac{\lambda}{2} + 2k \frac{\lambda}{2} = k\lambda, \quad (7.10)$$

де d – товщина тонкої пластинки;

n – показник заломлення матеріалу пластинки;

r – кут заломлення світла в ній.

При інтерференції світла в тонких плоско-паралельних пластинках у прохідному світлі умова мінімуму має вигляд

$$2dn \cos r = \frac{\lambda}{2} + 2k + 1 \frac{\lambda}{2}, \quad (7.11)$$

де d – товщина тонкої пластинки;

n – показник заломлення матеріалу пластинки;

r – кут заломлення світла в ній.

У відбитому світлі, внаслідок втрати півхвилі при відбиванні одного з інтерферуючих променів від більш густого середовища, умови для максимумів і мінімумів освітленості зміняться: формула

$$2dn \cos r = \frac{\lambda}{2} + 2k + 1 \frac{\lambda}{2}, \quad (7.12)$$

де d – товщина тонкої пластинки;

n – показник заломлення матеріалу пластинки;

r – кут заломлення світла в ній дає положення **мінімумів**,

а формула

$$2dn \cos r = \frac{\lambda}{2} + 2k + 1 \frac{\lambda}{2}, \quad (7.13)$$

де d – товщина тонкої пластинки;

n – показник заломлення матеріалу пластинки;

r – кут заломлення світла в ній дає положення **максимумів** освітленості.

Радіуси інтерференційних кілець Ньютона визначаються формулами:

для світлих кілець

$$r_k = \sqrt{kR}, \quad (7.14)$$

де $k = 0, 1, 2, 3, \dots$;

R – радіус кривизни лінзи,
для темних кілець

$$r_k = \sqrt{2k-1} R \frac{\lambda}{2}, \quad (7.15)$$

де $k = 1, 2, 3, \dots$;

R – радіус кривизни лінзи.

Явище інтерференції світла широко використовується для створення світлофільтрів, складних антен, просвітлюючого покриття, в оптичних інтерферометрах, радіоінтерферометрах і т.д. Інтерференція хвиль лежить в основі оптичної і акустичної голографії.

Приклади розв'язування задач

Задача 1

На скляну пластинку, показник заломлення якої 1,5, падає промінь світла. Знайти кут падіння променя, якщо кут між відбитим і заломленим променями 90° .

Дано:

$$n = 1,5$$

$$\alpha = 90^\circ = 1,57 \text{ рад}$$

$i = ?$

Розв'язування

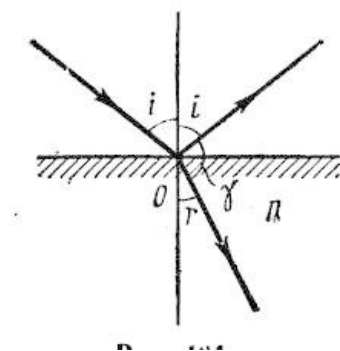


Рисунок 7.1

Із рисунка 7.1 видно, що $i = \bar{i}$, $r = \gamma$, звідки $r = \alpha - i$.

Тоді, враховуючи α , отримаємо

$$r = \frac{\alpha}{2} - i. \quad (1)$$

З іншого боку, по закону заломлення

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n \quad (2)$$

Приймаючи до уваги (1) знаходимо

$$\sin r = \sin \frac{\pi}{2} - i = \cos i$$

Тоді рівняння (2) можна привести до вигляду

$$\frac{\sin i}{\cos i} = \operatorname{tg} i = n$$

Звідки

$$i = \arctg n.$$

$$i = \arccos \operatorname{ctg} 1,5 = 0,98 \text{ рад.}$$

Відповідь: кут падіння 0,98 рад

Задача 2

Промінь світла падає на плоско-паралельну скляну пластинку під кутом 30° . Вихідний із пластинки промінь паралельний падаючому. Показник заломлення скла 1,5. Яка товщина пластинки, якщо відстань між променями $CD = l = 3,88 \text{ см}$?

Дано:

$$\alpha = 30^\circ$$

$$l = 3,88 \text{ см} = 3,88 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$n = 1,5$$

$$d = ?$$

Розв'язування

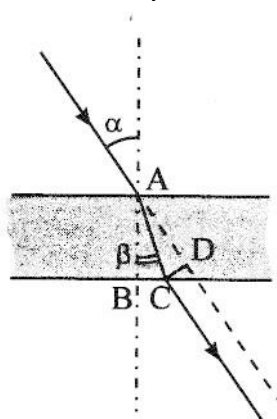


Рисунок 7.2

Із рисунка 7.2 видно, що $\angle BAD = \alpha$, $\angle CAD = \beta$,

$$AC = \frac{CD}{\sin \alpha} = \frac{l}{\sin \alpha}.$$

$$AB = d = AC \cos \alpha,$$

звідки

$$d = \frac{l \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Кут заломлення α визначаємо із закону заломлення

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n,$$

звідки

$$\sin \alpha = \frac{\sin \beta}{n} = 0,333$$

$$\alpha = 19^\circ 30'.$$

$$\beta = 10^\circ 30'.$$

Перевіримо одиниці вимірювання:

$$d \text{ [м]}$$

Підставимо числові значення:

$$d = \frac{3,88 \cdot 10^{-2} \cdot \cos 19^\circ 30'}{\sin 10^\circ 30'} \text{ м} = 0,2 \text{ м}.$$

Відповідь: товщина пластинки 0,2 м.

Задача 3

Визначити кут відхилення променя скляної призми, заломлюючий кут якої 3° , якщо кут падіння променя на передню грань призми дорівнює нулю.

Дано:

$$\alpha = 3^\circ = 0,052 \text{ рад}$$

$$n = 1,5$$

$$i = 0$$

$$\alpha - ?$$

Розв'язування

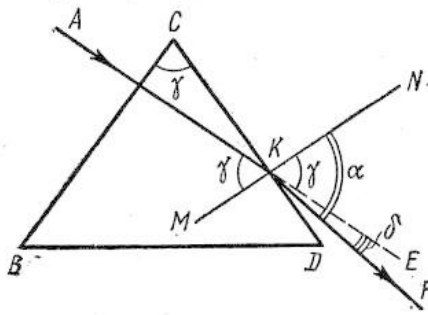


Рисунок 7.3

Із рисунка 7.3 видно, що $\triangle AKM \sim \triangle BCD \sim \triangle NKE$. Позначимо $\angle NKF = \alpha$ і $\angle EKF = \beta$.

