МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу

М. О. Галущак, О. Є. Федоров

КУРС ФІЗИКИ
ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

За редакцією проф. М. О. Галущака

Затверджено вченою радою університету
як підручник для студентів вищих навчальних закладів

Івано-Франківськ
2016

УДК 53+537.8
ББК 22.33
Г-16

Рецензенти:

М. А. Рувінський доктор фізико-математичних наук, професор кафедри фізики і хімії твердого тіла Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника;

В. М. Мойсишин доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу

Затверджено вченою радою університету
(протокол №1/560 від 02.03.2016 року)

Галущак М. О., Федоров О. Є.

Г-16 **Курс фізики. Електромагнетизм:** підручник у трьох книгах. Кн. 2. — Івано-Франківськ: Вид-во ІФНТУНГ, 2016. — 405 с.

ISBN 978-966-694-268-8

У підручнику викладені основні закони електромагнетизму, механічних та електромагнітних коливань і хвиль, які потрібні для подальшого вивчення як фізики, так і суміжних з нею дисциплін. В основу викладу матеріалу покладено експеримент. Розглянуті фізичні явища, методи їх спостереження і вивчення, з'ясовані фізичні основи цих явищ та їх застосування в науці й на виробництві. Використано багато ілюстрацій, які становлять невід'ємну частину тексту.

Для студентів технічних спеціальностей та викладачів фізики вищих навчальних закладів.

УДК 53+537.8
ББК 22.33

ISBN 978-966-694-268-8

© Галущак М. О.,
Федоров О. Є.

© ІФНТУНГ, 2016

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА…….……..... 9

ЧАСТИНА І ЕЛЕКТРОСТАТИКА…….……..... 10

Розділ 1 Електричне поле у вакуумі…….…..... 10
1.1 Електричний заряд. Закон збереження електричного заряду 10
1.2 Взаємодія електричних зарядів. Закон Кулона……..….. 13
1.3 Електричне поле. Напруженість електричного поля..……. 17
1.4 Принцип суперпозиції електричних полів……..... 19
1.5 Електричне поле диполя……..... 20
1.6 Графічне зображення електричного поля.
Силові лінії електричного поля.
Потік вектора напруженості електричного поля……..... 24
1.7 Теореми Гауса та Остроградського-Гауса
для електростатичного поля у вакуумі..……..... 28
1.8 Розрахунок симетричних електричних полів за допомогою
теореми Гауса…….……... 34
1.9 Робота сил електричного поля.
Потенціал електричного поля……..……..... 41
1.10 Циркуляція вектора напруженості електричного поля…….. 45
1.11 Еквіпотенціальні поверхні……..... 48
1.12 Зв'язок між напруженістю і потенціалом електричного
поля…….. 50

Розділ 2 Електричне поле в діелектриках…….. 56
2.1 Діелектрики. Полярні і неполярні молекули …… 56
2.2 Поляризація діелектриків. Вектор поляризації.
Тензор поляризації……..…… 57
2.3 Теорема Гауса для потоку вектора поляризації……..……... 63
2.4 Вектор електричного зміщення.
Теореми Гауса та Остроградського-Гауса
для потоку вектора електричного зміщення……..… 65
2.5 Умови на межі розділу діелектриків…….…….. 68
2.6 Сегнетоелектрики. П'єзоелектрика. Електрети ……. 71

Розділ 3 Провідники в електричному полі…….. 78
3.1 Розподіл зарядів на провідниках…….…….. 78
3.2 Провідники в електричному полі ……..…… 81
3.3 Електроємність відокремленого провідника…… 82
3.4 Взаємна електроємність провідників. Конденсатори……. 84
3.5 Енергія відокремленого зарядженого провідника та конденсатора. Енергія електричного поля. Об'ємна густина енергії електричного поля……...…… 89

ЧАСТИНА II ПОСТІЙНИЙ ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ…….. 93

Розділ 4 Закони постійного струму……..…… 93
4.1 Електричний струм та його характеристики…….. 94
3.2 Закон Ома в інтегральній формі для однорідної ділянки кола. Електричний опір провідників……..…… 97
4.3 Закон Ома в диференціальній формі…… 101
4.4 Сторонні сили. Електрорушійна сила……... 102
4.5 Закон Ома для неоднорідної ділянки кола та повного кола.. 107
4.6 Розгалужені електричні кола та правила Кірхгофа для їх розрахунку……109
4.7 Вимірювання електричних опорів. Місток Уітстона……. 114
4.8 Робота і потужність постійного струму. Закон Ленца-Джоуля в інтегральній та диференціальній формах……. 117

Розділ 5 Електропровідність металів. Напівпровідники. Контактні явища…… 122
5.1 Класична теорія провідності металів та її обмеження…….. 122
5.2 Труднощі класичної теорії провідності металів. Поняття про квантову теорію провідності металів……. 127
5.3 Явище надпровідності…… 132
5.4 Робота виходу електрона з металу……134
5.5 Контактна різниця потенціалів…….. 137
5.6 Термоелектричні явища. Термоелектрорушійна сила…… 141
5.7 Термоелектронна емісія…….. 145
5.8 Напівпровідники, їх будова та власна провідність…… 158
5.9 Домішкова провідність напівпровідників…….. 150
5.10 Застосування напівпровідників……..……. 152

Розділ 6 Електричний струм в рідинах…….. 160
6.1 Електролітична дисоціація…… 160
6.2 Електропровідність електролітів……. 162
6.3 Електроліз. Закони Фарадея……. 165
6.4 Застосування електролізу……. 167
6.5 Хімічні джерела струму……..…..... 170
6.6 Електрохімічні методи захисту металів від корозії…… 182

Розділ 7 Електричний струм в газах……185
7.1 Іонізація газів…….. 185
7.2 Несамостійний розряд в газах…….. 196
7.3 Самостійний розряд в газах…….. 190
7.4 Тліючий розряд…….. 191
7.5 Іскровий розряд. Блискавка…….. 193
7.6 Коронний розряд…… 197
7.7 Дуговий розряд…….. 198
7.8 Поняття про плазму…… 200

ЧАСТИНА ІІІ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ……....204

Розділ 8 Магнітне поле та його характеристики…….. 204
8.1 Магнітне поле. Індукція магнітного поля. Контур зі струмом в магнітному полі……..…….... 205
8.2 Магнітний потік. Теорема Гауса для потоку вектора магнітної індукції…… 207
8.3 Напруженість магнітного поля. Закон Біо-Савара-Лапласа.. 209
8.4 Магнітне поле прямого та колового струмів…….. 212
8.5 Циркуляція вектора напруженості магнітного поля. Закон повного струму……..... 213

Розділ 9 Основні магнітні явища……. 218
9.1 Дія магнітного поля на провідник зі струмом. Сила Ампера 218
9.2 Робота з переміщення провідника зі струмом у магнітному полі……220
9.3 Взаємодія паралельних провідників зі струмом…….. 221
9.4 Дія магнітного поля на рухомий заряд. Сила Лоренца…..… 222
9.5 Магнетизм як релятивістський ефект……..… 224
9.6 Ефект Холла та його застосування……..…. 226

9.7 Рух заряджених частинок в магнітному полі……...… 230
9.8 Елементи земного магнетизму……..… 232

Розділ 10 Магнітні властивості речовини. Постійне магнітне поле в речовині……... 236
10.1 Магнітні моменти електронів і атомів……..…… 236
10.2 Намагнічення магнетика. Типи магнетиків……..……... 240
10.3 Діамагнетизм……..……... 244
10.4 Парамагнетизм ……...……246
10.5 Феромагнетизм……..……...…… 247

Розділ 11 Електромагнітна індукція……257
10.1 Явище електромагнітної індукції. Досліди Фарадея. Правило Ленца ……... 257
11.2 Електрорушійна сила електромагнітної індукції. ……. 259
11.3 Явище самоіндукції. Індуктивність…… 263
11.4. Екстраструми замикання і розмикання…… 266
11.5 Явище взаємної індукції.……. 268
11.6 Енергія магнітного поля струму…….…… 270

Розділ 12 Основи теорії Максвелла для електромагнітного поля…….. 275
12.1 Вихрове електричне поле. Перше рівняння Максвелла в інтегральній та диференціальній формах……..… 275
12.2 Струми зміщення. Друге рівняння Максвелла в інтегральній та диференціальній формах…….…. 279
12.3 Система рівнянь Максвелла в інтегральній та диференціальній формах як фундаментальні рівняння електромагнетизму……..……..283

ЧАСТИНА IV КОЛИВАННЯ……..…….. 286

Розділ 13 Механічні та електромагнітні коливання……..287
13.1 Гармонічні коливання та їх характеристики……. 287
13.2 Додавання коливань одного напряму. Биття……. 291
13.3 Додавання взаємно перпендикулярних коливань……. 295
12.4 Гармонічний осцилятор. Механічні гармонічні коливання. Пружинний, математичний і фізичний маятники та їх вільні незатухаючі коливання ……..… 298

13.5 Електричний коливальний контур. Вільні електромагнітні незатухаючі коливання в електричному коливальному контурі……....304
13.6 Затухаючі коливання……..... 307
13.7 Вимушені коливання в механічному осциляторі…….. 314
13.8 Вимушені коливання в електричному коливальному контурі……....319
13.9 Параметричні коливання та параметричний резонанс……. 324
13.10 Автоколивання……..…… 327
13.11 Релаксаційні коливання……..……. 329

Розділ 14 Змінний електричний струм……334
14.1 Одержання змінного струму…….. 334
14.2 Квазістаціонарний струм……. 337
14.3 Діючі (ефективні) значення сили та напруги змінного електричного струму…… 339
14.4 Активний опір, індуктивність і ємність у колі змінного струму. Закон Ома для кола змінного струму……341
14.5 Резонанс напруг……348
14.6 Резонанс струмів……...350
14.7 Робота і потужність змінного струму……354
14.8 Передавання електричної енергії. Трансформатори……. 356
14.9 Трифазний струм. Обертове магнітне поле…… 359

ЧАСТИНА V ХВИЛІ…….. 364

Розділ 15 Механічні хвилі…….. 364
15.1 Поширення хвиль у пружному середовищі…….. 364
15.2 Рівняння плоскої хвилі……. 367
15.3 Хвильове рівняння……..…. 369
15.4 Енергія біжучої хвилі……... 371
15.5 Стоячі хвилі……..…….... 373
15.6 Звук та його характеристики……..……..…376
15.7 Ультразвук та його застосування…….……380
15.8 Ефект Допплера для звукових хвиль…….. 383
15.9 Звуковий бар'єр. Ударна хвиля……..…. 385

Розділ 16 Електромагнітні хвилі…….. 388
16.1 Хвильове рівняння електромагнітної хвилі…..……..…388

16.2 Плоска електромагнітна хвиля……391
16.3 Експериментальне підтвердження електромагнітних хвиль. Досліди Герца…… 393
16.4 Енергія електромагнітної хвилі. Вектор Пойтінга…….... 395
16.5 Шкала електромагнітних хвиль……..…... 397
16.6 Передача інформації за допомогою електромагнітних хвиль……...398

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК…….…….. 402

ЛІТЕРАТУРА……. 405

ПЕРЕДМОВА

Пропонований підручник присвячений одному з важливих розділів сучасного курсу загальної фізики класичній електродинаміці.

Книга відповідає новій навчальній програмі курсу загальної фізики для студентів технічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

В курсі докладно викладені закономірності існування електричного та магнітного полів, умови перетворення електричного поля в магнітне, магнітного в електричне та утворення електромагнітного поля. Основні закони електродинаміки сформульовані у вигляді рівнянь Максвелла.

Багато уваги приділено умовам існування постійного електричного струму в різних середовищах та питанням його практичного застосування.

До викладу матеріалу фізики електромагнітних коливань і хвиль використано єдиний підхід, який полягає у поясненні та співставленні їх властивостей і характеристик з механічними коливаннями та хвилями.

Важливе місце при розгляді питань надано класичним дослідам з відповідними рисунками та схемами, приведено багато історичних фактів відкриттів вченими різних законів і прикладів їх використання, які сприяють розумінню суті фізичних явищ та підвищують інтерес до вивчення матеріалу курсу.

Книга містить багато ілюстрацій, які є складовою, органічною частиною тексту. Стислий стиль викладу матеріалу та запитання для самоперевірки, на наш погляд, сприяють самостійній роботі студентів, дозволяють зосередити зусилля над засвоєнням головних питань курсу.

При написанні підручника було використано ряд існуючих книг з курсів загальної і теоретичної фізики, більшість з яких наведено в списку літератури.

Ми щиро вдячні рецензентам доктору фізико-математичних наук, професору М.А. Рувінському і доктору технічних наук, професору, завідувачу кафедри вищої математики В.М. Мойсишину за цінні зауваження і доброзичливі поради, які сприяли покращенню книги.

ЧАСТИНА І ЕЛЕКТРОСТАТИКА

Розділ 1 Електричне поле у вакуумі

1.1 Електричний заряд. Закон збереження електричного заряду

Електрика, електричний заряд, на перший погляд, відомі і зрозумілі поняття. Є додатні та від'ємні електричні заряди: однойменні заряди відштовхуються, а різнойменні – притягаються. Але, що собою являє електричний заряд? Спробуємо відповісти на це запитання, забувши на деякий час про слово «електрика». Уявіть, що ми навіть не чули про наявність електричних зарядів. Ми знаємо лише класичну механіку Ньютона з його трьома фундаментальними законами та законом Всесвітнього тяжіння, але маємо можливість проводити надтонкі фізичні експерименти, ділити речовину на найдрібніші частинки, які будемо називати елементарними і проводити для цього всі необхідні вимірювання. Наприклад, об'єктом наших досліджень виявились частинки масою $9{,}1\cdot10^{-31}$ *кг.* Згідно з законом Всесвітнього тяжіння $F = G\dfrac{m_1\cdot m_2}{r^2}$, ці частинки на відстані 1 *м* повинні взаємодіяти (притягатись) з силою $5{,}5\cdot10^{-71}$ Н. Звичайно, сила дуже мала, так що її вимірювання складна експериментальна задача. Але що це – наш надчутливий прилад зафіксував не силу притягання, а силу відштовхування, яка становить $2{,}3\square10^{\square28}$ Н, тобто в $4\square10^{42}$ більшу, ніж гравітаційна сила притягання. Продовжимо наші дослідження – у нашому розпорядженні дві інші однакові елементарні частинки масою $1{,}6743\cdot10^{-27}$ *кг*. Згідно з законом Всесвітнього тяжіння сила притягання між цими частинками на відстані 1*м* повинна становити $1{,}87\square10^{\square64}$ Н, але всупереч закону тяжіння між цими «важчими» частинками діє сила відштовхування $2{,}3\square10^{\square28}$ Н, як і у попередньому випадку. Коли ж визначити силу взаємодії між «легкою» та «важкою» частинками, то виявиться, що ці

частинки притягаються з силою $2{,}3\square 10^{\square 28}$ Н, яка у $2{,}33\square 10^{39}$ більша за силу гравітаційної взаємодії. Проводячи досліди з елементарними частинками різної маси помітимо, що деякі з них, незалежно від їх мас, на відстані 1 м відштовхуються або притягаються з силою $2{,}3\square 10^{\square 28}$ Н. Отже, досліджувані нами частинки мають «щось таке», що зумовлює їх особливу взаємодію, яка значно перевищує за значенням силу гравітаційної взаємодії на цій самій відстані між частинками. Як назвати цю особливу взаємодію і те, що її зумовлює? Історично ця взаємодія була названа електричною, а те, що зумовлює таку взаємодію – електричним зарядом. У чому причина такої назви? Ще у стародавній Греції було відомо, що бурштинові (янтарні) гребені після розчісування волосся притягають легкі предмети. З грецької elektron – означає бурштин і тому в кінці XVI століття англійський лікар Вільям Гільберт назвав тіла наелектризованими, які після натирання об шерсть притягають легкі предмети. Отже, «щось таке», що зумовлює особливу взаємодію між досліджуваними нами частиками можна назвати електричним зарядом. Але одні частинки з електричним зарядом відштовхуються, а інші – притягуються, отже, існують заряди двох видів. Як назвати ці види? На початку вивчення електричних явищ французький фізик Шарль Франсуа Дюфе (1698-1739) відкрив два види зарядів: одні утворюються під час натирання скла об шовк, а інші – смоли об шерсть. Тому Дюфе назвав одні заряди «скляними», а другі – «смоляними». Погодьтесь, користуватись такою символікою у наш час було б вкрай незручно: електрон мав би, наприклад, скляний заряд, а протон – смоляний. Але найбільш вдалу назву різних видів зарядів увів Бенджамін Франклін (1706-1790), видатний американський політичний діяч, дипломат, вчений, винахідник, який ввів поняття додатних та від'ємних зарядів. Історично склалось, що елементарна частинка, відкрита Томсоном, була названа електроном і цій частинці «приписали» від'ємний заряд. За це відкриття Томсон в 1906 р. отримав Нобелівську премію з фізики. Неважко здогадались, що частинки з масою $9{,}1\cdot 10^{-31}$ *кг*, з якими ми «проводили» досліди та виявили, що між ними існують сили відштовхування і є електронами, а частинки з масою $1{,}6743\cdot 10^{-27}$ *кг* є протонами і мають заряди іншого виду, тобто додатні. Електричними зарядами володіють не тільки електрон і протон, але багато інших елементарних частинок. Отже, можна

стверджувати, що електричний заряд є невід'ємною властивістю деяких елементарних частинок і ця властивість полягає у тому, що сила взаємодії між такими нерухомими частинками значно більша їх гравітаційної взаємодії.

Одиницею вимірювання електричного заряду в системі одиниць СІ є кулон – похідна одиниця від сили струму, а саме 1 *Кл* (кулон) є електричний заряд, який проходить через поперечний переріз провідника при силі постійного струму 1 *А* (ампер) за 1 *с* (секунду).

Заряд електрона є найменший електричний заряд і його називають елементарним та позначають буквою *е*. Вперше значення заряду електрона експериментально визначив американський фізик Міллікен (1868-1953), за що у 1923 році отримав Нобелівську премію з фізики. У системі СІ $e \approx 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ Кл$. Елементарний заряд є квантом (найменшою порцією) електричного заряду і будь-який макрозаряд *q* дорівнює кількості *N* елементарних зарядів:

$$q = N \cdot e \quad . \tag{1.1.1}$$

В електрично нейтральному тілі кількість елементарних від'ємних зарядів точно дорівнює такій самій кількості додатних зарядів. Якщо тіло заряджене від'ємно, то у ньому є надлишок від'ємних зарядів. Додатний заряд тіла зумовлений недостачею від'ємних зарядів – переважає кількість елементарних додатних зарядів. До речі, Міллікен у своїх дослідах якраз і встановив, що заряди маленьких крапель масла кратні деякому найменшому, тобто як тепер ми говоримо – елементарному заряду. Слід зазначити, в сучасній фізиці елементарних частинок передбачається існування особливих частинок – кварків з дробовим електричним зарядом $-\frac{1}{3}e$ та $-\frac{2}{3}e$. Наприклад, електрон складається з трьох кварків. Проте, у вільному стані кварки поки що не виявлені.

До цього часу ми говорили про взаємодію нерухомих заряджених частинок. Якщо ж заряджені частинки рухаються одна відносно одної, то між ними виникає ще одна сила взаємодії, яка отримала назву магнітної взаємодії. Тому, в загальному випадку природно назвати взаємодію між нерухомими та рухомими електричними зарядженими частинками електромагнітною

взаємодією. ***Отже, електричний заряд є кількісною мірою властивості тіл або частинок речовини вступати в електромагнітну взаємодію.***

На основі експериментів було відкрито закон збереження електричного заряду, який є одним з фундаментальних законів збереження у природі на рівні з законами збереження енергії, імпульсу, моменту імпульсу.

В електрично-ізольованій системі алгебраїчна сума зарядів є сталою величиною:

$$\sum_{i=1}^{n} q_i = const \quad . \qquad (1.1.2)$$

Зауважимо, що електрично-ізольована система – це така система, коли через поверхню що її обмежує, не можуть проникати інші заряди.

0.2 Взаємодія електричних зарядів. Закон Кулона

Як вже раніше відмічалось, однойменні заряди відштовхуються, а різнойменні притягуються. У 1785 р. французький фізик і військовий інженер Шарль Огю́стен Кулон (1736-1806) експериментально встановив основний закон електростатики – закон

Шарль Огю́стен Кулон

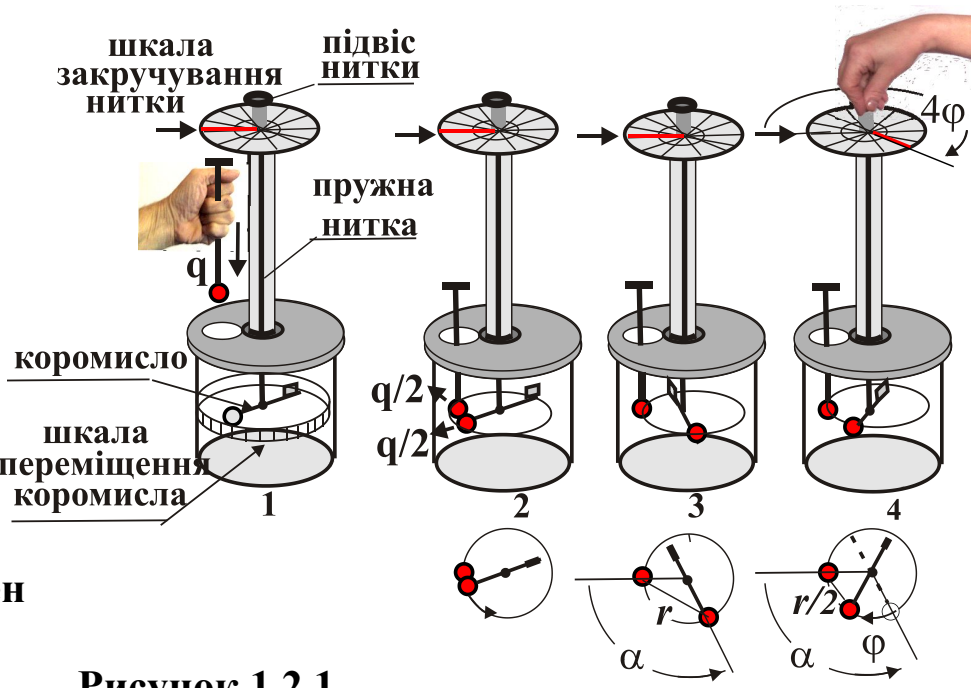


Рисунок 1.2.1

взаємодії двох нерухомих точкових заряджених тіл або частинок.

Врахуйте, що у той час ще не було єдиної системи фізичних величин, не кажучи про відсутність одиниць вимірювання електричного заряду. Як же тоді Кулон визначав залежність сили електростатичної взаємодії зарядів від величин цих зарядів? Дуже просто: якщо кульку із зарядом q привести в контакт з незарядженою кулькою такого ж діаметру, то кожна з кульок матиме заряд $\frac{q}{2}$, а потім, приводячи цей «розділений» на половину заряд ділять ще наполовину з іншою кулькою, отримуючи заряд $\frac{q}{4}$ і т.д. Вимірювання відстані між зарядами не викликає особливих проблем, складніше виміряти сили взаємодії між зарядженими тілами. В своїх дослідах Кулон силу взаємодії між електричними зарядами оцінював за допомогою крутильних терезів, схему яких наведено на рис.1.2.1. На тонкій пружній нитці 1, розташованій у вертикальній скляній трубці, підвішене легке скляне коромисло (стержень). На одному кінці коромисла прикріплена незаряджена позолочена кулька, а на другому – противага. Вся система містилась у скляному циліндрі. В отвір приладу, як вказано на рисунку, вставлялася скляна паличка із зарядженою кулькою і приводилась в контакт з незарядженою кулькою.

У результаті перерозподілу зарядів кульки відштовхувались, коромисло оберталось закручуючи пружну нитку (підвіс) на деякий кут і за пружною деформацією кручення оцінювалась сила взаємодії між зарядами, яка пропорційна куту закручування нитки. Відлік цього кута здійснювався за шкалою переміщення коромисла. Визначення залежності сили взаємодії від відстані між зарядами Кулон здійснював наступним чином: наприклад, на відстані r кут відхилення коромисла становить α (рис.1.2.1$_3$), що відповідає деякому значенню сили F_1, а якою буде сила на відстані $\frac{r}{2}$? При зменшенні відстані між зарядами в 2 рази, що відповідає відхиленню коромисла на кут φ, Кулону доводилось «докручувати» пружну нитку на кут 4φ, що відповідає збільшенню сили взаємодії між зарядами в 4 рази (рис 1.2.1$_4$). Аналогічно визначалась зміна сили взаємодії між зарядами при інших відстанях. Недарма художник на портреті Кулона зобразив його з крутильними терезами (виділено

колом), де Кулон лівою рукою утримує скляну трубку, в якій розташована пружна нитка.

У результаті проведених дослідів Кулон встановив:

Сила взаємодії двох точкових нерухомих електричних зарядів прямо пропорційна добутку їх величин і обернено пропорційна квадрату відстані між ними.

У скалярній формі закон Кулона має вигляд:

$$F = k\frac{|q_1|\cdot|q_2|}{r^2}, \qquad (1.2.3)$$

тобто формула (1.2.3) визначає тільки абсолютне значення сили. Коефіцієнт пропорційності k залежить від вибору системи одиниць вимірювання фізичних величин та властивостей середовища, у якому знаходяться заряди. Оскільки у системі СІ вже встановлено одиницю заряду *Кл* (кулон), а одиницею сили є *Н* (ньютон), тому згідно з формулою (1.2.3) коефіцієнт пропорційності k повинен вимірюватись в $\frac{Н\cdot м^2}{Кл^2}$, тобто він чисельно дорівнює силі взаємодії між двома точковими зарядами по 1*Кл* на відстані 1*м* у вакуумі. Історично склалось так, що числове значення цього коефіцієнту було встановлено шляхом співвідношень між одиницями системи СГС та системи СІ і в результаті $k = 9\cdot 10^9\ \frac{Н\cdot м^2}{Кл^2}$. Неважко зрозуміти, що в електростатиці заряд *1 Кл* – дуже великий заряд: спробуйте наблизити два однойменні заряди по 1 *Кл* на відстань 1 *м* , якщо сила відштовхування становить 9 000 000 *Н*!

Зауважимо, що у результаті інтегрування окремих математичних виразів в які входить закон Кулона, в чисельнику отриманих рівнянь з'являється 4π (див. доведення теореми Гауса) і тому, щоб у подальшому «позбутись» цих «чотири пі», їх штучно вводять у коефіцієнт k, записуючи його у вигляді $k = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}$, де допоміжна величина ε_0 отримала назву електрична стала, яка дорівнює:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot k} = \frac{1}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{Н \cdot м^2}{Кл^2}} = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{Кл^2}{Н \cdot м^2}, \quad (1.2.4)$$

а після введення одиниці електроємності $1Ф$ (фарада) буде далі доведено, що $\frac{Кл^2}{Н \cdot м^2} = \frac{Ф}{м}$ і тому $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{Ф}{м}$.

Взаємодія зарядів у досліді Кулона відбувалась у повітрі і, як буде у подальшому показано, ця взаємодія мало відрізняється від взаємодії зарядів у вакуумі. Проте, наявність іншого середовища суттєво впливає на силу взаємодії зарядів. Фізичну величну, яка показує у скільки разів сила взаємодії між двома електричними зарядами менша, ніж у вакуумі при тому ж розташуванні зарядів, називають

діелектричною проникністю даного середовища і позначають ε. Отже, з уведенням поняття електричної сталої ε_0 для діелектричної проникності середовища у якому є заряди, закон Кулона для модуля сил взаємодії між ними набуде такого вигляду:

$$F = \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot r^2}. \quad (1.2.5)$$

Напрям вектора сили електростатичної взаємодії між зарядами залежно від їх знаків визначає векторна форма запису закону Кулона. Наприклад, вектор сили $\vec{F}_{12}$, що діє на заряд q_1 з боку заряду q_2, дорівнює:

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot r^2} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r}, \quad (1.2.6)$$

де $\vec{r}_{12}$ – радіус-вектор, який з'єднує заряди q_2 та q_1 (рис.1.2.2а), $r = |\vec{r}_{12}|$. Аналогічно, вектор сили $\vec{F}_{21}$, що діє на другий заряд q_2 з боку першого заряду q_1, дорівнює:

$$\vec{F}_{21} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot r^2} \cdot \frac{\vec{r}_{21}}{r}, \quad (1.2.7)$$

тільки тепер $\vec{r}_{21}$ – радіус-вектор, який з'єднує заряд q_1 з зарядом q_2 (рис.1.2.2б) і згідно з третім законом Ньютона $\vec{F}_{12} \uparrow\downarrow \vec{F}_{21}$.

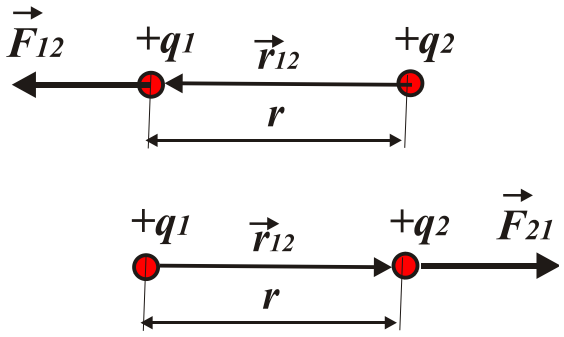


Рисунок 1.2.2

Для однойменних зарядів добуток їх величин буде додатним і, згідно з векторною формою запису закону Кулона, напрям векторів сил взаємодії між цими зарядами співпадає з напрямом радіусів-векторів, що з'єднують такі заряди (рис.1.2.2(а,б)). Якщо заряди різнойменні, то напрями вектора сили та радіуса-вектора є протилежні.

Особливістю не тільки кулонівської взаємодії, але у загальному випадку і взаємодії частинок з силами обернено пропорційними квадрату відстані між ними є те, що система таких частинок під дією таких сил не може утворювати стійку рівноважну систему.

1.3 Електричне поле. Напруженість електричного поля

У двох попередніх параграфах ми з'ясували поняття електричного заряду та те, за яким законом відбувається їх взаємодія. Цей закон – закон Кулона. Але чому заряди взаємодіють саме за таким законом, звідки вони «знають», що їм треба «виконувати» закон Кулона? Що є причиною електростатичної сили взаємодії – сили взаємодії між нерухомими електричними зарядами? На це запитання фізика дає таку відповідь: ***взаємодія електричних зарядів здійснюється електричним полем – особливим видом матерії***. А в чому полягає ця особливість? Пояснимо це на простому прикладі. Будь-яке тіло займає певне місце у просторі і це місце вже недоступне для іншого тіла, якщо не усунути з цього місця попереднє тіло. У такому випадку кажуть, що ***матерія у вигляді речовини локалізована у просторі***. Але є така матерія, яка не локалізована у

просторі, тобто в одній точці простору, «не перешкоджаючи» одна одній, може одночасно існувати (накладатись одна на одну) скільки завгодно видів такої матерії. Такою матерією є фізичне поле. Отже, ***матерія у вигляді поля не локалізована у просторі і для неї виконується принцип суперпозиції*** (накладання). Переконатись у такому твердженні дуже просто – увімкніть радіоприймач, ручкою або пультом керування виберіть необхідну радіостанцію, тобто з великої кількості електромагнітних полів які "вловлює" одна антена, електроніка приймача підсилює лише один сигнал. Цей сигнал може бути сильним або слабким. Отже, повинна бути фізична величина, яка характеризує властивості електромагнітного поля. Оскільки даний розділ стосується електростатики, то в першу чергу встановимо основні характеристики електростатичного поля – поля нерухомих зарядів.

Вивчати та встановлювати основні характеристики електричного поля можна за результатом дії цього поля на внесений у дане поле електричний заряд, який називають пробним. Щоб отримати характеристики поля у даній точці простору, пробний заряд повинен бути точковим. Якщо у дану точку простору вносити різні за своїм значенням пробні заряди і вимірювати силу, яка діє на ці заряди з боку електричного поля, то можна переконатись, що відношення сили F, яка діє на цей заряд, до величини цього заряду для даної точки поля є сталою величиною. Отже, таке відношення може бути характеристикою поля, і ця характеристика отримала назву напруженість електричного поля. Оскільки сила – вектор, то напруженість, яка визначається силою, що діє на пробний заряд, теж буде вектором:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{пр}}, \qquad (1.3.1)$$

причому домовились пробний заряд вважати додатним. Якщо величина пробного заряду дорівнює одиниці ($1 Кл$), то $\vec{E} = \vec{F}$ (чисельно), звідки випливає фізичний зміст напруженості електричного поля як його силової характеристики: ***напруженість у даній точці електричного поля чисельно дорівнює силі, що діє з боку цього поля на одиничний додатний точковий заряд, вміщений у дану точку поля і напрям вектора напруженості***

визначається напрямом сили, що діє на додатний заряд у даній точці поля.

З формули (1.3.1) випливає, що напруженість електричного поля повинна вимірюватись в *Н/Кл*, але, як буде далі показано, у системі СІ одиниця напруженості електричного поля встановлюється зі зв'язку між напруженістю та потенціалом електричного поля і вимірюється у *В/м* (вольт на метр).

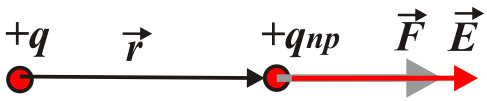


Рисунок 1.3.1

Той факт, що напруженість електричного поля є об'єктивною силовою характеристикою поля, що не залежить від величини пробного заряду, можна переконатись на прикладі розрахунку поля точкового заряду. Наприклад, в електричне поле точкового заряду q на відстані r вносимо пробний точковий заряд $q_{пр}$ як вказано на рис.1.3.1. Згідно з законом Кулона вектор сили, що діє на пробний заряд визначається таким співвідношенням:

$$\vec{F} = \frac{q \cdot q_{пр}}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}. \qquad (1.3.2)$$

Підставивши це значення сили в (1.3.1), отримаємо значення напруженості електричного поля точкового заряду:

$$\vec{E} = \frac{q}{4 \pi \varepsilon_0 \varepsilon r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}. \qquad (1.3.3)$$

З векторної форми запису напруженості електричного поля точкового заряду автоматично отримуємо напрям вектора напруженості поля у даній точці. Так, для додатного заряду q вектор $\vec{E}$ напруженості поля у заданій точці співпадає з радіусом-вектором цієї точки як вказано на рис.1.3.1. Що стосується розрахунку модуля напруженості поля точкового електричного заряду, то такий розрахунок зручно проводити за такою формулою:

$$E = k \frac{|q|}{\varepsilon \cdot r^2}. \qquad (1.3.4)$$

1.4 Принцип суперпозиції електричних полів

Звичайно, розрахунок напруженості електричного поля точкового заряду – найпростіше завдання. Але у багатьох випадках маємо справу з системою електричних зарядів і при цьому виникає необхідність розрахунку поля, створеного системою таких зарядів. Такий розрахунок проводиться на основі загального принципу суперпозиції, принципу накладання або незалежності дії електричних полів. Про те, що матерія у вигляді поля відрізняється від матерії у вигляді речовини саме принципом суперпозиції, вже йшла мова у попередньому параграфі. Стосовно електричного поля – це означає, що в одній точці простору «не заважаючи одне одному» можуть бути скільки завгодно електричних полів, створених різними електричним зарядами.

Якщо поле створене системою нерухомих точкових зарядів, то у будь-якій точці простору напруженість електричного поля дорівнює векторній сумі напруженостей полів, створених кожним окремим зарядом.

Дане твердження називають принципом суперпозиції електричних полів.

Заряди, що створюють електричне поле, можуть бути розташовані у просторі дискретно або неперервно. У першому випадку напруженість результуючого поля дорівнює

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i \quad , \tag{1.4.1}$$

де $\vec{E}_i$ – напруженість у даній точці простору поля створеного одним зарядом системи, n – загальне число зарядів. Враховуючи, що вектор напруженості поля точкового заряду визначається співвідношенням (1.3.3), то для поля системи точкових зарядів (1.4.1) матиме вигляд:

$$\vec{E} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_i^3} \cdot \vec{r}_i \quad . \tag{1.4.2}$$

1.5 Електричне поле диполя

Найпростіший випадок системи зарядів – це електричний диполь: два різнойменні однакові за модулем заряди розташовані на відстані, яка значно менша від відстані до тих точок, в яких визначається поле системи. Так як молекули багатьох діелектриків за своїми електричними властивостями подібні диполям, то вивчення електричного поля диполів має важливе практичне значення. Основною характеристикою електричного поля диполя є фізична величина, що отримала назву ***дипольного моменту*** $\vec{p}_e$ як добутку додатного заряду q диполя на вектор $\vec{l}$, який чисельно рівний відстані між зарядами і напрямлений по осі диполя від його від'ємного заряду до додатного (рис.1.5.1):

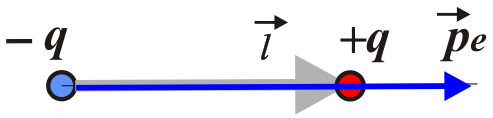


Рисунок 1.5.1

$$\vec{P}_e = q \cdot \vec{l}, \qquad (1.5.1)$$

де вектор $\vec{l}$ – називають ***плечем диполя***. Може виникнути питання, чому вектор $\vec{l}$ має напрям від від'ємного до додатного заряду диполя, а не навпаки? В принципі, напрям вектора $\vec{l}$ може бути довільним, але вибір напряму вектора $\vec{l}$ від від'ємного до додатного заряду зумовлений тим, що за таким вибором у зовнішньому електричному полі вектор дипольного моменту «намагається» орієнтуватись у напрямі напруженості цього зовнішнього поля (див. параграф 2.2). Погодьтесь, вибір протилежного напряму вектора $\vec{l}$, а відповідно і напряму вектора дипольного моменту, створював би певні математичні незручності під час опису поведінки диполів в електричному полі. Тому, поки не розглядаючи поведінки диполів в електричному полі, проведемо розрахунки електричного поля самого диполя.

Розрахунок електричного поля на осі диполя. Знаючи заряд диполя та його плече, необхідно визначити напруженість електричного поля в довільній точці B на відстані r від центра диполя як вказано на рис. 1.5.2. Згідно принципу суперпозиції, вектор

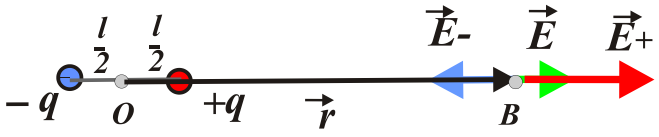


Рисунок 1.5.2

напруженості $\vec{E}$ електричного поля в точці B дорівнює векторній сумі напруженостей $\vec{E}_+$ додатного та $\vec{E}_-$ від'ємного зарядів диполя, тобто

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- \tag{1.5.2}$$

або у скалярній формі в проекціях на вибраний напрям

$$E = E_+ - E_- . \tag{1.5.3}$$

Оскільки відстань від додатного заряду до точки B дорівнює $r - l/2$, а від від'ємного $r + l/2$, то

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\cdot\frac{q}{\left(r-\frac{l}{2}\right)^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\cdot\frac{q}{\left(r+\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\cdot\frac{2\cdot l\cdot r}{\left(r^2-\frac{l^2}{4}\right)^2} \tag{1.5.4}$$

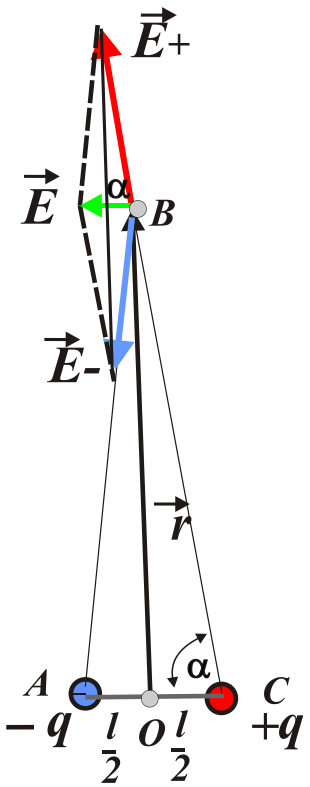


Рисунок 1.5.3

Враховуючи, що $q \cdot l = p_e$, отримаємо:

$$E = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon}\cdot\frac{2\cdot p_e\cdot r}{\left(r^2-\frac{l^2}{4}\right)^2} . \tag{1.5.8}$$

Якщо $r \rangle\rangle l$, то виразом $\frac{l^2}{4}$ можна нехтувати в порівнянні з r^2 і тоді модуль вектора

напруженості електричного поля диполя по його осі на відстані r від його центра дорівнює

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{2p_e}{r^3}. \qquad (1.5.9)$$

Розрахунок напруженості поля в точці, розташованій на перпендикулярі до осі диполя. Перпендикуляр встановлено посередині осі диполя (рис.1.5.3). Оскільки точка С рівновіддалена від зарядів диполя, то модулі напруженостей електричного поля цих зарядів додатного та від'ємного однакові і дорівнюють

$$E_+ = E_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{(AB)^2}. \qquad (1.5.10)$$

Враховуючи, що $(AB)^2 = r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$, маємо:

$$E_+ = E_- = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon} \cdot \frac{q \cdot}{(r^2 + \frac{l^2}{4})}, \qquad (1.5.11)$$

і як видно з рис.1.5.3, модуль вектора результуючої напруженості електричного поля визначається таким співвідношенням:

$$\frac{E}{2} = E_+ \cdot \cos\alpha \quad E = 2 \cdot \frac{q}{(r^2 + \frac{l^2}{4})} \cdot \cos\alpha. \qquad (1.5.12)$$

Оскільки $\cos\alpha = \frac{l/2}{AB} = \frac{l/2}{\sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4}}}$, то

$$E = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \varepsilon} \cdot \frac{q \cdot l}{(r^2 + \frac{l^2}{4})^{\frac{3}{2}}} . \qquad (1.5.13)$$

Нехтуючи величиною $\frac{l^2}{4}$ у порівнянні з r^2, та беручи до уваги, що $q \cdot l = p_e$, отримаємо шукане значення напруженості електричного диполя в точці на прямій, перпендикулярній до осі диполя за умови, що плече диполя значно менше відстані до точки, у якій визначається напруженість поля:

$$E = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon} \frac{p_e}{r^3} . \qquad (1.5.14)$$

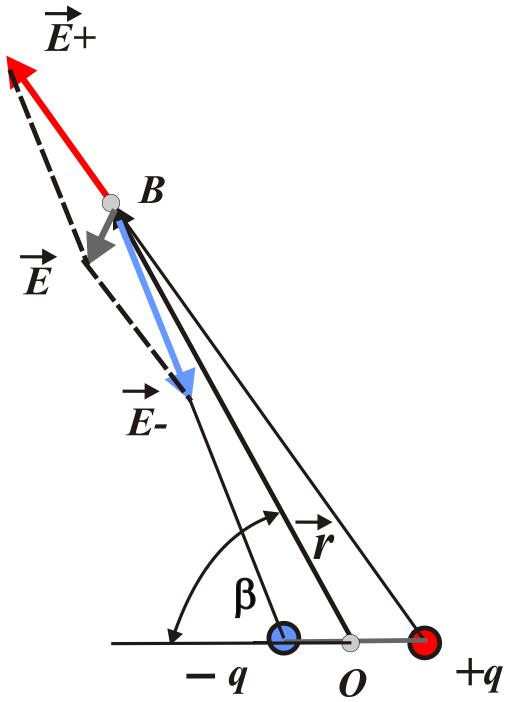


Рисунок 1.5.4

Розрахунок напруженості поля диполя в загальному випадку. Нехай радіус-вектор точки, у якій необхідно визначити напруженість поля диполя складає довільний кут з його віссю як показано на рис.1.5.4. Опускаючи громіздке математичне доведення, запишемо кінцевий результат, що визначає шукане значення модуля напруженості електричного поля диполя:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \cdot \frac{P_e}{r^3} \cdot \sqrt{1 + 3cos^2 \beta} . \qquad (1.5.15)$$

Підставивши в цю формулу значення $\beta = 0$ або $\beta = \frac{\pi}{2}$, отримуємо часткові вище розглянуті випадки поля в точці на осі диполя та поля в точці, розташованій на перпендикулярі до осі диполя.

Електричний диполь – найпростіша система електричних зарядів і, як бачимо, навіть для такої простої системи розрахунок поля може бути громіздкою математичною задачею.

1.6 Графічне зображення електричного поля. Силові лінії електричного поля. Потік вектора напруженості електричного поля

Звичайно, електричне поле можна було б графічно зобразити за допомогою векторів напруженості, але така картина, за винятком хіба що однорідного поля де вектори напруженості паралельні, не давала б загального уявлення про характер даного поля. Отже, виникає необхідність такого графічного методу зображення електричного поля, який би зразу давав можливість встановити його загальний вигляд та якою системою зарядів воно створено. Такий метод графічного зображення електричного поля запропонував англійський фізик Фарадей, з ім'ям якого пов'язані фундаментальні роботи в галузі електромагнетизму. Цей метод полягає у тому, що графічно електричне поле зображують не векторами напруженості, а так званими силовими лініями.

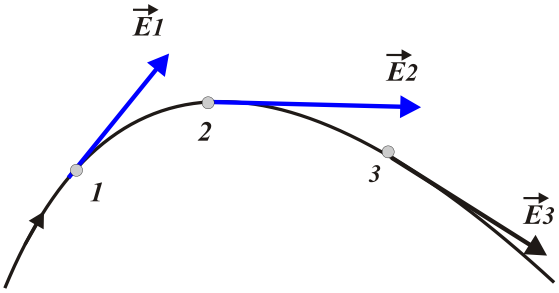


Рисунок 1.6.1

Силовими лініями електричного поля називаються лінії, дотичні до яких у кожній точці співпадають із напрямом вектора напруженості поля в даній точці (рис. 1.6.1).

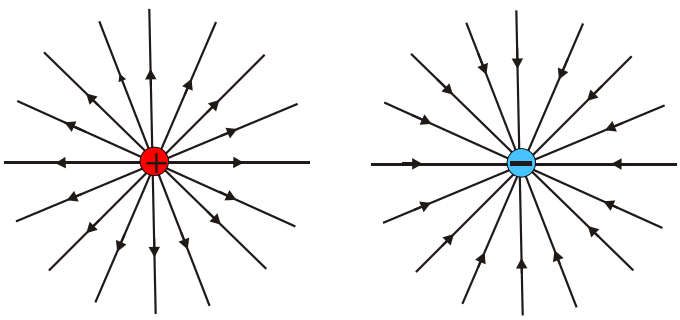


Рисунок 1.6.2

Домовились, що силові лінії електричного поля виходять з додатних, а входять у від'ємні заряди. Тому картина силових ліній додатного і від'ємного зарядів має вигляд радіальних прямих (рис. 1.6.2).

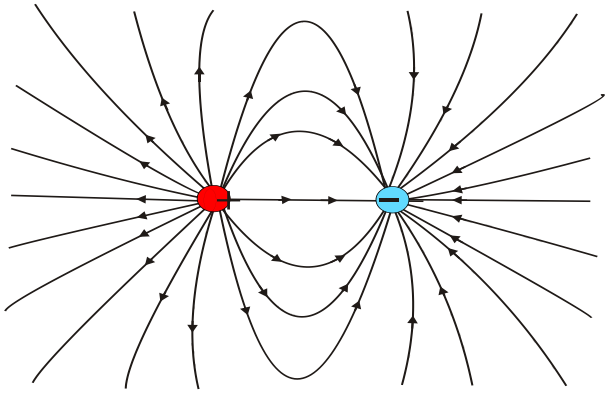


Рисунок 1.6.3

Картину силових ліній двох однакових за величиною точкових різнойменних зарядів наведено на рис.1.6.3. Окремий випадок – однорідне поле, у якому напруженість в усіх точках простору однакова і силові лінії такого поля є паралельними прямими з однаковою густиною. В ідеальному випадку – це поле між нескінченними зарядженими пластинами. Близьким до однорідного електричного поля є поле між двома близько розташованими різнойменно зарядженими площинами. Ввівши поняття силових ліній, ми можемо за їх картиною встановити не тільки лише загальний характер поля, але й визначити його кількісну характеристику – напруженість. Справді, чим ближче до заряду, тим більша напруженість поля і, як бачимо з наведених вище рисунків, біля зарядів густина силових ліній більша. А що означає «густина» ліній, як її виміряти? Ось тут ми підходимо до поняття потоку вектора напруженості електричного поля, що дає можливість кількісно визначити густину силових ліній і по цій густині визначити напруженість електричного поля. Найпростіший випадок – потік вектора напруженості однорідного електричного поля через плоску поверхню, орієнтовану перпендикулярно до вектора напруженості даного поля. На рис.1.6.4 – це поверхня S_n, яку перетинають три силові лінії однорідного електричного поля напруженістю E. Така картина подібна до картини течії рідини, про яку йшла мова у розділі «Механіка рідин і газів» першої книги, де об'ємна витрата рідини через поверхню визначалась потоком вектора швидкості Φ_v через поверхню S_n, орієнтовану перпендикулярно до вектора швидкості рідини, як добуток модуля швидкості на площу перпендикулярної до швидкості поверхні, через яку протікає дана рідина –

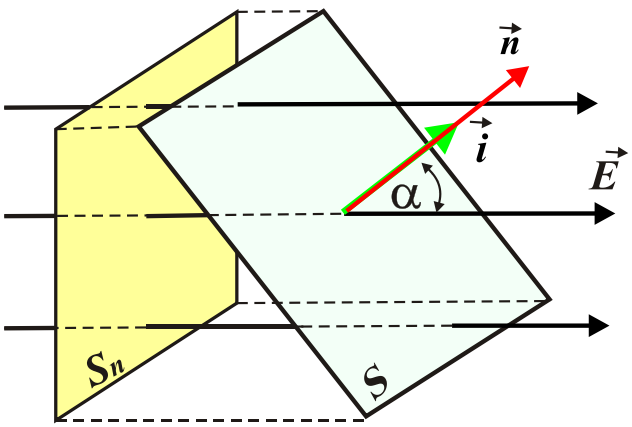


Рисунок 1.6.4

$\Phi_v = v \cdot S_n$ і число ліній течії через одиничну поверхню $(S_n = 1)$ дорівнює значенню швидкості. Отже, за аналогією до механіки рідин та газів, «замінивши» лінії течії силовими лініями електричного поля, а вектор швидкості $\vec{v}$ рідини вектором $\vec{E}$ напруженості електричного поля, отримаємо:

$$\Phi_E = E \cdot S_n, \qquad (1.6.1)$$

тобто ***потік вектора напруженості однорідного електричного поля через поверхню*** S_n***, орієнтовану перпендикулярно до вектора напруженості електричного поля***. Таким чином, з уведенням поняття потоку вектора напруженості електричного поля, число силових ліній поля, які перетинають одиничну поверхню орієнтовану перпендикулярно до вектора напруженості, чисельно дорівнює напруженості цього поля. Дійсно, якщо $S_n = 1$, то $\Phi_E = E$ (чисельно). Так, якщо на рис.1.6.4 поверхню S_n вважати поверхнею одиничної площі, то три силові лінії, які перетинають цю поверхню, дають значення потоку вектора напруженості поля і ця напруженість дорівнює 3 *Н/Кл*. Значення напруженості може бути не цілим, а дробовим числом, наприклад, Е = 0,3 *Н/Кл*. Тоді через одиничну поверхню $(S_n = 1)$ повинно проходити 0,3 силових ліній. Але як через площу $1м^2$ провести 0,3 силових ліній? Дуже просто, через полощу $S_n = 10м^2$ проведемо 3 силові лінії, у результаті чого можна вважати, що через $1м^2$ проходить 0,3 силових ліній. То ж, як кажуть, «не мучтесь і не старайтесь», тому що проведена на папері лінія, яка має відображати силову лінію зовсім не силова лінія, вона дає лише уявлення про силову лінію, адже силова лінія поля – це абстрактне геометричне поняття і число силових ліній може бути навіть ірраціональним, наприклад, 4π ліній.

