

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ІВАНО-ФРАНКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ НАФТИ І ГАЗУ**

М.О. Галушак,

Р.М. Лучицький, Б.М. Рувінський, В.В. Нижникевич

Курс загальної фізики

Коливання і хвилі

Навчальний посібник

*Рекомендовано
Вченою радою Івано-Франківського національного
технічного університету нафти і газу як навчальний посібник для
дистанційного навчання студентів інженерних спеціальностей*

**Івано-Франківськ
2008**

690134

53+334-532 (375.8)

УДК 53:378.14(078.5)

ББК В30я7

~~Ф503~~

K93

Рецензенти:

М.А. Рувінський, д-р фіз.-мат. наук, професор

(Прикарпатський національний університет ім. Василя Стефаника)

Г.Д. Матеїк, канд. фіз.-мат. наук, доцент

(Івано-Франківський національний технічний університету нафти і газу)

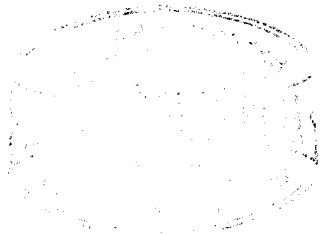
Курс загальної фізики. Коливання і хвилі. Навч. посібник для дистанційного навчання./ М.О.Галушак, Р.М.Лучицький, Б.М.Рувінський, В.В. Нижникевич. — Івано-Франківськ: Факел, 2008, – 79 с.

У посібнику викладено основні питання з розділу фізики „Коливання і хвилі”. Пропонований посібник створений для роботи за кредитно-модульною системою організації навчального процесу.

Розділи посібника містять повний набір матеріалів, потрібних для організації самостійної роботи студентів: лекційний курс, задачі з прикладами розв’язування, методичні вказівки до виконання віртуальних лабораторних робіт, добірки запитань у формі тестів для контролю знань.

Посібник відповідає навчальній програмі і рекомендований для дистанційного навчання студентів інженерних спеціальностей, а також може бути корисним для студентів стаціонарної форми навчання та викладачів технічних вузів.

Розповсюджувати та тиражувати без офіційного дозволу авторів та ІФНТУНГ забороняється



© М.О. Галушак
Р.М. Лучицький
Б.М. Рувінський
В.В. Нижникевич, 2008
© ІФНТУНГ, 2008

ЗМІСТ

Вступ	5
4.1 Вільні незагасаючі коливання	7
4.1.1 Механічні коливання	7
4.1.2 Електричні коливання	10
4.1.3 Додавання гармонічних коливань	12
4.2 Вільні загасаючі коливання	16
4.2.1 Механічні коливання	16
4.2.2 Електричні коливання	19
4.3 Вимушені коливання	21
4.3.1 Механічні коливання	21
4.3.2 Електричні коливання	25
4.4 Змінний струм	27
4.4.1 Вимушені коливання сили струму	27
4.4.2 Закон Ома для змінного струму	28
4.4.3 Спади напруги на елементах кола змінного струму	29
4.4.4 Векторна діаграма для спадів напруги	30
4.4.5 Потужність і втрати в колі змінного струму	31
4.4.6 Необхідно зрозуміти, запам'ятати і вміти	27
4.5 Механічні й електромагнітні хвилі	33
4.5.1 Механічні хвилі	33
4.5.1.1 Загальні положення і характеристики	34
4.5.1.2 Рівняння плоскої і сферичної хвилі	35
4.5.1.3 Хвильове рівняння	37
4.5.1.4 Фазова швидкість хвилі	37
4.5.1.5 Групова швидкість хвилі	39
4.5.1.6 Енергія хвилі. Вектор Умова	40
4.5.1.7 Інтерференція хвиль. Стояча хвиля. Ефект Доплера	42
4.5.2 Електромагнітні хвилі	46

4.5.2.1 Хвильове рівняння	46
4.5.2.2 Характеристики електромагнітних хвиль	48
4.5.2.3 Енергія електромагнітної хвилі	48
4.5.3 Необхідно зрозуміти, запам'ятати і вміти	49
4.6 Практичні заняття	49
4.6.1 Приклади розв'язування задач	49
4.6.2 Задачі для індивідуального розв'язування	57
4.6.3 Таблиця варіантів задач для індивідуального розв'язування	62
4.7 Віртуальні лабораторні роботи	63
4.7.1 Лабораторна робота В-15. Дослідження коливань фізичного маятника та визначення за його допомогою прискорення вільного падіння	63
4.7.2 Лабораторна робота В-16. Вивчення загасаючих і вимушених коливань на прикладі пружинного маятника ...	69
4.8 Питання для комп'ютерного тестування	75

ВСТУП

Коливанням називають будь-який процес, який повторюється через рівні або майже рівні проміжки часу, що називаються періодом коливань. Коливання - дуже поширений вид рухів. Вони відбуваються всюди в природі та в усіх галузях техніки. В залежності від фізичної природи розрізняють коливання механічні, електричні, електромагнітні, біологічні тощо. При всій різноманітності різні коливання мають багато спільного, описуються подібними характеристиками і математичними рівняннями. Наприклад, при механічних коливаннях періодично повторюються переміщення тіл і швидкості, а при електромагнітних коливаннях повторюються напруги і сили струмів та електричні і магнітні поля.

Теорія коливань вивчає коливання різної фізичної природи загальними методами. Вона встановлює закономірності, які характеризують коливальний процес в цілому незалежно від природи фізичних величин, що описують коливання.

Коливання виникають тоді, коли системі, здатній виконувати коливальні рухи, надається енергія. Коливальна система називається консервативною, якщо енергія зберігається. Якщо енергія системи зменшується, наприклад, при наявності сил опору, то коливання згасають і систему називають неконсервативною.

Найпростішими є коливальні системи із зосередженими параметрами. Наприклад, підвішене на нитці тіло (маятник) утворює таку систему, якщо це тіло можна вважати точковим, а нитку - нерозтяжною і невагомою. Стан будь-якої коливальної системи визначається узагальненою координатою, характерною для кожної системи (зміщення, кут відхилення, температура, тиск, заряд, напруга тощо). Рух таких систем описується лінійними диференціальними рівняннями з повними похідними. Порядок цих рівнянь визначається числом ступенів вільності системи. Наприклад, плоский рух маятника в полі тяжіння описується лінійним рівнянням другого порядку. Коливальні системи, рух яких описується лінійними рівняннями, називають лінійними. Реальні коливальні системи завжди нелінійні, але їх можна наближено описувати лінійними диференціальними рівняннями, що дає можливість отримувати важливі практичні висновки.

Коливання поділяються на власні (вільні) і вимушені. Власні коливання бувають затухаючими і незатухаючими, а вимушені поділяються на автоколивання, параметричні та на вимушені під дією зовнішньої сили

Коливання, що виникають у деяких точках середовища, дуже часто не залишаються локалізованими в місцях їх збудження, а поширюються в середовищі. Процес поширення коливань у просторі називають хвилею. Напрямок поширення хвилі називають променем. Залежно від напрямку коливання частинок середовища відносно напрямку поширення хвилі їх поділяють на поперечні і повздовжні.

Крім поперечних і повздовжніх хвиль, існують інші хвильові процеси. Наприклад, на межі поділу двох середовищ можуть поширюватися так звані

поверхневі хвилі (хвилі на поверхні води), рух частинок у яких значно складніший.

При поширенні хвиль можуть спостерігатися явища інтерференції, дифракції, дисперсії, розсіювання, поглинання, які супроводжуються як перенесенням енергії (біжуча хвиля), так і її перерозподілом в середовищі (стояча хвиля).

Знання фізичної природи та властивостей коливань і хвиль дозволяє широко їх застосовувати в різних областях науки і техніки, а також ефективно протидіяти їх негативним проявам.

МОДУЛЬ 4 КОЛИВАННЯ І ХВИЛІ

4.1 ВІЛЬНІ НЕЗГАСАЮЧІ КОЛИВАННЯ

4.1.1 Механічні коливання

Незгасаючі механічні коливання виконуватиме система, що складається з тіла масою m і пружини, яка повертає тіло до положення рівноваги. Таку систему називають **пружинним маятником** (рис. 4.1).

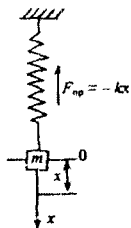


Рис. 4.1

Якщо вивести тіло з положення рівноваги, відхиливши його на відстань x , то воно набуде потенціальної енергії, що дорівнює роботі розтягнення пружини. Відпустивши тіло, ми даємо йому змогу повернутися в початкове положення рівноваги. У цьому положенні вся потенціальна енергія перейде в кінетичну, тіло за інерцією продовжуватиме рух, стискаючи пружину і виконуючи роботу стиснення.

Коли всю кінетичну енергію буде витрачено на роботу стиснення, тіло зупиниться, набувши потенціальної енергії. А це означає, що процес перетворення кінетичної енергії в потенціальну, і навпаки, буде відбуватися як завігодно довго, тобто тіло виконуватиме незгасаючі коливання від $-x$ до $+x$.

Наше завдання – знайти рівняння, що описує залежність зміщення x від часу t , тобто **рівняння руху**.

За другим законом динаміки швидкість зміни імпульсу дорівнює сумі всіх сил, які діють на тіло:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_i. \quad (4.1)$$

Надалі знаки векторів можна не записувати, оскільки рух одновимірний. Тіло вважатимемо матеріальною точкою з масою m . У нашому випадку діє єдина сила — пружна повертаюча сила F_{np} . Згідно із законом Гука при малих зміщеннях сила пружності прямо пропорційна зміщенню:

$$F_{np} = -kx. \quad (4.2)$$

Знак «мінус» означає, що сила напрямлена в бік, протилежний зміщенню. Коефіцієнт пропорційності k називається **коефіцієнтом жорсткості** пружного елемента. Маса m стала, і тому

$$\frac{d(mV)}{dt} = m \frac{dV}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

або

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0. \quad (4.3)$$

Поділивши обидві частини рівняння на масу m і позначивши

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad (4.4)$$

дістанемо **диференціальне рівняння вільних незгасаючих механічних коливань**:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0. \quad (4.5)$$

Загальний розв'язок цього лінійного диференціального рівняння другого порядку відомий:

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (4.6)$$

Це також рівняння руху, але вже в явному вигляді. Косинус — функція гармонічна, тому вільні незгасаючі коливання називають **гармонічними коливаннями**.

На рис. 4.2 зображено залежність зміщення x від часу t . Зміщення періодично змінюється з часом. Зміщення в даний момент часу залежить від **амплітуди** A , **частоти** ω_0 і **фази** $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$.

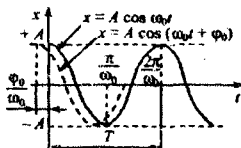


Рис. 4.2

Значення косинуса змінюються в межах від $+1$ до -1 . Тому значення зміщення від положення рівноваги лежать у межах від $+A$ до $-A$. Найбільше зміщення від положення рівноваги називається **амплітудою коливань**.

Величина $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$, яка є аргументом косинуса, називається **фазою коливань**. У початковий момент часу при $t = 0$ значення фази дорівнює φ_0 . Вона називається **початковою фазою**.

Якщо початкова фаза дорівнює $\pi/2$, то замість косинуса буде синус — теж гармонічна функція. Оскільки косинус — функція періодична, то зміщення повторюватиметься через інтервал часу, що дорівнює періоду коливань. Отже, **період коливань** — це час одного повного коливання. Кількість коливань за одиницю часу ν називається **частотою коливань**:

$$\nu = \frac{1}{T}. \quad (4.7)$$

Оскільки період косинуса дорівнює 2π , то $\omega_0 T = 2\pi$, звідки

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad (4.8)$$

де ω_0 – **циклічна**, або **колова**, **частота коливань**. Зв'язок циклічної частота ω і частоти ν :

$$\omega = 2\pi\nu. \quad (4.9)$$

Циклічна частота визначається властивостями самої коливальної системи. Під час виведення диференціального рівняння руху ми вводили позначення

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

Можна сказати, що колова частота визначається відношенням сил пружності до сил інерції. Її називають **власною частотою** і тому ставлять індекс нуль.

Якщо ми знаємо рівняння руху, то легко обчислити будь-які кінематичні характеристики коливань.

Швидкість гармонічних коливань дістанемо, узявши першу похідну від зміщення за часом:

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = v_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi/2). \quad (4.10)$$

Швидкість також виконує гармонічні коливання з тією самою частотою ω_0 , що й зміщення, та з амплітудою $V_m = A\omega_0$, яка залежить не тільки від амплітуди зміщення, а й від колової частоти і відрізняється за фазою від зміщення на $\pi/2$.

Прискорення гармонічних коливань є першою похідною від швидкості за часом або другою похідною від зміщення за часом:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi/2) = a_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi). \quad (4.11)$$

Прискорення також виконує гармонічні коливання з частотою ω_0 та амплітудою $a_m = A\omega_0^2$, яка залежить не тільки від амплітуди зміщення, а й від квадрата частоти і відрізняється за фазою від швидкості на $\pi/2$, а від зміщення – на π .

Прискорення і зміщення перебувають у протифазі. Це означає, що коли зміщення досягає максимального значення, що дорівнює амплітуді, прискорення також сягає свого максимального, але від'ємного значення. На рис. 4.3 зображено графіки залежності зміщення, швидкості і прискорення від часу. Початкову фазу зміщення взято такою, що дорівнює нулю.

Обчислимо тепер енергію коливань.

Кінетична енергія

$$E_k = \frac{mV^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2 \omega_0 t. \quad (4.12)$$

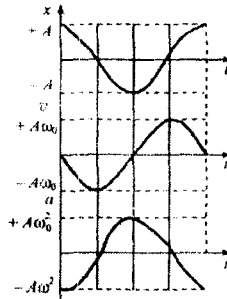


Рис. 4.3

Потенціальна енергія дорівнює роботі проти пружної поворотальної сили:

$$U = -A = -\int_0^x F_n dx = \int_0^x kx dx = \frac{kx^2}{2}. \quad (4.13)$$

Враховуючи, що $k = m\omega_0^2$, дістаємо

$$U = \frac{mA\omega_0^2}{2} \cos^2 \omega_0 t. \quad (4.14)$$

У процесі коливань відбувається перетворення кінетичної енергії на потенціальну, та навпаки. Коли зміщення дорівнює нулю, то потенціальна енергія дорівнює нулю, а кінетична досягає свого максимального значення:

$$E_k^{\max} = \frac{mA\omega_0^2}{2}. \quad (4.15)$$

Коли зміщення досягає свого максимального значення, кінетична енергія дорівнює нулю, а потенціальна досягає свого максимального значення:

$$U^{\max} = \frac{mA\omega_0^2}{2}. \quad (4.16)$$

Повна механічна енергія дорівнює сумі кінетичної і потенціальної енергії:

$$E = E_k + U = \frac{mA\omega_0^2}{2} (\sin^2 \omega_0 t + \cos^2 \omega_0 t) = \frac{mA\omega_0^2}{2} = \frac{kA^2}{2}. \quad (4.17)$$

Як бачимо, повна механічна енергія незгасаючих механічних коливань стала і дорівнює максимальному значенню кінетичної енергії або максимальному значенню потенціальної енергії.

4.1.2 Електричні коливання

Вільні незгасаючі електричні коливання виникають у коливальному електричному контурі, зображеному на рис. 4.4. Контур складається з конденсатора ємністю C і котушки індуктивністю L .

Якщо зарядити конденсатор до значення заряду q_m , а потім замкнути коло, то конденсатор почне розряджатися. У колі з'явиться електричний струм і в котушці індуктивності виникне ЕРС самоіндукції $\mathcal{E}_i$. Енергія електричного поля

конденсатора буде переходити в енергію магнітного поля котушки, і навпаки.

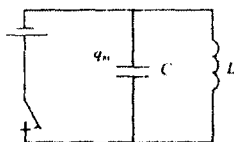


рис. 4.4

Отже, будуть таким чином відбуватися незгасаючі коливання заряду, якщо енергія контура не розсіюватиметься.

Щоб дістати диференціальне рівняння електричних коливань, скористаємось узагальненим законом Ома для неоднорідного кола:

$$IR = \Delta\varphi + \sum \varepsilon_i. \quad (4.18)$$

Так як активний опір відсутній ($R = 0$), то спад напруги дорівнює нулю ($IR = 0$). Різниця потенціалів на обкладках конденсатора

$$\Delta\varphi = -q/C. \quad (4.19)$$

Сума ЕРС дорівнює ЕРС самоіндукції:

$$\varepsilon_{si} = -L \frac{dI}{dt}.$$

Але

$$I = \frac{dq}{dt}$$

і тоді

$$\varepsilon_{si} = -L \frac{d^2 q}{dt^2}. \quad (4.20)$$

Підставивши вираз (4.19) для різниці потенціалів і ЕРС у закон Ома (4.18), дістанемо

$$0 = -\frac{q}{C} - L \frac{d^2 q}{dt^2}.$$

Увівши позначення

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2, \quad (4.21)$$

дістанемо *диференціальне рівняння вільних незгасаючих електричних коливань*

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0. \quad (4.22)$$

За формою рівняння цілком ідентичне рівнянню вільних незгасаючих механічних коливань:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0.$$

Видно, що заряд q – аналог зміщення x ; індуктивність L – аналог маси m ; $1/C$ – аналог жорсткості k . Розв'язок диференціального рівняння також має аналогічний

вигляд:

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (4.23)$$

Швидкість зміни заряду, яка дорівнює першій похідній від заряду за часом, – це **сила струму**:

$$I = \frac{dq}{dt} = -q_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = I_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi/2). \quad (4.24)$$

Сила струму в коливальному контурі виконує гармонічні коливання, частота яких дорівнює власній частоті контура ω_0 , амплітуда сили струму залежить не тільки від амплітуди коливань заряду, а й від частоти, а фаза коливань сили струму відрізняється від фази коливань заряду на $\pi/2$.

Енергія електричного поля – це енергія зарядженого конденсатора:

$$E_q = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_m^2}{2C} \cos^2 \omega_0 t. \quad (4.25)$$

Магнітного поля – це енергія, нагромаджена в котушці:

$$E_m = \frac{LI^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2} \sin^2 \omega_0 t. \quad (4.26)$$

Оскільки L і C пов'язані через власну частоту (4.21), то формулу для енергії магнітного поля можна записати так:

$$E_m = \frac{q_m^2}{2C} \sin^2 \omega_0 t. \quad (4.27)$$

Повна енергія електромагнітних коливань дорівнює сумі електричної і магнітної енергії:

$$E = E_q + E_m = \frac{q_m^2}{2C} (\cos^2 \omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t) = \frac{q_m^2}{2C} = \frac{LI_m^2}{2}. \quad (4.28)$$

Отже, повна енергія не залежить від часу, вона стала. Повна енергія дорівнює максимальному значенню енергії магнітного поля в котушці або максимальному значенню енергії електричного поля в конденсаторі.

4.1.3 Додавання гармонічних коливань

Коли кажуть про додавання коливань, то розуміють під цим знаходження результуючого рівняння руху або рівняння траєкторії. Розглянемо ряд випадків.

А. Додавання двох коливань однакової частоти

Запишемо рівняння коливань:

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \\ x_2 &= A_2 \cos(\omega t + \varphi_2). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Циклічна частота обох коливань однакова, а амплітуди і початкові фази різні. Для того щоб знайти рівняння руху результуючого коливання, зручно скористатися векторною діаграмою (рис. 4.5). Уявимо обидва коливання у вигляді обертових з кутовою швидкістю ω векторів довжиною A_1 і A_2 . Один

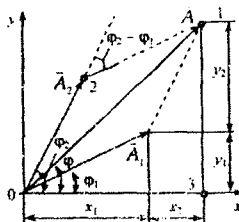


рис. 4.5

відносно одного вектори нерухомі, а тому різниця фаз коливань у будь-який момент часу буде сталою і дорівнюватиме різниці їхніх початкових фаз:

$$\Delta\varphi = (\omega t + \varphi_1) - (\omega t + \varphi_2) = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (4.30)$$

Як видно з векторної діаграми, вектор A , що дорівнює геометричній сумі векторів A_1 і A_2 , характеризує результуюче коливання, рівняння якого легко записати:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi). \quad (4.31)$$

Частота результуючого коливання, очевидно, дорівнює частоті складових коливань, бо вектор A обертається з тією самою кутовою швидкістю. Амплітуду результуючого коливання дістанемо згідно з теоремою косинусів:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (4.32)$$

Проаналізуємо цей вираз. Якщо різниця фаз коливань, що додаються дорівнює нулю, то амплітуда результуючого коливання дорівнює сумі амплітуд:

$$A = A_1 + A_2. \quad (4.33)$$

Якщо коливання здійснюються в протифазі, тобто $(\varphi_2 - \varphi_1) = \pi$, то сумарна амплітуда дорівнює різниці амплітуд:

$$A = A_1 - A_2. \quad (4.34)$$

Якщо при цьому амплітуди коливань однакові, то сумарна амплітуда дорівнюватиме нулю, тобто коливання повністю загасять одне одне.