Тоді

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{n} \quad (1)$$

По закону заломлення світла для грані CD знайдемо

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{n}$$

Внаслідок малих кутів α і β отримаємо

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \approx \frac{\alpha}{\beta}$$

Тоді

$$\frac{\alpha}{\beta} \approx \frac{1}{n}$$

Звідки

$$\alpha \approx \beta \cdot n \quad (2)$$

Підставляючи відношення (2) в (1), отримаємо

$$\frac{\beta \cdot n}{\beta} \approx \frac{1}{n} \Rightarrow n^2 \approx 1$$

Перевіримо одиниці вимірювання:

$$\frac{\text{рад}}{\text{рад}} = \text{рад.}$$

$$\alpha = 0,0052 \cdot (1,5 - 1) \text{ рад} = 0,026 \text{ рад.}$$

Відповідь: кут відхилення променя скляної призми 0,026 рад.

Задача 4

На якій відстані від збиральної лінзи з фокусною відстанню 0,5 м повинен знаходитися предмет, щоб його уявне зображення було у 5 разів більше за предмет?

Дано:

$$F = 0,5 \text{ м}$$

$$k = 5$$

$d - ?$

Розв'язування

Запишемо формулу лінзи з врахуванням того, що зображення предмета уявне

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{f} - \frac{1}{F}$$

Збільшення предмета

$$\Gamma = \frac{H}{h} = \frac{f}{d},$$

де h – висота предмета;

H – висота зображення;

f – відстань від предмета до зображення.

Розв'язуючи систему двох рівнянь знаходимо відстань від предмета до лінзи

$$d = F \frac{1}{\Gamma - 1}$$

Перевіримо одиниці вимірювання:

$$d \text{ в м}$$

$$d = 0,5 \frac{5}{5} \text{ м} = 0,4 \text{ м}$$

Відповідь: відстань від предмета до лінзи 0,4 м.

Задача 5

Відстань від предмета до екрана 3 м. З якою оптичною силою треба взяти лінзу, щоби на екрані отримати зображення предмета, збільшене в 2 рази?

Дано:

$$l = 3 \text{ м}$$

$$\Gamma = 2$$

$D - ?$

Розв'язування

Оптичну силу, величину фокусній відстані, можна знайти із формули лінзи

$$D = \frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f},$$

де d – відстань від предмета до лінзи;

f – відстань від зображення до лінзи.

Запишемо вираз для лінійного збільшення лінзи

$$\Gamma = \frac{f}{d}$$

Крім того $l = d + f$

Розв'язуючи системи трьох рівнянь, знаходимо

$$D = \frac{1}{l} = \frac{1}{\Gamma f}$$

Перевіримо одиниці вимірювання:

$$D = \frac{1}{\text{м}} = \text{дптр}$$

$$D = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} = 1,5 \text{ (дптр)}.$$

Відповідь: оптична сила 1,5 дптр.

Задача 6

Два когерентних джерела S_1 і S_2 з довжиною хвилі 0,5 мкм знаходяться на відстані 2 мм один від одного. Паралельно лінії, яка з'єднує джерела, розміщений екран на відстані 2 м від них. Що буде спостерігатися в точці Δ екрану: світло чи темнота?

Дано:

$$\lambda = 0,5 \text{ мкм} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$$

$$d = 2 \text{ мм} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$l = 2 \text{ м}$$

$$\Delta - ?$$

Розв'язування

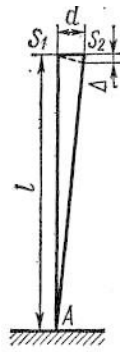


Рисунок 7.4

В точці $\square$ екрану буде світло, якщо різниця ходу двох променів, які виходять із джерел S_1 і S_2 дорівнює цілому числу довжин хвиль, і темнота, якщо ця різниця ходу дорівнює непарному числу півхвиль. Вирахуємо різницю ходу (рисунок 7.4)

$$\square\square|S_2\square\square\square|S_1\square\square|,$$

$$\text{де } |S_2\square\square| = \sqrt{l^2 + d^2}, \quad |S_1\square\square| = l.$$

Відповідно

$$\square\square\sqrt{l^2 + d^2} - l \approx l\sqrt{1 + \frac{d^2}{l^2}} - l.$$

Так як $\frac{d}{l} \ll 1$, $\frac{d}{l}$ величина мала в порівнянні з l , можна використати формулу приблизного обчислення

$$\sqrt{1 + a^2} \approx 1 + \frac{1}{2}a^2$$

то, використовуючи формулу приблизного обчислення, отримаємо

$$\square\square l\left(1 + \frac{1}{2}\frac{d^2}{l^2}\right) - l \approx \frac{d^2}{2l}$$

$$\square\square \frac{2 \cdot 10^3}{2 \cdot 2} \text{ м} \approx 10^6 \text{ м}$$

Порівнюючи значення $\square$ і $\square$ бачимо, що різниця ходу дорівнює цілому числу довжин хвиль (двом), відповідно в т. $\square$ екрану буде світло.

$$k \approx \frac{\square}{\square}$$

$$k \approx \frac{10^6 \text{ м}}{5 \cdot 10^7 \text{ м}} \approx \frac{1,0 \cdot 10^6}{5 \cdot 10^7} \approx \frac{10 \cdot 10^7}{5 \cdot 10^7} \approx 2$$

Відповідь: оскільки $k \approx 2$, то будемо спостерігати в точці світло.

Задачі до теми 7

- 1 Промінь падає під кутом α на середовище з показником заломлення n . Як повинні бути зв'язані між собою α і n , щоб відбитий промінь був перпендикулярний заломленому?

Відповідь: $n \alpha \operatorname{tg} \alpha$.

- 2 Промінь падає на поверхню речовини під кутом 60° . Знайти показник заломлення речовини, якщо кут між відбитим і заломленим променями дорівнює 90° .

- 3 Пучок світла падає на скляну пластинку під кутом 60° . Заломлюючись, переходить в скло. Ширина пучка в повітрі дорівнює 10 см. Знайти ширину пучка в склі.

Відповідь: 16,4 см.

- 4 На нижню грань плоскопаралельної скляної пластинки нанесена подряпина. Спостерігач, дивлячись зверху, бачить подряпину на відстані 4 см від верхньої грані пластинки. Яка товщина пластинки?

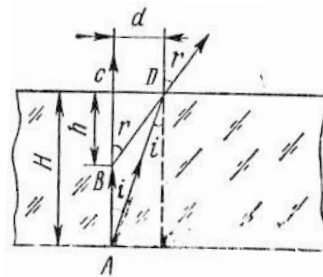


Рисунок 7.5

Відповідь: $6 \cdot 10^{-2}$ м.

- 5 Промінь падає на бічну грань призми під кутом 45° . Показник заломлення скла призми 1,5. Друга грань призми посріблена. Відбитий від неї промінь йде по шляху падаючого. Визначити кут заломлення призми.