Якщо плоска поверхня площею S орієнтована не перпендикулярно до силових ліній електричного поля, то потік вектора напруженості електричного поля через цю поверхню, як видно з рис.1.6.4, дорівнює:

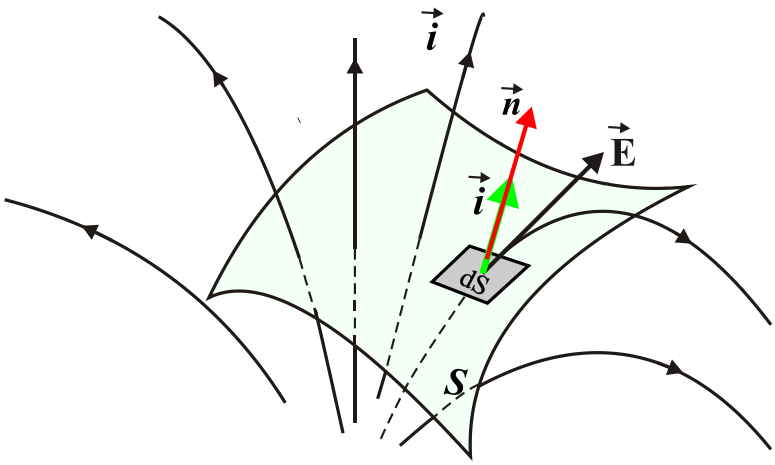
$$\Phi_E = E \cdot S \cdot \cos\alpha, \qquad (1.6.2)$$

де α – кут між вектором $\vec{E}$ напруженості електричного поля і перпендикуляром-нормаллю $\vec{n}$ до поверхні.

Оскільки потік вектора напруженості є скалярною величиною, а напруженість електричного поля є вектором, то потік вектора напруженості Φ_E повинен бути скалярним добутком двох векторів. Один з них – це сам вектор $\vec{E}$, а другим вектором повинен бути вектор $\vec{S}$ і тоді справді формула (1.6.2) є скалярним добутком векторів $\vec{E}$ та $\vec{S}$, де α – кут між цими векторами. Площа S є скаляром, але помноживши цей скаляр S на одиничний вектор $\vec{i}$, який співпадає з нормаллю до даної поверхні, отримаємо повноцінний вектор $\vec{S} = \vec{i} \cdot S$ і тоді:

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{S}. \qquad (1.6.3)$$

Оскільки вибір напряму вектора $\vec{n}$ умовний (його можна спрямувати як в одну сторону, так і в іншу до вибраної площі), то $\vec{S}$ не є істинним вектором, а псевдовектором (з поняттям псевдовектора ми вже ознайомлювались на прикладі вектора кутової швидкості, напрям якого визначається за домовленістю, за правилом правого гвинта).



Якщо поверхня довільної форми перебуває в неоднорідному електричному полі (рис.1.6.5), то потік вектора напруженості даного електричного поля через цю поверхню дорівнює сумі елементарних потоків $d\Phi_E$ через елементарні

елементи площею dS, в межах яких поле можна вважати однорідним. Математично таке твердження записується наступною формулою

$$\Phi_E = \int_S d\Phi_E, \qquad (1.6.4)$$

яка визначає принцип знаходження потоку вектора напруженості електричного поля через поверхню площею S за допомогою інтегрування елементарних потоків $d\Phi_E$. Щодо значення елементарного потоку $d\Phi_E$, то він дорівнює:

$$d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{S}, \qquad (1.6.5)$$

де $d\vec{S} = \vec{i} \cdot dS$, а вектор $\vec{i}$ – одиничний вектор що співпадає з нормаллю $\vec{n}$ до поверхні dS (рис.1.6.5). Отже,

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} d\vec{S}. \qquad (1.6.6)$$

1.7 Теореми Гауса та Остроградського-Гауса для електростатичного поля у вакуумі

На рис. 1.6.5 поверхню площею S перетинає лише частина силових ліній електричного поля, які виходять з деякого заряду або системи зарядів. А скільки всього таких силових ліній, які виходять з додатного або входять у від'ємний заряд? Якщо охопити електричний заряд будь-якою замкнутою поверхнею, то потік вектора напруженості електричного поля через цю поверхню і буде визначати число силових ліній електричного поля які

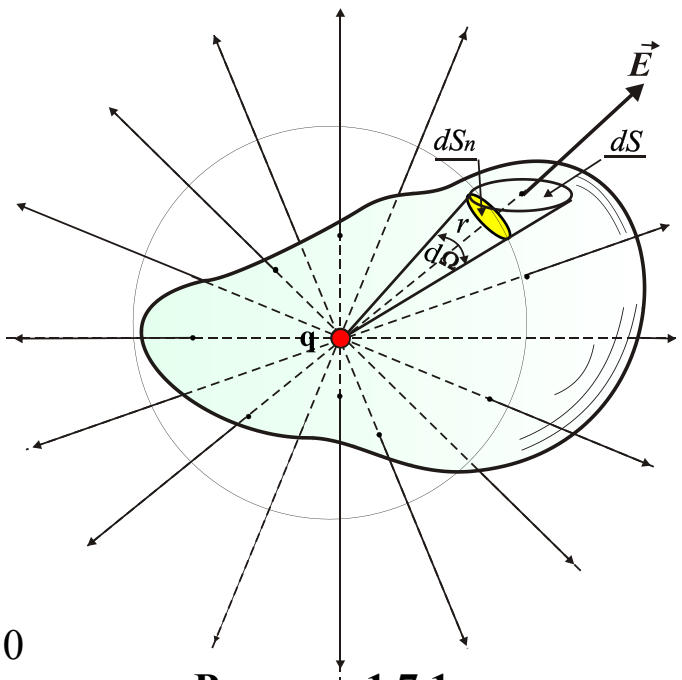


Рисунок 1.7.1

виходять з цього заряду. ***Тобто, математично необхідно встановити фундаментальну властивість електростатичного поля, яка встановлює зв'язок між числом силових ліній електричного поля, що виходять з заряду як джерела поля, і значенням цього заряду.*** Цей зв'язок встановлює теорема Гауса (1777-1885 – німецький математик, астроном, геодезист та фізик). Наприклад, точковий заряд q перебуває всередині довільної замкнутої поверхні (рис. 1.7.1). Виберемо на цій поверхні елементарну ділянку площею dS на відстані r від даного точкового заряду. Якщо ця ділянка орієнтована довільно щодо вектора $\vec{E}$ напруженості електричного поля, то елементарний потік вектора напруженості через вказану ділянку

$$d\Phi_E = E \cdot dS_n \,, \tag{1.7.1}$$

де dS_n – перпендикулярна до напряму вектора $\vec{E}$ проекція dS. Оскільки напруженість у вакуумі електричного поля точкового заряду на відстані r дорівнює $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$, то

$$d\Phi_E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dS_n}{r^2} \,. \tag{1.7.2}$$

Елементарна ділянка площею dS_n, як видно з рис.1.7.1, є елементом сферичної поверхні радіуса r. Нагадаємо, що тілесним кутом Ω називається відношення площі сферичної поверхні до квадрата її радіуса. За одиницю тілесного кута прийнятий центральний тілесний кут, який вирізує ділянку сфери, площа якої дорівнює квадрату її радіуса і отримав назву *стерадіан*. Максимальний тілесний кут цілком включає сферичну поверхню і дорівнює 4π стерадіан. Отже, у формулі (1.7.2) відношення $\frac{dS_n}{r^2}$ визначає елементарний тілесний кут $d\Omega$, тому

$$d\Phi_E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot d\Omega \quad . \tag{1.7.3}$$

Весь потік дорівнює означеному інтегралу, у якому верхньою межею інтегрування є 4π, тобто максимальне значення тілесного кута:

$$\Phi_E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{4\pi} d\Omega = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad . \tag{1.7.4}$$

Таким чином, якою б не була форма поверхні, що охоплює точковий заряд, потік вектора E через цю поверхню визначається формулою (1.7.4) і ця поверхня називається ***гаусовою***.

Якщо ж всередині замкнутої поверхні міститься N точкових зарядів $(q_1, q_2, ..., q_N)$, то згідно з принципом суперпозиції результуюча напруженість поля E дорівнює векторній сумі напруженостей полів створених окремо кожним зарядом, тобто $\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i$. Тому, потік вектора напруженості електричного поля через замкнуту поверхню, яка охоплює дану систему зарядів, дорівнює:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}\, d\vec{S} = \oint_S \left(\sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i\right) d\vec{S} = \sum_{i=1}^{N} \oint_S \vec{E}_i\, d\vec{S} \quad . \tag{1.7.5}$$

Так як кожен з інтегралів під знаком суми є потік вектора напруженості поля точкового заряду через замкнуту поверхню і згідно з (1.7.4) дорівнює $\frac{q_i}{\varepsilon_0}$, то

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i \quad . \tag{1.7.6}$$

Отримане співвідношення є математичним записом теореми Гауса для електричного поля у вакуумі у системі СІ, яка стверджує, що ***потік вектора напруженості електричного поля у вакуумі через***

довільну замкнуту поверхню дорівнює діленій на ε_0 ***алгебраїчній сумі зарядів всередині цієї поверхні*** і має наступний фізичний зміст: ***джерелом електростатичного поля є нерухомі електричні заряди і число силових ліній електричного поля, які виходять або входять у заряди в залежності від їх знаку, дорівнює діленій на*** ε_0 ***алгебраїчній сумі цих зарядів***.

Електричний заряд будь-якого зарядженого тіла є дискретним (дорівнює сумі елементарних зарядів, між якими є вільний простір, але відстань між елементарними зарядами може бути настільки малою, що, наприклад, «ланцюжок» з близько розташованих електронів можна вважати суцільним лінійним негативним електричним зарядом). У випадку неперервного розподілу зарядів вводять поняття густини зарядів. Так, для зарядженої нитки зручно користуватись лінійною густиною зарядів, тобто заряд одиниці довжини нитки (*Кл/м*). Для зарядженої поверхні визначають поверхневу густину зарядів – заряд на одиницю площі поверхні (*Кл/м*^{2}), а при неперервному розподілі зарядів у деякому об'ємі використовують об'ємну густину зарядів (*Кл/м*^{3}). Об'ємну густину ρ зарядів вводять як відношення заряду dq до фізично нескінченно малого об'єму dV, у якому є цей заряд:

$$\rho = \frac{dq}{dV}. \qquad (1.7.7)$$

Математика вільно оперує поняттям нескінченно малих величин, але чи можна в математично нескінченно малий об'єм помістити навіть елементарний заряд – електрон? Адже він має хоч і дуже малий, але все таки має певний об'єм. Тому, під фізично нескінченно малим об'ємом треба розуміти такий об'єм, у межах якого густину зарядів вважати однаковою і одночасно не враховувати дискретність самого заряду. Отже, знаючи об'ємну густину заряду у будь-якій точці простору, можна визначити сумарний заряд всередині замкнутої поверхні. Для цього необхідно визначити інтеграл

$$\sum q_i = \int_V \rho \cdot dV, \qquad (1.7.8)$$

де індекс V вказує, що інтегрування проводиться по всьому об'єму заданого простору, в якому необхідно визначити сумарний електричний заряд. Таким чином, формула (1.7.6) прийме такий вигляд:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \cdot dV \quad . \tag{1.7.9}$$

Дана формула є записом теореми Гауса в інтегральній формі для електричного поля у вакуумі, яка стверджує, що сумарний (інтегральний) потік вектора напруженості електричного поля через замкнуту поверхню визначається сумарним (інтегральним) зарядом всередині цієї поверхні.

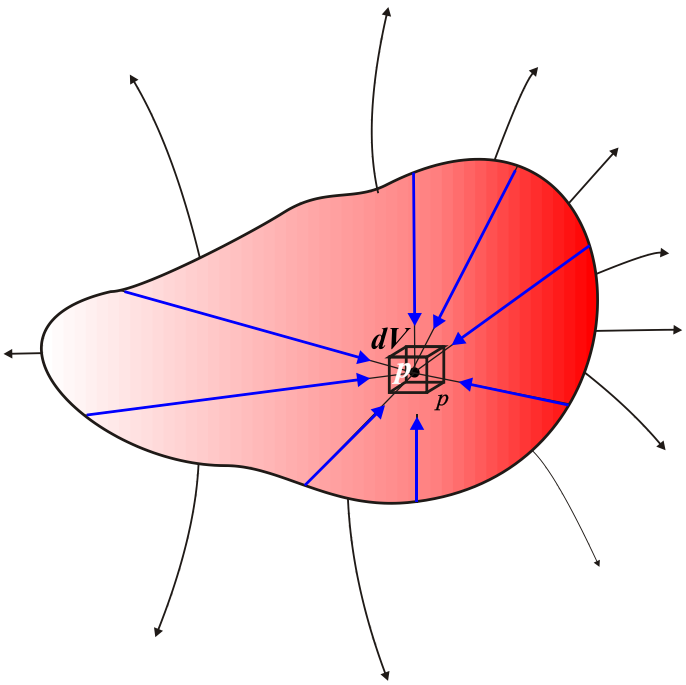


Рисунок 1.7.2

У загальному випадку об'ємна густина зарядів ρ може бути складною функцією $\rho = \rho(x, y, z)$ від просторових координат, що якісно ілюструє рис.1.7.2, де замкнута поверхня охоплює неперервно розподілений заряд, густина якого подібно до насиченості кольору неперервно змінюється зліва направо. Виникає питання: якщо вираз (1.7.9) є теоремою Гауса в інтегральній формі, то як перейти до диференціальної форми даної теореми, тобто що «дає» кожна точка простору з об'ємною густиною зарядів ρ? Відношення $\frac{\Phi_E}{V}$ сумарного потоку до об'єму, де є «джерело» поля (як із джерела, з якого витікає потік рідини), характеризує середню сумарну (інтегральну) питому потужність такого джерела. Якщо стягувати замкнутий контур у точку (на рис.1.7.2 точка *p)* і при цьому визначати границю, до якої прямує відношення $(\lim_{V \to P} \frac{\Phi_E}{V})$, то таке відношення характеризує питому

потужність джерела поля в даній точці простору і називається дивергенцією (з латинської *divergere* – розходження) вектора $\vec{E}$ і позначається $divE$. Таким чином

$$divE = \lim_{V \to P} \frac{\Phi_E}{V} = \frac{d\Phi_E}{dV} \quad . \qquad (1.7.10)$$

Звідси $d\Phi_E = divE \cdot dV$. Отже, знаючи дивергенцію вектора напруженості електричного поля у кожній точці простору, можна визначити потік цього вектора ($\oint_S \vec{E}d\vec{s}$) через будь-яку замкнуту поверхню як інтеграл від дивергенції вектора напруженості по всьому об'єму V, який охоплює замкнута поверхня:

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \int_V divEdV \quad . \qquad (1.7.11)$$

Остроградський М.В.

Отримане співвідношення є частковим випадком більш загальної математичної теореми Остроградського, яка встановлює зв'язок між потоком вектора будь-якого поля через замкнуту поверхню з дивергенцією цього вектора *(Остроградський Михайло Васильович (1801–1862) – видатний український математик)*, тому співвідношення (1.7.11) отримало назву теореми Остроградського-Гауса для електростатичного поля.

Зіставляючи формули (1.7.9) та (1.7.11), отримаємо:

$$divE = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad . \qquad (1.7.12)$$

В декартових координатах дивергенція вектора $\vec{E}$ дорівнює

$$div\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \qquad (1.7.13)$$

Для спрощення запису використовують оператор ∇ ***-на́бла,*** оператор Гамільтона *(Вільям Ровен Га́мльтон (1806—1865) — ірландський математик)*:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}, \qquad (1.7.14)$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні вектори. Тому, скориставшись оператором набла, формула (1.7.12) набуде вигляду:

$$\nabla\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \qquad (1.7.15)$$

Отриманий вираз (1.7.15) є теоремою Гауса в диференціальній формі, тобто ***джерелом електричного поля є електричний заряд і дивергенція (розходження) вектора напруженості електричного поля у даній точці простору дорівнює діленій на електричну сталу*** ε_0 ***об'ємній густині зарядів у цій же точці простору.***

Про фундаментальність цієї теореми буде йти мова в рівняннях Максвелла (розділ 12).

1.8 Розрахунок симетричних електричних полів за допомогою теореми Гауса

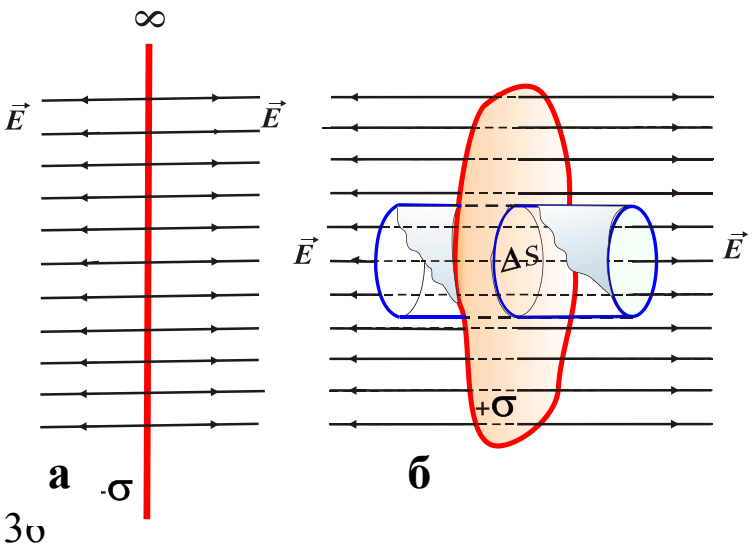


Рисунок 1.8.1

В принципі, електричне поле будь-якої системи зарядів можна розрахувати, використовуючи принцип суперпозиції. Наприклад, є заряджена пластина з поверхневою густиною зарядів σ, тобто відомий заряд на одиницю площі

поверхні (*Кл/м*^{2}) і необхідно визначити напруженість електричного поля такої пластини на будь-якій відстані. Для цього спочатку розраховують напруженість $d\vec{E}$ електричного поля, створювану елементом поверхні dS, заряд якої можна вважати точковим, після цього результуючу напруженість знаходять як інтегральну суму $\vec{E} = \int_S d\vec{E}$. Але в окремих випадках теорема Гауса значно спрощує розрахунок електричного поля системи зарядів і, в першу чергу, це стосується розрахунку поля нескінченної зарядженої пластини. З міркувань симетрії випливає, що у будь-якій точці простору напрям напруженості поля нескінченної зарядженої площини, слід якої наведений на рис.1.8.1а, перпендикулярний до площини з поверхневою густиною σ зарядів. Тому, для застосування теореми Гауса доцільно вибрати замкнуту поверхню у вигляді циліндра, твірні якої перпендикулярні до площини (рис.1.8.1б). Тоді потік вектора напруженості електричного поля через бічні поверхні циліндра відсутній і дорівнює сумі потоків через дві основи циліндра площею ΔS:

$$\Phi_E = 2E \cdot \Delta S. \qquad (1.8.1)$$

Оскільки вибраний циліндр охоплює на площині заряд $q = \sigma \cdot \Delta S$, то згідно з теоремою Гауса $\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}$ і тоді

$$2E \cdot \Delta S = \frac{\sigma \cdot \Delta S}{\varepsilon_0}, \qquad (1.8.2)$$

звідки напруженість електричного поля нескінченної зарядженої поверхні з поверхневою густиною зарядів σ у вакуумі дорівнює

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \qquad (1.8.3)$$

Якщо середовище не вакуум, а діелектрик з діелектричною проникністю ε, то напруженість електричного поля у порівнянні з вакуумом зменшується (буде показано в наступному розділі) в ε-

разів. Тому з врахуванням середовища, у якому знаходиться заряджена поверхня, напруженість її електричного поля дорівнює

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}.$$

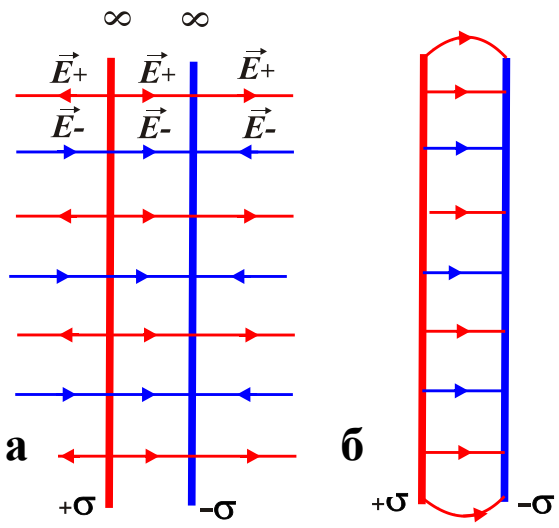


Рисунок 1.8.2

Для обчислення напруженості електричного поля створеного двома нескінченними протилежно зарядженими площинами виходять з того, що силові лінії електричного поля виходять з додатних, а входять у від'ємно заряджені площини, то завдяки їх паралельному розташуванню (рис.1.8.2а) зовні площин вектори напруженостей $\vec{E}_+$ та $\vec{E}_-$ їх електричних полів мають протилежні напрями, внаслідок чого результуюча напруженість дорівнює нулю. У той же час між площинами напрями векторів $\vec{E}_+$ та $\vec{E}_-$ однакові і тому модуль результуючої напруженості електричного поля між такими двома нескінченними площинами на основі (1.8.3) дорівнює сумі їх напруженостей, тобто

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \qquad (1.8.4)$$

У випадку середовища з діелектричною проникністю ε, що заповнює простір між такими паралельними зарядженими поверхнями, напруженість поля буде меншою в ε-разів у порівнянні з вакуумом, тобто

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}. \qquad (1.8.5)$$

Формули (1.8.4) і (1.8.5) з певним наближенням справедливі для площин на відстанях значно менших від їх розмірів. Особливо це стосується поля плоского конденсатора, між обкладками якого електричне поле практично однорідне і лише на краях обкладок поле неоднорідне (рис.1.8.2б).

Ще один приклад симетрії електричного поля, розрахунок якого спрощується із застосуванням теореми Гауса – це поле нескінченно зарядженої нитки. Дійсно, з міркувань симетрії силові лінії електричного поля нескінченно зарядженої нитки повинні бути радіальними прямими (рис.1.8.3).

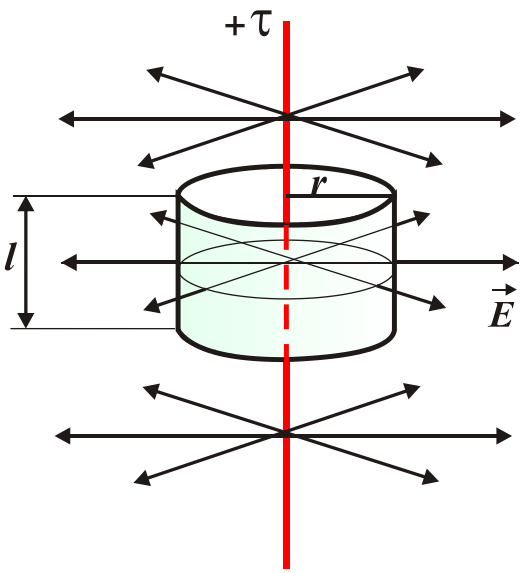


Рисунок 1.8.3

Якщо гаусовою поверхнею вибрати циліндр, вісь якого співпадає з ниткою, то потік вектора напруженості електричного поля через таку поверхню буде потоком лише через площу S бічної поверхні циліндра:

$$\Phi_E = E \cdot S = E \cdot 2\pi r \cdot l, \qquad (1.8.6)$$

де r – радіус циліндра, тобто відстань від нитки де необхідно визначити напруженість поля; l – висота циліндра, яка дорівнює довжині нитки всередині циліндра. Якщо лінійна густина зарядів нитки $\tau = \frac{q}{l}$ (Кл/м), то заряд всередині вибраної циліндричної поверхні становить $q = \tau \cdot l$. Тоді, згідно з теоремою Гауса,

$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\tau \cdot l}{\varepsilon_0}. \qquad (1.8.7)$$

Прирівнюючи (1.8.6) та (1.8.7), отримаємо формулу (1.8.8) напруженості електричного поля у вакуумі на відстані r від нескінченно зарядженої нитки з лінійною густиною зарядів τ:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}. \qquad (1.8.8)$$

У середовищі з діелектричною проникністю ε напруженість електричного поля дорівнює

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r}.$$

У розділі «Механіка» першої книги курсу фізики розглядалась задача розрахунку гравітаційного поля тіла сферичної форми на прикладі гравітаційного поля Землі. Було показано, що такий розрахунок значно спрощується застосуванням теореми Гауса для потоку вектора напруженості гравітаційного поля. Тому, якщо замінити вектор $\vec{G}$ напруженості гравітаційного поля на вектор $\vec{E}$ напруженості електричного поля, а масу тіла m на електричний заряд q, то розрахунок напруженості електричного поля зарядженої сфери із застосуванням теореми буде аналогічним розрахунку гравітаційного поля тіла сферичної форми і з міркувань симетрії силові лінії такої зарядженої сфери повинні бути радіальними прямими. Будемо визначати напруженість електричного поля зарядженої сфери починаючи з її центра в напрямі осі OX, яка співпадає з напрямом силової лінії (рис.1.8.4).

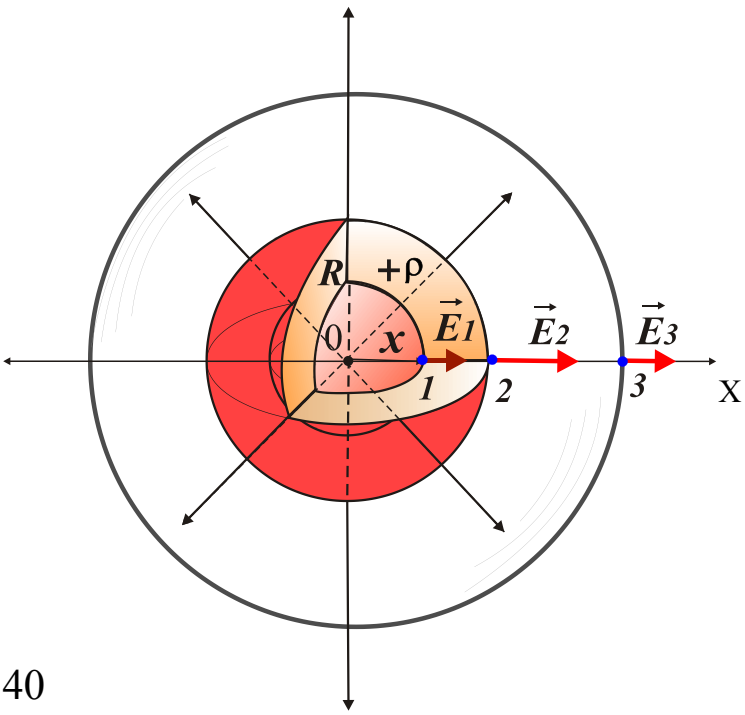


Рисунок 1.8.4

Для застосування теореми Гауса щодо розрахунку поля всередині зарядженої сфери, наприклад, в точці 1, виділимо всередині сфе сферичний об'єм радіуса x, тобто тій відстані x від центра сфери, де необхідно визначити напруженість електричного поля. Очевидно, що сферична поверхня вибраного

сферичного об’єму є гаусовою поверхнею і згідно теореми Гауса потік вектора напруженості електричного поля через площу такої сферичної поверхні визначається зарядом, який охоплює ця замкнута поверхня. Якщо об’ємна густина заряду ρ в усіх точках сфери однакова, то заряд q_x всередині виділеної сфери радіуса x з об’ємом V_x дорівнює ρV_x. Оскільки об’єм цієї сфери дорівнює $\frac{4}{3}\pi \cdot x^3$, то

$$q_x = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot x^3 . \qquad (1.8.9)$$

Щодо потоку вектора напруженості через сферичну поверхню радіуса x площею $S_x = 4\pi \cdot x^2$ та за напруженості E_1 електричного поля, то $\Phi_{E_1} = E_1 \cdot 4\pi \cdot x^2$ і тоді, згідно з теоремою Гауса $\Phi_{E_1} = \frac{q_x}{\varepsilon_0}$, можна записати:

$$E_1 \cdot 4\pi \cdot x^2 = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot x^3}{\varepsilon_o} , \qquad (1.8.10)$$

звідки

$$E_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\rho}{\varepsilon_0} \cdot x . \qquad (1.8.11)$$

За загальним зарядом q всієї сфери, що має об’єм $V = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3$, об'ємна густина зарядів такої сфери радіуса R становить:

$$\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi \cdot R^3} . \qquad (1.8.12)$$

Тому, враховуючи це значення об’ємної густини зарядів, маємо:

$$E_1 = \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R^3} \cdot x \quad . \qquad (1.8.13)$$

Отже, всередині об'ємно зарядженої сфери напруженість електричного поля змінюється за лінійним законом від нуля у центрі сфери ($x=0$) до значення E_2 на її поверхні ($x=R$).

Для розрахунку електричного поля за межами зарядженої кулі, наприклад, у точці *3*, виберемо гаусову поверхню як сферу радіуса $x > R$. Тоді потік вектора E_3 напруженості електричного поля через поверхню такої сфери дорівнює $\Phi_{E_3} = E_3 \cdot 4\pi \cdot x^2$ і, згідно з теоремою Гауса, цей потік тепер вже визначається зарядом q всієї зарядженої кулі:

$$E_3 \cdot 4\pi \cdot x^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}, \qquad (1.8.14)$$

звідки

$$E_3 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}, \qquad (1.8.15)$$

тобто ззовні зарядженої кулі електричне поле тотожне з полем точкового заряду, розташованого в центрі кулі.

Наочне уявлення про залежність напруженості електричного поля об'ємно зарядженої кулі залежно від відстані від її центра дає рис.1.8.5. Перша ділянка на цьому графіку характеризує лінійне зростання напруженості електричного поля від нуля, починаючи з центра сфери, до напруженості на її поверхні. Ззовні сфери напруженість поля зменшується обернено пропорційно квадрату відстані від центра сфери, тобто аналогічно полю точкового заряду.

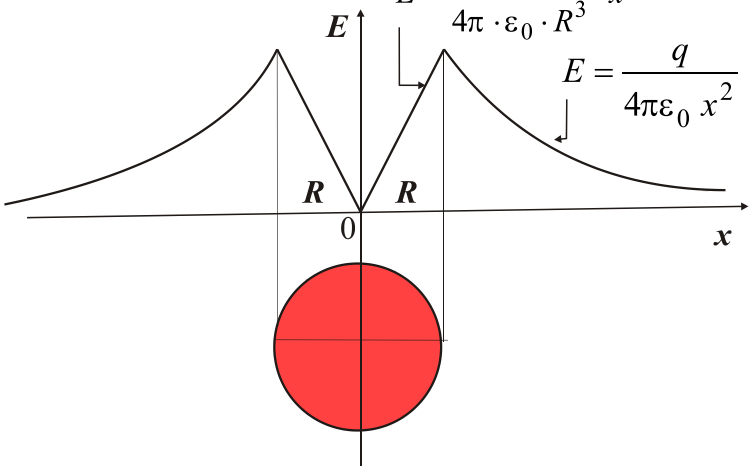


Рисунок 1.8.5

У випадку зарядженої сферичної поверхні (порожнистої сфери – рис.1.8.6) картина електричного поля буде дещо іншою. Наприклад, поверхнева густина σ зарядів сферичної поверхні радіуса R в усіх її точках однакова і тоді заряд такої поверхні площею S дорівнює $q = \sigma \cdot S = \sigma \cdot 4\pi R^2$. Тоді, з міркувань симетрії випливає, що продовження силових ліній електричного поля такої зарядженої сферичної поверхні перетинаються в одній точці – центрі сфери (рис.1.8.6). Оскільки всередині сферичної поверхні заряду немає, то відсутність силових ліній електричного поля вказує і на відсутність самого поля. Отже, всередині зарядженої сферичної поверхні (сфера з порожниною) електричного поля немає. Для розрахунку поля такої зарядженої сферичної поверхні на відстані x більшій її радіуса R зручно вибрати гаусову поверхню у вигляді сфери з центром, що співпадає з центром зарядженої сфери (рис.1.8.6). Тоді потік вектора напруженості електричного поля через таку сферичну поверхню площею $S = 4\pi \cdot x^2$ дорівнює $\Phi_E = E \cdot 4\pi \cdot x^2$ і, згідно з теоремою Гауса,

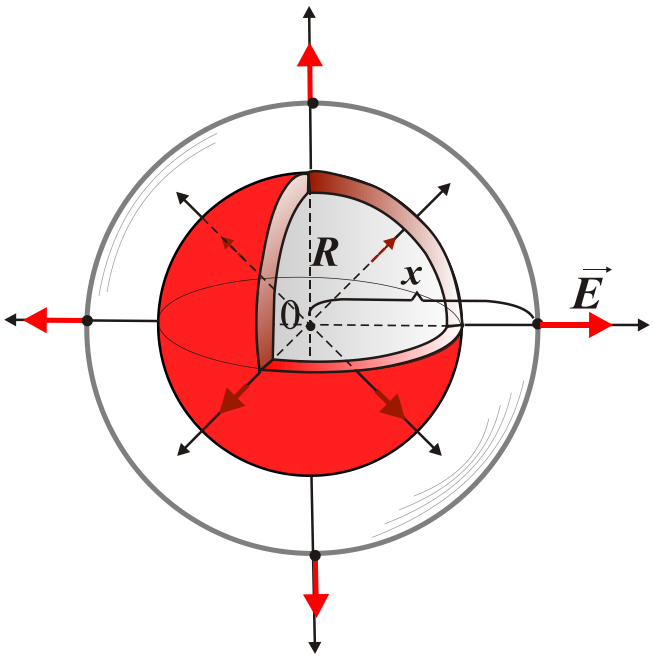


Рисунок 1.8.6

$$E \cdot 4\pi \cdot x^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}, \qquad (1.8.16)$$

звідки

$$E = \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 x^2}, \qquad (1.8.17)$$

тобто напруженість електричного поля зарядженої сферичної поверхні на відстанях більших від її радіуса визначається формулою (1.3.3) поля точкового заряду, розміщеного у центрі такої поверхні. Графічну залежність напруженості електричного поля від центра зарядженої сферичної поверхні наведено на рис.1.8.7, на якому вказано відсутність поля всередині такої поверхні. Ззовні поверхні електричне поле аналогічне полю точкового заряду, який був би розташований у центрі даної сфери.

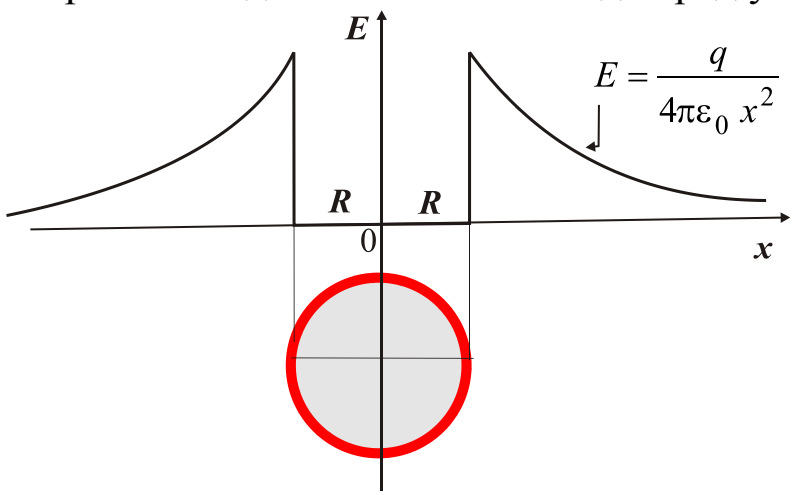


Рисунок 1.8.7

Завершуючи розгляд питань розрахунку електричного поля систем зарядів застосуванням теореми Гауса, ще раз наголосимо, що таке застосування спрощує розрахунок напруженості електричних полів лише в окремих випадках симетрії.

1.9 Робота сил електричного поля. Потенціал електричного поля

Якщо в електричному полі є електричний заряд, то під дією сил цього поля заряд може переміщатись, тобто поле може виконувати роботу. Отже, заряд в електричному полі володіє потенціальною енергією, зміна якої визначає роботу сил цього поля при переміщенні у ньому електричного заряду. Крім напруженості – силової характеристики електричного поля, повинна бути ще й енергетична ха

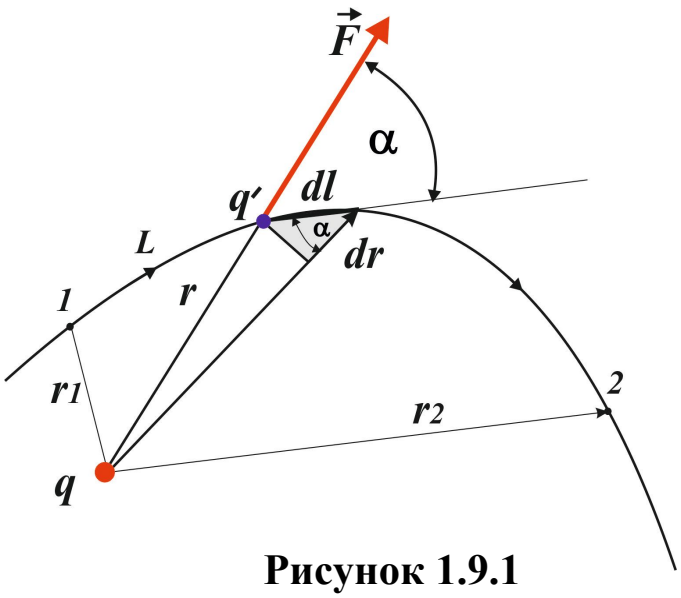


Рисунок 1.9.1

рактеристика. Ввести цю характеристику можна на прикладі роботи сил електричного поля при переміщенні в ньому заряду. Наприклад, під дією сил електричного поля точкового заряду q по довільній траєкторії L переміщається точковий заряд q' так, що початкова і кінцева відстань між цими зарядами змінюється від r_1 до r_2 (рис.1.9.1.). Оскільки відстань між зарядами змінюється, то згідно з законом Кулона змінюється сила взаємодії між зарядами. Отже, у даному випадку робота сил електричного поля – це робота змінної сили. Тому розглянемо таке мале переміщення dl, щоб силу, яка діє на заряд можна вважати сталою. Тоді елементарна робота такої вже сталої сили дорівнює

$$dA = F \cdot dl \cdot \cos\alpha \,. \qquad (1.9.1)$$

При переміщенні на dl заряду q' відстань r між зарядами змінюється на dr і, як видно з рис.1.9.1, $dl \cdot \cos\alpha = dr$ та, враховуючи що сила F – це кулонівська сила взаємодії зарядів ($F = \frac{q \cdot q'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$), формула (1.9.1) набуде вигляду:

$$dA = \frac{q' \cdot q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dr}{r^2} \,. \qquad (1.9.2)$$

Тоді вся робота на шляху між початковим положенням *1* та кінцевим положенням *2* заряду q дорівнює сумі всіх елементарних робіт, тобто означеному інтегралу

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q \cdot q'}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dr}{r^2} = \left(\frac{q \cdot q'}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{q \cdot q'}{4\pi\varepsilon_0 r_2} \right), \quad (1.9.3)$$

звідки випливає, що робота сил електростатичного поля під час переміщення в ньому заряду не залежить від траєкторії його переміщення, а тільки від різниці функцій вигляду:

$$W = q' \cdot \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}, \quad (1.9.4)$$

які визначають потенціальну енергію взаємодії точкових електричних зарядів. Якщо заряди однойменні, то потенціальна енергія їх взаємодії (відштовхування) додатна. Навпаки, у випадку різнойменних зарядів потенціальна енергія їх взаємодії від'ємна. Потенціальна енергія скалярна або іншими словами адитивна величина (з латинської *additivus* – додавати) і тим самим потенціальна енергія заряду q' у полі точкових зарядів $q_1, q_2, ..., q_n$ дорівнює сумі його потенціальних енергій окремо в електричному полі кожного заряду:

$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i = q' \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}, \quad (1.9.5)$$

де r_i – відстань між зарядами q' та q_i.

З формул (1.9.4) та (1.9.5) випливає, що відношення потенціальної енергії W заряду q' до його величини не залежить від q', а тому може бути енергетичною характеристикою поля, яку називають потенціалом точки поля:

$$\varphi = \frac{W}{q'} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}. \quad (1.9.6)$$

Якщо $q' = 1\,Кл$, то $\varphi = W$ (чисельно). Отже, отримуємо фізичний зміст потенціалу електричного поля: ***потенціал у даній точці електричного поля чисельно дорівнює потенціальній енергії***

одиничного додатного точкового заряду, розташованого у даній точці поля.

У системі СІ одиницею потенціалу є *Вольт (В)*, названий в честь Алессандро Вольта (1745–1827), італійського природодослідника, фізика, хіміка і фізіолога, про роботи якого ми будемо говорити в розділі 6.5. ($1B = 1\frac{Дж}{Кл}$).

Потенціал поля точкового заряду, як випливає з формул (1.9.4) та (1.9.6), дорівнює

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}. \qquad (1.9.7)$$

Тому, з введенням поняття потенціалу електричного поля формулу (1.9.4) запишемо у вигляді:

$$W = q' \cdot \varphi, \qquad (1.9.8)$$

а робота сил електричного поля під час переміщення в ньому заряду з точки поля з потенціалом φ_1 у точку з потенціалом φ_2, згідно (1.9.3), дорівнює:

$$A = q' \cdot (\varphi_1 - \varphi_2), \qquad (1.9.9)$$

тобто ***робота сил електричного поля під час переміщення в ньому точкового заряду дорівнює добутку цього заряду на різницю потенціалів між початковою і кінцевою точками переміщення***.

Під час переміщення електричного заряду з даної точки поля в точку поза полем, тобто $r_2 \to \infty$, де потенціал поля рівний нулю, робота A_∞ сил електричного поля, згідно (1.9.9), буде дорівнювати $A_\infty = q' \cdot \varphi$, звідки

$$\varphi = \frac{A_\infty}{q'}. \qquad (1.9.10)$$

Отже, ***потенціал даної точки електростатичного поля можна ще також визначити як фізичну величину, чисельно рівну роботі, виконуваній електростатичними силами під час переміщення одиничного додатного точкового заряду з даної точки поля в нескінченність.***

Звичайно, ми не будемо кожного разу «бігати» в нескінченність за нулем потенціалу, тому на практиці зручно вважати рівним нулю потенціал Землі, адже у більшості випадків важливо знати різницю потенціалів, а не їх абсолютні значення. Тому, коли говоримо про потенціал у даній точці поля, це різниця потенціалів між даною точкою та іншою, потенціал якої домовились вважати рівним нулю.

В атомній та квантовій фізиці зручно користуватись позасистемною одиницею роботи або енергії, яка називається ***електроновольтом (еВ). Один електрон-вольт дорівнює енергії, якої набуває елементарний заряд (заряд електрона) під час переміщення між точками з різницею потенціалів*** **1*В*** ($1eB = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ Кл \cdot 1B = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ Дж$).

1.10 Циркуляція вектора напруженості електричного поля

Теорема Гауса для електростатичного поля стверджує, що джерелом поля є електричні заряди і ця теорема є статичною теоремою електростатичного поля, іншими словами в цій теоремі немає динаміки, немає переміщення зарядів. Елементи динаміки мали місце при введені потенціалу електричного поля через роботу сил цього поля під час переміщення електричного заряду і було доведено, що робота сил електричного поля не залежить від траєкторії переміщення заряду. Отже, крім теореми Гауса необхідна ще одна теорема, яка б математично описувала таку фундаментальну властивість електростатичного поля. Так, якщо початкова і кінцева точки переміщення заряду в електростатичному полі співпадають, то очевидно, що робота сил поля по такому замкнутому контуру дорівнює нулю. Отже, саме цей «нуль» повинен входити ще в одну, крім теореми Гауса, фундаментальну

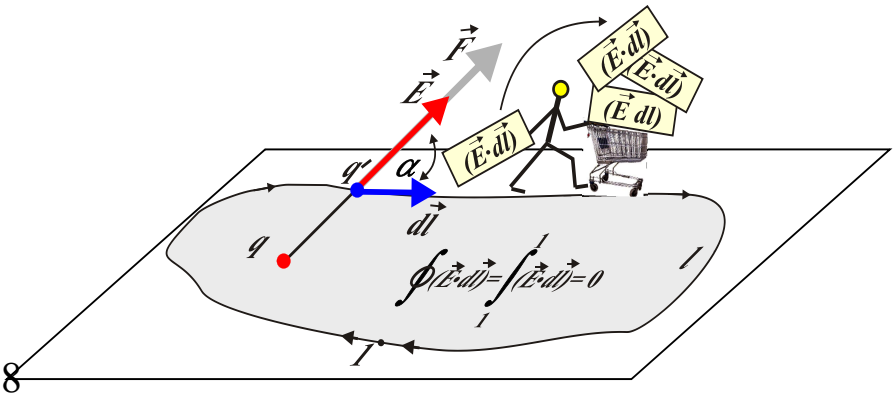


Рисунок 1.10.1

характеристику електростатичного поля. Тобто, якщо заряд q' переміщається в полі заряду q по замкнутому контуру, як це показано на рис.1.10.1, то робота сил електричного поля по такому замкнутому контуру дорівнює нулю. Дійсно, початкова і кінцева точки співпадають, їх потенціали однакові і тому $A = q'(\varphi_1 - \varphi_1) = 0$. Цей самий нуль роботи має бути результатом суми елементарних робіт на всіх ділянках замкнутого контуру. Елементарна робота dA сили $\vec{F}$ електричного поля під час елементарного переміщення $d\vec{l}$ дорівнює скалярному добутку векторів $\vec{F}$ та $d\vec{l}$:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{l}. \qquad (1.10.1)$$

Враховуючи, що силу, яка діє на заряд в електричному полі, можна визначити через напруженість поля, тобто $\vec{F} = \vec{E} \cdot q'$, то

$$dA = q' \cdot (\vec{E} \cdot d\vec{l}). \qquad (1.10.2)$$

Вся робота дорівнює інтегралу по замкнутому контуру, тобто коли верхня та нижня межі інтегрування співпадають:

$$A = q' \cdot \oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l}. \qquad (1.10.3)$$

Оскільки $q' \neq 0$, а робота сил електричного поля по замкнутому контуру $A = 0$, то

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0. \qquad (1.10.4)$$

Отриманий інтеграл називають циркуляцією вектора $\vec{E}$ (з латинської *circulation* – кругообіг, круговий рух) і в цей інтеграл вже не входить значення заряду який переміщався по замкнутому контуру. Отже, циркуляція вектора напруженості електростатичного поля є його фундаментальною інтегральною характеристикою. Робота сил електростатичного поля не залежить від траєкторії

переміщення в ньому заряду і якщо йти, як це вказано на рис.1.10.1, по замкнутому контуру кроками рівними $d\vec{l}$, визначаючи при цьому напруженість $\vec{E}$, то «збираючи» по дорозі $(\vec{E}\cdot d\vec{l})$ побачимо, наш «кошик» виявиться порожнім, обійшовши весь контур.

Щоб математично описати потенціальний характер електростатичного поля у точці, треба від інтегральної форми запису циркуляції вектора напруженості перейти до диференціальної форми. Подібним чином поступали, переходячи від інтегральної форми запису теореми Гауса до диференціальної форми, стягуючи замкнуту поверхню у точку і тим самим вводили поняття дивергенції вектора напруженості електричного поля. Тепер ми будемо стягувати замкнутий контур у точку і визначати границю

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l}}{\Delta S}, \qquad (1.10.5)$$

до якої прямує відношення циркуляції вектора напруженості електричного поля до площі контуру ΔS, який стягується у точку. Але така границя для довільно орієнтованого в полі контуру ще не може бути характеристикою поля в точці, оскільки значення цієї границі залежить не тільки від самого поля, але й від орієнтації у ньому замкнутого контуру. Цю орієнтацію визначають напрямом додатної нормалі $\vec{n}$ до контуру. Додатною нормаллю вважається нормаль, напрям якої визначають за правилом свердлика (правого гвинта), як це показано на рис. 1.10.2. Тому границю (1.10.5) можна вважати проекцією деякого вектора на напрям нормалі до площини контуру, вздовж якого визначається циркуляція вектора напруженості електричного поля. Цей вектор отримав назву ***ротора вектора*** $\vec{E}$ і позначається $rot\vec{E}$. Отже, з введенням поняття ротора вектора напруженості електричного поля вираз (1.10.5) набуде вигляду:

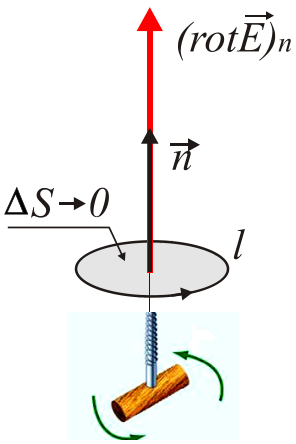


Рисунок 1.10.2

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\Delta S} = (rot\vec{E})_n, \qquad (1.10.6)$$

де $(rot\vec{E})_n$ визначає проекцію вектора $rot\vec{E}$ на додатну нормаль до поверхні $\Delta S \to 0$, яку охоплює замкнутий контур l (рис.1.10.2).

