

**Івано-Франківський національний технічний
університет нафти і газу**

Г.Д. Матеїк

ФІЗИКА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

*Рекомендовано до друку методичною радою
Івано-Франківського національного технічного
університету нафти і газу*

Протокол № 6 від 25.06.2009 р.

2009

669479

Матеїк Г.Д. Фізика. Конспект лекцій / Під ред. д-ра фіз.-мат. наук проф. М.О. Галушака. – Івано-Франківськ: Факел, 2009. – 215 с.

Конспект лекцій створений як база для самостійної роботи студентів при вивченні найбільш важливих питань курсу загальної фізики: фізика суцільного середовища; коливний і хвильовий процеси; основи геометричної та хвильової оптики. Особлива увага звернена на практичне використання фізичних явищ та процесів. Виклад матеріалу максимально конкретний, з врахуванням найновіших досягнень фізики, а також ще не розв'язаних проблем. Матеріал лекцій добре ілюстрований, підібрано контрольні запитання.

Для студентів спеціальності „Геодезія” і „Землевпорядкування та кадастр” та може бути використаний студентами інших спеціальностей вищих технічних навчальних закладів.

Рецензент: канд. фіз.-мат. наук, професор, завідувач кафедри теоретичної та експериментальної фізики Прикарпатського національного університету ім. В. Стефаника В.М. Кланічка.

ЗМІСТ

ВСТУП	6
1 МЕХАНІКА СУЦІЛЬНОГО СЕРЕДОВИЩА	7
1.1 Механічні властивості твердих тіл, рідин і газів	7
1.2 Види деформацій: пружність та повзучість. Закон Гука	12
1.3 Зв'язок вектора переміщення з тензором деформації. Застосування	17
2 АТОМНО-МОЛЕКУЛЯРНА БУДОВА РЕЧОВИНИ. ЗАКОНИ ІДЕАЛЬНОГО ГАЗУ	24
2.1 Статистичний та термодинамічний методи дослідження	24
2.2 Макроскопічні стани та параметри. Рівняння стану	25
2.3 Рівняння стану ідеального газу	26
2.4 Кінетична енергія молекул, її розподіл за ступенями вільності	33
3 СТАТИСТИЧНІ РОЗПОДІЛИ	38
3.1 Розподіл молекул газу за їхніми швидкостями	38
3.2 Середнє число зіткнень і середня довжина вільного пробігу молекул	41
3.3 Барометрична формула, розподіл Больцмана	43
4 МЕХАНІЧНІ ТА ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ КОЛИВАННЯ	48
4.1 Механічні та електромагнітні коливальні процеси та системи	48
4.2 Математичний, пружинний та фізичний маятники	48
4.3 Електричний коливальний контур	53
4.4 Диференціальні рівняння коливальних процесів ...	56
5 КОЛИВАННЯ. ДОДАВАННЯ КОЛИВАНЬ	59
5.1 Гармонічні коливання та їх характеристики. Перетворення енергії в процесі коливань	59
5.2 Додавання. Биття	63
5.3 Фігури Ліссажу	68
6 КОЛИВАННЯ. ЗАГАСАЮЧІ КОЛИВАННЯ	71
6.1 Диференціальне рівняння загасаючих коливань та його розв'язок	71
6.2 Характеристики загасання. Аперіодичні процеси ..	73
6.3 Загасаючі електромагнітні коливання	75

7	КОЛИВАННЯ. ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ	77
7.1	Диференціальне рівняння вимушених механічних коливань та його розв'язок. Амплітуда та фаза вимушених коливань	77
7.2	Резонанс механічних систем	79
7.3	Вимушені електромагнітні коливання	80
7.4	Резонанс у колі змінного струму	83
8	ХВИЛІ. ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА ХВИЛЬОВОГО ПРОЦЕСУ	86
8.1	Загальні закономірності хвильових процесів. Поздовжні та поперечні хвилі	86
8.2	Рівняння хвилі	89
8.3	Диференціальне хвильове рівняння	91
9	ПОШИРЕННЯ ХВИЛЬ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ...	93
9.1	Швидкість механічних хвиль в газах, рідинах і твердих тілах	93
9.2	Енергія хвилі	95
9.3	Звукові хвилі, їх основні характеристики. Застосування	97
10	ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ	102
10.1	Електромагнітні хвилі їх властивості	102
10.2	Диференціальне рівняння електромагнітної хвилі	104
10.3	Вектор Пойнтінга	105
10.4	Передача інформації за допомогою електромагнітних хвиль	107
11	ХВИЛІ. ДИСПЕРСІЯ	111
11.1	Дисперсія хвиль	111
11.2	Фазова і групова швидкість	114
11.3	Стоячі хвилі	117
11.4	Ефект Доплера	120
12	ГЕОМЕТРИЧНА ОПТИКА	124
12.1	Основні закони геометричної оптики	124
12.2	Оптичні прилади	127
12.3	Рефракція на різних довжинах світлових хвиль	133
13	ХВИЛЬОВА ОПТИКА. ІНТЕРФЕРЕНЦІЯ СВІТЛА	136
13.1	Інтерференція світла. Когерентність	136

13.2	Інтерференція на пластині та клині	138
13.3	Інтерферометри	143
13.4	Застосування інтерференції	146
14	ХВИЛЬОВА ОПТИКА. ДИФРАКЦІЯ СВІТЛА (ФРЕНЕЛЯ)	147
14.1	Дифракція світла. Принцип Гюйгенса-Френеля	147
14.2	Метод зон Френеля	149
14.3	Дифракція Френеля	154
15	ХВИЛЬОВА ОПТИКА. ДИФРАКЦІЯ СВІТЛА (ФРАУНГОФЕРА)	160
15.1	Дифракція Фраунгофера на щілині	160
15.2	Дифракція на дифракційній ґратці	164
15.3	Роздільна здатність оптичних приладів	168
15.4	Дифракція на кристалічній й ґратці	171
15.5	Застосування дифракції	173
16	ХВИЛЬОВА ОПТИКА. ПОЛЯРИЗАЦІЯ СВІТЛА ...	175
16.1	Природне і поляризоване світло. Закон Малюса ...	175
16.2	Поляризація світла при відбиванні. Закон Брюстера	181
16.3	Подвійне променезаломлення	183
16.4	Застосування поляризованого світла	187
17	КВАНТОВІ ГЕНЕРАТОРИ	189
17.1	Взаємодія світла з квантовими системами: поглинання, спонтанне та вимушене резонансне випромінювання	189
17.2	Квантові генератори, їхні типи та практичне застосування	197
18	ХВИЛЕВОЛОКОННІ СИСТЕМИ	203
18.1	Хвилеволоконні системи та хвилеволоконна передача інформації	203
18.2	Електромагнітне поле в середині волокна. Роль зовнішньої оболонки світловолокна	205
18.3	Волоконно-оптичні датчики фізичних величин. Застосування	210
	ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	215

ВСТУП

Фізика – наука про природу, про найбільш фундаментальні закономірності руху матерії, її будову, властивості та взаємодію. Головна мета фізики – встановити та пояснити закони, за якими відбуваються процеси та явища навколишнього світу.

Фізика необхідна студентам для подальшого успішного засвоєння обраної спеціальності.

В першу чергу фізика для студентів технічних спеціальностей має на меті формування теоретичної бази. Запорукою цьому повинна стати чіткість та глибина розуміння основних понять, законів та принципів фізики.

По-друге, знайомство з розвитком фізики у світі та Україні зокрема, з методологією розв’язання складних проблем, що виникали в історії, є невичерпним джерелом творчого підходу до вирішення суто технічних проблем. Класичні приклади використання аналогій, застосування моделювання фізичних процесів, створення ідеальних моделей та абстракцій навчають умінню виявляти головне в кожній проблемі, що виникатиме в повсякденній роботі.

По-третє, фізика – експериментальна наука з широко розвинутою системою методів наукових досліджень.

Насамкінець, фізика несе і виховну роль, підкреслюючи значення людського фактора в освоєнні природи та у посяганні на її таємниці.

У запропонованих конспектах лекцій з курсу загальної фізики розглянуто питання, що стосуються фізики пружного середовища, характеристики коливного і хвильового процесів, властивостей світлових хвиль.

Акцентована увага на використанні фізичних явищ для потреб практики.

Кожна лекція завершується низкою запитань для самоконтролю засвоєння матеріалу.

1 МЕХАНІКА СУЦІЛЬНОГО СЕРЕДОВИЩА

1.1 Механічні властивості твердих тіл, рідин і газів

Тверді тіла – найбільш поширені на Землі та за її межами. Наука, яка займається вивченням природи твердих тіл, їх внутрішньої будови та властивостей а також різних їх перетворень, називається **фізикою твердого тіла**, яка є складовою частиною молекулярної фізики.

Найпростішими властивостями твердих тіл, які відрізняються від газів, є сталість форми і об'єму.

Тверді тіла в природі можна поділити на дві групи, які відрізняються своїми властивостями. Першу групу утворюють **кристалічні**, другу – **аморфні** тіла. В природі аморфні тіла зустрічаються значно рідше ніж кристалічні.

Для кристалічних тіл характерний **далекий порядок**, тобто правильна повторювальність положень вузлів кристалічної ґратки на будь-яких відстанях у кристалі.

Кристалічною ґраткою називається просторова сітка, вузли якої збігаються з центрами атомів чи молекул у кристалі.

Серед кристалічних тіл розрізняють монокристали і полікристали. Монокристали твердих тіл можуть утворюватися в умовах вільного росту, тобто тоді коли немає близького сусідства інших тіл (умови росту кристала однакові на всіх його поверхнях). Вирощені таким чином кристали завжди набирають форми багатогранника, обмеженого певним числом плоских граней, які перетинаються вздовж ребер, що в свою чергу перетинаються у точках – вершинах.

Наприклад, кристали кухонної солі NaCl мають кубічну форму, а кристали кварцу є шестигранними призмами, що завершуються шестигранними пірамідами.

Істотними особливостями зовнішньої форми кристалів є наявність плоских граней, прямолінійність ребер і сталість кутів між відповідними гранями та ребрами для кристалів певної речовини. У кристалів кухонної солі кути між гранями завжди дорівнюють 90° (закон сталості кутів вперше сформулював датський лікар Стенон 1638-1687). Вдаривши молотком по кубу кухонної солі ми розіб'ємо його на дрібні шматочки, які мають вигляд кубиків.

Більшість твердих тіл – це **полікристали**, тобто такі кристали які складаються з великої кількості монокристалів малого розміру (дрібних монокристалів). Кожний з дрібних монокристалів анізотропний (**анізотропія** – залежність ряду фізичних властивостей, таких як швидкість поширення світла, теплопровідність, модуль пружності тощо, від напрямку), але оскільки кристалики орієнтовані хаотично, то в цілому полікристалічне тіло ізотропне (тіла, властивості яких однакові в усіх напрямках, називають **ізотропними**).

Характерною особливістю аморфних тіл є **ближній порядок** розміщення елементів структури, тобто певне узгодження розміщення в просторі сусідніх, близько розміщених частинок. (Якщо розглядати деякий атом аморфного тіла як центральний, то найближчі до нього атоми розміщуватимуться в певному порядку, але з віддаленням від центрального атома цей порядок порушується і розміщення атомів може бути різним, тобто випадковим.) Саме нерегулярність у будові аморфних тіл призводить до того, що розрив зв'язків у них відбувається не при одній температурі, як це спостерігається у кристалах. Тому аморфні тіла не мають певної температури плавлення, а поступово при нагріванні переходять у рідкий стан. Ближнім порядком аморфні тіла подібні до рідин і відмінні від кристалів, в яких крім ближнього порядку є також і дальній порядок.

Аморфні тіла є ізотропними, тобто їх фізичні властивості в усіх напрямках однакові.

Аморфні тіла бувають природного походження (смоли, бурштин (янтар) і штучного (скло, рідкі полімери).

Полімери – це аморфні тіла, які складаються з дуже великих лінійних або розгалужених молекул (макромолекул). Кожний елемент макромолекули, що повторюється, називається **мономером**. Він є групою атомів, що може існувати як самостійна молекула. Процес утворення полімерів з мономерів називається **полімеризацією молекул**.

Зауважимо, що поділ твердих тіл тільки на дві групи (кристалічні і аморфні) є недостатнім. Про це свідчить, наприклад, факт існування рідких кристалів.

Одноєю з найбільших характерних ознак кристалів є симетрія, яка виявляється в їхній формі, структурі та властивостях. Під **симетрією кристалічної ґратки** розуміють її властивість суміщатися з собою при деяких просторових переміщеннях, наприклад, паралельних переносах, поворотах, відбиттях або їх комбінаціях. За крис-

талографічними ознаками кристали поділяють на 7 сингоній. Сингонія визначається геометричною фігурою яку утворюють вузли молекулярної структури.

Кристалічним ґраткам, як довів математично видатний кристалограф Є.С. Федоров, відповідають 230 просторових груп (комбінацій елементів симетрії). У симетричних фігур можливі такі елементи симетрії: площина симетрії, вісь симетрії, вісь інверсії. Просторові групи розділені по 32 видах (класах) симетрії. **Вид симетрії** – це сукупність елементів симетрії кристалічного багатогранника як скінченої фігури, що визначають його симетрію. Ці 32 види симетрії можна об'єднати в окремі системи або сингонії. **Сингонією** називається група видів симетрії, в яку входять кристали з подібними елементарними комірками (ґратками Браве). Число ґраток Браве строго обмежене і дорівнює 14, вони поділяються на 7 кристалічних сингоній. Їхні назви:

триклінна ($a \neq b \neq c, \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90^\circ$);

моноклінна ($a \neq b \neq c, \alpha = \gamma = 90^\circ \neq \beta$);

ромбічна ($a \neq b \neq c, \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$);

ромбоєдрична ($a = b = c, \alpha = \beta = \gamma \neq 90^\circ$);

тетрагональна ($a = b \neq c, \alpha = \beta = \gamma \neq 90^\circ$);

гексагональна ($a = b \neq c, \alpha = \beta = 90^\circ, \gamma = 120^\circ$);

кубічна ($a = b = c, \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$).

Другою найбільш важливою ознакою кристалів є фізична ознака (природа частинок, розміщених у вузлах кристалічної ґратки, і характер сил взаємодії між ними). Залежно від неї кристали поділяються на чотири типи: йонні, атомні, металічні і молекулярні.

В **йонних кристалах** правильно чергуються в розміщенні позитивні і негативні йони. Сили взаємодії між йонами – електростатичні (кулонівські). Зв'язок, зумовлений кулонівськими силами притягання між різнойменними зарядженими йонами, називається йонним (гетерополярним). Він досить сильний і становить величину порядку 10^8 Дж/кмоль. Міцність йонного зв'язку проявляється в тому, що йонні кристали мають високу температуру плавлення, малий коефіцієнт теплового розширення, незначну теплопровідність. Для них характерним є сильне поглинання в інфрачервоній області спектра. Типовими кристалами з йонним зв'язком є більшість галогенідних сполук лужних металів (NaCl та ін.), а також оксиди різних елементів (MgO, CaO та ін.).

Атомні кристали. У вузлах кристалічної ґратки таких кристалів розміщені нейтральні атоми, які утримуються у вузлах ковалентними зв'язками квантово-механічного походження (у сусідніх атомів колективізовані валентні електрони). Цей зв'язок можна пояснити тільки з позицій квантової механіки. Він здійснюється електронними парами, причому від кожного атома бере участь тільки по одному електрону. Число зв'язків, в яких може брати участь атом, визначається його валентністю. Типовими представниками кристалів з ковалентним зв'язком є алмаз, графіт, йод, сірка, карбонід, сульфід цинку тощо. До них належать і напівпровідники. Характерною рисою ковалентного зв'язку є його напрямленість, а розподіл густини заряду навколо кожного з ядер атомів відрізняється від сферично-симетричного розподілу, який мають йонні кристали. Ковалентний зв'язок суттєво відрізняється від йонного тим, що число електронів, які беруть участь в ковалентному зв'язку, у кожного атома, обмежене, а тому цей зв'язок є насичений. Для типового ковалентного кристалу алмазу кожен атом утворює чотири ковалентні зв'язки, віддаючи для усупільнення кожному з них один із своїх валентних електронів і одержуючи другий електрон від сусіднього атома. Структура алмазу – тетраедрична. Основу ковалентного зв'язку становить обмінний ефект, зумовлений обміном електронів між атомами, який має квантову природу. Він може здійснюватися однією, двома або трьома парами електронів. Ковалентний зв'язок дуже сильний (енергія зв'язку 3-5 еВ на один атом), завдяки чому ковалентні кристали мають високу щільність і твердість, високу температуру плавлення, погану електропровідність в широкому інтервалі температур.

Металічні кристали. У вузлах кристалічної ґратки розміщуються позитивні йони металу. В просторі між ними рухаються колективізовані валентні електрони, які відокремлюються від атомів внаслідок слабкого зв'язку з ними при утворенні кристалічної ґратки. Металічний зв'язок є взаємодією позитивних йонів з усупільненими валентними електронами. Притягаючись до позитивних йонів, вільні електрони відіграють роль «цементу», що фіксує позитивні йони на певних відстанях відповідно до рівноваги і мінімуму потенціальної енергії системи. Енергія металічного зв'язку значно менша ніж у йонних і ковалентних кристалів. Тому порівняно з ними вони мають більш низьку температуру плавлення. Метали, внаслідок високої концентрації вільних електронів, характеризуються

доброю електро- та теплопровідністю. Оскільки металічний зв'язок не має напрямленої дії і позитивні йони ґратки однакові за своїми властивостями, то метали мають симетрію високого порядку. Більшість металів мають кубічну ґранецентровану (мідь, срібло, золото) і кубічну об'ємно центровану (натрій, цезій, калій, літій) ґратки.

Молекулярні кристали. У вузлах молекулярних кристалів розміщуються нейтральні молекули, сили взаємодії між якими зумовлені незначним зміщенням електронів в електронних оболонках атомів. Силами зв'язку в цьому випадку є сили Ван-дер-Ваальса. Переважно більшість молекулярних кристалів – це органічні кристали, які за фізичними властивостями є ізоляторами, прозорі для широкого інтервалу електромагнітних хвиль, мають низьку температуру плавлення. До них належать парафін, спирт, гума, інертні гази, а також вуглекислий газ, кисень, азот у твердому стані та ін.

В деяких твердих тілах одночасно можуть існувати різні типи зв'язку. Наприклад, у графіті одночасно діють три типи зв'язку: ковалентний і металевий в межах одного шару, а між шарами діють сили Ван-дер-Ваальса.

На сьогоднішній день одержано багато відомостей про кристалічну будову речовин за допомогою різних науково-технічних методів (рентгеноструктурного аналізу, електронної мікроскопії), які розкривають широкі можливості для раціонального використання, розробки і освоєння нових матеріалів з наперед заданими властивостями.

За своїми властивостями рідини схожі як на гази, так і на тверді тіла. Так, наприклад, подібно до газів рідини набувають форми тієї посудини, в якій вони перебувають. З другого боку, подібно до твердих тіл рідини мало стискаються, тобто мають певний власний об'єм. Вони мають порівняно велику густину і так само, як і тверді тіла, здатні чинити опір не тільки стисканню, але й розтягуванню.

Двоїстий характер властивостей рідин пов'язаний з особливостями руху їх молекул. У газах молекули рухаються зовсім хаотично, в їх розташуванні немає будь-якого порядку. Навпаки, в кристалічних твердих тілах частинки коливаються навколо певних положень рівноваги, які називають вузлами кристалічної ґратки.

Молекули рідини, подібно до частинок твердого тіла, здійснюють коливання навколо деяких положень рівноваги. На відміну від твердих тіл, ці положення рівноваги кожної молекули не є сталими.

Рідини можуть без розриву витримувати дуже великі зусилля на розтягування, якщо останні зводяться до всестороннього від'ємного тиску, що виключає можливість течії рідини.

Наближення рідин за їхніми властивостями до реальних газів в області високих температур і великих питомих об'ємів проявляється, наприклад, у тому, що при підвищенні температури зменшується коефіцієнт поверхневого натягу рідини і питома теплота пароутворення, а також зближаються значення густин киплячої рідини і сухої насиченої пари.

Більш глибокий аналіз деяких властивостей рідких і твердих тіл приводить до висновку, що відмінність між ними не така вже велика. Дослід показує, що кристалічні тіла мають текучість, хоч і дуже малу. Текучість твердих тіл виявляється в пластичній деформації, що виникає під дією сколюючих зусиль. У свою чергу, рідини мають деяку пружність на зсув, яка звичайно маскується великою текучістю. Так, у процесі тверднення скла текучість останнього не зникає раптово, а поступово зменшується. При цьому все більшу роль починають відігравати пружні властивості, які характерні для твердого тіла. Отже, текучість і пружність не є властивостями, які взаємно виключають одна одну. В різних станах речовини вони лише в більшій або меншій мірі маскують одна одну. Рентгеноструктурний аналіз рідин показав, що при температурах близьких до температури кристалізації, розміщення частинок у рідинах не є цілком безладним (таким як у газах), а виявляється подібним до того правильного розміщення, яке властиве рідинам, що кристалізувалися.

Багато фізичних властивостей рідин мало чим відрізняється від фізичних властивостей твердих тіл. Так, наприклад, при плавленні твердих тіл відносно збільшення об'єму дуже мале (порядку 10%). Отже, середні відстані між частинками речовини в процесі плавлення майже не змінюються в той час як при випаровуванні вони змінюються в десятки разів.

1.2 Види деформацій: пружність та повзучість.

Закон Гука

У природі немає абсолютно твердих тіл, оскільки всі реальні тіла під дією прикладених сил змінюють свою форму і об'єм, тобто

деформуються. Під час деформації тіла під впливом зовнішніх сил його частинки зміщуються з початкових положень рівноваги в інші положення. Цим переміщенням протидіють сили взаємодії (внутрішні сили) між частинками. Якщо зсув частинок був не дуже великий, то після припинення дії зовнішніх сил вони під впливом внутрішніх сил повертаються в початкові положення. Таку деформацію називають **пружною**. **Пластичними** називають деформації, які повністю або частково зберігаються в тілі після припинення дії зовнішніх сил. Вид деформації залежить не тільки від природи тіла, а й від величини прикладених сил. При тривалій дії навіть малих зовнішніх сил пружна деформація може перейти в пластичну (при тривалому навантаженні відбувається перебудова кристалічної ґратки твердого тіла).

Всі види деформацій (розтяг і стиск, зсув, згин, кручення) можуть бути зведені до деформацій розтягу (стиску) і зсуву.

Розглянемо однорідний стержень довжиною l_0 і площею поперечного перерізу S , до кінця якого прикладемо вздовж осі сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ ($|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = F$) внаслідок чого довжина стержня зміниться на $\Delta l = l - l_0$ (рис. 1.1).

Величину Δl називають **абсолютною деформацією** розтягу (для стиску величина $\Delta l < 0$). Оскільки величина Δl не вказує, яку частину становить зміна довжини стержня від початкової довжини l_0 , то вона не може характеризувати його деформованість. Мірою деформації є **відносна деформація**, яка дорівнює відношенню абсолютної деформації до початкових розмірів тіла:

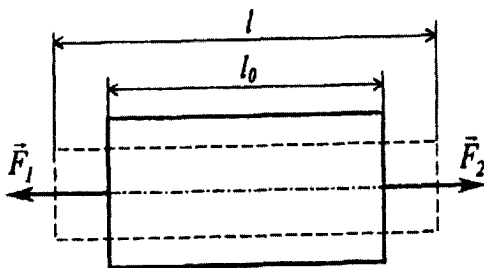


Рисунок 1.1 – Деформація розтягу

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} . \quad (1.1)$$

За допомогою дослідів англійський фізик Р. Гук встановив, що для малих деформацій

$$\sigma = k\varepsilon , \quad (1.2)$$

де k – коефіцієнт пружності; σ – механічна напруга.

При пружній деформації величина зовнішніх сил F , що діють на тіло, зрівноважується результуючою внутрішніх пружних сил $F_{\text{пр}}$, що виникають у тілі у будь-якому його перерізі. Напруга дорівнює відношенню результуючої пружних сил до площі перерізу тіла, тобто

$$\varepsilon = \frac{F_{\text{пр}}}{S} . \quad (1.3)$$

Для деформації розтягу (стиску) закон Гука (1.2) запишемо у такому вигляді:

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{\Delta l}{l_0} , \quad (1.4)$$

де коефіцієнт пропорційності E називається **модулем Юнга**. З (1.4) видно, що E визначається напругою, яка спричиняє відносне видовження, що дорівнює одиниці.

При деформаціях розтягу (стиску) відбувається зміна поперечних розмірів тіл, яка характеризується відносним поперечним стиском (розтягом)

$$\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d_0} , \quad (1.5)$$

де Δd – абсолютна зміна поперечних розмірів тіла, d_0 – поперечні розміри тіла до деформації.

Із дослідів випливає взаємозв'язок між ε та ε' :

$$\varepsilon' = \mu\varepsilon ,$$

де μ – коефіцієнт Пуассона, який залежить тільки від властивостей матеріалу. Для багатьох металів $\mu = 0,25$.

Розглянемо деформацію зсуву. **Зсувом** називають таку деформацію твердого тіла, при якій усі його плоскі шари, паралельні де-

якій площині, що називається площиною зсуву, зміщуються паралельно один одному, не змінюючись за розмірами і формою. Візьmemo куб з однорідної речовини, нижню грань якого закріплено нерухомо (рис. 1.2). Під час дії дотичної сили $\vec{F}_\tau$ на верхню грань відбувається деформація зсуву і квадрат ABCD перетворюється в ромб AB'C'D. Для малого зсуву:

$$\gamma \approx \operatorname{tg} \gamma = \frac{BB'}{BA}, \quad (1.6)$$

де γ – кут зсуву (відносний зсув), виміряний у радіанах. Якщо сила $\vec{F}_\tau$ рівномірно розподілена по площі верхньої грані, то у будь-якому

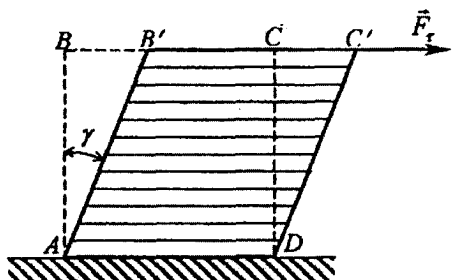


Рисунок 1.2 – Деформація зсуву

перерізі, паралельному до цієї грані, виникають "сколюючі" напру- ги

$$\sigma_\tau = \frac{F_\tau}{S}, \quad (1.7)$$

де S – площа верхньої грані. За законом Гука, відносний зсув про- порційний дотичній напрузі, тобто

$$\sigma = G\gamma, \quad (1.8)$$

де G – коефіцієнт пропорційності, який називають **модулем зсуву**. **Модуль зсуву** дорівнює дотичній напрузі, яка виникла б у зразку при відносному зсуві, що дорівнює одиниці. Деформації розтягу і зсуву належать до однорідних деформацій (коли всі елементи тіла деформовані однаково).

Деформації твердих тіл описуються законом Гука до певної межі. Коли деформації перевищують деяку граничну величину, яка для різних речовин неоднакова, то властивості тіл значно відрізняються від властивостей абсолютно пружних тіл.

Пружні властивості тіл вивчають за так званою **діаграмою напруг** або **діаграмою розтягу** (рис. 1.3). З цієї діаграми для металічного стержня видно, що закон Гука виконується у вузьких

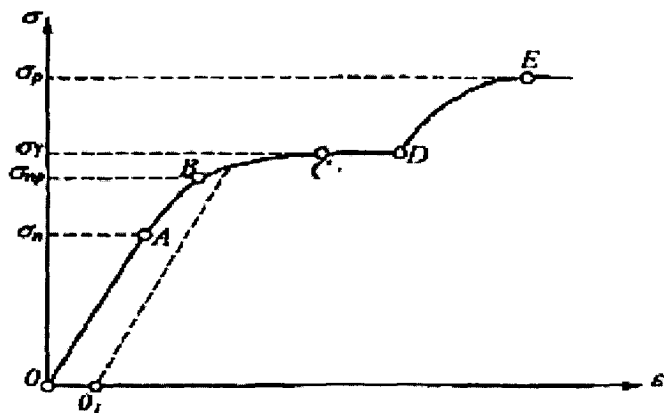


Рисунок 1.3 – Діаграма розтягу

межах зміни напруг і деформацій. Верхню межу напруги, при якій ще виконується лінійна залежність між σ і ϵ називають **межею пропорційності** σ_p . При збільшенні напруги до $\sigma_{пр}$ (від точки A до точки B) деформація має ще пружний характер, але залежність між σ і ϵ є нелінійна. Граничну напругу, при якій ще не виникає залишкова деформація, називають **межею пружності** $\sigma_{пр}$. За межею пружності в тілі виникають залишкові деформації, які зберігаються і після припинення дії зовнішніх сил. Напруга, при якій виявляється помітна залишкова деформація ($\approx 0,2\%$), називається **межею текучості** σ_τ – точка C на кривій. В області CD деформація зростає без збільшення напруги, тобто тіло "тече". Дану область називають областю текучості або пластичних деформацій. Матеріали, для яких відсутня область текучості, називають крихкими (скло, фарфор, цегла та ін.), а матеріали з великою областю текучості – в'язкими. При дальшому розтягуванні тіла за точку D воно знову чинить опір деформації.

Максимальну напругу σ_p , що виникає в тілі перед руйнуванням, називають **межею міцності** – точка Е на кривій.

Якщо при першому деформуванні тіла напруга була більша за межу пружності, то після припинення дії зовнішніх сил тіло повернеться в стан O' . Якщо повторно деформувати тіло, то межа його пружності збільшиться. Таке явище називається **наклепом**. Явище наклепу застосовують в техніці для підвищення твердості тіл. Пружність і пластичність тіл залежать від різних факторів: тиску, температури, часу дії зовнішньої сили, способів обробки тощо. Знання властивостей матеріалів дає можливість правильно їх вибрати при конструюванні різних деталей машин.

Для повнішої характеристики пружних властивостей матеріалів, крім модуля пружності, треба знати границю пружності й границю міцності (таблиця 1.1).

Таблиця 1.1 Пружні властивості твердих тіл

Матеріал	Модуль Юнга, $\times 10^{10} \text{ Н/м}^2$	Границя пружності, $\times 10^7 \text{ Н/м}^2$	Границя міцності, $\times 10^7 \text{ Н/м}^2$
Свинець	1,8	0,25	2
Мідь	10	3	20
Сталь вуг- лецева	20	33	75
Сталь мо- лібденова	22	60	150

1.3 Зв'язок вектора переміщення з тензором деформації. Застосування

Розглянемо випадок, коли напруження в тілі є однорідними і всі частини тіла перебувають у стані статичної рівноваги. Виділимо в такому тілі одиничний куб з ребрами, паралельними до осей координат (рис. 1.4). Тоді через кожну грань куба в його внутрішню частину передаватимуться напруження, що діють з боку зовнішніх частин куба. Ці напруження можна розкласти на три компоненти. Позначимо через σ_{ij} компоненту, яка діє в напрямі осі Ox_i на грань куба, що є перпендикулярною до осі Ox_j . У таких позначеннях ком-

поненти напруження для трьох передніх граней куба записують у вигляді, показаному на рис. 1.4. Вказані на рисунку напрямки компонент σ_{ij} відповідають додатним напрямкам. Для інших трьох граней напруження, що діють на них, є рівні за величиною та протилежні за напрямком. Компоненти σ_{ii} називають **нормальними**, оскільки вони приводять до розтягу куба вздовж осі Ox_i , а компоненти σ_{ij} – **зсувними**.

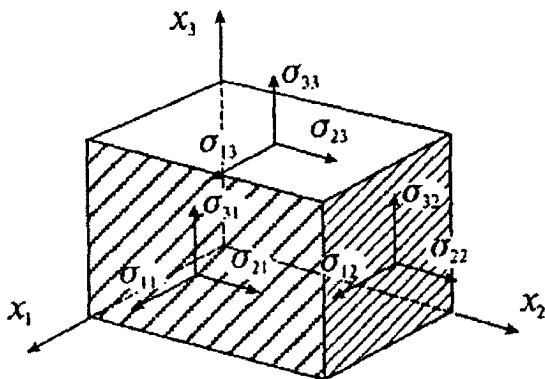


Рисунок 1.4 – Визначення компоненти напружень σ_{ij} на гранях одиничного куба

Величини σ_{ij} утворюють тензор II рангу, який називають **тензором напруження**. Для встановлення взаємозв'язку між компонентами тензора σ_{ij} , розглянемо, наприклад, компоненти σ_{ij} які діють у площині x_2x_3 (рис. 1.5). Оскільки деформоване тіло перебуває в стані статичної рівноваги, то для зсувних компонент можна записати $\sigma_{23} = \sigma_{32}$, а в загальному випадку $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. З цього випливає, що тензор σ_{ij} є симетричним, а отже, його можна привести до головних осей:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{11} \end{vmatrix}, \quad (1.9)$$

де σ_{ii} – головні напруження.

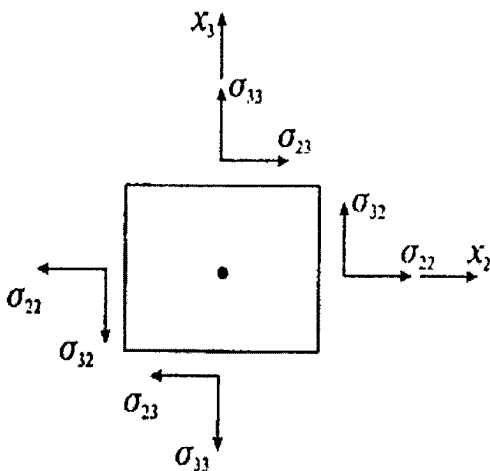


Рисунок 1.5 – Взаємозв'язок компонент напружень σ_{ij} у площині x_2x_3 .

Якщо головні напруження є рівними між собою, тобто $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -p$, то тензор напружень записують у вигляді:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}, \text{ або } \sigma_{ij} = \begin{vmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{vmatrix}, \quad (1.10)$$

і він описує всебічний розтяг (або стиск, наприклад гідростатичний).

Для двох найпростіших розглянутих вище видів деформацій – однобічного стиску (розтягу) уздовж осі Ox_3 та простого зсуву в площині x_2x_3 тензори деформацій записують, відповідно у вигляді:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{vmatrix} \text{ та } \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ 0 & \sigma_{32} & 0 \end{vmatrix}.$$

Розглянемо довільну точку P в суцільному середовищі з координатами x_i , та радіус-вектором $\vec{r}$ (рис. 1.6). Усі точки тіла, яке деформується, зміщуються так, що вибрана точка після деформації

займатиме положення P' і характеризуватиметься координатами x' та радіус-вектором $\vec{r}'$. Зміщення точки P тіла при деформуванні можна зобразити вектором $\vec{\epsilon}' = \vec{r}' - \vec{r}$, компоненти якого будуть рівні: $\epsilon'_i = x'_i - x_i$.

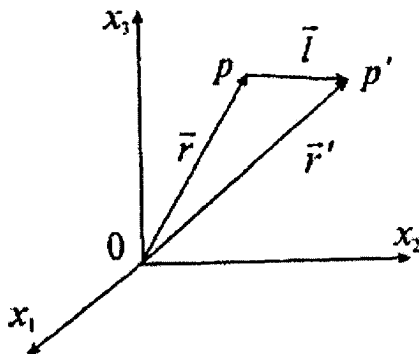


Рисунок 1.6 – До визначення тензора деформації

Вектор ϵ називають **вектором деформації** і він повністю визначає деформацію тіла.

У процесі деформування тіла змінюються відстані між його точками. Розглянемо дві довільні точки, розміщені нескінченно близько одна від одної в околі точки P . Якщо компоненти радіус-вектора між цими точками до деформації були рівними dx_i , то в деформованому тілі компоненти радіус-вектора між цими ж точками, згідно з рис. 1.6, будуть рівними:

$$dx'_i = dx_i + d\epsilon_i.$$

Відстань між точками до деформації рівна:

$$dl = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2},$$

а після деформації – $dl' = \sqrt{dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2}$.

Згідно з загальним правилом написання сум, останні вирази можна записати у вигляді:

$$dl^2 = dx_i^2; (dl')^2 = (dx'_i)^2 = (dx_i + d\epsilon_i)^2. \quad (1.11)$$

Оскільки $d\epsilon_i = \frac{\partial \epsilon_i}{\partial x_k} dx_k$, то вираз для $(dl')^2$ запишемо у вигляді

ці

$$\begin{aligned} (dl')^2 &= dx_i^2 + d\epsilon_i^2 + 2dx_i d\epsilon_i = \\ &= dl^2 + 2 \frac{\partial \epsilon_i}{\partial x_k} dx_i dx_k + \frac{\partial \epsilon_i}{\partial x_k} \frac{\partial \epsilon_i}{\partial x_l} dx_k dx_l. \end{aligned} \quad (1.12)$$

У другому члені підсумування проводять по обох індексах i та k , тому

$$\frac{\partial \epsilon_i}{\partial x_k} dx_i dx_k = \frac{\partial \epsilon_k}{\partial x_i} dx_i dx_k. \quad (1.13)$$

У третьому члені індекси i та k можна поміняти місцями. З урахуванням цього вираз для $(dl')^2$ запишемо у вигляді:

$$(dl')^2 = dl^2 + 2\partial \epsilon_{ik} dx_i dx_k,$$

де

$$\epsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \epsilon_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \epsilon_k}{\partial x_i} + \frac{\partial \epsilon_l}{\partial x_i} \frac{\partial \epsilon_l}{\partial x_k} \right]. \quad (1.14)$$

Величину ϵ_{ik} називають **тензором деформації**. З його визначення видно, що він є симетричним: $\epsilon_{ik} = \epsilon_{ki}$.

Відомо, що у практично важливих випадках деформації є невеликими. Тому у виразі для ϵ_{ik} можна не враховувати член

$\frac{\partial \epsilon_l}{\partial x_i} \frac{\partial \epsilon_l}{\partial x_k}$ як величину 2-го порядку малості. У цьому випадку тензор деформації записують у вигляді:

$$\epsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \epsilon_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \epsilon_k}{\partial x_i} \right]. \quad (1.16)$$

Тензор деформації ϵ_{ik} як довільний симетричний тензор, можна привести до головних осей. Це означає, що в кожній точці тіла можна вибрати таку систему координат (головні осі тензора), в якій із всіх компонент ϵ_{ik} відмінними від нуля будуть тільки діагональні компоненти ϵ_{ii} :

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{vmatrix}. \quad (1.17)$$

Якщо тензор деформації в даній точці приведений до головних осей, то в околі цієї точки елемент довжини $(dl')^2$ має вигляд:

$$(dl')^2 = (1 + 2\varepsilon_{11})dx_1^2 + (1 + 2\varepsilon_{22})dx_2^2 + (1 + 2\varepsilon_{33})dx_3^2. \quad (1.18)$$

З цього рівняння видно, що вираз для $(dl')^2$ розпадається на три незалежні члени. Це означає, що в кожному об'ємі тіла деформацію можна розглядати як сукупність трьох незалежних деформацій вздовж трьох взаємно перпендикулярних напрямів - головних осей деформації, причому кожна з розглянутих деформацій являє собою простий розтяг (стиск) уздовж відповідного напрямку.

Візьмемо довільний об'єм $dV = dx_1 dx_2 dx_3$ та визначимо його величину $dV' = dx'_1 dx'_2 dx'_3$ після деформації тіла. Якщо тензор ε_{ik} приведений до головних осей, то

$$dV' = dV / (1 + \varepsilon_{11})(1 + \varepsilon_{22})(1 + \varepsilon_{33}). \quad (8.18)$$

Нехтуючи величинами вищих порядків малості, з останнього виразу знаходимо:

$$dV' = dV / (1 + \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})$$

або

$$\frac{dV' - dV}{dV} = \varepsilon_{ij}. \quad (1.19)$$

З останнього виразу випливає, що сума діагональних компонентів тензора деформації рівна відносній зміні об'єму деформованого тіла.

Контрольні запитання

- 1 Які особливості будови твердих кристалів?
- 2 Чим відрізняються монокристали від полікристалів?

- 3 Які є типи твердих кристалічних тіл?
- 4 Які особливості будови твердих аморфних тіл?
- 5 Які є типи взаємодії між частинками у твердих тілах.
- 6 Вкажіть на характерні властивості рідин.
- 7 Сформулюйте і запишіть закон Гука.
- 8 Опишіть деформації розтягу та дайте означення величин, що їх характеризують.
- 9 Накресліть і поясніть діаграму розтягу для металічного стержня.
- 10 Дайте визначення тензора деформації.
- 11 Який зв'язок існує між компонентами тензора деформації і зміни об'єму?

2 АТОМНО-МОЛЕКУЛЯРНА БУДОВА РЕЧОВИНИ. ЗАКОНИ ІДЕАЛЬНОГО ГАЗУ

2.1 Статистичний та термодинамічний методи дослідження

Молекулярна фізика вивчає фізичні властивості речовини, зумовлені її молекулярною будовою, характером руху молекул і силами, що діють між ними. Тому вона нерозривно пов'язана з теорією будови речовини. В основі молекулярної фізики лежить підтверджена дослідним шляхом молекулярно-кінетична теорія будови речовини. Згідно з цією теорією всі тіла складаються із величезної кількості найдрібніших частинок – молекул і атомів, які перебувають у безперервному хаотичному (тепловому) русі і які взаємодіють одна з одною.

Її основоположником є М.В. Ломоносов, який сформулював основні положення цієї теорії і застосував її для пояснення різних явищ. Розвинута Ломоносовим молекулярно-кінетична теорія міцно утвердилася в науці тільки в середині XIX ст. завдяки працям Р. Клаузіуса, Д. Джоуля, пізніше Д. Максвелла, Л. Больцмана та ін.

Безпосереднім дослідним підтвердженням справедливості молекулярно-кінетичної теорії є: броунівський рух, процес дифузії та багато інших явищ. Сучасна наука має в своєму арсеналі засоби, що підтверджують реальність атомів і молекул. Наприклад, американські фізики Рітц і Бартел з допомогою електронного мікроскопа дістали фотографії окремих атомів (неону, аргону) при збільшенні в 500 мільйонів разів.

У механіці при вивченні рухів тіл не розглядаються питання будови та властивостей цих тіл. Знаючи їх координати і швидкості у деякий момент часу, можна знайти положення і швидкості тіл у наступні моменти часу. Такий динамічний метод зовсім непридатний для опису системи, що складається з величезної сукупності структурних одиниць. Це зумовлено не тільки технічною складністю, а й відсутністю теоретичного і практичного значення, оскільки величезне скупчення молекул має нові якості, які не має жодна молекула окремо. Ці якості можна описати, якщо при дослідженні фі-

чних властивостей речовини користуватися статистичним та термодинамічним методами дослідження.

Статистичний метод є мікроскопічний. У ньому безпосередньо розглядається молекулярна будова тіл і закономірності зумовлених нею мікроскопічних процесів. Він ґрунтується на широкому вжитку законів математичної статистики і теорії ймовірностей, оскільки розглядувані при цьому закономірності стосуються величезної кількості частинок (молекул, атомів). Статистика оперує середніми значеннями тих фізичних величин які характеризують поведінку і властивості кожної молекули.

В молекулярній фізиці користуються середніми значеннями не тому, що ми не можемо стежити за рухом окремих молекул, а тому що у спільному русі величезного числа молекул проявляються нові властивості, які підлягають новим, а саме статистичним законам.

Поряд із статистичним методом для вивчення фізичних явищ застосовується **термодинамічний метод**. Він є суто макроскопічним методом. Внутрішній механізм досліджуваних процесів він зовсім не розглядає, тому відпадає потреба в знанні мікроскопічної будови тіл. **Термодинаміка** вивчає умови перетворення енергії з одного виду в інший і характеризує їх з кількісного боку. В її основі лежать два експериментально встановлені закони (начала), а також принцип недосяжності абсолютного нуля (третє начало термодинаміки). З допомогою цих законів можна дістати багато відомостей про властивості тіл в різних умовах.

Статистичний та термодинамічний методи дослідження доповнюють один одного. Сучасна фізика розвивається на основі тісного поєднання обох методів.

2.2 Макроскопічні стани та параметри.

Рівняння стану

Сукупність властивостей речовини визначає її стан. Є три стани речовини: твердий, рідкий і газоподібний, які називають агрегатними станами або відповідно твердою, рідкою і газоподібною фазами. Відомим прикладом цього є три стани води: лід, вода і водяна пара. Зауважимо, поняття "фаза" є більш широке, ніж поняття "агрегатний стан". У межах одного агрегатного стану речовина може перебувати у кількох фазах, що відрізняються за своїми властивос-

тями, будовою і складом (наприклад, лід зустрічається у п'яти різних модифікаціях – фазах).

Сукупність розглядуваних тіл, що обмінюються енергією як між собою, так і з іншими (зовнішніми) тілами, називається **термодинамічною системою**. Стан системи визначається **термодинамічними параметрами** – сукупністю значень усіх фізичних величин, що характеризують її фізичні властивості. До них належать такі фізичні величини як об'єм, густина, тиск, температура, концентрація та ін. Два стани вважаються різними, якщо для них неоднакові значення хоча б одного з термодинамічних параметрів.

Між найважливішими параметрами стану системи – тиском p , об'ємом V і температурою T – існує зв'язок, що називається **рівнянням стану**:

$$f(p, V, T) = 0. \quad (2.1)$$

Кожна система (газ, рідина чи тверде тіло) характеризується своїм рівнянням стану. В одних випадках (наприклад, з розрідженим газом) – рівняння стану просте, а в інших (наприклад, з водою) – дуже складне.

Знаючи рівняння стану речовини і використовуючи закони термодинаміки, можна вивчати властивості речовин у різних агрегатних станах.

Перехід системи з одного стану в інший через деяку послідовність проміжних станів називають **процесом**.

Стан термодинамічної системи називається **стаціонарним**, якщо всі термодинамічні параметри з часом не змінюються. Стаціонарний стан системи називають **рівноважним** (стан термодинамічної рівноваги), якщо його незмінність у часі не зумовлена протіканням яких-небудь процесів у зовнішніх відносно системи тілах.

Нерівноважні стани – це стани системи, в яких відсутня рівновага. Нерівноважні стани виникають при різкій зміні зовнішніх умов (при цьому різні частини об'єму системи мають різні параметри).

2.3 Рівняння стану ідеального газу

Один з агрегатних станів речовини – газоподібний. Основні закономірності, які мають місце в реальному газі (при дуже низьких температурах і досить малих тисках за своїми властивостями

дизькі до ідеальних газів), вивчають на його моделі – ідеальному ізі.

Ідеальний газ – це газ, молекули якого приймають за матеріальні точки; між молекулами не має сили взаємодії; удари між молекулами абсолютно пружні. Реальні гази при кімнатних температурах і малих тисках мало відрізняються від ідеальних газів.

Газові закони було відкрито дослідним шляхом задовго до вивчення молекулярно-кінетичної теорії.

Закон Бойля-Маріотта: для даної маси газу при незмінній температурі добуток тиску газу на його об'єм є величина стала:

$$pV = \text{const при } T = \text{const, } m = \text{const.} \quad (2.2)$$

Процес зміни стану системи при сталій температурі називають **ізотермічним**.

Графічно залежність тиску газу від об'єму при незмінній температурі зображають кривими лініями, які називають **ізотермами** (рис. 2.1). Різним температурам відповідають різні ізотерми. Згідно законом Бойля-Маріотта, ізотерма газу виражає обернено пропорційну залежність між тиском і об'ємом.

Досліди показали, що реальні гази підлягають цьому закону тим точніше, чим менша їх густина.