Відповідь: кут заломлення призми $27,5^\circ$.

- 6 Предмет висотою 0,05 м знаходиться на відстані 0,3 м від розсіювальної лінзи з фокусною відстанню 0,6 м. Яка висота зображення?

Відповідь: 0,03 м.

- 7 Відстань від предмета до екрана 5 м. Розташована між ними збиральна лінза дає чітке зображення предмета на екрані при двох її положеннях, відстань між якими 3 м. Визначити фокусну відстань лінзи.

- 8 Побудувати зображення предмета, який знаходиться між фокусом і подвійною фокусною відстанню двохвгнутої лінзи.

- 9 Відстань від предмета до екрана 90 см. Де треба розмістити між ними лінзу, фокусна відстань якої 20 см, щоб дістати на екрані чітке зображення предмета?

Відповідь: щоб одержати чітке зображення предмета, лінзу потрібно розмістити на відстані 0,6 м або 0,3 м від екрана.

- 10 Визначити найменшу товщину мильної плівки, якщо у відбитому світлі вона здається зеленою ($\lambda = 500 \text{ нм}$). Кут між нормаллю і променем зору дорівнює 35° . Показник заломлення плівки $n = 1,33$. Якого кольору буде плівка, якщо її спостерігати під кутом 0° , тобто при нормальному промені зору?

Відповідь: 0,105 мкм; 0,5491 мкм.

- 11 На мильну плівку ($n = 1,33$) падає біле світло під кутом 45° . При якій найменшій товщині плівки відбиті промені пофарбовані в жовтий колір ($\lambda = 6 \cdot 10^{-7} \text{ м}$)?

Відповідь: $2,66 \cdot 10^{-7} \text{ м}$.

- 12 Промені від двох когерентних джерел світла з довжиною хвилі 0,8 мкм падають на екран, де спостерігається інтерференційна картина. Коли на шляху одного з променів перпендикулярно до нього помістили мильну плівку з показником заломлення 1,33, інтерференційна картина змінилася на протилежну. За якої найменшої товщини плівки це можливо?

Відповідь: 1,21 мкм.

- 13 На скляний клин з малим кутом нормально до його поверхні падає паралельний пучок променів монохроматичного світла з довжиною хвилі 0,6 мкм. При цьому виникають інтерференційні смуги, кількість яких, що припадає на 1 см, дорівнює 10. Показник заломлення скла – 1,5. Визначити кут клина.

Відповідь: $2 \cdot 10^{-4} \text{ рад}$.

- 14 Поверхні скляного клина утворюють між собою кут $0,1^\circ$. На клин падає нормально до його поверхні пучок монохроматичних променів (рисунок 7.6), довжина хвилі яких $\lambda = 0,5 \text{ мкм}$. Знайти лінійну відстань між інтерференційними смугами.

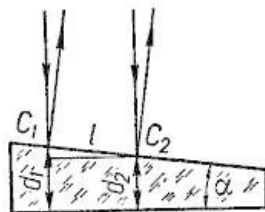


Рисунок 7.6

Відповідь: 0,56 см.

8 ХВИЛЬВА ОПТИКА. ДИФРАКЦІЯ СВІТЛА

Основні закони і формули

Явища відхилення світла від законів прямолінійного поширення – загинання світла в ділянку тіні – мають назву **дифракції світла**.

Дифракція світла спостерігається коли воно проходить крізь отвори і щілини чи зустрічається з мікронеоднорідностями середовища. Явище дифракції тим виразніше, чим більше розмір цих отворів і перешкод наближається до значення довжини хвилі. Дифракція властива радіо- і рентгенівським променям, звуковим хвилям, тобто всім хвильовим процесам. Дифракція світла – прояв його хвильових властивостей.

Дифракційні явища можна поділити на два класи: **дифракція Френеля**, яка виникає від сферичної хвилі, і **дифракція Фраунгофера**.

Явище дифракції пояснюється за допомогою **принципу Гюйгенса**: кожна точка, до якої доходить хвиля, служить центром вторинних хвиль, а огинаючи цих хвиль дає положення **хвильового фронту** в наступний момент часу.

Хвильовим фронтом називається геометричне місце точок, до яких доходять коливання в момент часу t .

Френель доповнив принцип Гюйгенса тим, що врахував інтерференцію коливань, які виходять з цих когерентних джерел.

Доповнений Френелем принцип Гюйгенса дістав назву **принципу Гюйгенса-Френеля**, який полягає в тому, що світлова хвиля, збуджена якимось джерелом, може бути представлена як результат суперпозиції когерентних вторинних хвиль, “випромінюваних” фіктивними джерелами.

Положення мінімумів освітленості при дифракції від однієї щілини, на яку нормально падає паралельний пучок світла, визначається за формулою

$$a \sin \alpha = k \lambda, \quad (8.1)$$

де a – ширина щілини;

α – кут спостереження;

λ – довжина хвилі падаючого світла.

$k = 1, 2, 3, \dots$

При проміжних значеннях кута α освітленість досягає максимальної величини.

Велике практичне значення має дифракція, яка спостерігається, коли світло проходить через дифракційну решітку.

Система паралельних щілин однакої ширини, які лежать в одній площині і розділені однаковими за шириною непрозорими проміжками, називається **дифракційною решіткою**.

Дифракція на решітці відбувається так само, як на щілині. Але для значної кількості близько розміщених паралельних щілин дифракційні максимуми значно звужуються. Відстань між відповідними точками сусідніх щілин (або сума ширини щілини і проміжку між щілинами – $a + b$), називається **сталю дифракційної решітки** – d , або **періодом**

$$d = a + b. \quad (8.2)$$

Якщо

$$d \sin \varphi = k \lambda \quad (8.3)$$

– то в точці буде спостерігатися $\max$ і
якщо

$$d \sin \varphi = (2k + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (8.4)$$

– то в точці буде спостерігатися $\min$,
де $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ – порядок спектра;

d – стала дифракційної решітки;

φ – кут між напрямом на дифракційний $\max$ чи $\min$ і перпендикуляром до перешкоди;

λ – довжина хвилі.

Основними характеристиками дифракційної решітки є кутова або лінійна дисперсія, дисперсійна область і роздільна здатність.

Дисперсія світла – залежність показника заломлення світла в речовині від довжини або частоти світлової хвилі.

Кутовою дисперсією називається величина

$$D = \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{k}{d \cos \varphi}, \quad (8.5)$$

де $d\varphi$ – кутова відстань між двома спектральними лініями, яким відповідають довжини хвиль λ і $\lambda + d\lambda$.

Лінійною дисперсією називають величину

$$D_{\text{лін}} = \frac{dl}{d\lambda}, \quad (8.6)$$

де dl – лінійна відстань на екрані між двома максимумами одного й того самого порядку m для хвиль λ і $\lambda + d\lambda$.