Якщо дивергенція вектора напруженості дає можливість вирахувати потік вектора напруженості через замкнуту поверхню, то тепер виникає аналогічне питання – як, знаючи ротор вектора напруженості електричного поля, визначити його циркуляцію по замкнутому контуру? Відповідь на це питання дає фундаментальна математична теорема векторного аналізу –теорема Стокса (Джордж Габріе́ль Стокс (1819–1903) — англійський фізик-теоретик і математик.). Ця теорема встановлює співвідношення між поверхневим та криволінійним інтегралами:

$$\oint_l \vec{a} \cdot d\vec{l} = \int_S (rot\vec{a})_n \, dS. \qquad (1.10.7)$$

Тобто, у загальному випадку циркуляція вектора будь-якого векторного поля $\vec{a}$ по замкнутій кривій (ліва частина рівняння 1.10.7) дорівнює потоку $rot\vec{a}$ через поверхню охоплену цією кривою (права частина рівняння). Стосовно електростатичного поля, для якого циркуляція вектора напруженості дорівнює нулю, теорема Стокса набуде вигляду:

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S (rot\vec{E})_n \, dS = 0. \qquad (1.10.8)$$

Отже, $rot\vec{E} = 0$.

Той факт, що для електростатичного поля $rot\vec{E} = 0$, то сама назва (ротор – обертання, вихор) характеризує його безвихровий характер – силові лінії електростатичного поля не замкнуті. В розділі «Магнетизм» буде показано, що магнітне поле принципово відрізняється від електростатичного саме тим, що для магнітного

поля ротор його вектора напруженості не дорівнює нулю і цей факт знайшов відображення в рівняннях Максвелла.

1.11 Еквіпотенціальні поверхні

Ввівши поняття потенціалу, можна ввести і поняття ***еквіпотенціальних поверхонь – поверхонь рівного потенціалу.***

Робота сил електричного поля під час переміщення заряду по еквіпотенціальній поверхні дорівнює нулю, адже різниця потенціалів між будь якими точками цієї поверхні дорівнює нулю. Цей же самий нуль роботи при переміщенні заряду q на відстань dl вздовж еквіпотенціальної поверхні під дією сили електричного поля $F = E \cdot q$ запишетеся: $F \cdot dl \cdot \cos\alpha = E \cdot q \cdot dl \cdot \cos\alpha = 0$, де α – кут між напрямом вектора E та елементом dl еквіпотенціальної поверхні. Так як $E \cdot q \cdot dl \neq 0$, то $\cos\alpha = 0$, що відповідає перпендикулярному напряму вектора напруженості електричного поля до еквіпотенціальної поверхні. Перетин еквіпотенціальних ліній з площиною дає картину еквіпотенціальних ліній рівного потенціалу.

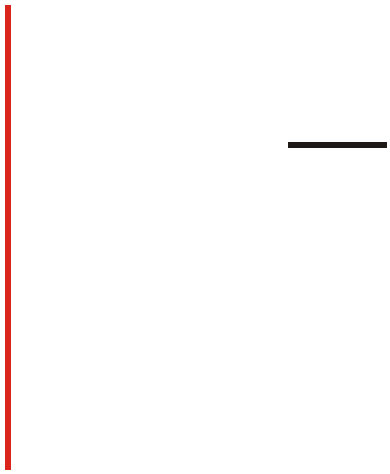
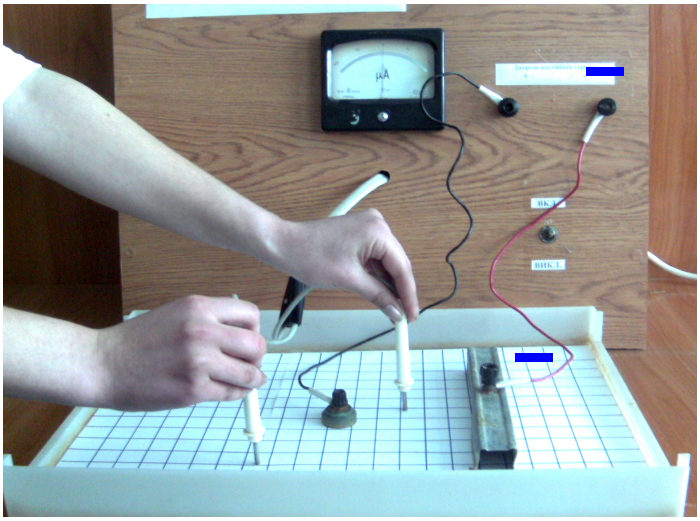


Рисунок 1.11.1

На рис.1.11.1 наведена картина силових і еквіпотенціальних ліній електричного поля точкового додатного заряду. Силові лінії – радіальні прямі, які виходять із заряду, а еквіпотенціальні лінії – концентричні кола. Потенціал поля точкового заряду зменшується з відстанню r за законом $1/r$, тому за сталої різниці потенціалів відстань між сусідніми еквіпотенціальними лініями зростає, а їх густота зменшується. Одночасно із збільшенням відстані від заряду зменшується напруженість поля, зменшується густота силових ліній. Таким чином, будь-яке електричне поле можна графічно зобразити як за допомогою силових, так і еквіпотенціальних ліній і за їх густотою визначати напруженість поля. Маючи картину силових ліній можна побудувати картину еквіпотенціальних ліній і навпаки.



а **б**

Рисунок 1.11.2

Наприклад, необхідно дослідити електричне поле системи циліндричного та прямолінійного електродів, які зображені на рис.1.11.2а. Електрод *A* з'єднаний з додатнім джерелом постійного струму, а електрод *B* – з від'ємним. За допомогою двох інших електродів, з'єднаних з чутливим вольтметром, визначаються точки з однаковими потенціалами так, щоб різниця потенціалів між двома сусідніми лініями була сталою величиною, наприклад 1В. З'єднавши точки з однаковим потенціалом, отримаємо картину ліній з однаковими потенціалами $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \cdots$ як це показано на рис.1.11.2б.

За отриманими експериментальними даними силова лінія будується так, щоб кожен елемент цієї лінії був перпендикулярним до еквіпотенціальної лінії. Очевидно, чим більше еквіпотенціальних ліній, тим менша відстань між ними, тим ближче ламана силова лінія наближається до неперервної кривої.

0.12 Зв'язок між напруженістю і потенціалом електричного поля

Електричне поле – векторне поле, кожна точка якого характеризується "своїм" вектором напруженості. Але кожну точку поля можна характеризувати потенціалом, який є скалярною величиною. Виникає питання, чи існує зв'язок між такими різними за своїм фізичним змістом напруженістю і потенціалом поля?

Математика як абстрактна наука має справу з подібною задачею. А саме, якщо кожна точка простору задається скалярною функцією

$\varphi = \varphi(x, y, z)$, то існує вектор $\vec{A}$, який вказує напрям найшвидшого зростання цієї скалярної функції, значення якої змінюється від одної точки простору до другої (скалярного поля), а за величиною (модулем) рівний швидкості зростання цієї величини у цьому напрямі. Такий вектор $\vec{A}$ називається градієнтом (з латинської *gradientis* – зростаючий, крокуючий) даної скалярної функції і позначається

$$\vec{A} = grad\varphi \,. \qquad (1.12.1)$$

А для тих, хто любить вищу математику

$$\vec{A} = \nabla\varphi \,, \qquad (1.12.2)$$

де ∇ – диференціальний векторний оператор "набла" (оперетор Гамільтона, див. формулу (1.7.13)).

Далі математика доводить, що такий вектор $\vec{A}$ як градієнт скалярної функції $\varphi = \varphi(x, y, z)$ перпендикулярний до геометричного місця точок з рівними значеннями скалярної функції φ. З точки зору фізики геометричне місце точок з однаковими значення скалярної функції φ – це еквіпотенціальні поверхні, а вектор, який перпендикулярний до них, це вектор напруженості електричного поля, але він з точки зору фізики має напрям протилежний до найшвидшого зростання потенціалу електричного поля. Отже, напруженість електричного поля дорівнює градієнту потенціалу з протилежним знаком:

$$\vec{E} = -grad\varphi \qquad (1.12.3)$$

або

$$\vec{E} = -(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}) = -\nabla\varphi \,. \qquad (1.12.4)$$

Проте, фізика явища повинна бути на першому місці, а математика лише описує

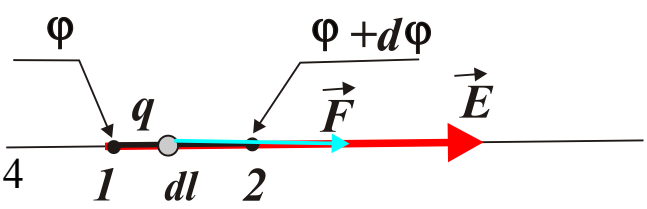


Рисунок 1.12.1

фізичні явища. То все ж таки в яких явищах шукати зв'язок між напруженістю і потенціалом та що може їх "об'єднати"? Тут доцільно звернутись до роботи переміщення заряду в електричному полі, адже одну і ту ж роботу сил електричного поля можна визначити через силову характеристику поля (напруженість) та через різницю потенціалів. Дійсно, якщо в електричному полі напруженістю $\vec{E}$ знаходиться електричний заряд q, то на нього діє сила $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$ і при переміщенні заряду q на відстань dl від точки *1* до точки *2* (рис.1.12.1) буде виконана робота

$$dA = F \cdot dl = qEdl \,. \qquad (1.12.5)$$

Цю ж саму роботу можна визначити через різницю потенціалів точок *1* та *2*:

$$dA = q[\varphi - (\varphi + d\varphi)] = -q \cdot d\varphi \,. \qquad (1.12.6)$$

Прирівнюючи праві частини останніх двох рівнянь, отримаємо:

$$E = -\frac{d\varphi}{dl} \,. \qquad (1.12.7)$$

Для орієнтації в просторі вектора $\vec{E}$ необхідно знати його проекції на осі координат ($\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y + \vec{E}_z$) і тоді, переходячи до векторної форми запису рівняння (1.12.7), у його правій частині необхідні частинні похідні від потенціалу за відповідними координатами, адже у загальному випадку потенціал електричного поля може бути функцією координат – $\varphi = \varphi(x, y, z)$. Таким чином дістаємо співвідношення:

$$\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y + \vec{E}_z = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{k}\right) \,. \qquad (1.12.8)$$

Отже, розглядаючи фізичні явища, які визначають зв'язок між напруженістю та потенціалом ми встановили, що напруженість є градієнтом потенціалу з протилежним знаком.

У випадку однорідного електричного поля модуль напруженості електричного поля можна визначити за формулою

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d} = \frac{U}{d}, \qquad (1.12.9)$$

де d – відстань між точками з потенціалами φ_1 та φ_2. З такого співвідношення у системі СІ встановлюється ***одиниця напруженості електричного поля*** $1\,B/м$ ***(вольт на метр) – це напруженість такого однорідного електричного поля, у якому між точками, що знаходяться на відстані*** **1***м вздовж силової лінії, різниця потенціалів дорівнює* **1***В***.**

В електротехніці різницю потенціалів, що виникає між двома точками навколо струмопровідної лінії яка торкається землі (рис.1.12.2) на відстані одного кроку називають кроковою напругою. Чим ближче людина знаходиться до місця торкання провідника з землею, тим вищою є небезпека ураження при пересуванні в небезпечній зоні. Напруга, що уражає людину, залежить від ширини кроку: чим більше крок, тим небезпечніше. Навіть невелика напруга в 50-80 B викликає мимовільні судомні скорочення м'язів ніг і, як наслідок, падіння людини на землю, тобто вражаюча напруга стає смертельною. У загрозливій ситуації при виході з небезпечної зони необхідно застосувати ходу «п'ята-носок» у сторону від місця падіння струмопровідної лінії.

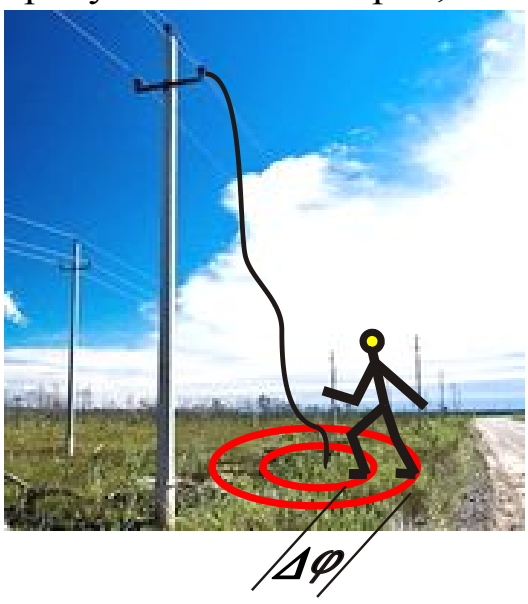


Рисунок 1.12.2

Користуючись поняттям градієнту потенціалу раніше розглянуті диференціальні рівняння електростатичного поля $rotE = 0$ та $divE = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ можна подати у зручній для практичних обчислень формі.

Так, перше з цих рівнянь виконується тотожно:

$$rot\ grad\varphi \equiv 0\ , \qquad (1.12.10)$$

а друге запишеться як

$$div\ grad\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (1.12.11)$$

або

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\ , \qquad (1.12.12)$$

де

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (1.12.13)$$

– диференціальний оператор Лапласа (П'єр-Сімо́н Лапла́с (1749 - 1827) – французький математик і астроном). Тобто рівняння (1.12.12) встановлює зв'язок потенціалу φ у різних точках поля з розподілом густини зарядів ρ як функцією $\rho = \rho(x, y, z)$ і це рівняння називається рівнянням Пуассона (Сімеон-Дені Пуассон (1781-1840) – французький фізик і математик).

Контрольні запитання

1 *Що собою являє електричний заряд?*
2 *Чому і як було введено поняття додатних та від'ємних зарядів?*
3 *У чому полягає дискретність електричного заряду?*
4 *Як формулюється та записується закон збереження електричного заряду?*
5 *Як експериментально Кулон вивчав взаємодію електричних зарядів?*
6 *Як формулюється та записується закон Кулона для взаємодії електричних зарядів?*
7 *Як дати означення електричного поля і яка різниця між матерією у вигляді поля та речовини?*

8 *Як вводиться поняття напруженості електричного поля та в яких одиницях вона вимірюється і за якою формулою визначається напруженість електричного поля точкового заряду?*

9 *У чому полягає принцип суперпозиції електричних полів?*

10 *Що собою являє електричний диполь і як розрахувати напруженість його електричного поля?*

11 *Чому і як вводиться поняття силових ліній електричного поля?*

12 *Як вводиться поняття потоку вектора напруженості електричного поля?*

13 *Як формулюється і записується теорема Гауса в інтегральній формі для електростатичного поля у вакуумі?*

14 *Як вводиться поняття дивергенції напруженості електричного поля і як за допомогою математичної теореми Остроградського переходять до диференціального запису теореми Гауса?*

15 *У яких випадках і як теорема Гауса значно спрощує розрахунки електричних полів неперервно розподілених зарядів?*

16 *Як довести, що робота сил електростатичного поля при переміщенні в ньому заряду не залежить від траєкторії його переміщення і як на основі цього вводиться поняття потенціалу електричного поля?*

17 *Який фізичний зміст потенціалу електричного поля та яка одиниця його вимірювання?*

18 *Як вводиться поняття і який фізичний зміст циркуляції вектора напруженості електричного поля?*

19 *Як вводиться поняття ротора вектора напруженості електричного поля і як при цьому використовують математичну теорему Стокса?*

20 *Як у вигляді градієнта встановлюється зв'язок між напруженістю та потенціалом електричного поля?*

21 *Що собою являють еквіпотенціальні поверхні і чому силові лінії до них перпендикулярні?*

Розділ 2 Електричне поле в діелектриках

1.1 Діелектрики. Полярні і неполярні молекули

Речовини, які не проводять електричний струм, отримали назву діелектриків. У діелектриках, на відміну від провідників, немає вільних зарядів, які могли б під дією електричного поля прийти в рух і тим самим створити струм провідності. Зауважимо, що і в діелектриках також існують вільні заряди, але за нормальних умов їх концентрація надзвичайно мала. Наприклад, провідність кварцового скла в 10^{25} разів менша ніж у міді. В діелектриках заряди, що входять в склад його молекул, зв'язані один з одним і їх називають зв'язаними. Залежно від взаємного розташування таких зарядів розрізняють полярні і неполярні діелектрики. Різниця зумовлена наявністю або відсутністю власного електричного дипольного моменту молекул. У молекул першого типу центри додатних і від'ємних зарядів зміщені один відносно одного, внаслідок чого молекула володіє власним дипольним моментом.

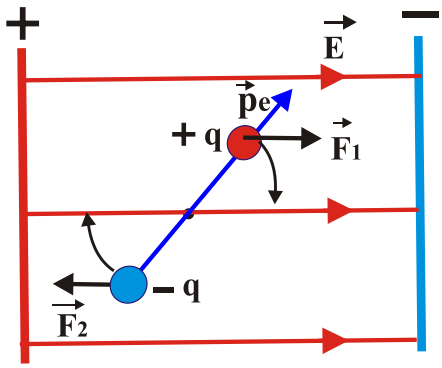


Рисунок 2.1.1

До полярних молекул відносяться молекули окремих газів (CO, SO_2, N_2O, H_2S, NH_3, H_2O, HCl і ін.) та рідини (H_2O, кислоти, окремі спирти, нітробензол, ефіри і ін.). В зовнішньому електричному полі на диполь діє пара сил – $\vec{F}_1 = q\vec{E}$ та $\vec{F}_2 = -q\vec{E}$ (рис.2.1.1), створюючи момент сили $\vec{M} = q(\vec{p}_e \times \vec{E})$, внаслідок чого вісь дипольного моменту молекули орієнтується у напрямі зовнішнього електричного поля (*ось чому за напрям дипольного моменту диполя вибраний напрям від негативного до додатного заряду, про що йшла мова у параграфі 1.5*).

Величину дипольного моменту полярної молекули зовнішнє поле суттєво не змінює. Орієнтаційній дії поля на полярні молекули протидіє тепловий рух, у результаті чого встановлюється переважна орієнтація дипольних моментів у напрямі поля, яка тим більша, чим більша напруженість поля і чим менша температура. Це призводить до того, що речовина у цілому набуває електричний дипольний

момент або іншими словами поляризується. Такий вид поляризації називається орієнтаційною поляризацією.

У неполярних молекулах центри «ваги» додатних і від'ємних зарядів співпадають. Наприклад, в атомі водню колову орбіту електрона можна вважати від'ємним зарядом, центр ваги якого (як кола) співпадає з додатнім ядром (рис. 2.1.2а). Під дією електричного поля відбувається зміщення центрів «ваги» додатних і від'ємних зарядів в молекулах за рахунок деформації електронних оболонок атомів (рис.2.1.2б). В результаті цього неполярна молекула набуває індукованого (наведеного) дипольного моменту точно орієнтованого у напрямі зовнішнього поля. Така поляризація називається електронною або деформаційною.

Рисунок 2.2

Рисунок 2.1.2

Експериментально встановлено, що взаємне зміщення центрів, а відповідно і дипольний момент, пропорційні напруженості поля, тобто силі яка діє на заряди. У цьому відношенні неполярна молекула подібна до пружини, видовження якої пропорційне прикладеній до неї силі. Тому неполярні молекули називають пружними диполями, а полярні – жорсткими диполями.

2.2 Поляризація діелектриків. Вектор поляризації. Тензор поляризації

У природних умовах (без дії зовнішнього електричного поля) векторна сума всіх дипольних моментів діелектрика дорівнює нулю. Дипольні моменти полярних молекул орієнтовані хаотично, а для неполярних молекул вони взагалі відсутні. При внесенні діелектрика в зовнішнє електричне поле в його об'ємі виникає сумарний дипольний момент, який не дорівнює нулю і таке явище називається ***поляризацією діелектрика.***

Кількісною характеристикою поляризації діелектрика є ***вектор поляризації*** $\vec{P}$ або ***поляризованість***. Поляризованістю (вектором поляризації) називається відношення сумарного електричного

дипольного моменту всіх молекул діелектрика до його об'єму V і вимірюється в $Кл{\cdot}м/м^3 = Кл/м^2$:

$$\vec{P} = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i, \qquad (2.2.1)$$

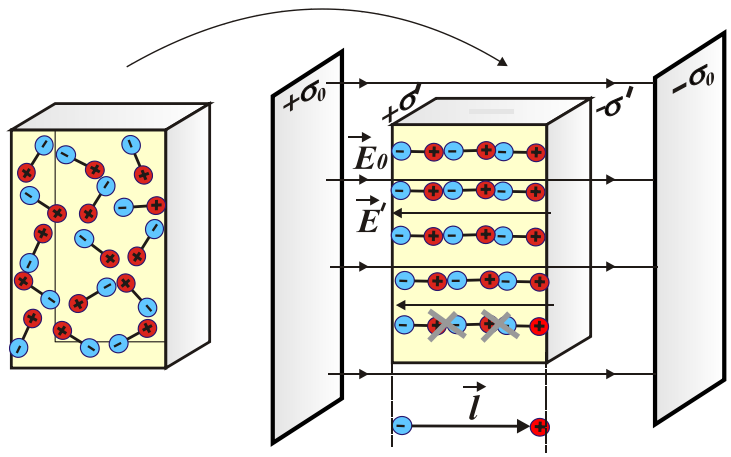
де $\vec{p}_i$ – дипольний момент і-тої молекули; n – загальна кількість молекул в об'ємі V.

Для більшості діелектриків (крім сегнетоелектриків) їх поляризованість пропорційна напруженості $\vec{E}$ зовнішнього електричного поля. Ця залежність у системі СІ визначається таким співвідношенням:

$$\vec{P} = \chi \cdot \varepsilon_0 \cdot \vec{E}, \qquad (2.2.2)$$

де χ – діелектрична сприйнятливість речовини, яка є безрозмірною величиною завдяки електричний сталій ε_0, у чому легко переконатись підставивши в (2.2.2) одиниці вимірювання всіх величин, що входять у це співвідношення.

Значення діелектричної сприйнятливості залежить від природи діелектрика та його температури. Тепловий рух перешкоджає орієнтації диполів і тому з підвищенням температури значення χ зменшується.



Явище поляризації діелектрика приводить до зменшення в ньому напруженості зовнішнього електричного поля. Наприклад, діелектрик, у якого дипольні моменти орієнтовані хаотично (рис.2.2.1), внесемо в електричне поле напруженістю E_0, яке створене вільними

зарядами з поверхневою густиною σ_0 на двох різнойменно заряджених поверхнях (рис.2.2.1). Якщо діелектрик складається з полярних молекул, то в зовнішньому електричному полі має місце орієнтаційна поляризація і на протилежних гранях діелектрика виникають ***зв'язані заряди*** кінців диполів. Всередині діелектрика поле протилежних кінців диполів компенсується. Залишається некомпенсованим поле зв'язаних зарядів з поверхневою густиною σ', яке створює поле напруженістю $\vec{E}'$, що має напрям протилежний $\vec{E}_0$ (рис.2.2.1).

Отже, модуль результуючої напруженості E у діелектрику буде менший за напруженість поля у вакуумі, тобто

$$E = E_0 - E' . \qquad (2.2.3)$$

Фізична величина, яка показує у скільки разів напруженість електричного поля E в діелектрику менша від напруженості E_0 поля у вакуумі (при тому ж розташуванні зарядів що створюють поле) є діелектричною проникністю ε середовища:

$$\varepsilon = \frac{E_0}{E} . \qquad (2.2.4)$$

Отже, крім діелектричної сприйнятливості χ, діелектрик характеризується діелектричною проникністю ε. Тоді виникає питання – який зв'язок між цими величинами? Логічно допустити, що $\varepsilon = 1 + \chi$, дійсно для вакууму $\chi = 0$ (відсутні діелектрики, немає об'єктів для поляризації) і тоді відношення напруженості поля у вакуумі до напруженості того ж самого поля у вакуумі дорівнює одиниці, тобто діелектрична проникність вакууму $\varepsilon = 1$. Щоб переконатись у справедливості співвідношення $\varepsilon = 1 + \chi$ кількісно опишемо фізичні процеси, що відбуваються при внесенні діелектрика в електричне поле, пов'язуючи їх з діелектричною сприйнятливістю χ.

Оскільки зовнішнє електричне поле створене двома паралельними площинами з поверхневою густиною зарядів σ_0, то напруженість E_0 цього поля дорівнює

$$E_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}. \qquad (2.2.5)$$

Протилежні поверхні діелектрика, що мають зв'язані заряди протилежних знаків з поверхневою густиною σ', створюють електричне поле напруженістю

$$E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}. \qquad (2.2.6)$$

Тоді, згідно формули (2.2.3),

$$E = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = E_0 - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}. \qquad (2.2.7)$$

Оскільки всередині діелектрика заряди протилежних кінців диполів окремих молекул компенсуються, то можна вважати, що у діелектрику внаслідок його поляризації утворюються диполі з дипольним моментом

$$p = q'l, \qquad (2.2.8)$$

де q' – величина зв'язаного заряду, l – плече такого диполя, яке у даному випадку дорівнює товщині діелектрика (рис.2.2.1**)**. Якщо у діелектрику об'ємом $V = S \cdot l$ є N таких диполів, то його поляризованість, як сумарний дипольний момент в одиниці об'єму, дорівнює

$$P = \frac{N \cdot q'l}{S \cdot l}. \qquad (2.2.9)$$

Оскільки $N \cdot q'$ визначає сумарний зв'язаний заряд на поверхні діелектрика, то зрозуміло, що відношення $\frac{N \cdot q'}{S}$ визначає поверхневу густину зв'язаних зарядів, тобто

$$P = \chi \varepsilon_0 E. \qquad (2.2.10)$$

У свою чергу це значення поляризованості визначається напруженістю електричного поля. Отже, згідно співвідношення (2.2.2),

$$\varepsilon E = \varepsilon_0 E + \chi \varepsilon_0 E. \qquad (2.2.11)$$

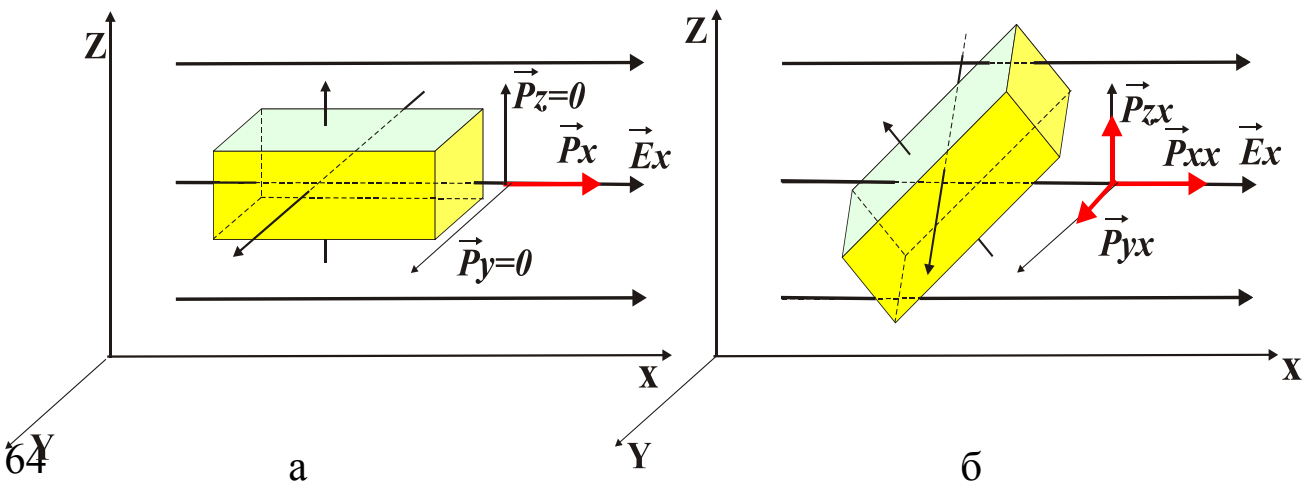
Підставивши (2.2.11) в (2.2.7), отримаємо:

$$E = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon E}{\varepsilon_0} = E_0 = \frac{\varepsilon E + \chi \varepsilon_0 E}{\varepsilon_0} = E = E_0 + \chi E =$$

$$= E = \chi E + E_0 = E(1 + \chi) = E_0 = \frac{E_0}{E} = 1 + \chi. \qquad (2.2.12)$$

Враховуючи, що $\varepsilon = \frac{E_0}{E}$, дістанемо, що $\varepsilon = 1 + \chi$, тобто зв'язок між макроскопічними параметрами χ та ε, які характеризують вплив діелектриків на напруженість електричного поля.

Вектор поляризації співпадає з вектором напруженості електричного поля тільки для електрично ізотропного середовища. Діелектрична сприйнятливість анізотропного середовища, наприклад кристалу, в різних напрямах неоднакова і в такому анізотропному середовищі зв'язок між його вектором поляризації та напруженістю електричного поля, на відміну від співвідношення (2.2.2), має більш складний вигляд, який записується у вигляді ***тензора поляризації***. З поняттям тензора ми зустрічались в розділі механіки на прикладі тензора моменту інерції тіла та тензора напружень в тілі. Щоб зрозуміти необхідність введення тензора поляризації, розглянемо



а б

Рисунок 2.2.2

наступний приклад. Припустимо, що для деякого кристалу одне і те ж електричне поле у трьох взаємно перпендикулярних напрямах викликає різну поляризацію. Якщо напрям електричного поля співпадає з одним з таких напрямів, то поляризація такого кристалу характеризується вектором поляризації, що співпадає з вектором електричного поля.
Рисунок 2.2.2а якраз ілюструє такий випадок, коли електричне поле вздовж осі X викликає відповідну поляризацію (вектор $\vec{P}_x$) у тому ж самому напрямі (поляризація вздовж осей Y та Z відсутня).

А тепер розглянемо загальний випадок довільної орієнтації такого діелектрика по відношенню до вибраних осей координат (рис.2.2.2б). У цьому випадку електричне поле напрямлене вздовж осі X дає поляризацію з компонентами по трьом осям, тому можна записати:

$$\vec{P}_x = \varepsilon_0 \chi_{xx} E_x, \quad \vec{P}_y = \varepsilon_0 \chi_{xy} E_x, \quad \vec{P}_z = \varepsilon_0 \chi_{xz} E_x. \quad (2.2.13)$$

У (2.2.13) перший індекс біля діелектричної сприйнятливості χ вказує про яку компоненту йде мова, а другий відноситься до напряму електричного поля. Якщо ж електричне поле напрямлено вздовж осі Y, то можна записати:

$$\vec{P}_x = \varepsilon_0 \chi_{xy} E_y, \quad \vec{P}_y = \varepsilon_0 \chi_{yy} E_y, \quad \vec{P}_z = \varepsilon_0 \chi_{zy} E_y. \quad (2.2.14)$$

Аналогічно для поля у напрямі осі Z:

$$\vec{P}_x = \varepsilon_0 \chi_{xz} E_z, \quad \vec{P}_y = \varepsilon_0 \chi_{yz} E_z, \quad \vec{P}_z = \varepsilon_0 \chi_{zz} E_z. \quad (2.2.15)$$

Ще у більш загальному випадку електричне поле може бути орієнтовано довільно відносно вибраної системи координат та довільної орієнтації у ньому діелектрика. Тоді таке довільне поле можна розкласти на три компоненти $\vec{E}_x, \vec{E}_y$ та $\vec{E}_z$ і знайти $\vec{P}_x, \vec{P}_y, \vec{P}_z$, які у сукупності дають значення повної поляризації:

$$\begin{cases} \vec{P}_x = \varepsilon_0(\chi_{xx}\vec{E}_x + \chi_{xy}\vec{E}_x + \chi_{xz}\vec{E}_x) \\ \vec{P}_y = \varepsilon_0(\chi_{yx}\vec{E}_y + \chi_{yy}\vec{E}_y + \chi_{yz}\vec{E}_y) \\ \vec{P}_z = \varepsilon_0(\chi_{zx}\vec{E}_z + \chi_{zy}\vec{E}_z + \chi_{zz}\vec{E}_z) \end{cases}. \qquad (2.2.16)$$

Таким чином діелектричні властивості анізотропної речовини можна повністю описати дев'ятьма величинами. Сукупність цих дев'яти величин називається тензором поляризації.

2.3 Теорема Гауса для потоку вектора поляризації

У попередньому параграфі 2.2 ми розглядали поляризацію, коли зв'язані заряди з'являються тільки на поверхні діелектрика. Але в окремих випадках внаслідок поляризації з'являються об'ємні зв'язані заряди. Наприклад, у діелектрику є два сорти полярних молекул: 1) диполі з зарядами $+e$ і $-e$; 2) диполі з зарядами $+2e$ і $-2e$ (рис.2.3.1). Якщо у такому діелектрику створити електричне поле, то внаслідок поляризації неоднорідного діелектрика на його протилежних поверхнях з'являються (рис.2.3.1) зв'язані заряди $-5e$ та $+7e$. Оскільки діелектрик в цілому електрично нейтральний, то можна вважати, що в його об'ємі з'являється надлишковий зв'язаний заряд $+2e$. Отже, навіть такий простий приклад вказує на те, що ***надлишковий зв'язаний заряд в об'ємі поляризованого діелектрика дорівнює алгебраїчній сумі зв'язаних зарядів з протилежним знаком на його поверхнях***.

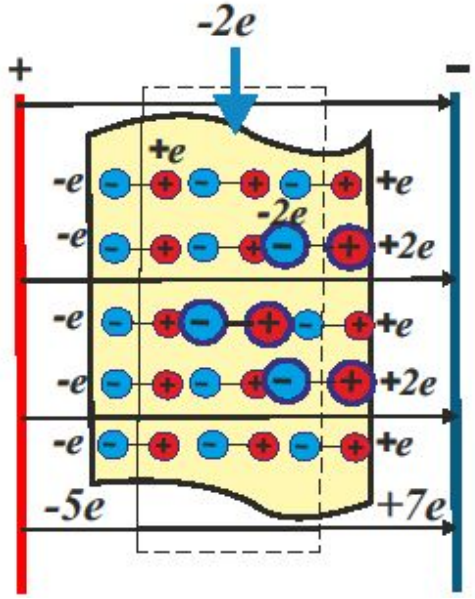


Рисунок 2.3.1

У загальному випадку в діелектрику може бути неоднакова концентрація

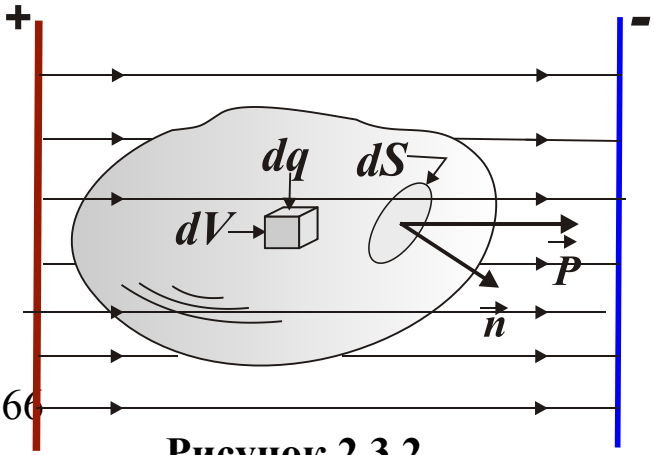


Рисунок 2.3.2

молекул різних сортів у його різних частинах. Отже, у зовнішньому електричному полі поверхнева густина зв'язаних зарядів у різних частинах діелектрика буде неоднакова. Виділимо на поверхні діелектрика об'ємом V такий малий елемент площею dS (рис.2.3.2), щоб поверхневу густину σ' зв'язаних зарядів вважати сталою і тоді елементарний зв'язаний заряд на елементі площею dS дорівнює

$$dq = \sigma' \cdot ds, \qquad (2.3.1)$$

а згідно формули (2.2.10)

$$dq = P_n dS, \qquad (2.3.2)$$

де P_n – проекція вектора поляризації на нормаль $\vec{n}$ до поверхні dS або як скалярний добуток векторів поляризації $\vec{P}$ та dS:

$$dq = (\vec{P} \cdot d\vec{S}). \qquad (2.3.4)$$

Отже, сумарний поверхневий заряд дорівнює інтегральній сумі зарядів на всіх елементах даної замкнутої поверхні, а об'ємний зв'язаний заряд дорівнює з протилежним знаком величині цього заряду:

$$q = -\oint P_n dS = -\oint (\vec{P} \cdot d\vec{S}). \qquad (2.3.5)$$

Якщо діелектрик ізотропний, то вектор поляризації в усіх точках діелектрика однаковий. Тоді і алгебраїчна сума поверхневих зв'язаних зарядів дорівнює нулю, а тому буде рівний нулю і об'ємний зв'язаний заряд. У випадку поляризації неоднорідного діелектрика виникає об'ємний зв'язаний заряд, який можна записати через густину цих зв'язаних зарядів:

$$q = \int_V \rho' dV. \qquad (2.3.6)$$

Прирівнявши (2.3.5) і (2.3.6), отримаємо наступний вираз:

$$\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = -\int_V \rho' dV \quad , \qquad (2.3.7)$$

який є ***теоремою Гауса в інтегральній формі для потоку вектора поляризації і ця теорема стверджує, що потік вектора поляризації через довільну замкнуту поверхню*** *(ліва частина рівняння 2.3.7)* ***дорівнює з протилежним знаком зв'язаному заряду всередині об'єму діелектрика обмеженого замкнутою поверхнею.***

Якщо використати математичну теорему Остроградського, то

$$\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = \int_V div\vec{P} dV \quad . \qquad (2.3.9)$$

Тепер, згідно (2.3.7), можна записати:

$$\int_V div\vec{P} dV = -\int \rho \cdot dV \quad , \qquad (2.3.10)$$

звідки

$$div\vec{P} = -\rho \quad . \qquad (2.3.11)$$

Формула (2.3.11) є ***математичним виразом у диференціальній формі теореми Остроградського-Гауса для вектора поляризації, яка стверджує, що джерелом вектора поляризації*** $\vec{P}$***, тобто дипольного моменту одиниці об'єму, є зв'язані заряди.***

Таким чином, якщо раніше доведена теорема Гауса для електростатичного поля у вакуумі встановлювала, що дивергенція вектора напруженості електричного поля визначається густиною вільних зарядів, то теорема Гауса, яка стосується електричного поля у діелектрику встановлює, що дивергенція вектора поляризації визначається об'ємною густиною зв'язаних зарядів.

1.4 Вектор електричного зміщення. Теореми Гауса та Остроградського–Гауса для потоку вектора електричного зміщення

Оскільки напруженість електричного поля у порівнянні з вакуумом зменшується, то картина силових ліній електричного поля у діелектрику зазнає відповідних змін. Наприклад, напруженості електричного поля у вакуумі відповідає картина з чотирьох силових ліній (рис.2.4.1). Якщо у такому полі розмістити діелектрик з діелектричною проникністю $\varepsilon = 2$, то напруженість поля у такому діелектрику зменшиться у два рази і відповідно у два рази зменшиться число силових ліній електричного поля. Отже, на межі діелектрика силові лінії електричного поля зазнають розриву. Виникає питання, а чи не можна ввести таку характеристику, яка була б однаковою для різних середовищ і тоді лінії такої характеристики не будуть зазнавати розриву на межі середовищ? Вирішують таке питання дуже просто. Оскільки напруженість електричного поля E у діелектрику в порівнянні з вакуумом зменшується в ε-раз, то «зробимо» її такою ж як у вакуумі, збільшивши її в ε-раз, що дозволило ввести нову фізичну величину, яка отримала назву ***вектора електричного зміщення*** $\vec{D}$ або вектора індукції (з англійської *Displacement* – зміщення, зсув). У системі СІ зв'язок між електричним зміщенням електричного поля та його напруженістю має такий вигляд:

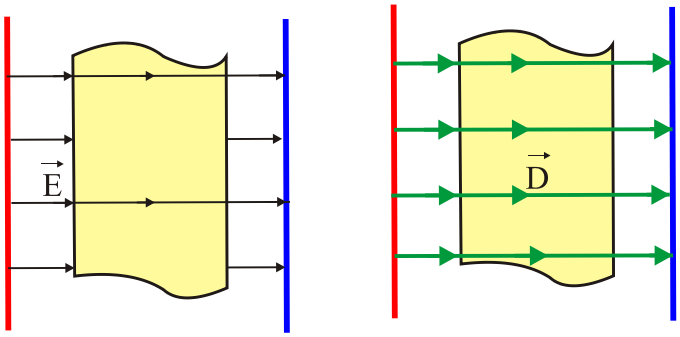


Рисунок 2.4.1

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \cdot \vec{E}. \qquad (2.4.1)$$

Така форма запису електричного зміщення $\vec{D}$, де введена електрична стала ε_0, значно спрощує подальші розрахунки електричного поля у діелектриках. Подібно до того як електричне поле графічно зображають силовими лініями вектора $\vec{E}$, то це ж поле можна зобразити лініями вектора зміщення $\vec{D}$. Також аналогічно потоку вектора напруженості електричного поля $\Phi_{\vec{E}}$ вводять поняття потоку вектора зміщення електричного поля $\Phi_{\vec{D}}$.

Якщо теорема Гауса для електричного поля у вакуумі (параграф 1.7) визначає потік вектора напруженості через довільну замкнуту поверхню, що охоплює заряд q або систему зарядів, і тим самим визначає число силових ліній які виходять або входять в заряди, то аналогічна теорема Гауса про потік вектора зміщення через довільну замкнуту поверхню визначає число ліній вектора зміщення, які виходять або входять в електричний заряд. Вивід цієї теореми повністю аналогічний виводу теореми Гауса для електричного поля у вакуумі. Тому на рис. 1.7.1 замість вектора $\vec{E}$ треба вважати вектор $\vec{D}$ і формулу (1.7.1) $d\Phi_E = E \cdot dS_n$ слід замінити формулою

$$d\Phi_D = D \cdot dS_n . \qquad (2.4.2)$$

Далі, враховуючи співвідношення (2.4.1) та формулу $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ напруженості E електричного поля точкового зряду q в середовищі з діелектричною проникністю ε, отримаємо:

$$d\Phi_D = \varepsilon_0 \varepsilon E \, dS_n = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2} dS_n = \frac{q}{4\pi r^2} dS_n . \qquad (2.4.3)$$

Оскільки відношення $\frac{dS_n}{r^2}$ визначає елементарний тілесний кут $d\Omega$, то

$$d\Phi_D = \frac{q}{4\pi} d\Omega . \qquad (2.4.4)$$

І тоді весь потік вектора зміщення електричного поля через довільну замкнуту поверхню, яка охоплює заряд q, дорівнює

$$\Phi_D = \frac{q}{4\pi} \int_0^{4\pi} d\Omega = q . \qquad (2.4.5)$$

Якщо замкнута поверхня охоплює систему електричних зарядів, то

$$\Phi_D = \sum_{i=1}^{n} q_i \quad , \tag{2.4.6}$$

тобто потік вектора зміщення електростатичного поля через довільну замкнуту поверхню дорівнює алгебраїчній сумі вільних зарядів, які є всередині цієї поверхні (теорема Гауса для потоку вектора зміщення електростатичного поля).

У випадку об'ємно розподіленого заряду теорема Гауса для потоку вектора зміщення електростатичного поля має вигляд:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oint_V \rho \cdot dV \quad , \tag{2.4.7}$$

а за теоремою Остроградського (порівняйте з (1.7.13))

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V div\vec{D}\, dV \quad . \tag{2.4.8}$$

Отже, у диференціальній формі тепер вже теорема Остроградського-Гауса для вектора електричного зміщення має наступний вигляд:

$$div\vec{D} = \rho \quad , \tag{2.4.9}$$

тобто, ***дивергенція вектора зміщення електростатичного поля у даній точці простору визначається об'ємною густиною вільних зарядів у цій же точці простору.***

2.5 Умови на межі розділу діелектриків

Розгляд властивостей електричного поля в діелектричному середовищі був би не повним без аналізу явищ, які відбуваються на межі розділу різних діелектриків. Так, на межі двох різних діелектричних середовищ вектори напруженостей та зміщення електричного поля змінюються за величиною і напрямом. Умови поведінки цих векторів на межі середовищ з різною діелектричною проникністю отримали назву ***граничних умов***, які можна розглянути на прикладі межі двох однорідних діелектриків з різним значенням діелектричної проникності. Нехай вектори напруженості $\vec{E}_1$ та зміщення $\vec{D}_1$ електричного поля у першому середовищі з діелектричною проникністю ε_1 складають кут α між перпендикуляром до межі двох середовищ (рис.2.5.1 *а*1, *б*1). Ці вектори можна розкласти на нормальні E_{1n}, D_{1n} та тангенціальні $E_{1\tau}$, $D_{1\tau}$ складові і з'ясуємо, як вони змінюються на межі середовища з діелектричною проникністю ε_2 при відсутності на цій межі вільних зарядів. Спочатку встановимо граничні умови для тангенціальної складової вектора напруженості електричного поля. Ці умови можна

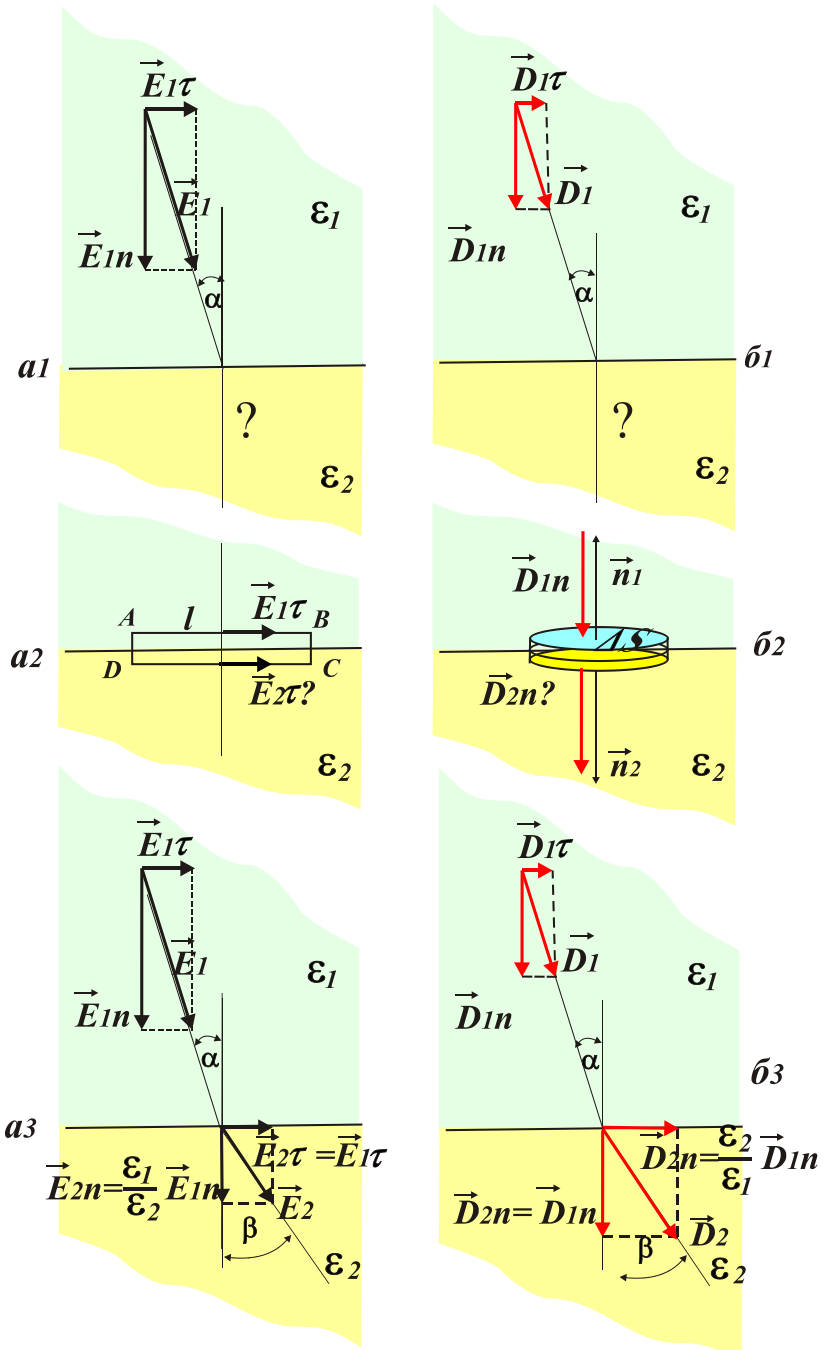


Рисунок 2.5.1

встановити з основних рівнянь електричного поля. У даному випадку – це циркуляція вектора напруженості по замкнутому контуру, яка встановлює потенціальний характер електростатичного поля – незалежність роботи переміщення заряду від траєкторії його переміщення і рівність нулю роботи по замкнутому контуру. Отже, провівши на межі двох діелектриків прямокутний замкнутий контур *ABCD* довжини l, як вказано на рис.2.5.1 a_2, за теоремою про циркуляцію вектора напруженості електричного поля можна записати:

$$\oint_{ABCD} \vec{E} d\vec{l} = 0, \qquad (2.5.1)$$

звідки

$$\vec{E}_{1\tau} l - \vec{E}_{2\tau} = 0. \qquad (2.5.2)$$

Знаки інтегралів вздовж *AB* та *CD* різні, оскільки напрями інтегрування на цих ділянках протилежні, тому

$$\vec{E}_{1\tau} = \vec{E}_{2\tau}. \qquad (2.5.3)$$

Отже, тангенціальна складова вектора напруженості електростатичного поля не змінюється на межі розділу двох середовищ з різними діелектричними проникностями. До такого результату можна прийти навіть логічним шляхом на основі закону збереження і перетворення енергії. Дійсно, якщо б тангенціальні складові напруженості електричного поля на межі двох діелектриків були різними, то можна було б створити вічний двигун, розмістивши на межі таких двох діелектричних середовищ замкнутий провідник у вигляді контуру *ABCD* (рис.2.5.1 a_2). Якщо б, наприклад, $\vec{E}_{1\tau} \neq \vec{E}_{2\tau}$, то рівнодійна сил, яка б діяла на вільні заряди у провіднику, не була б рівна нулю і вільні заряди безперервно рухались у цьому провіднику, створюючи електричний струм без будь-яких енергетичних затрат.

Визначивши співвідношення між тангенціальними складовими вектора напруженості електричного поля на межі двох діелектричних середовищ, легко встановити відповідні співвідношення між

тангенціальними складовими вектора зміщення електричного поля. Дійсно, враховуючи що $D_{1\tau} = \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_{1\tau}$, а $D_{2\tau} = \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_{2\tau}$, отримаємо:

$$D_{2\tau} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} D_{1\tau} . \qquad (2.5.4)$$

Що стосується нормальної складової вектора зміщення електричного поля, то її поведінку можна з'ясувати на основі теореми Гауса.