Початкову фазу результуючого коливання також легко обчислити:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \quad (4.35)$$

Б. Додавання двох коливань із близькими частотами

Запишемо рівняння обох коливань:

$$\begin{aligned} x_1 &= A \cos \omega t; \\ x_2 &= A \cos(\omega + \Delta\omega)t. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Амплітуди обох коливань однакові, початкові фази однакові, а частоти відрізняються на $\Delta\omega$. Причому $\omega \gg \Delta\omega$.

Складемо обидва рівняння, скориставшись тригонометричними співвідношеннями для суми косинусів двох кутів:

$$x = x_1 + x_2 = A[\cos \omega t + \cos(\omega + \Delta\omega)t] = 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} \cdot \cos \omega t. \quad (4.37)$$

У другому члені ми знехтували величиною $\Delta\omega$ порівняно з ω . Співмножник $\cos \frac{\Delta\omega}{2}t$ змінюється з часом набагато повільніше, ніж $\cos \omega t$, тому здобуте рівняння можна розглядати як рівняння гармонічного коливання частоти ω , амплітуда якого сама змінюється за гармонічним законом.

Це добре уявляють рис. 4.6, де зображено графік залежності зміщення від часу.



Рис. 4.6

Такі коливання називаються **биттям**. Амплітуда биття

$$A_b = \left| 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2}t \right|. \quad (4.38)$$

Максимальне значення амплітуди биття дорівнює подвійній амплітуді вихідних коливань. Частота зміни амплітуди биття дорівнює $\Delta\omega/2$.

Биття — це окремий випадок так званої **амплітудної модуляції**. Коливання називають амплітудно-модульованими, якщо амплітуда коливань не є сталою, а сама залежить від часу. Рівняння амплітудно-модульованих коливань можна записати так:

$$x = A(t) \cos \omega t. \quad (4.39)$$

Якщо амплітуда змінюється за періодичним законом, то частота зміни амплітуди називається **частотою модуляції** ($\Delta\omega/2$), а частота самих модульованих коливань — **несучою частотою** (ω).

Швидкість зміни амплітуди має бути достатньо малою, щоб за час, що дорівнює періоду коливань, амплітуда майже не змінилась.

На рис. 4.6 показано графік амплітудно-модульованих коливань.

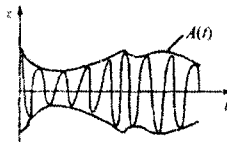


Рис. 4.6

Від часу може залежати не тільки амплітуда $A(t)$, а й частота $\omega(t)$ і початкова фаза $\varphi(t)$. Тоді ми маємо **частотку**, або **фазову модуляцію** (рис. 4.7).



Рис. 4.7

Загальне рівняння модульованих коливань має такий вигляд:

$$x = A(t) \cos[\omega(t)t + \varphi(t)] \quad (4.40)$$

В. Додавання взаємно перпендикулярних коливань

Нехай матеріальна точка одночасно бере участь у двох коливаннях однакової частоти, які відбуваються вздовж осей x і y і описується рівняннями:

$$\begin{aligned} x &= A \cos \omega t; \\ y &= B \cos(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (4.41)$$

Амплітуди коливань різні, різниця початкових фаз дорівнює $\Delta\varphi$. У цьому разі рівняння результуючого коливання, тобто рівняння руху, вже задано і завдання полягає лише в тому, щоб знайти рівняння траєкторії. Для цього потрібно вилучити час із рівнянь руху.

Виконавши це, дістанемо:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} = \sin^2 \Delta\varphi. \quad (4.42)$$

Як відомо, це рівняння еліпса, півосі якого не збігаються з напрямом осей координат. При зміні початкових амплітуд і різниці фаз можливі окремі випадки.

1. Різниця фаз дорівнює нулю $\Delta\varphi = 0$. Рівняння траєкторії набирає вигляду:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} = \left[\frac{x}{A} - \frac{y}{B} \right]^2 = 0 \text{ або } y = \frac{B}{A}x. \quad (4.43)$$

Траєкторія — пряма лінія, що проходить через початок координат (рис. 4.8). Вона нахилена до осі x під кутом α , тангенс якого дорівнює відношенню амплітуд

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{B}{A}. \quad (4.44)$$

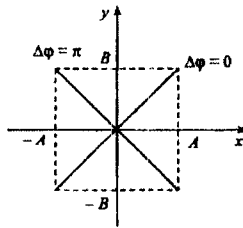


Рис. 4.8

2. Різниця фаз $\Delta\varphi = \pm\pi/2$. Рівняння траєкторії набирає вигляду:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1. \quad (4.45)$$

Це рівняння еліпса, приведене до координатних осей.

Довжина півосей еліпса дорівнює амплітудам вихідних коливань (рис. 4.9, а). Якщо ці амплітуди однакові, то еліпс вироджується в коло (рис. 4.2.6, б). Випадки $\Delta\varphi = +\pi/2$ і $\Delta\varphi = -\pi/2$ відрізняються напрямом руху матеріальної точки по колу. У першому випадку рух відбувається за годинниковою стрілкою, у

другому – проти.

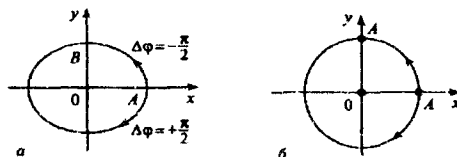


Рис. 4.9

При додаванні коливань, частоти яких різні, траєкторія в загальному випадку не буде сталою. Сталими траєкторії виходять тоді, коли частоти вихідних коливань кратні: $\omega_1 = p\omega$, $\omega_2 = q\omega$, де q і p — цілі числа.

Такі сталі траєкторії називають *фігурами Лісажу*.

На рис. 4.10 наведено фігури Лісажу для відношення частот $2/1$, $3/2$ і $4/3$. При цьому різниця фаз $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi/2$.

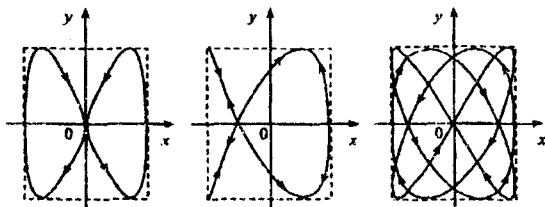


Рис. 4.10

4.2 ВІЛЬНІ ЗАГАСАЮЧІ КОЛИВАННЯ

4.2.1 Механічні коливання

У реальних коливальних системах повна енергії з плином часу зменшується через те, що система витрачає свою енергію на роботу проти зовнішніх неконсервативних сил, таких як сили тертя або сили опору. Енергія коливань пропорційна до квадрата амплітуди і зі зменшенням енергії амплітуда коливань також зменшується, коливання „загасають”.

У найпростішому випадку сила опору прямо пропорційна до швидкості:

$$F_{\text{оп}} = -rV = -r \frac{dx}{dt}, \quad (4.46)$$

де r — коефіцієнт опору.

На рис. 4.11 схематично зображено коливальну систему, яка здійснюватиме вільні загасаючі коливання.

Окрім інерційної маси m і пружного елемента, жорсткість якого k , додано ще «елемент опору» у вигляді пластинки, зануреної у в'язку рідину.

Згідно з основним законом динаміки

$$m \frac{dV}{dt} = F_{op} + F_{pr} = -kx - r \frac{dx}{dt}. \quad (4.47)$$

Поділивши на m і ввівши позначення

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2 \quad \text{і} \quad \frac{r}{m} = 2\beta, \quad (4.48)$$

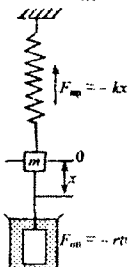


Рис. 4.11

дістанемо *диференціальне рівняння вільних загасаючих механічних коливань*

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (4.49)$$

Його розв'язок для $\omega_0 < \beta$

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (4.50)$$

Графік цієї функції наведено на рис. 4.12

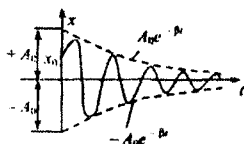


Рис. 4.12

Амплітуда коливань зменшується з часом за експоненціальним законом

$$A = A_0 e^{-\beta t}, \quad (4.51)$$

де A_0 — *початкова амплітуда коливань*; $\beta = \frac{r}{2m}$ — *коефіцієнт загасання коливань*. Він характеризує відношення сил опору і сил інерції. Величину, обернену до коефіцієнта загасання, називають *часом релаксації* τ . Це час, за який амплітуда коливань зменшується в e разів.

Тоді амплітуда:

$$A = A_0 e^{-t/\tau}. \quad (4.52)$$

Частота загасаючих коливань

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (4.53)$$

640134

Вона тим менша, чим більший коефіцієнт загасання коливань, тобто чим більшу роль відіграють сили опору.

Період загасаючих коливань також залежить від коефіцієнта загасання коливань:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (4.54)$$

Якщо сили опору настільки великі, що $\beta = \omega_0$, то $T \rightarrow \infty$. Це означає, що періодичний процес перетворюється на *аперіодичний*. У цьому разі виведена зі стану рівноваги система, що має початкову потенціальну енергію, повністю витрачає її на роботу проти сил опору протягом одного періоду.

Характеристики загасання коливань

Коефіцієнт загасання коливань

$$\beta = \frac{r}{2m}. \quad (4.55)$$

Час релаксації

$$\tau = \frac{1}{\beta} = \frac{2m}{r} \quad (4.56)$$

— час, за який амплітуда коливань зменшується e раз.

Декремент загасання коливань дорівнює відношенню двох сусідніх амплітуд:

$$\gamma = \frac{A_n}{A_{n+1}} = \frac{A_0 e^{-\beta n}}{A_0 e^{-\beta(n+T)}} = e^{\beta T}. \quad (4.57)$$

Логарифмічний декремент загасання коливань

$$\delta = \ln \gamma = \beta T. \quad (4.58)$$

Добротність — це енергетична характеристика загасання коливань. Вона характеризує швидкість втрати енергії і визначається за формулою

$$Q = 2\pi \frac{W(t)}{W(t) - W(t+T)} = \frac{2\pi}{1 - \frac{W(t+T)}{W(t)}}, \quad (4.59)$$

де $W(t)$ — енергія системи в момент часу t ; $W(t+T)$ — енергія системи через одне повне коливання.

Оскільки енергія пропорційна до квадрата амплітуди, то виконується рівність:

$$Q = \frac{2\pi}{1 - \frac{A^2(t+T)}{A^2(t)}} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\delta}}.$$

При малих значеннях логарифмічного декременту загасання δ функцію $e^{-2\delta}$ можна розкласти в ряд і обмежитись першими двома його членами:

$$e^{-2\delta} \approx 1 - 2\delta + \dots$$

Тоді

$$Q \approx \frac{2\pi}{1 - 1 + 2\delta} \approx \frac{\pi}{\delta}. \quad (4.60)$$

Отже, добротність обернено пропорційна до логарифмічного декременту загасання коливань. Можна дістати й інші формули для розрахунків добротності, якщо скористатися здобутими раніше співвідношеннями:

$$\delta = \beta T, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \omega^2 = \frac{k}{m}, \quad \beta = \frac{r}{2m}.$$

Ось ці формули:

$$Q \approx \frac{\pi}{\delta} = \frac{\omega}{2\beta} = \frac{k}{r\omega} = \frac{m\omega}{r}. \quad (4.61)$$

На рис. 4.13 наведено графіки коливань для систем з різною добротністю ($Q_1 < Q_2$). Чим більша добротність, тим повільніше загасають коливання.

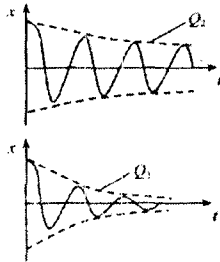


Рис. 4.13

Обчислювати добротність за наведеними ційою формулами доволі важко.

Можна це зробити простіше, знаючи кількість N коливань, після здійснення яких амплітуда зменшиться в e раз.

Справді, якщо $A_1 / A_N = e$, то логарифмічний декремент загасання коливань буде

$$\delta = \frac{1}{N} \ln \frac{A_1}{A_N} = \frac{1}{N}, \quad (4.62)$$

а добротність

$$Q = \pi N. \quad (4.63)$$

За цією формулою зручно визначати добротність, якщо відома залежність амплітуди коливань від часу $A(t)$.

4.2.2 Електричні коливання

Загасаючі електричні коливання відбуваються в колі де окрім ємності C та індуктивності L є ще й активний опір R (рис 4.14).

Енергія, нагромаджена в конденсаторі під час його зарядження, поступово

розсіюється під час проходження струму через активний опір відповідно до закону Джоуля - Ленца. Коливання заряду і струму при цьому загасають.

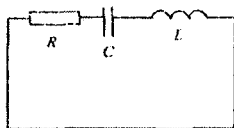


Рис 4.14

Рівняння коливань

Узагальнений закон Ома:

$$IR = \Delta\varphi + \sum \varepsilon_i.$$

Для даного випадку

$$I = \frac{dq}{dt}, \quad \Delta\varphi = -\frac{q}{C}, \quad \sum \varepsilon_i = \varepsilon_{st} = -L \frac{dI}{dt} = -L \frac{d^2q}{dt^2}.$$

Підставимо все це в узагальнений закон Ома:

$$R \frac{dq}{dt} = -\frac{q}{C} - L \frac{d^2q}{dt^2}.$$

Позначивши

$$\frac{L}{R} = 2\beta, \quad \frac{1}{LC} = \omega_0^2,$$

дістанемо *диференціальне рівняння вільних загасаючих електричних коливань*

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0. \quad (4.64)$$

Розв'язок:

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (4.65)$$

Частота загасаючих електричних коливань

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \quad (4.66)$$

Амплітуда загасаючих електричних коливань

$$q_m = q_0 e^{-\beta t} = q_0 \exp\left(-\frac{R}{2L} t\right). \quad (4.67)$$

Характеристики загасання коливань

Коефіцієнт загасання коливань

$$\beta = \frac{R}{2L}. \quad (4.68)$$

Час релаксації

$$\tau = \frac{1}{\beta} = \frac{2L}{R}. \quad (4.69)$$

Декремент загасання коливань

$$\gamma = \frac{A_n}{A_{n+1}} = \exp(\beta T) = \exp\left(\frac{RT}{2L}\right) = \exp\left(\frac{R}{\sqrt{L/C}}\right). \quad (4.70)$$

Логарифмічний декремент загасання коливань

$$\delta = \ln \gamma = \beta T = \left(\frac{\pi R}{\sqrt{L/C}}\right). \quad (4.71)$$

Добротність

$$Q = \frac{\pi}{\delta} = \frac{1}{R} \sqrt{L/C} = \frac{R_x}{R}. \quad (4.72)$$

Величину $\sqrt{L/C} = R_x$ називають **хвильовим опором**. Тому можна сказати, що добротність визначається відношенням хвильового опору до активного опору.

4.3 ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ

4.3.1 Механічні коливання

Компенсувати втрати енергії можна періодичним підведенням енергії до коливальної системи. Для цього достатньо прикласти до системи збуджувальну силу, яка періодично змінюється.

Тепер на систему будуть діяти три сили:

Пружна поворотальна сила

$$F_{np} = -kx; \quad (4.73)$$

Сила опору

$$F_{\sigma} = -rv = -r \frac{dx}{dt}; \quad (4.74)$$

Збуджувальна сила

$$F_s = F_m \sin \omega t. \quad (4.75)$$

Зауважимо, що кожній силі відповідає свій елемент (рис. 4.15).

Силі інерції відповідає інерційна маса, пружній силі – пружина, силі опору – пластинка, занурена в посудину з в'язкою рідиною. Для збуджувальної сили передбачено такий елемент: постійний магніт, розміщений у котушці, по якій тече змінний струм.

Ще одне важливе правило: кількість членів у диференціальному рівнянні дорівнює кількості елементів на схемі та кількості всіх сил з урахуванням сили інерції.

Згідно з другим законом динаміки

$$\frac{d(m\dot{x})}{dt} = \sum F_i = F_{np} + F_{an} + F,$$

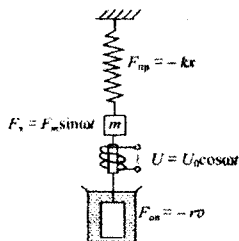


Рис. 4.15

або

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt} + F_m \sin \omega t.$$

Поділивши на m і позначивши:

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad \frac{r}{m} = 2\beta,$$

дістанемо **диференціальне рівняння вимушених механічних коливань**:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_m}{m} \sin \omega t. \quad (4.76)$$

Це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння з правою частиною. Перш ніж записувати розв'язок цього рівняння, спробуємо уявити собі фізичну картину процесу.

За доволі тривалого впливу періодична зовнішня сила, напевне, змусить систему здійснювати коливання зі своєю частотою. Виконувана цією силою робота компенсує витрати енергії на роботу проти сил опору. Тому слід очікувати, що кінець кінцем буде досягнуто повної компенсації і надалі повна енергія системи вже не змінюватиметься, а буде сталою.

Але в такому разі коливання мають бути незгасаючими. Це станеться, звичайно, не відразу, а через деякий час, який називається **часом перехідного процесу**. За цей час відбудеться перехід від загасаючих коливань до незгасаючих.

Тому й розв'язок диференціального рівняння складається з двох членів — x_1 і x_2 .

Перший член

$$x_1 = A_0 e^{-\beta t} \cos \omega t \quad (4.77)$$

— це частина, яка відповідає загасаючим коливанням, тобто перехідному процесу.

Другий член

$$x_2 = A \cos(\omega t + \varphi). \quad (4.78)$$

— це частина, яка відповідає незгасаючим коливанням, тобто усталеному, стаціонарному процесу.

З часом перехідний процес «вимирає», тобто x_1 стає набагато меншим за x_2 . Тому залишається тільки рівняння стаціонарного процесу

$$x = A \cos(\omega t + \varphi). \quad (4.79)$$

Отже, система здійснює незгасаючі гармонічні коливання, частота яких дорівнює частоті збуджувальної сили. Рівняння коливань за формою збігаються з рівнянням вільних незгасаючих коливань.

Амплітуда вимушених коливань визначається за формулою

$$A = x_m = \frac{F_m / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}. \quad (4.80)$$

Різниця фаз між зміщенням і збуджувальною силою

$$\varphi = \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (4.81)$$

Амплітудні характеристики

Амплітудними характеристиками називають залежність амплітуди коливань A від частоти збуджувальної сили ω . Власна частота коливань ω_0 припускається сталою. Кожна крива відповідає фіксованому значенню коефіцієнта загасання коливань β .

На рис. 4.16 зображено амплітудні характеристики чотирьох різних значень β .

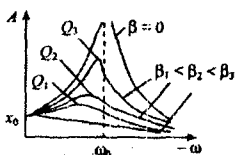


Рис. 4.16

Запишемо ще раз формулу для амплітуди коливань

$$A = \frac{F_m / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}.$$

Коли $\omega \rightarrow 0$, то для будь-яких значень β амплітуда буде однією й тією самою:

$$A_c = \frac{F_m}{m\omega_0^2} = \frac{F_m}{k} = x_0. \quad (4.82)$$

По суті x_0 — це зміщення системи від положення рівноваги під дією сталої неперіодичної сили, яка дорівнює амплітуді збуджувальної сили. Воно називається **статичним зміщенням**.

Коли $\omega \rightarrow \infty$, то амплітуда коливань прямує до нуля для всіх β . Це

означає, що при дуже великій частоті зміни збуджувальної сили система не встигає зміщуватись із положення рівноваги через інертність. При проміжних частотах амплітуда спочатку зростає, досягає максимуму, а потім зменшується.

Особливо різке збільшення амплітуди відбувається, коли відсутні сили опору. Як випливає з формули для амплітуди, якщо $\omega = \omega_0$, то амплітуда прямує до нескінченності.

Явище різкого зростання амплітуди в момент збігу частоти збуджувальної сили з власною частотою коливань системи називається резонансом.

За відсутності сил опору енергія тільки додається до системи. А в разі збігу частоти збуджувальної сили ω з власною частотою ω_0 , не потрібно здійснювати роботу проти сили інерції, через що амплітуда й прямує до нескінченності.

У реальних системах сили опору завжди є, тобто $\beta \neq 0$ і амплітуда має скінченне значення. Частота, за якої амплітуда досягає максимального значення, називається **резонансною частотою**:

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (4.83)$$

Резонансна частота залежить від сили опору і завжди менша від власної частоти.

Значення амплітуди в резонансі дістанемо, підставивши значення резонансної частоти у формулу для амплітуди:

$$A_p = \frac{F_m / m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}. \quad (4.84)$$

Різним значенням коефіцієнта загасання відповідають різні значення добротності. Тому кожній кривій відповідає своє значення добротності. Чим більша добротність, тим вищий і вужчий резонансний пік. Якщо експериментально знайти амплітудні характеристики, то за ними можна визначити добротність. Це робиться так: будується графік залежності квадрата амплітуди від відносної частоти ω/ω_0 (рис. 4.17).