Найменша різниця довжин хвиль двох спектральних ліній $\Delta\lambda$, При яких спектральний прилад розділяє їх окремо, називається **розділяючою відстанню**, а величина

$$R = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = kN \quad (8.7)$$

□ роздільна здатність приладу,
 де N – загальне число штрихів решітки;
 k – порядок спектра;
 □ – відстань в одиницях довжин хвилі між двома суміжними спектральними лініями (точніше, між їх максимумами, які ледве розділяються решіткою);

Максимальна роздільна здатність решітки

$$R_{\max} \approx \frac{Nd}{\lambda} \quad (8.8)$$

Приклади розв'язування задач

Задача1

На дифракційну решітку перпендикулярно падає вузький пучок світла. На яку лінію в спектрі другого порядку накладається фіолетова лінія (410 нм) в спектрі третього порядку?

Дано:

$$k_1=2$$

$$k_2=3$$

$$\lambda_2 = 410 \text{ нм}$$

$$\lambda_1 = ?$$

Розв'язування

Головні максимуми в дифракційній картині від решітки визначається рівнянням

$$d \sin \alpha = k \lambda,$$

де $k = 0, 1, 2, \dots$ – ціле число;

d – період дифракційної решітки;

α – кут дифракції.

Оскільки дві спектральні лінії накладаються, то для них кути дифракції α у лівій частині рівняння однакові. Тому

$$d \sin \alpha = k_1 \lambda_1,$$

$$d \sin \alpha = k_2 \lambda_2.$$

Прирівняємо праві сторони рівнянь і знаходимо потрібну довжину хвилі

$$\lambda_1 = \frac{k_2}{k_1} \lambda_2$$

Перевіримо одиниці вимірювання:

$$\frac{\text{нм}}{\text{нм}} \text{ нм}$$

$$\lambda_1 = \frac{3}{2} \cdot 410 \text{ нм} = 615 \text{ нм}$$

Відповідь: 615 нм.

Задача 2

Дифракційна решітка має 120 штрихів на 1 мм. Визначити довжину хвилі монохроматичного світла, що падає на решітку, якщо кут між двома спектрами першого порядку становить 8° .

Дано:

$$d = \frac{1}{120} \text{ мм}$$

$$2\alpha = 8$$

$$k = 1$$

$$\lambda = ?$$

Розв'язування

Умова max (спектра) першого порядку

$$\lambda = d \sin \alpha,$$

тому $k = 1$.

Кут між напрямом на спектр першого порядку і напрямом на

$$\frac{8^\circ}{2}$$

головний максимум дорівнює $\frac{8^\circ}{2}$.

Перевіримо одиниці вимірювання:

$$\frac{\text{нм}}{\text{нм}} \text{ нм}$$

$$\lambda = \frac{1}{120} \cdot 10^3 \sin 4^\circ = 580 \text{ нм}$$

Відповідь: 580 нм.

Задача 3

На дифракційну решітку падає нормально вузький пучок монохроматичного світла з довжиною хвилі 600 нм. Скільки головних максимумів при цьому спостерігається, якщо стала дифракційної решітка 2 мкм?

Дано:

$$\lambda = 0,6 \cdot 10^{-6} \text{ м}$$

$$d = 2 \cdot 10^{-6} \text{ м}$$

$n - ?$

Розв'язування

Рівняння дифракційної решітки

$$d \sin \varphi = k \lambda$$

Знайдемо число максимумів, які відповідають додатним кутам φ .

Максимальне значення $\sin \varphi = 1$.

Найбільший порядок максимуму

$$k_m = \frac{d}{\lambda}$$

$$k_m = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{0,6 \cdot 10^{-6}} = 3,3$$

$$k_m = 3 \quad (\text{ціле число})$$

Стільки ж максимумів відповідає від'ємним кутам φ . Крім того ще існує центральний максимум. Тому загальне число максимумів у дифракційній картині.

$$n = 2 \cdot k_m + 1$$

$$n = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

Відповідь: 7.

Задача 4

Скільки повних спектрів можна спостерігати за допомогою дифракційної решітки з 500 штрихами на 1 мм довжини, якщо ширина щілини дорівнює ширині проміжку між щілинами? Вважати, що повний спектр видимого світла з боку довгохвильового краю обмежений довжиною хвилі $7600 \text{ \AA}$ ($\text{\AA} = 10^{-10} \text{ м}$; $\text{\AA} = 10^{-7} \text{ мм}$).

Дано:

$$a = 1 \text{ мм} = 10^{-3} \text{ м}$$

$$b = 500$$

$$\lambda = 0,76 \text{ мкм}$$

$k - ?$

Розв'язування

Визначимо сталу дифракційної решітки

$$d = a = b; \quad d = \frac{a}{b}$$

$$d = \frac{10^{-3}}{500} = 2 \text{ мкм}$$

За умовою $a \approx b$. Отже, $a \approx 1 \text{ мкм}$. Число k повних спектрів з кожного боку від спектра нульового порядку (центральної ахроматичної смуги) визначається з умови

$$\sin \varphi \approx \frac{kx}{a \approx b} \approx 1,$$

або

$$k \approx \frac{2}{0,76}, \text{ тобто } k \approx 2.$$

Довгохвильові границі спектрів визначаються за формулою

$$\sin \varphi \approx \frac{kx}{a \approx b}.$$

Отже,

$$\sin \varphi_1 \approx \frac{x}{a \approx b} \approx \frac{0,76}{2}; \quad \sin \varphi_2 \approx \frac{2x}{a \approx b} \approx \frac{2 \cdot 0,76}{2}.$$

Внаслідок дифракції від однієї щілини на екрані утворюються мінімуми для променів, які поширюються під кутами до нормалі, що визначаються рівнянням

$$\sin \varphi' \approx \frac{k'x}{a}.$$

При $x \approx 0,76 \text{ мк}$ виходить єдиний можливий мінімум, що відповідає куту φ' , який визначається з рівняння

$$\sin \varphi' \approx \frac{0,76}{1},$$

тобто він збігається з кутом φ_2 .

Звідси випливає, що спектри другого порядку випадуть внаслідок дифракції від однієї щілини. Отже, на екрані буде видно два спектри – по одному з кожного боку від центральної ахроматичної смуги.

Відповідь: на екрані буде видно два спектри – по одному з кожного боку від центральної ахроматичної смуги.

Задача 5

На якій відстані одна від одної розмістяться на екрані дві лінії ртутної лампи ($\lambda_1 \approx 5770 \text{ А}$; $\lambda_2 \approx 5791 \text{ А}$) в спектрі першого порядку, утвореного за допомогою дифракційної решітки з періодом $2 \cdot 10^{-4} \text{ см}$? Фокусна відстань лінзи, що проектує спектр на екран, 60 см ($A = 10^{-10} \text{ м}$; $A = 10^{-7} \text{ мм}$).