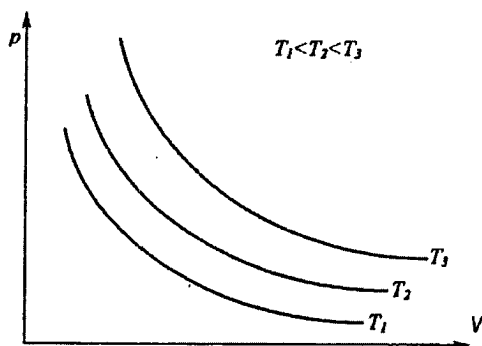


Рисунок 2.1 – Ізотерми на P-V – діаграмі

Гей-Люссак (французський вчений) встановив два закони для ідеального газу.

Закони Гей-Люссака:

а) об'єм даної маси газу при сталому тиску змінюється лінійно із температурою:

$$V = V_0(1 + \alpha_v t) \text{ при } p = \text{const}, m = \text{const}; \quad (2.3)$$

б) тиск даної маси газу при сталому об'ємі змінюється лінійно із температурою:

$$P = P_0(1 + \alpha_p t) \text{ при } V = \text{const}, m = \text{const}. \quad (2.4)$$

В рівняннях (2.3) і (2.4) t – температура по шкалі Цельсія; V_0 – об'єм і тиск при 0°C ; α_v і α_p – термічні коефіцієнти об'ємного розширення і тиску газу. Досліди показали, що для газів значення термічних коефіцієнтів α_v і α_p дуже близькі між собою. Для розрідженого газу, який можна розглядати як ідеальний $\alpha_p = \alpha_v = \alpha = 1/273,15\text{K} = 0,00367\text{K}^{-1}$.

Процес зміни стану газу при сталому тиску називають **ізobarичним**. Графічно залежність об'єму газу від температури при сталому тиску зображують прямими лініями – **ізобарами** (рис. 2.2).

Процес зміни стану газу при сталому об'ємі називають **ізохоричним**. Графічно залежність тиску газу від температури при сталому об'ємі зображують прямими лініями, які називаються **ізохорами** (рис. 2.3)

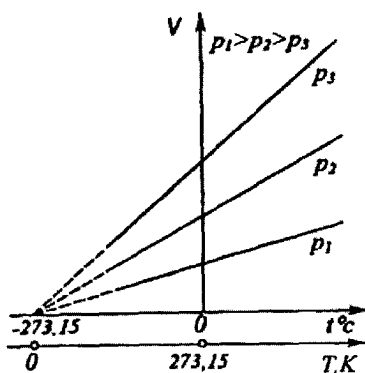


Рис. 2.2 – Ізобари на V-T діаграмі

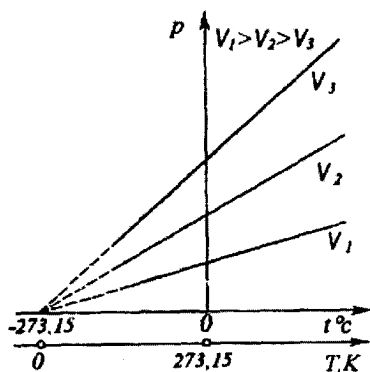


Рис. 2.3 – Ізохори на P-T діаграмі

Усі ізобари та ізохори перетинають вісь температури в точці, яка має значення $t = -273,15^{\circ}\text{C}$ (визначають із умови $1 + \alpha t = 0$). Якщо пістити початок відліку в цю точку, то відбувається перехід до шкали Кельвіна (Міжнародна практична температурна шкала) (рис. 2.3).

Одиницею вимірювання температури в цій шкалі є Кельвін (K), який дорівнює градусу Цельсія:

$$1 \text{ K} = 1^{\circ}\text{C}.$$

Температура, виміряна за шкалою Кельвіна, дуже близька до термодинамічної температури (різниця між ними перебуває у межах сучасної точності вимірювань).

Нуль температури за шкалою Кельвіна називається **абсолютним нулем температури**, а температуру відраховану по цій шкалі називають **абсолютною температурою**. Між нею і температурою за Цельсієм справедливе співвідношення:

$$T = t + 273,15 \text{ або } T = t + 1/\alpha. \quad (2.5)$$

Замінивши у рівняннях (2.3) і (2.4) температуру абсолютною, закони Гей-Люссака можна записати у зручнішому вигляді:

$$V = V_0 [1 + \alpha (T - 1/\alpha)] = V_0 \alpha T, \quad (2.6)$$

$$p = p_0 [1 + \alpha (T - 1/\alpha)] = p_0 \alpha T \quad (2.7)$$

бо для двох довільних станів газу

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2} \text{ при } p = \text{const}, m = \text{const}, \quad (2.8)$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2} \text{ при } V = \text{const}, m = \text{const}. \quad (2.9)$$

Закони Гей-Люссака досить точні при не дуже низьких температурах і для досить розріджених газів, коли між молекулами відстані в середньому набагато більші від лінійних розмірів молекул.

Закон Дальтона: тиск суміші газів p дорівнює сумі парціальних тисків газів $p_1, p_2, \dots, p_n$, які утворюють суміш:

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_n = \sum_{i=1}^n p_i. \quad (2.10)$$

Парціальним тиском називається тиск, який мав би газ, коли б він один заповнював весь об'єм.

Закон Дальтона (2.10) добре справджується для досить розджених газів (досліди показують, що для тисків порядку десятків атмосфер відбуваються значні відхилення від закону Дальтона).

Закон Авогадро: молі різних газів за однакових умов (однакові тиски і температури) займають однакові об'єми. При нормальних умовах цей об'єм дорівнює $22,41 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{моль}$.

Маси молекул дуже малі. Тому зручно користуватися не абсолютними їхніми значеннями, а відносними. За означенням **молекулярною масою речовини називають відношення маси молекул даної речовини (m_0) до $1/12$ маси атома вуглецю (m).**

Кількість грамів (або кілограмів) речовини, яка чисельно дорівнює її молекулярній масі, називають **грам-молекулою** або **молекулою** (відповідно кіломолекулою), і позначають літерою μ :

$$\mu = \frac{m_0}{1/12 m} . \quad (2.11)$$

З означення моля випливає, що число молекул у молі будь-якої речовини таке саме. Це число називають **числом Авогадро N_A** . Справді, число молекул у молі

$$N_A = \mu / m_0 .$$

Використовуючи означення μ (2.11), дістанемо

$$N_A = \frac{m_0}{1/12 m m_0} = \frac{12}{m} . \quad (2.12)$$

Вимірювання дають для маси атома вуглецю $m = 1,995 \cdot 10^{-26} \text{ кг}$. Звідси згідно з (2.12)

$$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1} .$$

Число молекул у кіломолі дорівнює $6,02 \cdot 10^{26} \text{ кмоль}^{-1}$. Є й інші методи визначення числа Авогадро, але всі вони дають такий самий результат.

Закони Бойля-Маріотта і Гей-Люссака добре відображають властивості одного й того самого газу, а саме – ідеального. Використовуючи газові закони, можна дістати рівняння стану ідеального газу, тобто рівняння, яке зв'язує всі три параметри p , V і T , що характеризують стан даної маси m газу.

Нехай у початковому стані 1 якась маса газу m має тиск p об'єм V_1 і температуру T_1 . Потім газ переходить у кінцевий стан 2.

ли тиск, об'єм і температура матимуть значення p_2, V_2, T_2 . Який зв'язок між цими трьома параметрами у початковому і кінцевому станах?

Переведемо газ із стану 1 у стан 2 за два прийоми. Спочатку при сталому тиску p_1 змінимо температуру газу до температури T_2 . Об'єм його при цьому дорівнюватиме якійсь величині V' . Графічно цей ізобаричний перехід зобразиться прямою 1-1' (рис. 2.4).

Потім ізотермічно при температурі T_2 переведемо газ у кінцевий стан з тиском p_2 і об'ємом V_2 . Графічно це зобразиться частиною гіперболи 1' – 2 (рис. 2.4). Згідно з законом Гей-Люссака (2.8)

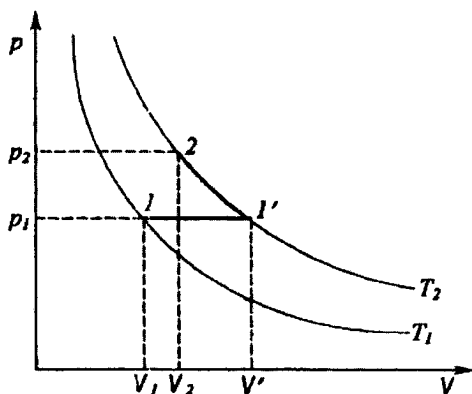


Рисунок 2.4 – Перехід між двома станами на P-V-діаграмі за допомогою ізопроцесів

$$\frac{V_1}{V'} = \frac{T_1}{T_2}. \quad (2.13)$$

Застосовуючи закон Бойля-Маріотта (2.2) для ізотермічного процесу, матимемо

$$p_1 V' = p_2 V_2. \quad (2.14)$$

Знайдемо з рівняння (2.13) V' :

$$V' = V_1 \frac{T_2}{T_1}. \quad (2.15)$$

Підставивши (2.15) у рівняння (2.14), дістанемо

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \text{ при } m = \text{const.} \quad (2.16)$$

Оскільки початковий 1 і кінцевий 2 стани газу взято довільно то добуток тиску даної маси газу на об'єм, поділений на абсолютну температуру є величина стала, що не залежить від стану, в якому перебуває газ:

$$\frac{pV}{T} = B = \text{const.} \quad (2.17)$$

Рівняння (2.17) називається **рівнянням Клапейрона** і є однією з форм запису **рівняння стану ідеального газу**. В цьому рівнянні B – газова стала, різна для різних газів.

Використовуючи закон Авогадро, можна подати залежність сталої B в рівнянні (2.17) від кількості газу.

Візьмемо спочатку один моль газу і позначимо його об'єм V . За нормальних умов об'єм моля будь-якого газу $V_\mu = 22,41 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{моль}$.

Для моля газу згідно з (2.17) дістанемо

$$\frac{pV_\mu}{T} = \frac{p_0 V_{0\mu}}{T_0} = 8,31 \text{ Дж} \cdot \text{моль}^{-1} \text{К}^{-1}. \quad (2.18)$$

Таким чином, для одного моля газу добуток тиску на об'єм, поділений на абсолютну температуру, для всіх газів є величина стала, яку називають **універсальною газовою сталою** і позначають буквою R .

Як впливає з рівняння (2.18), для одного моля газу

$$pV_\mu = RT. \quad (2.19)$$

Така форма рівняння Клапейрона була вперше записана Д.І. Менделєєвим.

Якщо маса газу дорівнює не одному молю, а якомусь числу моль $\nu = m/\mu$, то при тих самих тиску і температурі, що й для одного моля, об'єм

$$V = \nu V_\mu = \frac{m}{\mu} V_\mu.$$

Помноживши рівняння (2.18) на $\frac{m}{\mu}$, дістанемо найзагальнішу форму рівняння стану ідеальною газу:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT. \quad (2.20)$$

Рівняння (2.20) називають **рівнянням Клапейрона-Менделєєва**.

Часто користуються іншою формулою рівняння стану ідеального газу, вводячи сталу Больцмана:

$$k = \frac{R}{N_A} = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}.$$

Згідно з рівнянням (2.19)

$$p = \frac{RT}{V_\mu} = \frac{kN_A T}{V_\mu} = nkT, \quad (2.21)$$

де $\frac{N_A}{V_\mu} = n$ – концентрація (число молекул в одиниці об'єму).

Із рівняння (2.21) випливає, що тиск ідеального газу при даній температурі прямо пропорційний концентрації його молекул. Заважимо, що рівняння стану ідеального газу Клапейрона-Менделєєва можна використовувати і для реальних газів, які за своїми властивостями наближаються до ідеального газу (досить малий тиск і не дуже низька температура).

2.4 Кінетична енергія молекул, її розподіл за ступенями вільності

Повна енергія тіла складається із кінетичної енергії руху тіла як цілого E_k , з його потенціальної енергії в зовнішньому полі сил E_Π і внутрішньої енергії тіла U :

$$E = E_k + E_\Pi + U. \quad (2.22)$$

Під **внутрішньою енергією** тіла розуміють кінетичну енергію хаотичного (теплого) руху його частинок та їх взаємну потенціальну енергію. Залежно від характеру руху і взаємодії частинок, з

яких складається тіло, внутрішня енергія визначається: кінетичною енергією поступального та обертального руху молекул як цілого; потенціальною енергією взаємодії молекул; кінетичною та потенціальною енергією коливального руху атомів у молекулах; внутрішньоатомною та внутрішньоядерною енергіями. У багатьох фізичних явищах, які розглядаються в молекулярній фізиці, внутрішньоатомна і внутрішньоядерна енергії не змінюються і тому їх часто не враховують. Поняття внутрішньої енергії вперше ввів Клаузіус.

В ідеальному газі молекули не взаємодіють одна з одною на відстані, і його внутрішня енергія визначається тільки кінетичною енергією хаотичного руху його молекул.

Середня кінетична енергія поступального руху молекули дорівнює $3/2 kT$. Помноживши дану величину на сталу Авогадро, отримаємо значення внутрішньої енергії одного моля ідеального газу:

$$U_{\mu} = E_k N_A = \frac{3}{2} k T N_A = \frac{3}{2} R T. \quad (2.21)$$

Внутрішня енергії довільної маси m ідеального газу буде рівна внутрішній енергії одного моля, помноженій на число молів газу, що міститься в масі m :

$$U = \frac{m}{\mu} U_{\mu} = \frac{m}{\mu} \frac{3}{2} R T. \quad (2.22)$$

Отже, внутрішня енергія даної маси ідеального газу залежить тільки від його температури. Нагадаємо, що **числом ступенів вільності i тіла** називається найменше число незалежних координат, що визначають положення тіла в просторі. Це число збігається з числом можливих переміщень. Для вільної матеріальної точки число ступенів вільності дорівнює трьом (три ступеня вільності поступального руху), для вільного твердого тіла $i = 6$ (по три ступеня вільності поступального та обертального рухів).

В ідеальному газі молекули беруть за матеріальні точки. Тоді кінетичну енергію молекули ідеального газу можна подати сумою

енергій $\frac{mv_x^2}{2} + \frac{mv_y^2}{2} + \frac{mv_z^2}{2}$, які відповідають трьом складовим швидкості її відносно трьох координатних осей. Звичайно, в різні моменти молекул мають різні значення складових енергій відносно координатних осей. Але через хаотичність руху молекул усі напрямки

у однаково ймовірні, тому середні значення кінетичної енергії всіх трьох напрямів однакові:

$$\frac{\overline{mv_x^2}}{2} = \frac{\overline{mv_y^2}}{2} = \frac{\overline{mv_z^2}}{2}.$$

Оскільки середня кінетична енергія поступального руху молекул $\frac{\overline{mv^2}}{2} = \frac{3}{2}kT$, то на долю кожної з складових руху на один ступінь вільності припадає однакова середня кінетична енергія $1/2kT$.

Л. Больцман на основі законів статистики і припущення про універсальність законів механіки Ньютона до молекул узагальнив цю закономірність у законі рівномірного розподілу енергії за ступенями вільності: у рівноважній системі, що складається з великої кількості частинок (молекул), кінетична енергія розподіляється в середньому порівну між різними ступенями вільності руху частинок; на один ступінь вільності при температурі T у середньому припадає енергія, що дорівнює $1/2kT$.

У випадку "жорстких" молекул змінюється відстань між атомами тобто наявні коливальні рухи. На основі закону про рівномірний розподіл енергії за ступенями вільності знайдемо, що на один ступінь вільності коливального руху припадає енергія, що дорівнює kT , а не $1/2kT$, бо в середньому на потенціальну енергію гармонічних коливань припадає стільки ($1/2kT$), скільки й на кінетичну енергію ($1/2kT$).

Молекула двохатомного газу в першому наближенні являє собою два жорстко зв'язаних атоми, які розміщені на певній відстані один від одного (своєрідна гімнастична гантель). Для неї $i = 5$ (три ступені вільності поступального та два ступені обертального рухів). Тобто, її середня кінетична енергія

$$\overline{E_k} = 3 \cdot \frac{1}{2}kT + 2 \cdot \frac{1}{2}kT = \frac{5}{2}kT. \quad (2.25)$$

Система із трьох жорстко зв'язаних між собою матеріальних точок, що не лежать на одній прямій, має шість ступенів вільності: три поступальні і три обертальні. Шість ступенів вільності мають і молекули, що складаються з більш як трьох атомів; їхня кінетична енергія

$$\overline{E_k} = 3 \cdot \frac{1}{2} kT + 3 \cdot \frac{1}{2} kT = 3kT. \quad (2.1)$$

Модель молекули, що являє собою систему жорстко зв'язан матеріальних точок, годиться тільки тоді, коли не враховувати енергію коливань атомів у молекулі. Для врахування цієї енергії необхідно перейти до іншої моделі молекули, в якій атоми зв'язані пружним зв'язком, наприклад, пружиною.

Заміна жорсткого зв'язку на пружний у системі з двох матеріальних точок породжує в такій системі шостий ступінь вільності який відповідає їх коливальному руху.

Враховуючи все це, вираз для середньої енергії молекули можна записати так:

$$\overline{E_k} = \frac{i}{2} kT,$$

де i – сума числа поступальних, числа обертальних і подвоєної числа коливальних ступенів вільності молекули, тобто

$$i = i_{\text{пост}} + i_{\text{оберт}} + 2i_{\text{колив}}. \quad (2.2)$$

Тепер внутрішня енергія для довільної маси ідеального газу

$$U = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} RT. \quad (2.2)$$

При обчисленні внутрішньої енергії реальних газів необхідно ще враховувати і взаємну потенціальну енергію молекул, зумовлену силами міжмолекулярної взаємодії.

Контрольні запитання

- 1 Що є предметом молекулярної фізики?
- 2 Які ви знаєте методи дослідження фізичних властивостей речовини, у чому їх зміст і відмінність?
- 3 Що називається термодинамічною системою?
- 4 Чим визначається стан термодинамічної системи? Які термодинамічні параметри вам відомі?
- 5 Що називається рівнянням стану системи?
- 6 Який газ називають ідеальним?

- 7 Сформулюйте закони ідеального газу.
- 8 Зобразіть процеси на діаграмах P - V , P - T , V - T .
- 9 Запишіть рівняння стану для: а) одного моля ідеального газу, б) будь-якої маси ідеального газу.
- 10 Дайте визначення внутрішньої енергії.
- 11 Як розумієте ступінь вільності системи.
- 12 Визначити число ступенів вільності: а) двоатомної молекули із жорстким зв'язком, б) двоатомної молекули із нежорстким зв'язком, в) трьохатомної молекули із жорстким зв'язком.
- 13 Визначити внутрішню енергію одного моля ідеального газу.

3 СТАТИСТИЧНІ РОЗПОДІЛИ

3.1 Розподіл молекул газу за їхніми швидкостями

Молекулярний рух має хаотичний характер. Це означає, що всі напрями руху рівноймовірні та що швидкості молекул можуть бути довільними: від дуже малих до досить великих. Але хоч як би змінювались швидкості молекул, середня квадратична швидкість залишається сталою, якщо не змінюється температура (рівноважний стан). Це означає, що в результаті зіткнень встановлюється деякий стаціонарний розподіл молекул за швидкостями. Цей розподіл стосується не до кожної даної молекули, а до всієї сукупності молекул, тобто він є статистичним.

Питання про розподіл молекул можна поставити так: яка частина молекул dn з усіх молекул n в одиниці об'єму має швидкості, що лежать у деякому інтервалі від v до $v+dv$. Величина dn/n повинна залежати не тільки від величини швидкості v .

Математично дану задачу можна записати так:

$$\frac{dn}{n} = f(v) dv. \quad (3.1)$$

Функція $f(v)$ називається **функцією розподілу**. Вона визначає відносне число молекул dn/n , швидкості яких перебувають в одиничному інтервалі швидкостей поблизу значення швидкості v . Очевидно, що $f(v)$ є ймовірністю того, що довільна молекула в одиниці об'єму має швидкість в одиничному інтервалі швидкостей поблизу v .

Такий розподіл вперше теоретично дістав Максвелл 1859 році, тому його називають **максвеллівським розподілом молекул за швидкостями** або **законом Максвелла** і він має такий вигляд:

$$\frac{dn}{n} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv, \quad (3.2)$$

де m – маса молекули; k – стала Больцмана; T – абсолютна температура.

Закон Максвелла – це перший приклад статистичного закону в фізиці. Максвелл усвідомив, що випадковий рух окремих молекул упорядкований певним статистичним законом.

Проаналізуємо закон Максвелла на графіку (рис. 3.1).

Функція розподілу $f(v) = 0$ при $v = 0$ і прямує до нуля при $v \rightarrow \infty$. Це означає, що в газі немає молекул, які б не рухалися, а також ймовірність знайти молекулу з дуже великими швидкостями близька до нуля.

Крива розподілу швидкостей асиметрична - круто піднімається з боку малих значень v , досягає максимуму при $v = v_{\text{ім}}$ і повільно спадає в бік більших значень v . З формули (3.2) можна визначити найбільш ймовірну швидкість $v_{\text{ім}}$, використавши для цього умову максимуму для виразу dn/n :

$$\left[\frac{d}{dv} \left(e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 \right) \right]_{v=v_{\text{ім}}} = 0.$$

Відаючи

$$v_{\text{ім}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}. \quad (3.3)$$

Таким чином, найбільш ймовірна швидкість молекул залежить тільки від температури газу та його молекулярної маси.

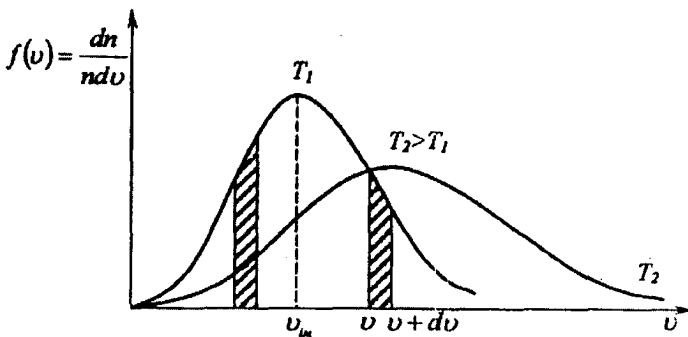


Рисунок 3.1 – Криві закону розподілу Максвелла молекул за швидкостями при різних температурах

Користуючись кривою Максвелла, можна графічно визначи **відносне число молекул** dn/n , швидкості яких перебувають у певному інтервалі dv (від v до $v + dv$). На рисунку 3.1 ці числа зображені площами заштрихованих криволінійних трапецій. Вся площ обмежена кривою розподілу і віссю абсцис, чисельно дорівнює частині молекул, швидкості яких мають різні значення від 0 до ∞ . Оскільки цю умову задовольняють всі n молекул, дістанемо сумарне відносне число молекул, тобто одиницю. Для різних температур T_1 і T_2 криві розподілу молекул за швидкостями мають різні вигляди (рис. 3.1). Із підвищенням температури газу максимум кривої зміщується в бік більших швидкостей, а крива розподілу стає більш пологою. Все це вказує на те, що при нагріванні газу розподіл стає більш рівномірним, а також збільшується число молекул швидкості яких перевищують $v_{\text{ім}}$, і зменшується число молекул малими швидкостями.

Закон Максвелла дає змогу обчислити середню швидкість молекули (**середня арифметична швидкість**) $\bar{v}$. Згідно з означення

$$\bar{v} = \frac{1}{n} \sum_i v_i \text{ або } \bar{v} = \int_0^{\infty} v dn = \int_0^{\infty} v f(v) dv \quad (3.)$$

Підставивши вираз для dn з (3.2) в (3.4) і інтегруючи його, дістанемо

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} \quad (3.)$$

Аналогічно обчислюємо і **середню квадратичну швидкість** $\bar{v}_{\text{кв}}$:

$$\bar{v}_{\text{кв}}^2 = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} v^2 dn, \bar{v}_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} \quad (3.6)$$

Порівнюючи (3.6), (3.5) і (3.3), маємо

$$\bar{v}_{\text{кв}} : \bar{v} : v_{\text{ім}} \approx 1,2 : 1,1 : 1. \quad (3.7)$$

У законі Максвелла (3.2) функція розподілу залежить від температури та природи газу. Через те для кожного газу і кожної температури треба побудувати окрему криву Максвелла. Проте закон Максвелла можна звести до такого вигляду, що одна крива буд.

датна для будь-яких температур і різних газів. Для цього випадку формула Максвелла така:

$$\frac{dn}{n du} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2, \quad (3.8)$$

$u = v/v_{\text{ім}}$ – відносна швидкість (v – задана швидкість молеку-

Така (3.8) форма запису закону розподілу Максвелла є досить чною для розв'язування різних практичних задач.

3.2 Середнє число зіткнень і середня довжина вільного пробігу молекули

Теорія і експерименти показують, що швидкості молекул дуже шккі. При звичайних температурах вони становлять сотні метрів секунду. Проте макроскопічні відстані, які проходять окремі молекули, дуже малі. Річ у тому, що в реальних умовах молекули газу рухаються не прямолінійно, а зигзагоподібно внаслідок численних зіткнень між собою. Через велике число молекул їх "ламаний" шлях нагадує з прямолінійних відрізків різної довжини. Тому слід говорити про середню довжину вільного пробігу молекул $\bar{l}$ і середнє число зіткнень за одиницю часу $\bar{z}$.

Середня відстань, яку проходить молекула між двома послідовними зіткненнями, називається **середньою довжиною вільного пробігу молекули**.

За одиницю часу молекула в середньому проходить відстань, яка чисельно дорівнює середній швидкості $\bar{v}$. Якщо за цей час вона в середньому зазнає $\bar{z}$ зіткнень з іншими молекулами, то її середня довжина вільного пробігу, очевидно, буде

$$\bar{l} = \frac{\bar{v}}{\bar{z}}. \quad (3.9)$$

Припустимо, що всі молекули перебувають у спокої, крім однієї, яка рухається із швидкістю $\bar{v}$. Нехай молекула буде у вигляді кулі з діаметром, який дорівнює ефективному діаметру σ молекули σ – мінімальна відстань, на яку можуть зблизитися центри двох молекул). Дана молекула зазнає зіткнень з усіма нерухомими моле-

кулами, центри яких лежать у межах ламаного циліндра діаметром 2σ (центр рухомої молекули внаслідок зіткнень рухається по ламаній лінії – рис. 3.2; пунктир).

За одиницю часу молекула пройде шлях, що дорівнює $\bar{V}$. Цей час відбудеться число зіткнень, яке дорівнює числу молекул, що містяться в ламаному циліндрі з площею основи $\pi\sigma^2$ і висотою $\bar{V}$ (рис. 3.2). Об'єм такого "випрямленого" циліндра $\pi\sigma^2\bar{V}$. Помноживши об'єм циліндра на число молекул в одиниці об'єму n , дістанемо середнє число зіткнень за одиницю часу рухомої молекули нерухомими:

$$\bar{Z} = \pi\sigma^2\bar{V}n. \quad (3.1)$$

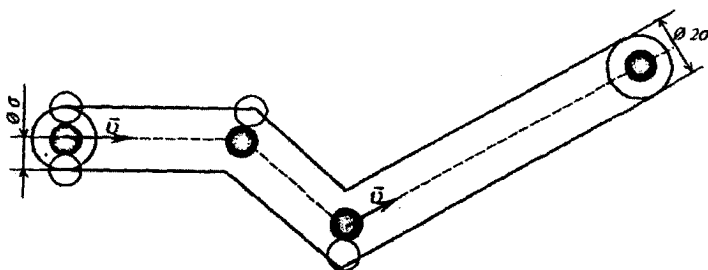


Рисунок 3.2 – Траєкторія руху виділеної частинки за умови нерухомих інших

Насправді всі інші молекули також рухаються. Тому число зіткнень визначається не середньою швидкістю молекул, а середньою відносною швидкістю.

Щоб знайти цю швидкість, припустимо, що до зіткнення молекули мали швидкості $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$. Тоді відносна швидкість руху першої молекули відносно другої $\vec{v}_B = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$.

З трикутника швидкостей (рис. 3.3) маємо

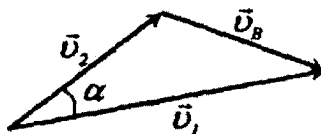


Рисунок 3.3 – Трикутник швидкостей

$$v_B^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos \alpha.$$

Оскільки середнє значення суми декількох величин повинно івнювати сумі середніх значень цих величин, то

$$\overline{v_B^2} = \overline{v_1^2} + \overline{v_2^2} - 2\overline{v_1v_2 \cos \alpha}. \quad (3.11)$$

Середнє значення квадратів величин швидкостей всіх молекул акове: $\overline{v_1^2} = \overline{v_2^2} = \overline{v^2}$. Оскільки всі напрями руху молекул рівно-ірні, то кут α між векторами $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$ після кожного зіткнення екул може набувати значень як менших, так і більших за $\pi/2$. реднє значення $\cos \alpha$ буде дорівнювати нулю, тобто $\overline{\cos \alpha} = 0$. Рі-ння (3.11) можна подати у вигляді

$$\overline{v_B} = \sqrt{2}\overline{v}. \quad (3.12)$$

Тобто **середня відносна швидкість руху молекул в $\sqrt{2}$ ра-більша від середньої абсолютної швидкості $\overline{v}$ молекул**. Тому врахуванні руху всіх молекул середнє число зіткнень, що за-молекула за одиницю часу, буде

$$\overline{z} = \sqrt{2}\pi\sigma^2 n\overline{v}. \quad (3.13)$$

Підставивши $\overline{z}$ з рівняння (3.13) в (3.9), дістанемо вираз для редньої довжини вільного пробігу молекули:

$$\overline{l} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n}. \quad (3.14)$$

3.3 Барометрична формула, розподіл Больцмана

При виведенні основного рівняння молекулярно-кінетичної рії газів і закону Максвелла ми вважали, що на молекули газу не ють зовнішні сили. Тому молекули рівномірно розподілені в пев-му об'ємі. Як розподіляються молекули в полі земного тяжіння?

У газі, який міститься у полі земного тяжіння, також існу жулярний хаос, але області, що перебувають на різних

нерівноправні. Це проявляється в тому, що молекули мають потенціальну енергію

$$U = mgh, \quad (3.1)$$

яка залежить від висоти h над рівнем землі, який ми беремо за початковий і на якому $U = 0$.

Виділимо вертикальний стовп повітря з площею основи, і дорівнює одиниці (рис. 3.4).

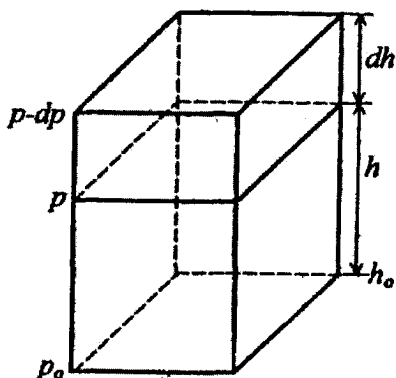


Рисунок 3.4 – Розподіл тиску у стовпі газу

Нехай на деякій висоті h тиск газу дорівнює p . З підняттям і висоту dh тиск відповідно зменшиться на dp . Оскільки в тонкому шарі dh густину повітря можна вважати сталою, то

$$dp = -\rho g dh. \quad (3.1)$$

Але $\rho = mn$, де m – маса молекули, а n – число молекул в одиниці об'єму (концентрація). З основного рівняння кінетичної теорії газів $p = nkT$.

Тоді

$$dp = -\frac{mg}{kT} p dh. \quad (3.1)$$

Розділивши в (3.17) змінні, дістанемо

$$\frac{dp}{p} = -\frac{mg}{kT} dh. \quad (3.18)$$

Вважаючи $T = \text{const}$ та інтегруючи (3.18) в межах від h_0 до h і до p , маємо

$$p = p_0 e^{-\frac{mg(h-h_0)}{kT}}. \quad (3.19)$$

Врахувавши, що $m = \frac{\mu}{N_A}$, дістанемо

$$p = p_0 e^{-\frac{\mu g(h-h_0)}{RT}}. \quad (3.20)$$

Формула (3.20) дає змогу визначити висоту $(h - h_0)$ за допомогою барометра, тому її називають **барометричною формулою**. Барометр, спеціально проградуваний для безпосереднього відліку тиску над рівнем моря, називають альтиметром. Його широко використовують при сходженні на гори, в авіації тощо.

Барометрична формула показує, що з висотою тиск експоненційно спадає і тим швидше, чим більша молекулярна маса газу нижча температура. З формули (3.20) також видно, що зменшення тиску залежить від прискорення вільного падіння. Отже, на їх планетах молекули атмосфери повинні по-різному розподілятися з висотою.

Зазначимо також, що при наявності в газі кількох видів молекул з різними масами число більш важких молекул з висотою повинно спадати швидше (в земній атмосфері на допустимих висотах це не відбувається внаслідок перемішування газів при різних тисках).

З барометричної формули легко вивести закон розподілу молекул з висотою в полі тяжіння. Оскільки $p = nkT$, то з (3.19) маємо:

$$n = n_0 e^{-\frac{mg(h-h_0)}{kT}}, \quad (3.21)$$

$$n = n_0 e^{-\frac{\Delta U}{kT}}. \quad (3.22)$$

Л. Больцман показав, що закон розподілу (3.22) є **універсальним**. Він справедливий для будь-яких частинок, що перебувають у довільному потенціальному полі зовнішніх сил. Цей статистичний закон називається **розподілом Больцмана** і є одним з основних законів молекулярно-кінетичної теорії. Він показує, що для рівноважного стану при даній температурі T концентрація частинок n зро-

стає при зменшенні потенціальної енергії U , що відповідає тенденції стійкої рівноваги системи.

З формули (3.22) також випливає, що $n \rightarrow n_0$ при $T \rightarrow 0$, тобто підвищення температури викликає вирівнювання концентрації газу в усьому наданому йому об'ємі. Якщо $T \rightarrow 0$, $n \rightarrow 0$, то всі молекули під дією сили тяжіння опускатимуться до поверхні Землі. Наша атмосфера існує внаслідок дії двох протилежних факторів: хаотичного руху молекул повітря і сил тяжіння (якби не були сили земного тяжіння, то повітря розсіялося б по всьому Всесвіту, якби не було хаотичного руху молекул повітря, то всі вони впали б на Землю).

Зазначимо, що максвеллівський розподіл молекул за швидкостями не залежить від дії зовнішніх потенціальних сил (в тому числі і від сил тяжіння), а розподіл Больцмана по значеннях потенціальної енергії в зовнішньому потенціальному полі не залежить від розподілу швидкостей молекул. Обидва ці розподіли можна об'єднати в один **закон Максвелла-Больцмана**:

$$dn = \frac{4}{\sqrt{\pi}} n_0 \left(\frac{m}{2kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\Delta U}{kT}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv. \quad (3.1)$$

За формулою розподілу Максвелла-Больцмана (3.23) можна визначити число молекул ідеального газу, швидкості яких лежать в інтервалі від v до $v + dv$ і мають потенціальну енергію U в полі зовнішніх сил.

Закон Максвелла-Больцмана можна застосовувати не тільки до молекул, а й до будь-яких частинок, поведінка яких подібна до молекул ідеального газу.

Контрольні запитання

- 1 У чому полягає максвеллівський закон розподілу молекул за швидкостями?
- 2 Яка швидкість характеризує середню кінетичну енергію молекул газу?
- 3 Що називається середньою довжиною вільного пробігу? Яким чином вона залежить від температури?

- 4 Яка швидкість входить у вираз для середньої довжини вільного пробігу молекул?
- 5 У чому полягає розподіл Больцмана?
- 6 Що визначає розподіл Максвелла-Больцмана?

4 МЕХАНІЧНІ ТА ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ КОЛИВАННЯ

4.1 Механічні та електромагнітні коливальні процеси та системи

Коливаннями називають процеси (рухи або зміни стану), повторюються з часом. Характерною особливістю коливань є її періодичність, тобто повторюваність через рівні проміжки часу, називаються **періодом коливального руху**.

В залежності від фізичної природи коливального руху розносять: механічні коливання (коливання маятників, частин машини механізмів, будинків, мостів і інших споруд, тиску повітря при поширенні в ньому звуку); електромагнітні (коливання змінного струму в колі); електромеханічні (коливання мембрани телефону) та інші.

Систему, яка описується рівнянням

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0. \quad (4)$$

називають **гармонічним осцилятором**. Розв'язок рівняння (4) має вигляд:

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi).$$

Отже, гармонічним осцилятором можна назвати будь-яку систему, яка здійснює гармонічні коливання біля положення рівноваги.

Прикладом гармонічних коливань може бути коливання маятника при малих кутових відхиленнях від положення рівноваги.

Маятником називають тіло, що коливається під дією сили тяжіння $\vec{F} = m\vec{g}$. Розглянемо математичний, фізичний і пружинний маятники.

4.2 Математичний, пружинний та фізичний маятники

Розглянемо приклади систем, які здійснюють гармонічні коливання.

Фізичний маятник – тверде тіло, здатне здійснювати коливання під дією своєї сили тяжіння mg навколо нерухомої горизонтальної осі O , яка не проходить через його центр мас і називається коливання маятника (рис. 4.1).

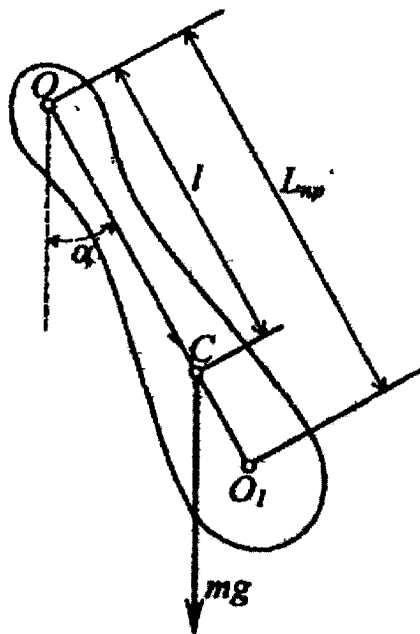


Рисунок 4.1 – Фізичний маятник

Точка O перетину осі коливання маятника з вертикальною лінією, що проходить через центр мас маятника, називається кою підвісу маятника.

Якщо знехтувати силами тертя в підвісі маятника, то моментотно осі коливання маятника створює тільки його сила тяжіння. и відхиленні маятника на кут α виникає обертальний момент $l \sin \alpha$, який намагається повернути маятник у положення вноваги.

З основного закону динаміки обертального руху $M = I \epsilon$ дістаємо рівняння руху фізичного маятника:

$$I \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -mgl \sin \alpha, \quad (4.2)$$

де I – момент інерції маятника відносно осі O ; m – маса маятника – відстань від центра мас до осі коливання; g – прискорення вільного падіння; знак "мінус" вказує на те, що, кут відхилення α відраховується від положення рівноваги, а повертаючий момент намагається повернути маятник до положення рівноваги. При малих коливаннях маятника $\sin \alpha \approx \alpha$ і рівняння (4.2) має вигляд:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mgl}{I}\alpha = 0,$$

тобто кут α задовольняє диференціальне рівняння гармонічних

коливань $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$, якщо зробити позначення

$$\omega^2 = \frac{mgl}{I}.$$

Таким чином, малі коливання фізичного маятника будуть гармонічними:

$$\alpha = \alpha_0 \sin(\omega t + \varphi_0),$$

де α_0 – амплітуда коливань кута α , а

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}$$

– відповідно циклічна частота і період коливань фізичного маятника

Математичний маятник – матеріальна точка, підвішена нерозтяжній нитці, що коливається у вертикальній площині під дією сили тяжіння (рис. 4.2).

Коли маятник перебуває у положенні рівноваги, то сила тяжіння зрівноважується силою натягу нитки. Якщо матеріальну точку відхилити на деякий кут α , то рівнодійна $\vec{F}$ сил тяжіння $m\vec{g}$ і натягу $\vec{T}$ намагається повернути маятник в положення рівноваги. Вираз для повертаючої сили має такий вигляд:

$$F = mg \sin \alpha.$$

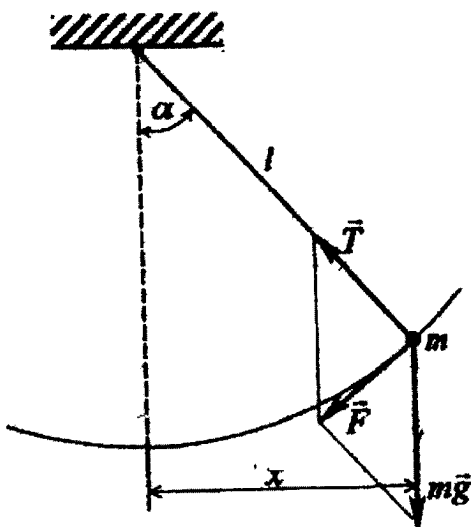


Рисунок 4.2 – Математичний маятник

Для малих кутів α можна записати, що $\sin \alpha = \frac{x}{l} \approx \alpha$;

$$F = mg \frac{x}{l}, \quad (4.8)$$

l – довжина маятника.

При виконанні умови (4.8) повертаюча сила пропорційна зміщенню x матеріальної точки від положення рівноваги, тому коливання математичного маятника будуть гармонічними.

На основі другого закону Ньютона запишемо рівняння руху математичного маятника:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{mg}{l} x. \quad (4.9)$$

Позначимо

$$k = \frac{mg}{l} \text{ ; } \omega^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Тоді

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{g}}. \quad (4.)$$

З (4.10) випливає, що період коливань математичного маятника визначається його довжиною і прискоренням земного тяжіння даного місця на Землі та не залежить від маси маятника і амплітуди коливань для малих кутів відхилення α .

Якщо вважати математичний маятник граничним випадком фізичного маятника, вся маса якого зосереджена в його центрі мас, а момент інерції $I = ml^2$, то формулу (4.10) можна одержати з формули (4.6), тобто

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{ml^2}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (4.)$$

Аналізуючи (4.11), приходимо до висновку, що I/ml відповідає довжині, а тому запишемо

$$\frac{I}{ml} = L,$$

де L – зведена довжина фізичного маятника.

Отже, математичний маятник матиме такий самий період коливань, що й фізичний маятник за умови рівності його довжини зведеної довжині фізичного маятника.

Маятники широко застосовують для вивчення коливань земної кори; у годинниках, у приладах для дослідження механічних властивостей твердих тіл, у гіроскопічних приладах, тощо.

Пружинний маятник – тягар масою m , підвішений на абсолютно пружній пружині, який здійснює коливання під дією пружної сили $F = -kx$, де k – коефіцієнт пружності (в випадку пружності називається жорсткістю).

Рівняння руху маятника

$$\frac{d^2 x}{dt^2} m = -kx$$

або

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Із виразу $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2x = 0$ випливає, що пружинний маятник ює гармонічні коливання за законом:

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

длічною частотою

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4.12)$$

одом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (4.13)$$

Потенціальна енергія пружинного маятника

$$E_{\text{п}} = \frac{kx^2}{2}.$$

4.3 Електричний коливальний контур

Систему, що складається з послідовно з'єднаних конденсатора істю C , котушки індуктивністю L і провідника з омичним опо-
- R , в якій можуть збуджуватись **електричні коливання**, нази-
-**ють коливальним контуром** (рис. 4.3). Під електричними коли-
-ваннями розуміють періодичні або близькі до періодичних зміни
яду конденсатора і струму в котушці індуктивності. З зарядом
нденсатора і струмом котушки пов'язані відповідно електрична і
гнітна енергії. Тому періодичним змінам заряду і струму відпові-
ють аналогічні зміни енергії, тобто виникають у загальному елек-
змагнітні коливання.

Розглянемо спочатку ідеалізований коливальний контур із зо-
-єдженими параметрами L і C при $R = 0$. Параметри L і C можна
ажати зосередженими, якщо ємність витків котушки значно мен-

ша від ємності конденсатора, а індуктивність з'єднувальних провідників і конденсатора значно менша від індуктивності котушки. Нехай у початковий момент часу $t = 0$ від стороннього джерела на обкладки конденсатора зосереджено заряд $q = q_0$ (рис. 4.3, а). Напруга між обкладками $U = \frac{q_0}{C}$ – і відповідна електрична енергія $W_e = \frac{q_0^2}{2C}$.

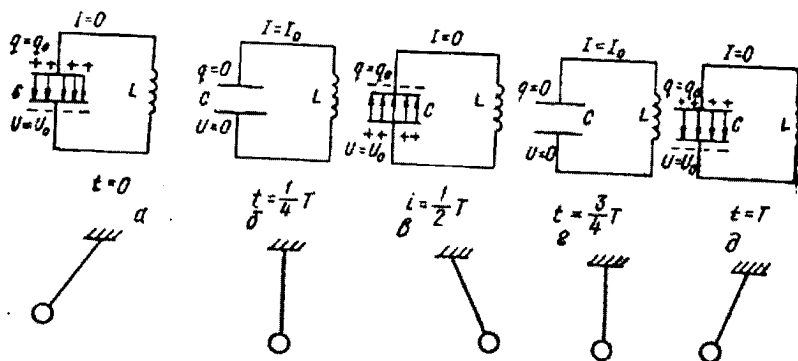


Рисунок 4.3 – Процеси в електричному коливальному контурі

Якщо обкладки зарядженого конденсатора з'єднати провідниками з котушкою L , то в колі виникне розрядний струм, який відразу набуває максимального значення. Причиною цього є струм самоіндукції, що виникає в котушці L і за правилом Ленца напружений проти наростаючого розрядного струму. Через час $t = 1/\omega$ конденсатор розряджається ($q=0$), а струм у котушці L стає максимальним ($I = I_0$). У цей момент енергія електричного поля конденсатора повністю перетворюється в енергію магнітного поля котушки $W_m = \frac{1}{2} L I_0^2$, а струм самоіндукції дорівнює нулю (рис. 4.3, б). У наступний момент струм у колі контуру при тому самому напрямі починає спадати за величиною. Знову виникає струм самоіндукції, який тепер за правилом Ленца має той самий

ям, що й розрядний струм у котушці. Це приводить до деякої мки в часі спадання струму і до перезаряджання конденсато-

В момент $t = 1/2 T$ струм у колі дорівнює нулю, магнітне поле шки повністю (при $R = 0$) перетворюється в електричне поле єнсатора (рис. 4.3, в), напруженість якого має протилежний ям порівняно з випадком, коли $t = 0$.

Далі конденсатор знову розряджається. Виникає розрядний м протилежного напрямку. Процеси в коливальному контурі по- юються (рис. 4.3, г, д). Через $t = T$ коливальний контур повер- ься у вихідний стан при $R = 0$ без будь-яких змін у контурі та олишньому середовищі. Час, протягом якого в коливальному урі відбувається один повний цикл змін і контур повертається латковий стан, називають **періодом електричного коливання**. цес періодичного перетворення енергії електричного поля в ргію магнітного поля і навпаки при $R = 0$ може тривати як за- цно довго. Такі коливання, які відбуваються за рахунок процесів мому коливальному контурі без зовнішніх впливів і втрат енер- називають власними електричними коливаннями. Вони є неза- яючими.

Можна провести формальну аналогію між електричними ко- аннями у коливальному контурі і механічними коливаннями ма- ка (рис. 4.3). При цьому потенціальній енергії маятника можна тавити у відповідність електричну енергію конденсатора, а кіне- ній – магнітну енергію котушки.