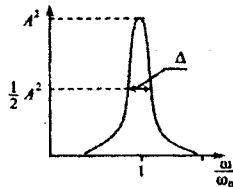


Рис. 4.17

Проводиться горизонтальна лінія на рівні, який відповідає половині квадрата амплітуди, і вимірюється ширина резонансного піка в цьому місці Δ .

Вона називається **півшириною резонансного піка**.

Тоді добротність $Q = \frac{1}{\Delta}$.

Фазові характеристики

Фазовими характеристиками називають залежність різниці фаз φ між зміщенням і збуджувальною силою від частоти збуджувальної сили ω для дискретних значень коефіцієнта загасання коливань β . Такі характеристики зображено на рис. 4.18 згідно з формулою:

$$\varphi = \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

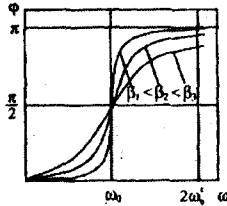


Рис. 4.18

Коли $\omega = \omega_0$, то $\varphi = \frac{\pi}{2}$ для всіх β . Тобто різниця фаз при деяких значеннях коефіцієнта загасання дорівнює $\pi/2$.

4.3.2 Електричні коливання

Вимушені електричні коливання відбуваються в колі, де крім R, L, C існує ще й джерело струму з періодично змінюваною ЕРС (рис. 4.19).

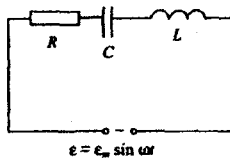


Рис. 4.19

ЕРС змінюється за гармонічним законом:

$$\varepsilon = \varepsilon_m \sin \omega t. \quad (4.85)$$

Узагальнений закон Ома:

$$IR = \Delta\varphi + \sum \varepsilon_i. \quad (4.86)$$

Для розглядуваного кола

$$\Delta\varphi = -\frac{q}{c}, \quad I = \frac{dq}{dt}, \quad \sum \varepsilon_i = \varepsilon_{st} + \varepsilon. \quad (4.87)$$

$$\varepsilon_n = -L \frac{dI}{dt} = -L \frac{d^2 q}{dt^2}. \quad (4.88)$$

Тоді

$$R \frac{dq}{dt} = -\frac{q}{C} - L \frac{d^2 q}{dt^2} + \varepsilon_m \sin \omega t. \quad (4.89)$$

Поділивши на L і позначивши

$$\frac{1}{L} = \omega_0^2, \quad \frac{R}{L} = 2\beta$$

дістанемо **диференціальне рівняння вимушених електричних коливань**:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{\varepsilon_m}{L} \sin \omega t. \quad (4.90)$$

В електричному колі, яке ми розглянули, здійснюються незгасаючі коливання заряду. Розв'язок справджується після завершення перехідного процесу.

Амплітудні характеристики

Формула для амплітуди коливань заряду аналогічна формулі для амплітуди механічних коливань

$$q_m = \frac{\varepsilon_m / L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} = \frac{\varepsilon_m / L}{\sqrt{(1/LC - \omega^2)^2 + \omega^2 L^2 / R^2}}. \quad (4.91)$$

На рис. 4.20 зображено амплітудні характеристики, тобто залежність амплітуди заряду q_m від частоти джерела змінного струму ω при різних значеннях електричного опору R .

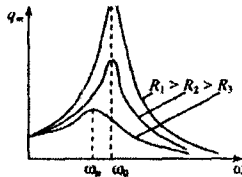


Рис. 4.20

Індуктивність L і ємність C залишаються незмінними. Залишається також незмінною власна частота коливань контура $\omega_0 = 1/LC$. Ці амплітудні характеристики для заряду, звичайно, такі самі, як і для механічних коливань, адже формули збігаються.

Резонанс виникає, якщо $\omega = \omega_0$, а $R = 0$. Амплітуда заряду прямує до нескінченності, бо немає втрат енергії на Джоулеве тепло.

Для довільного значення електричного опору R максимум амплітуди заряду досягається при резонансній частоті, яка дорівнює

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \omega_0 \sqrt{1 - R^2 / 2R_1^2}, \quad (4.92)$$

де $R_s = \sqrt{L/C}$ – *хвильовий опір*.

Максимальна амплітуда заряду в резонансі:

$$q_p = \frac{\varepsilon_m / L}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}} = \frac{\varepsilon_m}{R\omega_0\sqrt{1 - R^2/R_s^2}}. \quad (4.93)$$

Фазові характеристики для заряду також повністю повторюють фазові характеристики для зміщення механічних коливань.

4.4 ЗМІННИЙ СТРУМ

4.4.1 Вимушені коливання сили струму

Якщо заряд здійснює незгасаючі гармонічні коливання, то й сила струму, як швидкість зміни заряду, здійснюватиме гармонічні коливання тієї самої частоти ω .

$$I = \frac{dq}{dt} = -q_m\omega\sin(\omega t + \varphi_q) = q_m\omega\cos(\omega t + \varphi_q + \pi/2), \quad (4.94)$$

де $q_m\omega = I_m$ – це амплітуда сили струму; $\varphi_q + \pi/2 = \varphi_i$ – це різниця фаз між силою струму і ЕРС. Тепер формула гармонічних коливань сили струму матиме вигляд:

$$I = I_m \cos(\omega t + \varphi_i). \quad (4.95)$$

Амплітуда сили струму

$$I_m = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{(\omega L - 1/\omega C)^2 + R^2}}. \quad (4.96)$$

Амплітуда сили струму залежить від амплітуди ЕРС ε_m , частоти ω і всіх параметрів електричного кола R , L , C . Амплітудні характеристики для сили струму зображено на рис. 4.20. Вони трохи відрізняються від амплітудних характеристик для заряду.

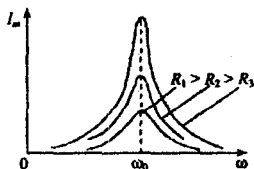


Рис 4.20

По-перше, при $\omega \rightarrow 0$ амплітуда струму теж прямує до нуля, а амплітуда заряду прямує до статичного заряду q_0 . Постійний струм не може проходити через конденсатор, тому й немає *статичної амплітуди сили струму*.

По-друге, при будь-яких значеннях R резонанс завжди буде при одній частоті джерела струму, яка дорівнює власній частоті коливального контура

$$\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}.$$

Тоді $\omega L = 1/\omega C$ і амплітуда сили струму при резонансі визначатиметься тільки амплітудою ЕРС і активним електричним опором

$$I_p = \frac{\varepsilon_m}{R}. \quad (4.97)$$

Різниця фаз між силою струму і ЕРС визначається за формулою:

$$\operatorname{tg} \varphi_s = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}. \quad (4.98)$$

4.4.2 Закон Ома для змінного струму

Запишемо ще раз вираз для амплітуди сили змінного струму

$$I_m = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{(\omega L - 1/\omega C)^2 + R^2}}.$$

Амплітуда сили змінного струму пропорційна до амплітуди ЕРС.

Це дуже схоже на формулу закону Ома для замкненого кола постійного струму, що сила постійного струму пропорційна до ЕРС.

Тому вираз для амплітуди змінного струму цілком можна трактувати як **закон Ома для змінного струму** (для амплітудних значень). Тоді вираз

$$Z = \sqrt{(\omega L - 1/\omega C)^2 + R^2} \quad (4.99)$$

являє собою аналог електричного опору в колі постійного струму і має значення **повного опору кола змінного струму**. Його іноді називають **імпедансом**.

Імпеданс складається з двох членів:

R – активний опір, $X = \omega L - 1/\omega C$ – реактивний опір.

У свою чергу, реактивний опір також складається з двох членів:

$X_L = \omega L$ – індуктивний опір, $X_C = 1/\omega C$ – ємнісний опір.

Зі збільшенням або активного, або реактивного опору сила струму зменшуватиметься, і в цьому реактивний опір аналогічний активному. Але є і принципова різниця.

При цьому індуктивний опір $X_L = \omega L$ зі збільшенням частоти зростає, а ємнісний $X_C = 1/\omega C$ зменшується.

Якщо $\omega \rightarrow 0$ індуктивний опір також прямує до нуля і котушка має тільки активний опір. Це також можна легко пояснити. Електрорушійна сила самоіндукції та струм самоіндукції напрямлені проти основного струму, що змінюється з часом, і зменшує його. В цьому і є зміст індуктивного опору.

При обчисленні імпедансу ми не просто додаємо активний і реактивний опори, а беремо корінь квадратний із суми їх квадратів

$$Z = \sqrt{X^2 + R^2}. \quad (4.100)$$

Звідси робимо висновок про те, що спади напруги на активному і реактивному опорах перебувають у різних фазах.

4.4.3 Спади напруги на елементах кола змінного струму

У замкненому електричному контурі, відповідно до закону збереження енергії, сума спадів напруги на всіх елементах кола дорівнює сумі ЕРС. Для кола, зображеного на рис. 4.21, маємо:

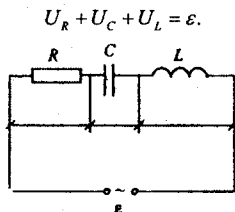


Рис. 4.21

Обчислимо послідовно кожний спад напруги.

Як і для кола постійного струму, спад напруги на активному опорі дорівнює добутку сили струму на активний опір

$$U_R = IR = RI_m \cos(\omega t + \varphi_I). \quad (4.101)$$

Цей спад напруги здійснює гармонічні коливання з частотою джерела струму і збігається за фазою з коливанням сили струму.

Спад напруги на конденсаторі ємністю C дорівнює різниці потенціалів

$$U_C = \Delta\varphi = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} q_m \cos(\omega t + \varphi_I). \quad (4.102)$$

Враховуючи, що $q_m = I_m / \omega$, а $1/\omega C = X_C$ дістаємо формулу:

$$U_C = \frac{1}{\omega C} I_m \cos(\omega t + \varphi_I) = X_C I_m \cos(\omega t + \varphi_I). \quad (4.103)$$

Спад напруги на конденсаторі здійснює гармонічні коливання з частотою джерела змінного струму ω . Фаза коливань збігається з фазою коливань заряду φ . Спад напруги на конденсаторі відстає за фазою від спаду напруги на активному опорі φ_I на $\pi/2$.

Спад напруги на котушці індуктивності дорівнює ЕРС самоіндукції

$$U_L = L \frac{dI}{dt} = \omega L I_m \cos(\omega t + \varphi_I + \pi/2) = X_L I_m \cos(\omega t + \varphi_I + \pi/2). \quad (4.104)$$

Спад напруги на котушці індуктивності здійснює гармонічні коливання з частотою джерела змінного струму ω . Він випереджає за фазою спад напруги на активному опорі на $\pi/2$.

4.4.4 Векторна діаграма для спадів напруги

Щоб побудувати векторні діаграми, подамо гармонічні коливання у вигляді вектора, який обертається.

Кожен спад напруги уявимо у вигляді вектора, довжина якого дорівнює відповідній амплітуді, початковий кут дорівнює зсуву фаз, а кутова швидкість обертання — циклічній частоті коливань.

Усі спади напруги здійснюють коливання з однаковою частотою, тому їхня кутова швидкість обертання однакова. Векторна сума всіх векторів амплітуд спадів напруги і ЕРС має дорівнювати нулю:

$$\vec{U}_R + \vec{U}_L + \vec{U}_C + \vec{\mathcal{E}} = 0. \quad (4.105)$$

Векторну діаграму будемо так: вектор U_R відкладаємо по осі x . Тоді вектор U_L , що випереджає вектор U_R на $\pi/2$, слід відкласти в додатному напрямі осі y , а вектор U_C , що відстає від вектора U_R на $\pi/2$, слід відкласти у від'ємному напрямі осі y .

Модуль і напрям вектора $\vec{\mathcal{E}}$ знайдемо, додавши вектори всіх спадів напруги. На рис. 4.22 наведено побудовану в такий спосіб векторну діаграму.

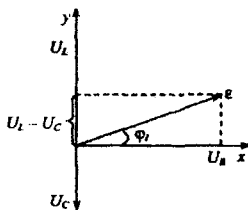


Рис. 4.22

Вектор $\vec{\mathcal{E}}$ опинився у першому квадранті через те, що ми взяли амплітуду спаду напруги на індуктивності більшу, ніж амплітуду спаду напруги на ємності. Тому вектор амплітуди ЕРС випереджає вектор спаду напруги на активному опорі на φ_1 . За іншого співвідношення параметрів електричного кола вектор $\vec{\mathcal{E}}$ може опинитися в четвертому квадранті. Це впливає з формули для різниці фаз:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{U_L - U_C}{U_R}, \quad (4.106)$$

звідки бачимо, що φ_1 може змінюватись від $+\pi/2$ до $-\pi/2$. Бачимо також, що в разі резонансу, коли спад напруги на індуктивності $U_L = X_L I$ дорівнює спаду напруги на ємності $U_C = X_C I$, різниця фаз між ЕРС і струмом дорівнює нулю ($\varphi_1 = 0$). А це означає, що спад напруги на активному опорі збігається за фазою з ЕРС. Тому сила струму визначається тільки активним опором:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

4.4.5 Потужність і втрати в колі змінного струму

Якщо змінний струм виник у колі, що не містить активного опору, то він не загасне навіть після відімкнення джерела струму, оскільки не виділяється Джоулеве тепло й енергія із системи не виходить. При цьому відбувається перетворення енергії електричного поля в конденсаторі в енергію магнітного поля в котушці індуктивності та здійснюються вільні незгасаючі коливання.

Потужність тепловиділення на активному опорі називають **втратами потужності**

$$P = I^2 R = I_m^2 R \sin^2 \omega t. \quad (4.107)$$

Потужність змінюється з часом із подвійною частотою 2ω . Середнє значення потужності, яка виділяється за один період,

$$P_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T P dt = \frac{I_m^2 R}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t dt = \frac{1}{2} I_m^2 R. \quad (4.108)$$

Нагадаємо, що для постійного струму потужність тепловиділення

$$P = I^2 R. \quad (4.109)$$

Порівнюючи ці дві формули, можна ввести поняття **ефективне**, або **дійове**, значення **сили змінного струму** I_e як таке значення сили постійного струму, за якого втрати потужності збігаються з втратами змінного струму, амплітуда якого дорівнює I_m :

$$I_e = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \quad (4.110)$$

Аналогічно вводяться ефективні значення ЕРС і напруги:

$$e_e = \frac{e_m}{\sqrt{2}} \quad \text{і} \quad U_e = \frac{U_m}{\sqrt{2}}. \quad (4.111)$$

Втрати потужності зручно подавати через ефективні значення ЕРС і сили струму:

$$P = \frac{1}{2} I_m^2 R = \frac{1}{2} I_m (I_m R) = \frac{1}{2} I_m U_R. \quad (4.112)$$

Оскільки

$$\cos \varphi_1 = \frac{U_R}{U_m}, \quad \text{то} \quad U_R = e_m \cos \varphi_1,$$

а тому

$$P = I_e e_e \cos \varphi_1. \quad (4.113)$$

Отже, корисна потужність у колі змінного струму залежить не тільки від сили струму й ЕРС, а й від косинуса різниці фаз між ними:

$$\cos \varphi_1 = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{(\omega L - 1/\omega C)^2 + R^2}}. \quad (4.114)$$

Чим більший реактивний опір, тим менше значення $\cos \varphi_1$ і тим менша корисна потужність. Косинус різниці фаз $\cos \varphi_1$ називають **коефіцієнтом потужності**.

4.4.6 Необхідно зрозуміти, запам'ятати і вміти

1. Вільні гармонічні коливання. Диференціальне рівняння для вільних гармонічних коливань пружинного маятника (виведення).
2. Гармонічні коливання математичного та фізичного маятників. Власна циклічна частота і період їхніх коливань (виведення).
3. Додавання коливань, що відбуваються по одній осі (виведення).
4. Додавання коливань, що відбуваються у взаємно перпендикулярних напрямках (виведення).
5. Загасаючі коливання. Диференціальне рівняння для загасаючих коливань пружинного маятника (виведення).
6. Фізичний сенс коефіцієнта загасання та логарифмічного декременту загасання (виведення).
7. Вимушені коливання. Диференціальне рівняння вимушених коливань пружинного маятника (виведення). Резонанс.
8. Змінний струм. Закон Ома для кола змінного струму.
9. Спади напруги на активному, індуктивному та ємнісному елементах кола змінного струму.
10. Принцип побудови векторних діаграм для спадів напруги.
Потужність і втрати у колі змінного струму.

4.5 МЕХАНІЧНІ Й ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ

4.5.1 Механічні хвилі

Механічною хвилею називають процес поширення в пружному середовищі механічних коливань. Розглянемо схему виникнення одновимірної пружної хвилі (рис. 4.23).

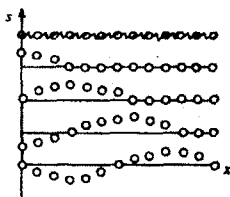


Рис. 4.23

Нехай вздовж осі x розміщений ланцюжок матеріальних точок, кожна масою m , зв'язаних між собою силами. Умовно ці сили зображені у вигляді пружин між частинками. Якщо частинку, яка стоїть на початку ланцюжка, почати зміщувати вгору, то сусідні частинки також почнуть зміщуватись угору, їх потягнуть пружинки. Але існує інерція, і тому зміщення частинок будуть запізнюватись.

Коли перша частинка досягне максимального відхилення від положення рівноваги, останні найближчі частинки відхиляться на меншу відстань, а до частинок, розміщених далі, вплив взагалі не дійде, і вони залишаться на своїх місцях.

Легко зрозуміти, що якщо перша частинка здійснює гармонічні коливання, то й останні частинки з часом втягнуться в цей процес.

Енергію для коливань вони будуть отримувати по ланцюжку від першої частинки, яку називають *джерелом хвилі*.

Хвильовий процес – це процес перенесення енергії.

Енергія послідовно передається від однієї частинки до іншої. Оскільки енергія на цьому шляху не втрачається, то кожна частинка почне здійснювати коливання з тією самою амплітудою, що й перша частинка – джерело, і з тією самою частотою. Різниця тільки в тому, що коливання різних частинок здійснюватиметься в різних фазах.

Важливо, що частинки середовища не переносяться хвилею, а лише здійснюють гармонічні коливання біля положень рівноваги. Переноситься тільки енергія.

Розрізняють хвилі ***поперечні і поздовжні***.

У поперечній хвилі напрям коливань перпендикулярний до напрямку поширення хвилі. У поздовжній хвилі напрям коливань збігається з напрямом поширення хвилі.

Поперечними є електромагнітні хвилі, поздовжніми – звукові. В рідинах і газах пружні сили виникають тільки під час стиску і не виникають під час

зсуву. Тому поперечні хвилі в них не розповсюджуються, а поширюються тільки поздовжні хвилі. Поперечні хвилі поширюються тільки в твердих тілах.

4.5.1.1 Загальні положення і характеристики

Частота хвилі	ν ;
Циклічна частота хвилі	$\omega = 2\pi\nu$;
Період хвилі	$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}$;
Амплітуда хвилі	$s_0(A)$
Фазова швидкість	$\bar{v}$
Групова швидкість	$\bar{u}$
Довжина хвилі	λ
Хвильовий вектор	k

Хвильова поверхня і хвильовий фронт.

Фазовою швидкістю поширення хвилі, або просто **швидкістю хвилі**, називають швидкість поширення енергії. З цією самою швидкістю поширюється в просторі фаза коливань. Це слід розуміти так. Нехай у момент часу t одна з точок, що коливається, досягла максимального відхилення. Інша точка, яка перебуває на відстані Δx від неї, буде в такій самій фазі лише через деякий час Δt . Тому і кажуть, що поширюється фаза коливань. Звідси і термін «фазова швидкість v ».

Фазова швидкість визначається властивостями середовища, а саме: пружними й інерціальними властивостями. Чим вища пружність, тим швидше «підтягуються» сусідні частинки. Чим більша густина, тобто маса частинок, тим більша інерція і тим більше запізнювання.

Таким чином, фазова швидкість визначається відношенням сил пружності до сил інерції. Для поздовжніх хвиль у твердому тілі фазова швидкість визначається за формулою

$$v = \sqrt{E/\rho}, \quad (4.115)$$

де E – модуль пружності, або модуль Юнга; ρ – густина середовища.

Не слід плутати фазову швидкість зі швидкістю коливань частинки, яка дорівнює першій похідній від зміщення за часом.

Довжина хвилі – відстань, на яку поширюється фаза коливань за час, що дорівнює одному періоду коливань. Оскільки фаза переміщується зі швидкістю

v , то $\lambda = vT$, але $T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}$, і тоді

$$\lambda = vT = \frac{v}{\nu} = \frac{2\pi v}{\omega}. \quad (4.116)$$

Із формули видно, що частинки, які містяться одна від одної на відстані, що дорівнює довжині хвилі, коливаються в одній фазі. Точніше, різниця фаз дорівнює 2π .

Довжиною хвилі називають відстань між найближчими частинками, які здійснюють коливання в однаковій фазі.

Хвильовою поверхнею називають геометричне місце точок, які здійснюють коливання в однаковій фазі.

Залежно від форми хвильової поверхні розрізняють хвилі *плоскі, сферичні, циліндричні* та інші.