Дано:

$$\lambda_1 = 5770 \text{ \AA}$$

$$\lambda_2 = 5791 \text{ \AA}$$

$$d = 2 \cdot 10^{-4} \text{ см}$$

$$f = 60 \text{ см.}$$

$$D^* = ?$$

Розв'язування

Лінійна дисперсія дифракційної решітки визначається за формулою

$$D^* = \frac{dl}{d\alpha} = Df,$$

де f – фокусна відстань лінзи, яка проектує спектр на екран ;

$$D = \frac{k}{d \sin \alpha} \text{ – кутова дисперсія;}$$

k – порядок спектра.

Кут α визначимо з умови

$$d \sin \alpha = k\lambda; \quad \sin \alpha = \frac{k\lambda}{d}.$$

$$\sin \alpha = 0,2885; \quad \alpha = 16^\circ 46'.$$

Далі знаходимо

$$\frac{dl}{d\alpha} = \frac{k}{d \cos \alpha} f.$$

$$\frac{dl}{d\alpha} = 0,031 \text{ мм / \AA}.$$

Лінійна дисперсія решітки дорівнює $0,031 \text{ мм / \AA}$, отже шукана відстань між лініями λ_1 і λ_2 на екрані дорівнює $0,031 \cdot 21 = 0,651 \text{ мм}$

Відповідь: 0,651 мм.

Задача 6

Світло з довжиною хвилі λ падає нормально на дифракційну решітку. Знайти її кутову дисперсію в залежності від кута дифракції α .

Дано:

$$\lambda$$

$$D = ?$$

Розв'язування

Використаємо формулу для кутової дисперсії

$$D \approx \frac{k}{d \cos \alpha},$$

де k – порядок дифракції,
 d – стала дифракційної решітки.

Із рівняння дифракційних максимумів
 $d \sin \alpha \approx k \lambda$

виразимо k і підставимо в D

$$D \approx \frac{tg \alpha}{\alpha}.$$

Відповідь: $D \approx \frac{tg \alpha}{\alpha}.$

Задача 7

1) Обчислити роздільну здатність зорової труби з діаметром об'єктива 5 см. 2) При якому збільшенні буде використана повна роздільна здатність цієї труби? Діаметр зіниці ока 0,5 см.

Дано:

$$D = 5 \text{ см}$$

$$d = 0,5 \text{ см}$$

$$R = ?$$

Розв'язування

1) Роздільна кутова відстань зорової труби визначається умовою

$$\alpha \approx 1,22 \frac{\lambda}{D},$$

де D – діаметр об'єктива. При візуальних спостереженнях можна вважати, що $\lambda \approx 5500 \text{ Å} \approx 550 \text{ нм}$; тоді $\alpha \approx 2'', 76$.

2) Нехай розглядуваний об'єкт видно неозброєним оком під кутом

$$\alpha \approx 1,22 \frac{\lambda}{D},$$

(D – діаметр об'єктива), тобто під мінімальним кутом, який здатний розділити об'єктів. У трубу цей самий об'єкт буде видно під кутом $\alpha \approx R \alpha$. Кут α повинен бути не меншим від кута

$$\alpha \approx 1,22 \frac{\lambda}{d},$$

який здатне розділити око (d – діаметр зіниці ока).

З умови $\alpha \approx R \alpha$ знайдемо

$$R \approx \frac{D}{d}.$$

$$R \approx \frac{5}{0,5} \approx 10$$

Отже, із збільшенням 10 буде використана повна роздільна

$$R \approx \frac{D}{d}$$

здатність труби. Збільшення називається нормальним. При менших збільшеннях використовується тільки частина об'єктива і роздільна здатність системи труби – око знижується. Збільшення, більші за нормальне, не раціональні, бо при цьому роздільна здатність системи не збільшується, а яскравість зображення зменшується.

Відповідь: із збільшенням 10.

Задачі до теми 8

- 1 Який найбільший порядок спектра ($\lambda \approx 590 \text{ нм}$) можна спостерігати за допомогою дифракційної решітки, яка має 500 штрихів на 1 мм, при нормальному падінні світла на решітку.
Відповідь: 3.
- 2 Для вимірювання довжини світлової хвилі використовувалась дифракційна решітка, яка має 100 щілин на 1 мм. Відстань від решітки до екрану 2 м. Перший дифракційний максимум на екрані отримаємо на відстані 12 см від центрального. Визначити довжину світлової хвилі.
Відповідь: $0,6 \cdot 10^{-6} \text{ м}$
- 3 При нормальному попаданні світла на дифракційну решітку кут дифракції для лінії 0,65 мкм в другому порядку дорівнює 45° . Знайти кут дифракції для лінії 0,5 мкм в третьому порядку.
Відповідь: $54,7^\circ$.
- 4 Світло з довжиною хвилі 530 нм падає на прозору дифракційну решітку, період якої дорівнює 1,5 мкм. Знайти кут з нормаллю до решітки під яким утворюється Фраунгоферів максимум найбільшого порядку, якщо світло падає на решітку: а) нормально; б) під кутом 60° до нормалі.
Відповідь: 45° ; -64° .
- 5 Точкове джерело світла з довжиною хвилі 0,50 мкм розміщений на відстані 100 см перед діафрагмою з круглим отвором радіуса 1,0 мм. Знайти відстань від діафрагми до точки спостереження, для якої число зон Френеля в отворі складає 3.
- 6 Яку ширину має спектр першого порядку (довжину хвиль лежить у межах від 0,38 до 0,76 мкм), утворений на екрані, віддаленому на 3 м від дифракційної решітки з періодом 0,01 мм?

- 7 Світло падає нормально на дифракційну решітку шириною 6,5 см, яка має 200 штрихів на міліметр. Вивчаючий спектр має спектральну лінію з 670,8 нм. Знайти: а) в якому порядку спектра ці компоненти будуть розрішені; б) найменшу різницю довжин хвиль, яку може розрішити ця решітка в області 670 нм.
- 8 Обчислити: 1) кутову дисперсію в спектрі першого порядку для решітки, яка має 3937 штрихів на 1 см; 2) лінійну дисперсію спектрографа з такою ж решіткою, якщо його об'єктив має фокусну відстань 50 см. При обчисленнях вважати, що кути дифракції малі ($\cos \theta \approx 1$).

Відповідь: 393,7 рад/мм; 0,097 мм/Å.