Заряд конденсатора і струм у котушці коливального контуру тійно змінюються за величиною і напрямом. Прийнемо, що в

мент часу t заряд на обкладках конденсатора q , напруга $U = \frac{q}{C}$, а

рум у колі змінюється із швидкістю $\frac{dI}{dt}$. В котушці L виникає

РС самоіндукції $-L \frac{dI}{dt}$. За законом Ома при $R \neq 0$ миттєве зна- ення сили струму

$$I = \frac{U - L \frac{dI}{dt}}{R}. \quad (4.14)$$

4.4 Диференціальні рівняння коливальних процесів

Оскільки $U = \frac{q}{C}$, $I = -\frac{dq}{dt}$ і $\frac{dI}{dt} = -\frac{d^2q}{dt^2}$ то формула (4.14) запишеться так:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \quad (4.15)$$

Якщо $R = 0$, то

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0$$

або

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0, \quad (4.16)$$

де $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ називають **циклічною частотою власних коливань системи**. Рівняння (4.16) є **диференціальним рівнянням вільних електричних коливань**. Всяку систему (електричну, механічну тощо), вільні коливання якої описуються рівнянням (4.16), називають гармонічним осцилятором.

Розв'язком (4.16) є вираз

$$q = q_0 \cos(\omega_0 t + \phi). \quad (4.17)$$

В (4.17) q_0 – амплітуда і $\omega_0 t + \phi$ – фаза коливань, де ϕ – початкова фаза. Величина ω_0 залежить лише від властивостей коливної системи, а q_0 і ϕ визначаються початковими умовами. Для електричних коливань $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, отже,

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (4.18)$$

Рівність (4.18) називають **формулою Томсона**. Для коливального контуру цю формулу можна одержати також з умови резонансу струмів у контурі, при якій

$$R_L = R_C, \text{ або } \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}.$$

Силу струму в коливальному контурі знаходять диференціюванням рівності (4.17):

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 q_0 \sin(\omega_0 t + \varphi). \quad (4.19)$$

Енергії електричного і магнітного полів коливального контуру змінюються так:

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{q^2}{2C} = \frac{q_0^2}{2C} \cos^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{q_0^2}{4C} + \frac{q_0^2}{4C} \cos(2\omega_0 t + \varphi), \\ W_m &= \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} L \omega_0^2 q_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{q_0^2}{2C} \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \\ &= \frac{q_0^2}{4C} - \frac{q_0^2}{4C} \cos(2\omega_0 t + \varphi). \end{aligned}$$

$$\text{Середні значення } \langle W_e \rangle = \langle W_m \rangle = \frac{q_0^2}{4C}.$$

Гармонічні коливання у контурі відбуваються між $\langle W_e \rangle$ і $\langle W_m \rangle$ з круговою частотою $2\omega_0$. Неперервно переходить електрична енергія в магнітну і навпаки. Тоді, коли електрична енергія максимальна, магнітна дорівнює нулю і навпаки, а сумарна енергія в будь-який момент часу не змінюється (зберігається):

$$W = \langle W_e \rangle + \langle W_m \rangle = \frac{q_0^2}{2C}. \quad (4.20)$$

Контрольні запитання

- 1 Що називається коливанням?
- 2 Що називають математичним маятником?
- 3 Що називають фізичним маятником? Що називають його приведеною довжиною?

- 4 Запишіть формули для обчислення періодів коливань математичного і фізичного маятників.
- 5 Що називають пружинним маятником?
- 6 Запишіть формулу для обчислення періоду коливань пружинного маятника.
- 7 Що називається коливальним контуром?
- 8 Які процеси відбуваються в коливальному контурі?
- 9 Чому дорівнює період власних коливань контуру (Формула Томсона)?
- 10 Запишіть диференціальне рівняння коливального процесу

5 КОЛИВАННЯ. ДОДАВАННЯ КОЛИВАНЬ

5.1 Гармонічні коливання та їх характеристики. Перетворення енергії в процесі коливань

Коливаннями називаються процеси (рухи або зміни стану), повторюються з часом.

Коливання називаються **гармонічними**, якщо фізична величина, яка їх характеризує, змінюється з часом за законом синуса або косинуса.

Основні характеристики гармонічного коливання встановимо за допомогою моделі, яка являє собою матеріальну точку D , що рівномірно обертається по колу радіуса A з кутовою швидкістю ω (рис. 5.1).

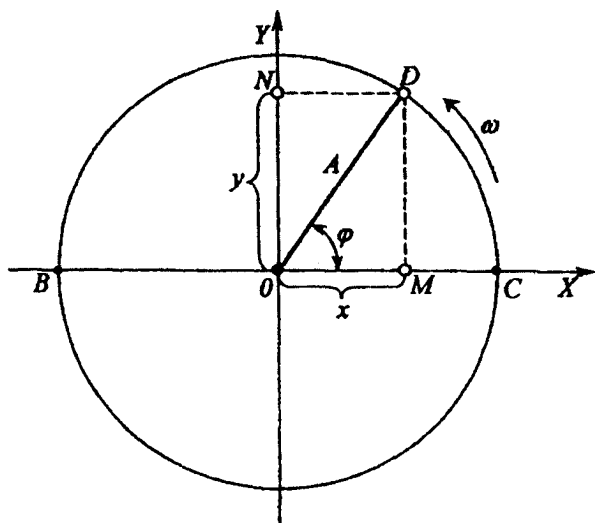


Рисунок 5.1 – Гармонічний рух матеріальної точки по колу

Проекція точки D (наприклад, на вісь OX) здійснюватиме гармонічні коливання між B і C . Запишемо залежність координати x

точки M від часу t . З рисунка маємо

$$x = A \cos \varphi = A \cos(\omega t + \varphi_0),$$

де x – зміщення коливальної точки від положення рівноваги; A – амплітуда зміщення коливальної точки від положення рівноваги називають **амплітудою** коливань; φ_0 – початкова фаза; $\varphi = \omega t + \varphi_0$ – **фаза коливань**, яка визначає зміщення коливальної точки в будь-який момент часу t ; ω – циклічна або колова частота коливань. Період коливань точки

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (5.4)$$

Кількість коливань за секунду називають **частотою**:

$$\nu = \frac{1}{T}. \quad (5.5)$$

Період коливань вимірюють у секундах (с), а частоту – у герцах (Гц).

Проекція точки D на вісь OY , тобто точки N (рис. 5.1), так здійснює гармонічні коливання за законом

$$y = A \sin \varphi = A \sin(\omega t + \varphi_0) = A \cos\left(\omega t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right), \quad (5.6)$$

Знайдемо швидкість точки, яка коливається, з рівняння (5.6) як похідну за часом

$$v = \frac{dy}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi_0) = \omega A \cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right). \quad (5.7)$$

Прискорення коливальної точки знайдемо як похідну і швидкості за часом

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi_0) = \omega^2 A \cos(\omega t + \varphi_0 + \pi). \quad (5.8)$$

З рівнянь (5.5) і (5.6) видно, що швидкість і прискорення при гармонічних коливаннях змінюються з такою самою частотою як зміщення, але зсунуті по фазі відповідно на $\pi/2$ і π , як це показано на рисунку. 5.2.

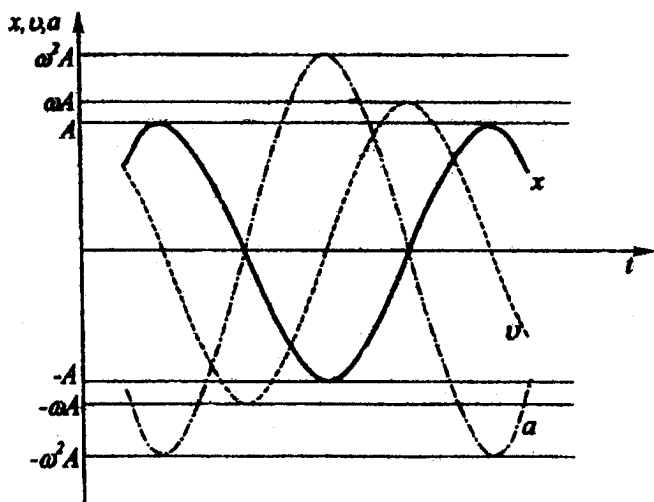


Рисунок 5.2 – Залежність зміщення x , швидкості v і прискорення a гармонічних коливань від часу

Розглянемо прямолінійні гармонічні коливання матеріальної точки масою m вздовж осі координат OX під дією пружини (с. 5.3). Тертям і масою пружини нехтуємо.

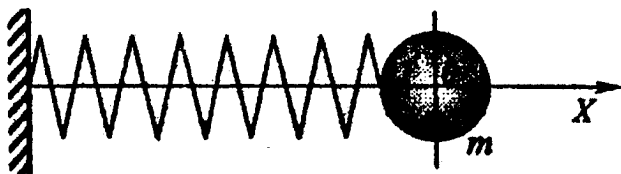


Рисунок 5.3 – Коливання матеріальної точки під дією пружних сил

При зміщенні матеріальної точки від положення рівноваги на величину x на неї діятиме сила пружності

$$F = -kx, \quad (5.7)$$

k – коефіцієнт пружності пружини.

На основі другого закону Ньютона запишемо

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

або

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad (5.10)$$

де $\omega^2 = \frac{k}{m}$.

Так як коефіцієнт ω^2 додатний, то рівняння (5.8) **диференціальне рівняння вільних коливань**. Його розв'язком функція (5.1).

Циклічна частота і період вільних або власних коливань до вносять:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (5.11)$$

Щоб тіло здійснювало гармонічні коливання, на нього і обов'язково повинна діяти пружна сила. Потрібно, щоб при змщенні тіла від положення рівноваги сила, яка діє на нього, змінювалась за законом (5.7). Такі сили називають **квазіпружними**.

Повна енергія вільних коливань з часом залишається сталою і складається з кінетичної і потенціальної енергій

$$E = E_k + E_n, \quad (5.12)$$

де

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0), \quad (5.13)$$

а

$$E_n = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0), \quad (5.14)$$

бо потенціальна енергія визначається за такою ж формулою, як потенціальна енергія деформованої пружини, оскільки вільні коливання відбуваються під дією сил, які подібні до пружних сил.

Вирази (5.11) і (5.12) перепишемо у такому виді:

$$E_k = \frac{1}{4} m \omega^2 A^2 [1 - \cos(2\omega t + 2\phi_0)], \quad (5.13)$$

$$E_n = \frac{1}{4} m \omega^2 A^2 [1 + \cos(2\omega t + 2\phi_0)]. \quad (5.14)$$

Кінетична і потенціальна енергії матеріальної точки періодично змінюються від 0 до $1/2 m \omega^2 A^2$, виконуючи гармонічні коливання з циклічною частотою 2ω і амплітудою $1/4 m \omega^2 A^2$ біля середнього значення $1/4 m \omega^2 A^2$. Коливання кінетичної і потенціальної енергій зсунуті по фазі на π , тому повна механічна енергія матеріальної точки не змінюється при гармонічних коливаннях:

$$E = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2. \quad (5.15)$$

Графіки залежностей E_k , E_n і E від часу t для випадку $\phi_0 = 0$ едено на рисунку 5.4.

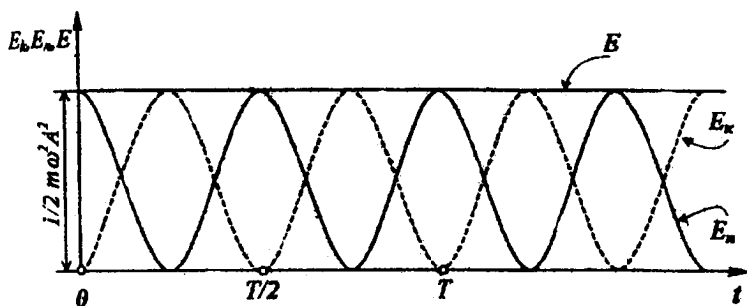


Рисунок 5.4 – Залежність кінетичної E_k , потенціальної E_n і повної E енергії гармонічних коливань від часу

5.2 Додавання. Биття

Під додаванням коливань розуміють знаходження закону результуючих коливань системи у тих випадках, коли ця система бере участь одночасно в декількох коливальних рухах.

Розрізняють два граничні випадки: 1) додавання коливань одного напрямку; 2) додавання взаємно перпендикулярних коливань.

Знайдемо рівняння руху тіла, яке бере участь у двох однако напрямлених гармонічних коливальних рухах з однаковими частотами, застосувавши метод векторних діаграм (рис. 5.5):

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \quad (5.1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2). \quad (5.1)$$

Оскільки вектори $\vec{A}_1$ і $\vec{A}_2$ обертаються з однаковою кутовою

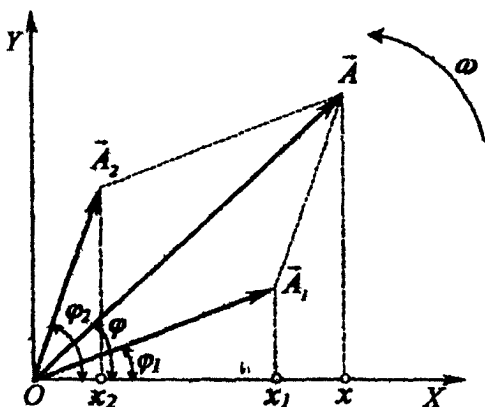


Рисунок 5.5 – Додавання гармонічних коливань однакових частот

швидкістю ω , то зсув фаз між ними ($\varphi_2 - \varphi_1$) з часом не змінюється. результируючий вектор $\vec{A}$ також здійснюватиме обертання з кутовою швидкістю ω , а тому результируюче коливання також буде гармонічним і його рівняння матиме такий вигляд:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (5.1)$$

де A – амплітуда результируючого коливання, φ – початкова фаза.

Знайдемо A і φ , скориставшись рисунком 5.5:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}, \quad (5.1)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \quad (5.1)$$

З (5.19) видно, що коли $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), то $A = A_1 + A_2$.
 Якщо $\varphi_2 - \varphi_1 = (2n+1)\pi$, то $A = |A_2 - A_1|$.

Коливання можна додавати і аналітично. Розглянемо окремі доданок додавання однаково напрямлених коливань з різними частотами:

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \\ x_2 &= A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Для спрощення припустимо, що $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_0$ і $A_1 = A_2 = A_0$. Тоді результуюче зміщення

$$x = x_1 + x_2 = 2A_0 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t + \varphi_0\right), \quad (5.22)$$

коливання буде негармонічним, тому що амплітуда результуючого коливання періодично змінюється з часом:

$$A = 2A_0 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right). \quad (5.23)$$

Оскільки період модуля косинуса дорівнює π , то період зміни амплітуди

$$T = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}. \quad (5.24)$$

У випадку, коли частоти коливань ω_1 і ω_2 за величиною мало відрізняються, виникає явище **биття** і результуюче коливання буде періодичним коливанням з пульсуючою амплітудою і кутовою частотою, що дорівнює середньому арифметичному значенню частот вихідних коливань $\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)$. Характер залежності x від часу t у биттях показано на рисунку 5.6.

Явищем биття користуються налаштовуючі музичних інструментів, які судять про точне співпадання частоти струни з частотою вихідного джерела звуку (камертона) по зникненню биттів. Додавання коливань з близькими частотами застосовують також в радіоприймачах, які називаються гетеродинами.

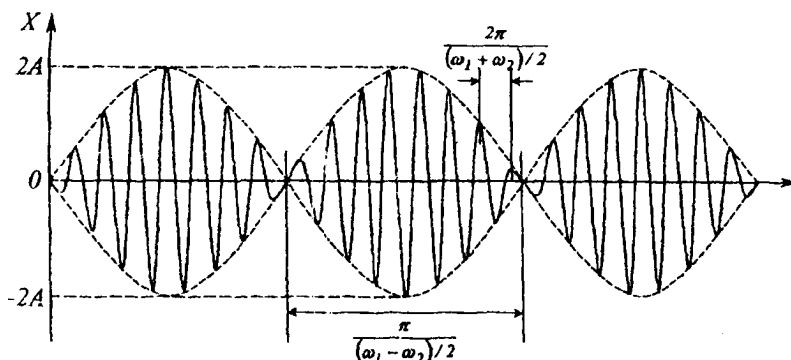


Рисунок 5.6 – Залежність зміщення x гармонічних коливань від часу t при биттях

Розглянемо випадок додавання двох взаємно перпендикулярних коливань, частоти яких однакові. Рівняння коливань відносно координатних осей OX і OY матимуть такий вигляд:

$$\begin{aligned} x &= A \cos(\omega t + \varphi_1), \\ y &= B \cos(\omega t + \varphi_2). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Щоб знайти рівняння траєкторії результуючого коливаючого руху треба з (5.25) виключити час t . Зробимо це для декількох найбільш простих значень початкових фаз.

а) Різниця фаз дорівнює нулю, тобто $\varphi_2 = \varphi_1$. Тоді

$$\frac{x}{y} = \frac{A}{B}; \quad y = \frac{B}{A} x, \quad (5.1)$$

тобто траєкторією результуючого руху є пряма лінія – діагональ прямокутника з сторонами $2A$ (по осі OX) і $2B$ (по осі OY) (рис. 5.7,а).

б) Нехай $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi$. В цьому випадку косинуси будуть відрізнятися знаком, і ми аналогічно отримаємо:

$$y = -\frac{B}{A}x, \quad (5.27)$$

то траєкторія буде другою діагоналлю прямокутника (5.7,б).

в) Різниця фаз дорівнює $\pi/2$, тобто $\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$. Траєкторію ідемо наступним способом:

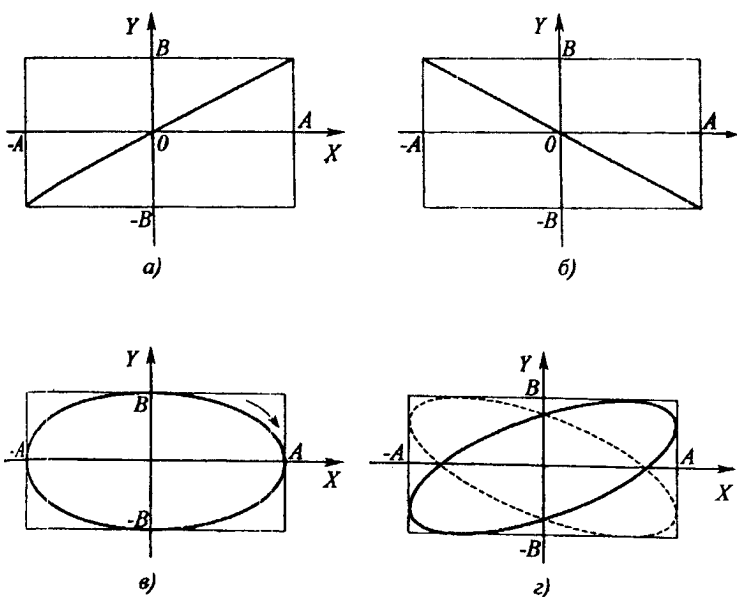


Рисунок 5.7 – Траєкторія руху тіл при додаванні двох взаємно перпендикулярних коливань

$$\frac{x}{A} = \cos(\omega t + \varphi_1),$$

$$\frac{y}{B} = \cos\left(\omega t + \varphi_1 + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\omega t + \varphi_1).$$

Піднесемо до квадрату і додавши почленно, дістанемо

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = \cos^2(\omega t + \varphi_1) + \sin^2(\omega t + \varphi_1)$$

або

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1, \quad (5)$$

отже траєкторією буде еліпс (рис. 5.7,в). При $A = B$ траєкторія ретворюється в коло.

г) При $\varphi_2 = \varphi_1 - \pi/2$ траєкторія залишиться такою ж самою, зміниться напрям обходу.

У випадку довільних значень φ_1 , і φ_2 , а точніше, їх різні траєкторія буде також еліпсом (подібним одному із показаних рис. 5.7,г), вписаним в той же прямокутник, тому що x і y завжди змінюються у межах

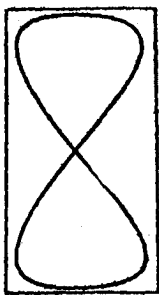
$$-A \leq x \leq A, \quad -B \leq y \leq B.$$

Прямі (рис. 5.7,а і б) можна розглядати як вироджений еліпс

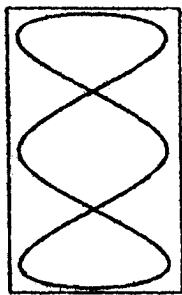
5.3 Фігури Ліссажу

Більш складні криві отримують при додаванні коливань з різними частотами ($\omega_1 = n\omega_2$, n – правильний дріб). В даному випадку результуючі коливання носять назву **фігур Ліссажу**. За формою складеної кривої визначають, у скільки разів одна частота більша за другу (наприклад, рис. 5.8 для $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi/2$), тому що відношення часу між точками дотикання фігур до відповідних сторін прямокутника збігається з відношенням частот складових коливань.

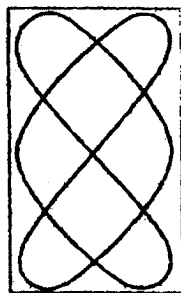
При додаванні коливань довільної частоти, результуюче коливання має складну траєкторію, яка є незамкнутою і з часом заповнює собою весь прямокутник.



$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{2}$$



$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{3}$$



$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2}{3}$$

Рисунок 5.8 – Фігури Ліссажу при різному співвідношенні частот ω_1/ω_2 гармонічних коливань

Контрольні запитання

- 1 Які коливання називаються гармонічними?
- 2 Чому дорівнює частота биття?
- 3 Дайте визначення амплітуди, фази, періоду, частоти, циклічної частоти коливання.
- 4 Чим визначається вигляд траєкторії частинок, які приймають участь одночасно в двох взаємно перпендикулярних гармонічних коливаннях однакової частоти?
- 5 Від чого залежить амплітуда і початкова фаза гармонічних коливань?
- 6 Запишіть рівняння гармонічних коливань.
- 7 Яке співвідношення між зміщенням, швидкістю і прискоренням для гармонічних коливань?
- 8 Від яких величин залежать кінетична, потенціальна і повна енергія гармонічних коливань?
- 9 Яке співвідношення між періодами для зміщення і зміни потенціальної енергії для гармонічних коливань?
- 10 Чи змінюється повна енергія гармонічних коливань від часу?

- 11 Яке співвідношення в часі між значеннями кінетичної і потенціальної енергії для гармонічних коливань?
- 12 Який зміст векторних діаграм гармонічних коливань?
- 13 Від чого залежить амплітуда результуючого коливання, отриманого внаслідок додавання двох гармонічних коливань одного напрямку: а) однакової частоти? б) різної частоти?
- 14 Що таке фігури Ліссажу?

6 КОЛИВАННЯ. ЗАГАСАЮЧІ КОЛИВАННЯ

6.1 Диференціальне рівняння загасаючих коливань та його розв'язок

В ідеальному випадку, коли на тіло діє тільки одна пружна (пружна) сила, коливання тіла будуть гармонічними і незагасними ($A = \text{const}$). В реальних умовах механічна енергія коливого руху тіла буде неперервно зменшуватись, витрачаючись на зменшення опору середовища, на тертя в опорах, на створення вихорів, на виникнення непружних деформацій тощо. Внаслідок цього амплітуда коливань з часом зменшуватиметься і коливання стають загасаючими.

Закон загасання коливань залежить від властивостей коливної системи.

Система називається лінійною, якщо параметри, які характеризують фізичні властивості системи, не змінюються в процесі коливань.

Лінійні системи описуються лінійними диференціальними рівняннями. Знайдемо диференціальне рівняння, яке описує вільні затухаючі коливання тіла під дією квазіпружної сили ($F_{\text{кв-пр}}$) і сили опору (F_0).

При малих швидкостях руху сила опору прямо пропорційна швидкості і напрямлена проти руху, тобто

$$F_0 = -rv = -r \frac{dx}{dt}, \quad (6.1)$$

де r – коефіцієнт опору, який залежить від властивостей середовища форми і розмірів рухомого тіла.

Другий закон Ньютона матиме вигляд

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0.$$

Рівняння (6.2) – **диференціальне рівняння загасаючих коли**

Рівняння коливального руху тіла при цьому матиме вигляд

$$x = A_0 e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \phi_0)$$

з довільними значеннями сталих A_0 , ω , ϕ_0 і α . Введенням почвої фази ϕ_0 ми об'єднуємо синус і косинус в одну функцію. Отливши першу і другу похідні від виразу (6.3) і підставивши їх чення в (6.2), дістанемо

$$A_0 e^{-\alpha t} \left\{ \left[m(\alpha^2 - \omega^2) - r\alpha + k \right] \cos(\omega t + \phi_0) + \left[m2\alpha\omega - r\omega \right] \sin(\omega t + \phi_0) \right\} = 0,$$

звідки отримаємо два рівняння для знаходження α і ω :

$$\left. \begin{aligned} m(\alpha^2 - \omega^2) - r\alpha + k &= 0, \\ m2\alpha\omega - r\omega &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Розв'язуючи ці рівняння, знайдемо:

$$\alpha = \frac{r}{2m}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}.$$

Вираз (6.3), в якому значення α і ω визначені із (6.4) і (6.5) загальним розв'язком рівняння загасаючих коливань. Він відріється від чисто гармонічного коливання тим, що амплітуда квання

$$A_{(t)} = A_0 e^{-\alpha t}$$

є спадна функція часу.

Співвідношення (6.5) можна переписати так:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0. \quad (6.2)$$

ня (6.2) – диференціальне рівняння загасаючих коливань. Рівняння коливального руху тіла при цьому матиме вигляд

$$x = A_0 e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \phi_0) \quad (6.3)$$

льними значеннями сталих A_0 , ω , ϕ_0 і α . Введенням початкової ϕ_0 ми об'єднуємо синус і косинус в одну функцію. Обчислюючи першу і другу похідні від виразу (6.3) і підставивши їх значення в (6.2), дістанемо

$$A_0 e^{-\alpha t} \left\{ \left[m(\alpha^2 - \omega^2) - r\alpha + k \right] \cos(\omega t + \phi_0) + \left[m2\alpha\omega - r\omega \right] \sin(\omega t + \phi_0) \right\} = 0,$$

зотримаємо два рівняння для знаходження α і ω :

$$\left. \begin{aligned} m(\alpha^2 - \omega^2) - r\alpha + k &= 0, \\ m2\alpha\omega - r\omega &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Розв'язуючи ці рівняння, знайдемо:

$$\alpha = \frac{r}{2m} \quad (6.4)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}. \quad (6.5)$$

Вираз (6.3), в якому значення α і ω визначені із (6.4) і (6.5), є єдиним розв'язком рівняння загасаючих коливань. Він відрізняється від чисто гармонічного коливання тим, що амплітуда коливань

$$A_{(t)} = A_0 e^{-\alpha t} \quad (6.6)$$

є експоненціальна функція часу.

Співвідношення (6.5) можна переписати так:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}, \quad (6.7)$$

де $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ – циклічна частота вільних коливань.

Відповідно період загасаючих коливань дорівнює

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}.$$

6.2 Характеристики загасання. Аперіодичні процеси

З формули (6.8) видно, що період загасаючих коливань завжди більший від періоду вільних коливань ($T = 2\pi/\omega_0$). При збільшенні опору середовища, тобто при зростанні коефіцієнта загасання період загасаючих коливань зростає і при $\alpha = \omega_0$ коливальний процес переходить в аперіодичний (рис. 6.1).

На рисунку 6.2 наведено графік загасаючих коливань (суцільна лінія). Закон зміни амплітуди з часом – штрихова лінія.

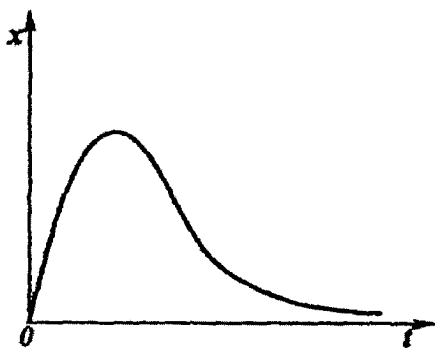


Рисунок 6.1 – Залежність зміної x від часу t для аперіодичних коливань

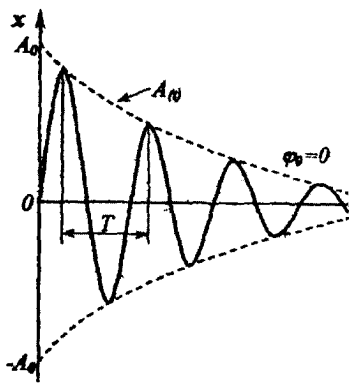


Рисунок 6.2 – Залежності амплітуди від часу t для загасаючих коливань

При $\alpha < \omega_0$ знайдемо відношення двох амплітуд коливань моменти часу, що відрізняються на один період:

$$\frac{A_{(t)}}{A_{(t+T)}} = \frac{A_0 e^{-\alpha t}}{A_0 e^{-\alpha(t+T)}} = e^{\alpha T}. \quad (6.9)$$

(6.9) впливає, що дане відношення є величина стала для процесу загасання коливань.

Загасаючі коливання часто характеризують **часом релаксації**, яким розуміють проміжок часу τ , протягом якого амплітуда таких коливань зменшується в e разів, тобто

$$\frac{A_{(t)}}{A_{(t+T)}} = e^{\alpha \tau} = e.$$

Звідси маємо

$$\alpha \tau = 1 \quad ; \quad \tau = \frac{1}{\alpha} = \frac{2m}{r}. \quad (6.10)$$

Натуральний логарифм відношення (6.9) називається **логарифмічним декрементом загасання** і дорівнює

$$\delta = \ln \frac{A_{(t)}}{A_{(t+T)}} = \alpha T = \frac{r}{2m} T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N}, \quad (6.11)$$

N – число коливань, протягом яких амплітуда зменшується в e

У техніці часто замість логарифмічного декременту використовують величину, яку називають **добротністю коливальної системи**

$$\theta = \frac{\pi}{\delta} = \frac{\pi}{\alpha T}. \quad (6.12)$$

Коливальна система, виведена з положення рівноваги і залишається сама на собі, здійснюватиме вільні загасаючі коливання, які відрізняються від опору середовища та параметрів системи. Для одержання незагасаючих коливань необхідно поповнювати втрати енергії системи на роботу проти сил опору. Одним із способів підтримки коливань системи є дія зовнішньої сили, яка змінюється з часом за гармонічним законом

$$F = F_0 \cos \omega t. \quad (6.13)$$

6.3 Загасаючі електромагнітні коливання

Диференціальне рівняння вільних загасаючих коливань q в коливальному контурі ($R \neq 0$)

$$q'' + 2\alpha q' + \omega_0^2 q = 0, \quad (6.13)$$

$$\text{де } \alpha = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

Розв'язком диференціального рівняння (6.14) є функція ви

$$q = q_0 e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi), \quad (6.14)$$

де $q_0 e^{-\alpha t} = A$ – амплітуда загасаючих коливань, α – коефіцієнт гасання, частота загасаючих коливань ω :

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \quad (6.15)$$

Із формули (6.16) видно, що коли $R = 0$, то коефіцієнт α гасання теж дорівнює 0, тоді

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (6.16)$$

тобто коливання будуть незагасаючими.

Період загасаючих коливань:)

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}. \quad (6.17)$$

Загасаючі коливання характеризуються **декрементом згасання**

$$\frac{q(t)}{q(t+T)} = \frac{q_0 e^{-\alpha t}}{q_0 e^{-\alpha(t+T)}}, \quad (6.18)$$

Логарифмічний декремент загасання визначається формулою

$$\delta = \ln \frac{q_0 e^{-\alpha t}}{q_0 e^{-\alpha(t+T)}} = \ln e^{\alpha T} = \alpha T. \quad (6.19)$$

У радіотехніці замість логарифмічного декременту загасання контуру характеризують добротністю:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\alpha T}. \quad (6.21)$$

Контрольні запитання

- 1 Які коливання називаються загасаючими?
- 2 Запишіть диференціальне рівняння загасаючих коливань.
- 3 Як з часом змінюється амплітуда загасаючих коливань?
- 4 Від чого залежить частота загасаючих коливань?
- 5 Характеристики коливальної системи. Дати означення таких величин як:
 - а) часу релаксації;
 - б) логарифмічного декременту загасання;
 - в) добротності.
- 6 Дати визначення аперіодичного процесу.

7 КОЛИВАННЯ. ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ

7.1 Диференціальне рівняння вимушених механічних коливань та його розв'язок. Амплітуда та фаза вимушених коливань

Коливання системи, які здійснюються внаслідок роботи нішньої сили ($F = F_0 \cos \omega t$), називаються **вимушеними**, а сил **вимушуючою**. Коли вимушуюча сила діє протягом певного то, встановлюються гармонічні коливання такої самої частоти вимушуючої сили.

Рівняння динаміки вимушених коливань матиме вигляд

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega t.$$

Введемо такі позначення, поділивши рівняння (7.1) на масу m :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad \frac{r}{m} = 2\alpha, \quad \frac{F_0}{m} = f_0. \quad (7.2)$$

З врахуванням (7.2) рівняння (7.1) перепишемо так:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t, \quad (7.3)$$

де α – коефіцієнт загасання, ω_0 – циклічна частота вільних коливань.

Загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння другого порядку складається із суми розв'язку однорідного рівняння (6.2) і частинного розв'язку неоднорідного рівняння (7.3). Розв'язок рівняння (6.2) характеризує загасаючі коливання, які з деяким часом припиняються. Тому знайдемо частинний розв'язок рівняння (7.3). Будемо вважати, що під дією сили (6.13) коливання встановилися і тому розв'язок шукатимемо у вигляді

$$x = A \cos(\omega t + \varphi),$$

$$x = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}} \times \cos\left(\omega t + \arctg\left(-\frac{2\alpha\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)\right). \quad (7.10)$$

Під дією періодичної вимушуючої сили (6.13) виникають гармонічні вимушені коливання (7.10) з тією ж частотою ω . Амплітуда вимушених коливань (7.8) прямо пропорційна амплітуді вимушуючої сили, залежить від характеристик коливальної системи m , k і α , а також є функцією частоти коливань вимушуючої сили ω .

Графіки залежності A і зсуву фаз ϕ від ω для декількох значень α наведено на рисунку 7.1, а і б.

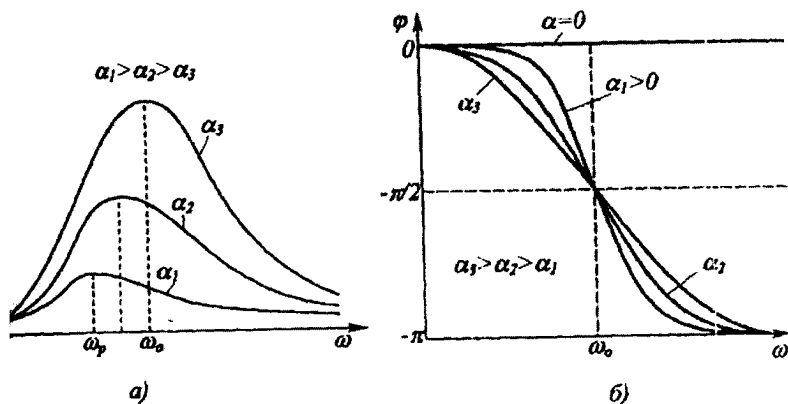


Рисунок 7.1 – Залежності амплітуди A і фази ϕ вимушених коливань від частоти ω при різних значеннях коефіцієнта загасання

7.2 Резонанс механічних систем

Явище, при якому амплітуда вимушених коливань досягає максимуму, називають **резонансом**. Частоту зміни вимушуючої сили, при якій амплітуда вимушених коливань досягає максимального значення, називають **резонансною частотою** ω_r . Амплітуда буде максимальною при мінімальному значенні підкореневого виразу у

формулі (7.8). Умовою мінімуму є рівність нулю похідної за частотою підкореневого виразу

$$-4(\omega_0^2 - \omega_p^2)\omega_p + 8\alpha^2\omega_p = 0.$$

Звідси маємо, що

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2}. \quad (7)$$

Значення амплітуди при резонансі матиме вигляд

$$A = \frac{f_0}{2\alpha\sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2}}. \quad (7)$$

Явище резонансу необхідно враховувати під час констрування різних споруд і машин. Їхня частота вільних коливань повинна суттєво відрізнятися від частоти вимушуючих сил. В багатьох випадках явище резонансу відіграє позитивну роль, особливо в діотехніці та акустиці.

7.3 Вимушені електромагнітні коливання

Розглянемо вимушені електричні коливання у контурі під дією ЕРС, яка змінюється за законом

$$E = E_0 \cos \omega t.$$

На основі другого правила Кірхгофа можна записати

$$U_C + IR = E + E_s, \quad (7.1)$$

де $U_C = \frac{q}{C}$ – напруга на обкладках конденсатора, IR – спад напруги

на активному опорі, $E_s = -L \frac{dI}{dt}$ – ЕРС самоіндукції. Враховуючи

що $I = \frac{dq}{dt}$, а $\frac{dI}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$ рівняння (7.13) можна переписати так:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\alpha \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{E_0}{L} \cos \omega t. \quad (7.1)$$

гулі (7.8). Умовою мінімуму є рівність нулю похідної за частотою підкореневого виразу

$$-4(\omega_0^2 - \omega_p^2)\omega_p + 8\alpha^2\omega_p = 0.$$

Звідси маємо, що

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2}. \quad (7.11)$$

Значення амплітуди при резонансі матиме вигляд

$$A = \frac{f_0}{2\alpha\sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2}}. \quad (7.12)$$

Явище резонансу необхідно враховувати під час конструювання різних споруд і машин. Їхня частота вільних коливань повинна суттєво відрізнятися від частоти вимушуючих сил. В багатьох випадках явище резонансу відіграє позитивну роль, особливо в радіотехніці та акустиці.

7.3 Вимушені електромагнітні коливання

Розглянемо вимушені електричні коливання у контурі під дією напруги, яка змінюється за законом

$$E = E_0 \cos \omega t.$$

На основі другого правила Кірхгофа можна записати

$$U_C + IR = E + E_s, \quad (7.13)$$

$U_C = \frac{q}{C}$ – напруга на обкладках конденсатора, IR – спад напруги на

активному опорі, $E_s = -L \frac{dI}{dt}$ – ЕРС самоіндукції. Враховуючи,

$I = \frac{dq}{dt}$, а $\frac{dI}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$ рівняння (7.13) можна переписати так:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\alpha \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{E_0}{L} \cos \omega t. \quad (7.14)$$

Рівняння (7.14) являє собою **диференціальне рівняння мушених коливань**, яке є неоднорідним рівнянням другого порядку. Загальний розв'язок такого рівняння складається із суми розв'язків відповідного однорідного рівняння і частинного розв'язку однорідного рівняння (7.14). Розв'язком відповідного однорідного диференціального рівняння є загасаючі коливання, тому через деякий короткий час після початку коливань впливом цього доданку на загальний розв'язок рівняння (7.14) можна нехтувати. Частинний розв'язок рівняння (7.14) шукатимемо у вигляді

$$q = q_m \cos(\omega t + \phi), \quad (7.15)$$

де q_m – амплітуда установлених коливань, ϕ – зсув фаз між зарядом і зовнішньої ЕРС.

Величини q_m і ϕ потрібно визначити. Для цього знайдемо (7.15):

$$\frac{dq}{dt} = -q_m \omega \sin(\omega t + \phi); \quad \frac{d^2q}{dt^2} = -q_m \omega^2 \cos(\omega t + \phi).$$

Підставивши q , $\frac{dq}{dt}$ і $\frac{d^2q}{dt^2}$ у рівняння (7.14), дістанемо

$$\begin{aligned} & -q_m \omega^2 \cos(\omega t + \phi) - 2\alpha q_m \omega \sin(\omega t + \phi) + \\ & + q_m \omega_0^2 \cos(\omega t + \phi) = \frac{E_0}{L} \cos \omega t. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Розкладемо синус і косинус суми за відомими тригонометричними формулами і запишемо рівняння (7.16) так:

$$\begin{aligned} & q_m \left[(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \phi - 2\alpha \omega \sin \phi \right] \cos \omega t - \\ & - q_m \left[(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \phi + 2\alpha \omega \cos \phi \right] \sin \omega t = \frac{E_0}{L} \cos \omega t. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Рівняння (7.17) задовольнятимуть всі значення t за умови, і коефіцієнти біля виразів $\sin \omega t$ і $\cos \omega t$ у лівій і правій частині рівняння (7.17) однакові. Звідси маємо:

$$\left. \begin{aligned} q_m (\omega_0^2 - \omega^2) \cos \varphi - 2\alpha\omega q_m \sin \varphi &= \frac{E_0}{L} \\ q_m (\omega_0^2 - \omega^2) \sin \varphi + 2\alpha\omega q_m \cos \varphi &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (7.18)$$

Тіднемо до квадрата рівняння (7.18) і додамо їх. Тоді отри-

$$q_m^2 \left[(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\alpha^2 \omega^2 \right] = \frac{E_0^2}{L^2},$$

чи

$$q_m = \frac{E_0/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2 \omega^2}}. \quad (7.19)$$

З другого рівняння системи (7.18) знайдемо

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{2\alpha\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (7.20)$$

Підставивши у формули (7.19) і (7.20) $\alpha = \frac{R}{2L}$, $\omega_0^2 = \frac{1}{CL}$ діс-

ємо

$$q_m = \frac{E_0}{\omega \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - L\omega \right)^2}}, \quad (7.21)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{R}{\frac{1}{\omega C} - L\omega}. \quad (7.22)$$

Отже, частинний розв'язок диференціального рівняння (7.1) є ВИГЛЯД

$$\begin{aligned} q_m &= \frac{E_0}{\omega \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2 \omega^2}} \times \\ &\times \cos \left(\omega t + \arctg \left(-\frac{2\alpha\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \right). \end{aligned} \quad (7.23)$$

7.4 Резонанс у колі змінного струму

Вимушене коливання є гармонічним, амплітуда і фаза як визначаються формулами (7.19) і (7.20). Характерною особливістю розв'язку (7.23) є те, що він не залежить від початкових умов. З (7.19) і (7.20) видно, що амплітуда вимушених коливань, які виникли, та зсув фаз між зміщеннями і зміною зовнішньої ЕРС лежать від різниці квадратів частот, а також від коефіцієнта згасання β коливального контуру. Амплітуда зміни заряду вимуваних коливань залежить також від амплітуди змінної ЕРС E_0 . Як поділити заряд q на ємність конденсатора, то дістанемо закон змін (коливань) напруги на конденсаторі

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} \cos(\omega t + \varphi) = U_{mc} \cos(\omega t + \varphi),$$

де

$$U_{mc} = \frac{q_m}{C} = \frac{E_0}{\omega C \sqrt{R^2 + (1/\omega C - L\omega)^2}}. \quad (7.1)$$

Диференціюючи за часом рівність (7.15), дістанемо закон змін струму в коливальному контурі

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega q_m \sin(\omega t + \varphi) = I_m \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right).$$

Амплітуда струму виражається формулою

$$I_m = \omega q_m = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - L\omega\right)^2}}. \quad (7.2)$$

Резонансна частота для заряду q і напруги на конденсаторі визначається так:

$$\omega_q = \omega_u = \sqrt{\omega_0^2 - 2\varepsilon^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}.$$

Амплітуда сили струму матиме максимальне значення за умови $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$, тобто під час резонансу.

На рисунку 7.2 показано залежність амплітуди вимушених коливань сили струму I_m від циклічної частоти змінної зовнішньої ЕРС. Ці криві називають резонансними. Однією із характеристик

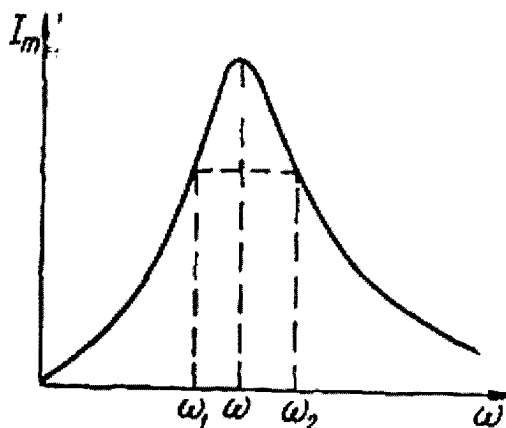


Рисунок 7.2 – Залежність сили струму I_m від циклічної частоти ω зовнішньої ЕРС

резонансної кривої є значення амплітуди у максимумі. Другою важливою характеристикою є ширина резонансної кривої, під якою розуміють різницю циклічних частот $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ для яких енергія коливань у два рази менша від енергії для частоти, при якій амплітуда змінної величини досягає максимуму. Ширина резонансної кривої зв'язана з добротністю коливального контуру Q (див. (6.21)) відношенням

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}. \quad (7.26)$$

Коливання будуть найбільш інтенсивними при частоті $\omega = \omega_0$. Ще збудження інтенсивних електричних коливань при дії зовнішньої змінної ЕРС з частотою, яка дорівнює або близька до власної частоти коливального контуру, називають **резонансом**. Уся техніка радіоприймання ґрунтується на явищі резонансу. Щоб радіоприймач селективно (вибірково) реагував на електромагнітні хвилі, які випромінюють радіостанції, треба досягти збігання час-

тоти власних коливань коливального контуру радіоприймача з тою електромагнітних хвиль, які випромінює дана радіостанція. Чутливість радіоприймача зв'язана з добротністю його коливального контуру. Чим більша добротність контуру, тим вища чутливість приймача. Оскільки добротність коливального контуру зв'язана з шириною резонансної кривої, то на основі (7.26) можна зробити висновок, що чутливість радіоприймача і ширина резонансної кривої обернено пропорційні. Під шириною резонансної кривої $\Delta\omega$ треба розуміти смугу частот, які здатний приймати радіоприймач. З метою уникнення частотних спотворень не може бути менше 9 дБ. Це означає, що при великій чутливості радіоприймач здатний приймати тільки досить вузьку смугу частот. Чим вища чутливість радіоприймача, тим менше перешкоджають прийманню інші радіостанції, які працюють на близьких частотах.

Контрольні запитання

- 1 Які коливання називають вимушеними?
- 2 Запишіть диференціальне рівняння вимушених коливань.
- 3 Від чого залежить частота вимушених коливань?
- 4 Від чого залежить величина амплітуди вимушених коливань?
- 5 В чому полягає суть явища резонансу?
- 6 Як залежить амплітуда коливань при резонансі від коефіцієнта загасання?
- 7 Як залежить зсув фаз від частоти зовнішньої вимушувальної сили та коефіцієнта загасання?
- 8 За яких умов має місце резонанс сили струму у колі змінного струму?

8 ХВИЛІ. ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА ХВИЛЬОВОГО ПРОЦЕСУ

8.1 Загальні закономірності хвильових процесів. Повздовжні та поперечні хвилі

Хвилею називають процес поширення збуджень, який супроводжується перенесенням енергії від джерел в навколишній простір.

Прикладами є величезний рух хвиль на поверхні океану, звук, ударна хвиля від надзвукового літака тощо.

Найчастіше зустрічаються хвилі, породжені гармонічним джерелом. Наприклад, від камертону, який здійснює гармонічні коливання сталої частоти, поширюються в повітрі звукові гармонічні хвилі. При цьому частинки повітря здійснюють гармонічні коливання біля положень рівноваги.

В електромагнітній хвилі коливання здійснюють вектори напруженості електричного і магнітного полів. У цьому значенні хвилю часто називають процес поширення коливань.

Ми будемо розглядати лише два типи хвиль: механічні хвилі, поширюються в пружному середовищі та електромагнітні.

При поширенні механічної хвилі частки середовища не рухаються у напрямі поширення хвилі, а коливаються біля свого положення рівноваги. Разом з хвилею від частинки до частинки передається не тільки стан коливного руху, а й його енергія. Тому **основна властивість всіх хвиль** є перенос енергії без переносу речовини.