Форма хвильової поверхні визначається характеристиками джерела і властивостями середовища. Наприклад, точкове джерело в однорідному середовищі утворює сферичну хвилю.

Хвильовим фронтом називають «передову хвильову поверхню». Вона відокремлює простір, в якому частинки коливаються, від простору, де частинки ще не втягнуті в процес коливань. Хвильовий фронт переміщується в просторі з фазовою швидкістю v .

Хвильовий вектор $\vec{k}$ у даній точці простору напрямлений по нормалі до хвильової поверхні і вказує напрям поширення хвилі в цій точці. Модуль хвильового вектора дорівнює $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Він називається **хвильовим числом**.

Оскільки $\lambda = \frac{2\pi}{\omega} v$, то $k = \frac{\omega}{v}$ або

$$v = \frac{\omega}{k}. \quad (4.117)$$

Фазова швидкість дорівнює відношенню циклічної частоти до хвильового числа.

4.5.1.2 Рівняння плоскої і сферичної хвилі

Рівняння хвилі — це формула, яка дає змогу знайти зміщення s від положення рівноваги частинки, координати якої x, y, z у момент часу t : $s = s(x, y, z, t)$.

Уявімо собі джерело у вигляді нескінченної площини, перпендикулярної до осі x (рис. 4.24) і розміщеної на початку координат, тобто при $x = 0$. Кожна точка площини здійснює гармонічні коливання, рівняння яких:

$$s(0, t) = s_0 \cos \omega t. \quad (4.118)$$

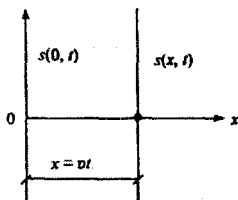


Рис. 4.24

Очевидно, що хвильові поверхні теж будуть плоскі і тому хвиля буде одновимірною. Розглянемо коливання в точці, координата якої x . Частинка, яка міститься в цій точці, коливається з тією самою частотою ω , як і частинки біля

джерела, і з амплітудою s_0 , але із запізненням.

Час τ , який потрібен хвилі, щоб дійти до цієї точки,

$$\tau = x/v.$$

Тому рівняння коливань частинки буде таким:

$$s(x, t) = s_0 \cos \omega(t - \tau) = s_0 \cos \omega(t - x/v). \quad (4.119)$$

Ми отримали **рівняння плоскої хвилі**. У цьому рівнянні: s — зміщення частинки від положення рівноваги; s_0 — амплітуда коливань; x — координата частинки; t — момент часу; v — фазова швидкість.

Узявши до уваги, що $v = \omega/k$, запишемо рівняння плоскої хвилі в іншому, більш поширеному вигляді:

$$s(x, t) = s_0 \cos(\omega t - kx). \quad (4.120)$$

Якщо хвиля поширюється у від'ємному напрямі осі x , то потрібно змінити знак перед kx , тобто

$$s(x, t) = s_0 \cos(\omega t + kx). \quad (4.121)$$

У рівнянні хвилі дві змінні: x і t . Тому, коли з'являється необхідність графічно зобразити хвилю, будують залежність зміщення від часу $s = s(t)$ при сталому x (рис. 4.25),

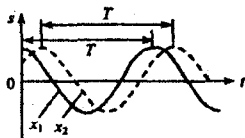


Рис. 4.25

або залежність зміщення від координати $s = s(x)$ при сталому часі (рис. 4.26).

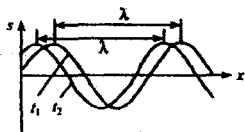


Рис. 4.26

У першому випадку (рис. 4.25) ми дістанемо звичайний графік гармонічних коливань для частинок із координатами x_1 і x_2 . Видно, що амплітуди і періоди обох коливань однакові, а фази — різні.

У другому випадку (рис. 4.26) ми отримаємо «миттєві знімки» біжучої хвилі для двох різних моментів часу t_1 і t_2 . На останньому графіку показано, що відстань між частинками, які здійснюють коливання в одній фазі (довжина хвилі), залишається сталою.

У загальному випадку плоска хвиля може поширюватись не вздовж осі x , а в довільному напрямі. Тоді $\vec{k}$ буде вже вектором, а положення точки слід задавати, як звичайно, за допомогою радіуса-вектора $\vec{r}$. Рівняння плоскої хвилі набере вигляду:

$$s(\vec{r}, t) = s_0 \cos[\omega t - (\vec{k} \cdot \vec{r})] \quad (4.122)$$

Можна розписати скалярний добуток хвильового вектора $\vec{k}$ на радіус-вектор $\vec{r}$:

$$(\vec{k} \cdot \vec{r}) = k_x x + k_y y + k_z z,$$

і тоді рівняння набере вигляду

$$s(\vec{r}, t) = s_0 \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z). \quad (4.123)$$

4.5.1.3 Хвильове рівняння

Рівняння хвилі є розв'язком рівняння, яке називається хвильовим.

Рівняння плоскої хвилі, що поширюється в довільному напрямку:

$$s(\vec{r}, t) = s_0 \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)$$

Це рівняння має чотири змінні, а саме: x, y, z, t .

Візьмемо другі частинні похідні від зміщення за кожною з цих змінних:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} &= -\omega^2 s_0 \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z) = -\omega^2 s; \\ \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} &= -k_x^2 s_0 \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z); \\ \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} &= -k_y^2 s_0 \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z); \\ \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} &= -k_z^2 s_0 \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z). \end{aligned} \quad (4.124)$$

Додамо почленно три останні рівняння (похідні по координатах):

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = -k^2 s. \quad (4.125)$$

Виразимо s із першого рівняння і підставимо в (4.125):

$$\begin{aligned} s &= -\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} &= \frac{k^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (4.126)$$

Зліва маємо оператор Лапласа Δ від зміщення. Тому остаточно

$$\Delta s = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}. \quad (4.127)$$

4.5.1.4 Фазова швидкість хвилі

Припустимо, що фаза хвилі в момент часу t залишається сталою:

$$(\omega t - kx + \varphi_0) = \text{const.}$$

Цей вираз визначає зв'язок між часом t і тим місцем x , в якому фаза має зафіксоване значення. Знайдемо величину dx/dt , яка є швидкістю переміщення фази:

$$\frac{dx}{dt} = v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda \nu. \quad (4.128)$$

Швидкість v — це швидкість переміщення даного значення фази, і вона збігається зі швидкістю поширення хвилі. Тому цю швидкість називають **фазовою швидкістю** хвилі.

Дістанемо вираз для фазової швидкості поздовжньої пружної хвилі, яка поширюється у твердому тілі.

Якщо по торцю пружного стрижня нанести удар, то з'явиться ущільнення, яке почне поширюватись уздовж стрижня з фазовою швидкістю (рис. 4.27).

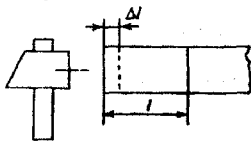


Рис. 4.2.7

Позначимо тривалість удару через Δt , а зміщення точок кінця стрижня за цей час — Δl . За цей же час збудження (хвильовий фронт) встигне переміститися на відстань l . Фазова швидкість буде

$$v = l/\Delta t,$$

Швидкість зміщення точок стрижня внаслідок удару:

$$u = \Delta l/\Delta t.$$

За другим законом динаміки зміна імпульсу всіх точок, які почали рухатися на довжині l , дорівнює імпульсу сили:

$$\Delta(mu) = mu = F\Delta t.$$

Якщо густина матеріалу стрижня ρ , а його поперечний переріз S , то маса $m = \rho lS$ і тоді

$$F\Delta t = mu = \rho lSu = \rho lS \frac{\Delta l}{\Delta t}.$$

Сила удару точно дорівнюватиме пружній протидіючій силі, яка за законом Гука дорівнює

$$F = ES \frac{\Delta l}{l},$$

де E — **модуль пружності** або **модуль Юнга**.

Після підстановки

$$\rho \frac{l^2}{\Delta t^2} = \rho v^2 = E.$$

Звідки фазова швидкість поздовжньої пружної хвилі буде

$$v = \sqrt{E/\rho}. \quad (4.129)$$

Фазова швидкість поперечної пружної хвилі

$$v = \sqrt{G/\rho}, \quad (4.130)$$

де G – модуль зсуву.

4.5.1.5 Групова швидкість хвилі

Швидкість поширення хвильового пакета, або групи хвиль, називається *груповою швидкістю*. Вона дорівнює швидкості перенесення хвилею енергії.

На перший погляд не ясно, навіщо потрібно вводити поняття групової швидкості, адже ж ми раніше встановили, що фазова швидкість хвилі залежить тільки від властивостей середовища і вона має бути однаковою для хвиль будь-яких частот.

Проте, досліди, які були проведені з хвилями високих частот, показали, що швидкість хвилі може залежати від її частоти або довжини.

Залежність фазової швидкості хвилі від частоти називається дисперсією.

Середовища, в яких спостерігається явище дисперсії, називаються *диспергуючими*.

Дисперсія приводить до того, що при віддаленні від джерела хвильовий пакет змінює свою форму, він, так би мовити, «розпливається» (рис. 4.28).



Рис. 4.28

Тому, групова швидкість, як інтегральна швидкість поширення хвильового пакета, відрізнятиметься від фазової.

Будемо шукати формулу для групової швидкості і формулу, яка зв'яже групову і фазову швидкості на прикладі одночасного поширення тільки двох хвиль із різними, але близькими частотами.

Рівняння першої хвилі:

$$s_1 = s_0 \cos(\omega t - kx). \quad (4.131)$$

Рівняння другої хвилі:

$$s_2 = s_0 \cos[(\omega + d\omega)t - (k + dk)x]. \quad (4.132)$$

Зміщення частинки в даній точці в деякий момент часу, згідно з принципом суперпозиції, дорівнює сумі зміщень обох хвиль:

$$s = s_1 + s_2 = 2s_0 \cos\left(\frac{d\omega t - dkx}{2}\right) \cos(\omega t - kx). \quad (4.133)$$

Формула нагадує формулу додавання двох гармонічних коливань із близькими частотами. Там амплітуда сумарного коливання сама здійснювала гармонічні коливання, частота яких визначалась як різниця частот початкових коливань. Це була частота биття.

А тут амплітуда хвилі — це теж хвиля, частота якої дорівнює різниці частот

$d\omega$, а хвильовий вектор дорівнює різниці хвильових векторів вихідних хвиль dk .

Нагадаємо, що фазова швидкість дорівнює відношенню кругової частоти до хвильового числа

$$v = \frac{\omega}{k}$$

Тому швидкість поширення амплітуди сумарної хвилі слід обчислювати, як відношення різниці частот $d\omega$ до різниці хвильових векторів dk

$$u = \frac{d\omega}{dk}. \quad (4.134)$$

Це і є групова швидкість хвилі. Оскільки

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi v}{\lambda}, \text{ а } k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ і } dk = -2\pi \frac{d\lambda}{\lambda^2},$$

то

$$u = \frac{d\omega}{dk} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}. \quad (4.135)$$

Це і є зв'язок фазової і групової швидкостей.

Якщо фазова швидкість v не залежить від частоти ω , а це означає, що вона не залежить від довжини хвилі λ , то $dv/d\lambda = 0$ і фазова швидкість дорівнює груповій ($v = u$). **Дисперсія відсутня.**

Якщо $dv/d\lambda \neq 0$, то $u \neq v$ — **дисперсія присутня.**

Розрізняють **нормальну і аномальну дисперсії.**

Якщо дисперсія нормальна, то $\frac{dv}{d\lambda} > 0$ і $u < v$.

Якщо дисперсія аномальна, то $\frac{dv}{d\lambda} < 0$ і $u > v$.

4.5.1.6 Енергія хвилі. Вектор Умова

У просторі, де поширюється пружна монохроматична хвиля, частинки середовища здійснюють гармонічні коливання. Отже, можна говорити про кінетичну і потенціальну енергію коливання всіх частинок, які містяться в елементарному об'ємі dV .

Спочатку обчислимо повну механічну енергію та густину енергії. Сумарна кінетична енергія частинок, які містяться в елементарному об'ємі dV , дорівнює сумі кінетичних енергій:

$$dE_k = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2. \quad (4.136)$$

Швидкості зміщення частинок із положення рівноваги v_i , і маси m_i , частинок припустимо однаковими:

$$m_i = m, \quad v_i = v = \frac{ds}{dt}.$$

Маса всіх частинок, які перебувають в елементарному об'ємі dV , дорівнює ρdV . Кінетична енергія

$$dE_k = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 dV. \quad (4.137)$$

Густина кінетичної енергії, тобто кінетична енергія, яка припадає на одиницю об'єму

$$\varpi_k = \frac{dE_k}{dV} = \frac{\rho}{2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2. \quad (4.138)$$

Потенціальна енергія частинок, які коливаються, — це енергія пружної деформації. Для елементарного об'єму dV

$$dW_p = \frac{E\varepsilon^2}{2} dV, \quad (4.139)$$

де E — модуль пружності Юнга, ε — відносна деформація.

Якщо елементарний об'єм має довжину dx , а деформація ds , то відносна деформація буде

$$\varepsilon = \frac{ds}{dx}. \quad (4.140)$$

а потенціальна енергія частинок в елементарному об'ємі — dV :

$$dW_p = \frac{E}{2} \left(\frac{ds}{dx} \right)^2 dV. \quad (4.141)$$

Густина потенціальної енергії

$$\varpi_p = \frac{dW_p}{dV} = \frac{E}{2} \left(\frac{ds}{dx} \right)^2. \quad (4.142)$$

Оскільки

$$E = \rho v^2, \text{ а } \frac{ds}{dx} = \left(\frac{dx}{dt} \right) \cdot \left(\frac{dt}{dx} \right) = \frac{1}{v} \cdot \left(\frac{ds}{dt} \right),$$

то густина потенціальної енергії

$$\varpi_p = \frac{\rho v^2}{2} \cdot \frac{1}{v^2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{\rho}{2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \varpi_k. \quad (4.143)$$

Густина потенціальної енергії дорівнює густині кінетичної енергії і обидві вони пропорційні до густини середовища і квадрата швидкості зміщення частинок із положення рівноваги.

Обчислимо густину енергії для плоскої одновимірної хвилі, яка поширюється в додатному напрямі осі x . Рівняння цієї хвилі

$$s = s_0 \cos(\omega t - kx).$$

Швидкість зміщення частинок з положення рівноваги

$$\frac{ds}{dt} = -s_0 \omega \sin(\omega t - kx).$$

Густина кінетичної або потенціальної енергії

$$\varpi_p = \varpi_k = \frac{\rho}{2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{\rho s_0^2 \omega^2}{2} \sin^2(\omega t - kx).$$

Повна густина енергії дорівнює сумі густин енергій потенціальної й кінетичної

$$\Omega = \varpi_p + \varpi_k = \rho s_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx)$$

Густина енергії хвилі в даній точці здійснює гармонічні коливання з подвійною частотою.

Середнє за часом значення густини енергії за один період

$$\Omega_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^T \Omega dt = \frac{\rho \omega^2}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t - kx) dt = \frac{\rho \omega^2}{2} \quad (4.144)$$

Тепер знайдемо *густину потоку енергії*.

Вектором густини потоку енергії $\vec{j}_n$ пружної хвилі називають кількості енергії, яка проходить в одиницю часу через одиничну площадку, перпендикулярну до напрямку поширення хвилі. Точніше:

$$\vec{j}_n = \vec{n} \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta S \cdot \Delta t} = \vec{n} \frac{dW}{dS \cdot dt} \quad (4.145)$$

Оскільки енергія поширюється з фазовою швидкістю v , то за час dt через площадку dS пройде енергія dW , яка міститься в об'ємі $dV = dS \cdot v \cdot dt$.

$$dW = \Omega_0 dV = \Omega_0 dS \cdot v \cdot dt. \quad (4.146)$$

Вектор густини потоку енергії:

$$\vec{j}_n = \frac{dW}{dS \cdot dt} = \Omega_0 \vec{v}. \quad (4.147)$$

Напрямок вектора $\vec{j}$, який має також назву **вектор Умова**, збігається за напрямом з фазовою швидкістю, або хвильового вектора.

Інтенсивністю хвилі називають модуль вектора густини потоку енергії.

$$I = |\vec{j}_n| = \frac{\rho \omega^2 v}{2}. \quad (4.148)$$

Інтенсивність хвилі, як бачимо з формули, визначається квадратом амплітуди коливань у даній точці, квадратом частоти, густиною середовища та фазовою швидкістю. Ця залежність виконується для пружних хвиль.

4.5.1.7 Інтерференція хвилі. Стояча хвиля. Ефект Доплера

Інтерференцією називають явище накладання когерентних хвиль.

Якщо в дану точку простору в деякий момент часу одночасно приходять декілька хвиль, то частинка середовища здійснює сумарне коливання. Якщо хвилі когерентні, тобто різниця їхніх фаз завжди стала, то в деяких точках простору коливання будуть посилюватись, а в інших гаситися.

Знайдемо рівняння сумарного коливання частинки при накладанні двох гармонічних когерентних хвиль, частота яких однакова і дорівнює ω , а амплітуди різні і дорівнюють відповідно $s_{0,1}$ і $s_{0,2}$. Відстань від першого джерела до точки, яку ми розглядаємо, – x_1 а відстань від другого джерела – x_2 . Обидві хвилі плоскі і одновимірні.

Зміщення частинки від першої хвилі

$$s_1 = s_{0,1} \cos(\omega t - kx_1). \quad (4.149)$$

Зміщення частинки від другої хвилі

$$s_2 = s_{0,2} \cos(\omega t - kx_2). \quad (4.150)$$

Скористаємося здобутим раніше виразом для амплітуди сумарного коливання

$$s_0^2 = s_{0,1}^2 + s_{0,2}^2 - 2s_{0,1}s_{0,2} \cos k(x_2 - x_1). \quad (4.151)$$

Бачимо, що величина сумарної амплітуди залежить не тільки від амплітуд вихідних хвиль, а й від аргумента косинуса $k(x_2 - x_1)$. Величина $\Delta x(x_2 - x_1)$ називається *різницею ходу*. Від неї і залежить величина сумарної амплітуди коливань частинки в даній точці. Різниця ходу – це різниця відстаней, що їх мають пройти хвилі від різних джерел до даної точки.

Максимуми амплітуди будуть у точках, для яких виконується така умова: $k\Delta x = \pm 2m\pi$ $m=(1,2,3\dots)$. При цьому $\cos k\Delta x = 1$ і $s_0 = s_{0,1} + s_{0,2}$.

Мінімуми амплітуди будуть у точках, для яких виконується така умова: $k\Delta x = \pm(2m+1)\pi$, $(m=0,1,2\dots)$. При цьому $\cos k\Delta x = 0$ і $s_0 = s_{0,1} - s_{0,2}$. Можна інакше записати умови максимумів і мінімумів, узявши до уваги, що хвильове число $k = 2\pi/\lambda$.

Умова для максимумів

$$\Delta x = \pm m\lambda \quad (4.152)$$

Умова для мінімумів

$$\Delta x = (2m+1)\lambda \quad (4.153)$$

Стояча хвиля

Під час поширення в середовищі одночасно декількох хвиль коливання частинок середовища можна визначити геометричною сумою коливань, які б виконувала частинка при поширенні кожної з хвиль окремо. Це твердження називається принципом суперпозиції хвиль. Якщо накладаються дві хвилі, які йдуть назустріч одна одній, утворюється хвиля, яка називається *стоячою*. На практиці стоячі хвилі виникають при накладанні прямої і відбитої від перешкоди хвиль. Знайдемо рівняння стоячої хвилі. Рівняння прямої і відбитої хвиль можна записати так:

$$s_1 = A \cos[\omega t - kx + \alpha_1] \quad (4.154)$$

$$s_2 = A \cos[\omega t - kx + \alpha_2] \quad (4.155)$$

Амплітуди і частоти прямої і відбитої хвиль однакові. Рівняння стоячої хвилі має вигляд:

$$s = s_1 + s_2 = 2A \cos\left(kx + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2}\right). \quad (4.156)$$

Для спрощення виберемо початок відліку координати так, щоб $\alpha_2 - \alpha_1 = 0$, а початок відліку часу так, щоб $\alpha_2 + \alpha_1 = 0$. Тоді дістанемо таке рівняння стоячої хвилі:

$$s = s_1 + s_2 = 2A \cos kx \cos \omega t. \quad (4.157)$$

Амплітуда стоячої хвилі залежить від координати X :

$$A_{cr} = 2A \cos kx \quad (4.158)$$

У точках, координати яких задовольняють умову

$$2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm n\pi \quad (4.159)$$

(де $n = 0, 1, 2, 3, \dots$), амплітуда коливань набуває максимальних значень $A_{\text{ст}} = 2A$ (рис. 4.29).

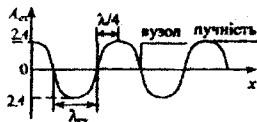


Рис. 4.29

Ці точки називають **пучностями** стоячої хвилі, координати яких можна визначити за формулою:

$$x_{\text{пуч}} = \pm n \frac{\lambda}{2} \quad (4.160)$$

У точках, координати яких задовольняють умову:

$$2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \quad (4.161)$$

(де $n = 1, 2, 3, \dots$), амплітуда коливань дорівнює нулю: $A_{\text{ст}} = 0$.