Для цього на межі двох діелектриків побудуємо прямий циліндр, у якому одна основа знаходиться в першому діелектрику, а друга – в іншому (рис.2.5.1 *б*$_2$). У межах площі ΔS поле вважаємо однорідним. Так як всередині такого циліндричного об'єму вільні заряди відсутні, то згідно теореми Гауса сумарний потік вектора зміщення електричного поля через таку поверхню дорівнює нулю (потік $\Phi_1 = D_{1n} \cdot \Delta S$ вектора зміщення, який входить у верхню основу циліндричної поверхні, дорівнює потоку $\Phi_2 = D_{2n} \cdot \Delta S$, що виходить через нижню основу). Отже,

$$D_{2n} = D_{1n} . \qquad (2.5.5)$$

Таким чином, нормальна складова вектора зміщення електричного поля на межі різних діелектричних середовищ не зазнає ніяких змін. Приймаючи до уваги відомі співвідношення між векторами зміщення та напруженості електричного поля $D_{1n} = \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_{1n}$ та $D_{2n} = \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_{2n}$, згідно (2.5.5) отримаємо:

$$E_{2n} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_{1n} . \qquad (2.5.6)$$

Отже, нормальна складова вектора напруженості електричного поля на межі двох діелектриків зазнає зміни.

Таким чином, отримані граничні умови щодо поведінки векторів напруженості та зміщення електричного поля, які наведені на рис.2.5.1 (a_3, $б_3$), що ілюструє явище заломлення ліній електричного

поля на межі двох діелектриків з різною діелектричною проникністю, а саме:

$$\frac{tg\alpha}{tg\beta} = \frac{E_{2\tau} / E_{2n}}{E_{1\tau} / E_{1n}} \qquad (2.5.7)$$

та

$$\frac{tg\alpha}{tg\beta} = \frac{D_{2\tau} / D_{2n}}{D_{1\tau} / D_{1n}} \qquad (2.5.8)$$

і коли $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, то кут заломлення β ліній електричного поля більший кута α під яким вони входять у перший діелектрик.

У третій книзі курсу фізики при розгляді оптичних явищ буде показано, що заломлення світла на межі двох діелектричних середовищ пов'язане з різним значенням їх діелектричної проникності.

2.6 Сегнетоелектрики. П'єзоелектрика. Електрети

Існує особлива група діелектриків, для яких діелектрична проникність приймає великі значення (порядку 10^3–10^4). Крім того, за своїми фізичними властивостями ця група суттєво відрізняється від звичайних діелектриків: діелектрична проникливість не є постійною величиною, а залежить від напруженості поля. Така група діелектриків отримала назву ***сегнетоелектриків*** від назви сегнетової солі, в якій вперше було виявлено такі особливі діелектричні властивості (формула сегнетової солі $NaKC_4H_4 \times 4H_2O$). Властивостями сегнетоелектриків володіє ряд інших речовин, наприклад, титанат барію ($BaTiO_3$). Причиною особливих діелектричних властивостей сегнетоелектриків є наявність в них мікроскопічних областей спонтанної (самовільної) поляризації. Ці мікроскопічні області отримали назву доменів (від французького слова *damaine* – володіння).

В кожному з доменів дипольні моменти молекул самовільно орієнтовані в одному напрямі. Сегнетоелектрики можна уявити як

своєрідну мозаїку, складену з доменів. На схематичному рис. 2.6.1 стрілками вказано напрям орієнтації дипольних моментів у межах кожного домену. У відсутності зовнішнього поля дипольні моменти доменів орієнтовані довільно (якщо перед тим сегнетоелектрик не перебував в електричному полі).

Рисунок 2.6.1

Поляризація сегнетоелектриків відбувається за рахунок росту і зміщення границь доменів. Крім цього, відбувається поворот дипольних моментів окремих доменів в напрямі зовнішнього електричного поля. У сильному електричному полі можливе явище *насичення*, коли дипольні моменти всіх доменів орієнтовані вздовж зовнішнього поля.

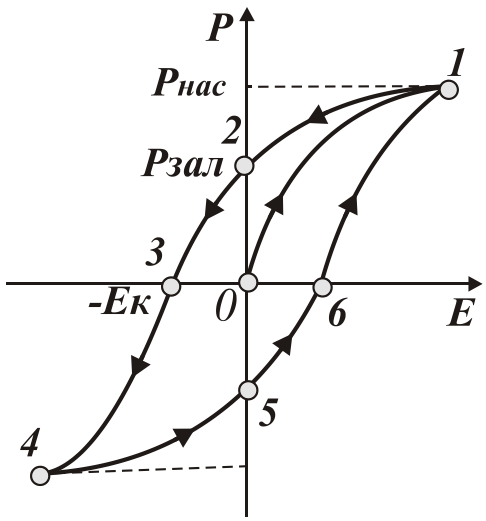


Рисунок 2.6.2

Для сегнетоелектриків характерне явище *гістерезису* (запізнювання), яке полягає в тому, що крива поляризованості сегнетоелектрика при збільшенні напруженості зовнішнього поля не співпадає (відстає) з кривою поляризованості при зменшенні зовнішнього поля. На рис.2.6.2 наведена так звана петля гістерезису сегнетоелектрика – крива залежності його поляризованості від напруженості зовнішнього електричного поля. На цій кривій можна виділити такі характерні ділянки:

0-1, зі збільшенням напруженості зовнішнього електричного поля поляризованість сегнетоелектрика зростає до насичення;

1-2, при зменшенні до нуля напруженості зовнішнього електричного поля сегнетоелектрик ще може зберігати свою поляризованість і ця поляризованість називається залишковою (точка 2);

2-3, лише при накладанні зовнішнього поля протилежного напряму поляризованість сегнетоелектрика щезає (точка3) і напруженість такого електричного поля, при якому відбувається

деполяризація сегнетоелектрика, називається коорцетивною силою (з латинської *coercitio* – затримувати).

Далі процеси повторюються: так, ділянка *3-4* відповідає поляризації сегнетоелектрика до насичення тільки у протилежному напрямі; ділянка *5-6* – зменшенню поляризації до нуля і після цього знову зростає поляризація до насичення.

Для кожного сегнетоелектрика існує температура, при якій відбувається руйнування його доменів – сегнетоелектрик перетворюється в звичайний діелектрик. Температура, яка відповідає такому перетворенню, називається ***точкою Кюрі*** (перетворення сегнетоелектрика в звичайний діелектрик є прикладом фазового переходу другого роду).

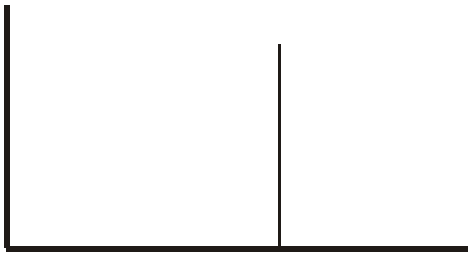


Рисунок 2.6.3

Залежність діелектричної проникності сегнетоелектриків від температури наведена на рис. 2.6.3. Спочатку зі збільшенням температури збільшується діелектрична проникність сегнетоелектрика (ділянка 1-2). Таке збільшення діелектричної проникності пояснюється збільшенням рухливості структури сегнетоелектрика, що зумовлює його «легшу» поляризацію. Коли температура сегнетоелектрика стає рівною температурі Кюрі, діелектрична проникність різко зменшується (ділянка 2-3) в результаті перетворення сегнетоелектрика в звичайний діелектрик, що має значно меншу діелектричну проникність.

У сегнетоелектриках та багатьох інших кристалічних речовинах спостерігаються особливі ефекти, які отримали назву п’єзоефектів. ***Прямий п’єзоефект*** полягає у тому, що механічна деформація таких речовин приводить до появи на їх поверхнях зв'язаних електричних зарядів. Це явище на кристалі кварцу відкрили у 1880 році французькі фізики Жан і П'єр Кюрі. Хімічна формула кристалу кварцу SiO_2 і його кристалічна решітка складається з позитивних іонів кремнію Si^{4+} та негативних іонів кисню O^{2-}. Спрощену модель кристалічної решітки кварцу можна розглядати як розміщені у вершинах шестикутника трьох іонів кремнію та трьох іонів кисню з подвоєним зарядом (рис.2.6.4а). У недеформованому стані на поверхні кварцу

відсутні зв’язані заряди і «центри ваги» додатних та. від’ємних іонів знаходяться у центрі правильного шестикутника.

Якщо кристал стискати у напрямі однієї з осей симетрії, наприклад осі X_1, то центри додатних та від'ємних зарядів іонів кремнію і кисню змістяться від попереднього положення (рис.2.6.4б). Внаслідок такої деформації на поверхні АВ з'являться від'ємні, а на поверхні CD додатні зв’язані заряди. При стисканні кристалу у боковому напрямі (рис.2.6.4в) знаки поверхневих зарядів стають протилежними.

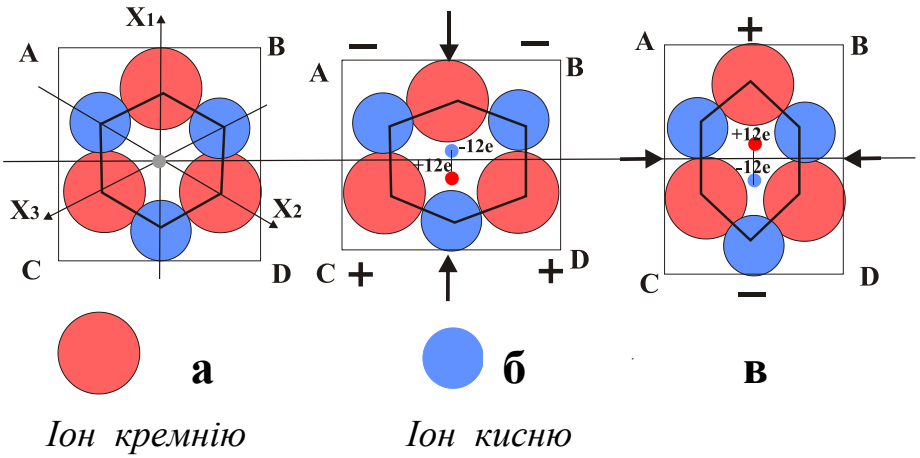


Рисунок 2.6.4

Зворотний п’єзоефект проявляється внаслідок деформації стиску або розтягу п’єзоелектричного кристалу в зовнішньому електричному полі. Прямий і зворотний п’єзоефекти широко застосовуються на практиці для перетворення механічних коливань в електричні і навпаки.

У даний час п'єзоефекти набули надзвичайно широкого застосування. Так, прямий п’єзоефект – для перетворення механічних коливань у відповідні коливання напруги. В ультразвуковій дефектоскопії відбитий сигнал вловлюється сегнетоелектриком і перетворюється в електричний сигнал. Відома усім ультразвукова діагностика (УЗД) теж використовує цей ефект – відбиті від внутрішніх органів ультразвукові сигнали вловлює сегнетоелектрик.

Особливе застосування знаходить зворотний п’єзоефект, коли під дією електричного поля сегнетоелектрик змінює свої розміри. П’єзоелектричні випромінювачі застосовуються для генерування ультразвуку з частотами до 50 МГц. Основним елементом п’єзоелектричного випромінювача є пластинка з п'єзоелектрика, що здійснює унаслідок зворотного п'єзоелектричного ефекту вимушені механічні коливання в змінному електричному полі.

Окремий приклад застосування зворотного п’єзоефекту є друк на струменевому принтері. Тому вважаємо доцільним більш детально

зупинитись на цьому питанні, так як з такою офісною технікою ми маємо повсякденну справу і необхідно знати як вона працює.

На рисунку 2.6.5 показаний загальний вигляд сучасного струменевого принтера та його основна деталь – струминна головка яка зображена окремо. Чорнило, що знаходиться в камері, під дією тиску, який створюється п’єзоелементом *2* через вузький отвір у вигляді тонкої струмини попадає на папір *3* принтера. Керування роботою струминної головки здійснює комп’ютер, подаючи відповідні електричні сигнали на п’єзоелектричний елемент, тим самим керуючи струминою чорнила, тобто керуючи друком принтера.

Рисунок 2.6.5

Особливий електротехнічний прилад, який використовує прямий та зворотний п'єзоефекти, це п'єзоелектричний трансформатор. У розділі "Змінний електричний струм" буде висвітлено принцип дії електричних трансформаторів на основі явища взаємоіндукції. Такі трансформатори на феромагнітному осерді мають первинну та вторинну обмотки і в залежності від співвідношення числа їх витків вони можуть бути підвищувальними (вихідна напруга більше вхідної) або знижувальними. Аналогічний результат – підвищення або зниження напруги змінного струму досягається в п'єзоелектричних трансформаторах, принципова схема якого наведена на рис. 2.6.6. Основним елементом такого трансформатора є сегнетоелектрик, на поверхні якого розташовані вхідні *1* та вихідні *2* електроди (електроди у вигляді смужок наносять методом напилення безпосередньо на поверхню сегнетоелектрика).

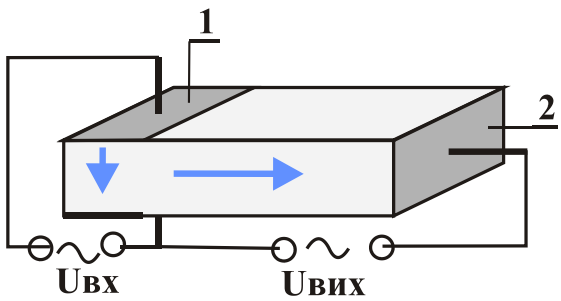


Рисунок 2.6.6

Дія п'єзотрансформатора заснована на використанні як прямого, так і зворотного п'єзоефектів. Електрична напруга, прикладена до вхідних електродів п'єзотрансформатора, в результаті зворотного

п'єзоефекту викликає деформацію всього об'єму п’єзоелектрика і на вихідних електродах виникає електрична напруга як наслідок прямого п'єзоефекту. У п'єзотрансформаторі відбувається подвійне перетворення енергії – електричної в механічну, а потім механічної в електричну. Як і електромагнітний трансформатор, п'єзотрансформатор використовують для перетворення електричної напруги. Підбором розмірів електродів і їх розташування можна отримувати різні значення коефіцієнта трансформації. П'єзотрансформатори використовують в резонансному режимі, при якому досягаються великі значення коефіцієнта трансформації (близько декількох сотень). П'єзотрансформатори знаходять застосування у високовольтних джерелах вторинного електроживлення, особливо в сучасних комп'ютерних моніторах, де замість громіздкого високовольтного трансформатора на феромагнітному осерді з первинною та вторинною обмотках використовують компактний п'єзотрансформатор.

Завершуючи розгляд питань застосування сегнетоелектриків та п’єзоелектрики, слід ще коротко відмітити про штучно створені діелектричні матеріали під назвою електрети – своєрідні аналоги постійного магніту. Так, якщо два полюси – північний та південний постійного магніту (рис.2.6.7а) створюють так зване соленоїдальне магнітне поле, то електрет являє собою діелектрик, на протилежних кінцях якого є зв’язані протилежні за знаком електричні заряди, які він зберігає протягом тривалого часу. Такий електрет створює електричне поле, силові лінії якого (рис.2.6.7б) подібні до силових ліній постійного магніту. Але між силовими лініями магнітного і електричного полів існує принципова різниця. Силові лінії магнітного поля замкнуті (рис.2.6.7а), а електричного – мають початок в додатних, а кінець у від'ємних зарядах.

а **б**

Рисунок 2.6.7

Електрети – аморфні речовини, до складу яких входять полярні молекули, наприклад, суміш воску й смоли. Якщо розплавити таку

суміш і помістити її в дуже сильне електричне поле, а потім дати затверднути в такому стані, то поляризація зберігатиметься протягом тривалого часу.

Сучасні електрети можуть зберігати зв'язані заряди до 100 років при їх поверхневій густині порядку 10^{-8} *Кл*/*см*^{2}.

Електрети як і сегнетоелектрики знаходять широке практичне застосування. Наприклад, найбільш якісними мікрофонами вважають електретні мікрофони, в яких звукові коливання сприймає тонка плівка з електрету.

Контрольні запитання

1 *Які речовини називаються діелектриками?*
2 *Яка різниця між полярними та неполярними молекулами?*
3 *У чому полягає явище електронної або деформаційної поляризації?*
4 *Як вводиться поняття вектора поляризації діелектрика та діелектричної сприйнятливості речовини?*
5 *Чому напруженість електричного поля Е в діелектрику менша від напруженості E_0 поля у вакуумі?*
6 *Який фізичний зміст діелектричної проникності середовища?*
7 *Який зв'язок між діелектричною проникністю та діелектричною сприйнятливістю речовини?*
8 *Як вводиться поняття тензор поляризації?*
9 *Як і за яких умов у діелектрику виникають об'ємні зв'язані заряди?*
10 *Як записується та формулюється теорема Гауса для потоку вектора поляризації в інтегральній та диференціальній формах?*
11 *Як вводиться поняття вектора електричного зміщення?*
12 *Як записується та формулюється теорема Гауса для потоку вектора електричного зміщення в інтегральній та диференціальній формах?*
13 *Які граничні умови на межі діелектриків для вектора напруженості електричного поля?*
14 *Які граничні умови на межі діелектриків для вектора зміщення електричного поля?*
15 *Що собою являють сегнетоелектрики і чим зумовлені їх особливі властивості?*
16 *Що визначає точка Кюрі для сегнетоелектриків?*

17 У чому полягає явище гістерезису для сегнетоелектриків?
18 У чому полягає явище прямого та зворотного п'єзоефектів?
19 Яке практичне застосування п'єзоефектів?
20 Що собою являють електрети?

Розділ 3 Провідники в електричному полі

Провідник — речовина, яка добре проводить електричний струм, що зумовлений рухом вільних зарядів у цій речовині. Тут термін «*добре проводить електричний струм»* вимагає окремого роз'яснення. Справа в тому, що і діелектрики за певних умов теж можуть проводити електричний струм, але для цього треба прикласти до діелектрика високу напругу щоб викликати його пробій. ***У провідниках вільні заряди рухаються під дією як завгодно малої сили, тобто за будь-яких завгодно малих напруженостей електричного поля*** – ось в чому полягає термін «добра провідність». Якщо у провіднику створити електричне поле, то вільні заряди провідника почнуть рухатись і у провіднику виникне електричний струм. Звичайно, за однакових умов сила струму в різних провідниках, залежно від їх природи, буде різною. В електростатиці, якщо провіднику надати електричний заряд або розмістити його в електростатичне поле відбуваються особливі явища, про що йтиме мова у даному розділі.

3.1 Розподіл зарядів на провідниках

Провідник в цілому електрично нейтральний. Наприклад, у металах від’ємний заряд електронів скомпенсований додатним зарядом вузлів кристалічної ґратки металу. Надавши, наприклад, металічному провіднику деякого від'ємного заряду, ми тим самим надали йому певну кількість надлишкових електронів і внаслідок кулонівських сил відштовхування вони намагаються "розбігтися" в різні сторони та розташуються на його поверхні. Всередині зарядженого провідника об’ємна густина зарядів дорівнює нулю. Очевидно, що поверхня зарядженого провідника буде еквіпотенціальною поверхнею і тоді силові лінії електричного поля у кожній точці провідника перпендикулярні до його поверхні. Розподіл від'ємних зарядів на поверхні металічного провідника довільної форми ілюструє рис.3.1.1 В результаті взаємного відштовхування надані провіднику електричні заряди намагаються розташуватися якомога далі один від одного і тому на гострому виступі тіла, як вказано на рис.3.1.1а, поверхнева густина зарядів буде найбільшою. Знаючи поверхневу густину зарядів на поверхні провідника, легко

визначити напруженість його електричного поля. Для цього виділимо на поверхні провідника елементарну площадку поверхню dS, у межах якої поверхневу густину зарядів σ можна вважати сталою, і побудуємо на цій поверхні циліндр, твірні якого перпендикулярні до цієї поверхні (рис.3.1.1б). Тоді потік $d\Phi_E$ вектора напруженості електричного поля через таку замкнуту поверхню згідно з теоремою Гауса визначається зарядом $dq = \sigma \cdot dS$, який є всередині цієї поверхні, тобто

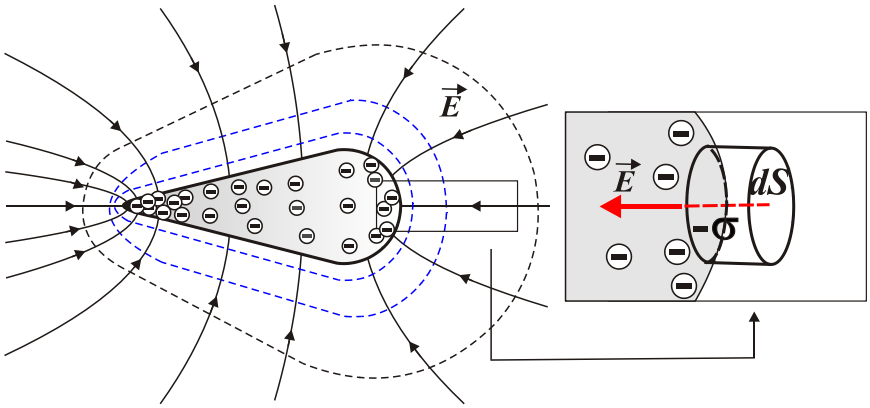


Рисунок 3.1.1

$$d\Phi_E = \frac{\sigma \cdot dS}{\varepsilon_0 \varepsilon}. \qquad (3.1.1)$$

Оскільки електричного поля всередині провідника немає, то потік вектора напруженості електричного поля через вибрану циліндричну поверхню буде тільки потоком через поверхню площею dS:

$$d\Phi_E = E \cdot dS. \qquad (3.1.2)$$

Прирівнюючи (3.1.1) та (3.1.2), отримаємо:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}. \qquad (3.1.3)$$

Тобто біля зарядженої поверхні провідника напруженість електричного поля у даній точці визначається поверхневою густиною зарядів. Особливо великою вона може бути біля загостреної частини зарядженого провідника, як вказано рис.3.1.1а, де відповідно буде найбільшою напруженість електричного поля. При великих

напруженостях можливе особливе явище під назвою "стікання електричних зарядів". Механізм цього явища полягає у тому, що та невелика кількість вільних зарядів (йони та електрони) яка є у повітрі, прискорюється сильним електричним полем і, вдаряючись об молекули газу, йонізує їх. Створюється область просторового заряду, з якої йони того ж знаку, що має загострена частина провідника, виштовхуються полем, захоплюючи за собою атоми газу. Потік атомів та йонів напрямлений від загостреної частини створює видимість "стікання зарядів", при якому провідник розряджається. Очевидно, що у вакуумі таке явище "стікання зарядів" неможливе. Для дійсного стікання зарядів з провідника він повинен бути заряджений тільки від'ємно і для цього потрібні електричні поля, які могли б вирвати електрони з провідника. Ці поля є порядку 10^6—10^7 *В/см*. Щодо розглянутого стікання зарядів з вістря за наявності повітря, то це явище в одних випадках є шкідливим, а в інших корисним. Так, у високовольтній техніці всі провідники не повинні мати гострих виступів та не бути зігнуті під гострими кутами, адже у цих місцях стікання зарядів призводить до небажаних втрат електроенергії. Одним з найбільш корисних застосувань стікання зарядів на вістрях є блискавковідвід, про що буде йти мова у розділі 7.5.

Підсумовуючи все вище сказане про ***розподіл зарядів на провідниках***, бачимо, що цей ***розподіл визначається геометрією зовнішньої поверхні провідника.*** Тому, якщо за цієї самої зовнішньої поверхні провідник матиме порожнину, то надані всередину такої порожнини електричні заряди перемістяться на його поверхню. Отже, вносячи у порожнину металевого тіла будь-яку кількість зарядів, всі вони розмістяться на його поверхні і теоретично таким способом порожнинному тілу можна надати будь-якого великого заряду. Але практично значення цього заряду обмежується вже відомим явищем "стікання заряду" в повітря. Спосіб накопичення електричних зарядів порожнинним тілом покладено в основу електростатичного генератора – приладу для одержання високої напруги. Перший генератор, що дозволив отримувати різницю потенціалів до 80 кіловольт, розробив американський фізик Роберт Ван де Грааф (1901-1967). Принципову схему електростатичного генератора показано на рис.3.1.2а.

Від джерела **1** постійної напруги з вістря **2** електричні заряди стікають на рухому стрічку **3**, з якої вже іншим вістрям **4**

переносяться на металеву сферу **5**. Тобто, під час руху стрічки відбувається постійне накопичення заряду на поверхні сфери, яку встановлюють на високовольтному ізоляторі **6**. Загальний вигляд одного з перших таких електростатичних генераторів наведено на рис 3.1.2б, в нижній частині якого розташована система надання стрічці електричного заряду та приведення її у рух. У перших генераторах

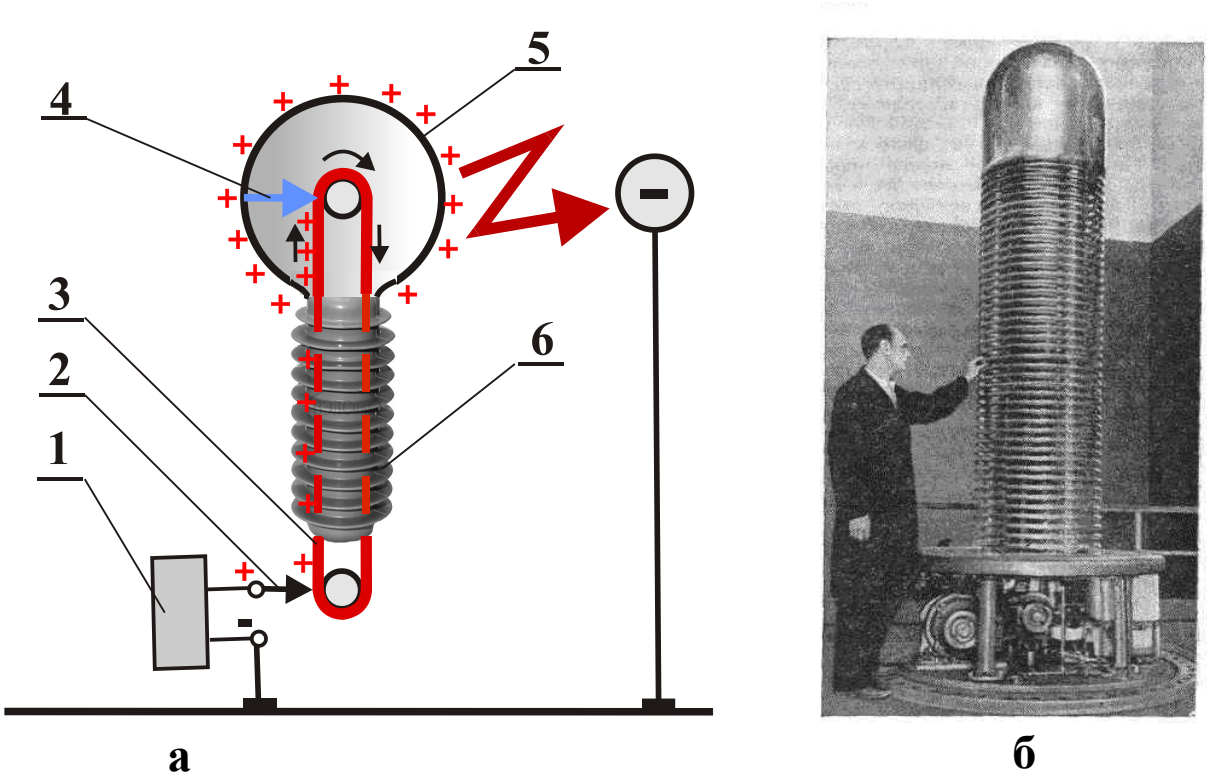


Рисунок 3.1.2

надання заряду стрічці здійснювалось її електризацією завдяки тертю.

У сучасних електростатичних генераторах прискорювачів елементарних частинок замість стрічок використовують ланцюги, що складаються з металевих і пластикових ланок, які чергуються між собою і дають можливість отримувати напруги до 20 мільйонів вольт. Менш потужні генератори Ван де Граафа використовуються у лабораторіях високовольтної техніки.

3.2 Провідники в електричному полі

Якщо незаряджений провідник розмістити у зовнішнє електричне поле, то під дією сил цього поля вільні заряди провідника почнуть рухатись і відбудеться перерозподіл зарядів. Наприклад, на одному кінці металевого провідника будуть "збиратись" електрони,

тобто виникатиме від'ємний заряд, а на протилежному кінці буде недостача електронів, що відповідає додатному заряду провідника. У результаті такого перерозподілу зарядів виникає електричне поле перерозподілених зарядів, яке всередині провідника має напрям протилежний зовнішньому полю. Очевидно, що перерозподіл зарядів триватиме до того часу, поки рівнодійна сил, яка діє на вільні заряди у провіднику, не стане рівна нулю. У результаті такого перерозподілу напруженість електричного поля всередині провідника, який розташований у зовнішньому електричному полі, дорівнює нулю. Отже, у даному випадку поверхня провідника є еквіпотенціальною з перпендикулярними до неї силовими лініями. На рис.3.2.1 приведена ілюстрація поведінки провідників різної форми в електричному полі додатного заряду.

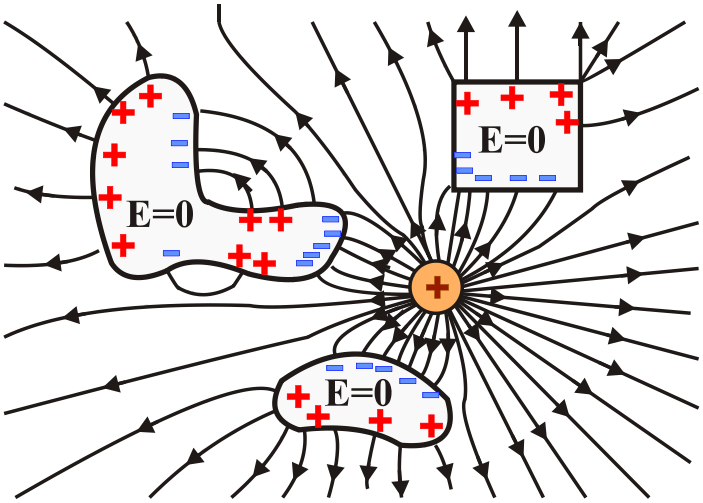


Рисунок 3.2.1

Відсутність електричного поля всередині провідника, який знаходиться у зовнішньому полі, дозволяє створити з порожнинного провідника ***електростатичний захист,*** тобто захист від зовнішніх електричних полів різних приладів та апаратів.

3.3 Електроємність відокремленого провідника

З попередньо розглянутих явищ щодо розподілу наданих проповіднику зарядів бачимо, що цей розподіл визначається тільки його зовнішньою поверхнею і не залежить від загального заряду. Кожна нова порція заряду надана провіднику розподіляється на його поверхні подібно попередній.

При наданні провіднику заряду змінюється його потенціал. Проте, для даного відокремленого провідника відношення його заряду q до потенціалу φ є величина стала. Отже, таке відношення може характеризувати електростатичні властивості провідника і отримало назву ***електроємність*** (або просто - ***ємність***):

$$C = \frac{q}{\varphi}. \qquad (3.3.1)$$

Якщо потенціал зарядженого провідника дорівнює 1В, то згідно з (3.3.1) ємність такого провідника чисельно дорівнює наданому йому електричному заряду. Одиницею електроємності в системі СІ є *1Ф* (фарад) – названий в честь англійського фізика Фарадея, з іменем якого пов'язані значні відкриття в галузі електрики і магнетизму, про що буде йти мова у наступних розділах. Повертаючись до означення одиниці електроємності *1Ф* відзначимо, що з (3.3.1) випливає, що ***один фарад – це ємність такого провідника, в якому зміна його заряду в один кулон зумовлює зміну потенціалу цього провідника на один вольт***.

Провідник буде відокремленим, якщо на нього не діють поля інших провідників, або він перебуває на нескінченій віддалі від інших провідників. Ємність відокремленого провідника залежить від його розмірів і форми, а також від діелектричної проникності середовища в якому він перебуває.

У загальному випадку розрахунок електроємності відокремленого провідника може бути складною математичною задачею, яка визначається його геометрією (розмірами та формою). Найпростіший випадок – це провідник сферичної форми, для якого і визначимо його електроємність. Так, якщо сферичному провіднику радіуса R, що перебуває в однорідному діелектричному середовищі, надати електричного заряду ***q***, то його потенціал буде дорівнювати

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R}. \qquad (3.3.2)$$

Підставивши (3.3.2) в (3.3.1), отримаємо формулу ємності відокремленого сферичного провідника:

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R. \qquad (3.3.3)$$

Тепер зрозуміло, чому вводячи поняття електричної сталої ε_0 зручніше записувати її одиниці вимірювання не в $Кл^2/Н{\cdot}м^2$, а в *Ф/м*.

Оскільки $\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9 \ Н \cdot м^2 / Кл^2}$, то згідно (3.3.3) ємністю *1Ф* володів би відокремлений сферичний провідник радіусом $9 \cdot 10^9 \ м$, тобто 9 мільйонів кілометрів. Отже, досягти ємності в одну фараду з допомогою відокремленого провідника практично неможливо. Але відокремлених провідників практично не буває, так чи інакше заряджений провідник перебуває в оточенні інших провідників, які впливають на значення електроємності. Тому наступним питанням буде розгляд ємності системи провідників.

3.4 Взаємна електроємність провідників. Конденсатори

Якщо провідник не відокремлений, то на його ємність впливає розміщення інших провідників. Так, якщо до зарядженого провідника А наблизити провідник Б, то на їхніх поверхнях виникнуть індуковані заряди (рис.3.4.1). Ближче до А, на одній зі сторін провідника Б виникає протилежний заряд, який у кінцевому результаті видозмінює поле провідника А, зменшуючи його потенціал. Якщо зменшувати потенціал (знаменник у формулі (3.3.1)), то ємність провідника зростатиме. Отже, система провідників має більшу ємність, ніж ємність відокремлених провідників. Цю властивість широко використовують на практиці у конденсаторах.

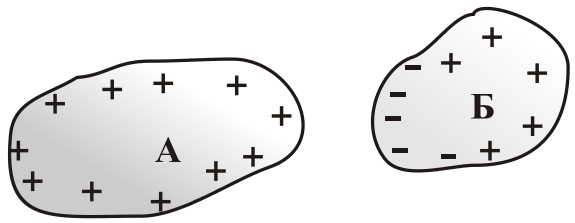


Рисунок 3.4.1

Електричний конденсатор – це система близько розташованих провідників, розділених діелектриком. Провідники, які утворюють конденсатор, називають обкладками. Близьке розміщення провідників (обкладок) зумовлює наявність електричного поля тільки між ними, не виходячи за межі простору конденсатора.

Ємність конденсатора визначають відношенням заряду q на одній з обкладок конденсатора до різниці потенціалів U між ними (3.4.1), або як відношення зміни заряду dq до зміни різниці потенціалів dU між обкладками конденсатора (3.4.2):

$$C = \frac{q}{U}, \tag{3.4.1}$$

$$C = \frac{dq}{dU}. \tag{3.4.2}$$

Ємність конденсатора залежить від форми, розмірів, взаємного розміщення обкладок конденсатора, а також від діелектричної проникності середовища, яке заповнює простір між обкладками конденсатора.

Плоский конденсатор – система з двох паралельних площин (обкладок). Між пластинами може бути вакуум або діелектрик. Якщо відстань між обкладками значно менша від їх лінійних розмірів, то поза

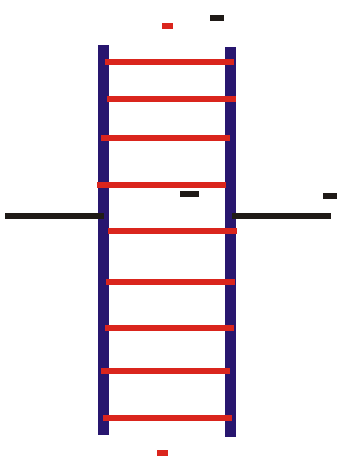


Рисунок 3.4.2

пластинами електричного поля двох різнойменно заряджених пластин практично немає, а крайовими ефектами – полем на кінцях пластин (рис. 3.4.2) можна нехтувати. При цьому поле між обкладками конденсатора близьке до поля двох різнойменно заряджених нескінчених площин. Як відомо, напруженість електричного поля між такими площинами (у даному випадку обкладками конденсатора) дорівнює $E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$, де $\sigma = \frac{q}{S}$ – поверхнева густина зарядів, q – заряд однієї з обкладок, S – її площа. Отже,

$$E = \frac{q}{S\varepsilon\varepsilon_0}. \qquad (3.4.3)$$

Оскільки електричне поле між обкладками конденсатора однорідне, то його напруженість E зв'язана з різницею потенціалів $\varphi_1-\varphi_2=U$ простим співвідношенням:

$$E = \frac{U}{d}, \qquad (3.4.4)$$

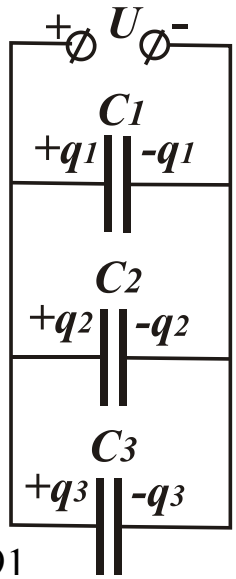


Рисунок 3.4.3

де d – відстань між обкладками. Отже, ємність плоского конденсатора дорівнює

$$C = \frac{q}{U} = \frac{q}{Ed} = \frac{q}{\frac{q}{\varepsilon_0\varepsilon S}d} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}. \qquad (3.4.5)$$

При паралельному з’єднанні конденсаторів (рис.3.4.3) різниця потенціалів однакова для всіх конденсаторів, тоді заряди на окремих конденсаторах будуть становити:

$$q_1 = C_1U;\ q_2 = C_2U;\ ....q_n = C_nU\ . \qquad (3.4.6)$$

Очевидно, що заряд такого паралельного з'єднання дорівнює сумі зарядів всіх його конденсаторів, тобто

$$q = q_1 + q_2 ... q_n = (C_1 + C_2 + ... + C_n)U\ . \qquad (3.4.7)$$

Отже, ємність бактерії паралельно з’єднаних конденсаторів дорівнює сумі їх ємностей:

$$C = C_1 + C_2 + ... + C_n\ . \qquad (3.4.8)$$

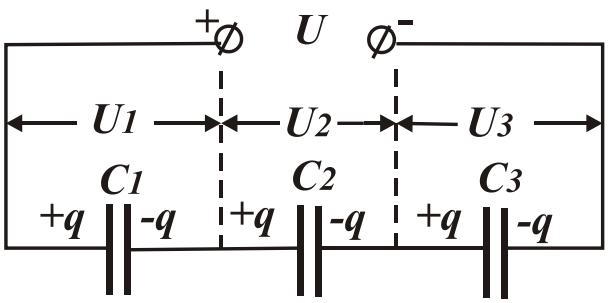


Рисунок 3.4.4

При послідовному з’єднанні конденсаторів (рис.3.4.4) внаслідок електростатичної індукції заряди на всіх його обкладках будуть однакові, а прикладена напруга дорівнює сумі напруг на окремих конденсаторах такого з'єднання:

$$U = U_1 + U_2 + ... + U_n\ . \qquad (3.4.9)$$

Враховуючи, що $U_1 = \frac{q}{U_1};\ U_2 = \frac{q}{U_2};...;U_n = \frac{q}{U_n}$, формула (3.4.9) прийме наступний вигляд:

$$U = q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + ... + \frac{1}{C_n}\right)\ . \qquad (3.4.10)$$

Оскільки $U = \frac{q}{C}$, то ємність послідовного з'єднання дорівнює:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}. \qquad (3.4.11)$$

Залежно від виду діелектрика, матеріалу обкладок конденсатора та його конструктивного виконання розрізняють: паперові конденсатори, де діелектричним матеріалом є папір; повітряні конденсатори – між обкладками є повітря; керамічні – де використовують кераміку; слюдяні – де діелектриком є тонка слюдяна пластинка. В електролітичних конденсаторах однією з обкладок служить електроліт, а іншою – металічна пластина (алюміній), покрита оксидним шаром, який і виконує роль діелектрика. В конденсаторах змінної ємності відбувається відносний рух обкладок або діелектрика між ними.

Конденсатори широко застосовують у радіотехніці, електротехніці, електроніці. Особливо це стосується керамічних конденсаторів, які при малих розмірах забезпечують великий діапазон ємностей (від 1 *пФ* до 47 *мкФ*) у широкому інтервалі напруги (від 10 *В* до 63 *кВ*). На рис.3.4.5 наведено загальний вигляд окремих конденсаторів та порівняння їх розмірів з сірниковою

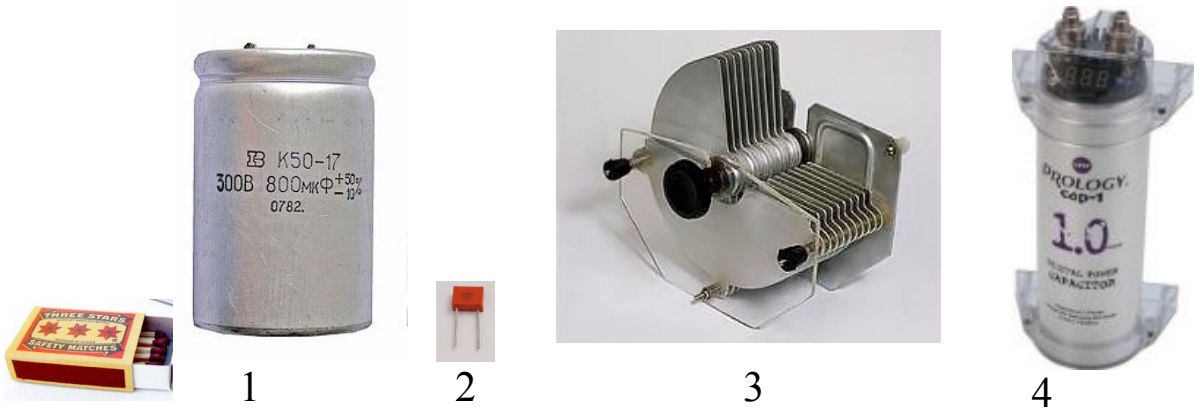


Рисунок 3.4.5 – Конденсатори:1 – електролітичний 800*мкФ*; 2 – керамічний 600 *пФ*; 3 – змінної ємності 10÷200 *пФ*

коробкою.

Сучасні технології дозволили створити конденсатори великої електроємності. Так, на рис.3.4.5$_4$ показано вигляд сучасного конденсатора ємністю 1*Ф*, тобто ємністю сфери радіуса 9 мільйонів кілометрів.

Окремий вид конденсаторів – це циліндричні конденсатори, які являють собою систему двох коаксіальних провідних циліндрів (з грецької *сит* (разом) + *axis (*вісь), тобто у даному випадку осі циліндрів співпадають). Можна довести, що електроємність такого конденсатора, який складається з двох коаксіальних циліндрів з радіусами r_1 та r_2 та довжиною l (рис.3.4.6а), визначається за формулою (3.4.12)

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}{\ln\frac{r_2}{r_1}}. \qquad (3.4.12)$$

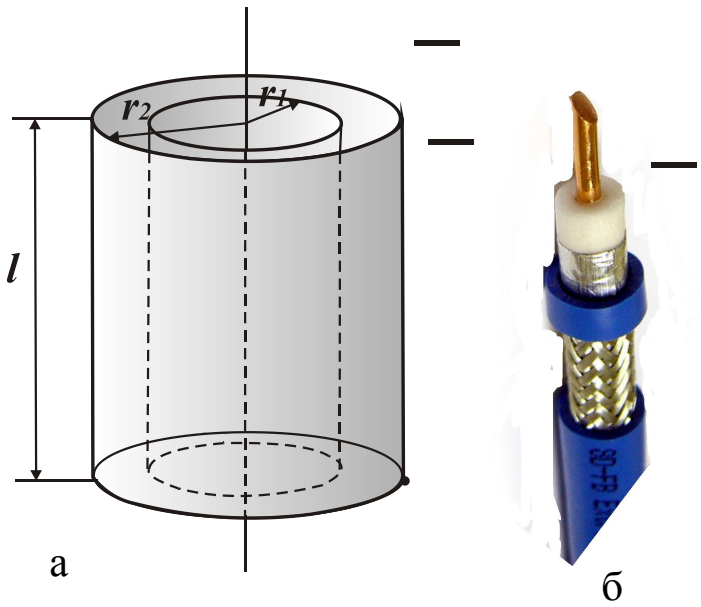


Рисунок 3.4.6

Прикладом коаксіального конденсатора є так званий коаксіальний кабель, який набув широкого практичного застосування у високочастотній техніці. Так, всім відоме кабельне телебачення для передачі телевізійних програм використовує відповідний коаксіальний кабель, будова якого наведена на рис.3.4.6 б. Центральний електрод **1** відокремлений та ізольований від зовнішнього електрода **2** поліетиленом **3.**

Всі наведені приклади вказують на корисне застосування конденсаторів. Але в окремих випадках електрична ємність може бути небажаним явищем, що ускладнює розрахунок та роботу деяких елементів електричних схем. Такі ємності називають паразитними. Так, якщо розрахувати електричний коливальний контур за відомою формулою періоду коливань $T = 2\pi\sqrt{LC}$, то виготовлений згідно з такою формулою коливальний контур в реальних умовах електричної схеми матиме інший період коливань, особливо для високих частот. Справа в тому, що самі провідники коливального контуру мають

певну електроємність і тому в реальних електричних колах для отримання їх заданих параметрів використовують додаткові конденсатори змінної ємності, які називаються конденсаторами підстройки.

3.5 Енергія відокремленого зарядженого провідника та конденсатора. Енергія електричного поля. Об'ємна густина енергії електричного поля

Вводячи поняття електроємності провідника ми мали справу з вже наданим цьому провіднику електричним зарядом. Але ж перед тим провідник був нейтральним і щоб його зарядити необхідно виконати роботу. Дійсно, з кожною новою порцією заряду, наданого провіднику, зростають сили кулонівського відштовхування для наступних порцій зарядів та зростає потенціал поверхні цього провідника. Отже, надання відокремленому провіднику заряду пов'язане з виконанням роботи проти сил електричного поля провідника, потенціал якого залежно від наданого заряду змінюється за формулою $\varphi = \frac{q}{C}$. Тому спочатку визначимо елементарну роботу dA при наданні провіднику елементарної порції заряду dq, яка не змінює потенціалу провідника. Враховуючи, що цю порцію заряду переміщуємо з точки поза полем з потенціалом $\varphi = 0$ на поверхню провідника з потенціалом φ, то виконана при цьому робота буде дорівнювати

$$dA = dq(\varphi - 0) = \frac{1}{C} q dq \,. \qquad (3.5.1)$$

Вся робота дорівнює сумі таких елементарних робіт, тобто означеному інтегралу

$$A = -\int_0^q C q dq = \frac{q^2}{2C} \qquad (3.5.2)$$

і така виконана робота визначає енергію W зарядженого відокремленого провідника ємністю C, якому надано заряд q:

$$W = \frac{q^2}{2C} \,. \qquad (3.5.3)$$

$C = \frac{q}{\varphi}$

Враховуючи, що отримуємо іншу формулу, яка визначає енергію відокремленого провідника за значенням потенціалу φ його зарядженої поверхні:

$$W = \frac{C\varphi^2}{2} . \qquad (3.5.4)$$

Щодо енергії зарядженого конденсатора, то ця енергія рівна роботі переміщення елементарних порцій заряду з однієї обкладки на іншу. Наприклад, з однієї обкладки забирають електрони і переносять на другу обкладку. У результаті такого переміщення перша обкладка заряджається додатно (недостача електронів), а друга – від'ємно (надлишок електронів) і між ними виникає різниця потенціалів $U = \frac{q}{C}$. Повторюючи хід доведення для відокремленого провідника, де замість його потенціалу φ записуємо різницю потенціалів U між обкладками конденсатора, легко отримати аналогічну до формули (3.5.4) формулу енергії зарядженого конденсатора:

$$W = \frac{CU^2}{2} . \qquad (3.5.5)$$

Зрозуміло, що заряджений провідник або конденсатор мають енергію за рахунок якої може бути виконана певна робота, що має значне практичне застосування. Наприклад, конденсатор повільно заряджається від джерела струму і потім миттєво розряджається у лампі-спалаху фотоапаратів. Миттєвий розряд конденсатора застосовують для стимуляції зупиненого серця. Потужний розряд конденсатора використовують в електрогідравлічному ударі – особливому явищі, коли розряд конденсатора відбувається між електродами у рідині. У результаті такого розряду в рідині виникає область високого тиску і виникає ударна хвиля. Таким методом можна діяти на привибійну зону нафтової свердловини, збільшуючи її дебіт. Це все результат накопиченої в конденсаторі енергії, носієм якої є електричне поле. Тому енергія електричного поля зарядженого провідника чи конденсатора повинна визначатись напруженістю їх електричних полів. Найпростіший випадок – однорідне поле плоского

конденсатора, для якого напруженість електричного поля легко визначити через різницю потенціалів U та відстані d між його обкладками – $E = \frac{U}{d}$. Тоді згідно з (3.5.5)

$$W = \frac{CE^2 d^2}{2}. \qquad (3.5.6)$$

Підставляючи у (3.5.6) формулу (3.4.5) ємності плоского конденсатора, отримаємо:

$$W = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S d}{2} E^2. \qquad (3.5.7)$$

Оскільки добуток площі S обкладок конденсатора на відстань d між ними визначає об'єм V простору занятого однорідним електричним полем, то

$$W = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon V}{2} E^2. \qquad (3.5.8)$$

У випадку неоднорідного електричного поля спочатку визначають його енергію dW в елементарному об'ємі dV, у межах якого поле можна вважати однорідним □

$$dW = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \, dV}{2} E^2 \qquad (3.5.9)$$

і тоді сумарна енергія електричного поля у заданому об'ємі V визначається інтегралом

$$W = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon_0 \varepsilon E^2 dV. \qquad (3.5.10)$$

Відношення енергії W електричного поля до його об’єму V називається об'ємною густиною w енергії електричного поля, як з врахуванням (3.5.8) дорівнює

$$w = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} . \qquad (3.5.11)$$

Контрольні запитання

1 *Як наданий провіднику електричний заряд розподіляється на його поверхні?*
2 *Як залежить поверхнева густина зарядів провідника від кривизни його поверхні?*
3 *У чому полягає явище «стікання» електричних зарядів та який принцип дії блискавковідводу?*
4 *Яка конструкція і як діє електростатичний генератор Ван де Граафа?*
5 *Чому напруженість електричного поля всередині провідника, який розташований у зовнішньому електричному полі, дорівнює нулю?*
6 *Як вводиться поняття електроємності відокремленого провідника? Який фізичний зміст одиниці електроємності 1Ф?*
7 *Яка формула електроємності сферичного відокремленого провідника?*
8 *Чому взаємна електроємність системи провідників більша від електроємності цих же відокремлених провідників?*
9 *Що собою являє плоский конденсатор і як обчислити його електроємність?*
10 *Як визначити ємність паралельного та послідовного з’єднань конденсаторів?*
11 *Яка будова коаксіального конденсатора?*
12 *Які практичні застосування конденсаторів?*
13 *Чому дорівнює енергія електричного поля зарядженого відокремленого провідника та конденсатора?*
14 *Як визначити об'ємну густину енергії електричного поля конденсатора?*

ЧАСТИНА ІІ ПОСТІЙНИЙ ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ

Розділ 4 Закони постійного струму

4.1 Електричний струм та його характеристики

У попередній частині даного підручника були розглянуті основні явища та закони електростатики, тобто все, що стосується нерухомих електричних зарядів. Рух електричних зарядів зумовлює інші явища, одним з яких є електричний струм. Згодом буде показано, що з рухом зарядів пов’язане ще одне явище, яке називається магнетизмом. Але поки що зупинимось на питаннях електричного струму. ***Електричні заряди можуть рухатись як завгодно, але лише упорядкований рух електричних зарядів називається електричним струмом***. У металах електричний струм зумовлений рухом вільних електронів. У напівпровідниках – електронів та дірок. В електролітах струм вникає внаслідок руху йонів протилежних знаків, а в газах – йонів та електронів. Електричні заряди можуть рухатись разом з тілом, на якому вони є. У такому випадку струм зумовлений рухом таких тіл називається конвекційним.