Пружні (або механічні) хвилі бувають поперечні і поздовжні.

У поздовжніх хвилях частинки середовища коливаються в напрямку поширення хвилі (рис. 8.1).

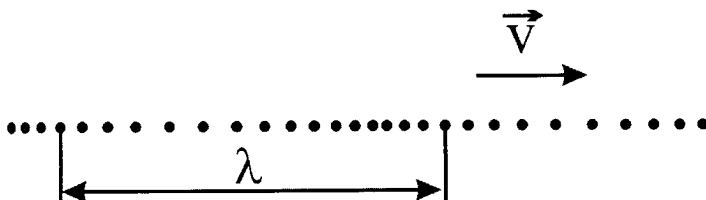


Рисунок 8.1 – Поздовжні хвилі

Ці хвилі можуть поширюватись в середовищах, в яких викликають пружні сили при деформації стику і розтягу (зв'язані з об'ємною деформацією середовища) і тому можуть поширюватись в будь-якому середовищі – у твердому, рідкому і газоподібному. Прикладом таких хвиль є звукові хвилі у повітрі.

У **поперечних хвилях** частинки середовища коливаються в площинах, які перпендикулярні до напрямку поширення хвилі (рис. 8.2).

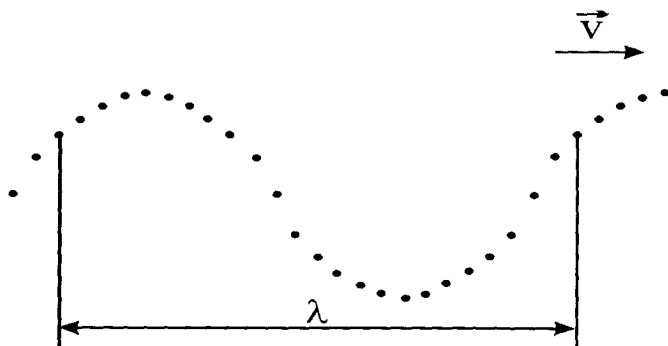


Рисунок 8.2 – Поперечні хвилі

Поперечні хвилі можуть поширюватись в середовищі, в яких виникають пружні сили при деформації зсуву, тобто лише у твердих тілах. Прикладом поперечних хвиль можуть служити хвилі, поширюються вздовж струн музичних інструментів. Поперечні є електромагнітні хвилі.

Пружна хвиля (механічна) називаються гармонічною, якщо відповідні їй коливання частинок середовища є гармонічними.

Нехай поперечна гармонічна хвиля поширюється вздовж осі x

На рисунку 8.3 наведено залежність між зміщенням частинок середовища, що беруть участь у хвильовому процесі, і відстанню цих частинок від джерела коливань O для якогось фіксованого моменту часу.

Нехай точка, від якої йдуть коливання, коливається в суцільному середовищі. Коливання поширюються від центра в усі сторони. Поверхні, до якої доходить в деякий момент часу збудження, називаються **фронтом хвилі**. **Фронт хвилі** – це поверхня, яка від

8.2 Рівняння хвилі

**Рівнянням хвилі називається вираз, який дає зміщення
ної частинки як функцію її координат x, y, z і часу t .**

Виведемо рівняння хвилі.

**Нехай джерело коливань вміщено в т. О і почало коливатися в
т часу $t = 0$ по закону синуса:**

$$y_0 = A \sin \omega t. \quad (8.1)$$

Коливання точки О приведуть в рух сусідні частинки середо-

**Через якийсь час τ почне коливатись деяка точка М середови-
ка віддалена від джерела коливань О на відстані x ($\tau = x/v$ бо**

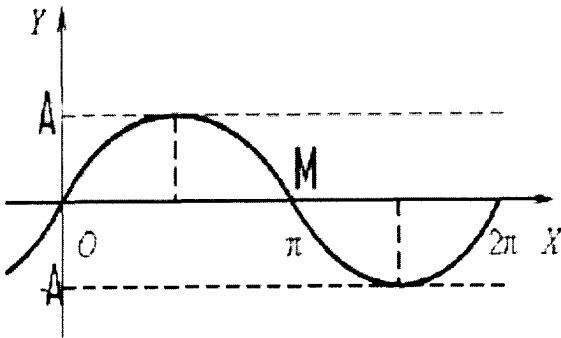
Рівняння (8.1) – рівняння коливань точки О (рис. 8.4).

$$y_M = A \sin \omega(t - \tau) = A \sin \omega(t - x/v). \quad (8.2)$$

Рівняння (8.2) – рівняння коливань точки М.

**Якщо хвиля поширюється справа наліво, то її рівняння можна
зати:**

$$y = A \sin \omega(t + x/v). \quad (8.2')$$



**Рисунок 8.4 – Механізм поширення коливного
руху в суцільному середовищі**

Точки, в яких зміщення у частинок середовища досягає максимального значення називаються **гребнями** ($y = +A$), а найменшого значення – **впадинами** ($y = -A$)

Довжина хвилі – відстань між двома точками, які відрізняються по фазі на 2π . Крім того **довжина хвилі** λ – це відстань яку поширюється хвиля за час, що дорівнює періоду коливань:

$$\lambda = v \cdot T,$$

$$\lambda = \frac{v}{\nu}. \quad (8.1)$$

З врахуванням (8.3) вираз (8.2) можна переписати так:

$$y = A \sin(2\pi / T \cdot t - 2\pi / T \cdot x / v) =$$

$$= A \sin(\omega t - 2\pi x / \lambda) = A \sin(\omega t - kx) \quad (8.2)$$

– рівняння променя або хвилі. Вираз

$$2\pi / \lambda = k \quad (8.3)$$

– **хвильове число**, – яке показує скільки довжин хвиль λ вміщується у відрізка 2π ($2\pi / \lambda = k = \omega / v = k = 2\pi / vT$).

$$y = A \sin(\omega t - kx), \quad (8.4)$$

де A – амплітуда коливань, яка називається амплітудою хвилі, $\omega = 2\pi / T$ – циклічна частота хвилі.

Рівняння (8.6) – рівняння біжучої плоскої хвилі, що поширюється вздовж осі Ox .

Величина $\phi = (\omega t - kx)$ дорівнює фазі коливань в довільній площині з координатою x і називається **фазою плоскої хвилі**.

Припустимо, що при хвильовому процесі фаза стала, тобто зафіксуємо певне значення фази:

$$\omega t - kx = \text{const}. \quad (8.5)$$

Цей вираз визначає зв'язок між часом t і тим місцем x , в якому фаза має фіксоване значення. Величина dx/dt дає швидкість, якою переміщається дане значення фази.

Продиференціюємо вираз для фази:

$$\omega dt - k dx = 0. \quad (8.6)$$

Звідси

точки, в яких зміщення у частинок середовища досягає максимального значення називаються **гребнями** ($y = +A$), а найменше – **впадинами** ($y = -A$)

довжина хвилі – відстань між двома точками, які відрізняються по фазі на 2π . Крім того **довжина хвилі** λ – це відстань, на якій поширюється хвиля за час, що дорівнює періоду коливань:

$$\lambda = v \cdot T,$$

$$\lambda = \frac{v}{\nu}. \quad (8.3)$$

Враховуючи (8.3) вираз (8.2) можна переписати так:

$$y = A \sin(2\pi / T \cdot t - 2\pi / T \cdot x / v) =$$

$$= A \sin(\omega t - 2\pi x / \lambda) = A \sin(\omega t - kx) \quad (8.4)$$

як вираз променя або хвилі. Вираз

$$2\pi / \lambda = k \quad (8.5)$$

хвильове число, – яке показує скільки довжин хвиль λ вміщується в відрізку 2π ($2\pi / \lambda = k = \omega / v = k = 2\pi / vT$).

$$y = A \sin(\omega t - kx), \quad (8.6)$$

A – амплітуда коливань, яка називається амплітудою хвилі; $2\pi / T$ – циклічна частота хвилі.

Рівняння (8.6) – рівняння біжучої плоскої хвилі, що поширюється вздовж осі Ox .

Величина $\phi = (\omega t - kx)$ дорівнює фазі коливань в довільній точці з координатою x і називається **фазою плоскої хвилі**.

Припустимо, що при хвильовому процесі фаза стала, тобто маємо певне значення фази:

$$\omega t - kx = \text{const}. \quad (8.7)$$

Цей вираз визначає зв'язок між часом t і тим місцем x , в якому маємо фіксоване значення. Величина dx/dt дає швидкість, з якою переміщається дане значення фази.

Продиференціюємо вираз для фази:

$$\omega dt - k dx = 0. \quad (8.8)$$

Звідси

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega\lambda}{2\pi} = \frac{\lambda}{T} = v.$$

Швидкість v поширення хвилі є ніщо інше, як швидкість реміщення фази хвилі, її називають **фазовою швидкістю**.

У випадку сферичної хвилі

$$y = \frac{A}{x} \cos(\omega t - kx), \quad (8)$$

де x – відстань від центра хвилі до точки середовища, яка розглядається. Співвідношення (8.9) справедливе лише для x , що значно більші за розміри джерела.

8.3 Диференціальне хвильове рівняння

Рівняння довільної хвилі є розв'язком рівняння, яке називається хвильовим.

Для виведення цього рівняння використаємо рівняння площ хвилі, що поширюється в довільному напрямку:

$$y_M = A \cos(\omega t - kx) = A \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z). \quad (8)$$

Диференціюючи цю функцію двічі по кожній змінній отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 y_M}{\partial t^2} &= -\omega^2 A \cos(\omega t - kx) = -\omega^2 y_M; \\ \frac{\partial^2 y_M}{\partial x^2} &= -k_x^2 A \cos(\omega t - kx) = -k_x^2 y_M; \\ \frac{\partial^2 y_M}{\partial y^2} &= -k_y^2 A \cos(\omega t - kx) = -k_y^2 y_M; \\ \frac{\partial^2 y_M}{\partial z^2} &= -k_z^2 A \cos(\omega t - kx) = -k_z^2 y_M. \end{aligned} \right\} \quad (8'')$$

Додамо похідні по координатах.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y_M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y_M}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 y_M}{\partial z^2} = \\ = -\left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right) y_M = -k^2 y_M. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Зіставимо цю суму з похідними за часом і врахуємо, що $v^2 k^2$. Поширення хвиль в однорідному ізотропному середовищі описується **хвильовим рівнянням** – диференціальним рівнянням в частинних похідних

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y_M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y_M}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 y_M}{\partial z^2} = \frac{1}{v} \frac{\partial^2 y_M}{\partial t^2} \\ \Delta y_M = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y_M}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (8.14)$$

– фазова швидкість; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – **оператор Лапласа**.

У хвильовому рівнянні міститься лише одна стала – це фазова швидкість v , яка не залежить від характеристик джерела, таких як частота або амплітуда, а повністю визначається властивостями середовища, в якому поширюється хвиля.

Контрольні запитання

- 1 Що називають хвилею? Запишіть рівняння плоскої хвилі.
- 2 Що називається механічною хвилею?
- 3 В якому середовищі поширюються електромагнітні хвилі?
- 4 Що показує хвильове число?
- 5 Яка хвиля називається плоскою, а яка сферичною?
- 6 Що називають довжиною хвилі?
- 7 Запишіть хвильове диференціальне рівняння.
- 8 Запишіть оператор Лапласа.
- 9 Запишіть рівняння сферичної хвилі.

9 ПОШИРЕННЯ ХВИЛЬ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

9.1 Швидкість механічних хвиль в газах, рідинах і твердих тілах

Знайдемо швидкість поширення хвиль у суцільному прутку середовищі. При поширенні повздовжніх хвиль ділянки середовища зазнають періодичного стиску і розтягу. При поперечних хвилях в середовищі поширюється періодично коливальна деформація зсуву. Для теоретичного обчислення величини швидкості розглянемо схематично найпростіший випадок передачі деформації чистого пружного стержня (рис. 9.1).

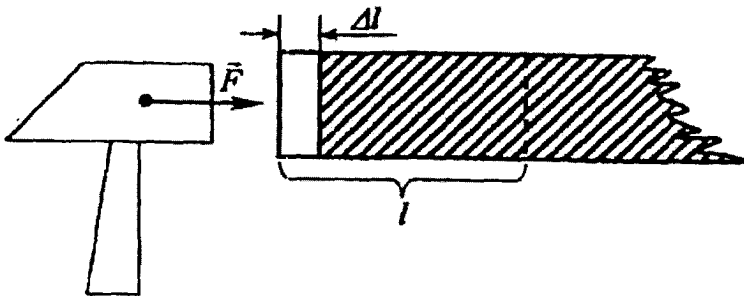


Рисунок 9.1 – Поширення деформації через пружний стержень

Нехай за проміжок часу Δt ударом молотка надали стержню деякий імпульс. За цей час точки торця стержня змістяться на деяку відстань Δl . По стержню побіжить хвиля стиску. До кінця проміжку часу Δt всі частинки ділянки стержня довжиною l будуть рухатися зі швидкістю $u = \frac{\Delta l}{\Delta t}$. Позначимо площу поперечного перерізу стержня через S , а густину матеріалу – ρ . Приріст імпульсу стержня дорівнює $m u - 0$, де $m = \rho S l$ – маса ділянки стержня довжиною l . Зміна імпульсу дорівнює імпульсу сили:

$$F\Delta t = \rho S l u, \quad (9.1)$$

іншого боку, сила, що стиснула стержень, зв'язана з деформацією Δl стиснутої ділянки l за законом Гука

$$F = ES \frac{\Delta l}{l}, \quad (9.2)$$

• модуль пружності.

Підставивши (9.2) в (9.1), отримаємо:

$$ES \frac{\Delta l}{l} \Delta t = \rho S l \frac{\Delta l}{\Delta t}.$$

Після скорочень

$$\frac{E}{\rho} = \left(\frac{l}{\Delta t} \right)^2 = v^2, \quad v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (9.3)$$

Швидкість поширення поперечних хвиль визначається через модуль зсуву G за формулою

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \quad (9.4)$$

Швидкість поперечних хвиль в струні, залежить від натягу F :

$$v = \sqrt{\frac{F}{\rho S}}, \quad (9.5)$$

– сила натягу струни; ρ і S – густина матеріалу і площа поперечного перерізу струни.

Вивчаючи швидкість поширення повздовжніх і поперечних хвиль, можна зробити висновок про природу речовин, через які проходять пружні хвилі. На цьому базуються сейсмічні методи геофізичної розвідки. Наприклад, від місця землетрусу по земній корі поширюються повздовжні і поперечні хвилі, але модуль зсуву G у рідких тілах приблизно в два рази менший за модуль пружності E . Прилади, розміщені на сейсмічній станції, фіксують поштовхи на відстані L від станції до землетрусу двічі, через проміжок часу

$$t = \frac{L}{v_{\text{попер.}}} - \frac{L}{v_{\text{повзд.}}} \quad ($$

Знаючи проміжок часу t , оцінюють відстань L від станції місця землетрусу або місця підземного атомного вибуху.

У рідинах і газах деформації зсуву непружні. В них поширюються тільки повздовжні хвилі.

Швидкість цих хвиль у рідинах:

$$v_p = \sqrt{\frac{K}{\rho}}, \quad ($$

де K – об'ємний модуль пружності, ρ – густина рідини.

Інша картина спостерігається в газах. Модуль об'ємної пружності K газу залежить від виду термодинамічного процесу його об'ємної деформації:

$$K_{\text{ізот}} = p \text{ і } K_{\text{ад}} = \gamma p,$$

тому швидкість хвиль залежить від частоти. Це явище називається **дисперсією** хвиль. При малій частоті процес деформації близький до ізотермічного і швидкість хвиль

$$v = v_{\text{ізот}} = \sqrt{\frac{K_{\text{ізот}}}{\rho}} = \sqrt{\frac{RT}{\mu}} \quad (9$$

При великій частоті він близький до адіабатичного і швидкість хвиль

$$v = v_{\text{ад}} = \sqrt{\frac{K_{\text{ад}}}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}} \quad (9$$

Досліди показують, що швидкість поширення звуку в газі практично не залежить від частоти і відповідає формулі (9.9).

9.2 Енергія хвилі

Пружне середовище, в якому поширюються механічні хвилі, має як кінетичну енергію коливального руху частинок, так і потенціальну енергію, зумовлену деформацією.

Для характеристики перенесення енергії в різних точках середовища користуються поняттям густини потоку енергії, що переноситься за одиницю часу через одиницю площі поверхні:

$$J_c = w_c v = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 v. \quad (9.17)$$

у векторній формі

$$\vec{J}_c = w_c \vec{v}. \quad (9.18)$$

вектор Умова (М.О. Умов вивчав питання перенесення енергії).

9.3 Звукові хвилі, їх основні характеристики. Застосування

Розділ фізики, в якому вивчаються звукові хвилі, називають **акустикою**. До звукових хвиль належать пружні хвилі, частоти знаходяться у межах від 16 до 20000 Гц, тобто у межах чутливості органів слуху людини. Пружні хвилі, частота яких менше 16 Гц, називають **інфразвуковими**, а пружні хвилі, частота яких знаходиться в інтервалі від 20000 до 10^9 Гц, – **ультразвуковими**. Звук характеризується об'єктивними характеристиками – частотою і інтенсивністю, та суб'єктивними характеристиками – висотою, висотою звуку і тембром звуку. **Інтенсивність** або **сила звуку** – це енергія, що переноситься через одиницю площі поверхні, перпендикулярної до неї напрямі за одиницю часу. **Інтенсивність звуку** (I) – це густина потоку енергії, яка визначається за формулою (9.17)

$$I = J_c = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 v.$$

Перенесення енергії при поширенні звукових хвиль в середовищі супроводжується відповідними змінами тиску

$$\Delta p = \rho A \omega v \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right), \quad (9.19)$$

де величину $\Delta p_0 = \rho A \omega v$ називають **амплітудою звукового** з врахуванням Δp_0 вираз для обчислення інтенсивності звуку бирає вигляду

$$I = \frac{(\Delta p_0)^2}{2\rho v}.$$

Інтенсивність звуку прямо пропорційна квадрату амплітуди звукового тиску та обернено пропорційна добутку густини ρ та швидкості поширення хвиль.

Фізичному поняттю сили звуку відповідає фізіологічне поняття – гучність звуку. Людське вухо сприймає звуки, сила яких вище деяке мінімальне значення I_0 , різне для різних частот

$$I_0 = f(\nu). \quad (9.21)$$

Величина I_0 називається **порогом чутності звуку** і для різних частот $\nu \approx 10^3$ Гц, що найкраще сприймаються вухом, дорівнює 10^{-12} Вт/м². Оскільки вухо сприймає приріст гучності при збільшенні сили звуку не менше, ніж на 10-20%, то для характеристики звуку беруть величину, яка називається **рівнем сили звуку**

$$\beta = 10 \lg \frac{I}{I_0}, \quad (9.22)$$

вимірюється в белах (Б).

Із (9.22) випливає, що рівень сили звуку в 1 Б відповідає звуку $I = 10I_0$. Поряд з цією одиницею користуються в 10 раз більшою одиницею, яка називається децибелом (дБ):

$$\beta = 10 \lg \frac{I}{I_0} \text{ дБ}. \quad (9.23)$$

Висота звуку визначається його частотою. Висота звуку зростає із збільшенням частоти. Органи слуху людини дуже чутливі до зміни частоти. В інтервалі частот від 1,5 кГц до 2,0 кГц людина здатна розрізняти два тони, частоти яких відрізняються на 3-7 Гц.

Тембр звуку – це відтінок складного звуку, яким відрізняється один від одного звуку однакової висоти і інтенсивності. Тембр звуку визначається спектром частот простих коливань, які входять до складу звуку. Для спектрального аналізу звуку його необхі-

рости на гармонічні складові (користуються резонаторами Гейльса).

Швидкість поширення звуку в різних середовищах різна

Гіла, що коливаються у пружному середовищі із звуковою частотою, називаються **джерелами звуку**. Якщо розміри джерела порівнянні з довжиною хвилі, то від нього поширюється в усі сторони сферична звукова хвиля. Якщо розміри джерела великі в порівнянні з довжиною хвилі, то внаслідок інтерференції і дифрактування звуком перешкод) воно випромінює напрямлену звукову хвилю. В повітрі при $v = 331$ м/с і $\nu_{\min} = 16$ Гц довжина хвилі $\lambda = 20,7$ м. При $\nu_{\max} = 20000$ Гц довжина звукової хвилі в повітрі становить $16,5$ мм. Тому для одержання напрямленого звукового пучка звичайних мовних частот (300-2000 Гц) використовуються джерела діаметром порядку 1 м. Для одержання напрямлених ультразвукових пучків ($\lambda_{\text{уз}} < 0,0165$ м) використовуються випромінювальні пластинки діаметром в декілька сантиметрів.

При зустрічі звукових хвиль з перешкодами великих розмірів відбувається їх відбивання і повернення назад (ехо). В гірській місцевості завдяки багатократному відбиванню звуку спостерігається довгочасне ехо (до 5-10 с).

В процесі поширення звукових хвиль у пружному середовищі відбувається їх затухання. При коливальних рухах частинок середовища між ними виникають сили внутрішнього тертя і за рахунок цих сил остання частина звукової енергії перетворюється у внутрішню енергію. У звуковій хвилі в кожний даний момент по сусідству знаходяться розігріті області стиску і охолоджені області розрідження. Внаслідок теплопровідності середовища різниця температур між областями вирівнюється, що зменшує максимальний тиск і максимальне відхилення, тобто амплітуду звукової хвилі, а це пов'язано із зменшенням енергії коливань. Внутрішнє тертя і теплопровідність середовища приводять до поглинання звукової енергії і зменшення живності звукової хвилі.

Зміна сили (інтенсивності) звуку з відстанню описується зако-

$$I = I_0 e^{-\alpha x}, \quad (9.24)$$

I_0 – початкова сила звуку, що входить в середовище; I – сила звуку, що дійшов у середовищі шляху x . Величина коефіцієнта поглинання α прямо пропорційна квадрату частоти звуку, тому звуки

малої частоти (низькі) поширюються даліше високих. Наприклад при частоті 1 МГц ультразвук поширюється в повітрі на 5 см. Коефіцієнт поглинання ультразвуку у воді приблизно в 1000 менший, ніж у повітрі. Це дозволяє здійснювати зв'язок і гідкацію у воді на ультразвукових частотах. За допомогою імпульсів ультразвукових ехолотів визначають глибину моря під кораблем, виявляють косяки риб. Ультразвукові хвилі проникають у тверді тіла на глибину понад 10 м. Таку властивість покладено в основу роботи ультразвукових дефектоскопів, дія яких ґрунтується на ехометоді і тіншовому методі. Методи ультразвуку дефектоскопії застосовуються для діагностики деяких захворювань. Ультразвуки великої амплітуди застосовують для механічної обробки твердих матеріалів. За допомогою ультразвукових методів вивчають особливості молекулярної структури речовини, визначають енергію взаємодії молекул, вивчають взаємодію звукових квантів, електронами і ядрами атомів.

Коливання з частотами нижче 16 Гц (інфразвуки) слабко поглинаються в різних середовищах, а тому поширюються у воді, повітрі та земній корі на великі відстані. Це явище застосовують для визначення місць сильних вибухів, епіцентрів землетрусів, піднесення цунамі. Приймають інфразвукові хвилі спеціальними мікрофонами, мікрофонами та вібраторами.

При русі джерела звуку у повітрі з швидкістю, яка менша за швидкість звуку, збуджені джерелом хвилі поширюються з швидкістю практично рівною швидкості звуку при атмосферному тиску. Зовсім іншим є характер поширення звуку у повітрі від джерела, що рухається з надзвуковою швидкістю. При такому русі джерела звуку відбувається його зіткнення з частинками повітря, які тоді починають рухатися і внаслідок цього поблизу джерела звуку виникають імпульси стиску, що поширюються в усіх напрямках з швидкістю звуку у вигляді сферичних хвиль. В своїй сукупності вони утворюють у просторі конічну поверхню, у вершині якої знаходиться джерело звуку. За конічною поверхнею збуджень середовища немає і така поверхня виступає як ударна хвиля. В ударній зоні (рухомій разом з джерелом звуку поверхні) відбуваються стрімкі подібні зміни тиску, температури, густини і швидкості руху часток середовища.

Ударні хвилі виникають при вибухах, сильній грозі, детонаціях. При русі тіл у середовищах з надзвуковими швидкостями

ня ударних хвиль витрачається частково їх кінетична енергія руху тіла зменшується, на тіло діє сила опору, яка змінює його форми (ракети, реактивні літаки, снаряди та ін. мають гостролобими з малим поперечним перерізом).

Контрольні запитання

Швидкість поширення хвилі.

Як залежить швидкість хвилі від параметрів струни й початкових умов

Енергія пружної хвилі (виведення).

Рівняння вектора густини потоку енергії.

Яка природа звуку? Які пружні хвилі називають ультразвуком, а які – інфразвуком?

Що називають силою звуку?

Запишіть закон зміни сили звуку при поширенні в середовищі.

Від яких величин залежить швидкість звуку в газі?

Назвіть приклади застосування ультразвуку та інфразвуку.

10 ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ

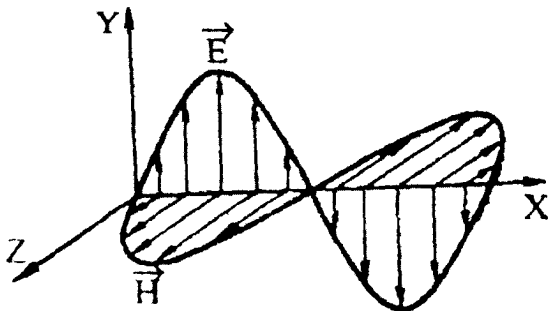
10.1 Електромагнітні хвилі їх властивості

Стверджувати, що в даній точці простору існує тільки електричне або тільки магнітне поле не можна. Змінні електричне і магнітне поле взаємозв'язані, вони підтримують одне одного і можуть існувати незалежно від джерела, яке їх породило, поширюючись просторі у вигляді електромагнітної хвилі.

Електромагнітні хвилі – це змінне електромагнітне поле, поширюється в просторі.

З теорії Максвелла випливає, що **електромагнітні хвилі – перпендикулярні**, вектори $\vec{E}$ і $\vec{H}$ взаємно перпендикулярні і лежать у площині перпендикулярній до вектора $\vec{v}$ – швидкості поширення хвилі.

В електромагнітній хвилі вектори $\vec{E}$ і $\vec{H}$ завжди коливаються однакових фазах, одночасно досягають максимуму, одночасно ретворюються в нуль (рис. 10.1).



10.1 – Коливання векторів електричної $\vec{E}$ і магнітної $\vec{H}$ напруженостей

Швидкість поширення хвилі. За теорією Максвелла швидкість поширення електромагнітних хвиль – величина скінчена, вони визначається електричними і магнітними властивостями середовища, в якому поширюється електромагнітна хвиля

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu}},$$
 де

і μ_0 – електрична і магнітна сталі, ϵ і μ – відносні діелектрична і магнітна проникності середовища.

Якщо електромагнітна хвиля поширюється у вакуумі, то $\epsilon = 1$, $\mu = 1$. Обчислимо швидкість поширення електромагнітної хвилі у вакуумі:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Ф}}{\text{м}} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}}} = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Швидкість поширення електромагнітних хвиль у вакуумі дорівнює швидкості світла у вакуумі і $v = c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$.

Довжина хвилі. Відстань, на яку переміщується електромагнітна хвиля за час, що дорівнює одному періоду колювання, називають **довжиною хвилі**.

Якщо v – швидкість поширення електромагнітної хвилі в одне середовищі, T – її період, ν – частота, а λ – довжина, то $\lambda = vT$ або $\lambda = c/\nu$.

Для вакууму: $\lambda_0 = cT$ або $\lambda_0 = c/\nu$.

Оскільки швидкість хвилі залежить від ϵ і μ середовища, то, коли хвиля переходить з одного середовища в інше, змінюються v і λ , а частота колювань залишається тією самою.

Якщо хвиля переходить з вакууму в середовище з діелектричною проникністю ϵ і магнітною μ , то довжина хвилі зменшується:

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon \mu}},$$

де λ_0 – довжина хвилі у вакуумі.

Найпростішою системою, яка випромінює електромагнітні хвилі, є коливальний електричний диполь. Диполь – це система з двох різноіменних точкових зарядів $+q$ і $-q$, розміщених на відстані l один від одного.

10.2 Диференціальне рівняння електромагнітної хвилі

Із рівняння Максвелла випливає, що вектори напруженостей $\vec{E}$ і $\vec{H}$ змінного електромагнітного поля задовольняють хвильові рівняння типу:

$$\Delta y = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

$$\Delta E = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}, \quad (10.1)$$

$$\Delta H = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}, \quad (10.2)$$

де v – фазова швидкість,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \text{оператор Лапласа}$$

В вакуумі при ($\epsilon = 1, \mu = 1$) швидкість електромагнітних хвиль співпадає з швидкістю світла. Так як $\epsilon\mu > 1$, то швидкість поширення електромагнітних хвиль в середовищі завжди менша ніж у вакуумі.

Із рівнянь Максвелла випливає, що в електромагнітній хвилі вектори $\vec{E}$ і $\vec{H}$ коливаються в однакових фазах (рис. 10.1).

Від хвильових рівнянь (10.1) і (10.2) можна перейти до рівнянь

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}, \quad (10.3)$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}, \quad (10.4)$$

де індекси y і z при E і H підкреслюють лише те, що вектори $\vec{E}$ і $\vec{H}$ напрямлені вздовж взаємно перпендикулярних осей y і z .

Рівняння (10.3) і (10.4) задовольняють плоскі **монохроматичні електромагнітні хвилі** (електромагнітні хвилі однієї строго в значеній частоти), описані рівняннями:

$$E_y = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi), \quad (10.5)$$

$$H_z = H_0 \cos(\omega t - kx + \varphi), \quad (10.6)$$

де H_0 – відповідно амплітуди напруженостей електричного і магнітного полів хвилі, ω – кутова частота хвилі, $k = \omega/v$ – хвильове число, φ – початкова фаза коливань в точках з координатою 0.

В рівняннях (10.5) і (10.6) φ однакові, поскільки коливання електричного і магнітного векторів електромагнітної хвилі проходять з однаковою фазою.

10.3 Вектор Пойнтінга

Можливість виявлення електромагнітних хвиль свідчить про те, що вони переносять енергію.

Об'ємна густина W енергії електромагнітної хвилі складається з об'ємних густин $W_{\text{ел.}} = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2}$ і $W_{\text{м.}} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}$ електричного і магнітного полів:

$$W = W_{\text{ел.}} + W_{\text{м.}} = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}. \quad (10.7)$$

Враховуючи вираз: $\sqrt{\epsilon_0 \epsilon} E = \sqrt{\mu_0 \mu} H$ отримаємо, що густина енергії електричного і магнітного полів в кожен момент часу однакова, тобто $W_{\text{ел.}} = W_{\text{м.}}$. Тому

$$W = 2W_{\text{ел.}} = \epsilon_0 \epsilon E^2 = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \sqrt{\epsilon \mu} E \cdot H.$$

Помноживши густину енергії W на швидкість v поширення хвилі в середовищі

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}, \quad (10.8)$$

отримаємо модуль густини потоку енергії

$$S = W \cdot v = E \cdot H. \quad (10.9)$$

Так як вектори E і H взаємно перпендикулярні і утворюють напрямом поширення хвилі правовинтову систему, то напрям вектора $[EH]$ співпадає з напрямом переносу енергії, а модуль цього вектора дорівнює EH . Вектор густини потоку електромагнітної енергії називається вектором **Умова-Пойнтінга**.

$$S = [EH]. \quad (10.1)$$

Якщо електромагнітні хвилі поглинаються або відбиваються тілами (ці явища підтверджені дослідями Г.Герца), то із теорії Максвелла випливає, що електромагнітні хвилі повинні чинити на тіло тиск. Тиск електромагнітних хвиль пояснюється тим, що під дією електричного поля хвилі заряджені частинки речовини починають упорядковано рухатися і піддаються зі сторони магнітного поля дії сил Лоренца. Значення цього тиску мізерне.

Існування тиску електромагнітних хвиль приводить до висновку про те, що полю електромагнітної хвилі притаманний певний імпульс. Із теорії випливає, що імпульс

$$p = \frac{W}{c},$$

де W – енергія електромагнітного поля.

Виражаючи імпульс як $p = mc$, отримаємо $p = mc = \frac{W}{c}$, звідки:

$$W = mc^2. \quad (10.11)$$

Ця відповідність між масою і енергією вільного електромагнітного поля є **універсальним законом природи**.

Розглянуті властивості електромагнітних хвиль, визначені теорією Максвелла, повністю підтверджуються дослідями Герца, Лебедева і висновками теорії відносності, які зіграли вирішальну роль для підтвердження і швидкого признання цієї теорії.

10.4 Передача інформації за допомогою електромагнітних хвиль

Джерелом електромагнітних хвиль може бути будь-який електричний коливальний контур або провідник по якому тече змінний струм, оскільки для збудження електромагнітних хвиль потрібно створити в просторі змінне електричне поле чи змінне магнітне поле.

У закритому коливальному контурі електромагнітне поле локалізується в тій області простору, де розміщений цей контур, тому електромагнітних хвиль він не випромінює.

Використання коливального контуру для випромінювання електромагнітних хвиль запропонував Г.Герц. Він ввів у коливальний контур (рис. 10.2) іскровий проміжок 1, на який подавали змінний струм з вторинної обмотки індукційної котушки 2.

Коли різниця потенціалів між обкладками конденсатора стає дуже великою, в іскровому проміжку виникала іскра, яка заряджала контур і водночас від'єднувала („закорочувала”) індукційну котушку 2. У цей час в контурі здійснювалася серія електромагнітних коливань. Якщо іскра зникла, контур розмикався і коливання припинялись. Але тоді індукційна котушка заряджала конденсатор нових пір, поки в іскровому проміжку знову не виникала іскра, а в контурі здійснювалася повторна серія електромагнітних коливань.

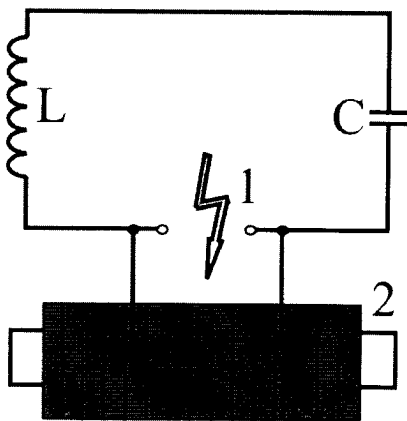


Рисунок 10.2 – Дослід Герца

Щоб збільшити частоту коливань і тим самим підвищити інтенсивність електромагнітного випромінювання контуру, Герц зменшив індуктивність і ємність контуру, розсунувши пластини конденсатора (рис. 10.3). Він здійснив так званий **відкритий коливальний контур** (вібратор Герца) – прямолінійний провідник з іскровим проміжком по середині, який має дуже малу ємність та індуктивність (рис. 10.4).

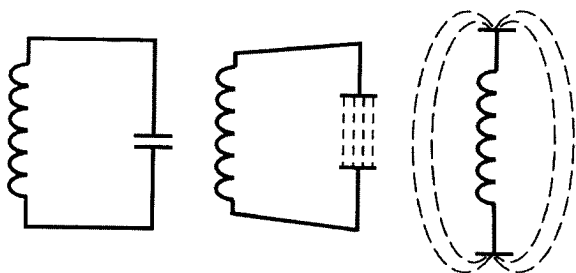


Рисунок 10.3 – Підвищення інтенсивності електромагнітного випромінювання контуру

Оскільки $\nu = \frac{1}{T}$ і $T = 2\pi\sqrt{LC}$, то із зменшенням L і C частота коливань зростає. У цьому вібраторі змінне електричне поле не було зосереджене всередині конденсатора, а оточувало вібратор зовні,

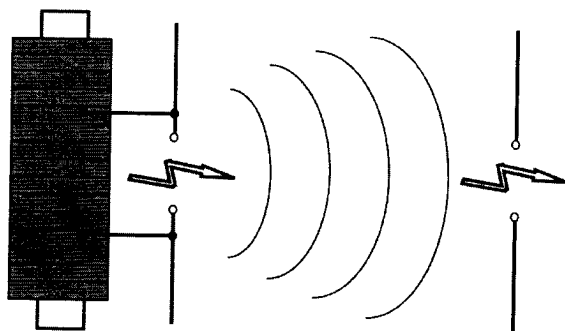


Рисунок 10.4 – Вібратор Герца

отно підвищило інтенсивність електромагнітного випромінювання. Електромагнітне випромінювання відкритого вібратора (10.4) Герц реєстрував за допомогою другого вібратора, на якого в резонанс з випромінювачем (резонатором). Коли електромагнітні хвилі досягали резонатора, у ньому виникали електромагнітні коливання, які супроводжувалися проскакуванням іскри між іскровий проміжок.

Користуючись вібратором і резонатором Герц установив, що електромагнітні хвилі **мають властивості притаманні будь-яким хвилям**: відбиваються від перешкод (металевих), заломлюються на межі двох середовищ (діелектричних), інтерферують одна з одною.

За допомогою вібратора Герц добув плоскі хвилі довжиною від 1,6 до 10 м. Герц показав, що електромагнітні хвилі – поперечні. Він добув стоячі електромагнітні хвилі і за їх допомогою визначив швидкість поширення електромагнітних хвиль, яка збіглася з швидкістю світла.

Дослідженнями російських вчених П.М. Лебедева і А.А. Глагольської-Аркадьєвої було доведено: усі властивості електромагнітних хвиль збігаються з властивостями світла.

З цього випливає висновок: видиме світло – це електромагнітне випромінювання.

Наступні дослідження підтвердили, що не тільки видиме світло, а й інфрачервоне, ультрафіолетове, рентгенівське і гамма-випромінювання мають електромагнітну природу, тобто електромагнітні хвилі мають дуже широкий діапазон частот або довжин хвиль. Електромагнітні хвилі діляться на декілька видів: радіохвилі, звукові хвилі, рентгенівські і гамма-випромінювання (див. л. 10.1). Що межі між різними видами електромагнітного випромінювання дуже умовні.

**Таблиця 10.1 – Діапазони довжин (частот) хвиль
електромагнітних хвиль**

Випромінювання	Довжини хвиль (м)	Частоти хвиль (Гц)	Джерело випромінювання
Радіохвилі	10^3 - 10^{-4}	$3 \cdot 10^5$ - $3 \cdot 10^{12}$	Коливальний контур, вібратор Герца, масовий випромінювач, ламповий генератор
Світлові хвилі			
Інфрачервоне випромінювання	$5 \cdot 10^{-4}$ - $8 \cdot 10^{-7}$	$6 \cdot 10^{11}$ - $3,75 \cdot 10^{14}$	Лампи
Видиме світло	$8 \cdot 10^{-7}$ - $4 \cdot 10^{-7}$	$3,75 \cdot 10^{14}$ - $7,5 \cdot 10^{14}$	Лазери
Ультрафіолетове випромінювання	$4 \cdot 10^{-7}$ - 10^{-9}	$7,5 \cdot 10^{14}$ - $3 \cdot 10^{17}$	
Рентгенівські випромінювання	$2 \cdot 10^{-9}$ - $6 \cdot 10^{-12}$	$1,5 \cdot 10^{17}$ - $5 \cdot 10^{19}$	Трубка Рентгена
γ-випромінювання	$< 6 \cdot 10^{-12}$	$> 5 \cdot 10^{19}$	Радіоактивний розпад, ядерні процеси, космічні процеси

Контрольні запитання

- 1 Означення електромагнітної хвилі.
- 2 Властивості електромагнітної хвилі.
- 3 Що потрібно зробити для переходу до прийому коротких хвиль: зблизити чи розсунути обкладки конденсатора, увімкненого в коливальний контур приймача?
- 4 Як зміниться частота електромагнітної хвилі, якщо індуктивність відкритого коливального контура збільшити у 4 рази?
- 5 Описати дослід Герца.
- 6 Що таке вектор Пойнтінга?
- 7 Як зв'язані енергія і імпульс електромагнітної хвилі?

11 ХВИЛІ. ДИСПЕРСІЯ

11.1 Дисперсія хвиль

Дисперсією світла називають явища, зумовлені залежністю показника заломлення речовини від частоти (або довжини) світлової хвилі:

$$D = \frac{dn}{d\omega}. \quad (11.1)$$

Якщо із збільшенням частоти ω світла показник заломлення n збільшується $\left(\frac{dn}{d\omega} > 0\right)$, дисперсію називають **нормальною**, а якщо збільшенням частоти світла показник заломлення зменшується $\left(\frac{dn}{d\omega} < 0\right)$ – **аномальною**. Нормальна дисперсія спостерігається для всіх частот, які далекі від поглинання, а аномальна дисперсія спостерігається в смугах поглинання.

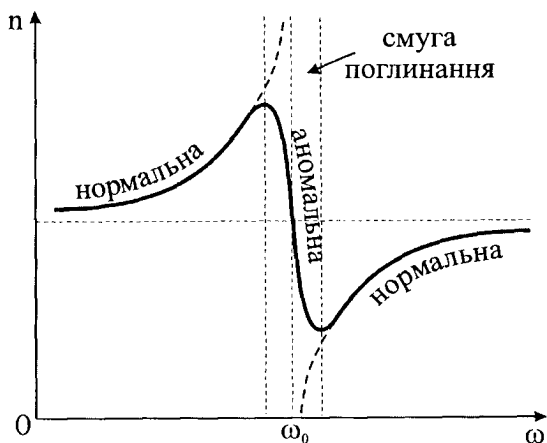


Рисунок 11.1 – Залежність показника заломлення n світла від частоти ω

Оскільки показник заломлення визначається відношенням швидкостей світла у вакуумі і даному середовищі ($n = c/v$) очевидно, в останньому швидкість червоного світла, яке найменше заломлюється – найбільша, а фіолетового – найменша. У вакуумі швидкість світла будь-якого кольору однакова.

Відсутність дисперсії світла у міжзоряному просторі свідчить про те, що цей простір можна вважати вакуумом. Коли б це було так, дисперсія світла виявлялася б, наприклад, у спостереженні затемнення подвійних зір. На початку затемнення колір зірки змінювався б від нормального до синього, оскільки відповідно йому світло поширюється в прозорому середовищі з найменшою швидкістю, у кінці затемнення – від червоного до нормального, оскільки швидкість червоного світла найбільша.

З кількісного боку дисперсія світла задовільно описується класичною теорією. Суть її зводиться до врахування впливу на середовище вимушених коливань електронів, що збуджуються електричним полем світлової хвилі. Ідеться про зовнішні, так звані оптичні електрони атомів: електрони внутрішніх оболонок, завдяки великим власним частотам практично не збуджуються.

Для спрощення розрахунків припустимо, що в атомі є лише один оптичний електрон. Запишемо для нього, за аналогією до механічних коливань, рівняння динаміки вимушених коливань:

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x} + eE \sin \omega t, \quad (11.1)$$

де m – маса електрона, e – заряд електрона, kx – квазіпружна сила, $\gamma\dot{x}$ – сила аналогічна силі тертя, eE – вимушуюча сила.

З переліку діючих сил випливає, що йдеться про формальну модель поведінки електрона в атомі. Ніякої квазіпружної сили, сили опору, пропорційної швидкості електрона, насправді не має.

Достовірну поведінку електрона в атомі і механізми дисперсії світла розкриває квантова механіка. Класична теорія дисперсії стосується з метою спрощення і тому, що результати її збігаються з результатами квантової механіки.

Поділивши члени рівняння (11.2) на m і ввівши заміни

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad \frac{\gamma}{m} = 2\beta,$$

дістанемо

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} - \omega_0^2 x = \frac{e}{m} E_0 \sin \omega t, \quad (11.3)$$

Амплітуда і зсув фази вимушених коливань електрона визначаються формулами:

$$x_0 = \frac{\frac{e}{m} E_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\beta^2 \omega^2}}, \quad (11.4)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

ω_0 – власна частота коливання електрона, β – коефіцієнт загасання коливань.

Згідно формули (11.4) миттєве значення зміщення електрона в будь-який момент часу можна задати в вигляді

$$x(t) = \frac{\frac{e}{m} E(t)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\beta^2 \omega^2}}.$$

У результаті зміщення електронів атоми середовища будуть поляризуватися, тобто характеризуватися електричними моментами $p = ex$. Якщо кількість атомів в одиниці об'єму N , то вектор поляризації середовища

$$P(t) = exN = \frac{\frac{e^2}{m} N}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\beta^2 \omega^2}} E(t) = \varepsilon_0 \chi E(t),$$

χ – діелектрична сприйнятність.

Визначаючи з останньої рівності χ , можна знайти діелектричну сталу середовища:

$$\varepsilon = 1 + \chi = 1 + \frac{\frac{e^2}{\varepsilon_0 m} N}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\beta^2 \omega^2}}.$$

За формулою $n = \sqrt{\epsilon}$ можна виразити залежність показника заломлення середовища від частоти світла ω :

$$n^2 = 1 + \frac{\frac{e^2}{\epsilon_0 m} N}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\beta^2 \omega^2}}. \quad (11.6)$$

Проаналізуємо знайдену залежність. Для більшої наочності тимчасово знаходимо втрати енергії електрона на випромінювання тобто членом $4\beta^2 \omega^2$ знехтуємо. Дістанемо формулу Зельмейєра

$$n^2 = 1 + \frac{\frac{e^2}{\epsilon_0 m} N}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (11.7)$$

З формули (11.6) випливає, що при $\omega \rightarrow \omega_0$ показник заломлення збільшується, отже, має місце нормальна дисперсія (рис. 11.1). При переході через точку $\omega = \omega_0$ крива дисперсії згідно (11.6) повинна зазнавати розриву і змінюватися від $+\infty$ до $-\infty$. Фактично ж, завдяки певному значенню члена $4\beta^2 \omega^2$, при переході через цю точку коефіцієнт заломлення стрибкоподібно змінюється від $n > 1$ до $n < 1$. У цій області проявляється аномальна дисперсія. Після переходу цієї області показник заломлення зі збільшенням частоти зростає, з'являється область нормальної дисперсії. Важливо, що при $n < 1$ швидкість світлової хвилі в речовині перевищує швидкість світла у вакуумі. Проте це не суперечить теорії відносності, оскільки йдеться про фазову, а не групову швидкість.

11.2 Фазова і групова швидкість

Строго монохроматичних хвиль не існує. Тому виникає питання, що саме слід розуміти під швидкістю поширення світлового сигналу, який вимірюють дослідним шляхом.

Усі приймачі світла реагують на енергію, тому в дослідах вимірюють швидкість перенесення енергії світловим сигналом і називають її **груповою швидкістю**. Вона відрізняється від швидкості поширення фази монохроматичної хвилі, яку називають **фазовою**

істю. Фазова швидкість являє собою чисто розрахункову величину.