Ці точки називаються **вузлами** стоячої хвилі, координати яких можна визначити за формулою:

$$x_{\text{вуз}} = \pm \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{2} \quad (4.162)$$

Відстань між сусідніми пучностями, або сусідніми вузлами, називається **довжиною хвилі** стоячої хвилі і дорівнює половині довжини хвилі прямої хвилі: $\lambda_{\text{ст}} = \lambda/2$.

Тоді відстань між сусідніми вузлом і пучністю дорівнює $\lambda/4$. Точки, які перебувають по різні боки від вузла, коливаються в протифазі. Всі точки, які містяться між сусідніми вузлами, коливаються в одній фазі. На відміну від прямої хвилі в стоячій хвилі не відбувається перенесення енергії. Енергія періодично переходить із кінетичної енергії в потенціальну пружно деформованого середовища, і навпаки.

Відсутність перенесення енергії стоячою хвилею можна пояснити тим, що пряма і відбита хвилі, які утворюють цю хвилю, переносять енергію в однакових кількостях, але в протилежних напрямках.

Звукові хвилі

Звуковими називаються хвилі, які поширюються у пружному середовищі і які мають частоти від 16 до $20 \cdot 10^3$ Гц. Якраз ці частоти сприймає людське вухо. Хвилі вищих частот називають **ультразвуковими**, а хвилі, частота яких менша за 16 Гц, називають **інфразвуковими**. Хвилі, частоти яких лежать у діапазоні від 10^9 до 10^{18} Гц, називають **гіперзвуковими**.

Розрізняють фізичні і фізіологічні характеристики звуку.

Фізичні характеристики: амплітуда, частота, спектр частот, густина потоку енергії, інтенсивність. Усі вони мають точні фізичні визначення.

Фізіологічні характеристики: сила звуку, гучність, висота тону, тембр. Ці характеристики зв'язані зі сприйняттям звуку людським вухом і тому досить суб'єктивні, так би мовити, – якісні.

Кожній фізіологічній характеристиці відповідає цілком визначена фізична характеристика.

Сила звуку, або **гучність звуку**, визначається **інтенсивністю** звукової хвилі, тобто **модулем вектора густини потоку енергії**:

$$I = \frac{\rho \lambda_0^2 \omega^2 v}{2} \quad (4.163)$$

Вона пропорційна квадрату амплітуди коливань і залежить як від частоти, так і від властивостей середовища. На жаль, чутливість людського вуха різна щодо хвиль різних частот, та й у різних людей вона різна.

Висота тону визначається **частотою** монохроматичної хвилі ν . Чим більша частота, тим вищий тон.

Тембр або «забарвлення звуку» визначається **спектром частот** у складних немонохроматичних хвилях. Два джерела можуть давати однаковий **основний тон** (однакову основну частоту), але різний набір **обертонів** з різними амплітудами. Тембр джерел буде різним.

Ефект Допплера

Нехай джерело звуку і приймач звуку розміщені на одній прямій і нерухомі. Джерело випромінює звук частотою ν_0 . Досліди показують, що приймач сприймає звук такої самої частоти. Якщо джерело і приймач рухаються вздовж прямої лінії, що їх з'єднує, тоді приймач сприймає іншу частоту звуку, яка не дорівнює ν_0 . В цьому полягає ефект Допплера.

Нехай джерело звуку рівномірно рухається назустріч приймачу із швидкістю $v_{\text{дж}}$, а приймач залишається нерухомим. Коли джерело нерухоме, звукова хвиля за час $t = T_0$ (періоду коливань) пройде відстань, яка дорівнює довжині хвилі звуку: $\lambda_0 = v T_0$. Якщо джерело рухається, воно саме за цей час переміщується на відстань $l = v_{\text{дж}} T_0$. Тоді довжина хвилі звуку дорівнює:

$$\lambda_1 = \lambda_0 - v_{\text{дж}} T_0 = v \cdot T_0 - v_{\text{дж}} T_0 = \frac{v - v_{\text{дж}}}{\nu_0} \quad (4.164)$$

А частота звуку, яку зареєструє приймач, визначається за формулою:

$$\nu_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v \nu_0}{(v - v_{\text{дж}})} = \frac{\nu_0 v}{(v - v_{\text{дж}})} \quad (4.165)$$

У випадку, коли **назустріч** один одному рухаються і джерело і приймач звуку, формула для визначення частоти, яку реєструє приймач, має вигляд:

$$\nu = \nu_0 \frac{v + v_{\text{пр}}}{v - v_{\text{дж}}} \quad (4.166)$$

Приймач реєструє частоту більшу, ніж випромінює джерело.

У випадку, коли джерело і приймач звуку **віддаляються** один від одного, формула для визначення частоти, яку реєструє приймач, має вигляд:

$$\nu = \nu_0 \frac{v - v_{\text{пр}}}{v + v_{\text{дж}}} \quad (4.167)$$

Приймач реєструє частоту меншу, ніж випромінює.

4.5.2 Електромагнітні хвилі

Електромагнітною хвилею називають процес поширення електромагнітних коливань.

Основною відмінною властивістю електромагнітних хвиль від пружних є те, що електромагнітні хвилі можуть поширюватись не тільки в середовищі, а й у вакуумі. Що ж здійснює коливання в електромагнітній хвилі? Коливання здійснюють вектори напруженості електричного $\vec{E}$ і магнітного $\vec{H}$ полів. Можна сказати ще й так:

Електромагнітна хвиля – це процес поширення в просторі змінного в часі електромагнітного поля.

4.5.2.1 Хвильове рівняння

Згадаємо, що будь-які електромагнітні процеси описуються рівняннями Максвелла.

Із визначення електромагнітної хвилі випливає, що мова йде тільки про динамічне електричне і динамічне магнітне поле.

Рівняння Максвелла для динамічних полів мають вигляд:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{d\vec{B}}{dt} = -\mu_0 \mu \frac{d\vec{H}}{dt}; \quad \operatorname{div} \vec{E} = 0; \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{d\vec{D}}{dt} = \epsilon_0 \epsilon \frac{d\vec{E}}{dt}; \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0.\end{aligned}\quad (4.168)$$

Під час запису рівнянь ми використовували припущення про те, що хвиля поширюється в ізотропному середовищі, яке не має сегнетоелектричних і феромагнітних властивостей. Діелектрична і магнітна проникності в цьому випадку є дійсними числами, і зв'язок векторів індукції і напруженості полів досить простий:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E} \quad \text{і} \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}. \quad (4.169)$$

Це припущення дозволило залишити в рівняннях Максвелла тільки напруженості електричного і магнітного полів, тобто $\vec{E}$ і $\vec{H}$.

Для спрощення подальших викладок і для прояснення фізичної картини сформулюємо деякі припущення.

1. Будемо розглядати одновимірну, плоску хвилю, яка поширюється в додатному напрямі осі y . У цьому разі плоска хвильова поверхня буде паралельною площині $x - z$ і величини векторів $\vec{E}$ і $\vec{H}$ в усіх точках цієї поверхні будуть однаковими. Це припущення приводить до того, що всі частинні похідні від векторів $\vec{E}$ і $\vec{H}$ за осями x і z дорівнюватимуть нулю.

2. Припустимо, що вектор напруженості електричного поля здійснює коливання тільки по осі z :

$$E_x = 0, \quad E_y = 0, \quad E_z = E. \quad (4.170)$$

З таких припущень викристалізувався дуже важливий висновок:

В електромагнітній хвилі вектори напруженості електричного і магнітного полів здійснюють коливання у взаємно перпендикулярних площинах.

Це можна побачити на рис. 4.30. Цей висновок ми одержали безпосередньо з рівнянь Максвелла.

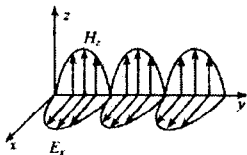


Рис. 4.30

Зауважимо, що це правильно не тільки для плоскої електромагнітної хвилі, а й для хвиль з довільною формою хвильової поверхні.

Тепер можна записати такі рівняння:

$$\frac{\partial E}{\partial y} = -\mu_0 \mu \frac{\partial H}{\partial t}, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = -\epsilon_0 \epsilon \frac{\partial E}{\partial t}. \quad (4.171)$$

Виключимо з цих рівнянь H . Для цього продиференціюємо друге рівняння за часом:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H}{\partial t} \right) = -\epsilon_0 \epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}. \quad (4.172)$$

З першого рівняння виразимо похідну від H за часом:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0 \mu} \frac{\partial E}{\partial y} \quad (4.173)$$

і тоді

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H}{\partial t} \right) = -\frac{1}{\mu_0 \mu} \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = -\epsilon_0 \epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2},$$

або

$$\frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = (\mu_0 \epsilon_0 \mu \epsilon) \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}. \quad (4.174)$$

Це є **хвильове рівняння для вектора напруженості електричного поля**. Порівняємо його з хвильовим рівнянням для плоскої пружної хвилі

$$\frac{\partial^2 s}{\partial y^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

і виявимо, що ці рівняння повністю збігаються. Фазова швидкість буде дорівнювати

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \mu \epsilon}}. \quad (4.175)$$

Для вакууму $\mu = 1$ і $\epsilon = 1$, Отже, фазова швидкість у вакуумі

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c \quad (4.176)$$

дорівнює **швидкості світла у вакуумі**. А швидкість у середовищі

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu \epsilon}}. \quad (4.177)$$

Якщо з рівнянь Максвелла виключити вектор електричної напруженості,

то дістанемо хвильове рівняння для вектора магнітної напруженості:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}. \quad (4.178)$$

Тепер фазова швидкість

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \mu \epsilon}}. \quad (4.179)$$

4.5.2.2 Характеристики електромагнітних хвиль

Розв'язки хвильових рівнянь для довільної плоскої електромагнітної хвилі мають вигляд

$$E = E_m \cos[\omega t - (\vec{k} \cdot \vec{r})] \quad \text{і} \quad H = H_m \cos[\omega t - (\vec{k} \cdot \vec{r})]. \quad (4.180)$$

У правильності наведених розв'язків можна впевнитись простою підстановкою. Ці розв'язки, звичайно, збігаються за формою з розв'язком хвильового рівняння для пружних хвиль, і їхні характеристики мають ті самі значення:

$E_m = A$ і $H_m = A$ – амплітуди електричної і магнітної складової електромагнітної хвилі;

ω – циклічна частота джерела хвилі;

k – хвильовий вектор;

$|k| = 2\pi/\lambda$ – хвильове число;

λ – довжина хвилі;

v – фазова швидкість.

Як і для пружних хвиль, фазова швидкість залежить від властивостей середовища, а саме від електричної ϵ і магнітної μ проникності. Ці властивості характеризують реакцію середовища на електричні і магнітні поля.

Напрямок поширення хвилі в даній точці визначається, як і раніше, напрямом хвильового вектора $\vec{k}$. Він перпендикулярний до хвильової поверхні в даній точці. У цьому самому напрямі поширюється енергія.

4.5.2.3 Енергія електромагнітної хвилі

Нехай електромагнітна хвиля поширюється у вакуумі. Тоді швидкість її дорівнює c . Густина енергії електромагнітного поля складається із густини енергії електричного і магнітного полів:

$$\Omega = \Omega_E + \Omega_H = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2}. \quad (4.181)$$

Для вакууму $\epsilon = \mu = 1$, $E\sqrt{\epsilon_0} = H\sqrt{\mu_0} = 1$, тоді $\Omega_E = \Omega_H$. Враховуючи ці рівності, дістаємо

$$\Omega = 1/c \cdot EH. \quad (4.182)$$

Модуль вектора густини потоку енергії можна дістати, якщо густину енергії

помножити на швидкість хвиль у вакуумі:

$$S = \Omega \cdot c = E \cdot H. \quad (4.183)$$

Вектор густини потоку енергії визначається за формулою:

$$\vec{S} = \{ \vec{E} \cdot \vec{H} \}. \quad (4.184)$$

Оскільки вектор $\vec{E}$ перпендикулярний до вектора $\vec{H}$ і вони утворюють правогвинтову систему, напрям вектора $\vec{S}$ збігається з напрямком перенесення енергії. Вектор $\vec{S}$ називається **вектором Пойнтінга**.

Інтенсивність електромагнітної хвилі I – це величина, яка чисельно дорівнює енергії, що її переносить хвиля за одиницю часу через одиницю площини поверхні, перпендикулярної до напрямку поширення хвилі. Інтенсивність хвилі в даній точці визначається як модуль середнього за часом значення густини потоку енергії $\langle S \rangle$:

$$I = \langle \vec{S} \rangle = \langle \{ \vec{E} \vec{H} \} \rangle, \quad (4.185)$$

або у вакуумі

$$I = \frac{1}{2} E_0 H_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2. \quad (4.186)$$

Інтенсивність хвилі прямо пропорційна до квадрата амплітуди електромагнітної хвилі: $I \approx E_0^2$. Відомо, що групова швидкість хвилі — це швидкість, з якою рухається максимум амплітуди пакета хвиль. Отже, **швидкість перенесення енергії** хвилею дорівнює **груповій швидкості**.

4.5.3 Необхідно зрозуміти, запам'ятати і вміти

1. Хвилі (загальне визначення та основні властивості).
2. Рівняння хвилі (виведення).
3. Хвильове рівняння (виведення).
4. Швидкість поширення хвилі у пружному середовищі (виведення).
5. Поняття про фазову та групову швидкості.
6. Звукові хвилі. Ефект Доплера.
7. Енергія пружної хвилі (виведення).
8. Вектор Умова.
9. Плоска електромагнітна хвиля (виведення).

Вектор Пойнтінга для електромагнітної хвилі

4.6 ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ

4.6.1 Приклади розв'язування задач

Задача 1. Точка здійснює гармонічні коливання з частотою 10 Гц. У початковий момент часу точка мала максимальне зміщення 1 мм. Записати рівняння коливань точки та накреслити графік залежності зміщення точки від часу.

Дано:

$$\nu = 10 \text{ Гц}$$

$$x_{\max} = 1 \text{ мм}$$

$$x(t) = ?$$

Розв'язання

Рівняння коливань точки запишемо у вигляді:

$$x = A \sin(\omega t - \varphi_0),$$

де A — амплітуда коливань; ω — циклічна частота; t — час; φ — початкова фаза.

За визначенням, амплітуда коливань

$$A = x_{\max}.$$

Циклічна частота ω пов'язана з частотою ν співвідношенням

$$\omega = 2\pi\nu.$$

Для моменту часу $t = 0$ рівняння коливань набирає вигляду $x_{\max} = A \sin \varphi$, звідки початкова фаза

$$\varphi = \arcsin \frac{x_{\max}}{A} = \arcsin 1$$

або

$$\varphi_1 = (2k + 1) \frac{\pi}{2} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Зміна фази на 2π не змінює стану точки, тому можна взяти

$$\varphi_1 = \pi/2.$$

Рівняння коливань набирає вигляду

$$x = A \sin(2\pi\nu t + \varphi), \text{ або } x = A \cos 2\pi\nu t.$$

де $A = 1 \text{ мм} = 10^{-3} \text{ м}$; $\nu = 10 \text{ Гц}$; $\varphi = \pi/2$.

Графік відповідного гармонічного коливання зображено на рис. 4.31.

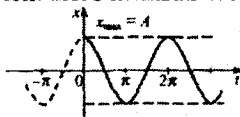


Рис. 4.31.

Задача 2. Тіло масою 0,01 кг здійснює гармонічні коливання з періодом 2 с. Повна енергія

точки 0,1 мДж. Визначити амплітуду A коливань і найбільше значення сили F_m , що діє на точку.

Розв'язання

Для визначення амплітуди коливань скористаємося виразом повної енергії точки:

$$W = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2,$$

Дано:

$$m = 0,01 \text{ кг}$$

$$T = 2 \text{ с}$$

$$W = 10^{-4} \text{ Дж}$$

$$A = ?$$

$$F_m = ?$$

$$\text{де } \omega = 2\pi/T$$

Тоді

$$W = \frac{m 2\pi^2 A^2}{T^2}.$$

Звідси амплітуда

$$A = \frac{T}{\pi} \sqrt{\frac{W}{2m}}.$$

Оскільки точка здійснює гармонічні коливання, то сила, що діє на неї, є квазіпружною і визначається за формулою

$$F = -kx,$$

де k – коефіцієнт квазіпружної сили; x – зміщення точки.

Максимальною сила буде при максимальному зміщенні $x_{\max}$:

$$F_{\max} = kA.$$

Коефіцієнт k виражаємо через період коливань:

$$k = m\omega^2 = m4\pi^2/T^2.$$

Підставивши вирази для A і k у формулу для $F_{\max}$ та виконавши спрощення, дістанемо

$$F_{\max} = 2\pi\sqrt{2mW}/T.$$

Перевіримо одиниці вимірювання:

$$[A] = c \sqrt{\frac{J \cdot k}{K}} = c \sqrt{\frac{K \cdot m^2}{c^2 \cdot K}} = m;$$

$$[F_{\max}] = \frac{\sqrt{K} \cdot J \cdot k}{c} = \frac{\sqrt{K} \cdot \frac{K \cdot m^2}{c^2}}{c} = \frac{K \cdot m}{c^2} = N.$$

Виконуємо обчислення:

$$A = \frac{2}{2 \cdot 3,14} \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-4}}{10^{-3}}} = 0,045 \text{ м};$$

$$F_{\max} = \frac{2 \cdot 3,14}{2} \sqrt{2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-4}} = 4,44 \cdot 10^{-3} \text{ Н} = 4,44 \text{ мН}.$$

Задача 3. Додаються два коливання однакового напрямку, задані рівняннями:

$$x_1 = A_1 \cos \frac{2\pi}{T}(t + \tau_1); \quad x_2 = A_2 \cos \frac{2\pi}{T}(t + \tau_2),$$

$$\text{де } A_1 = 3 \text{ см}; \quad A_2 = 2 \text{ см}; \quad \tau_1 = 1/6 \text{ с}; \quad \tau_2 = 1/3 \text{ с}; \quad T = 2 \text{ с}.$$

Побудувати векторну діаграму додавання цих коливань і записати рівняння результуючого коливання.

Розв'язання

Для побудови векторної діаграми додавання двох коливань одного напрямку треба зафіксувати якийсь момент часу. Зазвичай векторну діаграму будують для моменту часу $t = 0$. Звівши обидва рівняння до вигляду

$$x = A \cos(\omega t + \varphi),$$

дістанемо

$$x_1 = A_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{2\pi}{T}\tau_1\right); \quad x_2 = A_2 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{2\pi}{T}\tau_2\right).$$

Звідси бачимо, що обидва гармонічні коливання, що додаються, мають однакову циклічну частоту

$$\omega = 2\pi/T.$$

Початкові фази першого і другого коливань відповідно дорівнюють

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{T}\tau_1; \quad \varphi_2 = \frac{2\pi}{T}\tau_2.$$

Виконуємо обчислення:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} \text{ c}^{-1} = 3,14 \text{ c}^{-1};$$

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{2} \cdot \frac{1}{6} = 30^\circ; \varphi_2 = \frac{2\pi}{2} \cdot \frac{1}{3} = 60^\circ.$$

Зобразимо вектори $\vec{A}_1$ і $\vec{A}_2$. Для цього відкладемо відрізки завдовжки $A_1 = 3$ см і $A_2 = 2$ см під кутами $\varphi = 30^\circ$ і $\varphi_2 = 60^\circ$ до осі Ox .

Результуюче коливання відбуватиметься з тією самою частотою та амплітудою $\vec{A}$, яка дорівнює геометричній сумі амплітуд $\vec{A}_1$ і $\vec{A}_2$: $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$.

Відповідно до теореми косинусів

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

Початкову фазу результуючого коливання можна також визначити безпосередньо з векторної діаграми (рис. 4.32). Виконуємо обчислення:

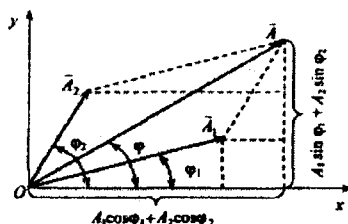


Рис. 4.32

$$A = \sqrt{3^2 + 2^2 + 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cos(60^\circ - 30^\circ)} = 4,84 \text{ см};$$

$$\varphi = \arctg \frac{3\sin 30^\circ + 2\sin 60^\circ}{3\cos 30^\circ + 2\cos 60^\circ} = \arctg 0,898 = 42^\circ.$$

Оскільки результуюче коливання є гармонічним, має ту саму частоту, що й коливання, які додаються, то його можна записати у вигляді

$$x = A \cos(\omega t + \varphi),$$

$$\text{де } A = 4,84 \text{ см}, \omega = 3,14 \text{ c}^{-1}, \varphi = 0,735 \text{ рад.}$$

Задача 4. Математичний маятник завдовжки 24,7 см здійснює загасаючі коливання.