Очевидно, що незалежно від механізму протікання струму в різних середовищах, повинні бути деякі основні характеристики струму як у металах чи газах тощо. ***По-перше***, оскільки струм зумовлений упорядкованим рухом електричних зарядів, то виникає питання – напрям руху яких зарядів, додатних чи від'ємних, вважати напрямом струму? Історично склалось так, що ***за напрям струму вибрано напрям руху додатних зарядів.*** Вибір більш ніж невдалий, адже у більшості випадків ми маємо справу зі струмом в металах, який зумовлений рухом електронів – від'ємних зарядів (у металах відсутні вільні додатні заряди). Можна було б виправити прийнятий напрям струму, але це викликало би надзвичайно велику плутанину, тим більше, що для розрахунку електричних кіл його напрям принципового значення немає. Отже, ***по-друге, незалежно від напряму струму встановлюється його основна скалярна характеристика, яка називається силою струму – I.***

Сила струму I як скалярна фізична величина чисельно дорівнює електричному заряду, який проходить через поперечний переріз провідника за одиницю часу.

Коли напрям і сила струму з часом не змінюється, то такий струм є постійним і для нього сила струму визначається співвідношенням:

$$I = \frac{q}{t}, \qquad (4.1.1)$$

де q - електричний заряд, який проходить через поперечний переріз провідника за час t. Якщо ж струм змінний,то за нескінченно малий проміжок часу dt через провідник пройде заряд dq і тоді миттєве значення сили струму дорівнює

$$I = \frac{dq}{dt}. \qquad (4.1.2)$$

Ампер Андре-Марі (1775-1836)

Одиницею сили струму в системі СІ є $1A$(ампер) (названа в честь Ампе́ра Андре́-Марі, французького фізика і математика, творця основ електродинаміки).

Згідно з (4.1.1) $1A = \frac{1Кл}{1c}$, тобто $1A$ – сила такого постійного струму, коли за 1 секунду через поперечний переріз провідника проходить електричний заряд 1 кулон. Але у системі СІ однією з основних одиниць фізичних величин є одиниця сили струму $1A$, яка встановлюється з магнітної взаємодії провідників зі струмом , а саме:

1 ***ампер дорівнює силі такого постійного струму, який пропущений по двох прямих паралельних нескінченних провідниках із незначним поперечним перерізом, що поміщені на відстані* 1 *метр один від одного у вакуумі, створював би між цими провідниками силу*** $2 \cdot 10^{-7}$ ***ньютон на метр довжини.***

Струм однієї і тієї ж сили може проходити через провідники різних площ перерізу, тому доцільно ввести величину як відношення сили I струму в провіднику до площі S_n його нормального

поперечного перерізу. Така фізична величина, яка характеризує розподіл електричного струму по перерізу провідника, називається густиною струму та виражається формулою

$$J = \frac{I}{S_n}. \qquad (4.1.3)$$

Одиницею густини струму в системі СІ є ампер на квадратний метр ($А/м^2$).

Зрозуміло, що густина струму, яка визначена за формулою (4.1.3), дає значення цієї густини за умови рівномірного розподілу струму по всій площі поперечного перерізу провідника або середнє значення при нерівномірному розподілі струму. Нерівномірний розподіл струму в провіднику означає, що внаслідок неоднорідності провідника в його різних частинах площі поперечного перерізу за однакові проміжки часу проходять різні за величиною електричні заряди, тобто сила струму різна. У такому випадку густина струму у будь-якій точці поперечного перерізу провідника визначається границею, до якої прямує відношення сили струму ΔI до елемента площі ΔS_n, перпендикулярного до напряму струму, тобто

$$J = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta S_n} = \frac{dI}{dS_n}. \qquad (4.1.4)$$

Отже, знаючи густину струму у кожній точці провідника, можна обчислити силу струму через загальну площу його нормального перерізу як інтегральну суму елементарних струмів $dI = J \cdot dS_n$ через елементарні площі dS_n цього провідника:

$$I = \int_S J \cdot dS. \qquad (4.1.5)$$

Оскільки густина струму є його диференціальною характеристикою, а напрям струму визначається напрямом руху додатних зарядів, тобто вектором їх швидкості, тому доцільно ввести поняття вектора $\vec{J}$ густини струму. Модуль цього вектора

визначається за формулами (4.1.3) або (4.1.4), а напрям співпадає з напрямом електричного струму, тобто з напрямом вектора швидкості упорядкованого руху додатних електричних зарядів. Тому, для прикладу, розглянемо однорідний провідник, у якому струм зумовлений рухом вільних додатних зарядів (можна розглянути металічний провідник, але вважати, що замість вільних електронів у протилежному напрямі з такою ж швидкістю рухаються протилежні до електронів за знаком додатні заряди). Виділимо в однорідному провіднику циліндричний елемент довжиною l та площею S_n нормального перерізу провідника (рис.4.1.1). Вважатимемо, що струм у провіднику зумовлений рухом вільних додатних зарядів q_o.

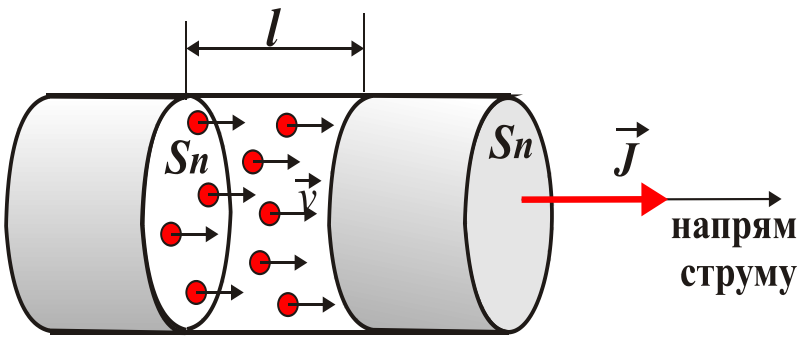


Рисунок 4.1.1

За час t через поперечний переріз провідника пройде N- зарядів q_o і ними буде перенесений загальний заряд $q = N \cdot q_0$. Отже, у даному випадку сила струму I, яка зумовлена впорядкованим рухом вільних зарядів q_o, дорівнює

$$I = \frac{q}{t} = \frac{N \cdot q_0}{t}. \qquad (4.1.6)$$

За відомої концентрації n вільних зарядів q_o їх кількість N у виділеному циліндричному елементі провідника об'ємом $V = l \cdot S_n$ буде становити $N = n \cdot V = n \cdot l \cdot S_n$. За час t вільні заряди у провіднику зі швидкістю v пройдуть відстань $l = v \cdot t$. Отже,

$$I = \frac{n \cdot v \cdot t \cdot S_n \cdot q_o}{t} = S_n \cdot n \cdot q_o \cdot v. \qquad (4.1.7)$$

Оскільки густина струму визначається відношенням (4.1.3), то числове значення густини струму незалежно від знаку вільних зарядів у провіднику дорівнює

$$J = n \cdot q_0 \cdot v. \tag{4.1.8}$$

В отримане значення густини струму входить v – швидкість упорядкованого руху вільних зарядів які зумовлюють струм у провіднику, а швидкість є векторна величина, то у векторній формі рівняння (4.1.8) набуде такого вигляду:

$$\vec{J} = n \cdot q_0 \cdot \vec{v}, \tag{4.1.9}$$

де напрям вектора $\vec{J}$ густини струму співпадає з напрямом швидкості упорядкованого руху додатних зарядів, тобто з напрямом електричного струму.

Оскільки в металах електричний струм зумовлений упорядкованим рухом від'ємних зарядів (вільних електронів), то вектор $\vec{J}$ густини струму в металах має напрям, протилежний вектору швидкості упорядкованого руху електронів.

Якщо ж струм зумовлений рухом позитивних йонів, наприклад, подвійно йонізований атом міді Cu^{++}, то очевидно, що у такому випадку вектор густини струму, зумовлений рухом додатних йонів співпадає з вектором їх швидкості. Але в усіх випадках, незалежно від знака вільних зарядів, вектор густини струму співпадає з напрямом електричного струму і, як буде показано пізніше, з напрямом вектора електричного поля, яке зумовлює цей електричний струм.

Визначення густини струму, особливо допустимої густини струму, в електричних мережах має надзвичайно велике практичне значення. Наприклад, розрахунок квартирної електропроводки за умови, що максимальна потужність всіх електроприладів може складати біля 6 кіловат вимагає провідників, у яких густина струму не перевищувала б 7 $А/мм^2$ і цій умові відповідають мідні провідники діаметром 1,6 *мм*.

4.2 Закон Ома в інтегральній формі для однорідної ділянки кола. Електричний опір

Традиційно виклад питання «Закон Ома» починається з того, що німецький фізик Георг Ом у 1827 році експериментально встановив, що сила струму I в провіднику пропорційна напрузі U на його кінцях:

$$I = k \cdot U, \qquad (4.2.1)$$

де k – коефіцієнт пропорційності, який залежить від розмірів та природи провідника і його називають електричною провідністю провідника. На практиці використовують величину обернену до провідності і її називають електричним опором $R = \frac{1}{k}$. Тоді закон Ома набуде вигляду:

$$I = \frac{U}{R}. \qquad (4.2.2)$$

Георг Ом
(1789-1854)

У 1827 р ще не було звичних нам джерел струму та приладів (амперметрів, вольтметрів) для вимірювання електричних величин та й не було системи одиниць цих величин. Тому в своїх дослідах Ом силу струму визначає як силу магнітної дії провідника, тобто чим більша сила струму в провіднику, тим більше відхилення магнітної стрілки, розташованої біля провідника зі струмом. Причину, що визначає силу струму в провіднику (напругу), Ом називає електроскопічною силою.

На честь відкривача цього закону одиниця опору в системі СІ названа 1 *Ом* (ом) і згідно з (4.2.2) **1** ***Ом*** **□** ***це опір такого провідника, в якому за напруги на його кінцях*** **1** ***В сила струму становить*** **1** ***А.***

Записаний у вигляді формули (4.2.2) закон Ома називають законом Ома в інтегральній формі для однорідної ділянки кола. Однорідна ділянка електричного кола це така ділянка, в якій на вільні заряди в провіднику діють тільки сили електричного походження і

лише в цьому випадку різницю потенціалів на кінцях такої ділянки можна назвати напругою (більш детально поняття електричної напруги буде розглянуте в наступному параграфі). Інтегральна форма такого запису закону Ома полягає у тому, що цей закон стосується загального (інтегрального) значення сили струму в провіднику, адже в різних частинах провідника значення сили струму можуть бути різними. Закон Ома виконується з великою точністю для металевих провідників та електролітів. Незначне відхилення спостерігається лише для струмів дуже великої густини – декілька мільйонів амперів на см^2. Значні відхилення від закону Ома спостерігаються для струмів насичення у вакуумних електронних приладах, а також несамостійних розрядів у газах. Залежність сили струму в провіднику від напруги на його кінцях називають його вольт-амперною характеристикою. Якщо не враховувати нагрівання провідників завдяки тепловій дії струму, то опір провідників не залежить від сили струму, який проходить по провіднику.

Легко довести, що при послідовному з'єднанні провідників їх загальний опір дорівнює сумі окремих опорів $R = R_1 + R_2 + ... + R_n$, а при паралельному

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + ... + \frac{1}{R_n}.$$

Для однорідних провідників циліндричної форми їх опір визначається таким співвідношенням:

$$R = \rho \frac{l}{S}, \qquad (4.2.3)$$

де l – довжина провідника, S – площа його нормального перерізу, ρ – питомий опір провідника, який визначається матеріалом самого провідника та його фізичним станом.

Питомий опір провідника чисельно дорівнює опору даного провідника одиничної довжини ($l = 1м$) та одиничної площі його нормального перерізу ($S = 1м^2$). В системі СІ одиницею питомого опору є ом на метр (Ом·м). Але на практиці, особливо в електротехніці, зручно визначати питомий опір провідника площею поперечного перерізу не $1м^2$, а $1мм^2$ і тоді одиницею вимірювання питомого опору є *Ом·мм*^{2}*/м*.

Нижче у таблиці 4.2.1 наведені значення питомих опорів деяких провідників при 0^0C:

Таблиця 4.2.1

Провідник	ρ, ***Ом·мм²/м***	ρ, ***Ом·м***
Алюміній	0,027	$2{,}7\cdot10^{-8}$
Вольфрам	0,055	$5{,}5\cdot10^{-8}$
Графіт	8,0	$8{,}0\cdot10^{-6}$
Залізо	0,1	$1{,}0\cdot10^{-7}$
Золото	0,022	$2{,}2\cdot10^{-8}$
Константан	0,5	$5{,}0\cdot10^{-7}$
Мідь	0,0172	$1{,}72\cdot10^{-8}$
Ніхром	1,12	$1{,}12\cdot10^{-6}$
Срібло	0,016	$1{,}6\cdot10^{-8}$

Як бачимо, найменший питомий опір мають провідники з міді та алюмінію і їх використовують у лініях та мережах передачі електричної енергії. У мікроелектроніці в окремих випадках застосовують золото. Для виготовлення реостатів та нагрівальних електричних приладів використовують сплави з великим питомим опором (константан, ніхром).

Питомий опір провідників залежить не тільки від їх матеріалу, але й від температури та деформацій.

Експериментально встановлено, що питомий опір металевих провідників має таку лінійну залежність від температури:

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha t), \qquad (4.2.4)$$

де ρ_0 – питомий опір за початковим значенням температури, яке здебільшого приймають $0^0 C$, α – температурний коефіцієнт опору, який чисельно дорівнює відносній зміні опору провідника при зміні його температури на $1K$. Температурний коефіцієнт опору становить $\frac{1}{273} K^{-1}$.

Рисунок 4.2.1

На основі явища зміни опору провідників від температури базується принцип роботи

1(

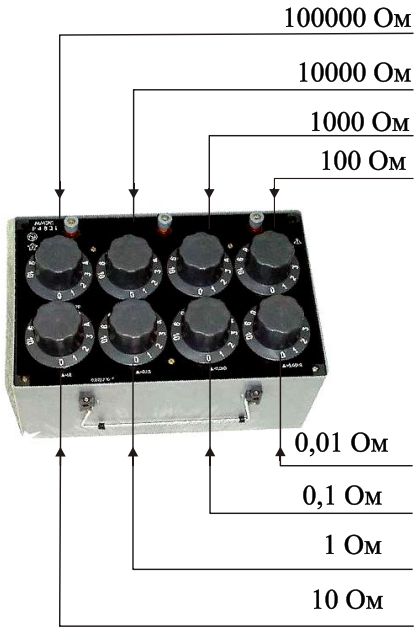


Рисунок 4.2.2

термометрів опору. А саме: зміна електричного опору провідника, якого у даному випадку називають терморезистором, фіксується електровимірювальним приладом, шкала якого проградуйована в градусах Цельсія або Кельвіна. На рис.4.2.1 показано сучасний цифровий термометр опору з умовним зображенням на електричних схемах його основного елемента – термістора, тобто провідника, опір якого змінюється з температурою. Термометри опору відносяться до одних із найточніших приладів для вимірювання температури. Похибка виміру температури за допомогою термометра опору може складати 0,001°С. Деякі сплави мають малі значення температурного коефіцієнта опору, наприклад, для константану $\alpha = 10^{-5} K^{-1}$ і такі сплави використовують для виготовлення еталонних опорів та магазинів опору. Магазин опору – фізичний прилад, за допомогою якого в електричне коло можна ввести опір будь-якого значення. Наприклад, за допомогою магазину опорів, який показано на рис.4.2.2, можна отримати електричний опір в інтервалі від 0,01 Ом до 99999,99 Ом за допомогою так званих декадних перемикачів, кожен з яких має 10 позицій від нуля до 9.

4.3 Закон Ома в диференціальній формі

Причиною виникнення струму у провіднику є наявність в ньому електричного поля. Тому вільні заряди в провіднику, "не знаючи закону Ома", змушені рухатись не під дією електричної напруги, а під дією сил електричного поля, які

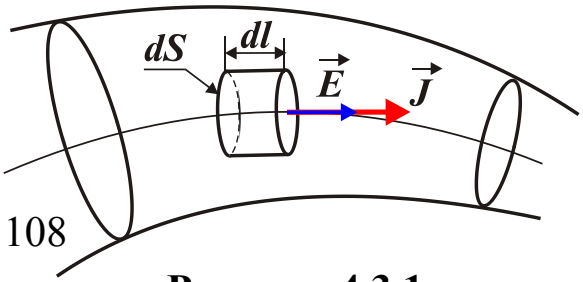


Рисунок 4.3.1

визначаються його напруженістю. Оскільки напруженість електричного поля є вектором і вектором є густина струму, то між цими векторними величинами повинен існувати певний зв'язок, який можна встановити таким чином. Враховуючи, що електричне поле в провіднику може бути неоднорідним і сам провідник теж може бути неоднорідним, виділимо в ньому елементарний циліндричний об'єм з твірними паралельними вектору густини струму як це показано на рис.4.3.1 Якщо загальна сила струму в провіднику становить I, то через елемент площею dS за густини струму j протікатиме струм силою $dI = J \cdot dS$ і тоді, застосовуючи закон Ома $dI = \frac{dU}{dR}$ для вибраного елемента провідника, можна записати:

$$J \cdot dS = \frac{dU}{dR}. \qquad (4.3.1)$$

Враховуючи зв'язок між напруженістю E та різницею потенціалів dU на кінцях вибраного елемента dl можна записати, що $dU = E \cdot dl$, а опір dR цього елементарного циліндра висотою dl та площею основи dS становить $dR = \rho \frac{dl}{dS}$, тоді

$$J \cdot dS = \frac{E \cdot dl}{\rho \frac{dl}{dS}} \Rightarrow J = \frac{1}{\rho} E \qquad (4.3.2)$$

Враховуючи, що фізична величина обернена до опору провідника називається питомою провідністю провідника $\sigma = \frac{1}{\rho}$, дістанемо:

$$J = \sigma \cdot E, \qquad (4.3.3)$$

тобто густина струму у даній точці провідника пропорційна напруженості електричного поля у цій самій точці провідника. Оскільки напруженість електричного поля є векторною величиною, то формулу доцільно записати у векторному вигляді:

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}, \qquad (4.3.4)$$

яка є законом Ома у диференціальній формі і має такий фізичний зміст:

вектор густини струму у даній точці провідника пропорційний вектору напруженості електричного поля у цій точці провідника, де коефіцієнтом пропорційності є його питома провідність у цій же самій точці.

Закон Ома у диференціальній формі є одним з фундаментальних законів електродинаміки і входить у рівняння Максвелла, які в стислій математичній формі описують всі явища електрики і магнетизму.

3.4 Сторонні сили. Електрорушійна сила

Ми настільки звикли до терміну джерело струму, що не завжди розуміємо, що це "воно таке". Інколи кажуть: «генератор виробляє електричний струм», «батарейка чи акумулятор дають струм» тощо. Якщо джерело струму дійсно дає електричний струм, то воно повинно на одному кінці металевого провідника вводити вільні електрони ,а на другому кінці забирати їх. Причому кількість таких електронів може складати величезне число. Наприклад, щоб сила струму в металевому провіднику була б рівною 0,16 A, джерело такого струму повинно щосекунди вводити і виводити з провідника (10^{18} електронів, заряд електрона $1{,}6 \cdot 10^{-19}\ Кл$). Але ж джерело струму не "бездонна бочка", у якій можна зберігати будь-яку велику кількість електронів, та саме в яку "бочку" збирати "відпрацьовані" електрони. Зрозуміло, що ніяких "бочок" немає і вони не потрібні. Джерело струму повертає "відпрацьовані" електрони в той же самий провідник. Принцип такої дії джерела показано на рис.4.4.1. Вважатимемо, що вільними зарядами в провіднику є додатні заряди і нехай куля **А** має їх надлишок,

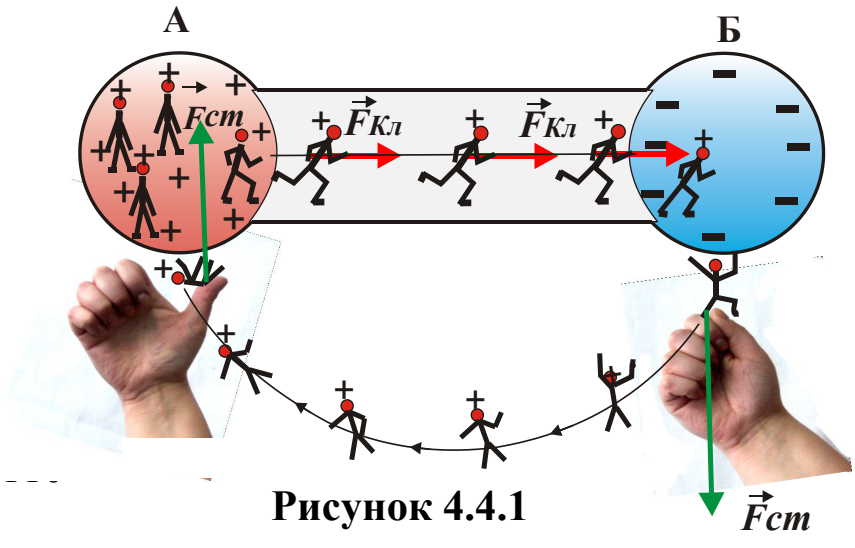


Рисунок 4.4.1

тобто заряджена додатно, а куля **В** – від'ємно (недостача додатних зарядів). З'єднаємо ці кулі провідником. Під дією сил електричного поля, кулонівських сил $F_{Кл}$, заряди почнуть рухатись і в провіднику виникне електричний струм. Проте цей струм буде короткочасним, адже відбудеться перерозподіл зарядів і кулі стануть електрично нейтральними, зникне електричне поле в провіднику, який з'єднує ці кулі. Для того, щоб в провіднику існував електричний струм, необхідно в провіднику відновити втрачене електричне поле, необхідно з кулі Б забрати додатні заряди і повернути їх кулі А. Для цього треба виконати роботу проти сил електричного поля за допомогою сил неелектричного походження, які назвали сторонніми силами. Загальне уявлення про сторонні сили можна отримати ще раз звернувшись до рис. 4.4.1. Так, додатні заряди, "почувши" електричне поле, зразу всі дружно "побігли" до від'ємно зарядженої кулі, а далі ця від'ємно заряджена куля не відпускає і тримає додатний заряд силою кулонівської взаємодії $F_{Кл}$. Приклавши до додатного заряду силу $F_{ст}$ неелектричного походження (ніби рукою), забираємо цей додатний заряд з від'ємно зарядженої кулі і знову ж таки проти сил електричного поля за допомого сторонніх сил (ніби рукою) «втискаємо» його в позитивно заряджену кулю. У результаті електричне коло виявилось замкнутим. Ділянка електричного кола, у якій вільні заряди рухаються під дією сил електричного поля (кулонівських сил), називається зовнішньою ділянкою електричного кола. Ділянка кола, у якій заряди переміщаються проти сил електричного кола за рахунок сторонніх сил, називається внутрішньою ділянкою кола. ***Пристрій, який виконує роботу з переміщення електричних зарядів на внутрішній ділянці кола проти сил електричного поля, і є джерелом електричного струму.*** Самі процеси у джерелах струму можуть мати різну

природу: в генераторах електростанцій використовується явище електромагнітної індукції; в сонячних напівпровідникових батареях енергія світла за рахунок фотоефекту безпосередньо перетворюється в енергію електричного струму; хімічні джерела струму завдяки відповідним хімічним реакціям забезпечують рух зарядів проти сил електричного поля. Незалежно від природи сторонніх сил джерела струму кількісний опис замкнутого кола з таким джерелом буде однаковим . Нагадаємо, що під терміном електричне коло розуміють сукупність сполучених між собою провідників, резисторів, джерел струму тощо, через які може проходити електричний струм. Так, на рис 4.4.2*а* замкнуте електричне коло складається з резистора опором R, під'єднаного до джерела струму (батарейки DURACELL).

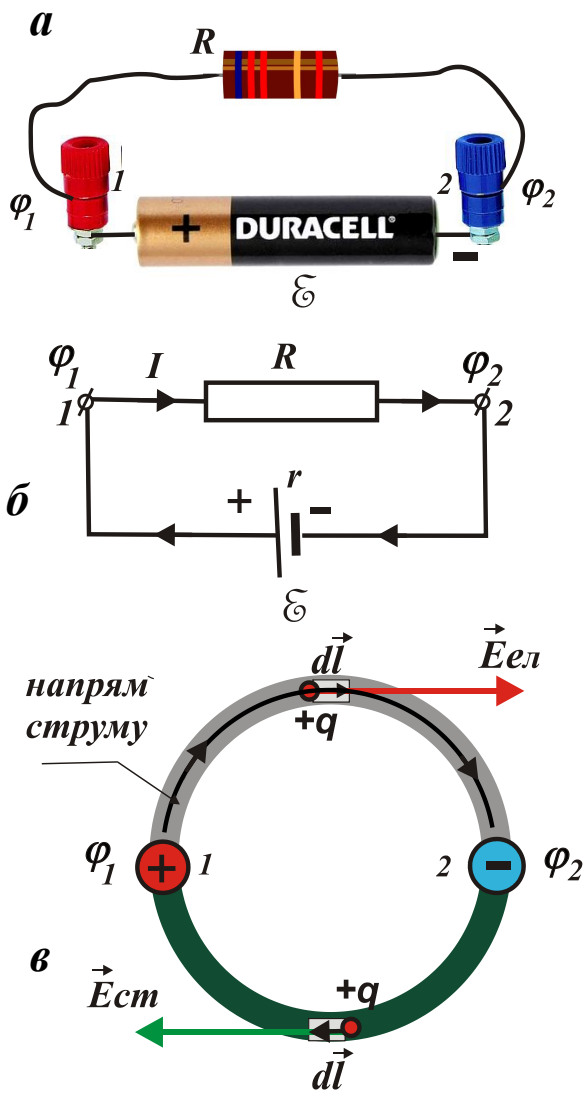


Рисунок 4.4.2

Зображення електричного кола за допомогою умовних знаків називається електричною схемою (рис.4.4.2*б*).

Для спрощення подальших розрахунків будемо вважати, що струм у даному колі зумовлений рухом вільних додатних зарядів, а саме: електричне коло зобразимо двома з'єднаними півколами. Верхнє півколо – зовнішня ділянка електричного кола (з'єднувальні провідники, резистор),нижнє півколо – джерело струму. У зовнішній ділянці кола заряди рухаються під дією кулонівських сил $\vec{F}_{Кл} = \vec{E}ел \cdot q$ електричного поля напруженістю $\vec{E}_{ел}$.

Щодо значення сторонніх $F_{ст}$, які діють на заряди всередині джерела струму, то їх можна визначити, ввівши поняття напруженості $\vec{E}_{ст}$ поля цих

сторонніх сил подібно, як вводиться поняття напруженості електричного поля. А саме:

$$\vec{E}_{ст} = \frac{\vec{F}_{ст}}{q}, \qquad (4.4.1)$$

тобто напруженість поля сторонніх сил чисельно дорівнює силі, що діє на одиничний заряд з боку цих сторонніх сил. Таким чином,

$$\vec{F}ст = \vec{E}ст \cdot q. \qquad (4.4.2)$$

Отже, на вільні заряди в замкнутому електричному колі діють кулонівські та сторонні сили, кожна з яких виконує "свою" роботу. Щоб визначити, де і як виконується відповідна робота, зобразимо замкнуте електричне коло у вигляді кола, де його верхня частина – зовнішня ділянка, а нижня частина – внутрішня ділянка, тобто джерело струму (рис.4.4.2*в*).

Якщо в електричному колі виділити елементарні ділянки dl, то елементарні роботи вказаних сил матимуть такі значення:

$$dA_{ел} = \vec{F}_{Кл} \cdot \vec{dl} = \vec{E}_{ел} q \cdot \vec{dl}; \qquad (4.4.3)$$

$$dA_{ст} = \vec{F}_{ст} \cdot \vec{dl} = \vec{E}_{ст} q \cdot \vec{dl}. \qquad (4.4.4)$$

Отже, загальна робота всіх сил (кулонівських та сторонніх) при переміщенні заряду q по замкнутому електричному колу буде визначатись інтегралом:

$$A = \oint_l \left(dA_{ел} + dA_{ст}\right) = q\oint \vec{E}_l \vec{dl} + q\oint \vec{E}_{ст} dl. \qquad (4.4.5)$$

Оскільки робота сил електричного поля при переміщенні заряду по замкнутому контурі дорівнює нулю, то залишається робота сторонніх сил:

$$A_{ст} = q\int_{l} \vec{E}_{ст} d\vec{l}\,, \qquad (4.4.6)$$

звідки

$$\frac{A_{ст}}{q} = \oint_{l} \vec{E}_{ст} d\vec{l}\,. \qquad (4.4.7)$$

Якщо в електростатиці відношення $\frac{A_{ел}}{q}$, тобто відношення роботи $A_{ел}$ сил електричного поля до заряду "q" дає вольти" (*Дж*/*Кл*=*В*), то отримана формула (4.4.7) теж "дає вольти" і ці особливі вольти отримали назву електрорушійної сили (скорочено ЕРС), яку позначають $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} = \frac{A_{ст}}{q}\,. \qquad (4.4.8)$$

Якщо q =1 *Кл,* то $\mathcal{E} = A_{ст}$ *(*чисельно), отже,

електрорушійна сила джерела струму чисельно дорівнює роботі сторонніх сил, які виконують роботу при переміщенні заряду один кулон по замкнутому електричному колу.

Беручи до уваги праву частину рівняння (4.4.7), можна записати:

$$\mathcal{E} = \oint_{l} \vec{E}_{ст} d\vec{l}\,, \qquad (4.4.9)$$

тобто ***електрорушійна сила джерела струм дорівнює циркуляції вектора напруженості поля сторонніх сил по замкнутому електричному колу.***

Останнє означення є найбільш загальним, оскільки воно може стосуватись ЕРС електромагнітної індукції, де буде йти мова про особливе електричне поле з замкнутими силовими лініями. Циркуляція вектора напруженості такого поля по замкнутому контуру дорівнює ЕРС електромагнітної індукції.

4.5 Закон Ома для неоднорідної ділянки кола та повного кола

Розглянемо ділянку 1-2 електричного кола, у якому на вільні заряди крім кулонівських сил діють сторонні сили (є джерело струму) (рис.4.5.1). За сторонні сили "відповідає" батарейка **VARTA** і вибрана ділянка 1-2 може бути частиною будь-якого електричного кола. Тоді виникає наступне питання: які сила та напрям струму в неоднорідній ділянці кола, якщо відомі її електричні параметри – потенціали φ_1, φ_2 на її кінцях та ЕРС, яка присутня в цій ділянці. Щодо напряму струму, то він повинен визначатись відносно вибраного нами напряму, за яким будемо «іти» вздовж ділянки кола. Так, на рис.4.5.1*а* згідно з вибраним напрямом від точки 1 до точки 2 сила струму в цій ділянці кола буде дорівнювати

$$I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon}{R} \qquad (4.5.1)$$

або

$$IR = (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon \ , \qquad (4.5.2)$$

де ЕРС джерела струму беремо зі знаком «+», оскільки вона збільшує потенціал у даному напрямі. Іншими словами, сторонні сили «допомагають» кулонівським силам у русі вільних зарядів у провіднику. Отримані співвідношення (4.5.1) та (4.5.2) є законом Ома в інтегральній формі для неоднорідної ділянки кола. Якщо після підстановки числових значень у (4.5.1) отримаємо від'ємне значення сили струму, то це означає, що дійсне значення напряму струму протилежне напряму від точки 1 до 2.

Інший випадок показано на рис. 4.5.1*б*, коли введена ЕРС в ділянку кола у вибраному напрямі приводить до зменшення потенціалу – переходимо від "плюса" до "мінуса" джерела струму Тому, дотримуючись вибраного напряму від точки 1 до 2, введену в ділянку кола ЕРС у рівняння (4.5.1) або (4.5.2) слід брати зі знаком «мінус». Тоді слід записати $IR = (\varphi_1 - \varphi_2) - \varepsilon$.

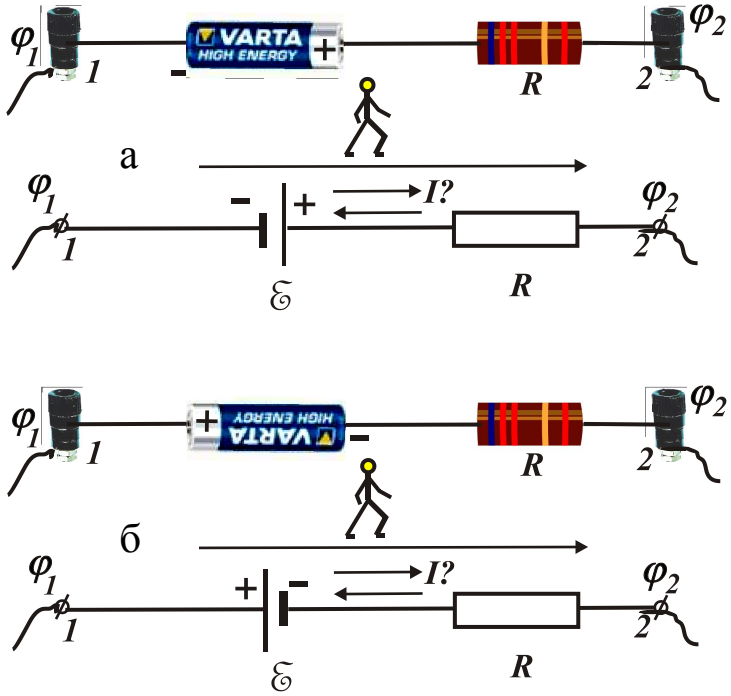


Рисунок 4.5.1

Таким чином, якщо раніше записана формула $I = U / R$ визначала тільки силу струму, то закон Ома для неоднорідної ділянки кола визначає не тільки абсолютне значення сили струму, але й його напрям.

Для замкнутого електричного кола, починаючи його обхід з точки 1 з потенціалом φ_1 і повертаючись в ту ж саму в точку з потенціалом φ_1 (рис.4.4.2), формула (4.5.2) набуде вигляду:

$$IR = \varepsilon \,, \tag{4.5.3}$$

де R – загальний опір кола і цей опір дорівнює сумі опорів зовнішньої ділянки кола, залишаючи за ними позначення R, та опору r – внутрішньої ділянки кола (джерел струму). Увівши ці позначення, отримуємо відомий закон Ома для замкнутого кола:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r} \,. \tag{4.5.4}$$

Крім того, закон Ома для неоднорідної ділянки кола розрізняє поняття електричної напруги та різниці потенціалів, хоча одиниці їх вимірювань однакові – вольти. Щоб зрозуміти цю різницю, надамо рівнянню (4.5.2) у своєрідного вигляду:

$$\text{ВОЛЬТИ}_{(IR)} = \text{ВОЛЬТИ}_{(\text{електричного поля})} + \text{ВОЛЬТИ}_{(\text{сторонніх сил})}.$$

Якщо на ділянці 1-2 неоднорідного електричного кола "вольти електричного поля" визначають роботу сил електричного поля, а

"вольти сторонніх сил" – роботу сил неелектричного походження, то зрозуміло, що "вольти IR" визначають роботу, яка здійснюється сумарним полем кулонівських та сторонніх сил і ці "вольти" позначають буквою U та називають напругою. Отже, ***напругою на ділянці кола 1-2 називається фізична величина*** U_{12} ***яка чисельно дорівнює роботі, що здійснюють сумарне поле кулонівських та сторонніх сил з переміщення вздовж кола одиничного додатного заряду.***

Увівши поняття напруги, запишемо рівняння (4.5.2) як

$$U_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon . \qquad (4.5.5)$$

Напруга на кінцях ділянки кола дорівнює різниці потенціалів лише у тому випадку, якщо на цій ділянці кола немає електрорушійної сили. Ось чому, розглядаючи закон Ома для однорідної ділянки кола, можна говорити про напругу або про різницю потенціалів на кінцях такої ділянки.

Особливий випадок неоднорідної ділянки кола якщо є джерело струму, є різниця потенціалів, а струму немає і немає напруги. За такого особливого випадку закон Ома для неоднорідної ділянки кола набуде вигляду:

$$0 = (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon . \qquad (4.5.6)$$

Це означає, що $(\varphi_1 - \varphi_2) = \varepsilon$, тобто "вольти електрорушійної сили" компенсуються "вольтами електричного поля", що покладено в основу експериментального компенсаційного методу визначення електрорушійної сили джерела струму. Електровимірювальні прилади для визначення невідомих ЕРС методом компенсації називаються потенціометрами.

4.6 Розгалужені електричні кола та правила Кірхгофа для їх розрахунку

Електричні кола можуть мати надзвичайно багато елементів, які об’єднуються в складні електричні схеми. Так, на рис.4.6.1 показано сучасну друковану плату з вмонтованими на ній електронними

компонентами. Усі елементи схеми з'єднані між собою "надрукованими" провідниками – тонкими смужками металевої фольги і утворюють ***розгалужені електричні кола.*** Зрозуміло, що розрахунок розгалужених електричних кіл важливе практичне завдання і це завдання в багатьох випадках розв'язується застосуванням правил Кірхгофа (**Густав Роберт Кірхгоф** (1824-1887), німецький фізик).

Рисунок 4.6.1

Перше правило Кірхгофа стосується вузла – точки, у якій сходяться не менше трьох провідників електричного кола. Вважатимемо струми, що входять у вузол додатними, а ті що виходять – від'ємними (можна навпаки). Тоді, згідно закону збереження електричного заряду, ***алгебраїчна сума усіх сил струмів у будь-якому вузлі розгалуженого електричного кола дорівнює нулю*:**

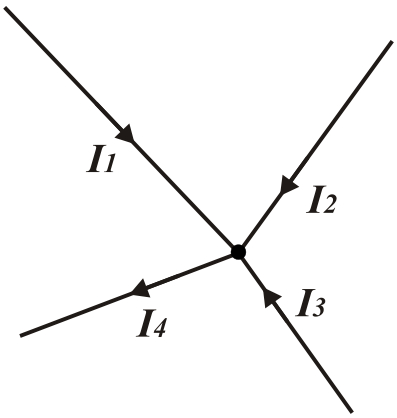
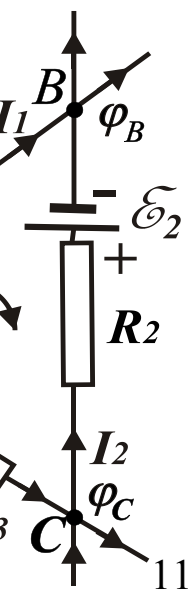


Рисунок 4.6.2

$$\sum_{i=0}^{n} I_i = 0 \quad . \qquad (4.6.1)$$

Для вузла, який зображено на рис.4.6.2, перше правило Кірхгофа буде мати такий вигляд:

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0 \quad . \qquad (4.6.2)$$



.6.3

Друге правило Кірхгофа застосовують для замкнутого контуру, що може бути вибраний з будь-якого розгалуженого електричного кола. Для прикладу розглянемо замкнутий контур, електричну схему якого наведено на рис.4.6.3. Оскільки ділянки вибраного контуру є неоднорідними, то кожна ділянка контуру описується відповідним законом Ома (4.5.2). Застосуємо і запишемо цей закон для всіх ділянок

даного контуру, вибравши напрям його обходу, наприклад, за стрілкою годинника. Вибір обходу довільний, але при цьому слід дотримуватись наступних правил. Струми, напрям яких співпадає з вибраним напрямом обходу вважаємо додатними, а ЕРС що збільшують потенціал у напрямі обходу (переходимо від полюса "-" до "+") теж додатними. У інших випадках знаки бути протилежними. Згідно з цими правилами закони Ома для всіх неоднорідних ділянок даного замкнутого контуру будуть мати такий вигляд:

$$\begin{aligned} I_1R_1 &= \varphi_A - \varphi_B + \varepsilon_1; \\ I_2R_2 &= \varphi_B - \varphi_C + \varepsilon_2; \\ I_3R_3 &= \varphi_C - \varphi_A + \varepsilon_3. \end{aligned} \qquad (4.6.3)$$

Почленно додавши ці рівняння, дістанемо:

$$I_1R_1 - I_2R_2 - I_3R_3 = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3. \qquad (4.6.4)$$

Отже, ми отримали ***друге правило Кірхгофа, тобто алгебраїчна сума добутків сил струмів на опори відповідних ділянок замкнутого електричного контуру (ліва частина рівняння(4.6.4)) дорівнює алгебраїчній сумі електрорушійних сил (права частина (4.6.4)) які діють у цьому контурі.***

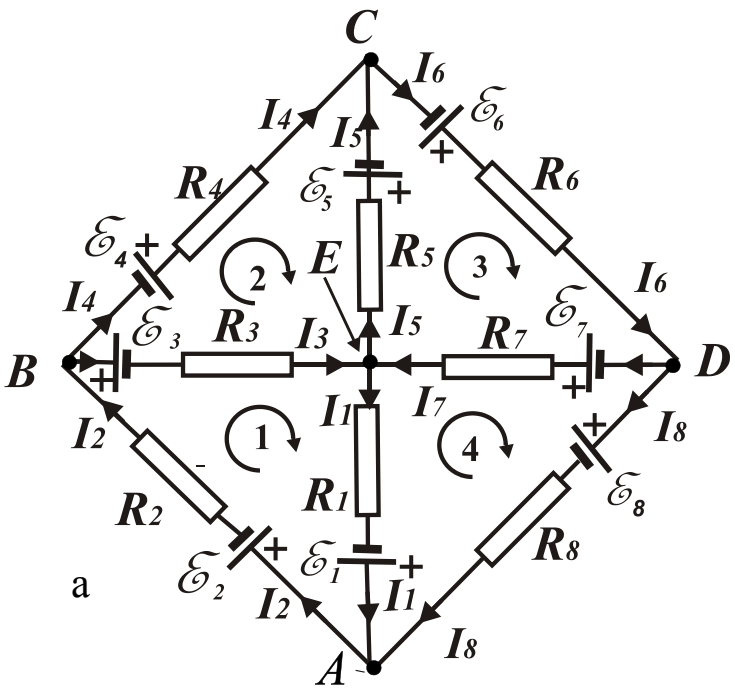
У загальному випадку, коли у контурі є i- ділянок та k- електрорушійних сил, то друге правило Кірхгофа набуде такого вигляду:

$$\sum_{i=1}^{i} I_i R_i = \sum_{k=1}^{k} \varepsilon_k \,. \qquad (4.6.5)$$

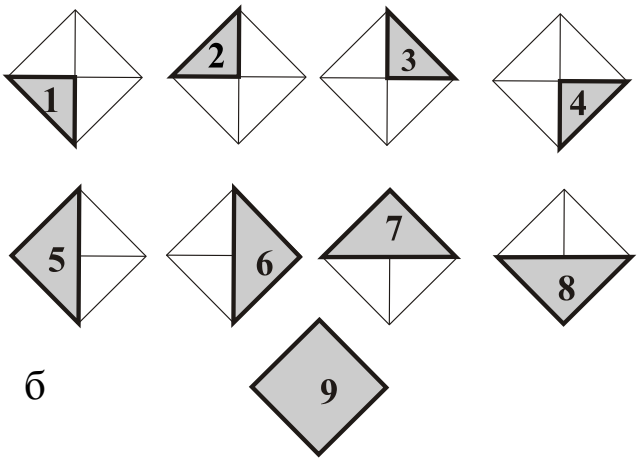
До значень опорів ділянок кола входять їх загальні опори – опори резисторів, провідників та внутрішні опори джерел струму тощо.

Застосовуючи правила Кірхгофа, в принципі можна розрахувати будь-які складні розгалужені електричні кола. Наприклад, в розгалуженому електричному колі, схема якого зображена на рис.4.6.4, відомі всі електрорушійні сили та опори всіх ділянок кола. Необхідно визначити сили струму в усіх ділянках кола. Оскільки

необхідно визначити 8 невідомих величин (вісім струмів у восьми ділянках кола), то необхідно скласти 8 рівнянь, у які входили б усі електрорушійні сили та опори всіх ділянок. Перед тим, як складати відповідні рівняння, на схемі довільно вказуємо можливі напрями струмів.



а



б

Рисунок 4.6.4

У даному розгалуженому електричному колі є 5 вузлів – точки A,B,C,D та E і для того, щоб у перше правило Кірхгофа входили значення всіх сил струмів, достатньо записати 4 рівняння для будь яких вузлів, адже п'яте рівняння буде наслідком з попередніх рівнянь. Так, якщо записати перше правило Кріхгофа для таких вузлів: вузол ***A*** □ $I_1 + I_8 - I_2 = 0$; вузол ***B*** □ $I_2 - I_3 - I_4 = 0$; вузол ***C*** □ $I_4 + I_5 - I_6 = 0$; вузол ***D*** □ $I_6 - I_7 - I_8 = 0$, то при додаванні цих рівнянь отримаємо

$$I_1 - I_3 + I_5 - I_7 = 0$$

або

$$I_3 \square I_7 \square I_1 \square I_5 \square 0,$$

що є рівнянням для вузла ***E*** як наслідок з попередніх рівнянь.

У складених чотирьох рівняннях першого правила Кірхгофа є 8 невідомих сил струмів в окремих ділянках розгалуженого кола. Тому необхідно записати ще чотири рівняння за другим правилом Кірхгофа, вибираючи необхідні замкнуті контури. У даному розгалуженому колі можна виділити 9 замкнутих контурів (рис.4.6.4*б*) з яких достатньо вибрати чотири будь-яких контури. Дійсно, в даному розгалуженому колі їх є 8 і в кожен вибраний замкнутий контур входить не менше двох ділянок, а третя може бути спільною для іншого контуру. Як приклад, для складання рівнянь за другим правилом Кірхгофа, на схемі розгалуженого кола вибрані контури 1,2,3 та 4, для яких друге правило Кірхгофа матиме такий вигляд:

$$\begin{aligned}
&\text{контур 1} && I_2R_2 + I_3R_3 - I_1R_1 = -\varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_1;\\
&\text{контур 2} && I_4R_4 - I_5R_5 - I_3R_3 = \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_3;\\
&\text{контур 3} && I_5R_5 + I_6R_6 + I_7R_7 = -\varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7;\\
&\text{контур 4} && -I_1R_1 - I_7R_7 + I_8R_8 = -\varepsilon_1 - \varepsilon_7 - \varepsilon_8.
\end{aligned}$$

Розв'язавши систему восьми рівнянь, отримаємо шукані значення сил струмів в усіх ділянках розгалуженого кола. Якщо ж деякі значення струмів виявляться від'ємними, то це означає, що їх напрям протилежний до вибраного.

Розглянутий приклад розгалуженого електричного кола ще не є випадком складних розгалужених кіл, які вимагають особливого підходу до визначення мінімального числа вузлів та замкнутих контурів. У таких випадках загальне число вузлів позначають ***p***, а для першого правила Кірхгофа записують $p-1$ рівнянь. Якщо в розгалуженому колі є ***m*** незалежних контурів, то для складання рівнянь за другим правилом Кірхгофа мінімальне число замкнутих контурів буде становити $m-(p-1)$. Так, для даного розгалуженого кола (рис.4.6.4) $p=5$, $m=8$. Отже, необхідно 4 замкнутих контури, для яких і було складено 4 рівняння за другим правилом Кірхгофа.

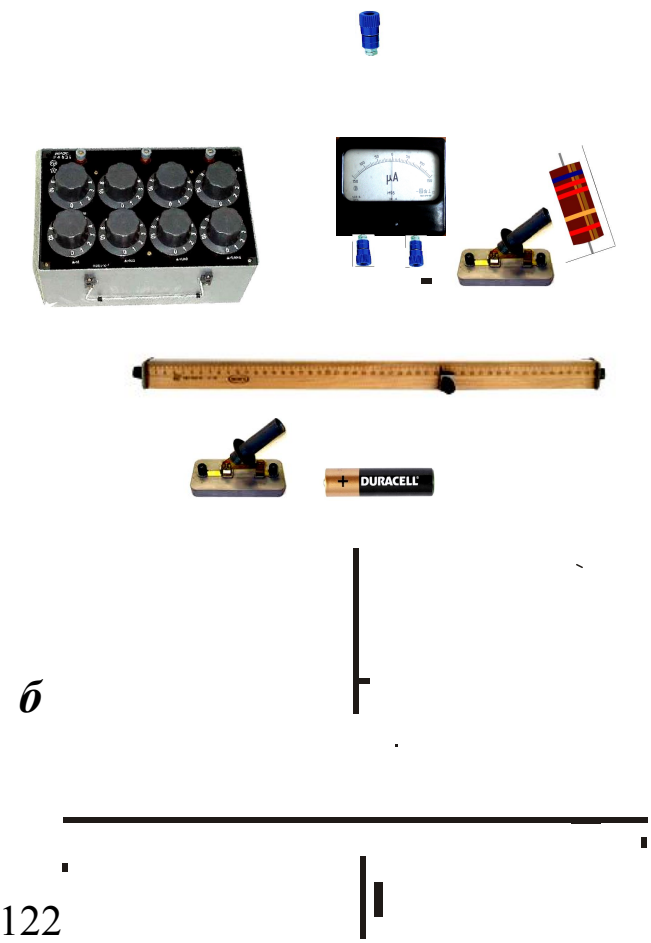
В особливо складних розгалужених колах виникають труднощі з визначенням незалежних замкнутих контурів і тоді використовують теорію графів, основоположником якої вважають математика Лонардо Ейлера. Спрощено граф можна вважати як систему точок, з’єднаних лініями. Теорія графів у даний час набула великого

значення. Так, зображена на.рис.4.6.1 сучасна друкована плата є прикладом плоского графа, де роль точок виконують елементи мікросхеми, а лінями, що їх з'єднують, є надруковані провідники. Можна навести багато інших прикладів застосування теорії графів у комунікаційних і транспортних задачах, в біології та хімії складних молекулярних структур тощо.