Для деталізації введених понять розглянемо дві хвилі, амплітуд яких однакові, а різниця між частотами незначна, тобто

$$E_1 = E_0 \cos(\omega t - kx); E_2 = E_0 \cos[(\omega + d\omega)t - (k + dk)x].$$

При додаванні одержимо

$$E \sim 2E_0 \cos\left(\frac{t d\omega}{2} - \frac{x dk}{2}\right) \cos(\omega t - kx).$$

Якщо спостерігач рухається разом із хвилею і спостерігає її в ітій самій фазі, то для нього виконується умова

$$\omega t - kx = \text{const}. \quad (11.7)$$

Швидкість переміщення спостерігача, дорівнюватиме фазовій шості хвилі v_ϕ , яка визначається з умови:

$$v_\phi = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}.$$

Акщо ж інший спостерігач рухається разом із максимумом штиди групи хвиль, тобто з максимумом енергії, то для нього виконуватись умова

$$\cos\left(\frac{t d\omega}{2} - \frac{x dk}{2}\right) = 1$$

$$\frac{t d\omega}{2} - \frac{x dk}{2} = 0. \quad (11.8)$$

Під **групою хвиль** розуміють хвильове утворення, яке займає тільки малу ділянку спектра, в межах якої можна вважати величину зміни фазової швидкості пропорційною зміні довжини хвилі. зумови (11.8) знаходимо вираз для визначення швидкості поширення максимуму амплітуди групи хвиль, тобто групову швидкість

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk}.$$

Враховуючи, що $\omega = v_\phi k$, маємо

$$u = \frac{d(v_\phi k)}{dk} = v_\phi + k \frac{dv_\phi}{dk}. \quad (11.9)$$

Оскільки $k = 2\pi/\lambda$, а $\frac{d}{dk} = \frac{d}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dk}$ і $\frac{d\lambda}{dk} = \frac{\lambda^2}{2\pi}$, вираз (11.9) має вигляду:

$$u = v_\phi + \lambda \frac{dv_\phi}{d\lambda}. \quad (11.10)$$

Формулу (11.10) одержав Дж. Релей і вона носить його ім'я.

Групова швидкість характеризує швидкість поглинання енергії групи хвиль. В усіх методах вимірювання швидкості світла вимірюють групову швидкість. Фазова швидкість не має нічого спільного зі швидкістю перенесення енергії, вона тільки встановлює зв'язок між фазами коливань у різних точках простору. Фазову швидкість виміряти безпосередньо неможливо, її визначають за допомогою співвідношення $v_\phi = c/n$, де c – швидкість світла у вакуумі, n – показник заломлення середовища.

Якщо $\frac{dv_\phi}{d\lambda} = 0$, то $u = v_\phi$, тобто фазова швидкість і групова збігаються. Цей випадок має місце у вакуумі. Якщо $\frac{dv_\phi}{d\lambda} > 0$ (нормальна дисперсія), то $u < v_\phi$. Ця нерівність справджується при поширенні світла в склі та прозорих середовищах. Якщо $\frac{dv_\phi}{d\lambda} < 0$ (аномальна дисперсія), то $u > v_\phi$.

При поширенні групи хвиль важливим є питання швидкості поширення переднього фронту хвильового збурення, тобто швидкості тієї хвилі, перед якою немає збурення. Швидкість такого фронту збігається з швидкістю світла у вакуумі c . В ній будь-яке середовище розглядається як вакуум, в якому знаходяться атоми і молекули речовини. Світло поширюється у вакуумі між атомами і молекулами речовини зі швидкістю c . Коли світлове збурення досягає будь-якого атома, то його електрони і ядра приходять в рух і стають центрами вторинних електромагнітних хвиль. Ці хвилі накладають

первинні хвилі. Електрони і ядра мають певну енергію і поки йдуть у коливальний рух, вони не випромінюють вторинних а попередній фронт хвильового збурення поширюється з тією швидкістю що й у вакуумі. Внаслідок того, що передній несе незначну енергію, а приймачі світла недостатньо чутливі вимірюванні швидкості світла в будь-яких середовищах $u < c$.

11.3 Стоячі хвилі

Стоячі хвилі утворюються в результаті додавання двох звуків плоских хвиль однакового періоду, з однаковими амплітудами і напрямками зміщення точок. Такі хвилі утворюються в реперті додавання прямої і відбитої хвиль на струні, камертоні, поому стовпі духових інструментів і т.д. Стоячі хвилі добре рігаються на нитці, якщо один кінець її прикріпити до штапика і другий до вітки камертона з електромагнітним збудником (рис. 11.2).

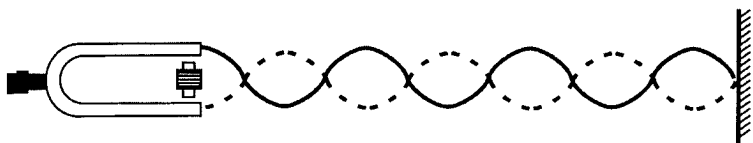


Рисунок 11.2 – Стоячі хвилі

Знайдемо рівняння стоячої хвилі. Припустимо, що пряма хвилю поширюється в напрямі осі X. Зміщення точок, збуджених прямою хвилею, визначимо з рівняння

$$y_1 = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right). \quad (11.11)$$

Зміщення точки у зустрічній хвилі визначимо з рівняння

$$y_2 = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right). \quad (11.12)$$

Результуюче зміщення знайдемо як суму складових y_1 і y_2 :

$$y = 2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \sin \omega t . \quad (11.)$$

Рівняння (11.13) є рівнянням **стоячої хвилі**. Порівнюючи її з рівнянням біжучої хвилі, знаходимо, що множник

$$P = \left| 2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right| \quad (11.)$$

є виразом амплітуди коливання точок у стоячій хвилі. На відмі від біжучої хвилі амплітуда коливання в стоячій хвилі залежить від координати, тобто різні точки коливаються з різними амплітудами

Множник $\sin \omega t$ показує, що точки в стоячій хвилі колиються з тією самою частотою, що й у зустрічних хвилях. Але, відміну від останніх, фаза точок у стоячій хвилі не залежить від координат. Це означає, що в одній півхвилі всі точки мають ту ж фазу ϕ , а в сусідній – $\phi + \pi$. (рис. 11.3).

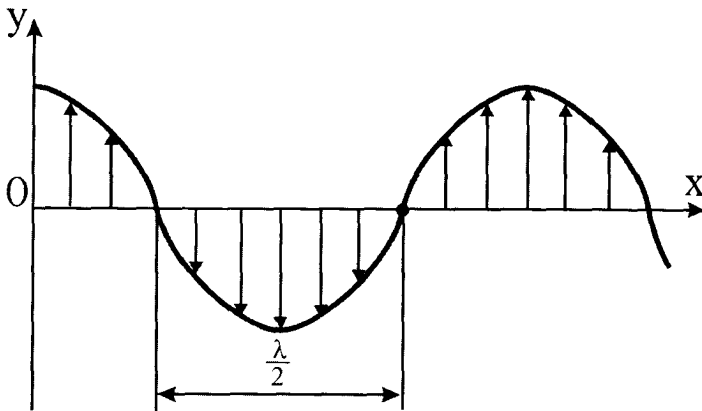


Рисунок 11.3 – Коливання точок середовища у стоячій хвилі

Визначимо координати вузлів у стоячій хвилі, тобто координати точок, для яких амплітуда дорівнює нулю. З виразу амплітуди (11.14) випливає, що вузли будуть у таких точках, для яких

$$\cos \frac{2\pi x}{\lambda} = 0$$

або, якщо

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm(2n+1)\frac{\pi}{2},$$

Відстані між вузлами будуть

$$x = \pm(2n+1)\frac{\lambda}{4}, \quad (11.15)$$

$n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Відстань між двома сусідніми вузлами дорівнює

$$x_{n+1} - x_n = \frac{\lambda}{2}.$$

Точки в стоячій хвилі, які коливаються з найбільшими амплітудами, називаються **пучностями**. Координати пучностей визначаються за умови максимуму амплітуди (11.14):

$$\left| \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right| = 1$$

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm n\pi,$$

$n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Координати пучностей у стоячій хвилі мають значення:

$$x_n = \pm n \frac{\lambda}{2} \pi, \quad (11.16)$$

$n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Розглянемо поведінку точок у стоячій хвилі, які містяться на межі відбивання біжучої хвилі. На межі буде вузол, якщо хвиля відбивається від середовища густішого порівняно з тим середовищем, в якому вона поширюється. Якщо хвиля відбивається від середовища менш густого, порівняно з середовищем в якому поширюється хвиля, то на межі відбивання буде пучність. Знаючи, що точки в стоячій хвилі утворюються в тих точках, де додаються коливання в протилежних фазах, приходимо до висновку, що в процесі відбивання хвилі від густішого середовища її фаза зміниться на протилежну. Оскільки фаза змінюється на протилежну на відстані

пів довжини хвилі, то кажуть, що внаслідок відбивання від гущого середовища відбувається „втрата півхвилі”.

Коли хвиля відбивається від середовища з меншою густиною її фаза не змінюється, тому півхвиля не втрачається.

Розподіл і потік енергії в стоячій хвилі. Для цього продиференціюємо рівняння стоячої хвилі (11.13) по x і t і знайдемо за номірності зміни деформації середовища ϵ і швидкості частинок стоячої хвилі:

$$\epsilon = -2A \frac{2\pi}{\lambda} \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \sin \omega t, \quad (11.17)$$

$$v = 2A\omega \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos \omega t. \quad (11.18)$$

З рівнянь (11.17) і (11.18) видно, що деформації середовища швидкості частинок також утворюють стоячі хвилі. Вузли і пучності швидкості збігаються з вузлами і пучностями зміщень. Вузли деформації припадають на пучності зміщень і навпаки, пучності деформацій на вузли зміщень.

Коли точки в стоячій хвилі досягають амплітудного значення їх швидкість і кінетична енергія дорівнює нулю, а їх потенціальна енергія максимальна. Ця потенціальна енергія хвилі зосереджена в основному в області вузлів (там пучності деформацій).

Коли точки в стоячій хвилі проходять положення рівноваги, кінетична енергія стає максимальною: ця енергія хвилі зосереджена в основному в її пучностях (там і пучності швидкостей). Так двічі за період енергія стоячої хвилі перетворюється з потенціальної в кінетичну, перетікаючи з вузлів в сусідні пучності, і навпаки. Середній потік енергії в будь-якому перерізі стоячої хвилі дорівнює нулю.

11.4 Ефект Доплера

Говорячи про сприймання звукових хвиль, треба враховувати взаємний стан джерела і приймача хвиль. Якщо джерело і приймач хвиль нерухомі відносно середовища, яке передає коливання, то частота сприйнятих коливань точно дорівнюватиме частоті коливань джерела ν_0 . Якщо джерело або приймач переміщуються відносно середовища, то частота сприйнятих коливань відрізняється від частоти коливань джерела.

Якщо, наприклад, на пероні вокзалу прислухатися до гудка чого поїзда, то з наближенням його відчувається підвищення гудка, а з віддаленням – помітне зниження. Зміну частоти при відносному русі джерела або приймача звуку називають ефектом Доплера.

Розглянемо різні взаємні стани джерела і приймача хвиль. Джерело коливань S й приймач O нерухомі (відносно середовища, через яке передаються коливання) і розміщені на відстані l (рис. 11.4), частота коливання джерела ν_0 .

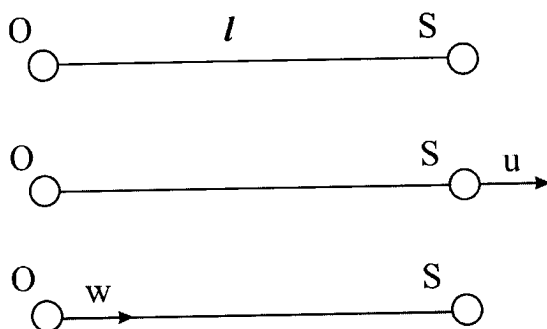


Рисунок 11.4 – Ефект Доплера

Приймач O перше з ν_0 коливань одержить через час $t_1 = \frac{l}{v}$, де v – швидкість хвиль у даному середовищі, а останнє – через час $t_2 = \frac{l}{v + u}$. Усі ν_0 коливання приймач дістане через час $t = t_2 - t_1 = l \left(\frac{1}{v + u} - \frac{1}{v} \right)$. Частота сприйнятих коливань точно дорівнює частоті коливань джерела. Спостерігач в точці O буде чути звук певної висоти (частоти ν).

2. Джерело коливань S віддаляється від приймача O з швидкістю u . Тоді перше з ν_0 коливань приймач в O дістане через час $t_1 = \frac{l}{v}$, а останнє – через $t_2 = \frac{l}{v - u}$ з відстані $(l + u)$. Усі ν_0

коливання дійдуть до приймача за час $t_2 - t_1 = \left(1 + \frac{u}{v}\right)$. Част. сприйнятих коливань

$$\nu_1 = \frac{\nu_0}{1 + \frac{u}{v}}. \quad (11.1)$$

Отже, частота сприйнятих коливань ν_1 менша від частоти джерела ν_0 . Тон звуку від джерела сприймається нижчим.

3. Якщо джерело коливань наближається до приймача О, частоту сприйнятих коливань ν_2 можна знайти за виразом (11.2) узявши швидкість руху джерела u із знаком мінус, а саме:

$$\nu_1 = \frac{\nu_0}{1 - \frac{u}{v}}. \quad (11.2)$$

Спостерігач сприйматиме коливання з частотою ν_2 , більш від частоти джерела ν_0 , звук від джерела сприйматиметься вищим.

4. Джерело S нерухоме, а приймач О наближається до нього швидкістю w . За 1 секунду приймач переміститься на відстань тому повз нього за 1 с пройде кількість хвиль

$$\nu_3 = \nu_0 + \frac{w}{\lambda} = \nu_0 + \frac{w\nu_0}{v}$$

або

$$\nu_3 = \nu_0 \left(1 + \frac{w}{v}\right). \quad (11.3)$$

Звук від джерела сприйматиметься підвищеним.

5. Якщо приймач О віддаляється від джерела звуку S, то частоту сприйнятих коливань ν_4 можна знайти за виразом (11.3), узявши швидкість руху приймача w зі знаком мінус, а саме:

$$\nu_4 = \nu_0 \left(1 - \frac{w}{v}\right). \quad (11.4)$$

У цьому випадку звук джерела буде сприйматись нижчим.

Контрольні запитання

Що називається дисперсією світла?

В яких випадках дисперсію називають нормальною, а в яких – аномальною.

З'ясуйте поняття фазової швидкості.

Яку величину називають груповою швидкістю?

Запишіть співвідношення, яким пов'язані фазова і групова швидкості?

В якому випадку фазова і групова швидкості рівні?

Р'ясуйте суть ефекту Доплера в акустиці.

Чи можна спостерігати ефект Доплера, якщо джерело випромінює суцільний спектр?

Які хвилі називають стоячими?

12 ГЕОМЕТРИЧНА ОПТИКА

12.1 Основні закони геометричної оптики

Оптику поділяють на дві основні частини: **фізичну** і **геометричну**. **Фізична оптика** вивчає явища, в яких проявляються хвильові і корпускулярні властивості світла. Наприклад явища інтерференції і дифракції є проявами хвильових властивостей світла. **Геометрична оптика** вивчає явища в яких проявляються властивості прямолінійного поширення світла в ізотропному середовищі. **Геометрична оптика** розглядає закони поширення світла в різних середовищах на основі уявлення про світловий промінь як ліній, вздовж якої переноситься світлова енергія.

В основі геометричної оптики лежать такі закони:

1. Закон прямолінійного поширення світла. В однорідних середовищах світло поширюється прямолінійно. Доведенням цього є наявність тіні з різкими границями від непрозорих предметів при освітленні їх джерелами малих розмірів. Експерименти показують, що цей закон порушується, якщо світло проходить через дуже малі отвори, причому відхилення від прямолінійного поширення тим більше, чим менший отвір.

2. Закон відбивання світла. Промінь падаючий, промінь відбитий і нормаль поставлена в точку падіння, лежать в одній площині, а кут падіння i_1 дорівнює куту відбивання i'_1 (рис. 12.1.)

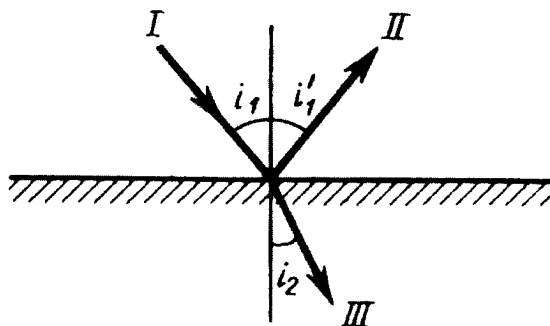


Рисунок 12.1 – Відбивання та заломлення світла

Закон заломлення світла. Промінь падаючий, промінь заломлений і перпендикуляр поставлений в точку падіння, лежать в одній площині. При будь-якому куті падіння відношення синуса кута до синуса кута заломлення є величиною сталою для двох середовищ і називається **відносним показником заломлення** другого середовища відносно першого:

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = n_{21}. \quad (12.1)$$

Закон незалежного поширення світлових променів. Світлові промені, поширюючись у просторі, при перетині не впливають на одного. Розбиваючи світловий потік на окремі світлові пучки (наприклад, за допомогою діафрагм), можна показати, що цілених світлових променів незалежна. Якщо світло падає на цю розділу двох середовищ (двох прозорих речовин), то падаючий промінь I (рис. 12.1) розділяється на два – відбитий II і заломлений III, напрям яких задається законами відбивання і заломлення.

Закон оборотності (принцип оборотності) світлових променів. Відносний показник заломлення двох середовищ дорівнює відношенню їх абсолютних показників заломлення (або показників заломлення) відносно вакууму:

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (12.2)$$

Враховуючи (12.2), закон заломлення (12.1) можна записати у вигляді

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2. \quad (12.3)$$

Із симетрії виразу (12.3) впливає оборотність світлових променів. Якщо обернути промінь III (рис. 12.1.) і заставити його падати на границю розділу під кутом i_2 , то заломлений промінь в першому середовищі буде поширюватись під кутом i_1 , тобто піде в зворотному напрямку вздовж променя I.

Якщо світло поширюється із середовища з більшим показником заломлення n_1 (оптично більш густіше) в середовища з меншим показником заломлення n_2 (оптично менш густіше) ($n_1 > n_2$), наприклад із скла в воду, то, згідно (12.3)

$$\frac{\sin i_2}{\sin i_1} = \frac{n_1}{n_2} > 1$$

заломлений промінь віддаляється від нормалі і кут заломлення більший від кута падіння i_1 (рис. 12.2 а). З збільшенням кута падіння збільшується кут заломлення (рис. 12.2 б, в) до тих пір, поки для деякого кута падіння ($i_1 = i_{гр}$) кут заломлення не буде рівним $\pi/2$. Кут $i_{гр}$ називається **граничним кутом**. При кутах падіння $i_1 > i_{гр}$ падаюче світло повністю відбивається (рис. 12.2 г). По мірі наближення кута падіння до граничного інтенсивність заломленого променя зменшується, а відбитого росте (рис. 12.2 а-в). Якщо $i_1 = i_{гр}$, інтенсивність заломленого променя перетворюється в нуль, а інтенсивність відбитого променя дорівнює інтенсивності падаючого (рис. 12.2 г). При кутах падіння в межах від $i_{гр}$ до $\pi/2$ промінь не заломлюється, а повністю відбивається в перше середовище, причому інтенсивності відбитого і падаючого променів однакові. Це явище називається **повним внутрішнім відбиванням** (рис. 12.2, д).

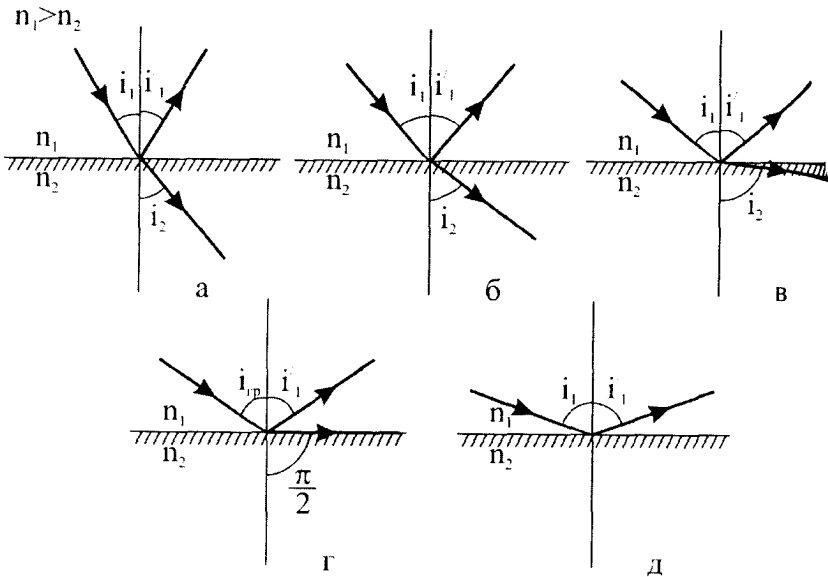


Рисунок 12.2 – Відбивання та заломлення світла

Граничний кут $i_{\text{гр}}$ визначимо із формули (12.3) при підстановці

$$i_2 = \frac{\pi}{2}. \text{ Тоді}$$

$$\sin i_{\text{гр}} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21} = \frac{1}{n_{12}}. \quad (12.4)$$

Рівняння (12.4) задовольняє значенням кута $i_{\text{гр}}$ при $n_2 \leq n_1$.
 Повного відбивання має місце тільки при падінні світла із
овища оптично більш густішого в середовище оптично
густіше.

12.2 Оптичні прилади

У наш час існує величезна кількість оптичних приладів.

Лінзи. Лінзою називають прозоре тіло, обмежене двома сферичними поверхнями. Лінзи виготовляють із скла, кварцу, кристаломаси і т.д. По зовнішній формі лінзи поділяють на: 1) двовипуклі, 2) плосковипуклі, 3) двояковгнуті, 4) плосковгнуті, 5) вогнуті, 6) вгнотовипуклі (рис. 12.3). За оптичними властивостями лінзи поділяються на збірні і розсіювальні.

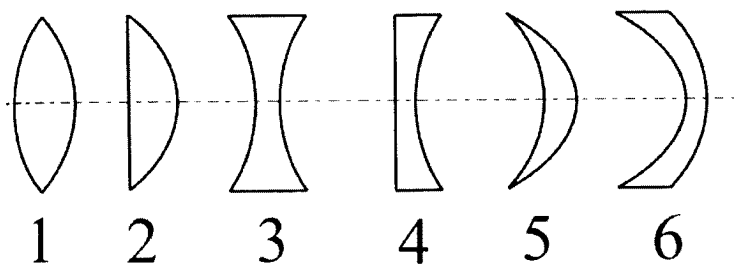


Рисунок 12.3 – Різні форми оптичних лінз

Тонкою називається лінза, товщина якої значно менша радіусу кривизни її сферичних поверхонь. Пряма, яка проходить через центр кривизни поверхонь лінзи, називається **головною оптичною оссю**.

Для всякої лінзи існує точка, яку називають **оптичним язотом лінзи**, яка лежить на головній оптичній осі і володіє тією

властивістю, що промені які проходять через неї не заломлюються. Будь яка пряма, що проходить через оптичний центр лінзи і співпадає з головною оптичною віссю називається **побічною оптичною віссю**.

Лінза у якої товщина в центрі більша, а ніж біля краю, називається **опуклою лінзою**.

Якщо товщина лінзи в центрі менша, ніж біля краю, то вона називається **вгнутою лінзою**.

Якщо на опуклу лінзу, що знаходиться в повітрі або у вакуумі падають промені паралельні до головної оптичної осі, то вони збираються лінзою в одній точці F на цій осі. Тому опуклу лінзу називають **збиральною** (рис. 12.4). Точка F називається головним **фокусом лінзи**. У лінзи є ще другий головний фокус, який міститься на головній оптичній осі з другого боку лінзи на такій самій відстані.

Площина, яка проходить через фокус перпендикулярно до головної оптичної осі, називається **фокальною площиною**.

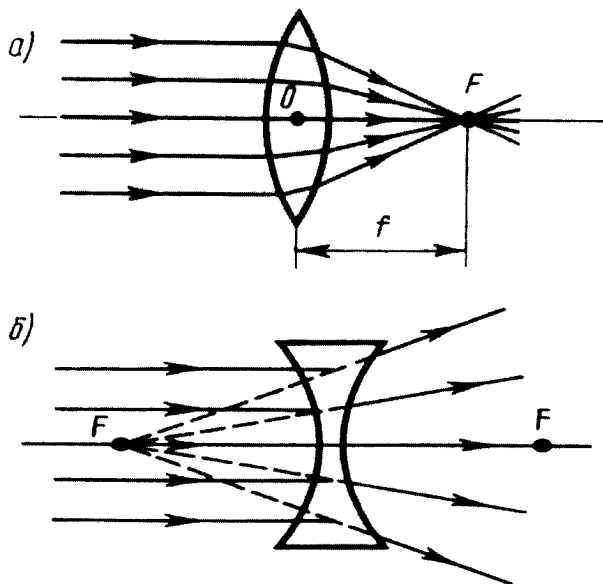


Рисунок 12.4 – Фокус в збірній і розсіювальній лінзі

Якщо на вгнуту лінзу падають промені, паралельні до головної оптичної осі, то вони відхиляються від оптичної осі так, що продовження цих променів перетинаються в точці F на головній оптичній осі. Точка F називається **фокусом**, причому цей фокус є вогнищем. Вгнуту лінзу ще називають розсіювальною (рис. 12.4). Відстань від фокуса до оптичного центра називають **фокусною відстанню** і позначають літерою F. Величину обернену фокусній відстані, називають **оптичною силою лінзи**:

$$D = \frac{1}{F}, \quad (12.5)$$

(дптр) – діоптрія.

Оптична сила збиральної лінзи додатна, розсіювальної – від'ємна.

Оптичну силу лінзи можна обчислити за формулою

$$D = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (12.6)$$

де n – показник заломлення лінзи відносно навколишнього середовища, R_1 і R_2 – радіуси кривизни поверхонь лінзи.

Для побудови зображення використовують такі властивості лінзи. Промінь, що проходить через оптичний центр лінзи не заломлюється. Паралельний до головної оптичної осі промінь, пройшовши через збиральну лінзу, йде через фокус, а пройшовши через розсіювальну лінзу, йде так, що його продовження проходить через фокус. Промінь, який виходить із фокуса збиральної лінзи, пройшовши через лінзу, далі йде паралельно до головної оптичної осі.

Якщо відстань від предмета до збиральної лінзи більша за її фокусну відстань, то зображення предмета дійсне, обернене, збільшене (рис. 12.5,а).

Зображення предмета, який знаходиться між збиральною лінзою і її фокусом, є уявним, прямим, збільшеним.

Розсіювальна лінза завжди дає уявне, пряме, зменшене зображення предмета (рис. 12.5,б).

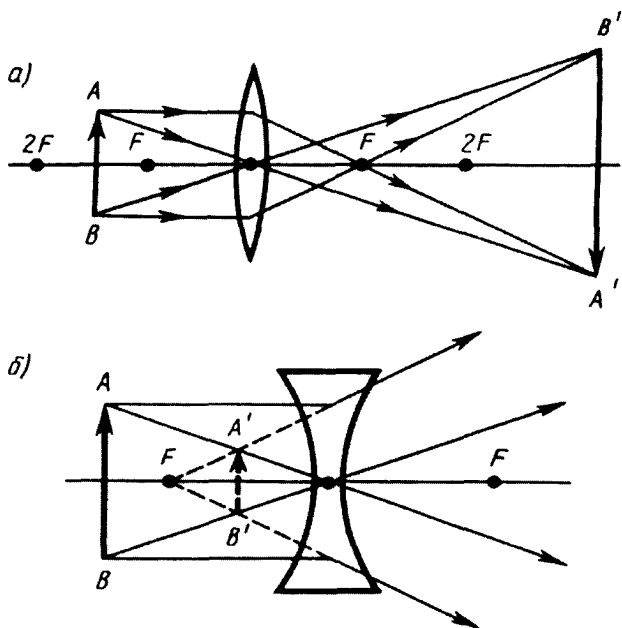


Рисунок 12.5 – Хід променів в збірній і розсіювальній лінзі

Відстань від предмета до лінзи – d , відстань від лінзи до зображення – f і фокусна відстань F зв'язані між собою формулою лінзи:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}. \quad (12.7)$$

Для уявного предмета ($-d$), для уявного зображення ($-f$), для розсіювальної лінзи ($-F$).

Лінійним збільшенням Γ називають відношення лінійного розміру H зображення до лінійного розміру h предмета:

$$\Gamma = \frac{H}{h}. \quad (12.8)$$

Оскільки $\frac{H}{h} = \frac{f}{d}$ то $\Gamma = \frac{f}{d}$.

Фотоапарат. При розміщенні предмета на відстані, більшій за йну фокусну відстань ($d > 2F$) лінза дає його дійсне, зменшене зображення ($\Gamma < 1$). Ця властивість лінзи використовується в фотоапаратах. Основними частинами фотоапарата є об'єктив, який складається із декількох лінз, світлонепроникний корпус, відеошудіафрагма і затвор. В світлонепроникний корпус фотоапарату іщають фотоплівку, яка чутлива до дії світла. На фотоплівці ктив фотоапарату створює дійсне зменшене зображення фотуючого предмету.

Око як оптична система. Оптична система ока людини поді- оптичній системі фотоапарата.

При побудові зображення предметів на сітківці ока основну ь грає заломлення світла на сферичній поверхні границі розділу теми “рогівка – повітря”, додаткове заломлення здійснюється таликом, який знаходиться за райдужною оболонкою. Кристалик : форму двояко випуклої лінзи. Радіус кривизни кристалика змі- ється під дією спеціального м'яза. Цей процес називається **акомо- дією**. Шляхом акомодатії змінюється фокусна відстань оптичної теми ока і отримується чітке зображення предмета на сітківці.

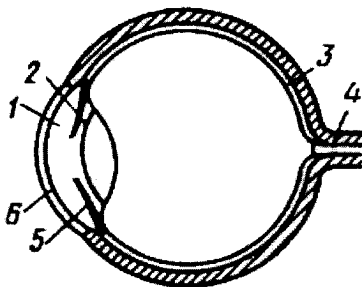


Рисунок 12.6 – Будова ока людини

Окуляри. Якщо оптична система ока дає зображення далеких предметів за сітківкою, то людина страждає **далекозорістю** (рис. 12.7, а). Для виправлення цього дефекту застосовують окуляри з збірними лінзами (рис. 12.7, б).

При **близькозорості** (рис. 12.8, а) ока зображення отримується перед сітківкою. Для виправлення цього дефекту застосовують окуляри з розсіювальними лінзами (рис. 12.8, б).

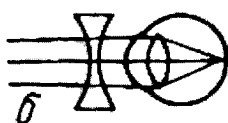
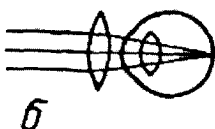
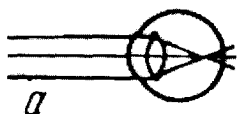
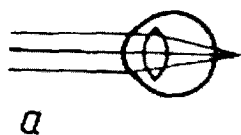


Рисунок 12.7 – Далекозорість Рисунок 12.8 – Близькозорість

Лупа. Лінзи з фокусними відстанями менше 10 см застосовуються для отримання збільшених зображень невеликих предметів. Для цього предмет розміщують перед лінзою на відстані трохи меншій від фокусної. При цьому промені, виходячи з однієї точки предмету, не збираються в одну точку за лінзою, а виходячи з неї розходяться пучком.

Пучок світла, що розходить, при попаданні в око людини сприймається вихідним із однієї точки, в який перетинаються продовження променів. Короткофокусна лінза, використана для отримання збільшених уявних зображень, називається **лупою**. Збільшення лупи:

$$\Gamma_{\text{л}} = \frac{L}{F},$$

де $L \approx 25$ см – відстань найкращого зору.

Мікроскоп. Для отримання великих збільшень застосовують **мікроскоп**. Збільшене зображення малих предметів в мікроскопі отримується за допомогою оптичної системи, яка складається з об'єктива і окуляра. Самий простий мікроскоп – це система з двох лінз. Предмет розміщують перед лінзою, яка служить об'єктивом, на відстані d , яка задовольняє умову $F_1 < d < 2 \cdot F_1$, і розглядається через окуляр, який використовується в якості лупи.

Збільшення Γ , отримане за допомогою мікроскопу, дорівнює добутку збільшення об'єктива Γ_1 на збільшення окуляра Γ_2 , тобто

$$\Gamma_M = \Gamma_1 \cdot \Gamma_2 = \frac{l \cdot L}{F_1 \cdot F_2},$$

відстань між внутрішніми фокусами об'єктива і окуляра (довжина тубуса). Практично збільшення мікроскопа не перевищує 3000.

Проекційний апарат. Для отримання збільшених зображень предметів застосовують проекційні апарати. Діапроектори використовують для отримання нерухомих зображень, за допомогою кіноплівок отримують швидкозмінні кадри зображення, які сприймаються оком людини як рухоме зображення.

В проекційному апараті рисунок чи фотознімок предмета на оригінальній плівці або склі розміщують від об'єктива на відстані d , яка збільшує умову: $F < d < 2F$. Для освітлення плівки використовують електричну лампу або електричну дугу. Зображення яскравою плівкою створюється на екрані за допомогою об'єктива проектора або кінопроектора.

12.3 Рефракція на різних довжинах світлових хвиль

Атмосферна рефракція – це явище, яке полягає в позірному згинанні тіл, спостереження яких ведеться через товщу повітря. Воно зумовлене заломленням світлових променів в атмосфері. За певних умов показник заломлення повітря з віддаленням від поверхні Землі зменшується, а це приводить до того, що світловий промінь від будь-якого об'єкта викривляється.

Внаслідок атмосферної рефракції будь-яке небесне світило з'являється над горизонтом раніше істинного сходу і залишається видимим над горизонтом після істинного заходу його.

Швидкі турбулентні переміщення мас повітря різної густини викликають тремтіння зображення зірок в телескопах і перетворюють їх в розмиті світлові плями, що утруднює спостереження за ними в земних умовах. Неозброєним оком це сприймається як мерехтіння зірок.

Предмети, що знаходяться на горизонті, спостерігаються внаслідок рефракції піднятими над горизонтом.

Іноді повітря біля поверхні Землі настільки прогрівається, що його показник заломлення значно менший від показника заломлен-

ня верхніх шарів повітря. За безвітряної погоди такий стан мож зберігатись досить довго. При цьому промені, які падають ві предмета В на поверхню Землі під великим кутом, можуть зазнавати значного викривлення. Спостерігач А (рис. 12.10, а) при цьому вважає, що промені виходять з В₁. Можливий також випадок, показаний на рис. 12.10, б.

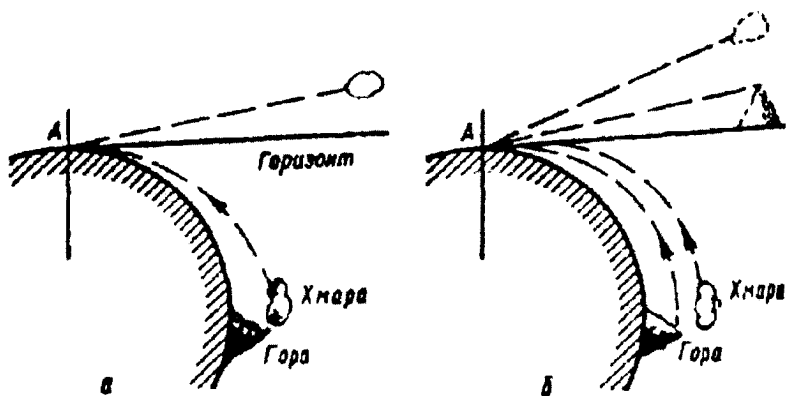


Рисунок 12.9 – Зміщення зображення предметів в наслідок рефракції світла в атмосфері Землі

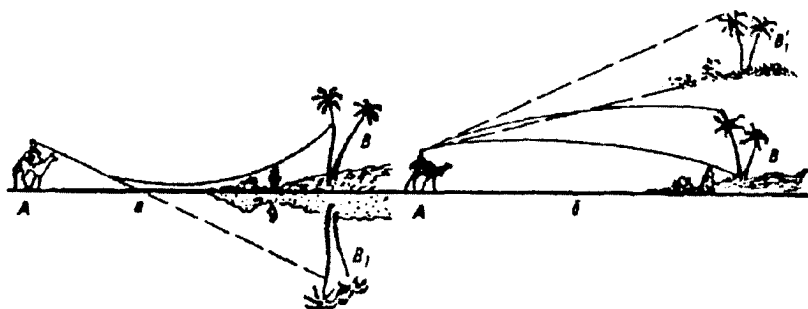


Рисунок 12.10 – Зміщення зображення предметів за умови нагрівання нижніх шарів атмосфери Землі – „міражі”

Контрольні запитання

- 1 Що називається кутом падіння? Кутом відбивання?
- 2 Сформулюйте закон відбивання світла. Заломлення світла.
- 3 З'ясуйте фізичний зміст абсолютного показника заломлення світла.
- 4 Що називається граничним кутом повного відбивання.
- 5 З'ясуйте, чому не може виникнути повного відбивання при переході світла із води в скло.
- 6 На який відстані від збиральної лінзи потрібно розмістити предмет, щоб відстань від предмета до його дійсного зображення була найбільшою?
- 7 Опишіть ґрунтуючись на атомній моделі, чому синє світло поширюється в склі повільніше ніж червоне?
- 8 В якому випадку одна і та ж лінза є розсіювальною, а в якому збиральною?
- 9 Яким повинно бути збільшення мікроскопа щоб повністю використати роздільну здатність його об'єктива?
- 10 Поясніть, чому для того, щоб отримати чітке зображення предмета короткозорий прижмурує очі?
- 11 Які окуляри слід приписати людині яка у воді бачить нормально?
- 12 Як відрізняються окуляри для далекозорих від окулярів для короткозорих?

13 ХВИЛЬОВА ОПТИКА. ІНТЕРФЕРЕНЦІЯ СВІТЛА

13.1 Інтерференція світла. Когерентність

Інтерференцією називають накладання когерентних хвиль, при якому вони стабільно підсилюються або ослаблюються. **Когерентні хвилі** – це хвилі однакової частоти, стабільної різниці фаз та однакового напрямку коливань відповідних векторів.

Інтерференція світла є наслідком прояву його хвильових властивостей. Світло – це електромагнітні хвилі дуже короткої довжини. В електромагнітній хвилі в двох взаємно перпендикулярних напрямках періодично змінюються вектор напруженості електричного поля і вектор напруженості магнітного поля. Проте дія світла на речовину визначається переважно впливом його електричного поля. Пояснюється це тим, що атоми і молекули речовини складаються з електрично заряджених ядер, йонів і електронів; останні зазнають зміщення внаслідок дії електричного поля світлової хвилі. Магнітне поле світлової хвилі може істотно проявлятися лише тоді, коли атом або молекула мають значний магнітний момент. Вектор напруженості електричного поля хвилі називають світловим вектором.

Джерела, які випромінюють хвилі однакової частоти і з сталою різницею фаз, називаються **когерентними**. Від них можна одержати стабільну, достатню для спостереження, інтерференцію хвиль.

Природні джерела світла некогерентні. Кожне з них складається з величезної кількості незалежних елементарних випромінювачів якими є атоми і молекули. Останні в дуже нагрітих тілах збуджуються за рахунок енергії теплового руху. Збуджені атоми і молекули випромінюють надлишок енергії у вигляді світла. Тривалість світіння атома або молекули 10^{-8} с. Такою короткочасною в будь-якій точці буде інтерференція світла. Далі випромінювач може послати хвилю іншої частоти або в іншій фазі.

Для одержання когерентних хвиль світла вдаються до штучних способів, а саме: від одного джерела світла хвилю роздвоюють і спрямовують по двох різних шляхах, після чого, досягаючи одних і тих самих точок, вони інтерферують. Для роздвоєння світлової хвилі широко використовуються явища відбивання і заломлення світла.

Якщо розділення на дві когерентні хвилі відбувається в певній точці O (рис. 13.1). До точки M , в якій спостерігається інтерференційна картина, одна хвиля в середовищі з показником заломлення n_1 пройшла шлях d_1 друга – в середовищі з показником заломлення n_2 – шлях d_2 .

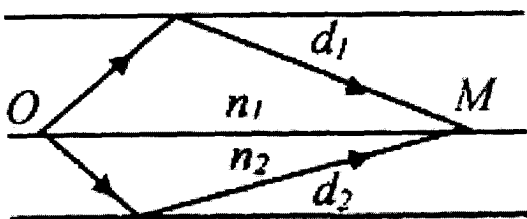


Рисунок 13.1 – Розділення на дві когерентні хвилі

Якщо в точці O фаза коливань дорівнює ωt , то в точці M перша хвиля збудить коливання $E_{01} \cos \omega \left(t - \frac{d_1}{v_1} \right)$, друга хвиля – коливання $E_{02} \cos \omega \left(t - \frac{d_2}{v_2} \right)$, де $v_1 = \frac{c}{n_1}$, $v_2 = \frac{c}{n_2}$ – фазова швидкість першої та другої хвилі.

Різниця фаз δ двох когерентних хвиль від одного джерела:

$$\delta = \omega \left(\frac{d_2}{v_2} - \frac{d_1}{v_1} \right) = \frac{\omega}{c} (d_2 n_2 - d_1 n_1). \quad (13.1)$$

Оскільки

$$\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0},$$

λ_0 – довжина хвилі у вакуумі, то

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} (L_2 - L_1) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta. \quad (13.2)$$

Добуток геометричної довжини d шляху світлової хвилі на показник заломлення цього середовища називається **оптичною до-**

вжаною шляху L , а $\Delta = L_2 - L_1$, різниця оптичних довжин пройдених хвилями шляхів – називається **оптичною різницею ходу**.

Якщо оптична різниця ходу дорівнює цілому числу хвиль у вакуумі

$$\Delta = \pm m \lambda_0 \quad (m=0, 1, 2 \dots), \quad (13.3)$$

то $\delta = \pm 2m\pi$, і коливання, що збуджуються в точці M обома хвилями, знаходяться в однаковій фазі.

Тому $\Delta = \pm m \lambda_0$ – **умова інтерференційного максимуму**.

Якщо оптична різниця ходу

$$\Delta = \pm (2m + 1) \frac{\lambda_0}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (13.4)$$

то $\delta = \pm (2m + 1) \pi$ і коливання, що збуджуються в точці M обидвома хвилями, знаходяться у протифазі і $\Delta = \pm (2m + 1) \frac{\lambda_0}{2}$ – **умова інтерференційного мінімуму**.

13.2 Інтерференція на пластині та клині

Прикладом інтерференції світла, що спостерігається в природних умовах, може служити райдужне забарвлення мильних плівок тонких плівок нафти або мінерального масла, які плавають на поверхні води, кольори мінливості на поверхні загартованих сталей деталей, покритих найтоншим шаром окислів. Усі ці явища зумовлені інтерференцією світла в тонких прозорих плівках, яка виникає внаслідок накладання когерентних хвиль, що відбиваються від верхньої та нижньої поверхонь плівки.

Нехай на плоскопаралельну прозору плівку з показником заломлення n і товщиною d під кутом i падає плоска монохроматична хвиля (рис. 13.2)

Падаюча хвиля частково відбивається від верхньої поверхні плівки, а частково заломлюється. Напрямок поширення відбитої хвилі зображено променем 1, а заломленої — променем ОС. Заломлена хвиля, досягнувши нижньої поверхні плівки, частково відбивається (промінь СВ) а частково заломлюється. Хвиля, що поширюється вздовж променя СВ, на верхній поверхні плівки частково відбивається, а частково заломлюється, причому заломлена хвиля

Якщо 2) накладається на хвилю, що безпосередньо відбита від його поверхні.

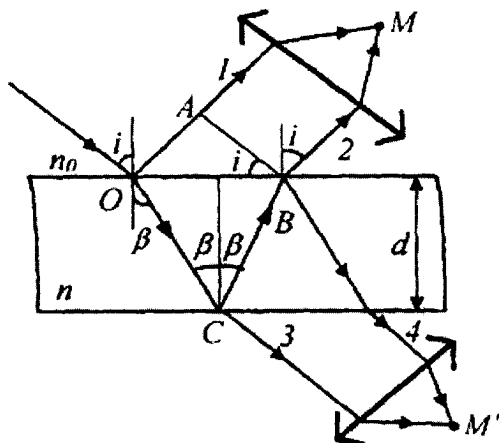


Рисунок 13.2 – Інтерференція на пластині

Промені 1 і 2 когерентні між собою. Якщо на їх шляху поставити збірну лінзу, то вони зберуться в одній з точок М фокальної площини лінзи і дадуть інтерференційну картину, яка визначається різницею ходу Δ між інтерференційними променями 1 і 2:

$$\Delta = (OC + CB)n - OA \pm \frac{\lambda_0}{2} = \bar{\Delta} \pm \frac{\lambda_0}{2}. \quad (13.5)$$

Доданок $\pm \frac{\lambda_0}{2}$ зумовлений "втратою півхвилі" при відбиванні світла від межі поділу середовища. Якщо $n > n_0$, то в точці О фаза відбивання змінюється на протилежну, відбувається "втрата півхвилі" і доданок матиме знак "-". У випадку $n < n_0$ "втрата півхвилі" відбувається в точці С і $\frac{\lambda_0}{2}$ матиме знак "+". З рис. 13.2 видно, що

$$OC = CB = \frac{d}{\cos \beta}, \quad OA = OB \sin i = 2d \tan \beta \sin i. \quad (13.6)$$

Оскільки $n = \frac{\sin i}{\sin \beta}$ або $\sin i = n \sin \beta$, то

$$OA = 2 d n \operatorname{tg} \beta \sin \beta = 2 d n \frac{\sin^2 \beta}{\cos \beta}. \quad (13.7)$$

Тоді:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} &= \frac{2 d n}{\cos \beta} - \frac{2 d n}{\cos \beta} (1 - \cos^2 \beta) = 2 d n \cos \beta = \\ &= 2 d n \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = 2 d \sqrt{n^2 - \sin^2 i}. \end{aligned} \quad (13.8)$$

З врахуванням втрати півхвилі для оптичної різниці ходу отримаємо

$$\Delta = \bar{\Delta} \pm \frac{\lambda_0}{2} = 2 d \sqrt{n^2 - \sin^2 i} \pm \frac{\lambda_0}{2}. \quad (13.9)$$

В точці М буде максимум, якщо $2 d \sqrt{n^2 - \sin^2 i} \pm \frac{\lambda_0}{2} = 2 m \frac{\lambda_0}{2}$ ($m = 1, 2, \dots$) і мінімум, якщо

$$2 d \sqrt{n^2 - \sin^2 i} \pm \frac{\lambda_0}{2} = (2m+1) \frac{\lambda_0}{2}; \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (13.10)$$

Інтерференція спостерігається не лише у відбитому світлі, а у світлі, що проходить через плівку (рис. 13.2, промені 3 і 4). Оптична різниця ходу для прохідного світла відрізняється від Δ для відбитого світла на $\lambda_0/2$, бо світло не відбивається від оптично густішого середовища. Максимумам інтерференції у відбитому світлі відповідають мінімуми інтерференції в прохідному світлі і навпаки.

Інтерференція в плоскопаралельних пластинках визначається величинами λ_0 , d , n та i . Для даних λ_0 , d і n кожному нахилу i променів відповідає своя інтерференційна смуга.

Інтерференційні смуги, які виникають внаслідок накладання хвиль, що падають на плоскопаралельну пластинку під однаковими кутами, називаються **смугами однакового нахилу**. Промені I' і I'' відбившись від верхньої та нижньої граней пластинки, паралельно один до одного, оскільки пластина плоскопаралельна (рис. 13.3). Інтерферуючі промені I' і I'' перетинаються лише в нескінченності, тому кажуть, що **смуги однакового нахилу локалізовані на нескінченності**.