- 9 Знайти величину найменшої основи призми, виготовленої із скла, дисперсія якого поблизу D-лінії натрію дорівнює $\frac{dn}{d\lambda} \approx 956 \text{ см}^{-1}$ і яка може розділити жовтий дублет натрію ($\lambda_1 \approx 5890 \text{ Å}$, $\lambda_2 \approx 5896 \text{ Å}$).

Відповідь: 1 см.

- 10 Спектрограф має скляну призму з основою 10 см і заломлюючись під кутом 60° , що встановлюється під час роботи під кутом найменшого відхилення для довжини хвилі 500 нм. Показник заломлення скла призми 1,73, фокусна відстань об'єктива коліматора 25 см. Яка повинна бути ширина коліматорної щілини, щоб можна було практично повністю використати теоретичну роздільну здатність призми?

Відповідь: $2,5 \cdot 10^{-3}$ мм.

9 ПОЛЯРИЗАЦІЯ СВІТЛА. ЗАКОН МАЛЮСА. ПОГЛИНАННЯ І ВИПРОМІНЮВАННЯ СВІТЛА

Основні закони і формули

Світло з усіма можливими рівноймовірними орієнтаціями вектора $\vec{E}$ (і, отже, $\vec{H}$) називається **природним**.

Світло, в якому напрям коливань вектора якимось чином упорядковані, називається **поляризованим**.

Якщо внаслідок яких-небудь зовнішніх впливів появляється переважаючий напрямок коливань вектора $\vec{E}$, то **світло часткова поляризоване**.

Площина, в якій відбувається коливання вектора $\vec{E}$, називається **площиною поляризації** а перпендикулярно до неї площина – **площиною коливань**.

За міру ступеня поляризації приймають вираз

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad (9.1)$$

Плоскополяризоване світло можна отримати з природного за допомогою приладів, які називаються **поляризаторами**. Ці прилади вільно пропускають коливання, паралельні до площини поляризації, яка називається **головною площиною**, і повністю або частково затримують коливання, які перпендикулярні цій площині.

Прилади, за допомогою яких аналізують ступінь поляризації світла, називають **аналізаторами**. Роль аналізаторів виконують прилади, за допомогою яких одержують лінійно поляризоване світло. Будь-який поляризатор може бути аналізатором і навпаки.

Закон Малюса

$$I_a = I_p \cos^2 \alpha \quad (9.2)$$

Інтенсивність поляризованого світла, що пройшла через аналізатор, прямо пропорційна до інтенсивності світла, що пройшла через поляризатор, і квадрату косинуса кута між головними площинами пропускання аналізатора і поляризатора.

Якщо аналізатор не абсолютно прозорий, то

$$I_a = k_a I_p \cos^2 \alpha \quad (9.3)$$

Інтенсивність світла, що пройшла через аналізатор, змінюється від мінімуму (повне погашення світла) при $\alpha = 0$ до максимуму при $\alpha = \frac{\pi}{2}$

Якщо пропустити природне світло через поляризатор і аналізатор, площини яких утворюють кут α , то з першого вийде

плоскополяризоване світло, інтенсивність якого $I_p = \frac{1}{2} k_p I_{np}$, а з другого вийде світло інтенсивністю $I_a = k_a I_p \cos^2 \alpha$. Інтенсивність

світла, що пройшла через два поляризатори, $I_a = \frac{1}{2} k_p k_a I_{np} \cos^2 \alpha$.

$I_{\max} = \frac{1}{2} I_{np} k_p k_a$ (поляризатори паралельні) і $I_{\min} = 0$ (поляризатори схрещені).

Шотландський фізик **Д. Брюстер встановив закон**, згідно з яким при куті падіння i_B (кут Брюстера), який задовольняє умову

$$\operatorname{tg} i_B \leq n_{21}, \quad (9.4)$$

відбитий промінь є плоскопаралельним. Тут n_{21} – показник заломлення другого середовища відносно першого. Ступінь поляризації заломленого променя при куті падіння i_B , досягає найбільшого значення, проте цей промінь залишається поляризованим лише частково.

В оптично анізотропних кристалах спостерігається явище **подвійного променезаломлення**, яке полягає в тому, що промінь світла, який падає на поверхню кристала, роздвоюється в ньому на два заломлені промені, що поширюються з різними швидкостями.

Кристали, що мають подвійне променезаломлення, діляться на **одновісні і двовісні**. В одновісних кристалах для одного із заломлених променів виконується закон заломлення, зокрема заломлений промінь лежить в одній площині з падаючим променем і нормаллю до заломлюючої поверхні. Цей промінь називається **звичайним**. Для другого променя, який називається **незвичайним**, відношення синусів кута падіння і кута заломлення не залишається постійним при зміні кута падіння. Незвичайний промінь не лежить в одній площині з падаючим променем і нормаллю до кристала поверхні.

Приклади розв'язування задач

Задача 1

Ступень поляризації частково поляризованого світла 0,25. Знайти відношення інтенсивності поляризованої складової цього світла до інтенсивності природної складової.

Дано:

$$P = 0,25$$

$$\frac{I_{\text{нов}}}{I_{\text{пр}}} = ?$$

Розв'язування

Частково поляризоване світло можна розглядати як суму природного і лінійно поляризованого; відповідно інтенсивність такого світла представляється у вигляді суми $I_0 \leq I_{\text{пр}} \leq I_{\text{нов}}$. При пропусканні через поляризатор інтенсивність буде рівною

$$I \leq \frac{1}{2} I_{\text{пр}} \leq I_{\text{нов}} \cos^2 \alpha$$

Максимальне і мінімальне значення цієї величини

$$I_{\max} = \frac{1}{2} I_{np} + I_{нов}, \quad I_{\min} = \frac{1}{2} I_{np}.$$

За міру ступеня поляризації P беруть

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{I_{нов}}{I_{np} + I_{нов}}.$$

Використовуючи ці формули знаходимо

$$I_{np} = \frac{1}{2} (1 + P) I_0, \quad I_{нов} = P I_0, \quad I = \frac{1 + P}{2} = P \cos^2 \varphi I_0.$$

Звідки

$$\frac{I_{нов}}{I_{np}} = \frac{P}{1 + P}.$$

$$\frac{I_{нов}}{I_{np}} = 0,3.$$

Відповідь: відношення інтенсивності поляризованої складової світла до інтенсивності природної складової 0,3.

Задача 2

Частково лінійно поляризоване світло аналізують за допомогою Ніколя. При обертанні Ніколя на кут 40° від положення мінімальної яскравості інтенсивність зростає у 3 рази. Визначити ступінь поляризації.

Дано:

$$\varphi = 40^\circ$$

$$n = 3 \text{ рази}$$

$$P = ?$$

Розв'язування

Частково лінійно поляризоване світло складається з природного і лінійно поляризованого. Позначимо їх інтенсивність I_1 і I_2 .