Логарифмічний декремент загасання дорівнює 0,01.

Через який час енергія коливань зменшиться в 9,4 рази?

Розв'язання

Енергія загасаючих коливань маятника

$$W = W_0 e^{-\beta t},$$

де β — коефіцієнт загасання.

$$\text{Звідси } e^{\beta t} = W_0/W$$

Логарифмуючи цей вираз, дістаємо

$$\beta t = \ln \frac{W_0}{W}, \text{ звідки } t = \frac{\ln(W_0/W)}{\beta}$$

Логарифмічний декремент

$$\lambda = \beta T,$$

де T — період коливань математичного маятника.

Для малих загасань $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, звідки $\beta = \frac{\lambda\sqrt{g}}{2\pi\sqrt{l}}$.

Підставляючи β у формулу для визначення часу t , дістаємо

$$t = \frac{\ln(W_0/W) \cdot 2\pi\sqrt{l}}{\lambda\sqrt{g}}.$$

Перевіряємо одиницю вимірювання:

$$[t] = \frac{\sqrt{m} \cdot c}{\sqrt{m}} = c.$$

Виконуємо обчислення:

$$t = \frac{\ln 9,4 \cdot 2\pi\sqrt{0,247}}{0,01 \cdot \sqrt{9,8}} = 223,5 \text{ с.}$$

Задача 5. Коливальний контур складається з конденсатора ємністю 0,2 мкФ і котушки індуктивністю

5,07 мГн. При якому логарифмічному декременті загасання різниця потенціалів на обкладках

конденсатора за 1 мс зменшиться втричі?

$$\begin{aligned} C &= 2 \cdot 10^{-7} \text{ Ф} \\ L &= 5,07 \cdot 10^{-3} \text{ Гн} \\ \Delta t &= 0,001 \text{ с} \\ U(t)/U(t+\Delta t) &= 3 \end{aligned}$$

$$\lambda = ?$$

Розв'язання

Електромагнітні коливання в контурі — загасаючі. Напруга на обкладках конденсатора змінюється за законом

$$U = U_0 e^{-\beta t},$$

де β — коефіцієнт загасання, пов'язаний з логарифмічним декрементом загасання

співвідношенням $\lambda = \beta T$.

Тоді

$$\beta = \frac{\lambda}{T}$$

$$U(t + \Delta t) = U(t) e^{-\frac{\lambda}{T} \Delta t}.$$

Звідси

$$\frac{U(t)}{U(t + \Delta t)} = e^{\frac{\lambda}{T} \Delta t}.$$

Логарифмуємо здобутий вираз:

$$\ln \frac{U(t)}{U(t + \Delta t)} = \frac{\lambda}{T} \Delta t.$$

Звідси

$$\lambda = \ln \frac{U(t)}{U(t + \Delta t)} \frac{T}{\Delta t},$$

де T — період загасаючих коливань;

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Вважаючи загасання в контурі малим ($\beta^2 \ll \omega_0^2$), знаходимо

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Підставивши T у формулу для λ , остаточно дістанемо

$$\lambda = \ln \frac{U(t)}{U(t + \Delta t)} \cdot \frac{2\pi\sqrt{LC}}{\Delta t}.$$

Перевіримо одиницю вимірювання:

$$[\lambda] = \frac{\sqrt{\text{Гн} \cdot \Phi}}{\Delta t} = \sqrt{\frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{А} \cdot \text{В} \cdot \text{с}}} \cdot \frac{1}{\text{с}} = \frac{\sqrt{\text{с}^2}}{\text{с}} = 1.$$

Виконуємо обчислення:

$$\lambda = \frac{\ln 3 \cdot 2\pi \sqrt{5,07 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-4}}}{10^{-3}} = 0,22 \text{ м}.$$

Задача 6. Активний опір та індуктивність з'єднані послідовно та ввімкнені в мережу з

амплітудною напругою 220 В і частотою 50 Гц. Різниця фаз між напругою і струмом

становить 60° . Коло споживає потужність 400 Вт. Знайти

активний опір та

індуктивність.

$$U_m = 220 \text{ В}$$

$$\nu = 50 \text{ Гц}$$

$$\varphi = 60^\circ$$

$$P = 400 \text{ Вт}$$

$$R = ?$$

$$L = ?$$

Розв'язання

Потужність кола змінного струму визначається за формулою

$$P = I_a U_a \cos \varphi,$$

де I_a і U_a — дійові значення сили струму і напруги;

φ — різниця фаз між струмом і напругою.

Дійові значення зв'язані з амплітудними значеннями:

$$I_a = \frac{I_m}{\sqrt{2}}; U_a = \frac{U_m}{\sqrt{2}}.$$

Використовуємо закон Ома для кола змінного струму

$$I_a = \frac{U_a}{Z}.$$

де $Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ — повний опір кола.

Перетворюємо формулу для потужності, підставляючи в неї відповідні значення величин:

$$P = \frac{U_a^2}{2\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cdot \cos \varphi.$$

Знаходимо зв'язок R і ωL , користуючись векторною діаграмою струму і напруги (рис. 4.33). Як видно

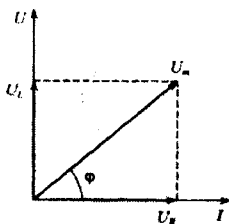


Рис. 4.33

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_L}{U_R} = \frac{\omega L}{R},$$

звідки

$$\omega L = R \operatorname{tg} \varphi.$$

Підставивши вираз ωL у формулу потужності, дістанемо

$$P = \frac{U_m^2 \cos \varphi}{2\sqrt{R^2(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)}}.$$

Звідси активний опір

$$R = \frac{U_m^2 \cdot \cos \varphi}{2P\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}},$$

а індуктивний опір кола

$$L = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\omega} R = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{2\pi\nu} R.$$

Перевіримо одиниці вимірювання:

$$[R] = \frac{\text{В}^2}{\text{Вт}} = \frac{\text{В}^2}{\text{В} \cdot \text{А}} = \frac{\text{В}}{\text{А}} = \text{Ом};$$

$$[L] = \text{Ом} \cdot \text{с} = \text{Гн}.$$

Виконуємо обчислення:

$$R = \frac{220^2 \cdot 0,5}{2 \cdot 400 \sqrt{1 + (1,73)^2}} = 15,125 \text{ Ом};$$

$$L = \frac{1,73 \cdot 15,125}{2\pi \cdot 50} = 0,083 \text{ Гн}.$$

Задача 7. Котушку з індуктивністю $3 \cdot 10^{-5}$ Гн приєднано до плоского конденсатора з площею

пластин $0,01 \text{ м}^2$ та відстанню між ними 1 мм. Знайти діелектричну проникність

середовища, що заповнює простір між пластинами, якщо контур настроєний на

довжину хвилі 750 м.

Розв'язання

Контур настроєно на прийом електромагнітної хвилі, тому період вільних коливань у коливальному контурі дорівнює періоду коливань вектора напруженості

$$\begin{aligned} L &= 3 \cdot 10^{-5} \text{ Гн} \\ S &= 10^{-2} \text{ м}^2 \\ d &= 10^{-3} \text{ м} \\ \lambda &= 750 \text{ м} \end{aligned}$$

електромагнітної хвилі.

З одного боку, $T = 2\pi\sqrt{LC}$, з другого – $T = \lambda/c$, де $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – швидкість поширення електромагнітної хвилі у вакуумі. Ємність плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d},$$

тоді

$$\frac{\lambda}{c} = 2\pi\sqrt{L \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d}}, \text{ звідки } \varepsilon = \frac{\lambda^2 d}{c^2 4\pi L \varepsilon_0 S}.$$

Перевіряємо одиницю вимірювання:

$$[\varepsilon] = \frac{\frac{\text{м}^2 \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{м}}{\text{м}^2 \cdot \text{Гн} \cdot \text{Ф} \cdot \text{м}^2}}{\frac{\text{А} \cdot \text{В}}{\text{В} \cdot \text{С} \cdot \text{Кл}}} = 1.$$

Виконуємо обчислення:

$$\varepsilon = \frac{750^2 \cdot 10^{-3}}{9 \cdot 10^{16} \cdot 4 \cdot 3,14 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,01} = 187,33.$$

Задача 8. Плоска хвиля з періодом 1,2 с та амплітудою коливань 2 см поширюється зі швидкістю 15 м/с. Чому дорівнює зміщення і швидкість точки, що міститься на відстані 45 м від джерела хвиль, через 4 с. Визначити різницю фаз коливань двох точок, віддалених одна від одної в напрямі поширення хвилі на $\Delta x = 50$ см.

Дано:

$$\begin{aligned} T &= 1,2 \text{ с}; \\ A &= 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \\ x &= 45 \text{ м}; \\ t &= 4 \text{ с}; \\ \Delta x &= 0,5 \text{ м}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s &= ? \text{ в} \\ \Delta \varphi &= ? \end{aligned}$$

Розв'язання

Рівняння плоскої хвилі:

$$s = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right).$$

Визначаємо зміщення, підставляючи числові значення:

$$s = 2 \cos \frac{2\pi}{1,2} \left(4 - \frac{45}{15} \right) = 2 \cos 300^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \text{ см} = 1 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

$$\begin{aligned} T &= 1,2 \text{ с} \\ A &= 2 \cdot 10^{-2} \text{ м} \\ x &= 45 \text{ м} \end{aligned}$$

$$v = \frac{ds}{dt} = -A \omega \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right);$$

$$\begin{aligned} \Delta x &= 0,5 \text{ м} \\ v &= \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 2}{1,2} \sin 300^\circ = 8,95 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}. \end{aligned}$$

Швидкість точки

Оскільки величина $\omega \left(t - \frac{x}{v} \right)$ в

рівнянні хвилі є фазою, то точки, що містяться на відстані Δx , коливаються з різницею фаз

$$\Delta \varphi = \frac{\Delta x \omega}{v} = \frac{\Delta x 2\pi}{vT}.$$

Виконуємо обчислення:

$$\Delta \varphi = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 0,5}{15 \cdot 1,2} = 0,119 \text{ рад}.$$

4.6.2 Задачі для індивідуального розв'язування

4.1 Точка здійснює гармонічні коливання, період коливань 2 с, амплітуда коливань 5 см, початкова фаза дорівнює 0. Знайти швидкість точки в момент часу, коли її зміщення від положення рівноваги дорівнює 2,5 см.

4.2 Матеріальна точка масою 5 кг здійснює гармонічні коливання за законом $x = 2\sin(\pi/6 + \pi/6)$ см. Визначити повну енергію коливань, а також потенціальну та кінетичну енергію через дві секунди після початку коливань.

4.3 Матеріальна точка здійснює гармонічні коливання за законом $x = 6\cos(\pi + \pi/3)$ см. Через який час від початку руху зміщення точки вперше досягне значення 3 см?

4.4 Матеріальна точка здійснює коливання за законом $x = 5\sin 2t$ см. Визначити прискорення точки в момент часу, коли її швидкість дорівнює 8 см/с.

4.5. Початкове зміщення точки, що здійснює гармонічні коливання, дорівнює 2 см, період коливань 4 с, максимальне прискорення 5 см/с². Визначити початкову фазу коливань.

4.6. Точка здійснює гармонічні коливання за законом синуса. Амплітуда коливань 4 см, повна енергія коливань $2 \cdot 10^{-6}$ Дж. При якому зміщенні від положення рівноваги на точку діє сила $1,5 \cdot 10^{-5}$ Н?

4.7. Сила струму в коливальному контурі змінюється з часом за законом $I = 9\sin(\pi \cdot 10^3 t)$ А. Ємність контура 0,5 мкФ. Знайти індуктивність контура й амплітудне значення напруги на конденсаторі.

4.8. Напруга на обкладках конденсатора в коливальному контурі змінюється з часом за законом $U = 50\cos(\pi \cdot 10^4 t)$ В. Ємність конденсатора 0,1 мкФ. Знайти період коливань, індуктивність контура й амплітудне значення сили струму.

4.9. Рівняння зміни з часом сили струму в коливальному контурі має вигляд $I = 0,02\sin(400\pi t)$ А.

Індуктивність контура 1 Гн. Знайти період коливань, ємність контура, максимальну енергію електричного поля.

4.10. Коливальний контур складається з конденсатора ємністю 25 нФ та котушки індуктивністю

1 Гн. Максимальний заряд на обкладках конденсатора 2,5 мкКл. Записати рівняння з числовими коефіцієнтами для зміни з часом різниці потенціалів на обкладках конденсатора і сили струму в контурі.

4.11. Рух точки задано рівняннями $x = 10 \sin 2t$ см, $y = 5 \sin(2t + 1,57)$ см. Визначити рівняння траєкторії та швидкість точки в момент часу 0,5 с після початку руху.

4.12. Точка бере участь одночасно у двох взаємно перпендикулярних коливаннях: $x = 0,5\sin t$ см;
 $y = 2\cos t$ см. Знайти рівняння траєкторії точки, побудувати її та зазначити напрям руху.

4.13. Точка бере участь одночасно в двох коливаннях однакового періоду з однаковими початковими фазами. Амплітуди цих коливань дорівнюють 3 і 4 см. Знайти амплітуду результуючого коливання, якщо: а) коливання відбуваються в

одному напрямі; б) коливання відбуваються у взаємно перпендикулярних напрямках.

4.14. Додаються два гармонічні коливання одного напрямку з однаковим періодом та однаковою амплітудою 2 см. Початкові фази коливань дорівнюють $\pi/3$ і $\pi/2$. Визначити амплітуду та початкову фазу результуючого коливання. Побудувати векторну діаграму додавання коливань.

4.15. Додаються два коливання однакового напрямку й однакового періоду:

$$x_1 = \cos \pi \text{ см},$$

$x_2 = \cos \pi(t + 0,5) \text{ см}$. Записати рівняння результуючого коливання, визначивши його амплітуду та початкову фазу. Побудувати векторну діаграму додавання амплітуд.

4.16. Додаються два гармонічні коливання одного напрямку з однаковим періодом коливань 1,5 с. Амплітуди коливань, що додаються, дорівнюють відповідно 2 і 4 см, а початкові фази $-\frac{\pi}{2}$ і $\frac{\pi}{3}$.

Записати рівняння результуючого коливання, визначивши його амплітуду та початкову фазу. Побудувати векторну діаграму додавання амплітуд.

4.17. Точка здійснює одночасно два гармонічні коливання, що відбуваються у взаємно перпендикулярних напрямках відповідно до рівнянь $x = 8 \cos \pi \text{ см}$, $y = 8 \cos \pi(t+1) \text{ см}$. Знайти рівняння траєкторії точки та побудувати її на графіку.

4.18. Точка бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях $x = \sin \pi \text{ см}$, $y = 4 \sin(\pi + \pi) \text{ см}$. Знайти траєкторію результуючого руху точки та накреслити її з нанесенням масштабу.

4. 19. Точка бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях $x = \sin \pi \text{ см}$, $y = 2 \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) \text{ см}$. Знайти траєкторію результуючого руху точки та накреслити її з нанесенням масштабу.

4.20. Точка одночасно бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях $x = 3 \sin \omega t \text{ см}$ та

$y = 3 \cos \omega t \text{ см}$. Знайти траєкторію руху точки і побудувати її з дотриманням масштабу.

4.21. Початкова амплітуда загасаючих коливань математичного маятника 20 см. Після 10 коливань амплітуда дорівнює 15 см. Визначити логарифмічний декремент загасання.

4.22. Маятник здійснює загасаючі коливання, логарифмічний декремент яких 0,055. Скільки коливань має зробити маятник, щоб амплітуда його коливань зменшилася втричі?

4.23. Амплітуда загасаючих коливань за 1 хв зменшилася вдвічі. У скільки разів зменшиться амплітуда за 3 хв?

4.24. Амплітуда загасаючих коливань за 4 хв зменшилася в 5 раз. За який час амплітуда коливань зменшиться в 15 раз?

4.25. Коливальний контур складається з конденсатора ємністю 405 нФ, котушки з індуктивністю 10 мГн і активного опору 2 Ом. Вважаючи загасання

коливань малим, знайти, у скільки разів зменшиться різниця потенціалів на обкладках конденсатора за один період.

4.26. Коливальний контур має ємність $1,1 \text{ нФ}$ та індуктивність 5 мГн . Логарифмічний декремент дорівнює $0,005$. За який час внаслідок загасання втратиться 99% енергії контура?

4.27. Ємність конденсатора коливального контура дорівнює 2 мкФ , а індуктивність — 5 мГн . За 10 с різниця потенціалів на обкладках конденсатора зменшилася вдвічі. Вважаючи загасання коливань малим, визначити логарифмічний декремент загасання й активний опір контура.

4.28. Активний опір коливального контура $0,33 \text{ Ом}$. Яку потужність споживає контур, коли в ньому підтримуються незгасаючі коливання з амплітудою сили струму 30 мА ?

4.29. Параметри коливального контура мають значення: ємність 1000 пФ ; індуктивність $6 \cdot 10^{-6} \text{ Гн}$; активний опір $0,5 \text{ Ом}$. Яку потужність має споживати контур, щоб електромагнітні коливання в ньому були незгасаючими з амплітудою напруги на конденсаторі 10 В ?

4.30. Індуктивність $2,3 \cdot 10^{-2} \text{ Гн}$ та активний опір увімкнено послідовно в коло змінного струму частотою 50 Гц . Визначити активний опір, якщо різниця фаз між струмом та напругою дорівнює 60° .

4.31. Котушку завдовжки 50 см із площею поперечного перерізу 10 см^2 увімкнено в коло змінного струму частотою 50 Гц . Кількість витків котушки дорівнює 3000 . Різниця фаз між струмом та напругою становить 30° . Знайти активний опір котушки.

4.32. Котушку індуктивністю $2,26 \cdot 10^{-2} \text{ Гн}$ та активний опір увімкнено послідовно в коло змінного струму частотою 50 Гц . Знайти активний опір, коли відомо, що різниця фаз між напругою та струмом дорівнює 60° .

4.33. Котушку завдовжки 50 см із площею поперечного перерізу 10 см^2 увімкнено в коло змінного струму частотою 50 Гц . Кількість витків котушки дорівнює 3000 . Знайти активний опір котушки, коли відомо, що різниця фаз між напругою та струмом дорівнює 60° .

4.34. У коло змінного струму напругою 220 В та частотою 50 Гц увімкнено послідовно ємність $35,4 \text{ мкФ}$, активний опір 100 Ом та індуктивність $0,7 \text{ Гн}$. Визначити силу струму в колі та спад напруги на ємності, активному опорі й індуктивності.

4.35. Конденсатор ємністю 1 мкФ та резистор опором 3 кОм увімкнено послідовно в коло змінного струму частотою 50 Гц . Знайти повний опір кола.

4.36. Котушку з активним опором 10 Ом увімкнено в коло змінного струму з максимальною напругою 127 В та частотою 50 Гц . Котушка споживає потужність 400 Вт . Знайти індуктивність котушки, якщо різниця фаз між напругою та струмом 60° .

4.37. Конденсатор та електричну лампочку з'єднано послідовно та увімкнено в коло змінного струму напругою 220 В і частотою 50 Гц . Через лампочку протікає струм $0,5 \text{ А}$, спад напруги на ній дорівнює 110 В . Визначити ємність конденсатора.

4.38. Конденсатор ємністю 20 мкФ та резистор опором 150 Ом увімкнено

послідовно в коло змінного струму частотою 50 Гц. Яку частину напруги, прикладеної до цього кола, становлять спад напруги на конденсаторі та на резисторі?

4.39. Котушка завдовжки 50 см та діаметром 5 см містить 500 витків мідного дроту, площа поперечного перерізу якого 1 мм^2 . Визначити частоту змінного струму, при якій повний опір котушки вдвічі більший від її активного опору.

4.40. Котушка завдовжки 25 см із радіусом 2 см має обмотку з 1000 витків мідного дроту, площа поперечного перерізу якого 1 мм^2 . Котушку ввімкнено в коло змінного струму частотою 50 Гц. Яку частину повного опору котушки становить активний опір; індуктивний опір?

4.41. Плоске джерело коливань здійснює коливання за законом $s = 5 \cdot \sin 3140t$ мм. Швидкість поширення коливань дорівнює 340 м/с. Визначити зміщення від положення рівноваги та швидкість частинок середовища, що містяться на відстані 170 м від джерела коливань, через 2 с після початку коливань джерела.

4.42. Хвиля поширюється у пружному середовищі зі швидкістю 300 м/с. Найменша відстань між точками, фази коливань яких протилежні, дорівнює 1 м. Визначити частоту коливань та довжину хвилі.

4.43. Визначити різницю фаз між коливаннями двох точок середовища, що містяться на відстані 10 см одна від одної, якщо в середовищі поширюється плоска хвиля вздовж лінії, що сполучає ці точки. Швидкість поширення хвилі 340 м/с, частота коливань 1000 Гц.

4.44. В однорідному середовищі" поширюється пружна хвиля, рівняння якої має вигляд $S = A \exp(-\gamma x) \cos(\omega t - kx)$. Знайти різницю фаз коливань у точках, де відношення амплітуд зміщення частинок середовища дорівнює 1,01, якщо довжина хвилі 1 м і $\gamma = 0,1 \text{ м}^{-1}$.