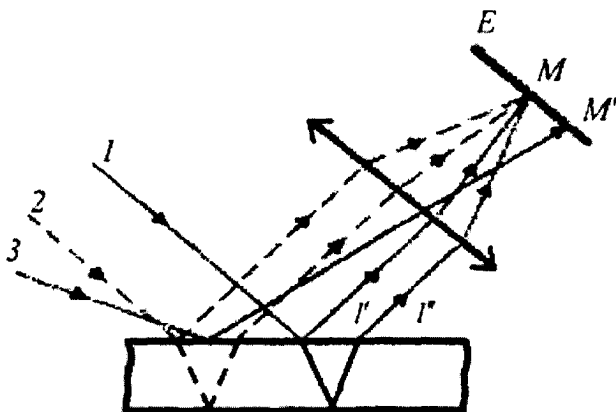


Рисунок 13.3 – Схема утворення інтерференційних смуг однакового нахилу

Для їх спостереження використовують збірну лінзу й екран, піднесений у фокальній площині лінзи. Паралельні промені $1'$ і $1''$ утворюються у фокусі лінзи. В ту саму точку прийдуть й інші промені, паралельні до променя 1 , (на рис. 13.3 – промінь 2) внаслідок чого збільшиться загальна інтенсивність.

Хвилі 3 , які падають на пластину під іншим кутом, зберуться в тій же точці M' фокальної площини лінзи.

Нехай на клин (кут α між боковими гранями малий) падає плоска хвиля, напрямок поширення якої збігається з променями 1 і 2 (рис. 13.4). З усіх променів, на які розділяється падаючий промінь, розглянемо $1'$ і $1''$, які відбилися від верхньої та нижньої поверхні клина. При певному взаємному положенні клина і лінзи промені $1'$ і $1''$ повернуться в деякій точці M на екрані. Оскільки промені $1'$ і $1''$ когерентні, вони будуть інтерферувати. Якщо джерело хвиль розташоване далеко від поверхні і кут α досить малий, то різниця ходу променів $1'$ і $1''$ визначається формулою

$$\Delta = 2 d_m \sqrt{n^2 - \sin^2 i} \pm \frac{\lambda_0}{2}, \quad (13.12)$$

де d_m – середня товщина клина на ділянці AC .

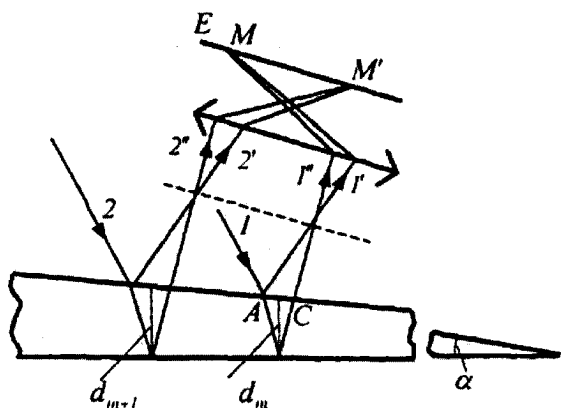


Рисунок 13.4 – Інтерференція на клині

На екрані з'являється система інтерференційних смуг. Кожні смуги виникає за рахунок відбивання від місць пластинки, що мають однакову товщину.

Інтерференційні смуги, що виникають внаслідок інтерференції від місць однакової товщини, називаються **смугами однакової товщини**.

Оскільки верхня та нижня грані клина не паралельні між собою, то промені l' і l'' перетинаються поблизу пластинки. У такий спосіб смуги однакової товщини локалізовані поблизу поверхні клина.

Якщо світло падає на пластину нормально, то смуги однакової товщини локалізуються на верхній поверхні клина. Смуги однакової товщини паралельні до ребра клина. Щоб визначити відстань Δ між двома сусідніми максимумами інтерференційних смуг у випадку монохроматичного світла з довжиною хвилі λ_0 , запишемо умови двох сусідніх максимумів інтерференції враховуючи, що кут падіння $i = 0^\circ$ і кут заломлення $\beta = 0^\circ$, оскільки кут α дуже малий:

$$2d_m n - \frac{\lambda_0}{2} = 2m \frac{\lambda_0}{2}, \quad (13.13)$$

$$2d_{m+1} n - \frac{\lambda_0}{2} = 2(m+1) \frac{\lambda_0}{2}. \quad (13.14)$$

Звідси

$$2(d_{m+1} - d_m)n = \lambda_0. \quad (13.15)$$

Якщо відстані від ребра клина до інтерференційних смуг дорівнюють y_m і $y_{m+1} = y_m + \Delta y$, $d_m = y_m \sin \alpha$

$$d_{m+1} = (y_m + \Delta y) \sin \alpha, \quad (13.16)$$

$$d_{m+1} - d_m = \Delta y \sin \alpha \approx \Delta y \alpha, \quad (13.17)$$

-малий кут між гранями клина.

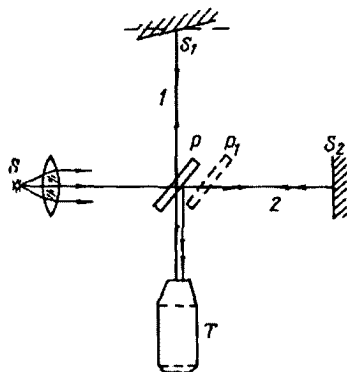
Тоді

$$\Delta y = \frac{\lambda_0}{2\alpha n}. \quad (13.18)$$

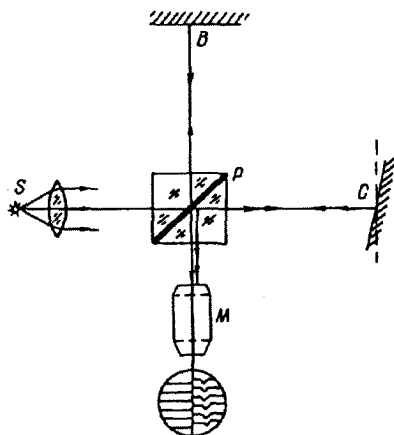
13.3 Інтерферометри

Прилади, в яких явище інтерференції використовується для вимірювання довжини світлової хвилі, показника заломлення речовини, їх вимірювань довжини, для контролю якості обробки поверхні, називають **інтерферометрами**. Опишемо деякі з них.

Інтерферометр Майкельсона. Схему будови інтерферометра зведено на рис. 13.5 Паралельний пучок світла від джерела падає під кутом 45° на скляну пластинку Р, задня поверхня пластинки покрита напівпрозорим шаром срібла. Цей шар розділяє промінь на дві частини: перший – відбитий промінь – спрямовується на плоске дзеркало S_1 , а другий проходить через шар срібла і попадає на плоске дзеркало S_2 . Відбиваючись від дзеркал, обидва промені збігаються, інтерферують і проходять у зорову трубу Т. Оскільки перший промінь до накладання з другим проходить товщу пластинки Р один раз, а другий промінь – один раз, то для компенсації цієї різниці шляху другого променя розміщують таку саму скляну пластинку



**Рисунок 13.5 –
Інтерферометр Майкельсона**



**Рисунок 13.6 –
Інтерферометр Лінника**

Залежно від різниці ходів обох променів поле зору труби буде світлим або темним. Коли б ми змістили дзеркало S_2 на відстань $\frac{\lambda}{4}$

то різниця ходів обох променів змінилася б на $\frac{\lambda}{2}$, а фон поля зору помінявся на протилежний. Для точнішої оцінки зміщень дзеркала S_2 нерухоме дзеркало S_1 дещо нахилиють до падаючих променів завдяки чому хід променів до різних точок цього дзеркала буде різним; різні й різниці ходів відповідних променів, відбитих від дзеркал S_1 і S_2 . Тому в полі зору трубки замість однорідного фону буде система паралельних світлих і темних інтерференційних смуг. Те пер будь-яке зміщення дзеркала S_2 зумовлюватиме в полі зору труби переміщення смуг; його можна виміряти з великою точністю, за ним знайти зміщення дзеркала S_2 . Таким способом вперше порівняли міжнародний еталон метра з довжиною хвилі червоної спектральної лінії кадмію. У 1960 р. метр було визначено через довжину хвилі оранжевої лінії випромінювання криптону 86 у вакуумі, саме: $1 \text{ м} = 1650763,73 \lambda_0$.

Для вимірювання коефіцієнта заломлення зразок з досліджуваної речовини розміщують на шляху променів до дзеркала S_2 . Як

шина зразка l , а показник заломлення n , то внесення його додаткову різницю ходів променів

$$\Delta l = l(n - n_0),$$

показник заломлення повітря.

що ця різниця ходів $\Delta l = k\lambda$, то вся інтерференційна картина геться на k смуг. Знайшовши за спостереженнями в полі зору k (це може бути і дробове число) та знаючи товщину зразка l , можна з великою точністю визначити $(n - n_0)$

$$n - n_0 = \frac{k\lambda}{l}. \quad (13.19)$$

Так, вимірюють коефіцієнт заломлення газів, що мало відрізняється від одиниці. Для цього на шляху обох променів вводять одні кювети з плоскопаралельними віконцями; одну з них наповнюють досліджуваным газом, а з іншої викачують повітря (дістаємо l). За рівністю (13.19) $n = ((k\lambda)/l) + 1$, де l – довжина кювети.

Інтерферометр Лінника. Для контролю високої чистоти оброблених металічних і різних оптичних поверхонь користуються мікроінтерферометром Лінника (рис. 13.6). У ньому пучок монохроматичного світла S падає на розрізаний складний кубик; у діагональному вирізі кубика міститься напівпрозорий шар срібла P . Завдяки цьому пучок світла роздвоюється: та частина світлового пучка, що відбивається від шару P , падає на досліджувану поверхню B , а та частина світлового пучка, яка проходить крізь шар P , падає на дзеркало A , відбиваючись від поверхонь B і C , обидві частини світлового пучка збігаються і інтерферують у полі зору мікроскопа M .

Оскільки дзеркало C дещо нахилене до падаючих променів, то в полі зору мікроскопа видно систему світлих і темних інтерференційних смуг. Якщо досліджувана поверхня ідеально рівна, то інтерференційні смуги будуть прямолінійними. Якщо на поверхні є нерівності, то хід променів, які відбиваються в цих місцях, змінюється, а це приведе до зміщення (викривлення) інтерференційних смуг у полі зору мікроскопа. За зміщенням смуг можна оцінити якість обробки поверхні з точністю до $0,1\lambda$.

13.4 Застосування інтерференції

Інтерференцію широко використовують у різних галузях науки і техніки. Використовуючи інтерференцію можна визначити довжини хвиль, показники заломлення, мікроскопічні розміри тіл, микрорельєф поверхні деталей.

Особливе місце в застосуванні інтерференції займає так звана просвітлена оптика. Якщо світло проходить через лінзи або призми від кожної з поверхонь світловий потік частково відбивається. У складних оптичних системах, де багато лінз або призми, прохідний світловий потік дуже зменшується, крім того з'являються бліки. Так, було встановлено, що в перископах підводних човнів відбивалося до 50% світла, яке падає на них. Для усунення цих дефектів оптичних систем і застосовують **метод просвітлення оптики**. Суть методу полягає в тому, що оптичні поверхні покриваються тонкими плівками, які створюють інтерференційні явища.

Звичайно товщина просвітлюючої плівки становить $\lambda/4$ падаючого світла. Тоді відбите світло має різницю ходу $\lambda/2$, що відповідає умові мінімуму при інтерференції. Так досягають чіткого зображення, а бліки зникають. Просвітлюючі покриття наносять на поверхні лінз і призми хімічною обробкою (травлення в кислоті), нанесення плівок фторидів при випаровуванні у вакуумі або механічно.

Контрольні питання

- 1 В чому полягає явище інтерференції?
- 2 Які промені називають когерентними?
- 3 Які є способи отримання когерентних джерел випромінювання?
- 4 Чому при спостереженні смуг рівного нахилу можна використовувати протилежні джерела світла? Де локалізовані смуги рівного нахилу?
- 5 Що таке інтерферометр?
- 6 В чому полягає суть явища «просвітлення оптики»?
- 7 Від яких параметрів, що характеризують інтерферометр, залежить різкість смуг?
- 8 Зобразіть хід променів в інтерферометрі Майкельсона, Лінніка.

14 ХВИЛЬОВА ОПТИКА. ДИФРАКЦІЯ СВІТЛА (ФРЕНЕЛЯ)

14.1 Дифракція світла. Принцип Гюйгенса-Френеля

Дифракцією називається сукупність явищ, що спостерігаються при поширенні світла в середовищі з різними неоднорідностями поблизу границь непрозорих або прозорих тіл, через малі щілини і які пов'язані із зміною напрямку поширення світлових хвиль (порівняно з напрямком, передбаченим геометричною оптикою).

Дифракція приводить до огинання світловими хвилями переповерхонь і проникнення світла в область геометричної тіні, проникнення через невеликі отвори в екранах, тощо.

Дифракції пояснюється за допомогою **принципу Гюйгенса-Френеля**, згідно з яким кожна точка, до якої доходить хвиля, служить джерелом вторинних хвиль, а обвідна цих хвиль дає положення хвильового фронту в наступний момент часу.

Як приклад застосування принципу Гюйгенса розглянемо падіння плоскої хвилі на перешкоду з отвором (рис. 14.1). Коли хвильовий фронт доходить до перешкоди, то кожна точка отвору стає джерелом вторинних хвиль, а обвідна цих хвиль задає фронт хвилі, пройшла через отвір. Цей фронт плоский лише в середній частині, а біля границі отвору відбувається загибання хвильового фронту, тобто хвиля проникає в область геометричної тіні, огинаючи перешкоди.

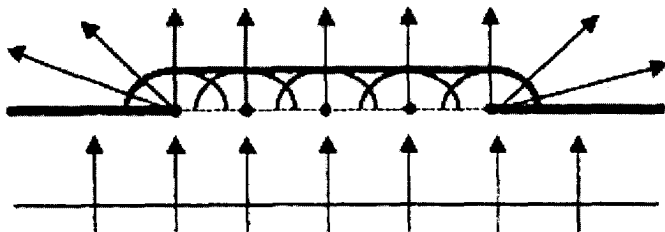


Рисунок 14.1 – Падіння плоскої хвилі на перешкоду з отвором

Принцип Гюйгенса – суто геометричний спосіб побудови хвильових поверхонь – розв'язує лише задачу про напрямок поширення хвильового фронту, але не зачіпає, питання про амплітуду і про інтенсивність хвиль, що поширюються в різних напрямках. Френель вклав у принцип Гюйгенса фізичний зміст, доповнивши його ідеєю інтерференції вторинних хвиль. **Принцип Гюйгенса-Френеля** можна виразити такими положеннями:

1) під час розрахунку амплітуди світлових коливань, що збуджуються джерелом S_0 в довільній точці M , джерело S_0 можна замінити еквівалентною йому системою вторинних джерел – малих ділянок dS будь-якої замкненої допоміжної поверхні S , проведеній так, щоб вона охоплювала джерело S_0 і не охоплювала розглядувану точку M ;

2) вторинні джерела, які еквівалентні джерелу S_0 , когерентні між собою, тому вторинні хвилі, збуджені ними, інтерферують, розрахунок інтерференції найбільш простий, якщо S - хвильова поверхня для світла джерела S_0 , оскільки при цьому фази коливань всіх вторинних джерел однакові;

3) амплітуда dE_0 коливань, що збуджуються в точці M вторинним джерелом, пропорційна до площі dS відповідної ділянки хвильової поверхні, обернено пропорційна до відстані r від неї до точки M і залежить від кута ϕ між зовнішньою нормаллю до хвильової поверхні і напрямком від елемента dS до точки M (рис. 14.2)

$$dE_0 = f(\phi) \frac{a}{r} \cos(\omega t - kr + \phi_0) dS, \quad (14.1)$$

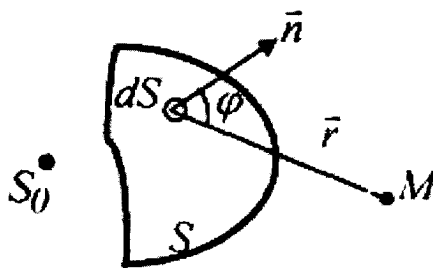


Рисунок 14.2 – Схема заміни джерела світла S_0 замкнутою поверхнею

$t + \phi_0$) – фаза коливань в місці розміщення хвильової поверхні, причина, яка пропорційна до амплітуди первинних хвиль в елементі dS ; $f(\phi)$ монотонно спадає від 1 при $\phi = 0$ до 0 при

(вторинні джерела не випромінюють назад); кут ϕ називається кутом дифракції;

б) якщо частина поверхні S закрита непрозорими екранами, то вона випромінює енергію, а інші випромінюють так само, як і за відсутності екранів.

Врахування амплітуд і фаз вторинних хвиль дозволяє в кожному конкретному випадку знайти амплітуду результуючої хвилі в будь-якій точці простору. Розрахунок інтерференцій вторинних досить складний і громіздкий, однак для ряду випадків знаходження амплітуди результуючого коливання здійснюється алгебраїчно або геометричним підсумовуванням.

Результуюче коливання в точці M є суперпозицією коливань створених для всієї хвильової поверхні S :

$$E_{\text{ом}} = \int_S f(\phi) \frac{a}{r} \cos(\omega t - kr + \phi_0) dS. \quad (14.2)$$

Ця формула є аналітичним виразом принципу Гюйгенса-Френеля.

14.2 Метод зон Френеля

За допомогою принципу Гюйгенса-Френеля можна обґрунтувати хвильові властивості світла **закон прямолінійного поширення світла в однорідному середовищі**. Френель розв'язав цю задачу, розглянувши взаємну інтерференцію вторинних хвиль, і запропонував прийом, який отримав назву **методу зон Френеля**.

Знайдемо в довільній точці M амплітуду світлової хвилі, що поширюється в однорідному середовищі від точкового джерела S_0 .

Згідно з принципом Гюйгенса-Френеля замінимо дію джерела дією уявних джерел, розміщених на допоміжній поверхні S , що є верхньою фронтою хвилі, що йде з S_0 (поверхня сфери з центром в S_0 , рис. 14.3).

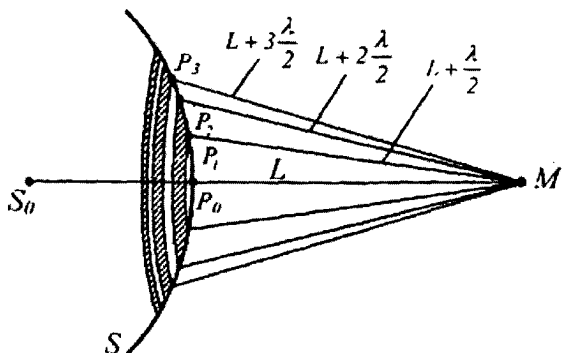


Рисунок 14.3 – Метод зон Френеля

Френель розбив хвильову поверхню S на кільцеві зони такої розміру, щоб відстані від країв зони до M відрізнялись на $\lambda/2$, тобто

$$P_1M - P_0M = P_2M - P_1M = P_3M - P_2M = \dots = \lambda/2. \quad (14.3)$$

Подібне розбивання фронту хвилі на зони можна виконати, провівши з точки M концентричні сфери радіусами:

$$L + \frac{\lambda}{2}; L + 2\frac{\lambda}{2}; L + 3\frac{\lambda}{2}; \dots; L + m\frac{\lambda}{2}. \quad (14.4)$$

Точки сфери S , що лежать на відстанях $L + \frac{\lambda}{2}$, $L + 2\frac{\lambda}{2}$, $L + 3\frac{\lambda}{2}$ і т.д. від точки M , утворюють межі 1-ї, 2-ї, 3-ї і т.д. зон Френеля.

Оскільки коливання від сусідніх зон проходять до точки M відстані, які відрізняються на $\lambda/2$, то в точку M вони надходять протилежними фазами і при накладанні ці коливання будуть взаємно ослаблюватися. Тому амплітуда результуючого коливання в точці M :

$$E_{0M} = E_{01} - E_{02} + E_{03} - E_{04} + \dots + E_{0m}, \quad (14.5)$$

де E_{01} , E_{02} , E_{03} , E_{0m} – амплітуди коливань, що збуджуються 1-ю, 2-ю, ..., m -ю зонами. В цей вираз всі амплітуди непарних зон входять зі знаком "+", а від парних зон – зі знаком "-".

Величина E_{0m} залежить від площі σ_m m -ї зони і кута ϕ_m між зовнішньою нормаллю до поверхні зони в якій-небудь її точці і пря-

ка напрямлена з цієї точки в точку М. На рис. 14.4 точки В і
повідіають зовнішній границі m-ї зони: $BC = r_m$ – радіус зов-
ної границі m-ї зони, $CO = h_m$ – висота кульового сегмента

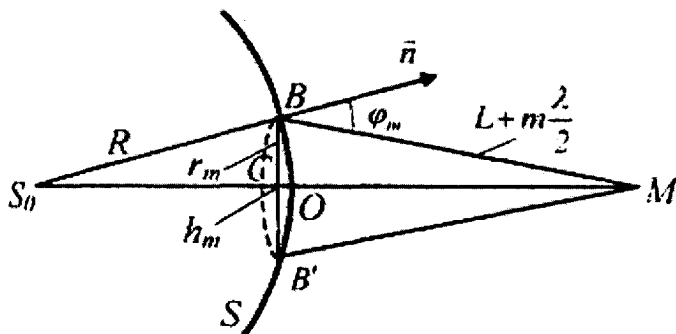


Рисунок 14.4 – Розрахунок площі зони Френеля

З трикутників S_0BC і MBC

$$r_m^2 = R^2 - (R - h_m)^2 = \left(L + \frac{m\lambda}{2} \right)^2 - (L + h_m)^2. \quad (14.6)$$

Звідси

$$\begin{aligned} R^2 - R^2 + 2Rh_m - h_m^2 &= \\ &= L^2 + 2L \frac{m\lambda}{2} + \left(\frac{m\lambda}{2} \right)^2 - L^2 - 2Lh_m - h_m^2. \end{aligned} \quad (14.7)$$

Тоді

$$2(R + L)h_m = m\lambda L + \left(\frac{m\lambda}{2} \right)^2. \quad (14.8)$$

Оскільки $\lambda \ll L$, то при не дуже великих m доданком $\left(\frac{m\lambda}{2} \right)^2$
зна знехтувати і

$$h_m = \frac{m\lambda L}{2(R + L)}. \quad (14.9)$$

Бічна поверхня кульового сегмента BOB' , яка є сумою площ усіх m зон, починаючи з першої, дорівнює

$$S_m = \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_m = 2\pi R h_m = \frac{\pi R \lambda L}{R + L} m. \quad (14.10)$$

Площа m -ї зони Френеля

$$\sigma_m = S_m - S_{m-1} = \frac{\pi R \lambda L}{(R + L)}. \quad (14.11)$$

Цей вираз не залежить від m , отже, при не дуже великих m площі зон Френеля однакові. У такий спосіб побудова зон Френеля розбиває поверхню сферичної хвилі на рівні зони.

Згідно з припущенням Френеля дія окремих зон в точці M тим менша, чим більший кут ϕ_m , тобто дія зон поступово зменшується від центральної зони до периферійної. Крім того, інтенсивність випромінювання в напрямку точки M зменшується із зростанням m внаслідок збільшення відстані від зони до точки M . Враховуючи обидва ці фактори, можемо записати:

$$E_{01} > E_{02} > E_{03} > E_{04} > \dots$$

Загальне число N зон Френеля, які вміщуються на частині сфери, яка повернена до точки M (рис. 14.6), дуже велике.

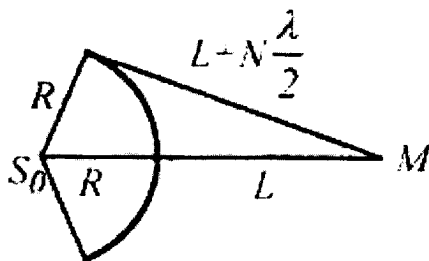


Рисунок 14.6 – Частина сфери

З рис. 14.6 видно:

$$L + N \frac{\lambda}{2} = \sqrt{(L + R)^2 - R^2}. \quad (14.12)$$

Звідси

$$N = \frac{2}{\lambda} \left(\sqrt{L^2 + 2LR} - L \right). \quad (14.13)$$

Якщо $R=L = 10$ см і $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см, то $N \sim 3 \cdot 10^5$. Тому можна сказати, що в межах не дуже великих змін m залежність E_{0m} від m майже лінійною, і амплітуда коливань, яка викликана якою-небудь m -ю хвилею дорівнює півсумі амплітуд, що викликані $m - 1$ -ю і $m + 1$ -ю хвилями. Тобто

$$E_{0m} = \frac{1}{2} (E_{0m-1} + E_{0m+1}). \quad (14.14)$$

Тоді амплітуда результуючого коливання в точці M матиме такий вигляд:

$$E_{0M} = \frac{E_{01}}{2} + \left(\frac{E_{01}}{2} - E_{02} + \frac{E_{03}}{2} \right) + \left(\frac{E_{03}}{2} - E_{04} + \frac{E_{05}}{2} \right) + \dots = \frac{E_{01}}{2}, \quad (14.15)$$

Якби усі вирази, що стоять у дужках, дорівнюють нулю. Амплітуда, що створюється в довільній точці M сферичною хвильовою поверхнею, дорівнює половині амплітуди, що створюється однією хвилею в центральній зоні. Дія всієї хвильової поверхні на точку M зводиться до дії її малої ділянки, меншої, ніж центральна зона.

Якщо у виразі $r_m^2 = R^2 - (R - h_m)^2$ покладемо, що висота сегмента $h_m \ll R$ (при не дуже великих m), тоді $r_m^2 = 2Rh_m$. Радіус зовнішньої границі m -ї зони Френеля

$$r_m = \sqrt{2Rh_m} = \sqrt{\frac{m\lambda RL}{R + L}}. \quad (14.16)$$

При $R=L = 10$ см і $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см $r_1 = 0,016$ см. Отже, поширення світла від S_0 до M відбувається так, немовби світловий потік поширюється всередині дуже вузького каналу вздовж S_0M , тобто **прямокутний**. У такий спосіб хвильовий принцип Гюйгенса-Френеля дозволяє пояснити прямолінійне поширення світла в однорідному середовищі.

Виразимо кількість зон Френеля m через радіус зовнішньої границі:

$$m = \frac{r_m}{\lambda} \frac{r_m(R+L)}{RL} = \frac{r_m^2}{\lambda} \left(\frac{1}{L} + \frac{1}{R} \right). \quad (14.17)$$

Це означає, що точкове джерело викликає в точці M таку дію, яку викликало б у точці S_0 , якщо його розмістити у точці M .

Інтенсивність світла в точці M можна значно збільшити, якщо закрити всі парні або непарні зони Френеля. Тоді результуюча амплітуда коливань відповідно дорівнюватиме:

$$E_{om} = E_{01} + E_{03} + E_{05} + \dots \text{ або} \quad (14.18)$$

$$E_{om} = E_{02} + E_{04} + E_{06} + \dots$$

Екран, який перекриває всі парні або непарні зони Френеля, називається **зонною пластинкою**. Пластинка має складатися з прозорих або непрозорих кілець, радіуси яких дорівнюють r_m . Радіуси прозорих кілець підраховують для $m = 0, 2, 4, \dots$, непрозорих – для $m = 1, 3, 5, \dots$

14.3 Дифракція Френеля

Розрізняють два види дифракції. Дифракцію в розділених променях (на незалежних відстанях від джерела світла), вивчену Д.Ж. Френелем і дифракцію в паралельних променях (на значних відстанях від джерела), вивчену Фраунгофером; тому ці види дифракції називають **дифракцією Френеля** і **дифракцією Фраунгофера**.

Розглянемо **дифракцію Френеля**.

Сферична хвиля, що поширюється з точкового джерела S_0 , зустрічає на своєму шляху екран з круглим отвором (рис. 14.7).

Дифракційну картину спостерігаємо на екрані E в точці M , що лежить на лінії, яка з'єднує S_0 з центром отвору. Екран E паралельний до площини отвору і знаходиться від нього на відстані L . Вигляд дифракційної картини залежить від кількості зон Френеля, які укладаються в отворі. Якщо в отворі укладається m зон Френеля, то згідно з формулами

$$E_{om} = E_{01} - E_{02} - E_{03} - E_{04} + \dots \pm E_{0m}, \text{ і}$$

$$E_{0m} = \frac{1}{2}(E_{0m-1} + E_{0m+1}) \quad (14.19)$$

літуда E_{0M} результируючих коливань у точці M залежатиме від юсті або непарності m .

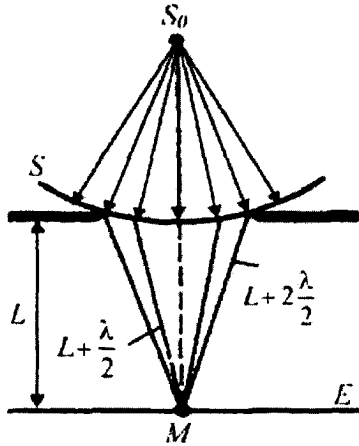


Рисунок 14.7 – Дифракція на круглому отворі

Якщо кількість m зон Френеля непарна, то

$$\begin{aligned} E_{0M} &= \frac{1}{2} E_{01} + \left(\frac{E_{01}}{2} - E_{02} + \frac{E_{03}}{2} \right) + \\ &+ \left(\frac{E_{03}}{2} - E_{04} + \frac{E_{05}}{2} \right) + \dots + \\ &+ \left(\frac{E_{0m-2}}{2} - E_{0m-1} + \frac{E_{0m}}{2} \right) + \frac{1}{2} E_{0m} = \\ &= \frac{E_{01}}{2} + \frac{E_{0m}}{2}. \end{aligned} \quad (14.20)$$

Якщо в отворі укладається парна кількість m зон, то

$$\begin{aligned}
E_{OM} = & \frac{1}{2} E_{01} + \left(\frac{E_{01}}{2} - E_{02} + \frac{E_{03}}{2} \right) + \\
& + \left(\frac{E_{03}}{2} - E_{04} + \frac{E_{05}}{2} \right) + \dots + \\
& + \left(\frac{E_{Om-2}}{2} - E_{Om-2} + \frac{E_{Om-1}}{2} \right) + \\
& + \frac{1}{2} E_{Om-1} - E_{Om} = \frac{E_{01}}{2} + \frac{E_{Om-1}}{2} - E_{Om}.
\end{aligned} \tag{14.21}$$

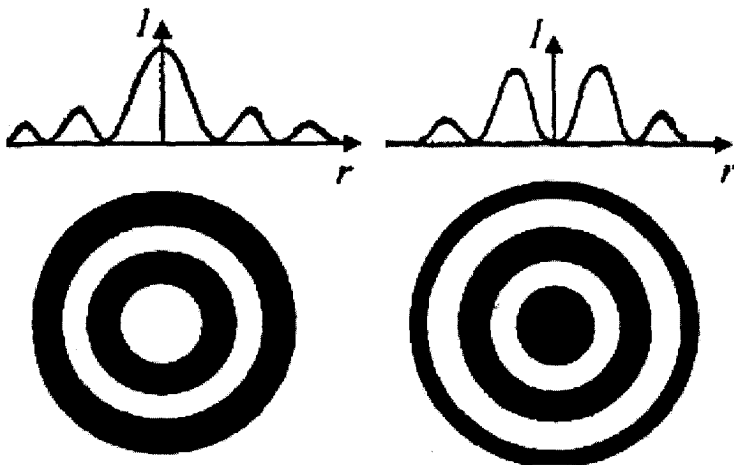
Коли отвір відкриває непарну кількість зон Френеля, то амплітуда в точці М буде більша, ніж при вільному поширенні хвилі – у точці М буде інтерференційний максимум. Якщо m – парна, то у точці М – інтерференційний мінімум. Амплітуди від двох сусідніх зон практично однакові. Тому $\frac{1}{2} E_{Om-1} - E_{Om} = -\frac{1}{2} E_{Om}$. В результаті

$$E_{Om} = \frac{E_{Om}}{2} \pm \frac{E_{Om}}{2}, \tag{14.22}$$

де знак "+" стосується непарної, а знак "-" парної кількості зон Френеля.

Якщо в отворі вкладається одна зона Френеля, то в точці М амплітуда $E_{Om} = E_{01}$, тобто вдвоє більша, ніж за відсутності непрозорого екрану з отвором. Якщо в отворі вкладається дві зони Френеля, то їх дія в точці М практично компенсована через інтерференцію. Дифракційна картина від круглого отвору поблизу точки М матиме вигляд темних і світлих кілець з центрами в точці М (якщо m - непарне, то в центрі буде світлий круг (рис. 14.8), коли m – парне – темний (рис. 14.9)), причому інтенсивність ($I \sim A^2$) максимумів зменшується з відстанню від центра картини.

При незмінному положенні джерела світла кількість зон m залежить від діаметра отвору і відстані L . При зміні діаметра отвору в ньому змінюватиметься і кількість зон Френеля, що вміщуються на відкритій ділянці хвильового фронту. Їх кількість буде змінюватись з парної на непарну і навпаки. Внаслідок цього інтенсивність світла в точці М періодично то зменшуватиметься, то збільшуватиметься. Така зміна інтенсивності також спостерігається, якщо екран E переміщати вздовж лінії S_0M .



**Рисунок 14.8 –
Інтерференційна картина
від круглого отвору,
 m – непарне**

**Рисунок 14.9 –
Інтерференційна картина
від круглого отвору,
 m – парне**

Коли діаметр отвору великий, так що $E_{om} \ll E_{o1}$, то ніякої дифракційної картини на екрані не буде спостерігатись – світло в цьому випадку поширюється прямолінійно.

Якщо отвір освітлюється не монохроматичним, а білим світлом, кільця будуть мати кольорове забарвлення, бо кількість зон Френеля, які вкладаються в отворі, залежить від довжини хвилі світла.

Нехай сферична хвиля, яка поширюється від точкового джерела S_0 , зустрічає на своєму шляху диск. У такому разі закрити ділянку фронту хвилі треба виключити з розгляду і будувати зони Френеля потрібно, починаючи з країв диска. На рисунку 14.10 показано побудову цих зон для точки M екрану E , яка лежить на протилежній стороні від центра диска.

Амплітуда E_{om} в точці M визначається спільною дією всіх відкритих зон, починаючи з першої:

$$\begin{aligned}
 E_{OM} &= E_{01} - E_{02} + E_{03} - E_{04} + \dots = \\
 &= \frac{E_{01}}{2} + \left(\frac{E_{01}}{2} - E_{02} + \frac{E_{03}}{2} \right) + \\
 &+ \left(\frac{E_{03}}{2} - E_{04} + \frac{E_{05}}{2} \right) + \dots = \frac{E_{01}}{2}.
 \end{aligned}
 \tag{14.23}$$

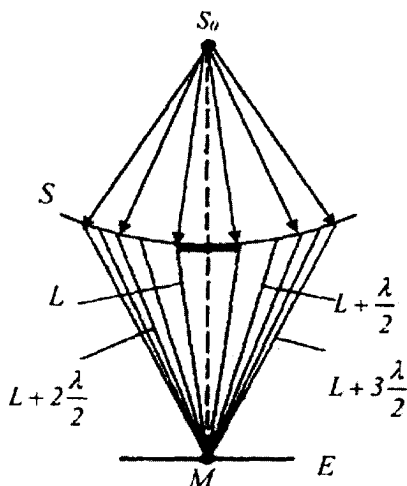


Рисунок 14.10 – Дифракція на диску

В точці М завжди буде інтерференційний максимум, який відповідає половині дії першої відкритої зони Френеля. Центральний максимум оточений концентричними темними і світлими інтерференційними кільцями, що чергуються. Зі збільшенням радіуса диска перша відкрита зона віддаляється від М і збільшується кут ϕ , між нормаллю до поверхні цієї зони в якій-небудь її точці і напрямком випромінювання в бік точки М. Тому інтенсивність центрального максимуму послаблюється при збільшенні розмірів диска. Якщо радіус диска набагато більший за радіус закритої ним центральної зони Френеля, то за диском буде тінь з дуже слабкою інтерференційною картиною в її межах.

Контрольні запитання

- 1 Що таке дифракція світла?
- 2 Сформулюйте принцип Гюйгенса-Френеля.
- 3 З'ясуйте суть методу зон Френеля.
- 4 В чому полягає дифракція Френеля?
- 5 Як змінюється дифракційна картина в залежності від λ ?
- 6 Від чого залежить кількість зон Френеля?
- 7 Які особливості дифракції світлових хвиль від круглого отвору?

15 ХВИЛЬОВА ОПТИКА. ДИФРАКЦІЯ СВІТЛА (ФРАУНГОФЕРА)

15.1 Дифракція Фраунгофера на щілині

Дифракцію плоских світлових хвиль, або дифракцію в паралельних променях вперше розглянув Фраунгофер. Дифракція Фраунгофера спостерігається в тому випадку, коли джерело світла і точки спостереження нескінченно віддалені від перешкоди, яка викликає дифракцію. Щоб здійснити цей тип дифракції, потрібно джерело світла помістити у фокусі збірної лінзи, а дифракційну картину досліджувати у фокальній площині другої збірної лінзи, встановленої за перешкодою.

Розглянемо дифракцію Фраунгофера від нескінченно довгої щілини. Нехай паралельний пучок монохроматичного світла падає нормально на непрозорий екран E , в якому прорізано вузьку щілину BC , що має сталу ширину $a = BC$ і довжину $l \gg a$ (рис. 15.1).

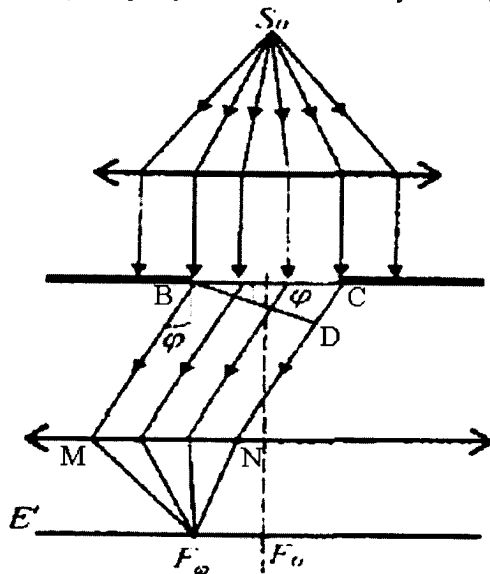


Рисунок 15.1 – Дифракція Фраунгофера від нескінченно довгої щілини

принципом Гюйгенса-Френеля точки щілини є вторинними жемами хвиль, які коливаються в одній фазі, бо площа щілини ється з фронтом падаючої хвилі.

бічному фокусі лінзи F_ϕ збираються всі паралельні промені, які ють на лінзу під кутом ϕ до її оптичної осі OF_0 , перпендикулядо фронту падаючої хвилі. Оптична різниця ходу Δ між крайпроменями CN і BM , які йдуть від щілини в цьому напрямі, знює $CD = a \sin \phi$, де BD – перпендикуляр, який опушений з и B на промінь CN .

Щілину BC можна розбити на зони Френеля, які мають вигляд паралельних до ребра B щілини (рис. 15.2). Ширина кожної вибирається так, щоб різниця ходу від країв цих зон дорівню-

$\Delta_1 = \frac{\lambda}{2}$, тобто разом на ширині щілини поміститься

$\frac{\Delta}{\Delta_1} = \frac{\Delta}{\lambda/2}$ зон. Ширина кожної зони дорівнює $a_1 = \frac{\lambda/2}{\sin \phi}$, їх

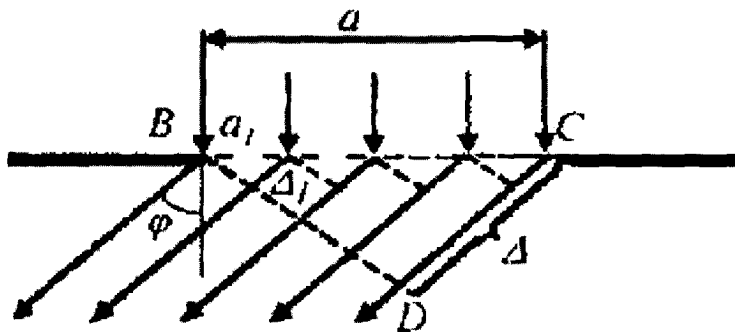


Рисунок 15.2 – Схема розбиття дифракції від на щілини на зони Френеля

тщі однакові. Всі зони в заданому напрямку випромінюють світ-, цілком однаково. При інтерференції світла від кожної пари сусі-, ліх зон амплітуда результиуючих коливань дорівнює нулю, бо ці ни спричиняють коливання з однаковими амплітудами, але про-, лежними фазами. Результат інтерференції світла в точці F_ϕ ви-, вчиться тим, скільки зон Френеля вкладається в щілині. Якщо кі-, жість зон парна, то

$$a \sin \varphi = \pm 2k \frac{\lambda}{2} \quad (15.1)$$

і в точці F_ϕ отримується дифракційний мінімум. Знак "-" у правій частині відповідає променям світла, які поширюються від щілини під кутом $-\phi$ і збираються в побічному фокусі F_ϕ лінзи, який симетричний F_ϕ відносно головного фокусу F_0 . Якщо кількість зон непарна, то

$$a \sin \varphi = \pm (2k + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (15.2)$$

і в точці F_ϕ буде дифракційний максимум, який відповідає дії однієї зони Френеля. (k – порядок дифракційного максимуму).

У напрямку $\phi=0$ спостерігатиметься найінтенсивніший центральний максимум нульового порядку; коливання, які спричинюються в точці F_0 всіма ділянками щілини, здійснюється в одній фазі.

Розрахунок дифракційної картини, що ґрунтується на використанні методу зон Френеля, наближений. Точніше можна визначити розподіл інтенсивності світла у будь-якій точці екрана, якщо поділити відкриту частину хвильової поверхні на елементарні смуги, які паралельні межі щілини і розрахувати результат інтерференції вторинних хвиль, що поширюються від цих смуг. В результаті інтенсивність світла у різних точках екрану визначається формулою

$$I_\varphi = I_0 \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi \right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi \right)^2}, \quad (15.3)$$

де I_0 – інтенсивність центрального максимуму, який відповідає $\phi = 0$.

Досліджуючи цю формулу на екстремуми, отримаємо, що мінімуми інтенсивності спостерігаються для кутів дифракції, коли

$$\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi = \pm k\pi, \text{ тобто коли}$$

$$a \sin \varphi = \pm k\lambda \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (15.4)$$

Кути дифракції ϕ , які відповідають максимумам інтенсивності, можна знайти, розв'язуючи трансцендентне рівняння

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi\right) = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi,$$

то для кутів

$$\sin \varphi_1 = \pm 1,43 \frac{\lambda}{a}, \quad \sin \varphi_2 = \pm 2,46 \frac{\lambda}{a}, \quad (15.5)$$

$$\sin \varphi_3 = \pm 3,47 \frac{\lambda}{a}, \quad \sin \varphi_4 = \pm 4,48 \frac{\lambda}{a}. \quad (15.6)$$

Якщо ж розрахувати ці кути φ на основі наближеної формули

$$a \sin \varphi = \pm (2k+1) \frac{\lambda}{2}, \quad (15.7)$$

отримаємо

$$\begin{aligned} \sin \varphi_1 &= \pm 1,50 \frac{\lambda}{a}, \quad \sin \varphi_2 = \pm 2,50 \frac{\lambda}{a}, \\ \sin \varphi_3 &= \pm 3,50 \frac{\lambda}{a}, \quad \sin \varphi_4 = \pm 4,50 \frac{\lambda}{a}. \end{aligned} \quad (15.8)$$

Різниця дуже невелика.

Залежність відношення I_φ/I_0 від $\sin \varphi$ зображено на рисунку 15.3.

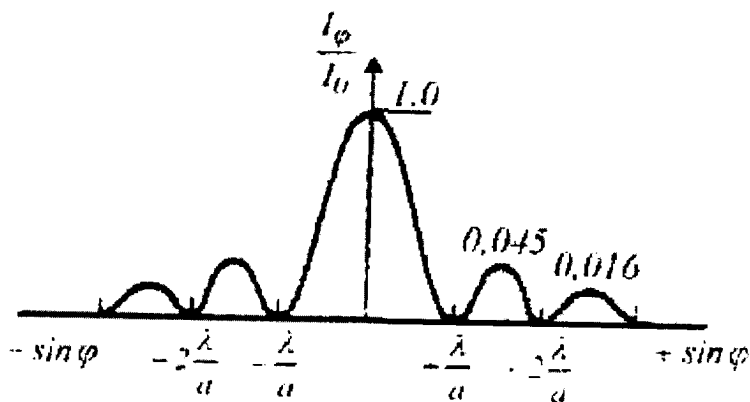


Рисунок 15.3 – Розподіл інтенсивності світла у дифракційних максимумах

Розрахунок показує, що інтенсивності центрального і наступних максимумів відносяться як

$$I_0:I_1:I_2:I_3:\dots=1:0,045:0,016:0,0083:\dots,$$

тобто основна частина світлової енергії зосереджена в центральному максимумі.

Шириною дифракційного максимуму на екрані називають відстань між двома найближчими дифракційними мінімумами.

Ширина максимуму нульового порядку дорівнює відстані між двома мінімумами першого порядку, тобто $l = 2 \frac{\lambda}{a}$. Центральна світла смуга тим ширша, чим більша довжина хвилі λ і чим менша ширина щілини a . В межах самої центральної смуги інтенсивність досить швидко зменшується від її середини до країв. При $\varphi = \pm \frac{\lambda}{2a}$ інтенсивність дорівнює 0,4 від максимальної.

Для $a = \lambda \left(\sin \varphi = 1, \varphi = \frac{\pi}{2} \right)$ головний максимум охоплює всю область екрана, екран освітлений рівномірно. При збільшенні ширини щілини ($a > \lambda$) дифракційні смуги стають вужчими, а число мінімумів $k = \frac{a}{\lambda} \sin \varphi$ зростає. Дифракційна картина стає яскравіша, оскільки через ширшу щілину проходить більший світловий потік. Коли щілина досить широка ($a \gg \lambda$), то в центрі дифракційної картини буде чітке зображення джерела світла, що відповідає прямолінійному поширенню світла.

У випадку білого світла буде спостерігатися сукупність відповідних картин для різних кольорів. Центральний максимум має райдужне забарвлення по краях. Повного гасіння світла не буде в жодній точці екрана, бо максимуми і мінімуми світла з різними λ перекриваються.

15.2 Дифракція на дифракційній ґратці

Розглянемо дифракцію світла, зумовлену дією **дифракційної ґратки**. Цей випадок дифракції найважливіший, бо його широко

ристовують у багатьох експериментальних методах спектрального аналізу світла.

Найпростіша **дифракційна ґратка** – це система з великої кількості однакових за шириною і паралельних одна до одної щілин, які лежать в одній площині і відокремлені непрозорими проміжками однаковими за шириною. $BC = DP = a$; $CD = b$; $d = a + b$ – **період дифракційної ґратки** (рис. 15.4). Розглянемо дифракцію плоскохроматичної хвилі, яка падає нормально на поверхню ґратування в усіх точках щілин відбуваються в одній фазі, оскільки точки лежать на тій самій хвильовій поверхні. Знайдемо результуючу амплітуду $E_{OF\phi}$ коливань у точці F_ϕ екрана E , в якій збігаються промені від усіх щілин ґратки, що падають на лінзу під кутом ϕ до її оптичної осі OF_0 .