Елементи теорії графів використовують у нафтовій промисловості, де нагнітальні та експлуатаційні свердловини є точками, а лініями фільтраційні потоки рідини що їх з'єднують. Розрахунок такого своєрідного графа проводиться за методом електрогідродинамічної аналогії, згідно з якою сила електричного струму відповідає витраті рідини (дебіту свердловини), а електричний опір провідника моделює фільтраційний опір нафтового пласта. Причиною, що зумовлює рух рідини у нафтовому пласті, є різниця тисків, якій у відповідність ставлять електрорушійну силу і потім, склавши необхідне число рівнянь за першим та другим правилами Кірхгофа, визначають необхідні величини.

3.7 Вимірювання електричних опорів. Місток Уітстона

Користуючись законом Ома, можна визначити опір провідника, вимірявши різницю потенціалів U на кінцях провідника та силу струму I. На практиці широкого застосування набув інший метод, який базується на порівнянні невідомого опору R_x з відомим R_0 (еталонним) опором. Таке порівняння проводиться за допомогою розгалуженого електричного кола, яке отримало назву місток Уітстона (електричний місток). (Уітстон Чарлз (1802-1875) – англійський фізик**).** На рис.4.7.1*а* показано загальний вигляд містка



б

Рисунок 4.7.1

Уітстона, а на рис.4.7.1*б* – його принципова електрична схема. Один з елементів такої схеми – реохорд ("реохорд" – з грецької: "рео" – текти та "хорда" – струна. Тут "реохорд" перекладається як "струна, по якій тече струм). Реохордом, який вказаний на рис.4.7.1*б*, є дротина АВ (провідник) з однаковим по всій довжині діаметром. До точок А та В приєднані невідомий R_x та відомий R_0 опори, які мають спільну точку D. Відомим R_0 опором служить магазин опорів.

Від джерела струму йде розгалуження струмів на струми I_1 та I_2. Потенціал точки D (φ_D) має проміжне значення між потенціалами точок **A** і **B**. Тобто, на реохорді АВ знайдеться така точка, потенціал якої φ_C буде дорівнювати φ_D точки **D**. Тому, якщо між точками **C** і **D** ввімкнути гальванометр, то він покаже відсутність струму. Гальванометр, який фіксує наявність або відсутність електричного струму, називається нуль-індикатором (на схемі рис.4.7.1б він позначений Н-І). Для знаходження на реохорді такої точки **C**, коли струму через нуль-індикатор немає, використовується рухомий контакт, який ковзає вздовж реохорда (стрілка біля точки **C**).

Стан місткової схеми за відсутності струму в ділянці CD (діагоналі містка) називається станом рівноваги містка. Звичайно, що у неробочому стані джерело струму та гальванометр вимикаються з електричного кола, а при вимірюванні вмикаються за допомогою відповідних ключів *Кл*1 та *Кл*2, які вказані на рис.4.7.1*а* . Для виведення умови такої рівноваги скористаємось другим законом Кірхгофа.

Згідно з другим правилом Крхгофа для замкнутого контуру ADCA будемо мати рівняння (4.7.1), а для контуру CDBC – рівняння (4.7.2):

$$I_2 \cdot R_X - I_1 \cdot R_{AC} = 0, \qquad (4.7.1)$$

$$I_2 \cdot R_0 - I_1 \cdot R_{CB} = 0. \qquad (4.7.2)$$

З цих рівнянь випливає умова рівноваги містка:

$$R_X = R_0 \frac{R_{AC}}{R_{CB}}. \qquad (4.7.3)$$

Для реохорда АВ, як каліброваної дротини (дротини з однаковим діаметром по всій довжині), відношення опорів її частин R_{AC} та R_{CB} можна замінити відношенням відповідних довжин l_1 та l_2, які називаються плечами реохорда. Тому кінцевий вираз прийме наступний вигляд:

$$R_X = R_0 \frac{l_1}{l_2}. \qquad (4.7.4)$$

Визначення невідомого опору за допомогою містка Уітстона можна проводити "вручну", добиваючись рівноваги містка переміщенням контакту С вздовж реохорда і стежачи за показами нуль-індикатора. Якщо відомим опором служить магазин опорів, то доцільно рухомий контакт С встановити посередині реохорда так, щоб $l_1 = l_2$ і тоді магазином опорів досягають умови рівноваги містка. Підібраний таким чином на магазині опір буде дорівнювати невідомому опору – $R_x = R_0$.

Встановлення рівноваги містка Уітстона може здійснюватись автоматично за допомогою електронної системи, яка приводить у рух електродвигун, що здійснює переміщення рухомого контакту вздовж реохорда. Промисловість випускає широкий клас містків з автоматичним встановленням їх рівноваги, які не тільки здійснюють цю операцію, але й записують на діаграмній стрічці будь-які зміни опору резистора під'єднаного до містка.

Так, якщо до такого містка під'єднати термометр опору, то такий міст на діаграмній стрічці буде записувати зміни опору резистора від температури, отже, і записувати графік зміни температури. Якщо ж на такому містку встановити контакти, що керують нагрівальними приладами, то такий місток буде здійснювати автоматичне регулювання температури – вмикання або вимикання нагрівального пристрою. Такі автоматичні мости мають абревіатуру МСР, що означає *міст самопишучий регулювальний*. На рис.4.7.2 показано загальний вигляд такого сучасного автоматичного містка, який

Рисунок 4.7.2

додатково здійснює цифрову індикацію значень вимірюваної величини.

Крім реохордних містків Уітстона широкого застосування набули безреохордні містки, принципова електрична схема яких наведена на рис.4.7.3*а*. Умовою рівноваги такого містка є таке ж співвідношення між опорами як і для містка з реохордом, тільки тут плечима є опори R_1 та R_2. Тому формула (4.7.3) стосовно безреохордного містка набуде такого вигляду:

$$R_X = R_0 \frac{R_2}{R_1}. \qquad (4.7.5)$$

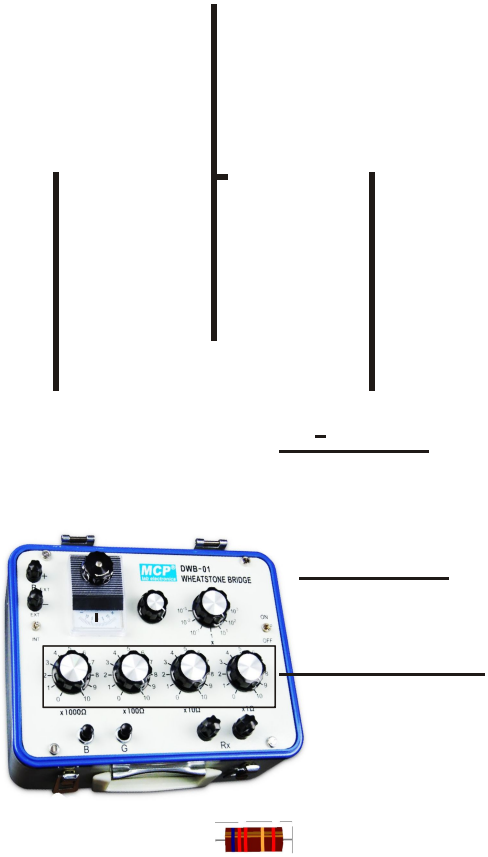


Рисунок 4.7.3

З формули (4.7.5) випливає, що відношення R_2 / R_1 визначає межі вимірювання безреохордного містка Уітстона. Загальний вигляд сучасного безреохордного містка показано на рис.4.7.3*б*. Як видно з цього рисунка, визначення невідомого опору R_x здійснюється вручну встановленням рівноваги місткової схеми за допомогою магазину опорів. Отримане значення R_0, при якому нуль-індикатор покаже відсутність струму, необхідно помножити на коефіцієнт $k = R_2 / R_1$, що визначає межі вимірювань. У більшості таких містків цей коефіцієнт має такі значення: 0.001; 0,01; 0.1; 1; 10; 100; 1000. Якщо, наприклад, встановивши межу вимірювань містка на $k = 100$ і обертаючи ручки магазину опорів добились умови рівноваги містка при $R_0 = 528\,Ом$, то $R_x = k \cdot R_0 = 100 \cdot 528 Ом = 52800 Ом$.

4.8 Робота і потужність постійного струму. Закон Ленца-Джоуля в інтегральній та диференціальній формах

Оскільки електричний струм у провіднику зумовлений дією електричного поля на його вільні заряди, то це ***електричне поле у зовнішній ділянці електричного кола виконує роботу, яку ми називаємо роботою електричного струму***. У випадку постійного струму силою I через будь-який переріз провідника за час t електричним полем буде перенесений заряд $q = I \cdot t$ і при напрузі U на кінцях однорідної ділянки кола електричним полем буде виконана робота

$$A = q \cdot U = IUt \,. \qquad (4.8.1)$$

Отримана формула (4.8.1) – формула роботи постійного струму. Але при цьому слід мати на увазі, що електричне поле, яке зумовлює струм у провіднику створюється сторонніми силами (див.§4.4). Тому в кінцевому результаті ***вся робота, виконана електричним струмом, виконується завдяки енергії джерела струму.***

З формули (4.8.1) випливає, що одиниця роботи $1\,Дж$ визначається через одиниці вимірювання електричних величин як $1Дж = 1В \cdot 1А \cdot 1С$ (вольт-ампер-секунду). Згідно із загальним означенням потужності як відношення виконаної роботи до часу, за який виконана ця робота, потужність P електричного струму дорівнює

$$P = I \cdot U \,. \qquad (4.8.2)$$

Отже, одиницю потужності $1\,Вт$ можна записати як $1Вт = 1В \cdot 1А$ (вольт-ампер) і в електриці часто роботу електричного струму $A = P \cdot t$ визначають у ват-секундах або кіловат-годинах, за які і розраховуються споживачі електричної енергії. Кіловат-година – це багато чи мало, що може при цьому виконати електричний струм?

Так, 1 *кіловат-година* $= 1000Вт \cdot 3600с = 3{,}6 \cdot 10^6 Дж$. Якщо піднімаємо вантаж масою m на висоту h, то виконана при цьому робота проти сил тяжіння дорівнює $A = m \cdot g \cdot h$. Визначимо, на яку висоту за рахунок роботи 1 кіловат-година можна підняти вантаж 1000 *кг*.

$$3{,}6 \cdot 10^6 \, Дж = 1000кг \cdot 10 \frac{м}{с^2} \cdot h \Rightarrow h = 360м \,.$$

Очевидно, що таку роботу може здійснювати електродвигун, у якому рамка зі струмом обертається в магнітному полі. Крім того, електричний струм зумовлює нагрівання провідника і тоді роботу електричного струму визначає кількість теплоти Q, яка виділяється в провіднику, тобто

$$Q = IUt \tag{4.8.3}$$

або згідно з законом Ома $I = U / R$

$$Q = \frac{U^2}{R} t \,. \tag{4.8.4}$$

Оскільки $U = I \cdot R$, то

$$Q = I^2 R \cdot t \,, \tag{4.8.5}$$

що є виразом закону Джоуля-Ленца про теплову дію електричного струму в інтегральній формі, тобто визначає кількість теплоти в усьому об'ємі провідника. Відношення кількості теплоти Q, що виділяється за час t в усьому об'ємі V, дає значення інтегральної теплової потужності

$$w = \frac{Q}{t \cdot V} \tag{4.8.6}$$

і вимірюється у *Дж*/*м*^{3}·*с* = *Вт*/*м*^{3}.

Оскільки питома провідність, а значить і опір в різних частинах провідника може бути різним, то будуть різними значення кількості теплоти, які виділяються в таких різних частинах провідника, а тому виникає необхідність диференціальної форми запису закону Джоуля-Ленца яка б характеризувала теплову дію струму в окремих точках провідника, точніше в таких його елементарних об'ємах dV, де провідність можна вважати однаковою. Тоді диференціальна теплова потужність струму визначається відношенням елементарної кількості

теплоти dQ, яка виділяється в елементарному об'ємі dV провідника за час dt і буде дорівнювати

$$w = \frac{dQ}{dt \cdot dV}. \qquad (4.8.7)$$

Для визначення диференціальної густини теплової потужності струму виділимо у провіднику нескінченно малий циліндричний елемент об'ємом $dV = dl \cdot dS$ (див. рис.4.3.1), через поперечний переріз якого площею dS при густині струму J протікає струм силою $dI = J \cdot dS$. За такої сили струму у виділеному об'ємі опором dR за час dt виділиться елементарна кількість теплоти $dQ = (J \cdot dS)^2 dR \cdot dt$. Підставляючи це значення теплоти та об'єму dV у формулу (4.8.7), дістанемо:

$$w = \frac{j^2 (dS)^2 dR \cdot dt}{dl \cdot dS \cdot dt} = j^2 R \frac{dS}{dl}. \qquad (4.8.8)$$

Оскільки опір виділеного елементу провідника дорівнює $dR = \rho \frac{dl}{dS} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{dl}{dS}$, то згідно з законом Ома в диференціальній формі $J = \sigma E$, вираз (4.8.8) набуде такого вигляду:

$$w = \sigma \cdot E^2. \qquad (4.8.9)$$

Вираз (4.8.9) є законом Джоуля-Ленца у диференціальній формі і стверджує, ***що густина теплової потужності електричного струму у даній точці провідника пропорційна квадрату напруженості електричного поля у цій же самій точці провідника, а коефіцієнтом пропорційності є питома провідність провідника.***

Закінчуючи розгляд питань роботи та потужності електричного струму можна сказати, що без використання електроенергії неможлива сучасна цивілізація. Для пересічного громадянина це означає – по двох порівняно тонких провідниках ми отримуємо

практично повне енергозабезпечення нашого побуту – тут і освітлення, електронагрівальні прилади, різноманітна побутова техніка тощо. Якщо вести мову про промисловість, то вона є найбільшим споживачем електричної енергії.

Контрольні запитання

1 *Що називається електричним струмом?*
2 *Рухом яких вільних зарядів зумовлюється електричний струм у металах, електролітах, напівпровідниках та в газах?*
3 *Який електричний струм називається постійним?*
4 *Як вводять поняття сили струму? Яка одиниця вимірювання сили струму?*
5 *Як вводять поняття густини сили струму і як визначають напрям вектора густини струму?*
6 *Яку ділянку електричного кола називають однорідною та як формулюють і записують в інтегральній формі закон Ома для такої ділянки?*

7 *Як із закону Ома встановлюється одиниця електричного опору 1 Ом?*
8 *За якою формулою можна визначити опір циліндричного провідника відомої довжини та площі поперечного перерізу, знаючи його питомий опір?*
9 *Який фізичний зміст питомого опору провідника та як він для металів залежить від температури?*
10 *Який принцип роботи термометра опору?*
11 *Що собою являє магазин опорів та яке його застосування?*
12 *Як записують та формулюють закон Ома у диференціальній формі?*
13 *Що таке сторонні сили та яка їх роль в забезпеченні у замкнутому колі постійного струму?*
14 *Як дати означення електрорушійної сили через роботу сторонніх сил та циркуляцію вектора напруженості поля сторонніх сил?*
15 *Яка ділянка кола називається неоднорідною та як записують та формулюють для неї закон Ома?*
16 *Яка фізична величина називається напругою на ділянці електричного кола і у якому випадку вона дорівнює різниці потенціалів на кінцях цієї ділянки кола?*
17 *Які кола називають розгалуженими?*
18 *Що таке вузол розгалуженого електричного кола та як для нього записують та формулюють перше правило Кірхгофа?*
19 *Що собою являє замкнутий контур розгалуженого електричного кола та як для нього формулюють та записують друге правило Кірхгофа? За якими правилами при цьому визначають знаки сил струмів та електрорушійних сил у контурі?*
20 *Як, користуючись правилами Кірхгофа, розрахувати сили струмів у будь-якому розгалуженому електричному колі?*
21 *За якими формулами визначають роботу та потужність постійного електричного струму?*
22 *Який фізичний зміст позасистемної одиниці роботи електричного струму кіловат-години ?*
23 *Як записати та пояснити закон Джоуля-Ленца для теплової дії електричного струму?*

24 Як вводять поняття густини теплової потужності електричного струму і як для неї формулюють закон Джоуля-Ленца в диференціальній формі?

Розділ 5 Електропровідність металів. Напівпровідники. Контактні явища

4.1 Класична електронна теорія провідності металів

Класична електронна теорія провідності металів базується на класичних фундаментальних законах фізики. Подібно до того, як на основі класичних законів фізики – законів Ньютона можна отримати основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії ідеальних газів, то застосовуючи ті ж самі класичні закони фізики можна вивести закон Ома, приймаючи вільні електрони в металі за ідеальний газ. Таке положення про вільні електрони в металі, які перебувають у безперервному хаотичному русі подібно до молекул ідеального газу, лежить в основі класичної електронної теорії провідності металів. Сам метал являє собою кристалічну решітку, у вузлах якої є йони, а між ними вільно рухаються електрони. Як і для молекул ідеального газу, взаємодією між вільними електронами можна нехтувати. Подібно до ідеального газу електронний газ підлягає газовим законам. Електрон, подібно до одноатомної молекули, має три ступені вільності. Оскільки на один ступінь вільності припадає енергія $\frac{1}{2}kT$, де k – стала Больцмана, ($k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ Дж/К$), T – абсолютна температура газу, то середня кінетична енергія теплового руху, що припадає на один електрон, дорівнює:

$$\frac{m \cdot v_{кв}^2}{2} = \frac{3}{2}kT, \qquad (5.1.1)$$

де m – маса електрона, яка дорівнює $9{,}1 \cdot 10^{-31}\ кг$; $v_{кв}$ – середня квадратична швидкість теплового руху електрона.

За формулою (5.1.1) можна обчислити середню квадратичну швидкість. Так, наприклад, при $20^0\ C$ або $293\ K$

$$v_{кв} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}}} = 7 \cdot 10^{3} \frac{м}{с}.$$

Звичайно, така велика швидкість є швидкістю хаотичного руху електронів і немає ніякого відношення до їх упорядкованого руху, який зумовлює електричний струм. За наявності у провіднику електричного поля на хаотичний рух електронів накладається їх упорядкований рух, який називається дрейфом (з голландської *drijven* – плавати). Встановлюючи основні характеристики електричного струму було доведено, що густина струму у провіднику визначається формулою $J = n \cdot q_0 \cdot v$, яка стосовно до електронної провідності металів матиме вигляд:

$$J = n \cdot e \cdot \langle v \rangle, \qquad (5.1.2)$$

де n – концентрація вільних електронів у металі, e – заряд електрона, $\langle v \rangle$ – середня швидкість упорядкованого руху електронів, тобто швидкість їх дрейфу.

Оцінити концентрацію вільних електронів у металі можна з таких міркувань. Так, якщо від кожного атому в кристалічній ґратці металу відділяється один електрон, то концентрація таких відділених вільних електронів буде дорівнювати кількості атомів металу в одиниці об'єму. Якщо відома густина ρ металу та його молярна маса *M,* то число молей даної речовини в одиниці об'єму буде становити $\frac{\rho}{M}$. Оскільки в одному молі речовини є N_A молекул (число Авогадро), то $n = (\frac{\rho}{M}) \cdot N_A$. Для металів значення $\frac{\rho}{M}$ коливається у межах $20 \frac{кмоль}{м^3}$ – $200 \frac{кмоль}{м^3}$ і тоді отримаємо, що концентрація вільних електронів у металах в середньому є величиною порядку $10^{28} \div 10^{29} м^{-3}$. А тепер, знаючи концентрацію вільних електронів у металі, підрахуємо їх швидкість $\langle v \rangle$ упорядкованого руху в кімнатній

електромережі, яка допускає максимальну густину струму $7\cdot10^6\ \frac{A}{м^2}$, а саме:

$$v = \frac{J}{n\cdot e} = \frac{7\cdot10^6}{10^{29}\cdot1{,}6\cdot10^{-19}} = 4\cdot10^{-4}\ \frac{м}{с}, \qquad (5.1.3)$$

тобто $0{,}4\ мм/с$. Тоді як узгодити таку малу швидкість електронів з практично миттєвою передачею електричних сигналів у провідниках на великі відстані? Справа у тому, що при вмиканні електричного поля, яке поширюється у провіднику зі швидкістю $3\cdot10^8\ \frac{м}{с}$, всі електрони практично миттєво почнуть рухатись в одному напрямі з дуже малою швидкістю впорядкованого руху. Очевидно, що електричне поле створене у провіднику впливає лише на середню швидкість впорядкованого руху електронів і тому, визначивши як залежить ця швидкість від напруженості E електричного поля, ми прийдемо до закону Ома у диференціальній формі $J = \sigma E$ та встановимо від яких величин залежить σ – провідність металів.

Почнемо, як кажуть з "нуля" – швидкість упорядкованого руху електрона під дією електричного поля на відрізку його середньої довжини $\langle l \rangle$ вільного пробігу (відстані між зіткненнями з вузлами кристалічної ґратки металу) збільшується від нуля до деякого максимального значення $v_{\max}$. Оскільки на електрон з боку електричного поля напруженістю E діє сила $F = e \cdot E$, то згідно з другим законом Ньютона $F = m \cdot a$, прискорення електрона має таке значення:

$$a = \frac{e \cdot E}{m}. \qquad (5.1.4)$$

За час τ вільного руху тільки до зіткнення електрони набудуть максимальної швидкості

$$v_{\max} = a \cdot \tau = \frac{e \cdot E \cdot \tau}{m} \quad . \tag{5.1.5}$$

Беручи до уваги, що швидкість $v_{кв}$ хаотичного руху електронів значно більша від швидкості $\langle v \rangle$ їх упорядкованого руху, то відстань між двома зіткненнями, тобто середню довжину $\langle l \rangle$ вільного пробігу електрони проходять за час τ зі швидкістю $v_{кв}$. Отже, $l = v_{кв} \cdot \tau \Rightarrow \tau = \frac{\langle l \rangle}{v_{кв}}$. Тому максимальна швидкість упорядкованого руху електронів під дією електричного поля

$$v_{\max} = \frac{e \cdot E \cdot \tau \langle l \rangle}{m \cdot v_{кв}} \quad , \tag{5.1.6}$$

а середня швидкість $\langle v \rangle$ (швидкість дрейфу) цього руху буде дорівнювати

$$\langle v \rangle = \frac{0 + v_{\max}}{2} = \frac{e \cdot E \cdot \tau \langle l \rangle}{2m \cdot v_{кв}} \quad . \tag{5.1.7}$$

Підставивши (5.1.7) в (5.1.2), отримаємо:

$$J = \frac{n \cdot e^2 \cdot \langle l \rangle}{2m \cdot v_{кв}} \cdot E \quad , \tag{5.1.8}$$

тобто вивели закон Ома $J = \sigma \cdot E$ у диференціальній формі і одночасно отримали вираз для питомої електропровідності:

$$\sigma = \frac{n \cdot e^2 \cdot \langle l \rangle}{2m \cdot v_{кв}} \quad . \tag{5.1.9}$$

З (5.1.9) бачимо, чим більша концентрація вільних електронів у металі, тим більша його провідність. Так само відповідає дійсності той факт, що чим більша середня довжина $\langle l \rangle$ вільного пробігу

електронів металі, тим більша його провідність (менший опір). Крім того, з підвищенням температури зростає середня швидкість електронів (зростає знаменник у формулі (5.1.9), тобто зменшується провідність металів, отже їх опір зростає, що теж відповідає дійсності. Проте, така залежність вимагає уточнення, про що буде йти мова далі під час розгляду обмеження класичної теорії електропровідності металів. Незважаючи на недоліки, класична теорія електропровідності металів відіграла значну роль у розвитку уявлень про механізм проходження в них електричного струму. Крім того, на основі такої теорії, як ми тільки що переконались, можна вивести закон Ома і ця ж теорія дає можливість також вивести і закон Джоуля-Ленца про теплову дію струму.

Механізм теплової дії струму класична теорія електропровідності металів пояснює таким чином. Електрони провідності передають кінетичну енергію свого упорядкованого руху йонам кристалічної ґратки металу, внаслідок чого збільшується його внутрішня енергія і провідник нагрівається. Так, електрони, набувши до зіткнення максимальної швидкості $v_{\max}$, володіють кінетичною енергією W_K. Оскільки максимальна швидкість, яку набувають електрони провідності під дією електричного поля, визначається формулою (5.1.6), то

$$W_K = \frac{e^2(\langle l \rangle)^2}{2 \cdot m \cdot v_{кв}^2} E^2 \quad . \tag{5.1.10}$$

Повна енергія, яку віддають електрони провідності в одиниці об’єму провідника за одиницю часу, визначає густину w теплової потужності електричного струму:

$$w = n \cdot \langle z \rangle \cdot W_k \quad , \tag{5.1.11}$$

де n – концентрація електронів, а $\langle z \rangle$ – їх середнє число зіткнень за одиницю часу з йонами у вузлах кристалічної ґратки металу. Оскільки за одинцю часу електрони у своєму хаотичному русі проходять відстань рівну швидкості цього руху, то розділивши цю загальну відстань на середню довжину $\langle l \rangle$ вільного пробігу

електронів, отримаємо значення числа $\langle z \rangle$ зіткнень електронів за одиницю часу з йонами кристалічної ґратки металу:

$$\langle z \rangle = \frac{v_{кв}}{\langle l \rangle}. \qquad (5.1.12)$$

Підставивши (5.1.10) та (5.1.12) у формулу (5.1.11), отримаємо закон Джоуля-Ленца у диференціальній формі:

$$w = \frac{n \cdot e^2 \cdot \langle l \rangle}{2m \cdot v_{кв}} \cdot E^2, \qquad (5.1.13)$$

у якому так само як і у законі Ома (формула (5.1.8)) множником біля напруженості електричного поля є питома провідність σ металу. Таке співпадіння значень питомої електропровідності при виведенні закону Ома та закону Джоуля-Ленца ще раз свідчить, що класична теорія електропровідності металів в основному правильно пояснює їх механізм провідності. Але як буде нижче показано, ця теорія має певні обмеження і в деяких випадках приводить до суттєвої розбіжності теоретичних та експериментальних даних.

5.2 Труднощі класичної теорії електропровідності металів. Поняття про квантову теорію провідності твердих тіл

Німецькі фізики Г.Відеман та Р.Франц у 1853 р. експериментально встановили, що для всіх металів відношення їх питомої теплопровідності λ до питомої електропровідності σ при однаковій температурі є сталою величиною. У 1882 р. Л.Лоренцом було встановлено, що при зміні температури T це відношення змінюється пропорційно температурі:

$$\frac{\lambda}{\sigma} = LT, \qquad (5.2.1)$$

де L– коефіцієнт пропорційності, названий числом Лоренца, а сам закон у вигляді формули (5.2.1) називають законом Відемана-Франца-Лоренца.

Властивість проводити тепло мають не тільки метали, але й діелектрики, але теплопровідність металів значно більша діелектриків. З цього можна зробити висновок, що теплопровідність в металах здійснюється в основному вільними електронами.

Оскільки в основі класичної електронної теорії провідності металів є поняття про електронний газ, який підпорядковується відомим законам ідеального газу, то його теплопровідність визначається такою самою формулою як і теплопровідність ідеального газу:

$$\lambda = \frac{1}{3}\rho \cdot v \cdot \langle l \rangle \cdot c_V \quad . \tag{5.2.2}$$

Густину електронного газу ρ можна визначити, помноживши масу m_e одного електрона на концентрацію n електронів у металі, тобто $\rho = n \cdot m_e$. Оскільки електронний газ можна вважати одноатомним (замість атомів електрони) ідеальним газом, то його питома теплоємність становить $c_v = \frac{3}{2} \cdot \frac{k}{m_e}$, де k – стала Больцмана. Крім того треба врахувати, що у формулі (5.2.2) швидкість v стосується середньої швидкості хаотичного руху молекул, а в теорії Друде за це значення швидкості приймають $v_{кв}$ – середню квадратичну швидкість хаотичного руху електронів. Тому, враховуючи все сказане вище, формула (5.2.2) для теплопровідності електронного газу прийме наступний вигляд:

$$\lambda = \frac{1}{2} n \cdot m_e \cdot k \cdot v_{кв} \langle l \rangle \quad . \tag{5.2.3}$$

Поділивши отримане значення λ на значення питомої провідності σ, отримаємо:

$$\frac{\lambda}{\sigma} = \frac{k \cdot m_e \cdot v_{кв}^2}{e^2} \quad . \tag{5.2.4}$$

Враховуючи, що $\frac{m_e \cdot v_{кв}^2}{2} = \frac{3}{2}kT$, приходимо до співвідношення

$$\frac{\lambda}{\sigma} = 3\left(\frac{k}{e}\right)^2 T, \qquad (5.2.5)$$

яке виражає закон Відемана-Франца. Підставляючи у формулу (5.2.5) значення сталої Больцмана $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ Дж/К$ та заряд електрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ Кл$, отримаємо:

$$\frac{\lambda}{\sigma} = 2{,}23 \cdot 10^{-8} T.$$

При $T = 300\,K$ відношення λ/σ становить величину $6{,}7 \cdot 10^{-6}\ Дж \cdot Ом/с \cdot К$ дещо меншу за експериментальне значення. Можливо це зумовлене тим, що при виведенні формули (5.2.5) швидкості всіх електронів вважались однаковими. Нідерландський фізик Лоренц (1853-1928), намагаючись уточнити класичну теорію електропровідності металів, врахував дійсний розподіл (розподіл Максвелла) вільних електронів за швидкостями і при цьому був отриманий ще гірший результат – замість коефіцієнта **3** у формулі (5.2.5) входить коефіцієнт ***2.***

Таким чином, класична теорія електропровідності згідно з законом Відемана-Франца давала правильну лінійну залежність від температури відношення питомої теплопровідності до питомої електропровідності металів лише з різницею значень коефіцієнта L (див.
формулу (5.2.1)).

Щодо самого значення питомої провідності металів, то тут класична теорія провідності зазнала надзвичайно серйозних утруднень. Так, з формули (5.1.9) випливає, що опір металів, тобто величина обернена їх провідності, повинна зростати як корінь квадратний з абсолютної температури *T*, адже у знаменнику є середня квадратична швидкість електронів, яка подібно до молекул

ідеального газу визначається співвідношенням $v_{\text{теп}} \sim \sqrt{\frac{3kT}{m}}$. Цей вивід теорії суперечить експериментальним даним, згідно з якими електричний опір металів лінійно залежить від їх температури (див. формулу (4.2.4)).

Ще більше утруднення зазнала класична теорія провідності металів при спробі пояснити їх теплоємність. Згідно з цією теорією електронний газ подібно до ідеального одноатомного газу повинен мати молярну теплоємність при сталому об'ємі, яка дорівнює $C_V = \frac{3}{2}R$ (R – універсальна газова стала). Додавши цю величину до теплоємності кристалічної ґратки металу, яка у свою чергу дорівнює $3R$, отримаємо для молярної теплоємності металів значення $\frac{9}{2}R$. Проте, теплоємність металів дуже мало відрізняється від теплоємності неметалічних кристалів, що встановлює експериментальний закон Дюлонга та Пті і згідно з цим законом у всіх хімічно простих речовин у твердому стані при сталому об'ємі теплоємність становить $C_V = 3R$. Така принципова розбіжність експериментальних та теоретичних даних є чи найбільшим затрудненням класичної електронної теорії провідності металів. Щоб зрозуміти, в чому полягає ця принципова різниця, уявімо, що готуючи обід, ми у холодну воду засипали гречку – вода закипає, а зерна гречки у кип'ячій воді залишаються холодними. Звичайно, що таке описане явище для макротіл неможливе (хоча зерна гречки і малі, але не мікротіла). У мікросвіті, світі елементарних частинок, діють інші закони – закони квантової механіки. І той факт, що електронний газ зовсім не нагрівається при нагріванні металу у якому він міститься, легко пояснюється саме на основі квантової теорії. Тому доцільно розглянути деякі поняття квантової теорії провідності твердих тіл, яка дозволяє пояснити причини утруднень класичної електронної теорії.

Засновником квантової теорії можна вважати німецького фізика А.Зоммерфельда (1896-1951). Основним положенням даної теорії є те, що електронний газ є квантова система, у якій згідно принципу Паулі з однаковим значенням енергії не може бути більше двох

електронів які відрізняються лише спіновими моментами імпульсу і їх напрями антипаралельні. Про принцип Паулі та спіновий момент імпульсу електрона детально буде йти мова у третій книзі курсу фізики.

Таким чином, електрони в металі можуть набувати лише дискретних значень енергій. Сукупність таких дискретних значень енергій отримала назву енергетичної зони. Енергетичні рівні валетних електронів утворюють так звану валентну зону, а енергії вільних електронів утворюють зону провідності і ці дві зони називають дозволеними зонами (розглядаючи напівпровідники будемо говорити про заборонену зону та її ширину, тобто ті значення енергій якими не можуть володіти електрони). Тут ще раз слід підкреслити, що енергетична зона не деяка область простору в якій знаходяться електрони, а тільки їх енергетичний стан. Ширина дозволеної зони електронів у металах є величиною порядку декілька електрон-вольт. Якщо у металі є біля 10^{23} атомів, то відстань між сусідніми енергетичними рівнями дозволеної зони становитиме величину порядку $10^{-23}eB$.

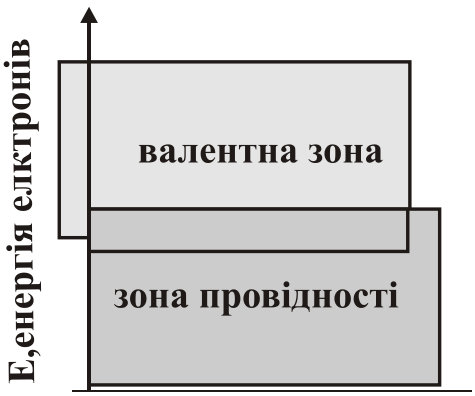


Рисунок 5.2.1

Виберемо довільну вісь, на якій точками будемо відкладати значення енергетичних рівнів зон. При такій малій різниці між сусідніми значеннями енергій ці точки практично зливаються, тому горизонтальними лінями виділимо лише верхню та нижню межу енергетичних зон. У металах валетна зона та зона провідності перекриваються (див. рис. 5.2.1). Фізично це означає, що електрони в металі "колективізовані", одночасно можуть бути електронами провідності та валетними, тобто забезпечувати зв'язок між йонами у вузлах кристалічної ґратки металу.

Якщо б електронний газ був ідеальним газом, для якого виконуються всі його закони, то за температури T=0 енергія всіх електронів була б рівною нулю. Оскільки електрони можуть набувати лише дискретних значень енергій, то найменшу енергію навіть за абсолютного нуля температури будуть мати всього два електрони, а всі інші електрони будуть почергово займати вищі енергетичні рівні.

Найбільше значення енергії $E_F(0)$ електронів за абсолютного нуля температури називається рівнем Фермі (Енріко Фермі (1901—1954) – італійський фізик) і квантова фізика дає таке значення цього рівня:

$$E_F(0) = \frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2 n\right)^{\frac{2}{3}}, \qquad (5.2.6)$$

де $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, h – стала Планка, m – маса електрона, n – концентрація електронів в металі.

Таким чином абсолютний нуль температури визначає в електронному газі не відсутність енергій електронів, а тільки мінімальне значення цієї енергії і нижче цього мінімального значення ніяк не можна отримати ще менше значення енергії. За температур вищих від абсолютного нуля, теж можна говорити про рівень Фермі E_F як про найвищий заповнений енергетичний рівень за даної температурі. Встановлення залежності рівня Фермі від температури надзвичайно складна задача і її наближеним розв'язком є така формула:

$$E_F \approx E_F(0)\left[1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{E_F(0)}\right)^2\right]. \qquad (5.2.7)$$

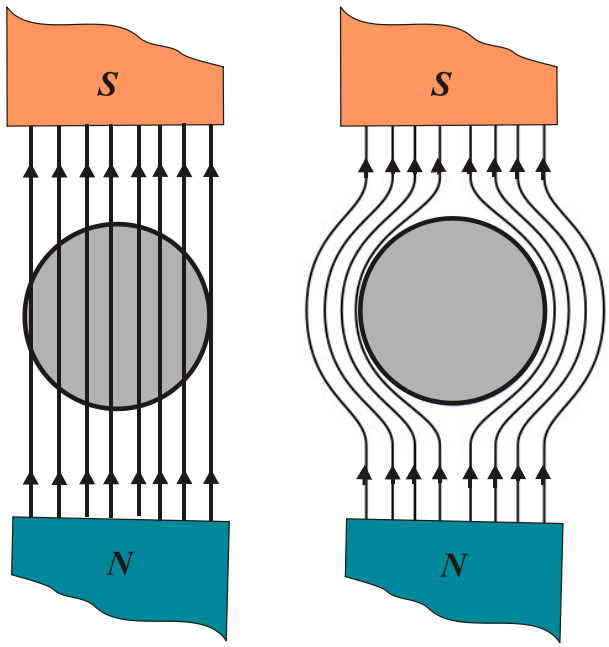
У квантовій фізиці електронний газ, який не підпорядковується законам класичного ідеального газу, називається виродженим електронним газом. Навіть за температур, близьких до температури плавлення (порядку $10^3 K$), у багатьох металів електронний газ є вироджений. Тепер стає зрозумілим, чому вироджений електронний газ не вносить помітного вкладу у теплоємність металу, оскільки у тепловому русі бере участь лише невелика частина електронів біля рівня Фермі. Фізично це означає, що при нагріванні металу це нагрівання «відчувають» не всі електрони, а лише незначна частина електронів вищих енергетичних рівнів.

5.3 Явище надпровідності

Якщо всі розглянуті вище труднощі класичної електронної теорії провідності металів все ж таки не заперечували поняття електронного газу навіть виродженого у квантовій теорії, то явище надпровідності виявилось особливим квантовим явищем**.**

Нідерландський фізик Камерлінг-Оннес (1853-1926)), охолоджуючи ртуть і вимірюючи її електричний опір виявив, що при досягненні Т = 4,2 К (температура рідкого гелію) прилад перестав фіксувати опір. Оннес змінював прилади в дослідній установці, оскільки побоювався їхньої несправності, але прилади незмінно показували нульовий опір. Таке відкрите Оннесом явище отримало назву надпровідності. За роботи в галузі низьких температур та за відкриття надпровідності Камерлінг-Оннес у 1913 р. був удостоєний Нобелівської премії. Тепер встановлено, що в надпровідний стан може переходити майже половина металів та більше тисячі сплавів. Температура, за якої провідник стає надпровідником, називається критичною і для чистих металів вона є досить низькою. Так, для алюмінію вона складає 1,17 *К,* а для свинцю – 7,23 *К.* Цікаво відмітити, що такі метали як срібло, мідь,золото та платина взагалі не переходять у надпровідний стан.

Крім відкриття явища надпровідності, Камерлінг-Оннес виявив, що цей надпровідний стан зникає при дії магнітного поля з певним значенням магнітної індукції, яке залежить від природи надпровідника. Таке критичне поле може бути створено і самим струмом у надпровіднику, а тому існує критичне значення сили струму, яке руйнує надпровідність. Ще одне особливе явище, яке пов’язане з надпровідністю, відкрите у 1933р. німецькими фізиками В.Мейснером та Р.Оксенфельдом. Вони встановили, що за температури нижче від критичної магнітне поле повністю виштовхується з надпровідника, як це показано на рис.5.3.1б. За температури, вищої від критичної, силові лінії магнітного поля ніби не "помічають" майбутній надпровідник (рис.5.3.1а). Зрозуміло, що ефект Мейснера спостерігається за умови, що саме магнітне поле не руйнує надпровідність. Ефект Майснера пояснюється тим, що у поверхневому шарі надпровідника, який пе



а б

Рисунок 5.3.1

ребуває у магнітному полі, виникають колові незгасаючі електричні струми. Магнітне поле цих колових струмів повністю компенсує зовнішнє магнітне поле, в результаті чого всередині надпровідника магнітного поля немає і силові лінії зовнішнього поля лише огинають надпровідник. Надпровідники, у яких спостерігається повне виштовхування зовнішнього магнітного поля, називаються надпровідниками першого роду. Речовини, у яких не повністю відбувається ефект Мейснера, називаються надпровідниками другого роду. Якщо у надпровідників першого роду надпровідність наступає і зникає при певному критичному значенні індукції B магнітного поля, то у надпровідників другого роду є два особливих критичних значення магнітного поля – нижнє $B_н$ та $B_в$. Повний ефект Мейснера спостерігається при магнітних полях менших значення $B_н$. Якщо ж $B_н < B < Bв$, то спостерігається частковий ефект Мейснера, а при магнітних полях, які перевищують верхнє значення індукції надпровідність зникає.

Явище надпровідності пояснює тільки квантова механіка. Теорію надпровідності на основі квантової механіки розробили американські вчені Дж.Бардін, Л.Купер та Дж.Шріфтер. За створення цієї теорії, яку називають теорією БКШ, ці американські вчені у 1972 були удостоєні Нобелівської премії з фізики. Суть цієї теорії полягає у тому, що за низьких температур електрони об’єднуються у пари, названі згодом куперівськими, які вільно без будь-якого опору рухаються всередині провідника. Об'єднання електронів у пари ніби неможливе, адже між електронами існують сили відштовхування. Але таке об'єднання, як показує теорія БКШ, можливе завдяки взаємодії електронів з позитивними йонами вузлів. Щоб більш-менш популярно пояснити результат такого об’єднання, слід пояснити, що

таке ферміони і бозони. Ферміони – це частинки, спінове магнітне квантове число яких може приймати значення $\pm\frac{1}{2}$ і вони описуються статистикою Фермі-Дірака, згідно з якою одним значенням енергії можуть володіти лише два електрони з протилежним спіном. Тобто ферміони, до яких належать електрони, є «індивідуалісти», не «пускають» на своє значення енергії інших ферміонів. Бозони описуються статистикою Бозе-Ейнштейна (Бозе – індійський вчений (1858-1937)). Згідно з цією статистикою бозони – це частинки, спін яких може дорівнювати нулю, тобто вони є «колективістами» і одним значенням енергії може володіти скільки завгодно бозонів. Як показує теорія БКШ, за низьких температур найбільш енергетично вигідним є утворення електронних пар з сумарним спіном, який дорівнює нулю. Отже, електрони в куперівських парах утворюють бозони і за низьких температур вони всі займають найнижчий енергетичний рівень, що зумовлює надпровідність.

З практичної точки зору явище надпровідності має надзвичайно велике значення. Дійсно, передача електроенергії надпровідниками відбувалася б без будь-яких втрат енергії. Але поки що таке практичне застосування надпровідників обмежується низьким значенням критичної температури надпровідності. Поки що надпровідники застосовують в прискорювачах елементарних частинок для створення сильних магнітних полів, де використовується спеціальна кріогенна техніка – техніка низьких температур. Тому однією з актуальних проблем фізики є створення високотемпературних надпровідників. Вперше справжній прорив у галузі створення високотемпературних надпровідників був здійснений у 1986 р. К.Мюллером (швейцарський фізик) та Г.Беднорцом (німецький фізик), які отримали сполуку $La_{2X}Ba_XCuO_4$, яка переходить у надпровідний стан при температурі *35* К і за це відкриття у наступному році вони були удостоєні Нобелівської премії з фізики. У даний час ведуться інтенсивні дослідження і пошуки нових матеріалів, які б переходили у надпровідний стан за високих температур, навіть при кімнатних. Поки що вдалось отримати надпровідник на основі мідь-органічних з'єднань, так званих купратів (купрум), для яких надпровідність наступає при 135 *K* (-138^0C).

4.4 Робота виходу електрона з металу

Згідно з класичною електронною теорією провідності металів, вільні електрони перебувають у безперервному хаотичному русі і можуть виходити за межі металу. Але виліт електронів за межі металу означає відсутність їх від'ємного заряду в металі, тобто раніше нейтральний провідник набуває додатного заряду. Оскільки кулонівські сили притягання намагаються повернути електрон у метал, то його поверхня окутана електронною хмаринкою товщиною порядку декількох міжатомних відстаней кристалічної ґратки металу, як вказано на схематичному рис.5.4.1. Ця хмаринка разом із зовнішнім шаром йонів утворює так званий подвійний електричний шар і щоб електрон міг взагалі вийти за межі металу йому необхідно подолати цей електричний подвійний шар. ***Найменша енергія, яку необхідно надати електрону щоб він зміг вийти з металу називається роботою виходу електрона.***

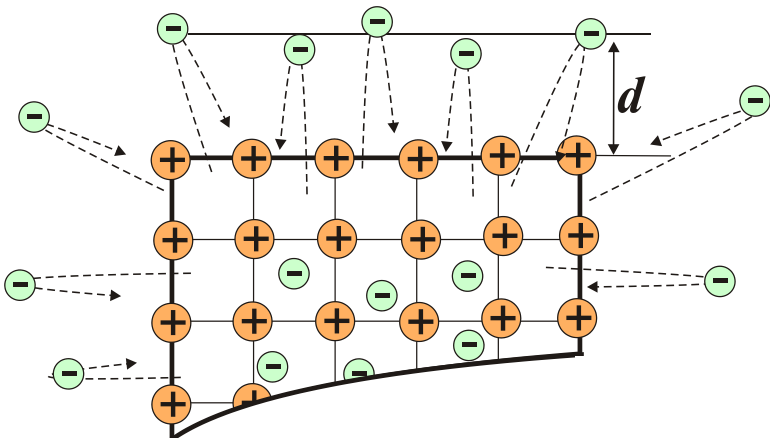


Рисунок 5.4.1

З енергетичної точки зору електрон в металі перебуває у так званій потенціальній ямі (дуже влучна назва поведінки електрона). Дійсно, якщо у землі викопати яму глибиною h і на дні якої, наприклад, є тіло масою m (знайшли скарб), то щоб підняти це тіло (скарб) на поверхню, витягнути з ями, необхідно виконати роботу проти сил тяжіння $A = mgh$. Якщо вважати, що значення потенціальної енергії тіла на поверхні землі рівне нулю, то це тіло на дні ями володітиме від'ємною потенціальною енергією $E_p = -mgh$ і це значення енергії називають глибиною потенціальної ями, яку ще називають прямокутною, оскільки потенціальна енергія тіла у такій ямі не залежить від її ширини. Тому вважаючи, що потенціальна енергія електронів, які вийшли за межі металу рівна нулю, можна стверджувати, що електрони в металі знаходяться у прямокутній потенціальній ямі, де замість сил тяжіння діють сили електричного походження. Оскільки вільні електрони в металі є виродженим електронним газом, то їх енергія приймає дискретні значення і одним

значенням енергії може володіти лише два електрони з антипаралельними спінами. На рис. 5.4.2 схематично зображені енергетичні рівні зони провідності, де суцільні лінії відповідають зайнятим рівням за *T=0*. Пунктирні лінії, вище рівня Фермі, незайняті електронами енергетичні рівні. Для виходу за межі металу різним електронам треба надати неоднакову енергію. Для електрона, що перебуває на найнижчому рівні зони провідності, необхідно надати мінімальну енергію E_{p0}, яка дорівнює глибині потенціальної ями, а для електрона, що перебуває на рівні Фермі, достатньо енергії $E_{p0} - E_F$ і ця енергія визначає роботу виходу електрона $A = E_{p0} - E_F$. Відношення роботи A виходу електрона з металу до величини заряду e електрона називається потенціалом φ виходу електрона, звідки роботу виходу електрона зручно визначати не в джоулях, а в електрон-вольтах (eB), тобто $A = e\varphi$, тому

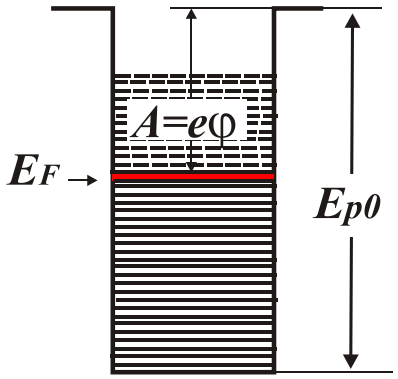


Рисунок 5.4.2

$$e\varphi = E_{p0} - E_F . \qquad (5.4.1)$$

Співвідношення (5.4.1) отримане з припущення, що температура металу становить $0K$. Що стосується інших температур, то рівень Фермі, як встановлює квантова механіка, дуже слабо залежить від температури, тому у багатьох випадках можна вважати $E_F \approx E_F(0K)$.

Експериментально значення роботи виходу електронів з металу визначають з явищ термоелектронної емісії або фотоефекту. Наприклад, згідно з рівнянням Ейнштейна для фотоефекту вихід електрона з речовини під дією кванта світла можливий лише при довжині світлової хвилі не більшій від певного значення λ_0, яка називається довгохвильовою

Таблиця 5.4.1

Метал	Дж	еВ
Калій	**$3{,}5\cdot10^{-19}$**	**2,2**
Літій	**$3{,}7\cdot10^{-19}$**	**2,3**
Платина	**$10\cdot10^{-19}$**	**6,3**
Рубідій	**$3{,}4\cdot10^{-19}$**	**2,1**
Срібло	**$7{,}5\cdot10^{-19}$**	**4,7**
Цезій	**$3{,}2\cdot10^{-19}$**	**2,0**
Цинк	**$6{,}4\cdot10^{-19}$**	**4,0**

або червоною межею фотоефекту. У такому випадку енергія такого кванта світла $E = \frac{h \cdot c}{\lambda_0}$ (h – стала Планка, c – швидкість світла) йде на роботу A виходу електрона з речовини, тобто $A = \frac{h \cdot c}{\lambda_0}$. Отже, якщо на досліджуване тіло спрямувати світло різних довжин хвиль, то найбільша довжина світлової хвилі, після якої припиняється фотоефект, і буде довгохвильовою або червоною межею фотоефекту, що дає можливість обчислити роботу виходу електрона з даної речовини. У таблиці 5.4.1 наведено значення роботи виходу електронів з деяких металів. Крім того, що робота виходу залежить від природи самого металу,на її значення впливає стан поверхні металу та наявність абсорбованих домішок.