Очевидно, мінімальна освітленість відповідає випадкові, коли лінійно поляризоване світло повністю гаситься,

$$I_{\min} = \frac{1}{2} I_1, \tag{1}$$

бо при будь-якому положенні головної площини аналізатора він пропускає половину інтенсивності природного світла. Повертання аналізатора на кут φ від положення мінімальної інтенсивності

відповідало б обертанню аналізатора на кут 90° від положення максимальної інтенсивності, яка спостерігалась, після обертання, тоді

$$I' = \frac{1}{2} I_1 + I_2 \cos^2(90^\circ) \quad (2)$$

За умовою задачі

$$I' = nI_{\min},$$

$$\frac{1}{2} I_1 + \frac{1}{2} I_1 + I_2 \sin^2 \alpha \quad (3)$$

Звідси можемо знайти співвідношення між I_1 і I_2

$$I_2 = \frac{\frac{1}{2} n + \frac{1}{2}}{\sin^2 \alpha} I_1 \quad (4)$$

Максимальна інтенсивність буде при $\alpha = 90^\circ$

$$I_{\max} = \frac{1}{2} I_1 + I_2$$

Скориставшись виразом (4) виразимо $I_{\max}$ через I_1 ,

$$I_{\max} = \frac{1}{2} I_1 + \frac{n + 1}{\sin^2 \alpha} I_1 = \frac{n + 1 + \sin^2 \alpha}{2 \sin^2 \alpha} I_1$$

Тепер визначимо значення P , згідно формули:

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

Скорочуючи на $\frac{1}{2} I_1$, матимемо

$$P = \frac{\frac{n + 1 + \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} - 1}{\frac{n + 1 + \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + 1} = \frac{n + 1}{n + 1 + 2 \sin^2 \alpha}$$

$$P = \frac{3 - 1}{3 - 1 + 2 \sin^2 40^\circ} = 0,71$$

Відповідь: ступінь поляризації світла 0,71.

Задача 3

У скільки разів зміниться інтенсивність природного світла після проходження через поляризатор і аналізатор, головні площини яких утворюють між собою кут 30° ?

Дано:

$$\alpha = 30^\circ$$

$$\frac{I_0}{I_2} = ?$$

Розв'язування

Нехай початкова інтенсивність природного світла буде I_0 . Після проходження через поляризатор вона зменшиться в 2 рази, оскільки всі напрямки поляризації у природному світлі представлені однаково і, отже, половина інтенсивності припадає на напрям, перпендикулярний головній площині. Позначимо інтенсивність світла після проходження через поляризатор буквою I_1 .

Тоді

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0$$

Після проходження через аналізатор інтенсивність світла I_2 визначається за формулою

$$I_2 = I_1 \cos^2 \alpha;$$

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 \alpha$$

Звідки

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{2}{\cos^2 \alpha}$$

$$\frac{I_0}{I_2} = 2,6$$

Відповідь: у 2,6 рази зміниться інтенсивність природного світла після проходження через поляризатор і аналізатор.

Задача 4

Два поляроїди розміщені під кутом, а третій розміщується між ними так, щоб його оптична вісь складала кут α з оптичною віссю першого поляроїда. Яка інтенсивність світла, що пройде через таку систему (втрати світла знехтувати)?

Дано:

$$I_3 = ?$$

Розв'язування

Якщо початковий пучок світла не поляризований, то при початковій інтенсивності I_0 інтенсивність після проходження послідовних поляроїдів буде:

– після першого

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0; \quad (1)$$

– після другого

$$I_2 = I_1 \cos^2 \alpha = \frac{I_0}{2} \cos^2 \alpha; \quad (2)$$

– після третього

$$I_3 = I_2 \cos^2 [90^\circ - \alpha] = I_2 \sin^2 \alpha = \frac{I_0}{2} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \frac{I_0}{8} \sin^2 2\alpha \quad (3)$$

Відповідь: $I_3 = \frac{I_0}{8} \sin^2 2\alpha$.

Задача 5

Під яким кутом до горизонту повинно бути Сонце, щоб промені, відбиті від поверхні озера, були максимально поляризовані?

Дано

$$n = 1,33$$

$\alpha = ?$

Розв'язування

Відбитий промінь максимально поляризований, якщо для кута i його падіння виконується умова Брюстера

$$\operatorname{tg} i_B = n,$$

де n – відносний показник заломлення двох середовищ.

Коли Сонце буде під кутом горизонту, то

$$\alpha = \frac{\alpha}{2} = i_B.$$

Тоді

$$i_B = \arctg n = \arctg 1,33 = 53^\circ.$$

$$\alpha = 90^\circ - 53^\circ = 37^\circ.$$

Відповідь: 37° .

Задачі до теми 9

- 1 Світловий промінь падає з середовища, показник заломлення якого 1,5, на межу з іншим середовищем, що має показник заломлення 1,33. За яких умов коефіцієнт відбивання дорівнюватиме одиниці?

Відповідь: $\theta_0 = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$, де

- 2 На шляху частково поляризованого світла помістили поляризатор. При повороті поляризатора на кут 60° із положення, відповідного максимуму пропускання, інтенсивність прохідного світла зменшилась в 3 рази. Знайти степінь поляризації падаючого світла.
Відповідь: 0,8.

- 3 На поверхню скла падає пучок природного світла. Кут падіння дорівнює 45° . Знайти за допомогою формул Френеля ступінь поляризації: а) відбитого світла; б) заломленого світла.
Відповідь: 0,883; 0,044.

- 4 Визначити ступінь поляризації відбитого світла і світла, яке пройде крізь пластинку з плавленого кварцу, якщо кут падіння становить 20° . Показник заломлення кварцу прийняти рівним 1,54.
Відповідь: -0,014.

- 5 Лінійно поляризований світловий пучок падає на поляризатор, який обертається кругом осі пучка з кутовою швидкістю 21 рад/с. Знайти світлову енергію, яка проходить через поляризатор за один оберт, якщо потік енергії в падаючому пучці 4 мВт.
Відповідь: 0,6 мДж.

- 6 Пучок природного світла падає на систему із 6 поляризаторів, площа пропускання кожного із яких повернута на кут 30° відносно площини пропускання попереднього поляризатора. Яка частина світлового потоку проходить через цю систему?
Відповідь: 0,12.

- 7 Визначити показник заломлення речовини, якщо максимальна поляризація відбитого променя спостерігається при куті падіння $58^\circ,5$.
Відповідь: 1,63.

- 8 Природне світло падає під кутом Брюстера на поверхню скла. Визначити за допомогою формул Френеля: а) коефіцієнт відбивання; б) степінь поляризації заломленого світла.
Відповідь: 0,08.