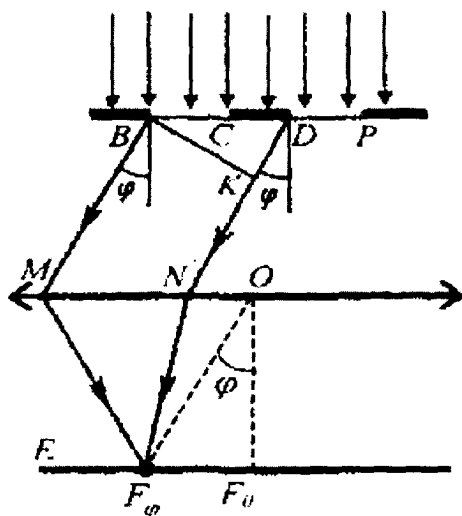


Рисунок 15.4 – Дифракційна ґратка

В тих напрямках, в яких одна із щілин не поширює світла, воно не буде поширюватися і при двох щілинах, тобто головні мінімуми інтенсивності будуть спостерігатися в напрямках, що визначаються умовою

$$a \sin \phi = \pm k\lambda \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Оскільки щілини знаходяться одна від одної на однакових відстанях, то різниця ходу променів, що йдуть від двох сусідніх щілин, будуть для даного напрямку ϕ однакові в межах всієї дифракційної ґратки:

$$\Delta = KD = (a + b) \sin \phi = d \sin \phi.$$

Внаслідок взаємної інтерференції світлових променів, які посилюються двома щілинами, в деяких напрямках вони будуть гасити один одного, тобто виникнуть додаткові мінімуми. Ці додаткові мінімуми будуть спостерігатися в тих напрямках, яким відповідає різниця ходу променів $\frac{\lambda}{2}, 3\frac{\lambda}{2}, \dots$, які поширюються від двох щілин.

З урахуванням $d \sin \phi = \Delta$ умова додаткових мінімумів:

$$d \sin \phi = \pm (2m + 1) \frac{\lambda}{2} = \pm m \lambda \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Дія одної щілини буде підсилювати дію другої, якщо

$$d \sin \phi = \pm 2m \frac{\lambda}{2} = \pm m \lambda \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots),$$

– це умова головних максимумів.

Якщо дифракційна ґратка складається з N щілин, то інтенсивність світла, що поширюється під кутом ϕ до нормалі, після дифракції від дифракційної ґратки перетворюється в нуль в точках, для яких

$$a \sin \phi = \pm k \lambda \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (15.9)$$

Це умова головного мінімуму.

Якщо виконується умова

$$d \sin \phi = \pm m \lambda \quad (m = 1, 2, 3, \dots), \quad (15.10)$$

то інтенсивність світла, дифрагованого на N щілинах, зростає в N^2 разів порівняно з інтенсивністю світла, що проходить крізь одну щілину. Максимуми, що виникають за даної умови, називаються головними максимумами.

Умова

$$d \sin \varphi = \pm \left(m + \frac{m'}{N} \right) \lambda, \quad (15.11)$$

$$m' = 1, 2, \dots, N-1, N+1, \dots, 2N-1, 2N+1, \dots$$

і часе напрямки, в яких коливання від окремих щілин будуть
мно гасити одне одного. Це умова **додаткових мінімумів**.

Між двома сусідніми додатковими мінімумами утворюються ма-
лumi, які називаються **вторинними**. При великому N найближ-
до головного максимуму вторинний максимум має інтенсив-
в 22 рази меншу, ніж інтенсивність головного максимуму.

Між двома сусідніми головними максимумами знаходиться
додаткових мінімумів і $N-2$ вторинних максимумів. На них
адатимуться мінімуми, що виникають при дифракції від однієї
ни.

Із формул

$$a \sin \varphi = \pm k \lambda \quad \text{і} \quad d \sin \varphi = \pm m \lambda$$

но, що головний максимум m -го порядку збігається з k -им міні-
ом від одної щілини, якщо виконується рівність

$$\frac{k}{a} = \frac{m}{d} \quad \text{або} \quad \frac{m}{k} = \frac{d}{a}.$$

Пунктирна крива на рисунку 15.5, що проходить через

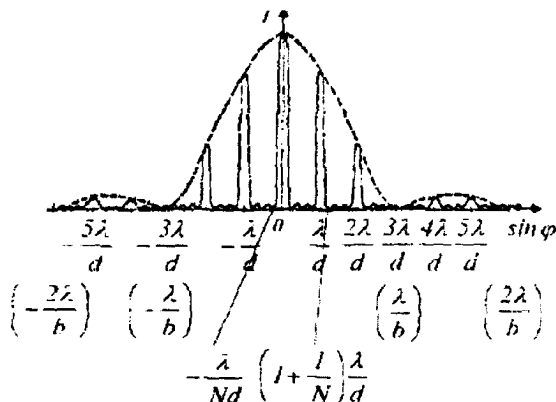


Рисунок 15.5 – Розподіл інтенсивності I_ϕ від $\sin \phi$ для $N = 4$ і $d/a = 3$.

вершини головних максимумів, зображує інтенсивність від однієї щілини, яка помножена на N^2 . Як видно з рисунку 15.5, при відношенні $d/a = 3$ головні максимуми 3-го, 6-го порядків збігаються з мінімумами інтенсивності від однієї щілини, тому ці максимуми зникають.

Чим більше щілин N , тим більша кількість світлової енергії пройде через решітку, тим більше мінімумів утворюється між сусідніми головними максимумами. Тим інтенсивнішими і гострішими будуть максимуми.

Оскільки $\sin \phi$ не може бути більше від одиниці, то кількість головних максимумів $m \leq \frac{d}{\lambda}$.

Якщо дифракційну решітку освітлюють білим світлом, то для різних значень λ положення всіх головних максимумів, крім центрального, не збігаються один з одним. Тому центральний максимум має вигляд білої смужки, а всі інші – райдужних смужок, які називають дифракційними спектрами першого, другого і т.д. порядків. У межах кожної смужки забарвлення змінюється від фіолетового біля внутрішнього краю (найближчого до максимуму нульового порядку) до червоного – біля зовнішнього краю (рис. 15.6).

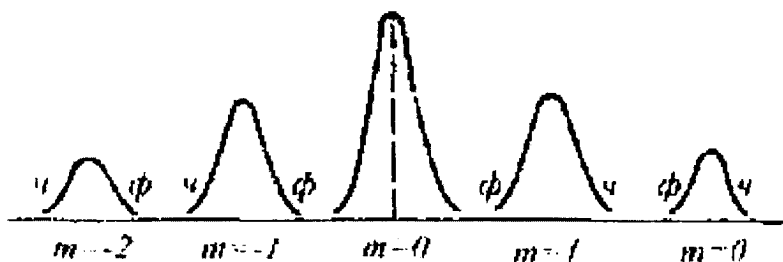


Рисунок 15.6 – дифракційні спектри для дифракції білого світла

15.3 Роздільна здатність оптичних приладів

Основними характеристиками дифракційної ґратки є кутова або лінійна дисперсія, дисперсійна область і роздільна здатність.

Кутовою дисперсією називається величина

$$D = \frac{d\varphi}{d\lambda}, \quad (15.12)$$

φ – кутова відстань між двома спектральними лініями, яким відповідають довжини хвиль λ і $\lambda + d\lambda$.

Продиференціювавши формулу $d \sin \varphi = m\lambda$, отримаємо $d\varphi = m d\lambda$. Звідси

$$D = \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos \varphi}. \quad (15.13)$$

Для малих кутів дифракції φ маємо $\cos \varphi \approx 1$ і

$$D = \frac{m}{d} = m \frac{N}{l},$$

де l – довжина робочої ділянки ґратки.

Лінійною дисперсією називають величину

$$D_{\text{лін}} = \frac{dl}{d\lambda}, \quad (15.14)$$

– лінійна відстань на екрані між двома максимумами одного й того самого порядку m для хвиль λ і $\lambda + d\lambda$.

Якщо фокусна відстань лінзи дорівнює F , у фокальній площині спостерігається дифракційна картина, то

$$D_{\text{лін}} = FD = F \frac{m}{d}.$$

Максимальна ширина спектрального інтервалу $d\lambda$, в якому три не перекриваються, називається **дисперсійною областю** спектрального приладу. Нехай довжини світлових хвиль, що падають на решітку, знаходяться в інтервалі від λ до $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$. Інтервал $\Delta\lambda$ буде дисперсійною областю ґратки тоді, коли правий край $(m + 1)$ -го порядку для довжини хвилі λ збігатиметься з лівою меєю спектра m -го порядку для довжини хвилі λ' .

Цю умову можна записати так:

$$d \sin \varphi = m\lambda', \quad d \sin \varphi = (m + 1)\lambda,$$

$$m\lambda' = (m+1)\lambda, \quad \lambda' - \lambda = \Delta\lambda = \frac{\lambda}{m}.$$

Найменша різниця довжин хвиль двох спектральних ліній $\delta\lambda$ при яких спектральний прилад розділяє їх окремо, називається спектральною розділяючою відстанню, а величина

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} \quad (15.15)$$

– роздільна здатність приладу.

Для дифракційної ґратки Релей запропонував такий критерій спектрального розділення: спектральні лінії з довжинами хвиль λ і $\lambda' = \lambda + \delta\lambda$ вважаються розділеними, якщо головний максимум дифракційної картини для однієї довжини хвилі збігається за своїм розміщенням з першим дифракційним мінімумом того самого порядку для другої довжини хвилі, а інтенсивність в проміжку між максимумами становить не більше ніж 80% від інтенсивності максимуму (рис. 15.7).

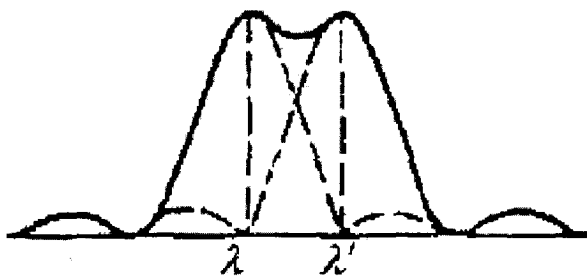


Рисунок 15.7 – Критерій дифракційної ґратки згідно Релея

Нехай головний максимум m -го порядку для хвиль $\lambda' = \lambda + \delta\lambda$ знаходиться на місці першого мінімуму ($m' = 1$) спектра того самого порядку для хвилі λ :

$$d \sin \varphi = \left(m + \frac{1}{N} \right) \lambda, \quad d \sin \varphi = m\lambda'.$$

Звідси

$$\left(m + \frac{1}{N}\right)\lambda = m(\lambda + \delta\lambda),$$

$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{mN}.$$

Роздільна здатність ґратки

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN. \quad (15.16)$$

Роздільна здатність ґратки пропорційна порядку спектра m і жості N щілин.

Оскільки $N = \frac{l}{d}$, а $m = \frac{d \sin \varphi}{\lambda}$ то

$$R = mN = \frac{l}{d} \frac{\sin \varphi}{\lambda} = \frac{l \sin \varphi_{\max}}{\lambda},$$

$\varphi_{\max}$ – максимальний кут дифракції і $\varphi_{\max} \leq 90^\circ$. Тому, максимальна роздільна здатність ґратки буде $\left(\frac{\lambda}{\delta\lambda}\right) \leq \frac{l}{\lambda}$.

15.4 Дифракція на кристалічній решітці

Як відомо, рентгенівське випромінювання являє собою електromагнітні хвилі, довжина яких лежить в інтервалі $10^{-10} \div 8 \cdot 10^{-8}$ м. Згідно з умовами одержання рентгенівське випромінювання утворює суцільний або лінійчатий (характеристичний) спектр.

Щоб ґратка ефективно розкладала випромінювання у спектр, період d має бути того самого порядку, що й довжина хвилі падаючого випромінювання. Для спостереження дифракції рентгенівських хвиль слід мати просторову ґратку, період якої порядку 10^{-10} м. У природі існують такі просторові структури – кристали, де атоми та йони розміщено на відстанях порядку 10^{-10} м. Кристалографічні дослідження показали, що у будь-якому кристалі можна знайти певні площини, де атоми або йони, які утворюють його кристалічну ґратку, розміщені найбільш густо. Такі площини від-

буватимуть монохроматичне рентгенівське випромінювання, яке може інтерферувати від різних площин. Підсилення хвиль при інтерференції відбудеться для тих значень кута ϕ , коли в різниці ходів $\Delta = AO + OB$ (рис. 15.8) вміщується ціле число довжин хвиль: $2d \sin \phi = m\lambda$, де ϕ – доповнюючий кут або кут ковзання ($m = 1, 2, 3, \dots$; d – відстань між площинами).

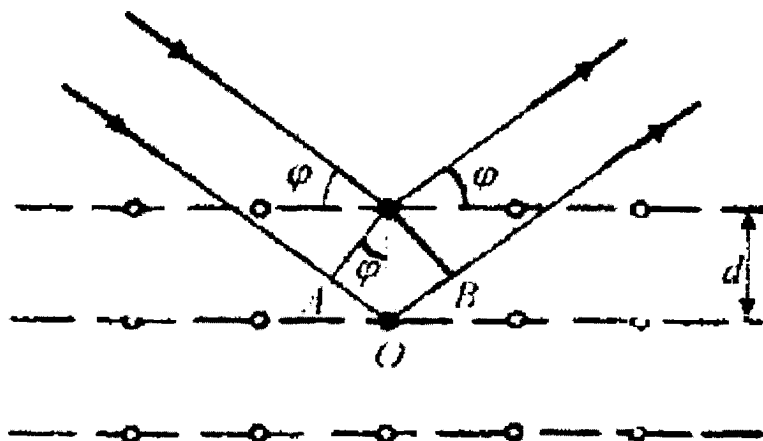


Рисунок 15.8 – Схема дифракції рентгенівського випромінювання на кристалі

Співвідношення $2d \sin \phi = m\lambda$ є формулою Вульфа-Брегга, яка широко застосовується у рентгеноструктурних дослідженнях. Дифракція виникає не в довільному напрямку падіння монохроматичного випромінювання, тому для її спостереження треба повертати кристал так, щоб кут ковзання задовольняв умову $2d \sin \phi = m\lambda$. Якщо обертати кристал або проводити експеримент з полікристалічною системою, в якій окремі кристалики орієнтовані довільно, то можна дістати певну систему інтерференційних картин від усіх можливих типів атомних площин певного кристала.

Дифракція рентгенівського випромінювання виявилась досить важливим засобом для вивчення структури кристалів, рідин, амор-

твердих тіл тощо. За її допомогою можна визначити міжатом-
дані, робити висновки про будову молекул та інших систем.

Розділ фізики і техніки, що використовує рентгенівське ви-
мінювання для вивчення структури твердих тіл, рідин, молекул,
називається **рентгеноструктурним аналізом**.

Метод визначення хімічного складу речовин через вивчення їх
рентгенівських спектрів називається рентгеноспектральним аналі-
зом.

Рентгеноструктурний і рентгеноспектральний аналіз досить
широко застосовується у багатьох галузях народного господарства.

15.5 Застосування дифракції

Явище дифракції широко використовують в науці і техніці.
Вона наша промисловість випускає спектрографи з дифракційними
сітками для спектрального аналізу. Докладне вивчення інтерфе-
ренції і дифракції покладено в основу нової галузі фізики – голо-
графії.

Термін „голографія” походить від двох грецьких слів „графо” –
писати і „олос” – повний, що означає „повний запис”. В цьому разі
йдеться про особливий метод реєстрації на фотопластинці хвильо-
го фронту випромінювання, який іде від предмета, і потім відно-
шення цього фронту для утворення уявного або дійсного зобра-
ження предмета. Для цього фотографують інтерференційну картину
з частин хвилі, які когерентні між собою. Одна частина хвилі
падає на фотопластинку називається опорною хвилею, друга освіт-
лює досліджуваний предмет і після відбивання від нього надходить
у саму пластинку. Цю частину хвилі називають предметною.

Принцип голографії запропонував у 1947р. англійський фізик
Д. Габор. На той час ще не були винайдені лазери, а утворити за
допомогою теплових джерел нерухому і контрастну картину інтер-
ференції дуже важко. Тільки лазерне випромінювання, яке має ве-
лику просторову і часову когерентність у поєднанні з великою ін-
тенсивністю, дало голографії можливість швидко розвинути.

Тепер голографію застосовують для записування і зберігання
любого інформаційного матеріалу, в кіно, телебаченні і т. д. Нині
можливо оцінити всі можливості застосування голографії, безперечно,
вона є одним з найперспективніших методів сучасної фізики.

Контрольні запитання

- 1 В чому полягає дифракція Фраунгофера?
- 2 Які особливості дифракції від однієї щілини?
- 3 Як змінюється дифракційна картина в залежності від m і кількості щілин?
- 4 Вивести умови максимуму і мінімуму для дифракції від щілини.
- 5 З'ясуйте фізичний зміст кутової дисперсії та роздільної здатності дифракційної ґратки.
- 6 Як змінюється дифракційна картина яка отримана за допомогою дифракційної ґратки, якщо:
 - а) збільшити сталу ґратки,
 - б) збільшити загальне число штрихів,
 - в) збільшити ширину щілин, залишивши сталу ґратки та число штрихів.
- 7 В чому перевага дифракційної ґратки: а) з великим числом щілин; б) з малим періодом решітки?
- 8 Виведіть рівняння Вульфа-Брегга.
- 9 Яке застосування дифракції на практиці?

16 ХВИЛЬОВА ОПТИКА. ПОЛЯРИЗАЦІЯ СВІТЛА

16.1 Природне і поляризоване світло. Закон Малюса

Наслідком теорії Максвелла є поперечність світлових хвиль: юри напруженості електричного $\vec{E}$ і магнітного $\vec{H}$ полів хвилі мно перпендикулярні і коливаються перпендикулярно до вектора швидкості $\vec{V}$ поширення хвилі. Для повного опису стану поляризації світлового пучка необхідно знати поведінку лише одного вектора. Звичайно, всі міркування ведуться відносно **світлового вектора** – вектора напруженості $\vec{E}$ електричного поля (ця назва обумовлена тим, що при дії світла на речовину основне значення має електрична складова поля хвилі, що діє на електрони в атомах речовини).

Світло є сумарним електромагнітним випромінюванням мно атомів. Атоми ж випромінюють світлові хвилі незалежно від одного, тому світлова хвиля, що випромінюється тілом, характеризується різноманітними рівноймовірними коливаннями електричного вектора (рис. 16.1). Розподіл векторів $\vec{E}$ пояснюється тим, що кожний атом випромінює світло з певною амплітудою, а рівність амплітудних коливань векторів $\vec{E}$ – однаковою (в середньому) інтенсивністю випромінювання кожного з атомів.



Рисунок 16.1 – Вектор напруженості електричного поля світлової хвилі

Світло з усіма можливими рівноймовірними орієнтаціями вектора $\vec{E}$ (і, отже, $\vec{H}$) називається **природним**.

Світло, в якому напрями коливань вектора якимось чином упорядковані, називається **поляризованим**.

Розглянемо дві монохроматичні взаємно перпендикулярні хвилі, що поширюються вздовж додатного напрямку осі OX:

$$\begin{aligned} E_y &= E_{01} \cos(\omega t - kx), \\ E_z &= E_{02} \cos(\omega t - kx + \phi), \end{aligned} \quad (16.1)$$

де $\omega = 2\pi\nu$ – циклічна частота, $k = \frac{\omega}{v}$ – хвильове число, E_{01} , E_{02} – амплітуди E_y і E_z , ϕ – різниця фаз коливань E_y і E_z .

Щоб знайти траєкторію результуючого коливання світлового вектора при додаванні двох взаємно перпендикулярних коливань, визначимо $\cos(\omega t - kx)$ з рівняння для E_y :

$$\cos(\omega t - kx) = \frac{E_y}{E_{01}}, \quad (16.2)$$

тоді

$$\sin(\omega t - kx) = \sqrt{1 - \left(\frac{E_y}{E_{01}}\right)^2}. \quad (16.3)$$

Оскільки

$$\cos(\omega t - kx + \phi) = \cos(\omega t - kx) \cos \phi - \sin(\omega t - kx) \sin \phi,$$

то

$$\frac{E_z}{E_{02}} - \frac{E_y}{E_{01}} \cos \phi = \sqrt{1 - \left(\frac{E_y}{E_{01}}\right)^2} \sin \phi. \quad (16.4)$$

Піднесемо до квадрата це рівняння:

$$\frac{E_y^2}{E_{01}^2} + \frac{E_z^2}{E_{02}^2} - 2 \frac{E_y E_z}{E_{01} E_{02}} \cos \phi = \sin^2 \phi \quad (16.5)$$

Отримане співвідношення с рівнянням еліпса, довільно орієнтованого відносно осей OY і OZ . Отже, кінець вектора $\vec{E}$ в кожній її поля описує еліпс, який лежить у площині, що перпендикулярно осі OX , Така хвиля називається **еліптично поляризованою** (рис. 16.2).

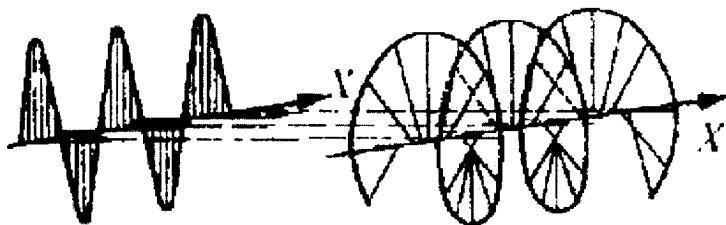


Рисунок 16.2 – Еліптично поляризована хвиля

Якщо $\varphi = \pm(2m + 1)\frac{\pi}{2}$ ($m = 0, 1, 2, \dots$), то отримуємо рівняння еліпса, орієнтованого відносно осей OZ і OY :

$$\frac{E_y^2}{E_{01}^2} + \frac{E_z^2}{E_{02}^2} = 1. \quad (16.6)$$

При $E_{01} = E_{02} = E_0$ еліпс перетворюється в коло. Така хвиля називається **циркулярно поляризованою** (поляризованою по ко-

Залежно від напрямку обертання вектора $\vec{E}$ розрізняють праву і ліву еліптичну і колову поляризацію. Якщо відносно напрямку променя вектор $\vec{E}$ обертається проти годинникової стрілки, поляризація називається **правою**, в протилежному випадку – **лівою**.

Якщо $\varphi = \pm m\pi$ ($m = 0, 1, 2, \dots$), то еліпс вироджується в пряму

$$\frac{E_y^2}{E_{01}^2} \pm \frac{E_z^2}{E_{02}^2} = 0. \quad (16.7)$$

Така хвиля називається **лінійно поляризованою (плоскополяризованою)** (рис. 16.3).

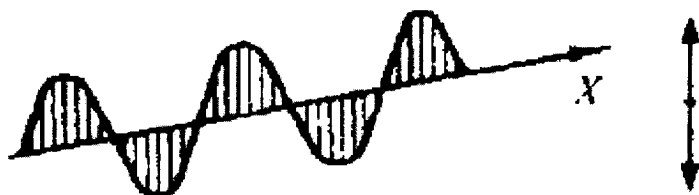


Рисунок 16.3 – Лінійно поляризована світлова хвиля

Якщо внаслідок яких-небудь зовнішніх впливів появляється переважаючий напрямок коливань вектора $\vec{E}$, то **світло частково поляризоване**.

Площина, в якій відбувається коливання вектора $\vec{E}$, називається **площиною поляризації** а перпендикулярна до неї площина – **площиною коливань**.

За міру ступеня поляризації приймають вираз

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \quad (16.8)$$

де $I_{\max}$ і $I_{\min}$ – максимальна і мінімальна інтенсивності світла, що відповідають двом перпендикулярним компонентам вектора $\vec{E}$. Для природного світла $I_{\max} = I_{\min}$ і $P = 0$. Для плоско поляризованого – $I_{\min} = 0$ і $P = 1$. Для еліптично поляризованого світла поняття ступеня поляризації не застосовується (у такого світла коливання повністю впорядковані).

Плоскополяризоване світло можна отримати з природного за допомогою приладів, які називаються **поляризаторами**. Ці прилади вільно пропускають коливання, паралельні до площини поляризації, яка називається **головною площиною**, і повністю або частково затримують коливання, які перпендикулярні цій площині. В ролі поляризаторів можуть бути середовища, які анізотропні відносно коливань вектора $\vec{E}$, наприклад, кристали. Одним із природних кристалів, які використовуються як поляризатори, може бути турмалін.

Прилади, за допомогою яких аналізують ступінь поляризації, називають **аналізаторами**. Роль аналізаторів виконують прилади, за допомогою яких одержують лінійно поляризоване світло. Будь-який поляризатор може бути аналізатором і навпаки.

Нехай на поляризатор падає природне світло (рис. 16.4). Вихідною хвилею, вектор напруженості електричного поля якої $\vec{E}_{\text{пр}}$,

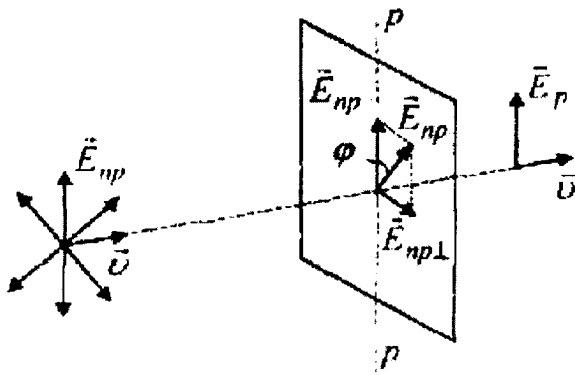


Рисунок 16.4 – Схема отримання лінійнополяризованого світла в поляризаторі

падає у площині, що утворює з головною площиною поляризатора p - p кут ϕ . При вході в поляризатор падаючу хвилю можна представити у вигляді двох коливань у взаємно перпендикулярних площинах:

$$E_{\text{пр}\parallel} = E_{\text{пр}} \cos \phi, \quad E_{\text{пр}\perp} = E_{\text{пр}} \sin \phi. \quad (16.9)$$

Перше коливання пройде через поляризатор, друге буде зафіксоване. Інтенсивність хвилі, що пройшла, пропорційна до $i_{\text{пр}}^2 = E_{\text{пр}}^2 \cos^2 \phi$, тобто

$$I_p = I_{\text{пр}} \cos^2 \phi, \quad (16.10)$$

де $I_{\text{пр}}$ – інтенсивність коливань з амплітудою $E_{\text{пр}}$.

В природному світлі всі значення ϕ рівномовірні. Тому частка світла, що пройшло через поляризатор, буде дорівнювати середньому значенню $\cos^2 \phi$, тобто $1/2$ і

$$I_p = 1/2 I_{\text{пр}}. \quad (16.11)$$

Під час обертання поляризатора навколо напрямку природного світла інтенсивність світла, що пройшло, залишається однією і тією самою; змінюється лише орієнтація площини поляризації світла, що вийшло з поляризатора.

Нехай на аналізатор падає лінійно поляризоване світло, отримане за допомогою поляризатора, головна площина якого р-р утворює кут ϕ з головною площиною аналізатора а-а (рис. 16.5). При

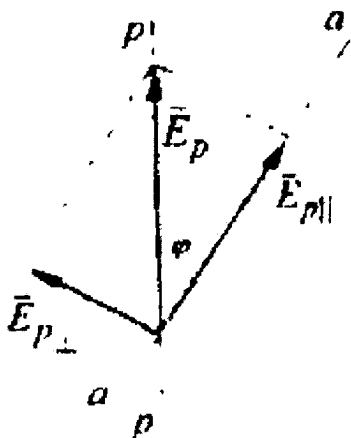


Рисунок 16.5 – Схема розкладання лінійно поляризованого світла в аналізаторі (закон Малюса)

вході в аналізатор лінійнополяризований промінь, амплітуда електричного вектора якого E_p , поділиться на два лінійно поляризовані промені, площини поляризації яких взаємно перпендикулярні. Амплітуди вектора напруженості електричного поля цих променів будуть:

$$E_{p\parallel} = E_p \cos \phi, \quad E_{p\perp} = E_p \sin \phi. \quad (16.12)$$

Оскільки аналізатор пропускає коливання електричного вектора, що відбуваються в площині а-а, а інтенсивність пропорційна квадрату амплітуди $E_{p\perp}$, то

$$I_a = I_p \cos^2 \varphi. \quad (16.13)$$

Якщо аналізатор не абсолютно прозорий, то $I_a = k_a I_p \cos^2 \varphi$.

Отримані співвідношення виражають **закон Малюса**.

Інтенсивність світла, що пройшла через аналізатор, змінюється від мінімуму (повне погашення світла) при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ до максимуму при $\varphi = 0$.

Якщо пропустити природне світло через поляризатор і аналізатор, площини яких утворюють кут φ , то з першого вийде плоскополяризоване світло, інтенсивність якого $I_p = \frac{1}{2} k_p I_{\text{пр}}$, а з другого йде світло інтенсивністю $I_a = k_a I_p \cos^2 \varphi$. Інтенсивність світла, що пройшла через два поляризатори, $I_a = \frac{1}{2} k_p k_a I_{\text{пр}} \cos^2 \varphi$.

Звідси $I_{\text{max}} = \frac{1}{2} I_{\text{пр}} k_p k_a$ (поляризатори паралельні) і $I_{\text{min}} = 0$ при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ – поляризатори схрещені).

16.2 Поляризація світла при відбиванні.

Закон Брюстера

Якщо природне світло падає на границю поділу двох діелектриків (наприклад, повітря і скла), то частина його відбивається, а частина заломлюється і поширюється в другому середовищі. Якщо встановити на шляху відбитого і заломлюваного променів аналізатор то, видно, що відбитий і заломлений промені частково поляризовані: при повертанні аналізатора навколо променів інтенсивність світла періодично посилюється і ослаблюється (повного гасіння не спостерігається).

Подальші дослідження показали, що у відбитому промені переважають коливання, перпендикулярні до площини падіння ($\bullet$), в заломленому – коливання, паралельні площині падіння ($\uparrow$) (рис. 16.6).

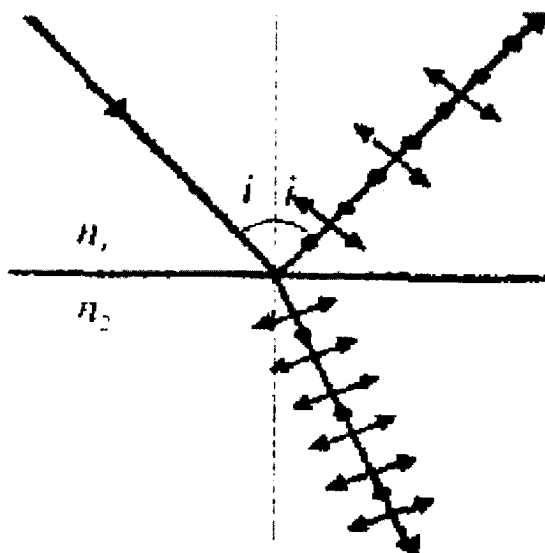


Рисунок 16.6 – Схема утворення поляризованого світла при відбиванні

Ступінь поляризації – ступінь виділення світлових хвиль з певною орієнтації електричного вектора – залежить від кута падіння променів і показника заломлення.

Шотландський фізик **Д. Брюстер** встановив закон, згідно з яким при куті падіння i_B (кут Брюстера), який задовольняє умову

$$\operatorname{tg} i_B = n_{21}, \quad (16.14)$$

відбитий промінь є плоскопаралельним. Тут n_{21} – показник заломлення другого середовища відносно першого. Ступінь поляризації заломленого променя при куті падіння i_B досягає найбільшого значення, проте цей промінь залишається поляризованим лише частково.

Якщо світло падає на границю поділу під кутом Брюстера, то битий і заломлений промені взаємно перпендикулярні:

$$\operatorname{tg} i_B = \frac{\sin i_B}{\cos i_B} = n_{21} = \frac{\sin i_B}{\cos \hat{a}}. \quad (16.15)$$

Звідси $\cos i_B = \sin \hat{a}$. Отже, $i_B + \hat{a} = \frac{\delta}{2}$, але $i_B = i$, тому $\hat{a} = \frac{\delta}{2}$.

Відбивання під кутом Брюстера дає змогу отримати лінійно поляризоване світло, однак його інтенсивність невелика і для скла ($n=1,5$) дорівнює близько 15%. тобто основна його частина поширюється у напрямку заломлення хвилі, яка поляризована не повністю. Для збільшення ступеня поляризації заломлених хвиль їх треба пропустити крізь стопу скляних пластинок. Так для $i = i_B$ стопа з скляних пластинок дає змогу отримати майже стопроцентну поляризацію заломлених хвиль.

16.3 Подвійне променезаломлення

Усі прозорі кристали (крім кристалів кубічної системи, які оптично ізотропні) є оптично анізотропні. їх відносна діелектрична проникність і показник заломлення залежать від напрямку електричного вектора $\vec{E}$ світлової хвилі.

В оптично анізотропних кристалах спостерігається явище **повійного променезаломлення**, яке полягає в тому, що промінь світла, який падає на поверхню кристала, роздвоюється в ньому на два заломлені промені, що поширюються з різними швидкостями.

Кристали, що мають подвійне променезаломлення, діляться на двовісні і двовісні. В одновісних кристалів для одного із заломлених променів виконується закон заломлення, зокрема заломлений промінь лежить в одній площині з падаючим променем і нормаллю до заломлюючої поверхні. Цей промінь називається **звичайним** (о). Для другого променя, який називається **незвичайним** (е), відношення синусів кута падіння і кута заломлення не залишається постійним при зміні кута падіння. Незвичайний промінь не лежить в

одній площині з падаючим променем і нормаллю до кристала поверхні.

На рисунку 16.7 показано явище подвійного променезаломлення в одновісному кристалі, коли пучок світла падає на кристал нормально. Один з променів (о) є продовженням падаючого, а другий (е) при проникненні в кристал відхиляється на якийсь кут.

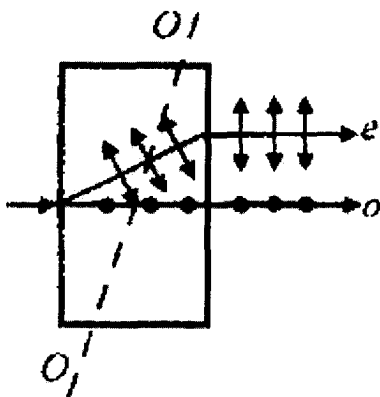


Рисунок 16.7 – Схема подвійного променезаломлення в одновісному кристалі

Одновісними кристалами є ісландський шпат, кварц, турмалін, а двовісними – слюда, гіпс. У двовісних кристалів обидва промені незвичайні.

В одновісних кристалах існує єдиний напрямок, вздовж якого подвійне променезаломлення не спостерігається.

Напрямок в кристалі, по якому поширюються звичайний і незвичайний промені не розділяючись і з однаковою швидкістю, називається **оптичною віссю кристала**. Оптична вісь – це не пряма лінія, що проходить через якусь точку кристала, а певний напрямок в кристалі. Довільна пряма, паралельна до цього напрямку, є оптичною віссю кристала.

Площина, яка проходить через промінь і оптичну вісь кристала, що перетинає промінь, називається **головною площиною** або головним перерізом кристала, що відповідає цьому променю. Через кристал можна провести нескінченну множину паралельних оптичних осей і нескінченну множину паралельних головних перерізів.

ія перетину двох довільних головних перерізів завжди є оптичною віссю. На рисунку 16.8 оптична вісь ОО': промінь, що падає на стал і поширюється в цьому напрямку не роздвоюється.

Дослідження звичайного і незвичайного променів показує, що ці два промені повністю поляризовані у взаємно перпендикулярних напрямках. Електричний вектор у звичайному промені перпендикулярний до площини головного перерізу ($\bullet$), а в незвичайному промені лежить у площині головного перерізу ($\uparrow$) (рис 16.7), тобто площина поляризації звичайного променя перпендикулярна до площини головного перерізу, а незвичайного збігається з площиною головного перерізу.

Після виходу з кристала, якщо не брати до уваги поляризацію двох взаємно перпендикулярних напрямках (площинах), ці два промені нічим один від одного не відрізняються.

Подвійне променезаломлення пояснюється анізотропією кристалів. У кристалах некубічної системи діелектрична проникність є залежною від напрямку електричного поля $\vec{E}$. В одних кристалах є в напрямку оптичної осі і в напрямку, який перпендикулярний до неї, має різні значення $\epsilon_{\parallel}$ і $\epsilon_{\perp}$, які називаються довдовжньою і поперечною діелектричними проникностями кристала. В інших напрямках ϵ має проміжне значення. Оскільки

$$n = \sqrt{\epsilon} \quad \text{і} \quad v = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}, \quad \text{то з анізотропії } \epsilon \text{ випливає, що світловим}$$

вплив з різними напрямками коливання вектора $\vec{E}$ відповідають різні значення показника заломлення і швидкості світлових хвиль.

Явище подвійного променезаломлення лежить в основі роботи поляризаційних пристроїв, які служать для отримання поляризованого світла. Найчастіше для цього застосовуються **призми і поляризатори**. Призми ділять на два класи:

1) призми, що дають лише плоскополяризований промінь (поляризаційні призми);

2) призми, що дають два поляризовані у взаємно перпендикулярних площинах промені (двозаломні призми).

Типовий представник поляризаційних призм – призма Ніколя (ніколь) – подвійна призма з ісландського шпату, які склеєні вздовж лінії АВ канадським бальзамом з $n = 1,55$ (рис. 16.8).

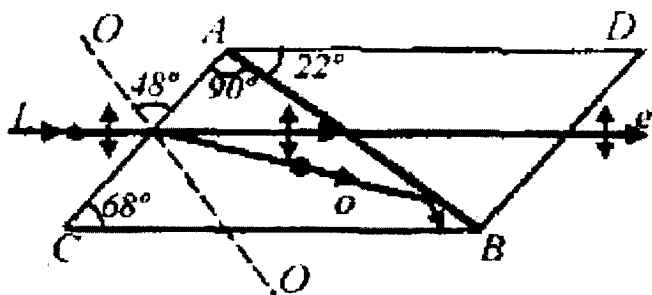


Рисунок 16.8 – Хід світлових променів у призмі Ніколя

Оптична вісь OO' спрямована під кутом 48° до входної грані AC . Природний промінь L при падінні на грань AC внаслідок подвійного заломлення поділяється на звичайний o і незвичайний промінь e . При певному виборі кутів призми звичайний промінь падає на шар бальзаму під кутом 76° , який більший за граничний, зазнає повного внутрішнього відбивання, падає на зачорнену грань CB і нею поглинається. Незвичайний промінь виходить з призми паралельно до грані CB . Площина його поляризації збігається з площиною головного перерізу.

Прикладом двозаломної призми є призма Волластона, яка складається з двох прямокутних призм із ісландського шпату (рис. 16.9). У призмі ABC оптична вісь паралельна до катета AB , а в призмі ACD – ребра C , яке перпендикулярне до площини рисунка.

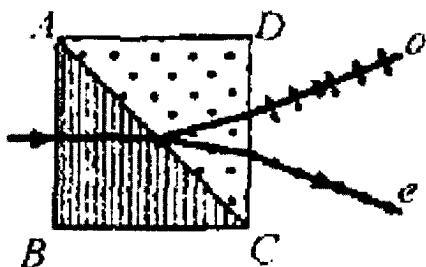


Рисунок 16.9 – Схема світлових променів у призмі Волластона

Продне світло падає нормально на грань АВ; обидва промені, звичайний і незвичайний, що виникають в призмі АВС, ідуть по тому напрямку, відповідно з швидкостями v_0 і v_e . У другій призмі вони також поширюються в напрямку, який перпендикулярний оптичній осі, але, оскільки оптичні осі в обох призмах взаємно перпендикулярні, то звичайний промінь в першій призмі перетворюється у незвичайний в другій і навпаки. Тому звичайний промінь в першій призмі заломиться на межі обох призм з відносним показником заломлення n_e/n_0 , а промінь незвичайний – з n_0/n_e . Для ісландського шпату $n_e < n_0$, і тому $n_e/n_0 < 1$, а $n_0/n_e > 1$. Перший промінь заломиться в бік ребра С призми АСD, а другий – в бік її основи D. Цим досягається значне розходження променів. Обидва промені плоско поляризовані.

Всі двозаломлені кристали тією чи іншою мірою поглинають світло. Коефіцієнт поглинання неоднаковий для звичайного і незвичайного променів і залежить від напрямку поширення світла в кристалі. Ця явище називається **дихроїзмом**. Значний дихроїзм у видимій області спектра мають кристали турмаліну, в якому коефіцієнт поглинання для звичайного променя в багато разів більший, ніж для незвичайного. Пластина турмаліну завтовшки 1 мм практично повністю поглинає звичайний промінь, і світло, що проходить крізь неї, буде лінійно поляризованим.

Плівка завтовшки 0,1 мм, на яку нанесено кристалики гепатиту, повністю поглинає звичайний промінь видимої області спектра.

Поляризатори, для створення яких використане явище дихроїзму, називаються **поляроїдами**.

16.4 Застосування поляризованого світла

Поляризаційні світлофільтри (поляроїди) виготовляють із двозаломних кристалів, таких, як, наприклад, гепатит. Це – целулоїдна плівка, вкрита тонким шаром відповідно орієнтованих кристалів гепатиту.

Явище поляризації широко використовують у народному господарстві. Його використовують для визначення концентрації розчинів оптично активних речовин, цукру в крові людей, для визначення місць пружних напружень, які виникають в наслідок механічних

навантажень, під час вивчення процесів, які швидко відбуваються, таких, наприклад, як звукозапис і відтворення звуку.

Контрольні запитання

- 1 В чому полягає явище поляризації світла?
- 2 В чому різниця між лінійно поляризованим і природнім світлом?
- 3 Які методи одержання поляризованого світла?
- 4 З'ясуйте фізичну суть поляризації світла при відбиванні і заломленні світла на межі двох діелектриків.
- 5 З'ясуйте характер поляризації світла при його проходженні через призму Ніколя.
- 6 Сформулюйте закон Брюстера.
- 7 Який напрямок коливання звичайного і незвичайного променів в кристалі?
- 8 Як і за допомогою яких приладів можна одержати поляризоване світло?
- 9 Що таке ступінь поляризації світла?

17 КВАНТОВІ ГЕНЕРАТОРИ

§7.1 Взаємодія світла з квантовими системами: поглинання, спонтанне та вимушене резонансне випромінювання

При проходженні паралельного пучка світла крізь шар прозорого середовища його інтенсивність зменшується, тобто світло понається. Явище поглинання світла пояснюється на основі як асичної, так і квантової теорії. Поглинання світла може приводити до нагрівання, йонізації або збудження атомів і молекул речовини, до деформації та ін. Крім того, поглинання може супроводжуватись розсіянням світла та індуктивним випромінюванням.

Щоб отримати співвідношення, яке виражає закон поглинання ітла, розглянемо шар прозорого середовища завтовшки l , на який дає паралельний пучок променів інтенсивністю I_0 . Виділимо а середовищі нескінченно тонкий шар dl (рис. 17.1). Дослід показує, що

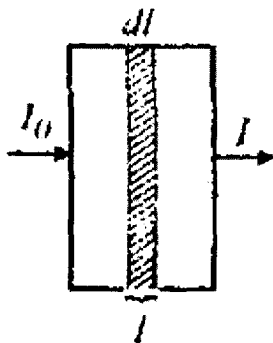


Рисунок 17.1 – Схема поглинання світла середовищем

зменшення інтенсивності світла шаром середовища dl пропорційне ю величині інтенсивності, що входить у цей шар, і товщини шару, тобто

$$dI = -\alpha I dl, \quad (17.1)$$

де α – коефіцієнт пропорційності, який не залежить від інтенсивності світла, називається коефіцієнтом поглинання. Знак мінус вказує на те, що із збільшенням товщини шару поглинаючого середовища інтенсивність світла, що проходить крізь нього, зменшується.

Після розділення змінних у рівнянні (17.1) дістаємо

$$\frac{dI}{I} = -\alpha dl. \quad (17.2)$$

Проінтегруємо це рівняння:

$$\int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = -\alpha \int_0^l dl.$$

При цьому маємо

$$I = I_0 e^{-\alpha l}, \quad (17.3)$$

де I – інтенсивність світла, що виходить із шару поглинаючого середовища завтовшки l ; I_0 – інтенсивність світла, що входить у поглинаюче середовище. Шар, товщина якого дорівнює $1/\alpha$, зменшує інтенсивність світла в e разів. Отримане співвідношення було встановлене 1729 р. П. Бугером і називається законом Бугера, або законом Бугера-Ламберта. А. Бер незалежно від П.Бугера встановив, що поглинання світла розчинами пропорційне молярній концентрації C_0 , розчиненої речовини:

$$\alpha = \alpha_0 C_0, \quad (17.4)$$

де α_0 – коефіцієнт пропорційності, який залежить від природи розчиненої речовини і не залежить від її концентрації.

Тоді закону Бугера-Ламберта-Бера можна надати вигляду

$$I = I_0 e^{-\alpha_0 C_0 l}. \quad (17.5)$$

Це співвідношення виражає закон Бугера-Ламберта-Бера, який справедливий для газів і розчинів малих концентрацій.

Коефіцієнт поглинання можна виразити через циклічну частоту світла ω і показник поглинання середовища:

$$\alpha = 2 \frac{\omega}{c} \kappa = 2 \frac{2\pi\nu}{\lambda_0} T \kappa = \frac{4\pi}{\lambda_0} \kappa. \quad (17.6)$$

Коефіцієнт поглинання залежить від довжини хвилі λ_0 (або частоти ω) і від хімічної природи речовини.

В одноатомних газах і парах металів, у яких атоми розмішені значних відстанях один від одного і їх можна вважати ізольованими, коефіцієнт поглинання для більшості довжин хвиль близький нуля і лише для дуже вузьких спектральних областей спостерігаються різні максимуми (так званий **лінійчатий спектр поглинання**) (рис. 17.2). Ці лінії відповідають частотам власних коливань електронів в атомах.



Рисунок 17.2 – Лінійчатий спектр поглинання

У газів з багатоатомними молекулами є системи тісно розміжених ліній, які утворюють **смуги поглинання**. Структура цих смуг визначається складом і будовою молекул.

Рідкі і тверді діелектрики мають суцільні спектри поглинання, що складаються з порівняно широких смуг поглинання, в межах яких коефіцієнт поглинання змінюється плавно. За межами цих смуг $\alpha \approx 0$, тобто діелектрики прозорі.

Метали практично непрозорі для світла. Коефіцієнт α для них має значення порядку 10^2 м^{-1} , в той час як для скла $\alpha \approx 1 \text{ м}^{-1}$. Це зумовлено наявністю в металах вільних електронів. Під дією електричного поля світлової хвилі їхні електрони починають рухатись і в металі виникають швидкозмінні структури, що супроводжуються виділенням теплоти. В результаті енергія світлової хвилі швидко меншується і перетворюється у внутрішню енергію металу.

Структура спектрів поглинання визначається складом і будовою молекул, тому вивчення спектрів поглинання є одним з основних методів кількісного і якісного дослідження речовин.

Атоми можуть знаходитися лише у квантових станах з дискретними значеннями енергії $E_1, E_2, E_3, \dots$. Для простоти розглянемо два з цих станів (n і m) з енергіями E_n і E_m . Якщо атом знаходиться в основному стані E_n , то під дією зовнішнього випромінювання може здійснитися вимушений перехід у збуджений стан m – поглинання випромінювання (рис. 17.3). Ймовірність таких переходів пропорційна густині випромінювання, що викликає ці переходи.

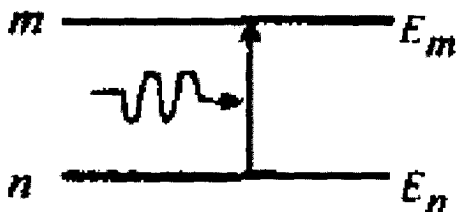


Рисунок 17.3 – Поглинання випромінювання

Дослід показує, що атом в збудженому енергетичному стані сам собою переходить у нормальний, незбуджений стан, випромінюючи світло. Випромінювання, яке відбувається без зовнішніх причин, що змінюють енергію атома, називають **самочинним** або **спонтанним випромінюванням**. Для пояснення спонтанних переходів атома з вищих енергетичних рівнів на нижчі недостатньо одних законів квантової механіки і доводиться вдаватися до квантової електродинаміки. Проте в 1926 р., задовго до створення квантової електродинаміки, А. Ейнштейн створив теорію випромінювання, яка базується на законах збереження енергії та імпульсу при взаємодії квантових систем з електромагнітним полем.