5.5 Контактна різниця потенціалів

З різними значеннями роботи виходу електронів у металах та різною в них концентрацією електронів зумовлене явище виникнення різниці потенціалів при контакті різнорідних металів. Як приклад розглянемо два різнорідні метали з різним значенням роботи виходу з них електронів. Нехай у першому металі ця робота менша, ніж у другому (рис.5.5.1*а*). Зрозуміло, що при контакті таких металів більш інтенсивний перехід електронів буде відбуватись з першого металу у другий. У результаті цього у першому металі виникає недостача електронів, тобто він заряджається позитивно, а другий метал, отримавши надлишок електронів – негативно і у навколишньому просторі біля цих металів виникає електричне поле. Картина силових ліній такого електричного поля схематично наведена на рис.5.5.1*б*. З'ясувавши якісно механізм виникнення контактної різниці потенціалів, встановимо кількісні співвідношення між фізичними величинами, що характеризують це явище. Оскільки контактна різниця потенціалів визначається різним значенням роботи виходу електронів з металу, а робота виходу у свою чергу визначається рівнем Фермі, то контактна різниця потенціалів буде визначатись поведінкою цього рівня при контакті різнорідних металів.

Нехай у першому металі рівень Фермі розташований вище ніж у другому, відповідно різними будуть значення робіт виходу

електронів з цих металів. Контакт таких двох різнорідних металів це, по суті, утворення нової "об'єднаної" квантової системи з одним рівнем Фермі, що зумовлює зміщення енергетичних рівнів цих металів. Як видно з рис 5.5.1*б,* верхні нульові рівні зазнають загального зміщення, яке дорівнює різниці робіт виходу електронів з цих металів:

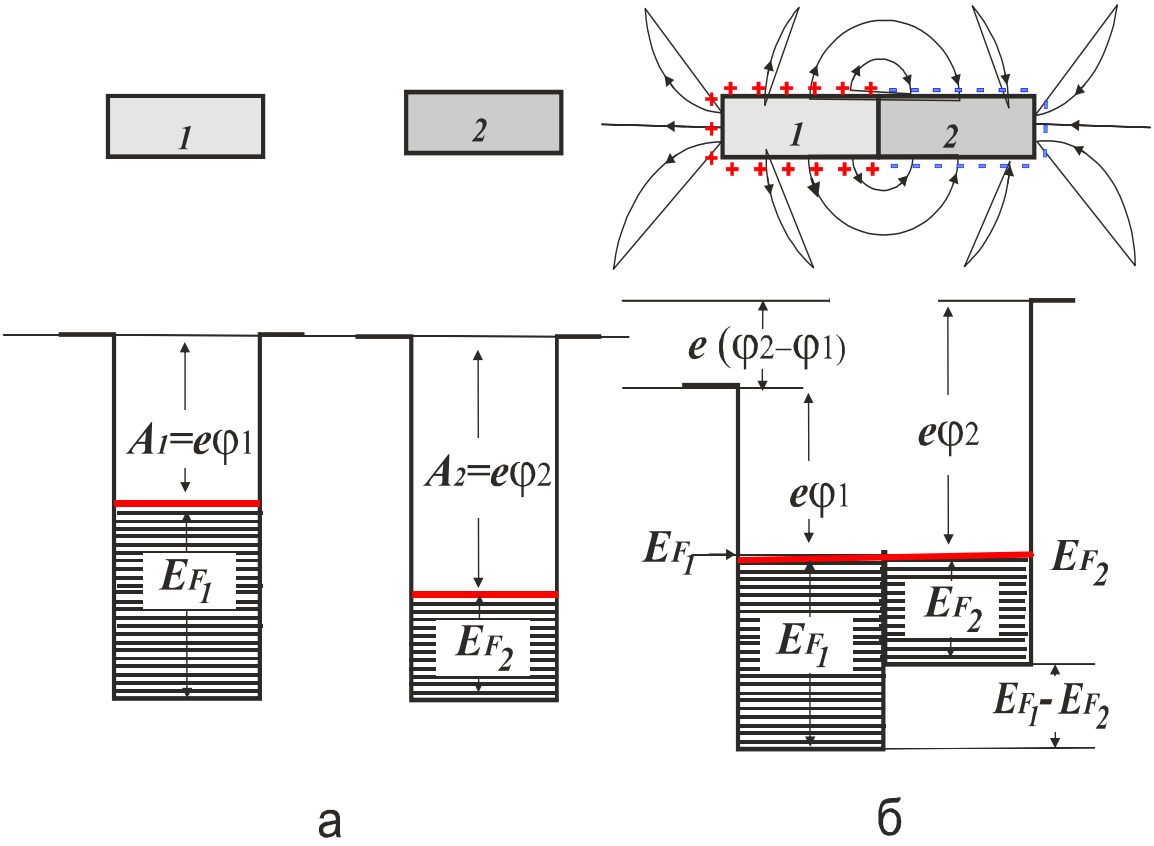


Рисунок 5.5.1

$A_2 - A_1 = e(\varphi_2 - \varphi_1)$. Таким чином, різниця робіт виходу електронів з різних металів кількісно визначає різницю потенціалів, яка виникає між зовнішніми поверхнями різнорідних металів і така різниця потенціалів називається зовнішньою та позначається U_e (з латинської externus – зовнішній):

$$U_e = \frac{A_2 - A_1}{e} = \frac{e(\varphi_2 - \varphi_1)}{e} = \varphi_2 - \varphi_1 . \qquad (5.5.1)$$

Різнорідні метали відрізняються не тільки різним значенням роботи виходу з них електронів, але і їх різною концентрацією. Якщо,

наприклад, у першому металі концентрація електронів n_1 більша ніж концентрація n_2 у другому, то потік дифузії електронів з першого металу у другий буде більший від потоку у зворотному напрямі. В результаті перший метал заряджається позитивно. а другий негативно. Таким чином при контакті різнорідних металів крім зовнішньої контактної різниці потенціалів U_e, яка зумовлена неоднаковими значеннями роботи виходу з них електронів, виникає ще одна різниця потенціалів завдяки неоднаковій концентрації в цих металах вільних електронів. Ця різниця потенціалів називається внутрішньою є і позначається U_i (з латинської *internal* – внутрішній).

У класичній електронній теорії провідності металів задача про рівновагу електронів у провідниках в електричному полі подібна до рівноваги ідеального газу у полі тяжіння. З молекулярної фізики відомо, що зменшення концентрації молекул газу з висотою у полі тяжіння Землі описується розподілом Больцмана:

$$n_2 = n_1 e^{-\frac{E_2 - E_1}{kT}}, \qquad (5.5.2)$$

де n_1 та n_2 – концентрації молекул на відповідних висотах h_1 і h_2; $E_1 = mgh_1$, $E_2 = mgh_2$ – потенціальні енергії молекул у полі тяжіння на відповідних висотах; k – стала Больцмана; T – температур*а,* яку вважають сталою на різних висотах (ізотермічна атмосфера).

Оскільки при контакті металів з різною концентрацією в них електронів виникає внутрішня різниця потенціалів U_i, то електрони, подібно до молекул ідеального газу, будуть підпорядковуватись розподілу Больцмана. Тільки замість різниці потенціальних енергій молекул у полі тяжіння слід записати різницю потенціальних енергій електронів в електричному полі завдяки внутрішній різниці потенціалів $E_2 - E_1 = e \cdot U_i$. Отже,

$$n_2 = n_1 e^{-\frac{e \cdot U_i}{kT}}, \qquad (5.5.4)$$

звідки

$$U_i = \frac{kT}{e} \ln \frac{n_1}{n_2}. \qquad (5.5.5)$$

Оскільки електронний газ не є ідеальним а виродженим, то отримана формула (5.5.5) лише якісно встановлює залежність внутрішньої контактної різниці потенціалів від концентрації електронів.

Квантова теорія визначає внутрішню різницю потенціалів з точки зору різниці рівнів Фермі в різнорідних металах:

$$U_i = \frac{E_{F1} - E_{F2}}{e}. \qquad (5.5.6)$$

Квантова теорії провідності металів дає можливість розрахувати рівень Фермі в металах і внутрішню контактну різницю потенціалів:

$$U_i = \frac{h^2}{2m}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}\left(n_1^{\frac{2}{3}} - n_2^{\frac{2}{3}}\right), \qquad (5.5.7)$$

де n_1 – концентрація електронів у першому, а n_2 – у другому металі.

Явище контактної різниці потенціалів у 1797р. відкрив А.Вольта і встановив два основних закони цього явища.

Перший закон. При контакті двох різнорідних металів між ними виникає контактна різниця потенціалів, величина якої залежить від хімічного складу провідників та їхньої температури. Крім того, Вольта встановив послідовність металів, у якій кожний попередній метал при дотиканні з будь-яким наступним металом цього ряду має вищий потенціал ніж наступний. Така послідовність металів отримала назву *ряду Вольта,* який має такий вигляд:

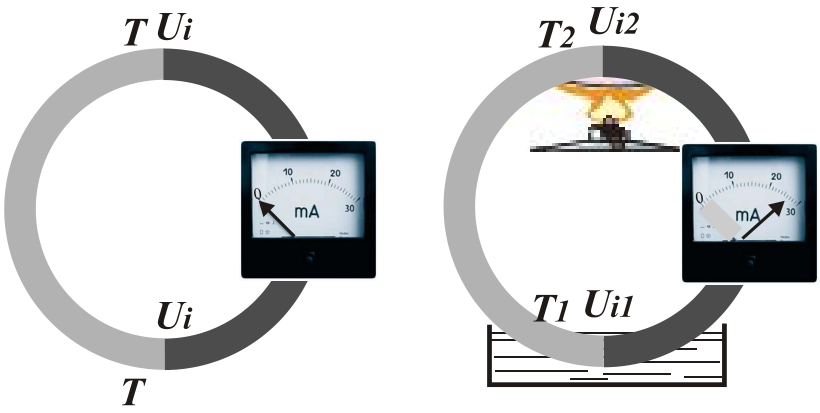
Al, Zn, Sn, Pb, Sb, Bi, Hg, Fe, Cu, Ag, Au, Pt, Pd.

Другий закон. Контактна різниця потенціалів послідовно з'єднаних різних провідників за однакової температури не залежить від складу проміжних провідників і дорівнює різниці потенціалів, яка виникає при безпосередньому з'єднанні крайніх провідників.

З другого закону Вольта випливає, що у складеному замкнутому колі з послідовно з'єднаних різнорідних провідників за однакової температури алгебраїчна сума контактних різниць потенціалів буде дорівнювати нулю. Отже, струму у такому колі не буде. Але якщо уважно проаналізувати формулу (5.5.5), то отримати джерело струму завдяки контактній різниці потенціалів все ж таки можливо. Для цього треба скласти замкнуте коло з двох різнорідних металів і контакти між ними підтримувати за різних температур, що зумовить різні значення контактної різниці потенціалів і призведе до виникнення у такому колі електричного струму. До такого ж висновку приходить і квантова теорія провідності металів. Оскільки рівень Фермі залежить від температури, то за різних температур матимемо різні значення внутрішньої контактної різниці потенціалів. Таким чином, класична та квантова теорії провідності металів передбачають явище виникнення електричного струму у замкнутому електричному колі завдяки різним значенням контактної різниці потенціалів зумовленої різним значенням температур контактів різнорідних провідників, що складають дане коло.

5.6 Термоелектричні явища. Термоелектрорушійна сила

З'єднаємо два різнорідних провідники у замкнуте електричне коло з міліамперметром. За однакової температури контактів цих провідників струму у колі немає, міліамперметр показує "нуль" (рис.5.6.1*а*). Якщо ж два контакти цих металів матимуть різну температуру, то у колі виникне електричний струм – стрілка міліамперметра відхиляється. Таке явище, ще задовго до становлення класичної теорії провідності металів, експериментально відкрив у 1821 р німецький фізик Томас Зеєбек (1770-1831) і це явище називають термоелектричним струмом.



а **б**

Рисунок 5.6.1

Отже, термоелектричний струм виникає в замкнутому колі складеному з різнорідних провідників за умови різної температури їх контактів (спаїв). Зміна знака у різниці температур зумовлює зміну напряму струму, а система двох різнорідних провідників називається термопарою.

Для характеристики термопари вводять поняття коефіцієнта термоелектрорушійної сили, який чисельно дорівнює зміні цієї електрорушійної сили термопари при зміні температури спаїв термопари на один градус $\alpha = \frac{d\varepsilon}{dT}$. У випадку лінійної залежності термоелектрорушійної сили від температури спаїв

$$E = \alpha (T_2 - T_1). \qquad (5.6.1)$$

Такою лінійною залежністю володіють такі пари металів: (Cu,Bi), (Ag,Cu), (Au,Cu), (Pt,Fe). Також для виготовлення термопар використовуються окремі сплави, наприклад, константан □ сплав Cu та Ni, хромель □ сплав Gr та Ni, алюмель □ сплав Al,Ni, Si,Mn. Відповідно можуть бути термопари мідь-константан, хромель-алюмель та інші. Оскільки можуть бути різні комбінації металів у термопарах, то для порівняння їх електрорушійних сил за базовий метал вибрали свинець, який за своїми фізичними властивостями дає змогу найлегше здійснити контакт з іншими металами.

Таблиця 5.6.1

метал	α, мкВ/К	метал	α, мкВ/К
сурма	+43	олово	-0,2
залізо	+15	алюміній	-0,4
молібден	+7.6	платина	-4,4
кадмій	+4,6	паладій	-8,9
вольфрам	+3.6	калій	-13,8
мідь	+3.2	натрій	-6,5
цинк	+3,1	алюмель	-17,3
золото	+2.9	нікель	-20,8
срібло	+2.7	константан	-38,0
свинець	0,0	вісмут	-68,0

Тому для порівняння на практиці визначають коефіцієнт термоелектрорушійної сили термопари спаїв *метал + свинець*. У таблиці 5.6.1 наведені значення електрорушійних сил у мікровольтах термопар відносно свинцю за різниці температур між двома спаями у 100 К. Крім того, знаками "+"

або "-" вказується знак електричного потенціалу провідника відносно свинцю при контакті з ним.

Явище Зеєбека знаходить широке практичне застосування. Оскільки для багатьох пар металів залежність їх термоелектрорушійної сили лінійно залежить від температури, то такі пари металів (термопари) використовують для вимірювання температури. Інше практичне застосування явище Зеєбека – це пряме перетворення теплової енергії в електричну. Але коефіцієнт корисної дії термопар з металів та сплавів надто малий, не більше 0,5%. Значно більший коефіцієнт корисної дії для термопар з напівпровідників (до 10%).

Крім явища Зеєбека є ще інші явища, які встановлюють зв'язок між тепловими та електричними процесами в металах. Такі явища отримали назву термоелектричних явищ. До таких явищ належить явище Пельтьє (французький фізик (1785-1845)), яке зворотне явищу Зеєбека. А саме, якщо пропустити через термопари струм від зовнішнього джерела струму, то в результаті цього один спай нагрівається, а другий охолоджується (явище Пельтьє).

Дослідним шляхом встановлено, що кількість теплоти Q, яка виділяється або поглинається у спаї різнорідних металів, пропорційна заряду, який пройшов через спай цих металів:

$$Q_{AB} = \prod_{AB} \cdot q = \prod_{AB} \cdot I \cdot t \qquad (5.6.2)$$

(індекси вказують напрям струму – від металу A до B). Коефіцієнт пропорціональності $\prod_{AB}$ характеризує кількість теплоти, що виділяється або поглинається через спай при проходженні одиниці заряду (q=1), називається коефіцієнтом Пельтьє для даної пари металів. З формули (5.6.2) випливає, що на відміну від закону Джоуля-Ленца про теплову дію струму,кількість теплоти Пельтьє пропорційна не квадрату, а першому степеню сили струму. Відзначимо, що при зміні напряму струму замість виділення теплоти у спаї спостерігається поглинання такої ж кількості теплоти за той самий час, за тієї ж сили струму і навпаки, тобто

$$Q_{AB} = -Q_{BA},$$
$$\prod_{AB} = -\prod_{BA}. \qquad (5.6.3)$$

Класична теорія провідності металів дає лише якісне пояснення явища Пельтьє як результат дії контактної різниці потенціалів на електрони, які зумовлюють електричний струм. Якщо електричне поле в одному з контактів різнорідних металів прискорює електрони, то їх кінетична енергія збільшується і завдяки цьому у спаї виділяється додаткова кількість теплоти Пельтьє. Оскільки у другому спаї цих різнорідних металів напрям поля протилежний, то воно гальмує електрони, зменшуючи їх кінетичну енергію і це зменшення енергії поповнюється за рахунок теплового руху атомів кристалічної ґратки металу, внаслідок чого відбувається поглинання теплоти. Таким чином, при проходженні струму через дві послідовно з'єднані термопари один спай нагрівається, а другий охолоджується. Щодо кількісних співвідношень, які характеризують явище Пельтьє, то вони можуть бути отримані лише на основі квантової теорії.

У даний час явище Пельтьє набуло широкого практичного застосування для створення компактних холодильних установок у яких на відміну від компресорних холодильників відсутні рухомі механізми. Конструкція таких холодильних установок надзвичайно проста – один спай, який охолоджується при проходженні струму, знаходиться всередині камери холодильника, а другий, який нагрівається, зовні холодильника. У сучасних холодильних установках на основі явища Пельтьє використовують напівпровідникові матеріали, які дають змогу отримувати низькі температури. Оскільки розміри термопари незначні,то це дає можливість здійснити так зване точкове охолодження, наприклад, при операціях на оці.

Ще одне термоелектричне явище теоретично передбачив у 1856р. англійський фізик У.Томсон. Згодом це явище було виявлено експериментально і отримало назву явища або ефекту Томсона. Суть цього ефекту полягає у тому, що проходження струму через неоднорідно нагрітий провідник зумовлює додаткове виділення або поглинання теплоти залежно від напряму струму. Наприклад, нехай протилежні кінці металічного провідника мають різні температури ($T_1 > T_2$) і тоді вільні електрони, що зумовлюють електричний струм в цьому провіднику,

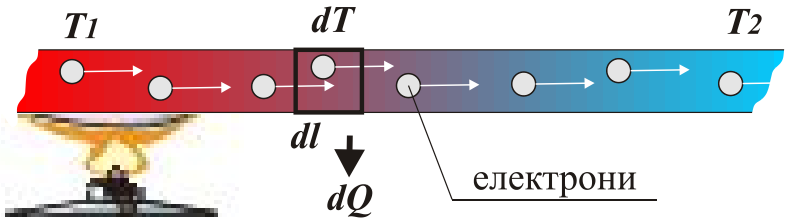


Рисунок 5.6.2

рухаються у напрямі зменшення його температури як це вказано на рис.5.6.2. У такому випадку надлишок своєї енергії електрони передадуть кристалічній ґратці металу, що приведе до виділення певної кількості теплоти. Якщо ж електрони рухаються у протилежному напрямі (напрям струму змінюється), то електрони, переходячи в "гарячу" частину провідника, отримують від кристалічної ґратки металу додаткову енергію, внаслідок чого відбувається поглинання певної кількості теплоти. Теоретичні розрахунки Томсона дають можливість визначити кількість теплоти dQ, яка виділяється або поглинається залежно від напряму струму в одиниці об'єму провідника за одиницю часу:

$$\frac{dQ}{dV \cdot dt} = \tau \frac{dT}{dl} J, \qquad (5.6.4)$$

де $\frac{dT}{dl}$ – градієнт температури; J – густина струму в провіднику; τ – коефіцієнт Томсона, який для металів є величиною порядку $10^{-5} B/K$.

5.7 Термоелектронна емісія

У 5.4 було вказано, що найменша енергія, яку необхідно надати електрону щоб він зміг вийти з тіла, визначається роботою виходу електрона і для металів вона складає величину порядку декількох електрон-вольт. За кімнатної температури $T \approx 300K$ середнє значення кінетичної енергії теплового руху електронів як ідеального газу дорівнює $\frac{3}{2} k \cdot T \approx 6 \cdot 10^{-21}\ Дж$.

Оскільки $1eB = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ Дж$, то за кімнатної температури енергія теплового руху електронів недостатня для здійснення роботи виходу їх з металу. З підвищенням температури металу зростає кінетична енергія теплового руху електронів і частина з них може досягнути енергії достатньої для здійснення роботи виходу з металу. *Явище випускання електронів з речовини, яке зумовлене тепловим рухом електронів, називається термоелектронною емісією.* Це явище можна спостерігати і вивчати за допомогою двоелектродної вакуумної лампи. Загальний вигляд такої лампи показаний на рис.5.7.1а. Один електрод називається катодом – це дротина (спіраль), яка при нагріванні електричним струмом випускає електрони. Другий електрод – анод. У більшості випадків – це металевий циліндр, по осі якого розташований катод. Розжарення катода здійснює джерело струму-катодна батарея **Бк**, а за допомого реостата **Рт**, змінюючи струм у колі катода, можна змінювати його температуру. Інше джерело постійного струму – анодна батарея $\mathbf{Б_А}$, створює електричне поле між катодом і анодом, напруга між якими плавно змінюється від нуля (нижнє положення рухомого контакту потенціометра) до максимального значення (верхнє положення рухомого контакту потенціометра). Напруга між катодом та анодом вимірюється

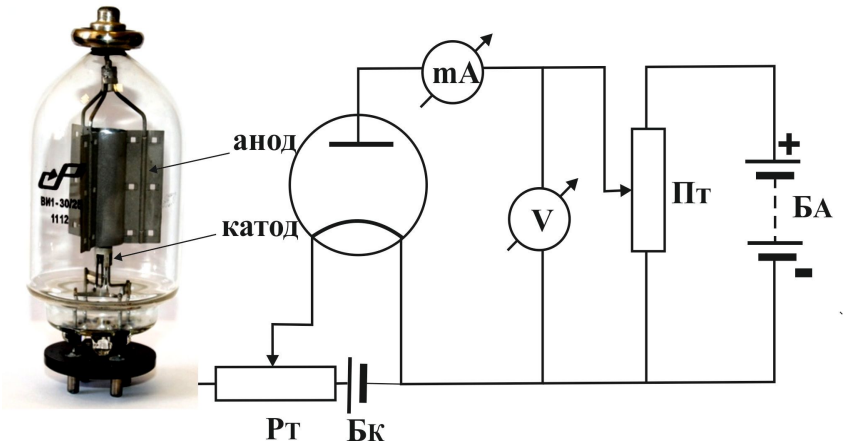


Рисунок 5.7.1

вольтметром, а струм у цьому електричному колі – міліамперметром.

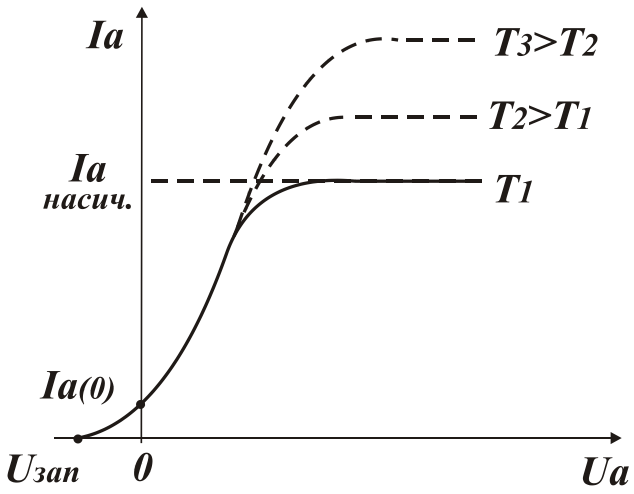


Рисунок 5.7.2

Залежність анодного струму від анодної напруги U_a (напруга між катодом і анодом) за сталої температури катода називається вольт-амперною характеристикою діода. На рис.5.7.2. наведені такі характеристики за різних температур катода.

При нагріванні катода електрони, що вилітають з нього, утворюють від'ємний просторовий заряд – електронну хмаринку. Ця хмаринка відштовхує електрони, що вилітають з катода, і більша частина з них повертається назад. Однак, навіть за відсутності між катодом і анодом електричного поля ($U_a = 0$), незначній частині електронів вдається долетіти до анода і в колі такої двоелектродної лампи існує незначний електричний струм I_0. Отже, вольт-амперна характеристика діода починається не з нуля. Щоб припинити цей струм між катодом і анодом треба прикласти деяку від'ємну напругу, яку називають запірною напругою U_3. Якщо після цього при сталій температурі розжарення катоду збільшувати анодну напругу, то все більша частина естронів випущених розжареним катодом буде досягати аноду, що зумовлює збільшення електричного струму. Однак, при цьому залежність струму від напруги не є лінійною, тобто у даному випадку не виконується закон Ома в наслідок впливу зміни розподілу потенціалу в електронній хмаринці на різницю потенціалів між катодом і анодом. Така нелінійна залежність анодного струму від анодної напруги добре узгоджується з теоретичним законом Ленгмюра і Богуславського (Ленгмюр Івнінг – американський фізик (1881-1957), нобелівська премія у 1937р.; Богуславський С.А. – російський фізик (1883-1923)). Згідно з цим законом сила анодного струму змінюється пропорційно $U^{\frac{3}{2}}$, а тому цей закон ще називають законом три-других і він має такий вигляд:

$$I = BU^{\frac{3}{2}}, \qquad (5.7.1)$$

де B – коефіцієнт, який залежить від форми і розмірів електродів діода.

Після того, як всі електрони, які випускає розжарений електрод, під дією електричного поля досягають анода, подальше збільшення анодної напруги вже не приводить до збільшення анодного струму. *Максимальний термоелектричний струм, який можливий за даної температури, називається струмом насичення.* Очевидно, що чим більша температура катода, тим більше число електронів вилітають з нього за одиницю часу, тим більший струм насичення. Якісно така залежність струму насичення від температури катоду показана на вольт-амперній характеристиці діода. Кількісну залежність струму насичення від температури на основі класичних уявлень спочатку отримав англійський фізик Оуен Річардсон (1879-1959), а згодом, на основі квантової теорії, американський фізик Дешман (1883-1954) і отриману залежність густини струму $J_{нас}$ насичення від температури називають формулою Річардсона-Дешмана:

$$J_{нас} = B \cdot T^2 e^{-\frac{A}{kT}}, \qquad (5.7.2)$$

де A – робота виходу електрона; B – емісійна стала, теоретичне значення якої вираховується за формулою $B = \frac{4\pi \cdot m \cdot k^2 e}{h^3}$ і становить $1{,}2 \cdot 10^6 A \cdot m^{-2} \cdot K^{-2}$ (значення емісійної сталої є різними для різних металів).

З формули (5.7.2) випливає, що зменшення роботи виходу приводить до різкого збільшення термоелектронної емісії. Тому при виготовленні електронних ламп застосовують спеціальні методи обробки катодів, які зменшують роботу виходу електронів. Для цього нитку розжарення, виготовлену з тугоплавкого металу (вольфраму) для якого робота виходу становить 4,5еВ, покривають шаром іншого металу з меншою роботою виходу, наприклад, окисом барію з роботою виходу 1еВ.

Оскільки двохелектродна електронна лампа (діод) володіє односторонньою, провідністю, то її використовують для перетворення змінного струму у постійний. Якщо ж у таку лампу ввести третій електрод у вигляді сітки розташованої поблизу катоду, то незначна зміна сіткової напруги приводить до значних змін анодного струму. Тобто така лампа називається тріодом і виконує роль підсилювача. До недавнього часу електровакуумні діоди, тріоди та лампи з більшою кількістю електродів (пентод – п’ять електродів) широко використовувались в радіотехніці. Всі радіоприймачі, підсилювачі, телевізори, генератори тощо працювали на лампах. У даний час на зміну таким електронно-вакуумним приладам прийшла напівпровідникова техніка.

5.8 Напівпровідники, їх будова та власна провідність

Сама назва "напівпровідник" на перший погляд вказує, що речовина з такою назвою за своїми електричними властивостями (наприклад, провідністю) займає проміжне положення між провідником та непровідником (діелектриком). Дійсно, за кімнатної температури напівпровідники займають проміжне положення у порівнянні з провідністю металів та діелектриків. Але найбільш загальна властивість напівпровідників, яка принципово відрізняє їх від провідників та діелектриків, полягає у тому, що напівпровідники змінюють свої властивості у надзвичайно широкому інтервалі під впливом різноманітних факторів (температури, освітленості, радіоактивного випромінювання тощо). При цьому електропровідність напівпровідників може змінюватись навіть у 10^7 раз (порівняйте з надзвичайно малою зміною провідності металів при їх нагріванні). До напівпровідників належать окремі неорганічні речовини та ряд органічних сполук. Залежно від складу та будови напівпровідники поділяють на три групи: атомні або елементарні напівпровідники з атомною кристалічною ґраткою, напівпровідники з йонною кристалічною ґраткою, напівпровідникові сполуки.

Групу напівпровідників першого типу складають 12 хімічних елементів середньої частини таблиці Менделєєва -— B, C, Si, P, S, Ge, As, Se, Sn, Sb, Te, I (виділено на рис.5.8.1). Поруч з кожним елементом вказана в електрон-вольтах ширина забороненої зони. Саме така незначна ширина забороненої зони у порівнянні з

діелектриками зумовлює особливі властивості напівпровідників. Тому як приклад розглянемо германій.

Германій – чотирьохвалентний елемент, у зовнішній оболонці якого є чотири електрони. Чотири валентних електрони кожного атома зв'язаної із такими ж електронами сусідніх атомів парноелектронними або ковалентними зв'язками. Такий зв'язок можна умовно зобразити двома лініями що сполучають ядра (рис.5.8.2). При температурі $T=0\ K$ в германію відсутні вільні електрони, тобто валентна зона повністю заповнена електронами

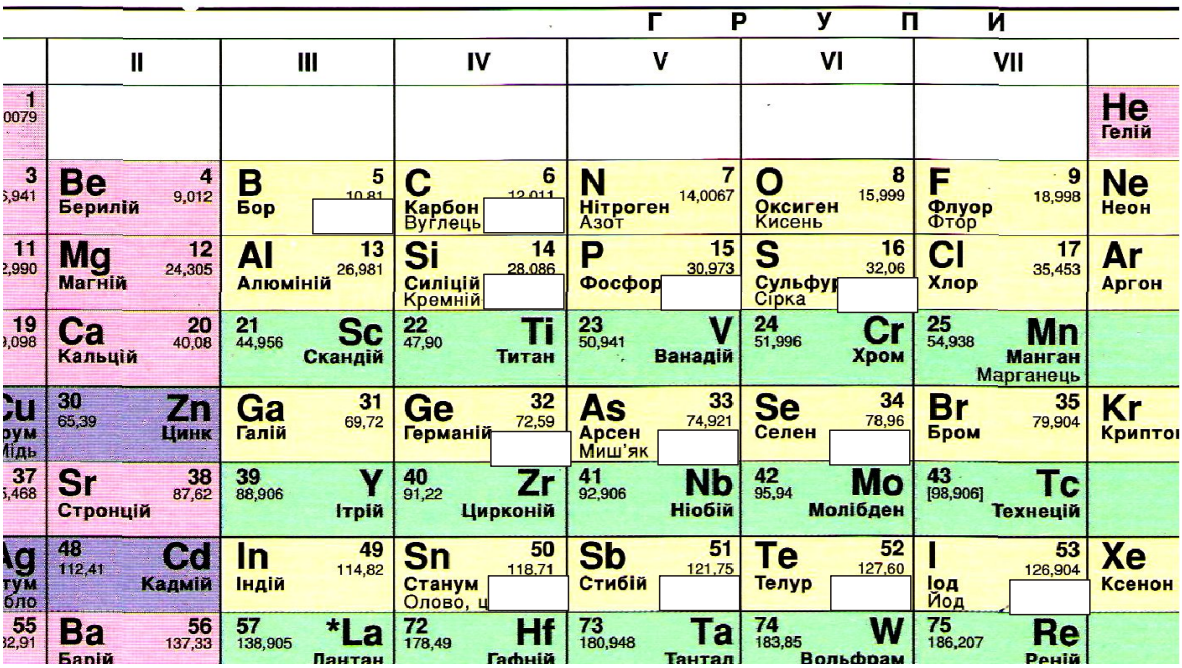


Рисунок 5.8.1

(рис.5.8.2*а*), у зоні провідності електрони відсутні, тобто при абсолютному нулю температури германій є абсолютним непровідником. Збільшення температури зумовлює збільшення кінетичної енергії теплового руху атомів кристалу германію, внаслідок чого електрони набувають енергії достатньої для їх переходу з валентної зони в зону провідності, а тому його провідність різко зростає. Отже, при збільшенні температури напівпровідники за своїми значеннями провідності наближаються до провідників. Квантова теорія встановлює, що власна електропровідність σ напівпровідників в залежності від температури T змінюється за таким законом:

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{\Delta E}{k \cdot T}}, \qquad (5.8.1)$$

де σ_0 – константа; ΔE – ширина забороненої зони; k – стала Больцмана.

Мінімальна енергія, яку необхідно надати електрону щоб він прокинув валентну зону, називається енергією активації. Як тільки електрон, набувши таку енергію виходить з ковалентного зв'язку, між атомами на цьому місці створюється вакансія. Враховуючи, що напівпровідник в цілому електрично нейтральний, то відсутність електрона у ковалентному зв'язку еквівалентна появі у цьому місці додатного заряду. Відсутність електрона у ковалентному зв'язку отримала назву дірки, яка формальна еквівалентна додатному заряду рівному за модулем заряду електрона або дірка у ковалентному зв'язку на рис.5.8.2*б* умовно зображена пунктирним колом. Поруч з утворенням дірок відбувається зворотний процес – рекомбінація дірок. Це означає, що вакансії у ковалентних зв'язках, тобто дірки, заповнюються іншими електронами, але ці "інші" електрони, залишивши "свої" ковалентні зв'язки, зумовлюють появу других дірок і т.д. Оскільки електрони рухаються хаотично, то відповідно можна вважати хаотичним рухом і рух дірок. Тут слід підкреслити, що рух дірки не є рухом деякої додатної частинки, а це рух по суті "пустого" місця у ковалентному зв'язку. Якщо в такому

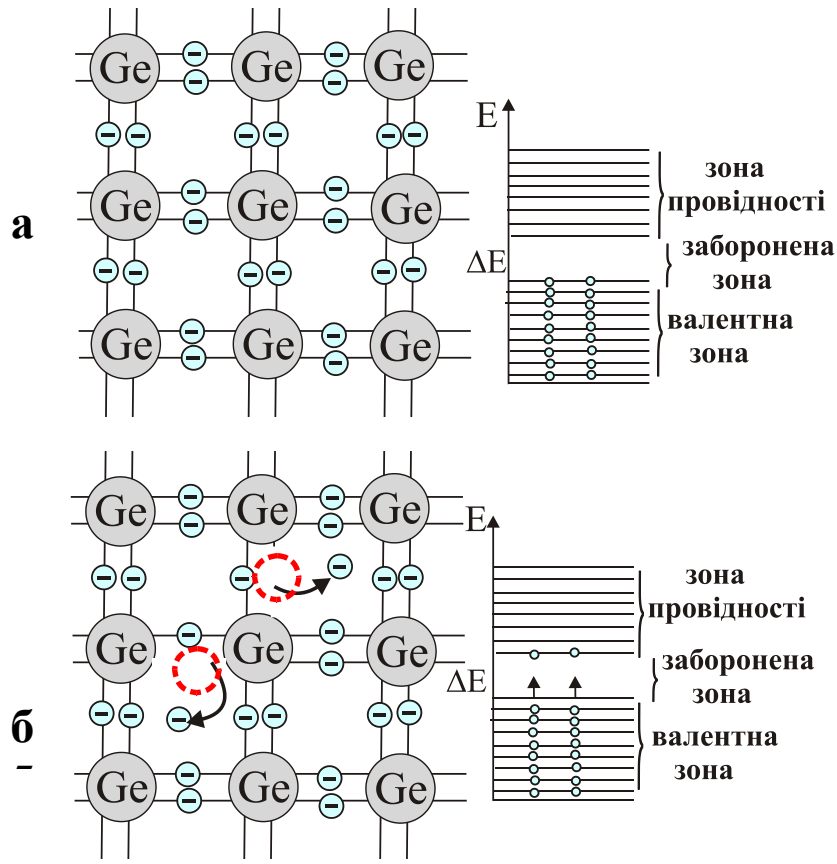
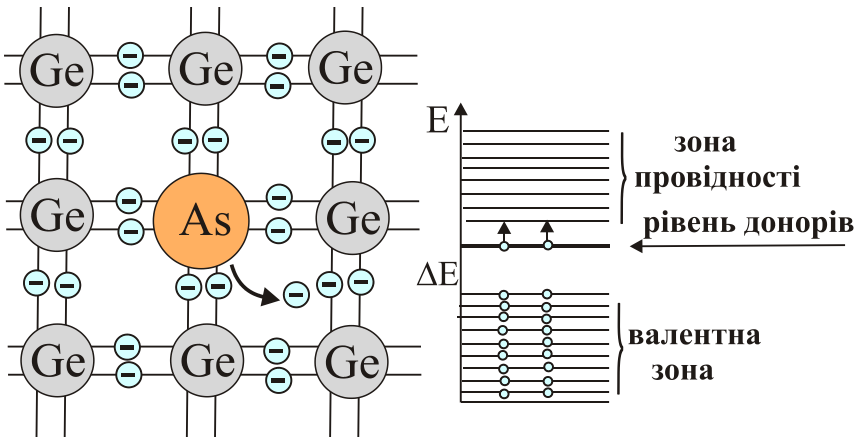


Рисунок 5.8.2

напівпровіднику створити електричне поле, то виникне електричний струм, зумовлений впорядкованим рухом електронів, а у протилежному напрямі – дірок. Тому, говорячи про провідність напівпровідників, розрізняють електронну провідність, яку називають провідністю ***n-типу*** (негативну) та діркову ***p-типу*** (позитивну). Електронна і діркова провідності чистих (без домішок) напівпровідників називається власною провідністю.

5.9 Домішкова провідність напівпровідників

Вже стало звичним читати в підручниках з фізики таку фразу: введення домішок у чистий напівпровідник суттєво впливає на його електричні властивості і далі наводяться рисунки, на яких замість атома германію розташований атом домішки, наприклад, арсену (As) або бору (B). Тоді виникає питання: як "взяти" атом домішки та розмістити його замість атома германію в його кристалічну ґратку? Сучасні технології дають можливість здійснити такі "надтонкі операції", наприклад, дифузійним методом – шаром за шаром атомних розмірів нарощується необхідний за своїми властивостями напівпровідник. Але якими би не були технологічні процеси напівпровідникової техніки фізика впливу домішок на властивості напівпровідника залишається однаковою. Тому, для прикладу, розглянемо вплив двох особливих домішок, валентність яких відрізняється на одиницю від валентності основних атомів. Так, якщо у кристал чотирьохвалентного германію ввести домішку 5-ти валентних атомів арсену (рис.5.9.1), то його п’ятий валентний електрон виявиться «зайвим» і він стає електроном провідності. Таким чином у напівпровіднику з домішкою, валентність атомів якої на одиницю відрізняється від валентності атомів ос



один тип носіїв струму – електрони. У такому випадку говорять, що такий напівпровідник з домішковою провідністю є напівпровідником

Рисунок 5.9.1

n-типу. Атоми домішок, які створюють таку провідність називають донорами.

Зонна теорія встановлює енергетичні співвідношення процесів, що зумовлюють донорну провідність. Так, для чистого кристалу арсену ширина забороненої зони становить 1.5 еВ, а в кристалі германію ширина забороненої зони становить 0,7 еВ. Оскільки концентрація атомів арсену як домішки в кристалі германію незначна, то атоми арсену у кристалі германію між собою практично не взаємодіють, в результаті чого п’ятий "зайвий" для ковалентного зв’язку електрон буде слабо зв’язаним з атомом донора – атомом арсену. Для переводу електрона з донорного рівня в зону провідності достатньо незначної енергії, яку може забезпечити тепловий рух. Наприклад, якщо для германію домішкою є арсен, то ця енергія порядку 0.05еВ, а тому рівень донорів розташований близько і нижче рівня провідності (рис.5.9.1).

Тепер розглянемо випадок коли валентність домішки, наприклад, трьохвалентного бору, менша валентності основних атомів чотирьохвалентного германію (рис.5.9.2). Зрозуміло, що у цьому випадку трьохвалетних електронів бору недостатньо для утворення зв'язку з чотирма сусідніми атомами германію і тоді один із зв'язків не буде заповнений електроном. Така відсутність електрона, як раніше вже вказувалось, називається діркою, яка еквівалентна додатному заряду рівному заряду електрона. Таким чином в напівпровіднику з домішкою, валентність якої менша валентності основних атомів, з'являються носії струму одного типу – дірки. Провідність у даному випадку буде ***p*-типу**. Домішки, що зумовлюють діркову провідність називають акцепторами (з латинської *acceptor* – той що приймає).

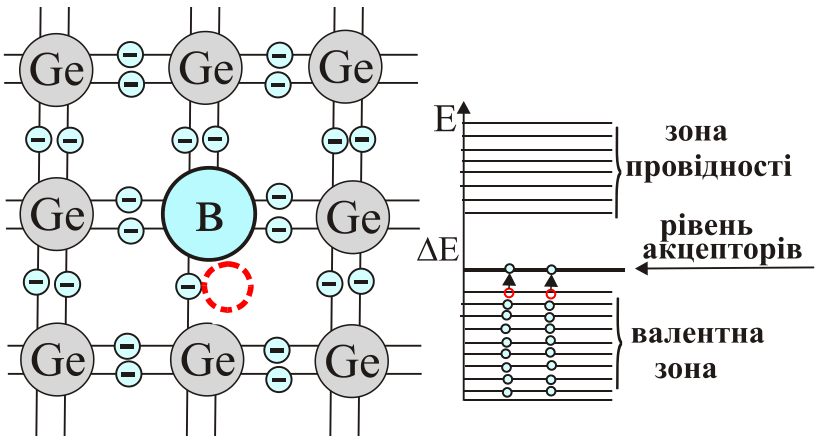


Рисунок 5.9.2

Наявність акцепторів зумовлює появу їх відповідних енергетичних рівнів, які називаються акцепторними і вони розташовані недалеко від валентної зони. Утворення дірки відповідає

переходу електрона з валентної зони на акцепторний рівень як це вказано на рис.5.9.2.

Очевидно, що збільшення температури зумовлює зростання провідності напівпровідників як *n*- типу, так і *p*- типу і концентрація домішкових носіїв струму може досягти насичення. Це означає, що практично звільнюються всі донорні або заповнюються всі акцепторні рівні. Разом з тим, по мірі зростання температури, все в більшій мірі починає виявлятись власна провідність напівпровідників.

5.10 Застосування напівпровідників

Всі особливі явища, пов'язані з практичним застосування напівпровідників, відбуваються на межі їх контактів з різними типами домішкової провідності. Так, в подальшому буде показано, що контакт двох напівпровідників *p*- та *n*- типу володіє односторонньою провідністю, а контакт трьох напівпровідників (*p*-*n*-*p*) може виконувати роль підсилювача. Отже, щоб зрозуміти принцип роботи сучасних напівпровідникових приладів, необхідно з'ясувати механізм контактних явищ у напівпровідниках. Якісно цей механізм на *p*-*n* переході можна пояснити наступним чином.

Внаслідок теплового руху дірки з *p*- області дифундують в *n*- область і навпаки, електрони з *n*- області дифундують в *p*- область, у результаті чого дірки та електрони на межі *p*-*n* переходу рекомбінують між собою. Таким чином, контакт напівпровідників двох типів провідності буде збіднений носіями струму та матиме великий опір. Одночасно на межі *p*-*n* переходу виникає подвійний електричний шар, утворений від'ємними йонами акцепторної домішки, заряди яких тепер не компенсуються дірками (адже вони заповнені дифундованими електронами) та позитивними йонами донорної домішки, заряди якої тепер не компенсуються електронами (рис.5.10.1). Цей подвійний електричний шар, збіднений на рухомі заряди, створює електричне поле, яке перешкоджає подальшому переходу зарядів. Товщина *l* подвійного електричного шару для більшості

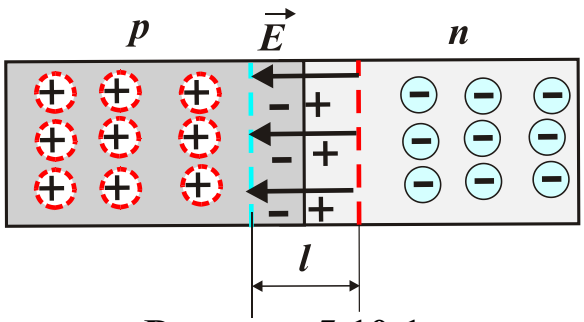
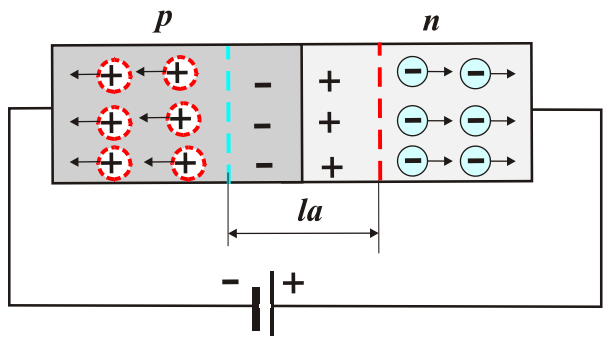
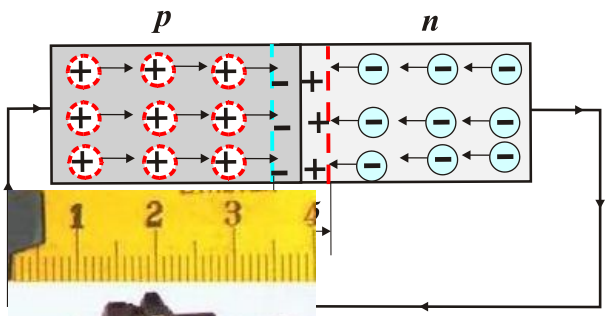


Рисунок 5.10.1

напівпровідників, які використовуються на практиці, складає величину порядку $10^{-3} - 10^{-4}$ мм. Поява подвійного електричного шару і створеного ним електричного поля зумовлює відповідну контактну різницю потенціалів на межі *p-n* переходу і ця контактна різниця потенціалів є потенціальним бар'єром для рухомих зарядів Дійсно, в *n*- області вільні електрони (умовно зображені на рис 5.10.1 кружками зі знаком мінус) лише можуть наблизитись до подвійного електричного шару і не пройдуть через нього, оскільки будуть відштовхуватись лівою частиною цього шару, що має від'ємний заряд. Аналогічно дірки з *p*- області не можуть пройти в *n*- область. Ці особливі властивості подвійного електричного шару дали йому назву запірного шару, як шару що має підвищений електричний опір.

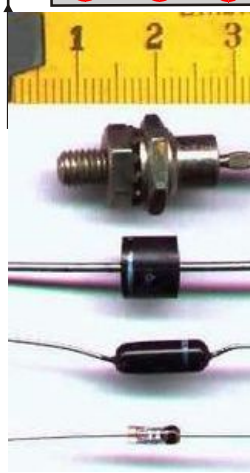
Тепер розглянемо вплив зовнішнього електричного поля на властивості *p-n* переходу. Так, якщо зовнішнє електричне поле буде підсилювати поле контактного шару (рис.5.10.2*а*), то це приведе до зростання потенціального бар'єру для дірок та електронів і струм через *p-n* перехід буде відсутнім. Напрям зовнішнього поля, при якому збільшується запірний шар у результаті чого електричний струм через *p-n* перехід практично відсутній, називається ***запірним***.





0.2

Якщо ж змінити напрям зовнішнього електричного поля, то це поле призведе до зменшення запірного шару і його опору, що зумовить можливість руху зарядів через *p-n* перехід і відповідно наявність електричного струму (рис.5.10.2б). Такий напрям зовнішнього електричного поля, при якому через *p-n* перехід можливий електричний струм, називається ***пропускним***. Таким чином *p-n* перехід володіє односторонньою провідністю аналогічно до двохелектродної електронної вакуумної



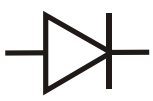


Рисунок 5.10.3

лампи. Тому напівпровідниковий пристрій з одним *p-n* переходом називається напівпровідниковим діодом. У порівнянні з електровакуумними лампами-діодами напівпровідниковий діод володіє безсумнівними перевагами. По перше, це відсутність самого скляного балона, по друге – відсутність додаткового джерела живлення для нагрівання катоду і, нарешті, невеликі розміри напівпровідникового діода. Тому останнім часом напівпровідникові діоди практично витіснили з застосування лампові діоди. На рис.5.10.3 показано загальний вигляд деяких сучасних напівпровідникових діодів та їх умовне зображення на електричних схемах.

Ще одне оригінальне застосування односторонньої провідності, точніше непровідності запірного шару *p-n* переходу, це – ***варікап*** (англ. ***vari****able* ***cap****acitance diode*), тобто напівпровідниковий конденсатор змінної ємності з електронним керуванням. Принцип дії варікапу полягає у властивості електронно-діркового переходу (p-n переходу) змінювати свою товщину в залежності від прикладеної напруги, тобто самому змінювати ємність такого своєрідного конденсатора, обкладками якого є *p-n* перехід. Позначення варікапу на електричних схемах наведено на рис.5.10.4. Вся сучасна телевізійна техніка використовує варікапи. Так, пульт дистанційного управління надсилає відповідні команди електронній системі телевізора, яка подає відповідну керуючу напругу на віракап коливального контуру і тим самим налаштовує його на відповідний телевізійний канал. В приймачах систем супутникового телебачення такий електронний блок налаштування зазвичай називають тюнером (з англ. *tuner* – налаштування, настроювання).