4.45. Плоска хвиля поширюється уздовж прямої зі швидкістю 20 м/с. Різниця фаз коливань двох точок, що містяться на цій прямій на відстанях $x_1 = 12 \text{ м}$, $x_2 = 15 \text{ м}$ від джерела хвиль, дорівнює $\Delta\varphi = 0,7571$. Визначити довжину хвилі, записати рівняння хвилі. Обчислити зміщення точок через 1,2 с після початку коливань, якщо амплітуда коливань $0,1 \text{ м}$.

4.46. Мідний стрижень завдовжки 0,5 м закріплений усередині. Визначити кількість поздовжніх коливань стрижня в діапазоні частот від 10 до 30 КГц.

4.47. Напруженість електричного поля між обкладками відкритого коливального контура, що є джерелом плоскої електромагнітної хвилі, змінюється за законом $E = 200 \cos 10^8 t$, В/м. Визначити напруженість електричного поля в точках, що віддалені від джерела коливань на 30 км, через 0,3 с після початку коливань.

4.48. Плоска звукова хвиля із частотою коливань 500 Гц і амплітудою коливань 0,3 мм поширюється в повітрі. Довжина хвилі 70 см. Визначити швидкість поширення коливань та максимальну швидкість частинок повітря.

4.49. Зміщення від положення рівноваги точки, що міститься від плоского джерела коливань на відстані 4 см, у момент часу $1/6$ періоду коливань дорівнює

половині амплітуди. Визначити довжину хвилі. Коливання здійснюються за законом синуса.

4.50. Від джерела коливань уздовж прямої поширюється плоска хвиля з амплітудою коливань 1 см. Визначити зміщення частинок від положення рівноваги в точках, віддалених від джерела на $3/4$ довжини хвилі, у момент часу, коли від початку коливань пройшов час $0,9$ періоду коливань.

4.51. Рівняння механічної хвилі має вигляд $s = 5 \cos(\pi - 2x)$, см. Визначити максимальну швидкість руху частинок середовища, швидкість поширення хвилі в середовищі, максимальну відносну деформацію середовища.

4.52. Відстань між десятою і п'ятнадцятою пучностями стоячої хвилі дорівнює 40 м. Визначити довжину хвилі стоячої хвилі.

4.53. Відстань між дванадцятою пучністю і третім вузлом стоячої хвилі дорівнює 30 м. Визначити довжину хвилі, яка утворює стоячу.

4.54. Довжина механічної хвилі дорівнює 1,2 м. Визначити координату і номер пучності, якщо відстань від неї до п'ятого вузла дорівнює 20,4 м.

4.55. Визначити відстань між дванадцятою і двадцятою пучностями, якщо довжина хвилі стоячої хвилі дорівнює 0,3 м.

4.56. Джерело і приймач звуку віддаляються один від одного з однаковою швидкістю — 50 км/год. У скільки разів зміниться частота звуку, яку реєструє приймач, якщо швидкість поширення звуку в повітрі 340 м/с.

4.57. Джерело і приймач звуку рухаються назустріч один одному з однаковою швидкістю — 150 км/год. У скільки разів зміниться частота звуку, яку реєструє приймач, якщо швидкість поширення звуку в повітрі 340 м/с.

4.58. Джерело і приймач звуку рухаються з однаковою швидкістю. Визначити цю швидкість, якщо частота звуку, яку реєструє приймач, змінилася у $9/8$ разу. Швидкість поширення звуку в повітрі 340 м/с.

4.59. Джерело і приймач звуку рухаються з однаковою швидкістю. Визначити цю швидкість, якщо частота звуку, яку реєструє приймач, змінилася у $4/5$ разу. Швидкість поширення звуку в повітрі 340 м/с.

4.60. Визначити залежність між груповою і фазовою швидкостями для закону дисперсії $v = \frac{b}{\omega^2}$, де b — стала.

4.61. Визначити групову швидкість, якщо фазова швидкість дорівнює $v = b\sqrt{\lambda}$, де b — стала. Якій області дисперсії вона відповідає?

4.62. Визначити фазову швидкість хвилі в середовищі, діелектрична проникність якого дорівнює 6.

4.63. Показник заломлення прозорої речовини дорівнює $n = A + \frac{B}{\lambda^2}$. Визначити фазову і групову швидкості хвилі.

4.6.3 Таблиця варіантів задач для індивідуального розв'язування

Варіант	Номери задач				
1	4.1	4.14	4.29	4.44	4.55
2	4.2	4.21	4.30	4.39	4.56
3	4.3	4.39	4.31	4.46	4.57
4	4.4	4.40	4.32	4.47	4.59
5	4.5	4.41	4.33	4.48	4.62
6	4.6	4.1	4.21	4.28	4.49
7	4.7	4.2	4.22	4.35	4.50
8	4.8	4.13	4.23	4.36	4.58
9	4.9	4.3	4.24	4.37	4.52
10	4.13	4.4	4.25	4.38	4.53

4.7 ВІРТУАЛЬНІ ЛАБОРАТОРНІ РОБОТИ

4.7.1 Лабораторна робота В –15.

Дослідження коливань фізичного маятника та визначення за його допомогою прискорення вільного падіння.

Мета: дослідивши коливання фізичного маятника (стрижня) визначити прискорення вільного падіння.

Прилади і матеріали: Металевий однорідний стрижень довжиною ~1,5 метра і діаметром 15 мм.; опорна призма, що закріплюється в будь-якому місці стрижня уздовж шкали (рівномірної міліметрової лінійки), нанесеної на стрижень по усій довжині; опорний столик для установки опорної призми; секундомір.

Теоретичні відомості

Коливаннями називаються рухи або процеси, для яких характерна певна повторюваність в часі.

Коливання супроводжуються поперемінними перетвореннями енергії одного виду в енергію іншого виду.

Коливання називаються **вільними**, якщо вони здійснюються за рахунок спочатку наданої енергії, без подальшої зовнішньої дії на коливальну систему (систему, що здійснює коливання). Коливання називаються **вимушеними**, якщо вони відбуваються під дією зовнішньої сили, що періодично змінюється.

Гармонійними коливаннями називаються коливання, за яких фізична величина змінюється за законом синуса (або косинуса).

Різні **періодичні процеси** (процеси, що повторюються через рівні проміжки часу) можуть бути представлені у вигляді суми (суперпозиції) декількох гармонійних коливань.

Гармонійне коливання величини s описується рівнянням

$$s = A \cdot \cos(\omega t + \varphi), \quad (15.4)$$

де: A – амплітуда коливання – максимальне значення величини, що коливається; ω – кругова (циклічна) частота; φ – початкова фаза коливання у момент часу $t = 0$; $(\omega t + \varphi)$ – фаза коливання в момент часу t .

Фаза коливання визначає значення коливальної величини в даний момент часу. Оскільки косинус змінюється в межах від +1 до -1, то s може приймати значення від $-A$ до $+A$. Оскільки $\cos(a + 2\pi) = \cos a$, то для гармонійних коливань збільшення (приріст) фази коливання на 2π призводить до того, що всі величини, які характеризують коливання, приймають початкове значення.

Періодом коливань T називається якнайменший проміжок часу, після закінчення якого повторюються стани системи (здійснюється одне повне коливання), що коливається і фаза коливання одержує приріст 2π :

$$\omega(t + T) + \varphi = (\omega t + \varphi) + 2\pi,$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (4.187)$$

Частотою коливань n називається величина обернена до періоду коливань – кількість повних коливань за одиницю часу:

$$n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (4.188)$$

Одиниця частоти – герц (Гц). 1 Гц – частота періодичного процесу, для якого за 1 секунду здійснюється одне повне коливання.

Перша (швидкість) і друга (прискорення) похідні за часом від величини s , що гармонійно коливається, також здійснюють гармонійні коливання з тією ж циклічною частотою:

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi) = A\omega \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}); \quad (4.189)$$

$$\ddot{s} = \frac{d^2s}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi + \pi). \quad (4.190)$$

З останнього рівняння бачимо, що s задовольняє рівняння

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega^2 s = 0 \text{ або } \ddot{s} + \omega^2 s = 0. \quad (4.191)$$

Це рівняння називають **диференціальним рівнянням гармонійних коливань**. Його розв'язок

$$s = A \cdot \cos(\omega t + \varphi). \quad (4.192)$$

Математичним маятником називається ідеалізована система, що складається з підвішеної на невагомій нерозтяжній нитці довжиною l матеріальної точки масою m , що коливається під дією сили тяжіння без тертя.

Добрим наближенням математичного маятника є невелика важка кулька, підвішена на тонкій довгій нитці.

Для малих кутів відхилення α можна вважати: $x \approx l\alpha$.

Повертаюча (рівнодійна $\vec{F} = \vec{P} + \vec{N}$) сила:

$$F = P \sin \alpha \approx mg \alpha = mg \frac{x}{l}. \quad (4.193)$$

Рівняння руху:

$$m\ddot{x} = -F = -mg \frac{x}{l} \text{ або } \ddot{x} + \frac{g}{l} x = 0. \quad (4.194)$$

Отже, рух математичного маятника описується диференціальним рівнянням гармонійних коливань, тобто відбувається згідно із законом $x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ з частотою та періодом, відповідно:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (4.195)$$

Фізичним маятником називається тверде тіло, що здійснює під дією сили тяжіння коливання навколо горизонтальної осі підвісу, що не проходить через центр мас тіла.

Якщо фізичний маятник відхилити від положення рівноваги на деякий кут α , то момент повертаючої сили

$$M = J\varepsilon = J\ddot{\alpha}. \quad (4.196)$$

З іншого боку, для малих кутів

$$M = F_r l = -mgl \sin \alpha \approx -mgl \alpha, \quad (4.197)$$

де J – момент інерції маятника відносно осі, що проходить через точку підвісу O , l – відстань від точки підвісу до центра мас C маятника, $F_r = -mg \sin \alpha$ – повертаюча сила (із знаком мінус, оскільки вона направлена протилежно до напрямку збільшення α).

Відповідно $J\ddot{\alpha} + mgl\alpha = 0$ або

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgl}{J} \alpha = 0. \quad (4.198)$$

Таким чином, для малих кутів відхилення, фізичний маятник здійснює гармонійні коливання $\alpha = \alpha_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ з циклічною частотою і періодом:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}, \quad (4.199)$$

де довжина $L = \frac{J}{ml}$ – називається приведеною довжиною фізичного маятника.

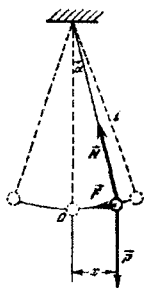
Приведена довжина фізичного маятника – це довжина такого математичного маятника, який має такий самий період коливань, що і даний фізичний маятник.

Точка O' на продовженні прямої OC , що віддалена від осі підвісу на відстань приведеної довжини L , називається центром коливань фізичного маятника.

Математичний маятник можна представити як *частковий* випадок фізичного маятника, вся маса якого зосереджена в його центрі мас. При цьому

$$J = ml^2, \text{ отже } T = 2\pi \sqrt{l/g}.$$

Залежність періоду коливань маятника від прискорення вільного падіння використовують для точних вимірювань прискорення вільного падіння g на поверхні Землі.



Порядок виконання роботи

1. Зсунути за допомогою мишки маятник-стрижень вниз, щоб нижче за опорну призму знаходилась максимальна частина його довжини. При цьому маятник коливається з відповідною довжині частотою. Амплітуда кута відхилення від вертикалі $\leq 4^\circ$.
2. В момент проходження стрижнем вертикального положення клацанням мишкою по секундоміру запустити його і заміряти час 10-ти повних коливань. Для цього повторним клацанням мишки зупинити секундомір. Повне коливання включає відхилення маятника в обидві сторони (вліво і вправо). Отримане значення періоду (третім клацанням мишки по секундоміру) занести в таблицю.
3. Звернути увагу, що відповідна проведеному вимірюванню точка з'явиться у відповідному місці системи координат, по осі абсцис якої відкладена

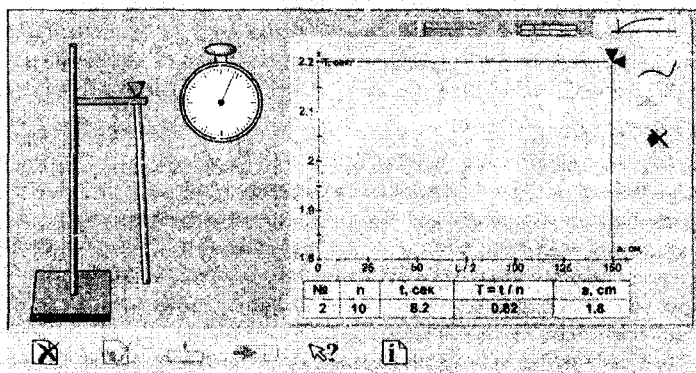
довжина стрижня над опірною призмою, а уздовж осі ординат - значення виміряного періоду коливань.

4. Зсунути стрижень (за допомогою миші вгору) і повторити вимірювання періоду 15 разів (повторюються пункти 1 - 3). Кожне вимірювання занести в таблицю.
5. Стежити за новими точками у вказаній системі координат, щоб вони з'являлися через рівні інтервали. Цьому допомагає те, що у момент переміщення стрижня щодо опірної призми (за допомогою миші) абсциса майбутньої експериментальної точки відображається в цій системі координат.
6. Клацнути мишкою по кнопці "графік". В системі координат через експериментальні точки будується графік залежності періоду коливань маятника від відстані опірної призми від верхньої точки стрижня. Друга, симетрична щодо центру стрижня, частина графіка відповідає коливанням переверненого стрижня-маятника.
7. Виміряти за допомогою побудованого графіка приведену довжину маятника. Вона рівна відстані між спадаючими або зростаючими кривими гілок графіка, виміряній на певному рівні над віссю абсцис. Йому відповідає певне значення періоду T ($T_{\text{мінім.}} < T < T_{\text{максим.}}$). Для проведення цього вимірювання необхідно відповідним чином розташувати щодо гілок графіка додаткову горизонтальну лінію і дві вертикальні лінії. Перетин горизонтальної лінії з віссю ординат дає значення періоду. Відстань між вертикальними лініями, суміщеними з точками перетину горизонтальної лінії з відповідними кривими графіка, дає значення приведеної довжини.
8. По отриманій парі значень періоду і приведеної довжини (T і l) автоматично визначається значення прискорення вільного падіння g . Обчислення проводяться за формулою: $g = 4\pi^2 l / T^2$. Клацанням по таблиці внести в неї отримане значення g .
9. Повторити вимірювання, вказані в пунктах 7 і 8, п'ять разів.
10. Зверніть увагу, що в експерименті виходить наближене значення прискорення вільного падіння g . Воно знаходиться в інтервалі: $g = \langle g \rangle \cdot (1 \pm \varepsilon)$ (м/с^2), який тим менший, чим менша відносна похибка ε . Тут $\langle g \rangle$ - середня величина g , визначена за п'ятьма значеннями. В якості відносної похибки візьміть найбільше серед значень: $\varepsilon_e = \frac{\langle \Delta g \rangle}{\langle g \rangle}$;
 $\varepsilon_r = \frac{\Delta l}{\langle l \rangle} + \frac{2 \cdot \Delta T}{\langle T \rangle}$, де ε_e і ε_r - експериментальне і теоретичне значення відносної похибки. Величина Δl і ΔT рівна похибці вимірювання відповідної величини.

Хід роботи

1. Опірну призму закріпити на кінці маятника на якнайменшій поділіці

- шкали, відстань a занести в таблицю;
2. Привести стрижень в коливання;
 3. За допомогою секундоміра визначити час десяти коливань, обчислити період, значення n , t і $T = t/n$ внести в таблицю;
 4. Дослід повторити 15 разів, для 15-ти значень відстані (a) опорної призми від кінця стрижня (повторюються пункти 1-3);
 5. Виміряти приведену довжину фізичного маятника.
 6. За отриманими даними (внесеними в таблицю) побудувати графік залежності періоду від довжини $a : T(a)$, де $[a] = \text{см}$, $[T] = \text{сек}$;
 7. За формулою $g = 4\pi^2 l / T^2$ визначити значення g , для трьох значень T , і l_i , $i = 1, 2, 3$, визначених з графіка;
 8. За істинне значення прийміть значення $\langle g \rangle = (g_1 + g_2 + g_3) / 3$ ($\text{см} / \text{с}^2$)



Контрольні запитання

1. Що називається коливанням? Вільні коливання? Гармонійні коливання?
2. Дайте визначення амплітуди, фази, періоду, частоти, циклічної частоти коливання.
3. Від чого залежать амплітуда і початкова фаза гармонійних механічних коливань?
4. Дайте визначення фізичного маятника; моменту інерції. Сформулюйте теорему Штейнера.
5. Чому дорівнює період коливань для фізичного маятника? Що називають його приведеною довжиною?

Література

1. Трофимова Т.І. Курс фізики. - М.: Высшая школа, 1998 – 542 з. § 142.
2. Савельєв І.В. Курс общей фізики. Т. 1. - М.: Наука, 1987. - 432 з. §§ 49, 54.

3. Детлаф А.А., Яворський Би.М. Курс фізики. - М.: Вища школа, 2000. - 718 з. § 27.2.
- 4.

Допуск до Лабораторної роботи В -15

1. Що таке момент сили?

Варіанти відповіді: А. Час, на протязі якого на тіло діє сила; Б. Скалярна величина, рівна добутку сили на величину переміщення тіла по колу; В – векторна величина, яка оцінює причину обертового руху тіла і визначається як векторний добуток радіус-вектора від осі обертання до точки прикладання сили на вектор діючої на тіло сили; Г. Лінія, вздовж якої діє сила, що спричинила обертовий рух.

2. Від чого залежить момент інерції тіла?

Варіанти відповіді: А. Від величини переміщення тіла по колу; Б. Від часової тривалості обертового руху тіла; В – від матеріалу, однорідності, форми і розмірів тіла, а також його віддаленості та орієнтації відносно осі обертання; Г. Від кутової швидкості обертання тіла та діючої на нього сили.

3. Якою із наведених формул визначається миттєва потужність тіла, що обертається? 1 – $P = M \cdot \omega$; 2 – $P = M \cdot \varepsilon$; 3 – $P = m \cdot \varepsilon^2/2$; 4 – $P = m \cdot v^2/R$.

Варіанти відповіді: А. 1; Б. 2; В. 3; Г. 4.

4. Які осі обертання називаються головними?

Варіанти відповіді: А. Всі осі, що проходять через центр маси тіла; Б. Осі, відносно яких тіло обертається з постійним кутовим прискоренням; В. Дві взаємно перпендикулярні осі, дотичні до поверхні тіла, що обертається; Г. Три взаємно перпендикулярні осі стійкого обертання, відносно двох з яких момент інерції тіла є максимальний і мінімальний.

5. Яка із наведених формул є динамічним рівнянням обертового руху в імпульсній формі? 1 – $\bar{L} = J \cdot \bar{\omega}$; 2 – $\bar{F} = J \cdot \bar{\omega}$; 3 – $\bar{M} = \frac{d\bar{L}}{dt}$; 4 – $\bar{M} = \frac{d\bar{F}}{dt}$.

Варіанти відповіді: А. 1; Б. 2; В. 3; Г. 4.

6. До нерухомого важеля із віссю обертання у точці О прикладають дві однакові за модулем сили (див. рисунок). Залишиться важіль нерухомим чи буде обертатися?



Варіанти відповіді: А. Важіль нерухомий. Б. Важіль обертається за годинниковою стрілкою. В. Важіль обертається проти годинникової стрілки. Г. Важіль рухається поступально. Д. Серед відповідей А-Г немає правильної.

7. Тіло перебуває в рівновазі, якщо геометрична сума всіх прикладених до нього сил і алгебраїчна сума моментів цих сил відносно осі обертання дорівнюють:

Варіанти відповіді: А. Нулю. Б. Добутку маси тіла на прискорення. В. Імпульсу тіла. Г. Кінетичній енергії тіла. Д. Потенціальній енергії тіла.

4.7.2 Лабораторна робота В -16.

Визначення загасаючих вимушених коливань на прикладі

пружинного маятника.

Мета: ознайомитись із загасаючими та вимушеними коливаннями реальної коливної системи; навчитись визначати її параметри та характеристики: логарифмічний декремент та коефіцієнт загасання, період коливань, власну та резонансну частоти.

Прилади і матеріали: інтерфейс комп'ютерної програми, секундомір, мірна лінійка.

Теоретичні відомості

На реальні коливні системи завжди діють сили опору середовища та сили тертя. На їх подолання коливна система витрачає надану їй енергію. Тому амплітуда коливань з часом буде зменшуватись. Такі коливання називаються **загасаючими**. Через деякий час вони припиняються.