Розглянемо спонтанне випромінювання атома за Ейнштейном. Якщо атом у деякий момент часу t перебуває в квантовому стані m і має енергію E_m , то під дією внутрішніх впливів, механізм яких не можна простежити, атом може спонтанно перейти в деякий стан n , що характеризується меншою енергією E_n (рис. 17.4). Введемо ймовірність A_{mn} того, що протягом 1с здійснюється спонтанний перехід атома зі стану m в стан n . Величину A_{mn} називають **коефіцієнтом Ейнштейна для спонтанного випромінювання**. Якщо N_m є число атомів, які перебувають на енергетичному рівні E_m в момент часу t , то число $-dN_m$ атомів, що перейшли за проміжок часу від t

в стан n , пропорційне ймовірності A_{mn} спонтанного переходу. Число атомів і проміжку часу dt : $-dN_m = A_{mn}N_m dt$.

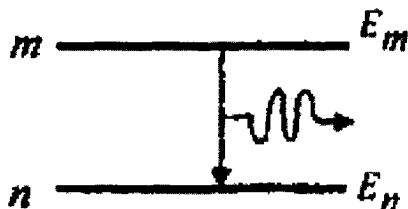


Рисунок 17.4 – Спонтанне випромінювання

Знак “-” свідчить про зменшення числа атомів на рівні m . Після інтегрування отримаємо

$$N_m = N_{m0} e^{-A_{mn}t}, \quad (17.7)$$

N_{m0} – число атомів на рівні m в момент часу $t = 0$.

Кожний перехід зі стану m в стан n супроводжується випромінюванням спектральної лінії з частотою $h\nu_{mn}$, що визначається правилом частот Бора:

$$E_m - E_n = h\nu_{mn}. \quad (17.8)$$

Енергія, яка випромінюється за час dt

$$dE = h\nu_{mn} |dN_{mn}| = h\nu_{mn} A_{mn} N_m dt. \quad (17.9)$$

Інтенсивність випромінювання J тобто енергія, яка випромінюється за одиницю часу, можна визначити

$$J = \frac{dE}{dt} = h\nu_{mn} N_{m0} A_{mn} e^{-A_{mn}t} = J_0 e^{-A_{mn}t}, \quad (17.10)$$

де J_0 – початкова інтенсивність випромінювання.

Середньою тривалістю τ_m життя атома у збудженому стані називається час, протягом якого число атомів N_{m0} , які спочатку були на збудженому рівні m , зменшується в e разів:

$$N_m = \frac{N_{m0}}{e} = N_{m0} e^{-A_{mn}\tau_m}. \quad (17.11)$$

$$\text{Звідки } A_{mn} \tau_m = 1, \text{ тобто } \tau_m = \frac{1}{A_{mn}}.$$

Коефіцієнт Ейнштейна A_{mn} є величина, обернена до середнього часу життя атома в збудженому стані.

$$\text{Тоді } J = J_0 e^{-\frac{t}{\tau_m}}.$$

Перевірку цього закону і вимірювання часу τ_m було здійснено В. Віном в дослідях зі свіченням каналових променів.

Порядок величини $\tau_m \approx 10^{-8}$ с є характерним для часу перебування атомів у збудженому стані, після чого вони спонтанно переходять на розміщені нижче енергетичні стани. Скінченність часу життя τ_m атома в збудженому стані призводить до того, що енергію E_m атома в збудженому стані можна визначити лише з деякою невизначеністю ΔE_m , що випливає зі співвідношення невизначеностей

Гейзенберга $\Delta E_m \geq \frac{\hbar}{\tau_m}$. Величину $\Delta E_m = \Gamma_m$ називають **природною шириною енергетичного рівня** E_m . Значення ΔE_m , або τ_m , визначає природну ширину $\Delta \nu_{mn}$ спектральної лінії, яка виникає при переході з рівня m на рівень n .

$\Delta \nu_{mn} = \frac{\Delta E_m}{2\pi\hbar} \geq \frac{1}{2\pi\tau_m}$, що відповідає за шкалою довжин хвиль величині $\Delta \lambda \approx 10^{-14}$ м.

Спонтанні переходи взаємно не зв'язані, тому спонтанне випромінювання некогерентне.

У 1916р. Ейнштейн для пояснення спостережуваної під час досліду термодинамічної рівноваги між речовиною і випромінюванням, що випускається і поглинається нею, постулював, що крім поглинання і спонтанного випромінювання повинен існувати третій, якісно інший тип взаємодії. Якщо на атом, що знаходиться у збудженому стані m , діє зовнішнє випромінювання з частотою, що задовольняє умову $h\nu_{nm} = E_m - E_n$, то виникає вимушений перехід в основний стан з випромінюванням фотона з тією самою енергією (рис. 17.5). При подібному переході відбувається випромінювання атомом фотона, додатково до того фотона, під дією якого відбувається перехід.

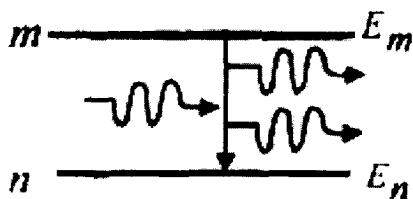


Рисунок 17.5 – Вимушене випромінювання

Атом, який перебуває на деякому збудженому енергетичному рівні m може з деякою ймовірністю перейти під дією поля передчасно в нижчий стан n . Поле ніби "скидає" атом із збудженого рівня вниз".

Ймовірність вимушеного випромінювання під дією поля пропорційна електронній густині $\rho(\nu)$ енергії поля і деякому коефіцієнту B_{mn} , який називається коефіцієнтом Ейнштейна для вимушеного (індукованого) випромінювання.

Повну ймовірність того, що збуджений атом, який перебуває на рівні m , за одиницю часу перейде на нижчий рівень n з випусканням кванта $h\nu$ спонтанно або вимушено, можна визначити сумою $A_{mn} + B_{mn}\rho(\nu)$.

Число dN'_m атомів, які із загального числа N_m атомів, що перебувають на рівні m , перейдуть у стан n за час dt , можна записати:

$$dN'_m = [A_{mn} + B_{mn}\rho(\nu)]N_m dt. \quad (17.12)$$

З іншого боку, взаємодія з електромагнітним полем атомів, що перебувають на рівні n , може привести до того, що атом, поглинаючи квант енергії $h\nu_{nm} = E_m - E_n$, перейде у вищий енергетичний стан m ймовірність того, що за одну секунду відбудеться поглинання, за аналогією з попереднім, можна записати $B_{nm}\rho(\nu)$, тут B_{nm} – коефіцієнт Ейнштейна для поглинання атома. Число актів dN'_n збудження атомів за час dt :

$$dN'_n = B_{nm}\rho(\nu)N_n dt, \quad (17.13)$$

де N_n – число атомів на рівні n в момент часу t .

У стані термодинамічної рівноваги речовини і електромагнітного поля повинна бути рівновага між процесами випускання і по-

глинання світла, рівновага повного числа актів випускання світла і числа актів його поглинання.

Поскільки мова йде про переходи між двома довільно обраними рівнями m і n , то має місце принцип **детальної рівноваги**, для якої:

$$[A_{mn} + B_{mn}\rho(\nu)]N_m = B_{nm}\rho(\nu)N_n. \quad (17.14)$$

Така рівновага встановлюється в замкненій порожнині, температура T якої підтримується сталою. Рівновага, яка виникає в результаті випромінювання і поглинання електромагнітних хвиль атомами стінки, приводить до формули Планка.

Ейнштейн і Дірак показали, що вимушене випромінювання (вторинні фотони) тотожне вимушуючому випромінюванню (первинні фотони) і воно має таку ж частоту, фазу, поляризацію і напрямок поширення, як і вимушуюче випромінювання.

Вторинні фотони, рухаючись в одному напрямку і зустрічаючи інші збуджені атоми, стимулюють наступні індуковані переходи і число фотонів росте лавиноподібно. Поряд з вимушеним випромінюванням можливий і конкуруючий процес – поглинання. Тому для підсилення падаючого випромінювання необхідно, щоб число актів вимушеного випромінювання фотонів (воно пропорційне заселеності збуджених станів) перевищувало число актів поглинання фотонів (воно пропорційне заселеності основних станів).

У системі атомів, що знаходяться в термодинамічній рівновазі, поглинання падаючого випромінювання буде перевищувати вимушене, тобто падаюче випромінювання при проходженні через речовину буде ослаблятися.

Щоб середовище підсилювало падаюче на нього випромінювання, необхідно створити нерівноважний стан системи, при якому число атомів у збудженому стані було би більше, ніж їх число в основному стані. Такі стани називаються станами з **інверсною заселеністю**. Процес створення нерівноважного стану речовини називається **накачкою**. Накачку можна здійснити оптичним, електричним й іншими способами.

У середовищах, які перебувають в інверсному стані, вимушене випромінювання може перевищувати поглинання. внаслідок чого падаючий пучок світла при проходженні через ці середовища буде підсилюватися.

17.2 Квантові генератори, їхні типи та практичне застосування

Практично інверсний стан середовища здійснено в **оптичних квантових генераторах (ОКГ)** – або лазерах. Слово "лазер" сколено означає підсилення світла за допомогою вимушеного випромінювання. Лазери генерують у видимій, інфрачервоній і ближній ультрафіолетовій областях.

Радянські фізики М. Басов і О. Прохоров і американський вчений Ч. Таунс створили квантові генератори електромагнітних хвиль сантиметрового діапазону – **мазери**. Слово "мазер" – підсилення мікрохвиль за допомогою індукованого випромінювання. **Лазер** – квантовий генератор ультракоротких хвиль у сантиметровому діапазоні.

Залежно від типу активного середовища лазери поділяються на **твердотільні, газові, напівпровідникові і рідинні**.

Класифікують лазери і за **методами накачки** – **оптичні, теплові, хімічні, електроіонізаційні** та ін.

Лазери обов'язково мають три основні компоненти: 1) **активне середовище**, в якому створюється стан з інверсною заселеністю енергетичних рівнів; 2) **систему накачки** – пристрій для створення інверсії в активному середовищі; 3) **оптичний резонатор** – пристрій, який формує вихідний світловий пучок.

Інверсну заселеність рівнів в ОКГ практично здійснюють за рівниневою схемою, яку запропонували М. Басов і О. Прохоров в 1955 р.

Один з перших ОКГ, що працюють за схемою трьох рівнів з твердим тілом як активним підсилюючим середовищем, був створений у 1960 р. Т. Мейманом. Підсилюючим середовищем у ньому є кристал рубіну, який за хімічним складом є оксидом алюмінію Al_2O_3 з домішкою оксиду хрому Cr_2O_3 у кількості від 0,03 до 0,05%. При цьому в кристалічній ґратці оксиду алюмінію певну частку атомів Al замінено Cr^{+3} . Активною речовиною, в якій здійснюються вимушені переходи, в рубіні є йони Cr^{+3} .

На рисунку 17.6 показана схема енергетичних рівнів йона хрому Cr^{+3} . У ньому над нормальним рівнем E_1 розміщені дві енергетичні смуги E_3 і E_4 – а між рівнем E_1 і смугою E_3 знаходиться метастабільний рівень E_2 , який складається з двох енергетичних станів. Підкачування в лазері здійснюється потужним спалахом ксено-

нової лампи. Атоми хрому, які до спалаху знаходились на основному рівні E_1 , внаслідок поглинання зеленого або синього світла, яке випромінює ксенонова лампа, переходять у збуджені стани E_3 і E_4 .

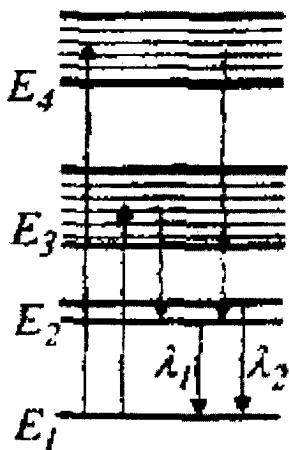


Рисунок 17.6 – Схема енергетичних рівнів йона хрому у кристалах рубіну

Час перебування атомів у збуджених станах становить $\sim 10^{-8}$ с, і вони здійснюють релаксаційний перехід на збуджений рівень E_2 без випромінювання. Рівень E_2 метастабільний, і час життя на ньому становить $\sim 10^{-3}$ с, тобто в $\sim 10^5$ разів більший за час перебування йона у звичайному збудженому стані E_3 і E_4 . Так можна створити умови, за яких заселеність йонами подвійного рівня E_2 перевищуватиме заселеність основного рівня E_1 . При переході йонів хрому з метастабільного стану в основний рубіновий лазер випромінює світло двох хвиль: $\lambda_1 = 0,6929$ мкм і $\lambda_2 = 0,6943$ мкм, що лежать в червоній частині спектра. Більш інтенсивна лінія $\lambda_2 = 0,6943$ мкм. Тому вона і підсилюється при роботі лазера. Виникненню інверсій рівнів E_1 і E_2 сприяє мала ймовірність спонтанних переходів йону хрому з рівнів E_2 на рівень E_1 .

Кожний фотон, який випадково народжується при спонтанних переходах, може породжувати в активному середовищі множину вимушених переходів, в результаті чого виникає ціла лавина вторинних фотонів, що є копією первинних. Спонтанні переходи ма-

ь випадковий характер, і фотони, що народжуються, спонтанно промінюються в різних напрямках. Тому в різних напрямках поруються і лавини вторинних фотонів. Випромінювання, що ладається з подібних лавин, не може мати високі когерентні влас- вості.

Для виділення напрямку лазерної генерації використовується емент лазера – **оптичний резонатор**. Ним служить пара дзеркал, і встановлені паралельно одне одному. Найчастіше використову- ь дзеркала угнуті. Принципова схема ОКГ зображена на рисун- / 17.7, де 1 – активне середовище, 2 і 3 – суцільне і напівпрозоре дзеркала.

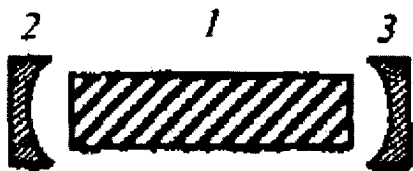


Рисунок 17.7 – Принципова схема ОКГ

Розглянемо фотон, який рухається паралельно осі кристала. Він породжує лавину фотонів, які летять у тому самому напрямку (рис. 17.8 а). Частина цієї лавини частково пройде крізь напівпро- зоре дзеркало 3 назовні, а частина відіб'ється і наростатиме в акти- вному середовищі (рис. 17.8 б). Коли лавина електронів дійде до суцільного дзеркала 2, вона частково поглинеться, але після відби- вання від дзеркала 2 підсилений потік фотонів знову рухатиметься так само, як і початковий, "затравочний" фотон (рис. 17.8 в). Потік фотонів, який був багато разів підсилений і вийшов з генератора крізь напівпрозоре дзеркало, утворює точно напрямлений пучок променів світла.

Довжина шляху, який проходить хвиля між двома відбиван- нями, повинна становити ціле число довжин хвиль:

$$2L = n\lambda, \quad (17.15)$$

або

$$L = n \frac{\lambda}{2}, \quad (17.16)$$

де $n = 1, 2, \dots$.

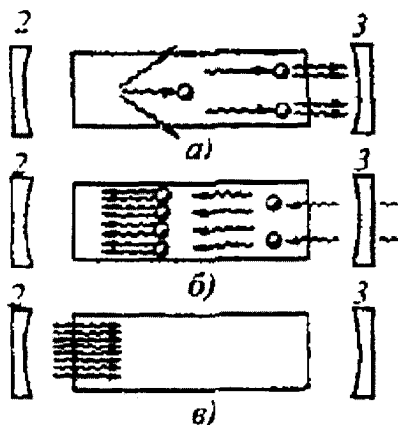


Рисунок 17.8 – Процес утворення лавини фотонів в ОКГ

Якщо виконано цю умову, то хвилі, які при кожному відбиванні виходять з генератора через дзеркало, когерентні між собою.

Першим газовим лазером неперервної дії на суміші атомів неону і гелію був створений в 1960 р. Джованом. В газових лазерах інверсна заселеність рівнів здійснюється електричним розрядом, що збуджується в газах.

В гелій-неоновому лазері накачка відбувається в два етапи: гелій (He) служить носієм енергії збудження, а лазерне випромінювання дає неон (Ne). Із всіх рівнів He, крім основного E'_1 , для роботи лазера мають значення метастабільні рівні E'_2 і E'_3 з енергіями 19,82 і 20,61 eV відповідно (рис. 17.9). Спонтанний перехід з цих рівнів на основний рівень E'_1 "заборонений", тобто відбувається з дуже малою ймовірністю. Тому час життя атома на цих рівнях E'_2 і E'_3 дуже великий. На цих метастабільних рівнях атоми He нагромаджуються в результаті зіткнень з електронами, що утворюються в розряді. Рівні гелію E'_2 і E'_3 майже збігаються з рівнями E_4 і E_6 неону (рис. 17.9). Завдяки цьому при зіткненнях збуджених атомів гелію з незбудженими атомами йону інтенсивно відбуваються безвипромінювальні переходи атомів гелію у незбуджений стан з передачею енергії атомам неону. Цей процес збудження атомів Ne на рисунку 17.9 символічно показаний горизонтальними пунктирними

тілками. В результаті концентрація атомів Ne на рівнях E_4 і E_6 сильно зростає, і виникає інверсна залежність відносно рівнів E_3 і E_5 , різниця заселеності рівнів E_6 і E_3 збільшується в декілька разів.

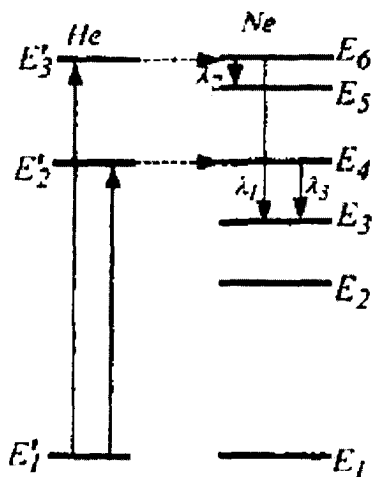


Рисунок 17.9 – Схема накачки в гелій-неоновому лазері

Перехід атомів неону з рівня E_6 на рівень E_3 супроводжується генерацією червоного світла з довжиною хвилі $\lambda_1 = 0,6328$ мкм. Цей лазер може генерувати й інфрачервоне випромінювання з довжинами хвиль $\lambda_2 = 3,390$ мкм і $\lambda_3 = 1,150$ мкм.

Лазерне випромінювання характеризується такими властивостями:

- високою часовою і просторовою когерентністю;
- строгою монохроматичністю ($\Delta\lambda \sim 10^{-11}$ м);
- великою густиною потоку випромінювання;
- дуже малим кутовим розходженням в пучку.

Незвичайні властивості лазерного випромінювання знаходять широке застосування. ОГК можна з великою ефективністю використовувати для зв'язки, локації. Випромінюванням ОГК можна пробивати найдрібніші отвори в найтвердіших речовинах, зварювати мікродеталі, використовувати механічну обробку, впливати на хід хімічних реакцій. Застосування лазерів значно підвищило точність вимірювальної техніки.

Контрольні запитання

- 1 Що називають поглинанням світла?
- 2 Сформулюйте закони Бугера-Ламберта, Бугера-Ламберта-Бера.
- 3 Яким частотам коливань атомів відповідає лінійчатий спектр поглинання?
- 4 З'ясуйте фізичний зміст коефіцієнта поглинання α і показника поглинання κ . Як вони пов'язані між собою?
- 5 Які прилади застосовують для вимірювання поглинання світла?
- 6 Що називають спонтанним і вимушеним випромінюванням?
- 7 З'ясуйте фізичний зміст коефіцієнтів Ейнштейна.
- 8 Що розуміють під природною шириною енергетичного рівня?
- 9 Що таке квантові генератори?
- 10 Які стани називають інверсно заселеними?
- 11 Дайте визначення лазерів і мазерів.
- 12 Зобразіть схему трьохрівневого твердотілого лазера.
- 13 Яка принципова схема ОКГ?
- 14 Зобразіть схему накачки і випромінювання в гелійнеоновому лазері.
- 15 Де застосовують лазери?

18 ХВИЛЕВОЛОКОННІ СИСТЕМИ

18.1 Хвилеволоконні системи та хвильоволоконна передача інформації

Ідея використовувати світло для передачі інформації стара як світ. Переваги цього способу були очевидні навіть нашим предкам. Ще в Стародавній Русі ланцюг сигнальних багать використовували для того, щоб попередити про наближення ворога. Але пройшло декілька століть, перш ніж були відкриті фундаментальні закони оптики. І ще не одне століття знадобилося, щоб, користуючись цими законами, створити оптоволоконну технологію.

Хоча вже в другій половині дев'ятнадцятого століття Джон Тіндалл продемонстрував можливість направлено розповсюдження світла по водяному струменю, а в двадцятих роках минулого століття були створені перші твердотільні світловоди, по яких вже передавали зображення. Справжній стрибок оптоволоконна технологія одержала в 50-60-х роках, коли був винайдений лазер, а технологи навчилися створювати тонкі, міцні і гнучкі скляні нитки.

Сьогодні новітній технології передачі інформації залишилося зробити всього лише один крок, щоб прийти на робочі місця і в домашній побут.

Оптоволоконна технологія істотно виділяється серед інших способів передачі інформації рядом переваг.

Головною перевагою є колосальна пропускну спроможність оптоволоконних ліній зв'язку. Локальні оптоволоконні мережі вже зараз можуть працювати на великих швидкостях. Слід врахувати, що в традиційних кабельних лініях зв'язку збільшення швидкості передачі даних (залежної від робочої частоти) приводить до збільшення втрат. Одномодові оптоволоконні лінії вільні від цієї прикраси закономірності.

Іншими, не менш важливими перевагами оптоволоконних ліній зв'язку є:

- стійкість до електромагнітних дій;
- відсутність випромінювання у оптоволоконного кабелю;
- привабливі масово-габаритні параметри;
- захищеність від несанкціонованого доступу.

Всі ці переваги випливають з фізичних принципів, на яких побудована оптоволоконна технологія. В той же час багато проблем, з якими сьогодні доводиться стикатися фахівцям, також мають коріння в загадковій природі світла. Про неї ми і поговоримо.

Коротко – про основні закони оптики, які лежать в основі оптоволоконної технології. Відомо, що в різних середовищах промінь світла розповсюджується з різною швидкістю: у склі – швидко, в повітрі – швидше, у вакуумі – найшвидше. Потрапляючи на межу двох прозорих середовищ, промінь світла частково відбивається, частково заломлюється. Кут відбитого променя рівний куту падаючого, а кут заломленого променя залежить від співвідношення показників заломлення середовищ (всі кути вимірюються від нормалі до поверхні). Згідно закону Снелліуса, відкритому ще в 17 столітті, добуток синуса кута падаючого і заломленого променя на відповідні показники заломлення середовищ рівні.

Поставимо умову, щоб заломлений промінь не проникав в друге середовище, а рухався уздовж межі розділу. Оскільки при цьому $\gamma = 90^\circ$ то неважко обчислити так званий граничний (критичний) кут:

$$\sin \alpha_{\text{г}} = n_2/n_1$$

Ця формула пояснює „ефект повного відбивання”, на якому заснована вся оптоволоконна технологія. Ефект полягає у тому, що промінь, що потрапив на межу двох середовищ (перше з яких повинна мати більший показник заломлення, ніж друге), під кутом, більше граничного, повністю відбивається.

Якщо ж промінь не просто потрапляє на межу двох середовищ, а проходить в циліндровому світловоді (оптоволокну) між паралельними стінками, то при куті входу більше граничного, він „назавжди” залишиться в світловоді (рис.18.1).

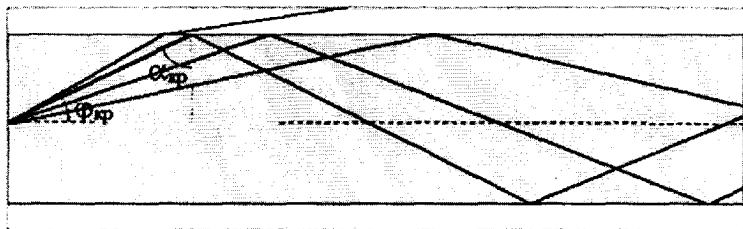


Рисунок 18.1 – Схема відбивання світлових променів у циліндричному світловоді (оптоволокну)

Так, щоб передавати інформацію за допомогою волоконно-оптичної лінії зв'язку (ВОЛЗ), вона повинна мати очевидну структуру і складатися з: передавача – джерела світлового сигналу; приймача – світлочутливого елементу; середовища розповсюдження – оптоволокна.



Рисунок 18.2 – Структура ВОЛЗ

18.2 Електромагнітне поле в середині волокна.

Роль зовнішньої оболонки світло волокна

Сучасне оптичне волокно складається як мінімум з двох компонентів: серцевини (core) і оболонки (cladding). Зовні волокно покривається захисним покриттям. У ВОЛЗ використовують оптоволоконні кабелі, які складаються з десятків і сотень волокон (рис. 18.3).

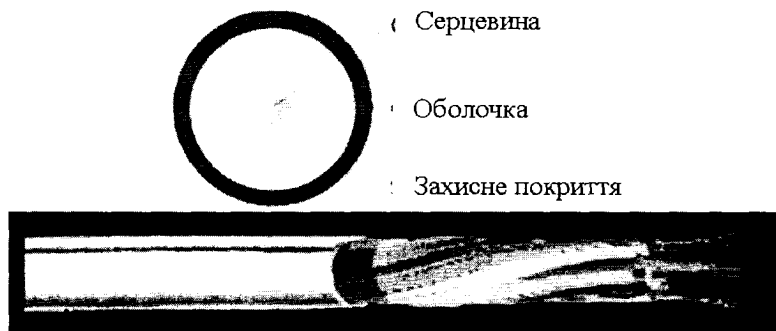


Рисунок 18.3 – Будова оптичного волокна

І серцевина, і оболонка виготовляються з скла або пластика. Найчастіше (унаслідок кращих характеристик) використовується оп-

товолокно типу "скло-скло", коли серцевина і оболонка виготовляються з особливого кварцового скла. Скло, використовуване для оболонки, повинне мати менший показник заломлення, ніж для серцевини. На практиці показник заломлення скла регулюється за допомогою легуючих добавок. У оптичних волокнах показники заломлення серцевини і оболонки розрізняються на величину порядку 1%.

Розглянемо, як світловий сигнал поширюється в світловоді. Через багаторазове відбивання променя від стінок світловода, світловий імпульс, пройшовши по оптоволокну, трансформується в серію мод. В кінцеву точку може прийти проміння, яке ввійшло в світловод в один і той же момент часу, але під різним кутом. Як наслідок це проміння (моди) проходить різні відстані і "прибуває в пункт призначення" не одночасно. Це явище одержало назву **міжмодової дисперсії**. Чим більше довжина оптоволокну, тим більше буде розкид за часом прибуття, тим менше буде смуга пропускання.

Тому проблему боротьби з міжмодовою дисперсією необхідно вирішувати. Залежно від способу її рішення всі оптичні волокна можна розділити на три види.

У наближенні геометричної оптики точковий випромінювач у одного з торців оптоволокну може бути трансформований в ґрати синфазних випромінювачів, що знаходяться один від одного на відстані, рівному діаметру оптоволокну (тут цілком доречною представляється аналогія з калейдоскопом - іграшкою, знайомою з дитинства практично всім). Діаграма спрямованості кожного з випромінювачів обмежена кутами повного внутрішнього відбивання, і, залежно від відстані між ними (або діаметру оптоволокну), набіг різниці фаз між випромінювачами може бути досягнутий тільки в одному напрямі (випадок одномодового волокна) або відразу в декількох (багатомодове волокно). У вказаних напрямках випромінювання від випромінювачів складатимуться синфазно, утворюючи хвилі, що розповсюджуються, або, інакше кажучи, моди (рис. 18.4). Для того, щоб досягти іншого торця хвилеводу, різним модам доведеться пройти різну відстань.

Існування мод в хвилеводі прийнято ще порівнювати з квантуванням енергетичних рівнів в квантових ямах.

В цьому випадку проблема ніяк не розв'язується. Доводиться змиритися з невеликою смугою пропускання (20-30 МГц/км), одержавши натомість відносну простоту виготовлення оптичного волокна. В даний час ступінчасте волокно практично не використовується.

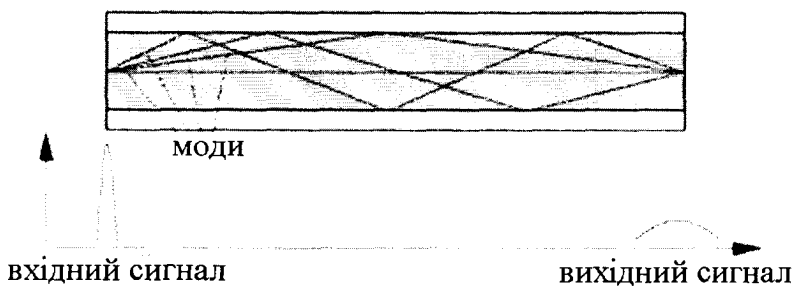


Рисунок 18.4 – Багатомодове ступінчасте волокно

Багатомодове градієнтне волокно. За рахунок складного легування оптоволоконна можна добитися плавного зменшення показника заломлення від центру до оболонки волокна. Тоді моди, хоча і як і раніше проходять різні шляхи, але будуть робити це за однаковий час. Смуга пропускання в порівнянні із ступінчастим волокном помітно збільшується, до 100-1000 МГц·км.

Показник заломлення градієнтних волокон звичайно має параболічний профіль, який одержують, вводючи в однорідну скляну нитку спеціальні добавки. В результаті, за інших рівних умов, число мод, що розповсюджуються, зменшується приблизно в два рази порівняно із ступінчастим хвилеводом.

Оптоволоконні лінії зв'язку на багатомодовому волокні володіють цікавою властивістю: смуга пропускання лінійно залежить від довжини кабелю, тому її вимірюють не в абсолютних, а в питомих показниках, звично в МГц/км (мегагерц-кілометр). Так, оптоволоконний кабель з характеристикою 100 МГц/км при довжині 100 метрів матиме смугу пропускання 1 ГГц.

Зрозуміти причину цієї властивості неважко, розглянувши, яка відстань пройде промінь (мода) залежно від кута входу в світловід.

Хай у момент $t=0$ на вході оптичного волокна подається світловий імпульс. Його проміння розповсюджуватиметься у різних напрямках. Задану відстань l швидше за всіх пройде промінь, що йде уздовж осі ($\alpha = 0$). Останнім прийде промінь, що увійшов під критичним кутом ($\alpha = \alpha_c$).

Через складний процес виготовлення, градієнтне оптичне волокно відносно дороге (навіть дорожче, ніж одномодове волокно), та зате пасивні елементи для нього - не такі дорогі, як для одномо-

дового волокна. Тому кабелі з градієнтним волокном знаходять застосування в невеликих оптоволоконних системах, наприклад в локальних мережах.

Кількість мод в істотному ступені залежить від діаметру волокна. Якщо діаметр волокна виявиться порівняним з використовуваною довжиною хвилі, то по волокну розповсюджуватиметься тільки одна мода (при цьому діють закони вже не геометричною, а хвильової оптики).

Для точного обчислення максимального діаметру одномодового волокна виходять з умови одномодовості.

Зокрема для $\lambda = 0,85$ мкм одномодове волокно повинне мати діаметр 8,5 мкм.

З умови одномодовості витікає важливий наслідок: оптоволокну деякого малого діаметру при одній довжині хвилі джерела світла буде одномодовим, а при іншій – багатомодовим.

Для оптоволоконних ліній з одномодовим волокном, де міжмодова дисперсія відсутня, строгої лінійної залежності смуги пропускання від довжини лінії немає. Тому смуга пропускання цих ліній вимірюється в абсолютних, а не в питомих величинах.

Свій внесок в зменшення пропускнуої спроможності вносить не тільки міжмодова дисперсія, але і так звана дисперсія матеріалу (або хроматична дисперсія). Річ у тому, що показник заломлення (швидкість розповсюдження світла) залежить і від довжини хвилі. Оскільки джерела світла (особливо світлодіоди) випускають випромінювання в деякому діапазоні довжин хвиль, то різниця швидкостей розповсюдження створює додаткове розмивання світлового імпульсу на приймальному кінці.

Смуга пропускання одномодового волокна складає близько 30 ТГц, що на декілька порядків більше, ніж у перших двох видів, і мало залежить від довжини. У магістральних лініях, унаслідок обмежень по частоті, що вносяться оптичними підсилювачами, вона обмежена 3 ТГц.

Характеристики одномодового волокна такі, що в майбутньому воно виконуватиме домінуючу роль. Додатково, як показує досвід, високотехнологічний продукт швидко падає в ціні, як тільки його починають виробляти у великих масштабах.

Загасання. Окрім перерахованих, є ще декілька параметрів, які визначають якість оптоволоконних ліній зв'язку, а значить і області їх застосування.

Цей параметр вимірюється в звичних для ліній зв'язку одиницях - дБ/км (децибел на кілометр). Загасання, тобто втрата потужності світлового сигналу відбувається, в основному, з двох причин: поглинання; розсіювання.

Поглинання пов'язане із збудженням в матеріалі світловода електронних переходів і резонансів. В результаті цього збільшується теплова енергія, накопичувана в оптичному волокні. Поглинання залежить як від властивостей матеріалу, з якого виготовляється оптоволокну, так і від довжини хвилі джерела світла.

Розсіювання менше залежить від властивостей матеріалу і, в основному, визначається порушенням геометричної форми оптичного волокна. Следством цих порушень є те, що частина проміння покидає оптоволокну. Інтенсивність розсіювання залежить не тільки від якості матеріалу, з якого виготовляється серцевина оптоволокну, але і від якості оболонки, оскільки частина сигналу, всупереч теорії, розповсюджується в ній. Боротися з цим можна за рахунок нанесення на оболонку поглинаючого покриття.

Загасання (поглинання) багато в чому залежить від довжини хвилі світлового сигналу. Причому експериментально встановлено три "вікна", в яких поглинання помітно зменшується – це 8,5 мкм, 1,3 мкм і 1,55 мкм (чим більша довжина хвилі, тим менша втрата від загасання). Дані довжини хвиль, що відносяться до інфрачервоного діапазону, рекомендовані МКТТТ для використання (і використовуються) в оптоволоконних лініях зв'язку. Якщо раніше у волоконно-оптичних лініях зв'язку використовувалися джерела з довжиною хвилі 0,85 мкм, то зараз на цій довжині працюють тільки невеликі оптоволоконні мережі. У магістральних ВОЛЗ зараз використовуються 1,55 мкм лазери.

Ще на зорі оптоволоконної технології вважалося, що мінімально можливого загасання, якого практично можна добитися у ВОЛЗ, є 20 дБ/км. Сьогодні ж одномодові волокна, використовувані в російських лініях, мають загасання всього 0,22 дБ/км (оптичне волокно Sumitomo має загасання 0,154 дБ/км, а в лабораторіях США одержане так зване фтороцирконатне волокно з ще меншим загасанням - всього 0,02 дБ/км). Для багатомодових волокон характерне дещо більше загасання.

Реальний розмір оптоволоконного кабелю, більший, ніж діаметр оболонки, оскільки він має набагато складнішу структуру, ніж в теорії. Крім оболонки, що відбиває, оптоволокну огорнуте плас-

тиковим буфером, елементом міцності і зовнішньою оболонкою. Нарешті, в одному кабелі можуть об'єднуватися десятки і сотні оптичних волокон, так що діаметр кабелю істотно перевершує діаметр окремого оптоволоконна.

Джерела і приймачі світла. Коротко розповімо про джерела і приймачі світлового сигналу у ВОЛЗ. У сучасних оптоволоконних системах використовується проміння світла інфрачервоного діапазону, яке має довжину хвилі 0,85-1,55 мкм. При цьому модулююче джерело повинно мати дуже вузький спектр, інакше, через різницю швидкостей розповсюдження хвиль різних довжин, імпульсний сигнал розмиватиметься. З цієї причини як джерела використовують лазери або світлодіоди. У якості ж приймачів випромінювання використовують фотодіоди інфрачервоного діапазону.

Світлодіодні джерела дешеві, але мають безперервний і ширший спектр, а також широкую діаграму спрямованості. Лазери через свої "природні якості", навпаки, мають вузький спектр і вузьку (практично прямолінійну) спрямованість, але вони більш дорогі і складні в експлуатації. Тому в невеликих оптоволоконних системах використовують звичайно світлодіодні джерела, а в великих інформаційних магістралях – лазери.

Слід врахувати, що і джерела, і приймачі світла, так само як і оптичне волокно, володіють своєю смугою пропускання, яка теж неабиякою мірою визначає інтегральну пропускну спроможність ВОЛЗ.

18.3 Волоконно-оптичні датчики фізичних величин. Застосування

Волоконний світловод складається з серцевини і оболонки, які виконуються із спеціального кварцового скла. Показник заломлення оболонки вибирається декілька нижчим, ніж у серцевини. Тому світлове проміння, падаюче під достатньо великими кутами з серцевини на межу з оболонкою, зазнає повного внутрішнього відбивання.

В результаті це проміння, назване направленим, розповсюджуватиметься по світловоду по зигзагоподібній траєкторії. Сучасна технологія побудови оптичних волокон настільки досконала, що проміння, що направляється, може розповсюджуватися по світловодам на десятки кілометрів без істотних втрат енергії. В да-

ний час волоконні світловоди широко застосовують для оптичного зв'язку (телеграф, телефон і т.п.). Іншим, важливішим напрямом є використання оптичних волокон як чутливі елементи приймачів фізичних величин. Розглянемо фізичні основи роботи таких приймачів.

Відомо, що звичні фотоелектронні прилади реєструють електричну компоненту світлової хвилі. Тому нас цікавитиме напруженість саме електричного поля. Для випромінювання яки пройшло світловод вона може бути записана як

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t + \phi),$$

де ϕ — фаза хвилі на виході з волокна,

$$\phi = 2\pi n_{\text{ef}} \frac{L}{\lambda},$$

λ — довжина хвилі, n_{ef} — ефективний показник заломлення для світла, що направляється, L — довжина світловода, $\vec{E}_0$ — амплітуда вектора напруженості, ω — частота електромагнітних коливань, t — час. Кожний із згаданих параметрів хвилі може змінюватися при зовнішніх діях на світловод, що можна використовувати для цілей реєстрації. Залежно від того, який параметр змінюється, волоконні приймачі ділять на амплітудні (із зміною абсолютної величини вектора $\vec{E}_0$ або, що еквівалентне, інтенсивності хвилі, пропорційної $|\vec{E}_0|^2$), поляризаційні (із зміною напрямку коливань вектора $\vec{E}_0$), спектральні (із зміною частотного спектру хвиль) і фазові (із зміною ϕ).

Простим амплітудним датчиком є відрізок світловода, що згинається під дією тиску, зусилля, переміщення або інших деформаційних величин. Вигин волокна веде до зменшення кута падіння проміння на межі розділу, до порушення умов повного внутрішнього відбивання. В результаті частина випромінювання, що направляється, витікає в оболонку, де втрачається. Тому інтенсивність світла на виході з світловода зменшується, що можна зареєструвати звичним фотодіодом.

Якщо відрізок світловода прикріпити до поверхні "чутливої шкіри", то він міг би виробляти амплітудний сигнал про її вигини. Проте на практиці такі пристрої не використовують. Стандартні світловоди призначені в першу чергу для ліній зв'язку, де ампліту-

дна чутливість до вигинів може стати джерелом додаткових перешкод. Тому виробники світловодів добиваються того, щоб інтенсивність випромінювання, що направляється, помітно змінювалася лише при дуже малих радіусах кривизни волокна, фактично тоді, коли починається його механічне руйнування.

Збільшення амплітудної чутливості світловода можна досягти за рахунок використання додаткових механічних елементів. Наприклад, при стисненні волокна між двома шорсткими поверхнями виникає велика кількість мікровигинів, які набагато сильніше впливають на інтенсивність світлового потоку, ніж єдиний макроскопічний вигин. Інший спосіб полягає у тому, що до ділянки світловода із заздалегідь знятою оболонкою притискається прозорий об'єкт. Останній має вищий показник заломлення, ніж серцевина волокна, що обумовлює порушення умов повного внутрішнього відбивання і частковий відтік випромінювання, що направляється. Як наслідок – інтенсивність світла на виході світловода зменшується.

Для установки додаткових конструкційних елементів потрібен спеціальний механізм, розміщення якого на поверхні "шкіри" що зв'язано з додатковими труднощами. Рухомі частини такого механізму вимагають високої точності виконання і ретельного юстирування. Тому для створення "чутливої шкіри" перспективнішим вважається інший метод амплітудної модуляції світлового потоку в світловодах. Цей шлях не вимагає використання яких-небудь зовнішніх по відношенню до світловоду механічних елементів. Він полягає в створенні на ділянці волокна так званих брегівських дифракційних ґраток.

Дифракційні ґратки можуть бути сформовані у волокні, виготовленому з кварцу з домішкою германію. Під впливом ультрафіолетового випромінювання показник заломлення такого волокна міняється. Тому при освітленні ділянки світловода інтерференційним полем двох когерентних ультрафіолетових пучків показник заломлення змінюватиметься уздовж осі волокна по синусоїдальному закону відповідно до розподілу інтенсивності інтерференційного поля. Штрихи сформованих ґраток не зосереджені на поверхні світловода, а проникають на всю його глибину разом із записуючим випромінюванням. Такі глибокі ґрати і називають **брегівськими**. Вона дає вищу ефективність дифракції в порівнянні із звичною. Кут дифракції залежать від періоду ґраток. При періоді, рівному $\lambda/2n_{\text{эф}}$, кут складає 180° . Іншими словами, ґратки працюють як

дзеркало для направлено по світловоду випромінювання з відповідною довжиною хвилі.

Представимо тепер, що зовнішня фізична дія розтягує або стискає область світловода з ґратками. Відстань між штрихами змінюється і тепер не буде узгоджено з довжиною хвилі. Як наслідок — ефективність дифракції різко зменшиться, що виявиться в зниженні інтенсивності відображеного світла. Таким чином, реєструючи відображене назад по волокну випромінювання, можна приймати сигнал про деформаційні дії на ґратки, а значить, і на "шкіру", до якої вона приєднана.

Часто інформацію про зовнішні дії на брегівські ґратки приймають не по зміні інтенсивності, а по зміні довжини відображеної хвилі. Для цього в світловод вводять випромінювання з широким спектром. Назад же приходить монохроматична хвиля з довжиною, рівною $2Dn_{\text{эф}}$, де D — період ґратки. Змінюється період — змінюється довжина хвилі, що може бути зареєстроване спектроаналізатором. Даний метод прийому є спектральним. Завдяки високій чутливості він в даний час вважається найперспективнішим для вимірювання механічних напруг на поверхні "чутливої шкіри".

Фаза хвилі ϕ як впливає з вище приведеного виразу, змінюється при зміні оптичного шляху світла у волокні, а значить, і при всіх діях, що впливають на довжину світловода. Якщо світловод жорстко прикріплений до "чутливої шкіри", то при зміні її конфігурації він розтягнеться або стиснеться. При цьому світловод виробить фазовий сигнал про зміну своєї довжини без використання яких-небудь додаткових пристроїв. Зрозуміло, що такий спосіб прийому привабливий для відстежування форми "шкіри".

Через високу частоту світла ($\sim 10^{15}$ Гц) жоден з сучасних фотоприймачів не здатний зареєструвати фазовий сигнал безпосередньо. У оптиці фазові сигнали реєструють методами інтерферометрії.

В даний час конструкція фазових датчиків на основі інтерферометрів найбільш відпрацьована. Проте у разі "чутливої шкіри" такі датчики володіють серйозним недоліком: складно помістити опорний світловод де-небудь на поверхні "шкіри" і одночасно надійно ізолювати його від зовнішніх дій. Існують інші типи волоконних інтерферометрів, які збираються по одноволоконній схемі і тому позбавлені даного недоліку.

Один з таких інтерферометрів — інтерферометр Фабрі-Перо. Він містить світловод, на торці якого нанесені напівпрозорі дзерка-

льні покриття. Коли хвиля, що направляється, досягає поверхні вихідного торця, вона частково проходить назовні і відбивається назад. Відбита хвиля після подвійного проходу по волокну знов досягає вихідного торця і знову ділиться на ту, що пройшла і відображену. Такий процес розподілу продовжується до безкінечності. В результаті на виході з світловода формується оптичний сигнал багатопроменевої інтерференції. Цей сигнал сильніше залежить від фази хвиль, що інтерферують, ніж сигнал двохпроменевої інтерференції в інтерферометрі, наприклад, Маха-Цендера. Тому, як правило, датчики, на основі інтерферометра Фабрі-Перо більш чутливі до приросту оптичної довжини світловодів. Проте вони потребують висококогерентних джерел і вимагають використання спеціальних електронних схем стабілізації.

Слід сказати, що в стандартних світловодах різниця між фазовими швидкостями мод мала ($\Delta n_{\text{эф}} \ll n_{\text{эф}}$). Тому різниця фаз між ними в багатомодовому інтерферометрі росте поволі. Як наслідок – датчики на основі такого пристрою менш чутливі до зовнішніх дій, ніж приймачі на основі інтерферометричних схем Маха-Цендера і Фабрі-Перо. Їх переваги в простоті оптичної схеми, можливості використання недорогих низькокогерентних джерел, а значить, в низькій вартості. Останнє дуже важливе для організації "чутливої шкіри", що вимагає використання великої кількості чутливих елементів.

Контрольні запитання

- 1 Що вивчає волоконна оптика?
- 2 Які переваги волоконно-оптичних ліній зв'язку?
- 3 Назвіть основні типи оптичних волокон.
- 4 Опишіть будову оптичних волокон.
- 5 Опишіть найбільш поширені типи фазових датчиків.
- 6 Охарактеризуйте волоконні приймачі: амплітудні, поляризаційні, спектральні і фазові.

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- 1 І.Є. Лопатинський. Курс фізики. Фізика для інженерів.– Л.: "Бескид Біт", 2002.
- 2 І.М. Кучерук, В.П. Дущенко. Загальна фізика. Т.: 1, 2, 3.– К.: "Вища школа", 1987–1991.
- 3 Г.Ф. Бушок, Є.Ф. Венгер. Курс фізики. Кн. 1, 2.– К.: "Либідь", 2002.
- 4 І.М. Кучерук, І.Т. Горбачук, П.П. Луцик. Загальний курс фізики. Т.: 1, 2, 3.– К.: "Техніка", 2001.
- 5 М.О. Галушак. Курс загальної фізики. Кн. 1.– І-Ф.: "Факел", 2000.
- 6 Б.М. Яворський та ін. Курс фізики. Кн.: 1,2,3.–К.: "Вища школа", 1970.
- 7 Т.И. Трофимова. Курс Физики.–М.: "Высша школа", 1990.
- 8 М.О. Галушак та ін. Курс фізики. Основи молекулярної фізики і термодинаміки.–К.: ІСЛОУ, 1993.
- 9 М.А. Рувінський, М.О. Галушак, Д.М. Фреїк. Курс фізики. Квантова фізика атомів і молекул. – К.: НМКВ, 1992.