- 9 Пучок природного світла падає на поверхню скляної пластини, зануреної в рідину. Відбитий від пластини пучок світла утворює кут 97° з падаючим пучком. Визначити показник заломлення рідини, якщо відбите світло максимально поляризоване.
Відповідь: 1,33.

ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

- 1 Кучерук І.М. Загальна фізика. Оптика. Квантова фізика – [Текст] : [навч. посіб. для студ. педагогічних інститутів]. / І.М.Кучерук, В.П.Дущенко. К: Вища школа, 1991. – 463 с. — ISBN 5-11-002297-6.
- 2 .Галушак М.О. Курс загальної фізики. Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка [Текст] : навч. посіб ./

- М.О. Галушак. – Івано-Франківськ. : Факел, 2000. – 447 с. – ISBN 966-7327-07-8.
- 3 Бушок Г.Ф. Курс фізики. Книга 2. Оптика. Фізика атома і атомного ядра. Молекулярна фізика і термодинаміка [Текст] / Г.Ф. Бушок, Є.Ф.Венгер – К.: Либідь, 2001. – 422 . – ISBN 966-06-0029-1.
 - 4 Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики [Текст]: учеб. пособие / В.С. Волькенштейн – М.: Наука, 1985. – 384 с.
 - 5 Мясников С.П. Пособие по физике [Текст]: [учеб. пособие для подготов. отделений вузов] / С.П. Мясников, Т.Н.Осанова.– М.: Высшая школа, 1981. – 391 с.
 - 6 Галушак М.О. Курс загальної фізики. Практичні заняття. [Текст] : навч. посіб ./ М.О. Галушак. – Івано-Франківськ.: Місто НВ, 2003. – 156 с. – ISBN 966-8090-22-8.

Додаток А

Таблиця А.1 – Приставки для позначення кратних і часткових одиниць

1 Найменування приставок	Скорочене позначення	Кратність і частковість
екса	Е	10^{18}

пета	П	10^{15}
тера	Т	10^{12}
гіга	Г	10^9
мега	М	10^6
кіло	к	10^3
гекто	г	10^2
дека	да	10^1
деци	д	10^{-1}
санти	с	10^{-2}
мілі	м	10^{-3}
мікро	мк	10^{-6}
нано	н	10^{-9}
піко	п	10^{-12}
фемто	ф	10^{-15}
атто	а	10^{-18}

Таблиця А.2 – Одиниці СІ фізичних величин

Величина	Одиниця		
	Найменування	Позначення	розмірність
Основні одиниці			
Довжина	метр	м	м
Маса	кілограм	кг	кг
Час	секунда	с	с
Сила струму	ампер	А	А
Температура	кельвін	К	К
Сила світла	кандела	Кд	Кд
Кількість речовини	моль	моль	моль
<i>Продовження додатку А</i>			
Додаткові одиниці			
Кут плоский	радіан	рад	
Кут тілесний	стерадіан	ср	
Похідні одиниці			
Площа	Квадратний метр	м ²	м ²

Об'єм	кубічний метр	м ³	м ³
Період	секунда	с	с
Частота періодичного процесу	герц	Гц	С ⁻¹ .
Густина	кілограм на кубічний метр	кг/м ³	м ⁻³ ·кг
Швидкість	метр за секунду	м/с	м·с ⁻¹
Прискорення	метр за секунду в квадраті	м/с ²	м·с ⁻²
Сила	ньютон	Н	кг·м·с ⁻²
Тиск	паскаль	Па	м ⁻¹ ·кг·с ⁻²
Робота, енергія, кількість теплоти -	джоуль	Дж	м ² ·кг·с ⁻²
Потужність	ват	Вт	м ² ·кг·с ⁻³
Електричний заряд -	кулон	Кл	с·А
Напруга, різниця потенціалів, є.р.с.	вольт	В	м ² ·кг·с ⁻³ ·А ⁻¹
Напруженість електричного поля	вольт на метр	В/м '	м·кг·с ⁻³ ·А ⁻¹
Електрична ємність	фарад	Ф	м ⁻² ·кг ⁻¹ ·с ⁻⁴ ·А ²
Опір	ом	Ом	м ² ·кг·с ⁻³ ·А ⁻²
Напруженість магнітного поля	ампер на метр	А/м	м ⁻¹ ·А
Індуктивність	генрі	Гн	м ⁻² ·кг·с ⁻² ·А ⁻²
Світловий потік	люмен	лм	кд
Освітленість	люкс	лк	м ⁻² ·кд

Таблиця А.3 – Деякі основні фізичні сталі

Назва	Позначення	Числове значення
-------	------------	------------------

Радіус Землі	R	$6,37 \cdot 10^6 \text{ м}$
Маса Землі	M	$5,97 \cdot 10^{24} \text{ кг}$
Прискорення вільного падіння	g	$9,8 \text{ м/с}^2$
Гравітаційна стала	G	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг с}^2)$
Стала Авогадро	N_A	$6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
Універсальна газова стала	R	$8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$
Стала Больцмана	k	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$
Об'єм моля при нормальних умовах	V_0	$22,41 \text{ м}^3/\text{моль}$

Таблиця А.4 – Густина деяких речовин, 10^3 кг/м^3
($p = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}$; $T = 273 \text{ К}$)

Тверді тіла

Алюміній	2,7	Мідь	8,9
Дерево	0,8	Нікель	8,8
Залізо	7,8	Свинець	11,3
Цегла	1,8	Срібло	10,5
Лід	0,9	Сталь	7,8

Продовження додатку А

Рідини

Вода:		Масло	0,9
морська	1,03	Ртуть	13,6
чиста	1	Спирт	0,79
Гас	0,8		

Гази

Водень	$0,089 \cdot 10^{-3}$	Гелій	$0,18 \cdot 10^{-3}$
Повітря	$1,29 \cdot 10^{-3}$	Кисень	$1,43 \cdot 10^{-3}$

Таблиця А.5 – Коефіцієнт лінійного розширення твердих тіл, 10^{-5} K^{-1}

Алюміній	2,40	Мідь	1,70
Залізо	1,20	Свинець	2,90
Інвар	0,15	Сталь	1,10
Латунь	1,90	Скло	0,90

Таблиця А.6 – Коефіцієнт об'ємного розширення рідин, 10^{-5} K^{-1}

Вода	1,8	Ртуть	1,8
Керосин	10,0	Сірчана кислота	5,6
Нафта	10,0	Спирт	11,0

Таблиця А.7 – Коефіцієнт заломлення

Алмаз	2,42	Лід	1,31
Вода	1,33	Скипидар	1,47
Повітря	1,00029	Спирт	1,36
Кварц	1,54	Скло	1,50