На таку коливну систему, наприклад, пружинний маятник в деякому середовищі, будуть діяти сили пружності $F_{\text{пр}} = -kx$ і опору $F_o = -rv$, де k – коефіцієнт жорсткості пружини, а r – коефіцієнт опору (для малих швидкостей залежність $F_o(v)$ має лінійний характер). Тоді II закон Ньютона матиме вигляд:

$$\ddot{F}_{\text{пр}} + \ddot{F}_o = m\ddot{a}. \quad (4.200)$$

Спроектувавши на напрям руху, отримаємо:

$$-kx - rv = ma. \quad (4.201)$$

Враховуючи, що $v = x'$, $a = x''$, отримаємо **диференціальне рівняння загасаючих коливань**:

$$x'' + \frac{r}{m}x' + \frac{k}{m}x = 0. \quad (4.202)$$

В загальному вигляді диференціальне рівняння загасаючих коливань має вигляд:

$$x'' + 2\beta x' + \omega^2 x = 0, \quad (4.203)$$

а його розв'язок

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega \cdot t + \varphi), \quad (4.204)$$

де

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t} \quad (4.205)$$

– амплітуда загасаючих коливань, $\beta = r/2m$ – коефіцієнт загасання, $\omega = 2\pi/T = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – циклічна частота, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ – власна циклічна частота, φ – початкова фаза.

Швидкість загасання коливань характеризується **логарифмічним декрементом загасання** λ : логарифмом відношення амплітуди коливань в момент часу t до амплітуди коливань в момент часу $(t+T)$.

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \ln e^{\beta T} = \beta T. \quad (4.206)$$

Для більшої точності визначення значення λ порівнюють амплітуди не

через час T , а через NT , тобто через N повних коливань. Якщо амплітуда змінилася в k разів, то

$$\lambda = \frac{\ln k}{N}. \quad (4.207)$$

Тоді значення коефіцієнта загасання

$$\beta = \frac{\lambda}{T} = \frac{\ln k}{NT}, \quad (4.208)$$

а період загасаючих коливань визначається із співвідношення

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}}. \quad (4.209)$$

Зверніть увагу, що: 1) загасаючі коливання лише умовно можна вважати періодичними – внаслідок зменшення амплітуди коливання повторюються не абсолютно гучно; 2) період коливань тіла у в'язкому середовищі більший, ніж період його власних коливань; 3) коли опір середовища великий, коливання не виникають, зміщене тіло повільно повертається у вихідне положення рівноваги.

Добротністю коливної системи Q називається величина

$$Q = \pi/\lambda. \quad (4.210)$$

Враховуючи (16.27), отримаємо:

$$Q = \frac{\pi N}{\ln k}. \quad (4.211)$$

Щоб коливання не загасали, до системи треба підводити енергію ззовні. Найкраще це робити дією зовнішньої періодичної змінної сили

$$F(t) = F_0 \sin \alpha t. \quad (4.212)$$

Таку силу називають **вимушуючою**, а коливання, що виникають під її дією, **вимушеними**.

Згідно з другим законом Ньютона

$$\vec{F} + \vec{F}_{sp} + \vec{F}_{om} = m\vec{a}, \quad (4.213)$$

тоді диференціальне рівняння вимушених коливань матиме вигляд:

$$x'' + \frac{r}{m} x' + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t. \quad (4.214)$$

Розв'язком даного рівняння є

$$x = A(\omega) \sin(\omega t + \alpha), \quad (4.215)$$

де

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}. \quad (16.34)$$

Тобто вимушені коливання є гармонійними (4.215), частота яких дорівнює частоті змушувальної сили. Амплітуда вимушених коливань (рис. 4.34) залежить не тільки від амплітудного значення вимушуючої сили, а й від її частоти (4.216). Для певного значення частоти вимушуючої сили ω_p амплітуда вимушених коливань різко зростає, досягаючи максимального значення. Таке явище називається **резонансом**.

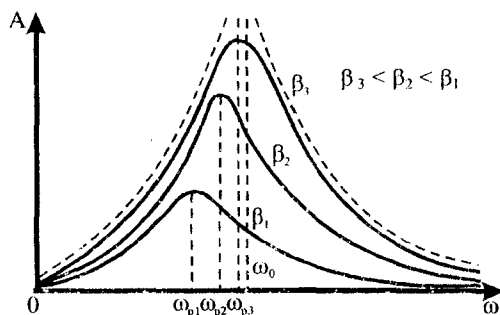


Рисунок 4.34

Із умови мінімуму підкоренового виразу в (16.34) отримаємо

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (4.217)$$

Підставляючи (16.35) у (16.34), знайдемо резонансне значення амплітуди

$$A_r = \frac{F_0}{2m\beta\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}. \quad (4.218)$$

Якщо опір середовища малий – $\omega_0^2 \gg 2\beta^2$, то $\omega_p \approx \omega_0$. Тоді амплітуда вимушених коливань стає дуже великою.

Таке явище резонансу в механіці може спричинити руйнування споруд і машин. Наприклад, періодичні поштовхи від поршневих машин, силових валів турбін, гребних гвинтів і пропелерів передаються на фундаменти чи частини машин та механізмів. Тут резонанс дуже небезпечний.

Послідовність виконання роботи

Завдання 1. Ознайомитись з поведінкою пружинного маятника та можливостями комп'ютерної програми на графічному інтерфейсі (рис. 4.35)

1. Навести мишкою курсор на кульку і заставити маятник коливатись з різними амплітудами. Навчитись мишкою пересувати мірну лінійку і вимірювати нею величину відхилення (амплітуду коливань) кульки.

2. Встановивши значення змущувальної сили рівне нулю, дослідити загасаючі коливання, змінюючи в широкій межі значення коефіцієнта опору r .

3. Встановлюючи різні значення



Рисунок 4.35

коефіцієнта опору та змушувальної сили, дослідити вимушені коливання маятника. Звернути увагу, що вимушені коливання встановлюються не миттєво, а через деякий час.

Завдання 2. Визначити коливні характеристики загасаючих коливань пружинного маятника: логарифмічний декремент загасання; коефіцієнт загасання та добротність.

1. Встановити значення змушувальної сили рівне нулю.
2. Встановити мірну лінійку так, щоб було зручно вимірювати амплітуду коливань кульки.
3. Встановивши мінімальне значення коефіцієнта опору, відтягнути кульку курсором від рівноважного положення і виміряти початкову амплітуду A_1 .
4. Відпустити кульку і виміряти амплітуду n -того коливання A_n і час t N повних коливань. Знайти відношення $k = A_1/A_n$ і період коливань $T = t/N$.
5. За допомогою формули (16.25) підрахувати значення λ ; за формулою (16.29) знайти значення добротності Q коливної системи.
6. Підставити у формулу (16.24) отримані значення λ і T і обчислити коефіцієнт загасання.
7. Порівняти експериментальне значення $\beta_{\text{експ}}$ із розрахованим за формулою $\beta = r/2m$.

Завдання 3. Визначення резонансної частоти вимушених коливань

1. Встановити на інтерфейсі (рис. 16.5) мінімальне значення коефіцієнта опору і максимальне значення величини змушувальної сили.
2. Змінюючи значення циклічної частоти ω , виміряти амплітуду вимушених коливань (через деякий час, коли коливання встановляться) і занести дані в таблицю.

	$r_1 = 0,05 \text{ кг/с}; \quad F_1 = 0,2 \text{ Н}$						
ω							
A							
	$r_2 = \quad \text{кг/с}; \quad F_2 = \quad \text{Н}$						
ω							
A							

3. Змінити значення r і F і повторити пункт 2 ще кілька разів.
4. Побудувати графіки $A(\omega)$ і визначити із них резонансну частоту ω_p .
5. Порівняти експериментальні значення ω_p із розрахованими за формулою (16.35).
6. Оцінити абсолютні та відносні похибки знайдених величин та проаналізувати отримані результати.

Контрольні запитання

1. Які коливання називаються вільними, а які гармонічними?
2. Які коливання називаються загасаючими?
3. Запишіть рівняння гармонічного коливання.

4. Як змінюється з часом амплітуда загасаючих коливань?
5. Від чого залежить частота загасаючих коливань?
6. Які коливання називаються вимушеними?
7. Від чого залежить частота вимушених коливань?
8. Від чого залежить величина амплітуди вимушених коливань?

Література

1. Лопатинський І.С. Курс фізики. Фізика для інженерів. – Л.: „Бескид Біт”, 2002.
2. Кучерук І.М., Дуценко В.П. Загальна фізика. Т.: 1. – К.: „Вища школа”, 1987 – 1991.
3. Бушок Г.Ф. і ін. Курс фізики. Кн. 1. – К.: „Либідь”, 2001.
4. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики. Т.: 1. – К.: „Техніка”, 2001.
5. Галушак М.О. Курс загальної фізики. Кн. 1. – І-Ф.: „Факел”, 2000.
6. Трофимова Т.И. Курс фізики. – М.: „Высшая школа”, 1990.

Допуск до Л.Р. В-16

1. Амплітуда коливання дорівнює 5 см, а період коливання 0,5 с. Котре із наведених рівнянь є рівнянням даного гармонічного коливання?

- А.** $x = 0,5 \sin 4\pi t$. **Б.** $x = 5 \sin 5\pi t$. **В.** $x = 0,05 \sin 8\pi t$. **Г.** $x = 0,05 \sin 0,4\pi t$.
Д. $x = 0,05 \sin 4\pi t$.

2. Котре із наведених рівнянь є рівнянням гармонічного коливання з циклічною частотою 8π рад/с?

- А.** $x = 0,5 \sin 14\pi t$. **Б.** $x = 5 \sin 6\pi t$. **В.** $x = 0,05 \sin 8\pi t$. **Г.** $x = 0,05 \sin 0,4\pi t$. **Д.** $x = 0,05 \sin 4\pi t$.

3. Підвішений на пружині вантаж здійснює малі коливання у вертикальному напрямі. Вважаючи коливання незгасаючими, вкажіть правильне твердження.

А. Частота коливань залежить від амплітуди. **Б.** Вантаж здійснює періодичний рух. **В.** В момент проходження вантажем положення рівноваги кінетична енергія вантажу дорівнює нулю. **Г.** Чим більша маса вантажу, тим більша частота коливань. **Д.** Серед тверджень А - Г немає правильного.

4. Які з перерахованих нижче коливань є вільними: 1 – коливання математичного маятника, 2 – коливання поршня в циліндрі автомобільного двигуна, 3 – коливання сили струму в індукційному генераторі, 4 – коливання сили струму в ламповому генераторі, 5 – коливання сили струму в коливальному контурі.

А. 4. **Б.** 1, 5. **В.** 3, 4. **Г.** 2, 3. **Д.** Серед відповідей А-Г немає правильної.

5. Виберіть одне з тверджень, що стосується вимушених коливань.

А. Для виникнення вимушених коливань на систему має діяти постійна зовнішня сила. **Б.** Частота вимушених коливань удвічі більша частоти зовнішньої сили. **В.** Амплітуда вимушених коливань залежить від частоти

зовнішньої сили. Г. Амплітуда вимушених коливань зменшується з часом. Д. Серед тверджень А - Г немає правильного.

6. Тіло здійснює гармонічні коливання за законом $x=0,4\cos 5\pi t$. Виберіть правильне твердження.

А. Частота коливань дорівнює 5 Гц. Б. Амплітуда коливань менша за 0,5 м. В. Період коливань 0,5 с. Г. Зміщення в момент $t = 0,1$ с дорівнює 0,4 м. Д. Серед тверджень А - Г немає жодного правильного.

7. Швидкість загасання коливань характеризується:

А. Резонансом. Б. Значенням амплітуди вимушуючої сили. В. Логарифмічним декрементом загасання λ , що визначається логарифмом відношення амплітуди коливань в момент часу t до амплітуди коливань в момент часу $(t+T)$. Г. Великою виштовхувальної сили. Д. Серед тверджень А - Г немає жодного правильного.

4.8 ПИТАННЯ ДЛЯ КОМП'ЮТЕРНОГО ТЕСТУВАННЯ

1. Два тіла однакової маси, які підвішені на пружинах, здійснюють вертикальні коливання. Жорсткість однієї пружини в n раз більша за жорсткість другої. Максимальні швидкості тіл під час коливань однакові. Знайти відношення амплітуд коливань 1-го і 2-го тіл. 1) n ; 2) $\sqrt{n}$; 3) $\sqrt{1/n}$; 4) 0.

а) 1; б) 2; в) 3; г) 4.

2. На двох пружинах підвісили вантажі з однаковими масами. Видовження першої пружини виявилось більшим, ніж другої. Який вантаж коливатиметься з більшим періодом?

а) перший; б) другий; в) період коливань обох вантажів однаковий; г) вантажі не коливаться.

3. Гармонічні коливання матеріальної точки описуються рівнянням $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$. Який із наведених далі виразів визначає швидкість цієї точки в довільний момент часу?

1) $-A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$; 2) $A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$; 3) $A\omega_0^2 \cos \varphi$; 4) $A\omega_0^2 \sin \varphi$.

а) 1; б) 2; в) 3; г) 4.

4. Рівняння коливань матеріальної точки задано у вигляді $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$. Назвати вираз для кінетичної енергії цієї точки.

1) $\frac{m\omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)}{2}$; 2) $\frac{m\omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)}{2}$;

3) $A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$; 4) $A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$.

а) 1; б) 2; в) 3; г) 4.

5. В який момент часу, заданий через період коливань T , повна енергія тіла, що здійснює гармонічні коливання, дорівнюватиме потенціальній

1) $\frac{1}{2}T$; 2) $\frac{1}{4}T$; 3) T ; 4) $\frac{3}{4}T$.

а) 1; б) 2; в) 3; г) 4.

6. Як поводить ся повна енергія гармонічних коливань?

а) Здійснює коливання з часом; б) зростає з часом; в) спадає з часом; г) лишається незмінною.

7. Як зміниться повна механічна енергія математичного маятника, що коливається, коли

зменшити його довжину втричі та збільшити амплітуду вдвічі?

а) Збільшиться в 12 раз; б) зменшиться в 12 раз; в) збільшиться в 6 раз; г) зменшиться в 6 раз.

8. Додаються два гармонічні коливання з однаковими частотами, що відбуваються вздовж однієї і тієї самої прямої. Якою має бути різниця фаз коливань, що додаються, щоб амплітуда результуючого коливання була максимальною?

а) 0; б) 3π ; в) π ; г) 5π .

9. Додаються два гармонічні коливання з однаковими частотами, що відбуваються вздовж однієї і тієї самої прямої. Якою має бути різниця фаз коливань, що додаються, щоб амплітуда результуючого коливання була

мінімальною?

а) 4π ; б) 2π ; в) 0; г) π .

10. По якій траєкторії рухається матеріальна точка, що бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях однакової частоти, якщо різниця фаз коливань, що додаються, дорівнює $\pm\pi/2$?

а) Пряма лінія; б) коло; в) еліпс.

11. По якій траєкторії рухається матеріальна точка, що бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях однакової частоти, якщо різниця фаз коливань, що додаються, дорівнює 0?

а) Коло; б) пряма лінія; в) еліпс.

12. По якій траєкторії не може рухатися матеріальна точка, що бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях однакової частоти?

а) Прямій лінії; б) колу; в) параболі; г) еліпсу.

13. Додаються два гармонічні взаємно перпендикулярні коливання однакової частоти з амплітудами A_1 і A_2 . Якою має бути різниця фаз коливань, які додаються, щоб амплітуда результуючого коливання визначалася за формулою:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} ?$$

1) $\frac{\pi}{2}$; 2) 0; 3) π ; 4) $\frac{3}{2}\pi$.

а) 1; б) 2; в) 3; г) 4.

14. За яких умов при додаванні двох однаково напрямлених коливань виникають биття?

а) періоди однакові; б) періоди близькі за значенням; в) періоди сильно відрізняються за значенням.

15. Як потрібно змінити частоту зовнішньої сили для здійснення резонансу у разі, коли пружинний маятник вміщено в середовище з коефіцієнтом загасання β_2 , меншим за β_1 ?

а) збільшити; б) зменшити; в) не змінювати.

16. Як зміниться амплітуда вимушених коливань пружинного маятника при резонансі, якщо амплітуду зовнішньої сили і масу маятника збільшити удвічі?

а) збільшиться удвічі; б) збільшиться у 4 рази; в) зменшиться удвічі; г) не зміниться.

Змінний струм

17. Який із наведених далі виразів відповідає закону Ома для змінного струму в електричному колі, що складається з L, C і R?

$$1) I_m = \frac{U_m}{\omega L}; \quad 2) I_m = \frac{U_m}{R};$$

$$3) I_m = U_m \omega C; \quad 4) I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

а) 1; б) 2; в) 3; г) 4.

18. Які з наведених далі виразів, що визначають різницю фаз між струмом і напругою, відповідають індуктивному характеру кола, що складається R, L і C?

- 1) $\operatorname{tg} \varphi > 0$;
2) $\operatorname{tg} \varphi < 0$;

3) $\operatorname{tg} \varphi = 0$, де $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$.

- а) 1; б) 2; в) 3; г) 4.

19. В середині яких із перелічених середовищ поширюється поперечна хвиля?

- а) газ; б) рідина; в) тверде тіло.

20. Визначити амплітуду стоячої хвилі, що описується рівнянням $S = 2A_0 \cos(kx) \cos(\omega t)$.

- 1) $2A_0$;
2) $2A_0 \cos(kx)$;
3) A_0 ;
4) $A_0 \cos(kx)$.

- а) 1; б) 2; в) 3; г) 4.

21. Який із наведених далі виразів відповідає відстані між сусідніми пучностями стоячої хвилі?

- а) $0,25\lambda$; б) $0,5\lambda$; в) $0,75\lambda$; г) λ .

22. Який із наведених далі виразів відповідає відстані між сусіднім вузлом і пучністю?

- а) $0,25\lambda$; б) $0,5\lambda$; в) $0,75\lambda$; г) λ .

23. Який із поданих далі виразів визначає групову швидкість хвилі?

- 1) $\sqrt{\frac{G}{\rho}}$; 2) $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$;
3) $\frac{\omega}{k}$; 4) $u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}$.

- а) 1; б) 2; в) 3; г) 4.

24. В якому випадку групова і фазова швидкості хвилі однакові?

- 1) $\frac{dv}{d\lambda} > 0$; 2) $\frac{dv}{d\lambda} = 0$; 3) $\frac{dv}{d\lambda} < 0$.

- а) 1; б) 2; в) 3; г) 4.

25. Звукові коливання частотою ν мають у першому середовищі довжину хвилі λ_1 а у другому середовищі — λ_2 . Як зміниться швидкість поширення цих коливань при переході з першого середовища в друге, якщо $\lambda_1 = 2\lambda_2$.

- а) збільшиться у 2 рази; б) зменшиться у 2 рази; в) не зміниться.

Електромагнітні хвилі

26. Що потрібно зробити для переходу до прийому коротких хвиль: зблизити чи розсунути обкладки плоского конденсатора, увімкненого в коливальний контур приймача?

- а) зблизити; б) розсунути.

27. Як зміниться частота електромагнітної хвилі, якщо індуктивність відкритого коливального контуру збільшити у 4 рази?

а) збільшиться удвічі; б) зменшиться удвічі; в) збільшиться у 4 рази; г) зменшиться у 4 рази.

28. У скільки разів зміниться довжина хвилі, яку випромінює коливальний контур, якщо відстань між обкладками конденсатора збільшити вдвічі?

а) Зменшиться у $\sqrt{2}$ рази; б) збільшиться у $\sqrt{2}$ рази; в) зменшиться удвічі; г) збільшиться удвічі.

29. Які з наведених рівнянь описують власні коливання, що виникають у коливальному контурі, який складається з R, L і C?

1) $q = q_m \cos(\omega_0 t + \alpha)$;

2) $\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0$;

3) $\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0$;

4) $\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = \frac{U_m}{L} \cos \omega t$.

а) 1; б) 2; в) 3; г) 4.

30. Який вираз визначає частоту власних коливань у контурі з параметрами R, L і C?

1) $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$;

2) $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$;

3) $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}$.

а) 1; б) 2; в) 3.

31. За якої умови в контурі, що складається з R, L і C, коливальний процес перетворюється на аперіодичний процес?

1) $R = 0$;

2) $\frac{R}{2L} < \sqrt{\frac{1}{LC}}$;

3) $\frac{R}{2L} = \sqrt{\frac{1}{LC}}$;

4) $\frac{R}{2L} > \sqrt{\frac{1}{LC}}$.

а) 1; б) 2; в) 3; г) 4.

32. Назвати вираз, що задає частоту вимушених коливань у контурі, який складається з R, L і C, якщо зовнішня ЕРС змінюється за законом $\varepsilon = \varepsilon_m \cos \Omega t$.

1) $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$;

2) $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$;

3) $\omega = \Omega$;

4) $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}$.

а) 1; б) 2; в) 3; г) 4.

31. Який із наведених далі виразів визначає частоту ω зовнішньої ЕРС, яка

є резонансною для контуру з R, L і C?

1) $\omega = \sqrt{LC}$;

2) $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$;

3) $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}$;

4) $\omega = 0$.

а) 1; б) 2; в) 3; г) 4.