Рисунок 5.10.4

Не тільки одностороння провідність *p-n* переходу, але й інші його властивості знаходять широке практичне застосування. Яскравим прикладом цьому є світлодіоди, які невдовзі замінять традиційні джерела світла – лампи розжарення і люмінесцентні лампи. Світлодіод – напівпровідниковий діод, що випромінює світло при пропусканні через нього електричного струму. На рис.5.10.5 наведений вигляд деяких сучасних фотодіодів

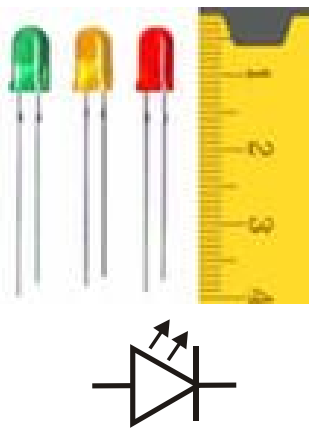


Рисунок 5.10.5

та їх умовне позначення на електричних схемах. Про ефективність світлодіодів як джерел світла можна судити за їх надзвичайно великою ефективністю, наприклад, термін служби світлодіодної лампи — більше 100 000 годин (більше 11 років). Світлодіод під назвою LED (з англійської *light-emitting diode* – світло випромінюючий діод) тепер стали всім відомі з назви сучасних телевізорів **LED TV** – телевізор з світлдодіодним підсвічуванням дисплею.

Подібно до трьохелектродної лампи-тріода, система напівпровідників типу *n-p-n* або *p-n-p* виконує роль підсилювача електричних сигналів. Таку систему напівпровідників називають напівпровідниковим тріодом або транзистором (з англійської *transfer*— «переносити» і *resistor*— «опір»). За дослідження напівпровідників та відкриття транзисторного ефекту американські фізики Уільям Шоклі, Джон Бардін та Уолтер Брайтен у 1956 р. були удостоєні Нобелівської премії з фізики. Цікаво відмітити, що Джон Бардін був згодом удостоєний Нобелівської премії в другий раз за створення теорії надпровідності (про цю теорію як теорію БКШ йшла мова в підрозділі 5.3).

Перш ніж перейти до опису принципу роботи транзистору з'ясуємо, що означає термін «підсилення електричного сигналу». Інколи говорять – малу напругу чи струм треба збільшити, підсилити. Наприклад, була мала напруга 0,01 В, а потрібна напруга 100В, будь ласка, є джерела струму на 100В і ніякого підсилювача не потрібно. Підсилення електричного сигналу має зовсім інший зміст, а саме, не змінюючи форми електричного сигналу необхідно збільшити його амплітуду. Наприклад, звукові коливання за допомогою мікрофона перетворюють в електричні такої ж самої форми (рис.5.10.6).

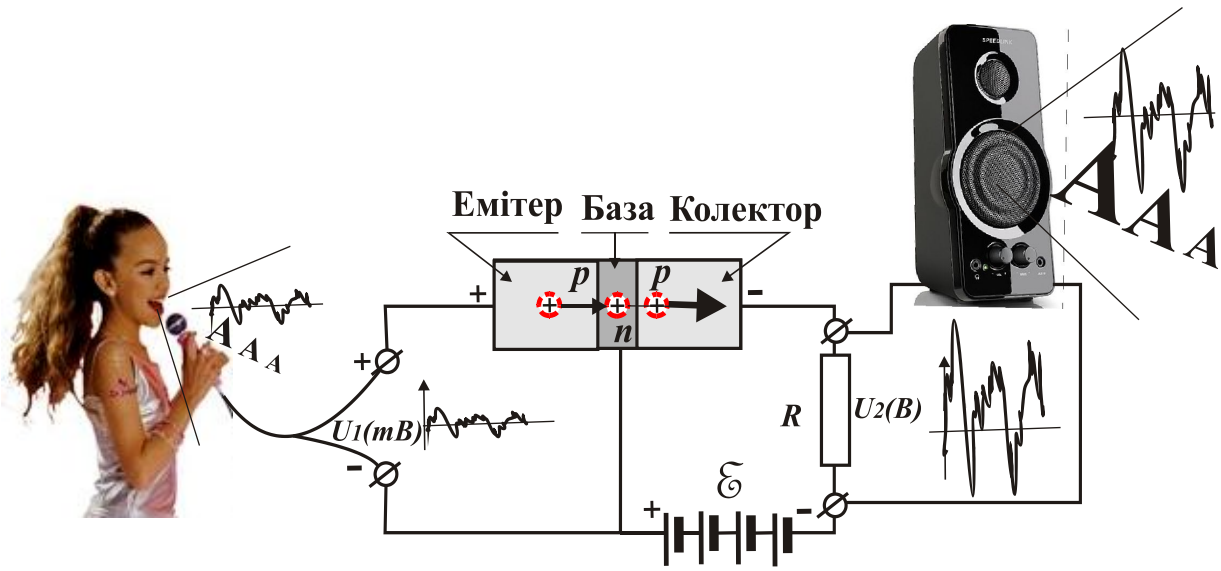


Рисунок 5.10.6

Звичайно, електричний сигнал мікрофона дуже слабий (амплітуда – мілівольти) і ніяк не зможе запрацювати динамік гучномовця (звукової колонки). Тому, не змінюючи форми електричного сигналу (для прикладу звуку «А») його необхідно підсилити до декілька вольт для гучномовця (звукової колонки), щоб почути гучне «**А**».

Звісно, один транзистор не зможе забезпечити такого необхідного підсилення. На практиці відбувається поетапне підсилення – є вхідні малопотужні та потужні вихідні каскади, які складаються з багатьох транзисторів, але принцип їх роботи однаковий. Тому, як приклад, розглянемо принцип роботи транзистора типу *p-n-p.* За своєю конструкцією вони можуть бути точкові або площинні. В точкових транзисторах дві області *p-провідності* у вигляді точкових електродів розташовані на одній стороні області *n-провідності*. Як у точкових, так і у площинних транзисторах послідовність таких трьох напівпровідників називається емітером, базою та колектором.

Між емітером та базою у пропускному напрямі подається підсилювальна напруга так, як це показано на рис.5.10.6 і струм в емітері зумовлений рухом його основаних зарядів, тобто дірок. Ці дірки проникають в область бази як неосновні носії. Основна «хитрість» транзистора полягає у тому, що базу роблять незначної товщини так, що не всі дірки встигають рекомбінувати (не заповнюються електронами) і проникають в область колектора, а далі вони підхоплюються сильним електричним полем джерела електричного струму, яке ввімкнено у запірному напрямі у колі база-колектор (дірки притягаються до негативно зарядженого колектора). Таким чином, за рахунок джерела струму яке ввімкнено у запірному напрямі, у колі база-емітор носії струму збільшують свою енергію, тобто відбувається підсилення поданого на емітер електричного сигналу. Оскільки емітер ввімкнений у пропускному напрямі, а колектор у запірному, то вихідний опір транзистора більший вхідного. Отже, при однаковому значенні сили струму через емітер і колектор вихідна напруга U_2 підсиленого сигналу значно більша його вхідної напруги U_1, відповідно потужність вихідного сигналу більша ніж вхідного.

Аналогічний принцип роботи транзистора *n-p-n* типу, тільки тепер замість дірок в базу *p*-типу провідності інжектуються електрони, які не встигають рекомбінувати з дірками і, потрапляючи в колектор, захоплюються електричним полем батареї увімкненої у запірному напрямі (тепер полюс "+" джерела струму слід під'єднати до колектора). Транзистори є основними елементами сучасної електроніки. Зазвичай вони застосовуються в підсилювачах і логічних електронних схемах. У мікросхемах в єдиний функціональний блок об'єднані тисячі й мільйони окремих транзисторів. На рис.5.10.7 показаний загальний вигляд окремих транзисторів та їх умовне позначення на електричних схемах.

Рисунок 5.10.7

Контрольні запитання

1 *Які основні положення класичної електронної теорії провідності металів та як на основі цієї теорії можна вивести закон Ома та закон Джоуля-Ленца?*
2 *Які труднощі виникли у класичної електронної теорії провідності металів при поясненні експериментального закону Відемана-Франца?*
3 *Як класична електронна теорія провідності металів пояснює залежність провідності металів від температури і яка при цьому суттєва різниця від експериментальної залежності?*
4 *Яка різниця між експериментальним законом Дюлонга-Пті про теплоємність кристалічних тіл та значенням теплоємності металів з точки зору їх класичної електронної теорії провідності?*
5 *Які основні положення квантової теорії провідності твердих тіл і як на основі цих положень пояснюються затруднення класичної електронної теорії провідності металів?*
6 *Як вводиться поняття рівня Фермі для виродженого електронного газу?*
7 *В чому полягає явище надпровідності і які ефекти його супроводять?*
8 *Як теорія надпровідності, названа теорією БКШ, пояснює механізм цього явища?*
9 *Як біля поверхні металу утворюється подвійний електричний шар?*
10 *Як на основні рівня Фермі дати означення роботи виходу електрона з металу?*
11 *Як з точки зору неоднакових рівнів Фермі в різних металах можна пояснити виникнення зовнішньої контактної різниці потенціалів?*
12 *Який механізм виникнення внутрішньої контактної різниці потенціалів і за яким законом можна визначити її значення?*
13 *Якими двома законами Вольта характеризується контактна різниці потенціалів різних металів?*
14 *Від яких величин залежить термоелектрорушійна сила термопар і яке їх практичне застосування?*
15 *У чому полягає явище Пельтьє, який його механізм та практичне застосування?*

16 *У чому полягає термоелектричне явище Томсона і який механізм цього явища?*

17 *У чому полягає явище термоелектронної емісії і як за допомогою двохелектродної лампи дослідити це явище та яку при цьому отримують залежність анодного струму від напруги?*

18 *За яких умов наступає струм насичення в двохелектродній вакуумній лампі і за яким законом визначається сила струму насичення?*

19 *Яке практичне застосування термоелектронної емісії?*

20 *Яка принципова відмінність напівпровідників від провідників електричного струму?*

21 *На які групи поділяють напівпровідники в залежності від їх складу та будови?*

22 *Яка особливість ковалентного зв'язку між атомами напівпровідника і як ця особливість пояснює власну (діркову та електронну) провідність напівпровідників?*

23 *Які домішки і яким чином зумовлюють електронну провідність напівпровідників, роблячи їх провідниками* n *-типу?*

24 *Які домішки і яким чином зумовлюють діркову провідність напівпровідників, роблячи їх провідниками* p *-типу?*

25 *Який принцип роботи та практичне застосування таких напівпровідникових приладів: напівпровідникового діода, варикапа, світлодіода, транзистора?*

Розділ 6 Електричний струм в рідинах

Подібно до того як одні тверді тіла добре проводять електричний струм, а другі гірше або взагалі його не проводять, так само і рідини є різними стосовно їх електропровідності. Наприклад, дистильована вода без будь яких розчинених в ній речовин, гліцерин, бензол та багато інших рідин дуже погано проводять електричний струм і їх практично можна вважати діелектриками. Навпаки, водні розчини солей, кислот і лугів добре проводять електричний струм. Виникає питання, чому вода як діелектрик плюс розчинений в ній теж діелектрик, наприклад, окремо взята концентрована кислота разом стають провідниками електричного струму. Тобто, раніше ні у воді, ні у кислоті не було вільних електричних зарядів – носіїв електричного струму, а в розчині вони з'явилась. Відповідь на це питання дає явище електролітичної дисоціації яке зумовлює провідність рідин.

6.1 Електролітична дисоціація

У 1887 році шведський вчений Арреніус (1859-1927), досліджуючи електропровідність водних розчинів, висунув припущення, що в таких розчинах речовина розпадається на заряджені частинки – йони, які можуть рухатись в електричному полі до електродів. Згодом додатні йони, які рухаються до від'ємного катода, отримали назву катіони, а негативні йони що рухаються до анода – аніони. Слід зауважити, що майже всі терміни які стосуються електропровідності розчинів (йони, катіони, аніони, електроліт тощо) увів англійський фізик Фарадей ще у 30-ті роки XIX ст., вивчаючи закономірності проходження електричного струму через розчини. Отже, явище розкладання нейтральних молекул речовини на йони в розчинах називається електролітичною дисоціацією (з латинської *dissociatia* – розділення, роз'єднання), а сам розчин з дисоційованими на йони молекулами називають електролітом (з грецької *lectron+lytos* дослівно *розчинена електрика).* Кількісною характеристикою електролітичної дисоціації є ***коефіцієнт дисоціації*** α, – це відношення кількості дисоційованих молекул розчиненої речовини до їх загальної кількості. Зазвичай при розрахунках беруть відношення чисел молекул в одиниці об'єму:

$$\alpha = \frac{n}{n_0}, \qquad (6.1.1)$$

де n_0 – число молекул в одиниці об'єму розчиненої речовини, з яких n – дисоціювали. Такий розчин, у якому внаслідок дисоціації молекул присутні йони, тобто заряди протилежних знаків, називається електролітом.

Залежно від значення коефіцієнта α розрізняють сильні електроліти ($\alpha \to 1$) та слабкі ($\alpha << 1$). Практично непровідниками електричного струму є багато органічних речовин у рідкому стані.

Розглянути механізм електролітичної дисоціації можна розглянути на прикладі розчину натрієвої солі ($NaCl$) або іншої молекули, яка складається з двох взаємозв'язаних йонів. У водному розчині молекули $NaCl$ оточуються з усіх сторін полярними молекулами води, так що додатні полюси молекул H_2O притягаються від'ємними полюсами молекул $NaCl$, і навпаки –

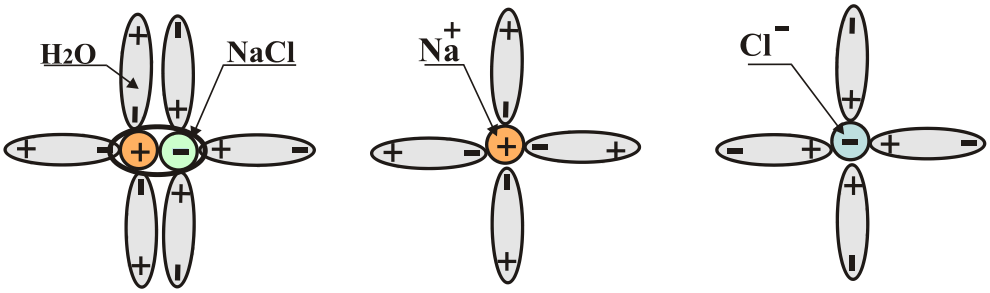


Рисунок 6.1.1

від'ємні полюси молекул води притягаються до додатних полюсів молекул натрієвої солі (рис.6.1.1). В результаті зв'язок між йонами в молекулі $NaCl$ послаблюється і молекула солі розпадається на два окремі йони (рис.6.1.1) − додатні (Na^+), які називають катіони, та від'ємні (Cl^-) – аніони. В електричному полі, яке створюється в електроліті двома пластинами – від'ємним катодом та додатним анодом, від'ємні йони рухаються до анодної пластини і тому назва від'ємних йонів у розчині *аніони* (ті що рухаються до анода). Навпаки, додатні йони рухаються до катода і тому їх назва *катіони* (ті що рухаються до катода). Після розриву молекули на йони, диполі розчинника (води) оточують ці йони, утворюючи навколо них

оболонку яка називається сольватною (з грецької *solventis* – розчинник).

Одночасно з процесом електролітичної дисоціації в розчині відбувається зворотний процес – об'єднання йонів у нейтральні молекули. Такий процес називається молізацією або рекомбінацією і при сталій температурі за умови відсутності електричного струму процеси дисоціації та рекомбінації перебувають у динамічній рівновазі. Тому рівняння дисоціації можна записати у такому вигляді:

$$NaCl \rightleftarrows Na^{+} + Cl^{-}. \qquad (6.1.2)$$

Електролітичну дисоціацію викликає не тільки вода, але і деякі окремі неводні полярні розчинники, наприклад, рідкий аміак, рідкий діоксин сірки, пропілен карбонат та інші, що мають подібно до води значну діелектричну проникність.

При плавленні, коли кристал нагрівається йони починають здійснювати інтенсивні коливання у вузлах кристалічної ґратки у результаті чого вона руйнується, утворюючи розплав що складається з йонів. Таким чином, електролітами є також розплави солей, які в твердому стані є йонними кристалами.

Ще один особливий клас електролітів – це тверді електроліти, які ще називають суперйонними провідниками. Особливість цих твердих електролітів полягає у тому, що їх провідність зумовлена рухом йонів лише одного знаку, оскільки йони другого знаку зв'язані з вузлами кристалічної ґратки даного твердого тіла. Прикладом суперйонника є йодид срібла (*AgI*).

5.2 Електропровідність електролітів

Як в металах, так і в електролітах електричний струм зумовлений упорядкованим рухом вільних зарядів: у металах – вільних електронів, а в електролітах – це впорядкований рух йонів. Оскільки в електролітах присутні йони протилежних за знаком електричних зарядів, то густина струму J в електролітах складається з густини струму J_+, зумовленої впорядкованим рухом додатних йонів, та J_- – густини струму негативних йонів:

$$J = J_+ + J_- . \qquad (6.2.1)$$

Аналогічно формулі $J = n \cdot e \cdot < v >$ густини струму в металах можна записати формули густини струму в електролітах, де замість концентрації електронів *(n)* приймають до уваги концентрації додатних (n_+) та негативних (n_-) йонів. Відповідно замість заряду електрона (*e*) запишемо значення заряду q_+ додатного та q_- від'ємного йонів. Крім того, необхідно врахувати неоднакові значення швидкості упорядкованого руху йонів протилежних знаків: $< v_+ >$ та $< v_- >$. Отже,

$$J = n_+ \cdot < v_+ > \cdot q_+ + n_- \cdot < v_- > \cdot q_- . \qquad (6.2.2)$$

Для спрощення будемо вважати, що концентрації йонів протилежних знаків рівні, тобто $n_+ = n_- = n = \alpha \cdot n_0$, а також за величиною заряд позитивного йона дорівнює заряду негативного йона – $q_+ = q_- = q$, але різними будуть лише швидкості їх упорядкованого руху. Тому рівняння (6.2.1) прийме такий вигляд:

$$J = q \cdot \alpha \cdot n_0 (< v_+ > \; + < v_- >) . \qquad (6.2.3)$$

Якщо уявити йон, який оточений сольватною оболонкою як тіло сферичної форми, що рухається у в'язкій рідині (електроліті), то швидкість його рівномірного упорядкованого руху пропорційна напруженості електричного поля, тобто

$$< v >= uE \; , \qquad (6.2.4)$$

де коефіцієнтом пропорційності є u – фізична величина, що отримала назву рухливості йонів і яка чисельно дорівнює швидкості з якою рухається даний йон в даному електроліті за напруженості електричного поля 1*В/м*. Щодо самого значення рухливості йонів, то це значення залежить від природи йонів та електролітів, а також від температури. Так, за кімнатної температури для більшості водних електролітів рухливість складає величину приблизно $10^{-8} \div 10^{-7} м^2 В^{-1} с^1$. Рухливість електронів у металах на чотири порядки більша ($10^{-4} м^2 В^{-1} с^{-1}$). Отже, ввівши поняття рухливості йонів, для катіонів і для аніонів, відповідні швидкості їх упорядкованого руху в електричному

полі даної напруженості E будуть визначатися такими співвідношеннями:

$$< v_+ >= u_+ E, \tag{6.2.5}$$

$$< v_- >= u_- E. \tag{6.2.6}$$

Підставивши (6.2.5) та (6.2.6) в (6.2.3), дістанемо вираз

$$J = q \cdot \alpha \cdot n_0 (u_+ + u_-) E, \tag{6.2.7}$$

який виражає закон Ома у диференціальній формі для електролітів, де електропровідність електроліту дорівнює

$$\sigma = q \cdot \alpha \cdot n_0 (u_+ + u_-). \tag{6.2.8}$$

Заряд q йона (додатного або від'ємного) дорівнює добутку елементарного заряду на валентність z розчиненої речовини – $q = e \cdot z$. Оскільки .як буде показано згодом (див. формулу (6.3.9) $e = \frac{F}{N_A}$, де F – число Фарадея, N_A – стала Авогадро, то $q = \frac{F \cdot e}{N_A}$, а тому

$$\sigma = \frac{F \cdot e}{N_A} \cdot \alpha \cdot n_0 (u_+ + u_-). \tag{6.2.9}$$

Якщо в електроліті є ν – молей розчиненої речовини, а оскільки в одному молі є число молекул рівне сталій Авогадро, то концентрація молекул розчиненої речовини становить $n_0 = \frac{\nu \cdot N_A}{V}$. Ввівши поняття молярної концентрації $C = \frac{\nu}{V}$, формула набуде такого вигляду:

$$\sigma = \cdot \alpha \cdot C \cdot Z \cdot F \ (v_+ + u_-). \tag{6.2.10}$$

Величина $C \cdot z = \eta$ називається еквівалентною концентрацією і вимірюється в *моль*/*м*^{3}, а величину, яку позначають $\Lambda = \frac{\sigma}{\eta}$ – еквівалентною провідністю.

6.3 Електроліз. Закони Фарадея для електролізу

Проходження постійного електричного струму через електроліти зумовлює особливі хімічні реакції. ***Електролізом називається явище виділення речовин на електродах внаслідок проходження постійного електричного струму через електроліт, яке супроводжується окисно-відновними реакціями.*** Уперше це явище спостерігав у 1800 році англійський хімік і фізик Гемфрі Деві (1778-1829), проводячи серію дослідів по розкладанню різних речовин при пропусканні через них електричного струму.

Оскільки у підрозділі 6.1 було розглянуте питання електролітичної дисоціації натрієвої солі $NaCl$ на катіони Na^+ та аніони Cl^-, то на прикладі такого електроліту буде простіше пояснити явище електролізу. Якщо електроди є нерозчинними або хімічно інертними відносно даного електроліту (Pt, Au, Ir, графіт тощо), то при електролізі вони лише виконують роль передавачів електронів. В електричному полі, створеному такими електродами – від'ємним катодом та додатним анодом, виникне електричний струм, тобто впорядкований рух йонів. Катіони Na^+, підходячи до від'ємного катоду, приєднують до себе електрон і тим самим стають нейтральними атомами натрію, тобто відбувається хімічний процес відновлення. На аноді йде зворотний процес – додатний анод "відриває" від аніонів Cl^- надлишковий електрон і при цьому утворені нейтральні атоми хлору об'єднуються в молекулярний хлор – Cl_2. Утворені нейтральні натрій та хлор є первинними продуктами електролізу,який можна записати у вигляді такої реакції:

$$2NaCl \rightarrow (\text{електроліз})\ 2Na + Cl_2\,. \qquad (6.3.1)$$

Нейтральні атоми осідають на електродах. Якщо ж вони хімічно активні, то біля електродів протікають вторинні реакції, які призводять до розкладання води. Так, при розрядці йона Na^+ на катоді виділяється атом Na, який бурно реагує з водою:

$$Na + H_2O \rightarrow Na(OH) + H\,. \qquad (6.3.2)$$

В результаті натрій йде в розчин, де він знову іонізується, а на катоді виділяється газоподібний водень.

Щодо кількісних співвідношень електролізу, то їх експериментально у вигляді двох законів електролізу встановив у 1836 Фарадей.

Перший закон Фарадея – ***маса речовини*** m***, яка виділяється під час електролізу на електроді, прямо пропорційна заряду*** q***, що пройшов через електроліт:***

$$m = k \cdot q, \tag{6.3.3}$$

де k – коефіцієнт пропорційності, який отримав назву електрохімічного еквівалента речовини, яка виділилася на електроді. Він чисельно дорівнює масі речовини даного хімічного складу, що виділяється при електролізі зарядом $q = 1\ Кл$.

У випадку постійного електричного струму силою I за час t через електроліт пройде заряд $q = I \cdot t$, а тому рівняння (6.3.3) можна записати у такому вигляді:

$$m = k \cdot I \cdot t. \tag{6.3.4}$$

Якщо струм змінний $I = I(t)$ тільки за величиною, то слід визначати масу dm речовини, яка виділяється при електролізі за час dt протягом якого струм можна вважати постійним, тобто

$$dm = k \cdot I \cdot dt. \tag{6.3.5}$$

Тоді загальна маса речовини, яка виділяється під час електролізу протягом часу t, дорівнює означеному інтегралу:

$$m = k\int_0^t I(t)dt. \tag{6.3.6}$$

Зрозуміло, що формула (6.3.6) справедлива лише для струму незмінного за напрямом.

Другий закон Фарадея – ***електрохімічні еквіваленти речовин прямо пропорційні їх хімічним еквівалентам (відношення молярної маси M до валентності z речовини)*****:**

$$k = \frac{1}{F} \cdot \frac{M}{z}, \qquad (6.3.7)$$

де F – стала для всіх елементів величина, яка називається числом Фарадея. Фізичний зміст якого можна встановити з об'єднаного закону Фарадея, підставляючи (6.3.7) у (6.3.3):

$$m = \frac{1}{F} \cdot \frac{M}{z} \cdot q. \qquad (6.3.8)$$

Якщо припустити, що на електроді виділяється маса речовини m, яка чисельно рівна хімічному еквіваленту $\frac{M}{z}$ то з (6.3.8) випливає, що $F = q$. Отже, число Фарадея чисельно дорівнює електричному заряду, під час проходження якого через електроліт виділяється на електроді 1 моль одновалентної речовини. Дослідним шляхом було встановлено, що $F = 9{,}65 \cdot 10^4\ Кл/моль$. Оскільки в одному молі речовини число молекул дорівнює сталій Авогадро N_A, то при електролізі для виділення одного моля одновалентної речовини необхідний електричний заряд рівний добутку елементарного заряду e на сталу Авогадро. Отже, число Фарадея зв'язане зі сталою Авогадро та елементарним електричним зарядом таким співвідношенням:

$$F = e \cdot N_A. \qquad (6.3.9)$$

Підставляючи в (6.3.9) значення елементарного заряду та сталої Авогадро, дістанемо:

$$F = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ Кл \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23}\ \frac{1}{моль} = 9{,}65 \cdot 10^4\ \frac{Кл}{моль}.$$

6.4 Застосування електролізу

Уперше практичне застосування електролізу можна датувати 1807 роком коли Г. Деві електролізом отримав натрій та калій, що складає основний принцип сучасної електрометалургії. Тому питання практичного застосування електролізу почнемо з розгляду електрометалургії.

Електрометалургія – добування металів за допомого електролізу. Наприклад, тепер усе світове виробництво алюмінію здійснюється електролізним методом з розплаву глинозему Al_2O_3.

Електролізне відновлення окису алюмінію, розчиненого в розплаві на основі електроліту, здійснюється при температурі 950-970°С у спеціальних жаростійких електролізних ваннах, так званих електролізерах. Сила струму у сучасних електролізерах становить 150000 *А* при напрузі 4-5 *В*, тобто добування алюмінію електролізним способом надзвичайно енергомістке виробництво. Принципова схема такого електролізера для отримання алюмінію показана на рис.6.4.1. Електролізер складається з товстостінної стальної ванни обкладеної зсередини вогнетривкою цеглою (шамоткою) з поверх накладеними вуглецевими блоками, які виконують роль катода. Анодами в такому електролізері є вугільні блоки масою біля тони кожний,оскільки при електролізі вони згорають в атмосфері кисню, який виділяється при електролізі глинозему. Відновлення алюмінію відбувається за наступною реакцією:

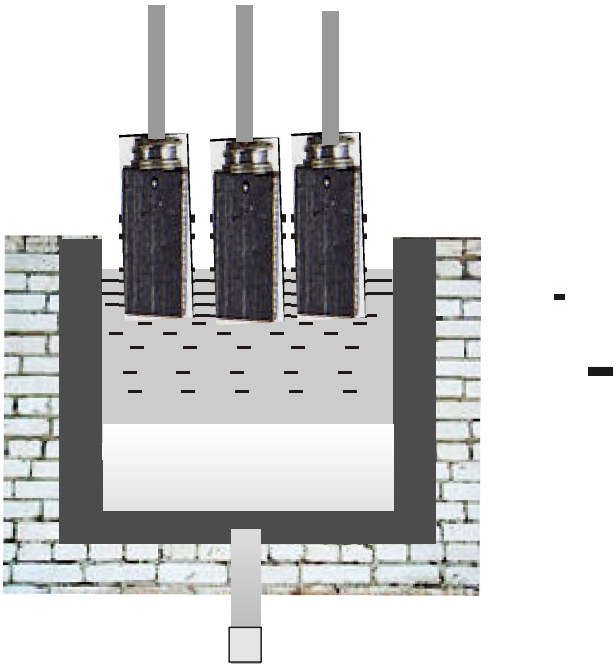


Рисунок 6.4.1

$$Al_2O_3 + 2C \rightarrow 2Al + CO_2 + CO. \qquad (6.4.1)$$

Виділений таким чином алюміній у рідкому стані періодично забирається з електролізеру. Щодо вуглекислого газу як вторинного

продукту електролізу, то він випускається в атмосферу, спричинюючи її забруднення. Тому в даний час розробляються та впроваджуються технології інертних анодів, які не вступають у реакцію з продуктами електролізу і відновлення алюмінію відбувається за такою реакцією:

$$Al_2O_3 \rightarrow 2Al + 3/2\,O_2. \qquad (6.4.2)$$

Тобто первинним продуктом такого електролізу є кисень і, до речі, один електролізер може виробити такий же об'єм кисню як 70 гектарів лісу.

З іменем італійського медика і фізика Луіджі Гальвані (1737-1798) пов'язана назва джерел струму (***гальванічні елементи***) та ***гальванотехніка*** – розділу електрохімії, яка займається практичними питаннями застосування явищ електролізу. Навіть на виробництвах окремі цехи називають гальванічними, оскільки в них встановлено обладнання з використанням електролітів, так звані гальванічні ванни і гальванічні лінії (рис. 6.4.2). Такі лінії дають можливість у широкому масштабі здійснювати особливі процеси гальванопластики та гальваностегії.

Рисунок 6.4.2

Ще у 1837 році німецький та російський фізик Б.С.Якобі (1801-1874) вперше розробив метод відтворення форми предметів методом осадження на копії цих предметів шару металу електролізним способом і цей метод отримав назву ***гальвнопластика*** **(*гальвано-*** та **з** грецького plastike-***ліплення***, мистецтво створення скульптурних зображень). Для цього спочатку виготовляють рельєфну копію, зліпок з парафіну або пластиліну з необхідного для гальванопластики предмету. Наприклад, це може бути рідкісна монета чи медаль тощо. Потім цей зліпок роблять електропровідним, покриваючи його поверхню тонким шаром графіту і занурюють в гальванічну ванну. Якщо електролітом є розчин $CuSo_4$, який дисоціює на іони Cu^{++} та $S0^{--}{}_4$, то при електролізі поверхня катоду, тобто графіт, яким покрита копія необхідного предмету, буде покрита шаром

відновленої міді і тим самим отримаємо рельєфну металічну копію даного предмету. Ця металева копія легко відділяється від зліпку з парафіну або пластиліну. Подібним за своїм фізичним процесом до гальванопластики є ***гальваностегія*** (гальвано- та з грецької *stege* − покриття), тобто покриття електролізним методом тонким шаром одного металу поверхні іншого металу. Але якщо в гальванопластиці утворений завдяки електролізу шар металу легко відділяється від предмету, то завданням гальваностегії є утворення шару необхідного металу міцно скріпленого з необхідним предметом. Тому при підготовці металічного предмету, який планується покрити гальванічним методом шаром іншого металу, значна увага відводиться попередній підготовці поверхні цього предмету (очистці, обезжирюванні тощо). В гальваностегії цей предмет в гальванічній ванні є катодом. Залежно від складу електроліту можна отримувати різні покриття, які захищають метал від корозії (нікелювання, хромування) і навіть проводити позолочування.

Звичайно, практичне застосування електролізу далеко не обмежується наведеними вище прикладами. Так, можна було б ще вказати на електроліз води, при якому на катоді виділяється водень, а на аноді кисень. До речі, електроліз води до недавнього часу був основним методом добування важкої води, у якій замість водню H_1^1 міститься ізотоп водню H_1^2 – так званий дейтерій. Оскільки рухливість йонів дейтерію менша звичайних йонів водню, то концентрація важкої води в електроліті підвищується і в результаті можна отримати воду з великим вмістом дейтерію.

Ще одне електрокінетичне явище, яке набуло широкого практичного застосування – це ***іонофорез*** або ***електрофорез*** (від ***електро-*** та грецького ***phoresis-*** перенесення). Дане явище полягає у переміщенні частинок дисперсної фази в рідкому або газоподібному середовищі під дією зовнішнього електричного поля. Електрофорез найбільш відомий як метод медичної фізіотерапії. Для цього лікарську речовину у вигляді розчину наносять на прокладки електродів і під дією електричного поля ліки приникають в організм людини через шкірні покриви. Перевагою терапевтичного електрофорезу є те, що ліки безпосередньо вводяться у хворі місця без дії на весь організм.

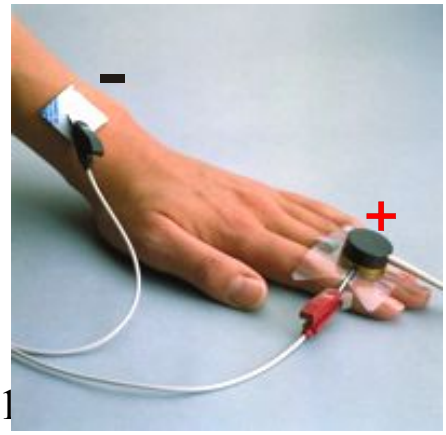


Рисунок 6.4.3

Наприклад, після забиття пальців почався їх локальний запальний процес який можна вилікувати за допомогою електрофорезу, накладаючи на вражені частини руки електроди насичені необхідними ліками як це вказано на рис.6.4.3.

6.5 Хімічні джерела струму

Раніше було показано, що при контакті різнорідних металів між ними виникає так звана контактна різниця потенціалів, яка за певних умов може бути джерелом електричного струму. А саме, необхідно скласти електричне коло з двох спаїв різнорідних металів і за умови їх різної температури у такому колі виникає електричний струм. Між електролітом та зануреним у нього металічним провідником теж виникає різниця потенціалів, яка залежить від природи металу та електроліту. Отже, якщо в електроліт занурити два різнорідні метали, то між ними виникне різниця потенціалів. З'єднавши ці метали провідником отримаємо замкнуте коло, у якому виникне електричний струм. Оскільки метали занурені в електроліт вступають з ним у хімічні реакції, то у даному випадку енергія таких хімічних реакцій безпосередньо перетворюється в електричну енергію. Таким чином хімічне джерело струму – це сукупність таких хімічних елементів, енергія реакції яких безпосередньо перетворюється в електричну енергію. Розрізняють два види хімічних джерел струму: оборотні і необоротні. В оборотних хімічних джерелах струму продукти реакцій можуть бути відновлені пропусканням струму у зворотному напрямі і такі хімічні джерела струму називаються акумуляторами. В необоротних хімічних джерелах струму відновлення продуктів реакцій утруднене або практично неможливе. Такі джерела струму називаються гальванічними елементами, які знайшли надзвичайно широке застосування і в даний час. Щорічно у світі випускають десятки мільярдів гальванічних елементів – батарейок. Щоб зрозуміти принцип роботи гальванічних елементів спочатку з'ясуємо механізм виникнення різниці потенціалів між електролітом та зануреним в нього металом, який виконує роль електрода (додатного або від'ємного) у хімічному джерелі струму. Виникнення цієї різниці потенціалів, яку називають електродною, вперше пояснив німецький фізик Вальтер Нернст (1864-1941). Для прикладу розглянемо цинковий електрод у водному розчині солі $ZnSO_4$ цього ж металу. Оскільки у вузлах кристалічної ґратки цинку знаходяться його

додатні йони, то полярні молекули води своїм «від'ємним кінцем» захоплюють йони цинку і переводять їх в розчин, в якому вже є такі самі йони цинку утворені внаслідок електролітичної дисоціації $ZnSO_4$. Одночасно з процесом розчинення цинку відбувається зворотний процес – відкладання цих йонів на цинковому електроді. В залежності від того, який з цих процесів переважає у рівноважному стані, електрод отримує негативний або позитивний електричний заряд. При цьому відносно електроліту метал матиме певний потенціал, який називають ***електродним потенціалом.*** Так, для цинку його заряд буде негативним, а електроліту – позитивним. На межі цинку та розчину утворюється подвійний електричний шар, електричне поле якого напрямлене від електроліту до металу і протидіє переходу позитивних йонів цинку в електроліт (порівняйте з подвійним електричним шаром біля поверхні металу і як цей подвійний шар протидіє виходу електронів з поверхні металу). Виміряти абсолютне значення електродного потенціалу практично неможливо. Дійсно, щоб виміряти цю різницю потенціалів ми повинні в електроліт поруч з даним електродом занурити інший електрод. Але тоді електровимірювальний прилад покаже електродну різницю потенціалів для цих двох металів, занурених в один і той же електроліт.

Очевидно, що різниця потенціалів між двома металевими електродами залежить як від їх природи, так і від природи і концентрації електроліту, в який вони занурені. Тому на практиці для зручності розрахунків електродний потенціал будь-якого металу визначають відносно так званого нормального ***водневого електрода***, який приймають як стандартний.

Основною частиною такого електрода є платинова пластинка. Платина, золото та інші благородні метали мають міцну кристалічну ґратку і їх катіони не переходять в розчин з металу. Проте, якщо на поверхні такого металу є абсорбовані речовини які здатні окислюватись або відновлюватись, то даний метал стає електрично активним електродом. У водневому електроді на поверхні платини адсорбується водень, який вводять у посуд, де в розчині сульфатної кислоти знаходиться платинова пластинка (рис.6.5.1). Проникненню повітря
в систему водневого електрода не допускає водяний затвор. На поверхні водневого електроду встановлюється рівновага: $H_2 \leftrightarrow 2H \leftrightarrow 2H^+ + 2e^-$. В результаті цих процесів на межі між

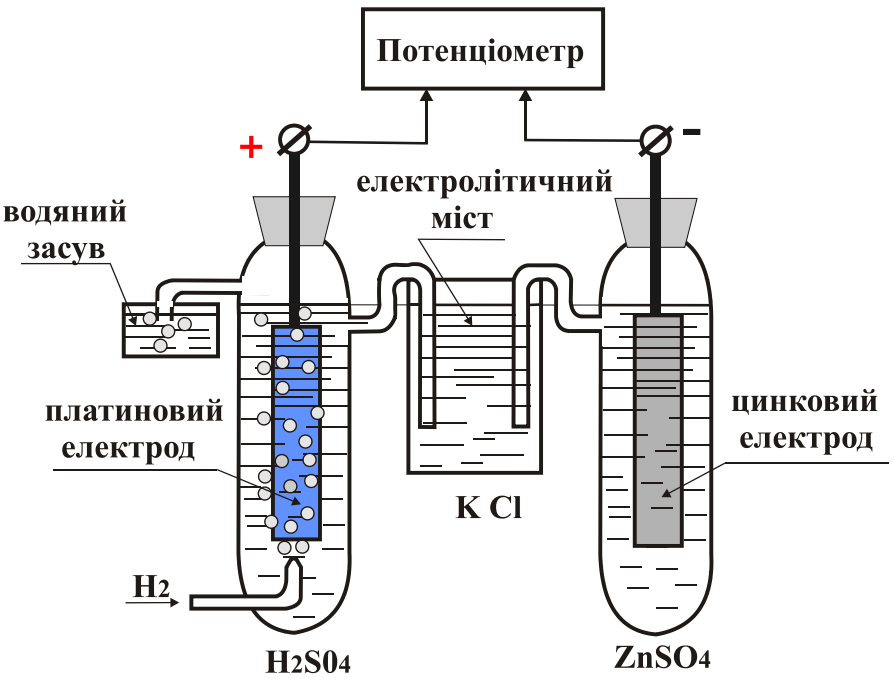


Рисунок 6.5.1

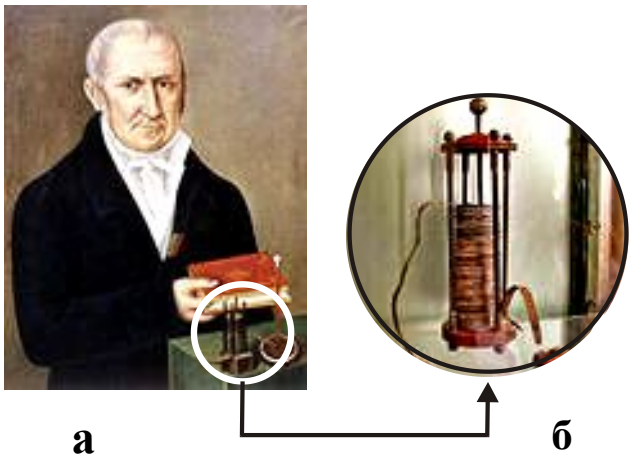
платиною та розчином йонів водню утворюється подвійний електричний шар. *Електродний потенціал* водневого електроду для порівняння з потенціалами інших електродів вважається нульовим. Якщо відносно водневого електроду необхідно визначити електродний потенціал іншого металу, то для цього використовують так званий електролітичний міст, який здійснює електричний контакт між двома електродами, наприклад, через розчин KCl (рис.6.5.1). Вимірювання різниці потенціалів між електродами здійснюється потенціометром.

У таблиці 6.5.1 наведено значення електродних потенціалів деяких металів відносно водневого електрода.

Таблиця 6.5.1

Електрод	Е.Р.С. (вольти)	Електрод	Е.Р.С. (вольти)	Електрод	Електрод
Li	-3,045	Zn	-0,76	Ag	+0,97
K	-2,92	Cr	-0,74	Hg	+0,85
Ca	-2,90	Fe	-0,44	Pt	+1,19
Na	-2,71	Cd	-0,40	Au	+1,50
Mg	-2,36	Ni	-0,25		
Al	-1,66	Pb	-0,126		
Mn	-1,18	H_2	-0,00		
		Cu	+0,34		

Користуючись такими даними можна визначити електрорушійну силу гальванічного елемента складеного з відповідних пар металів. ***Перший гальванічний елемент*** був створений італійським фізиком Алессандро Вольта. Цей елемент, який ***отримав назву Вольтового стовпа,*** дійсно подібний до стовпчика, оскільки він з складених у стовпчик круглих пластинок міді та цинку, які є електродами.



а **б**

Рисунок 6.5.2

Електролітом у такому гальванічному елементі був розчин звичайної кухонної солі, якою просочували суконні прокладки між електродами. Тому художник на портреті Вольта (рис.6.5.2а) поруч з ним зобразив і його відкриття – Вольтів стовп. Такий стовпчик (рис.6.5.2б), виготовлений самим А.Вольта зберігається в музеї міста Комо (Італія), де народився і помер А.Вольта.

Принцип роботи Вольтового стовпа, як будь-якого іншого гальванічного елемента, полягає у тому, що енергія хімічних реакцій у таких елементах виділяється не у вигляді теплової, а електричної. А саме, якщо у звичайній хімічній реакції процеси окислення чи відновлення відбуваються в усьому об’ємі речовини, то в гальванічному елементі хімічні реакції окислення і відновлення просторово розділені. Електрони, які утворюються в результаті окислення на негативному електроді переходять через зовнішнє електричне коло (провідник, що з’єднує електроди) до позитивного

електрода, де приймають участь в реакції відновлення. Упорядкований рух електронів у зовнішній ділянці такого електричного кола і буде електричним струмом, який дає гальванічний елемент. Зрозуміло, що дія такого гальванічного елементу припиниться з вичерпанням реагуючих речовин.

Після відкриття А.Вольта першого гальванічного елемента починається ера створення нових хімічних джерел струму. Так, у 1836 році англійський хімік Джон Даніель удосконалив елемент Вольта, помістивши цинковий і мідний електроди в розчин сульфатної кислоти і така конструкція отримала назву ***елемента Даніеля***. Але найбільш революційним кроком у створенні хімічних джерел струму було створення у 1856р. французьким інженером Ж.Лекланше (1839-1882) маргано-цинкового елемента, відомого як ***елемента Лекланше***. У цьому елементі анодом є двоокис марганцю MnO_2 в суміші з графітом і катодом – металічний цинк Zn, а електролітом – розчин хлориду амонію NH_4Cl. Спочатку елементи заповнювались рідким електролітом, а потім електроліт почали загущувати крохмалистими речовинами, що запобігало витіканню електроліту і тим самим започаткувало створення так званих сухих гальванічних елементів, які в побуті називають батарейками.

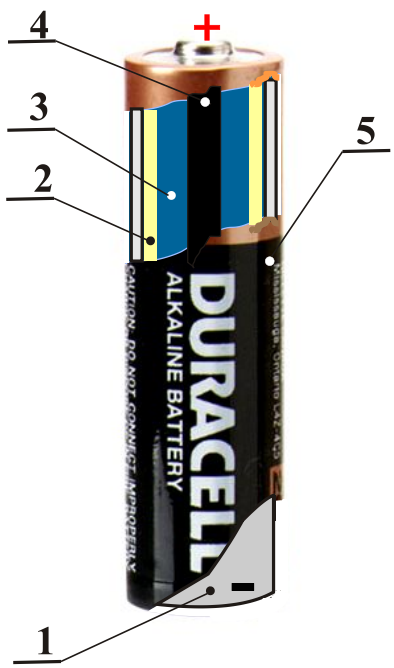


Рисунок 6.5.3

Елементи Лекланше більше 100 років були основними побутовими хімічними джерелами струму, але з 1998 року їх виробництво почало зменшуватись і почався випуск більш ефективних елементів з лужними електролітами (розчин гідроксиду калію – КОН). На рис. 6.5.3 показана схема сучасного лужного хімічного джерела електричного струму, де на його поверхні вказаний тип елемента (англ. alkaline battery – алкалоїдна, тобто лужна батарейка). Основним конструктивним елементом такої лужної батарейки є цинковий циліндр 1, який виконує роль від'ємного електрода. Цей циліндр заповнюється спресованою масою 3 двоокису марганцю MnO_2 в суміші з графітом та зволоженою загущеним на крохмалі розчином гідроксиду калію. Ця спресована маса є додатним електродом батарейки. Струм від

такого додатного електрода відводиться вугільним стержнем 4. Додатний та від'ємний електроди батарейки відділені сепаратором 2 – тонким шаром паперу з електролітною пастою, який запобігає безпосередньому контакту електродів, але не перешкоджає руху між ними вільних зарядів. Ззовні батарейка покривається захисною плівкою 5, на якій вказана назва батарейки та її основні електричні параметри.

Окреме місце серед хімічних джерел струму займає ***нормальний елемент Вестона***, який використовують як еталон електрорушійної сили і його вмикають в електричне коло лише для короткочасних вимірювань.

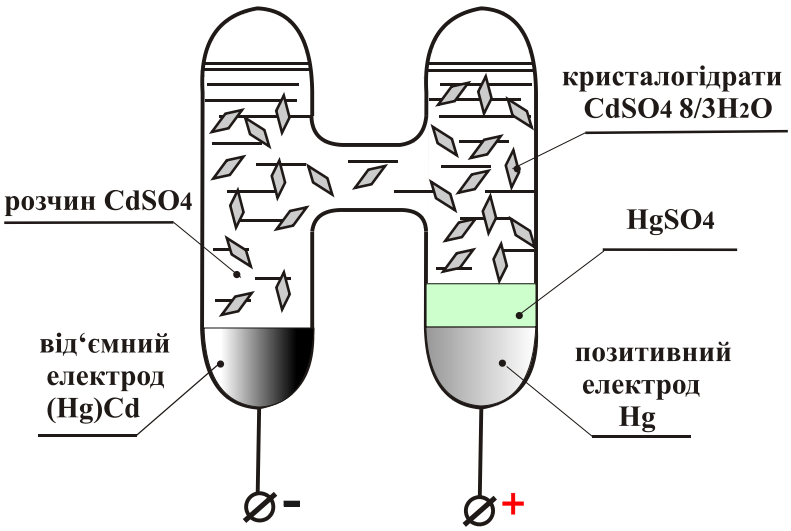


Рисунок 6.5.4

Винайдений у 1892 р. американським хіміком Едуардом Вестоном (1185-1936). Конструктивно цей гальванічний елемент виконаний у вигляді Н-подібних скляних трубок, в дно яких впаяні два платинові електроди (рис.6.5.4). Негативним електродом елемента Вестона є амальгама кадмію (розчин кадмію у ртуті), що знаходиться у насиченому розчині сірчанокислого кадмію $CdSO_4$ у якому містяться також кристалогідрати $CdSO_4 \cdot (8/3)H_2O$. Позитивним електродом є ртуть, що покрита пастою $Hg + Hg_2SO_4$. Цей елемент, на відміну інших гальванічних елементів, характерний високою стабільністю електрорушійної сили, яка становить 1,0183 B при $25^0 C$.

До 1970 року нормальний елемент Вестона був еталоном напруги. У даний час для еталону напруги застосовують ефект Джозефсона (англійський фізик, 1940р.) − особливе квантове явище, яке дає змогу отримати еталон напруги з точністю до $10^{-9} B$.

На відміну від гальванічних елементів, які є не відновлювальними джерелами електричного струму, ***акумулятори*** (з лат. збирач) здатні перетворювати накопичену хімічну енергію на електричну (під час розряджання), а електричну в хімічну (під час заряджання). Вперше у 1859 французький фізик Гастон Планте винайшов свинцево-кислотний акумулятор, який і в даний час використовується в автомобілях. Загальний вигляд сучасного свинцево-кислотного акумулятора з основаними елементами його будови показаний на рис. 6.5.5. Так, електрод 1 (ґратчаста пластинка металічного свинцю) є негативним полюсом акумулятора, а електрод 2 (спресований переоксид свинцю PbO_2) є додатним полюсом. Ці електроди (додатний та від'ємний полюси акумулятора) відокремлені один від одного сепаратором 3. Вся система електродів, занурених у розчин кислоти, знаходиться у вилитому корпусі 4 з полімерних матеріалів.

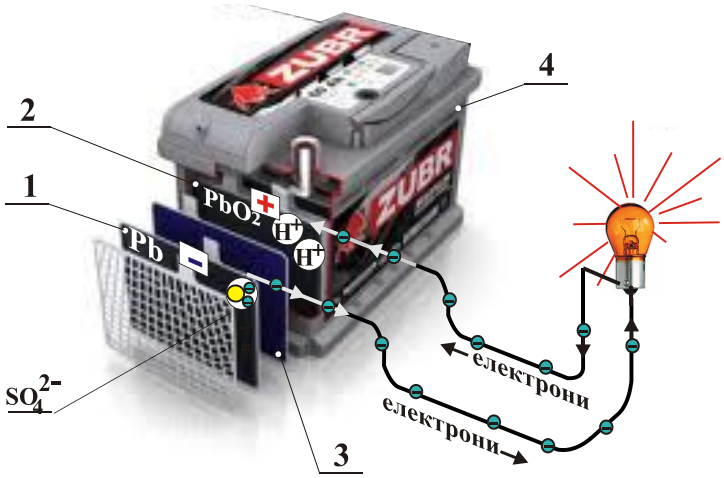


Рисунок 6.5.5

Механізм виникнення електрорушійної сили свинцевого акумулятора можна пояснити наступним чином.

Оскільки розчин сульфатної кислоти дисоціює на додатні йони водню H^+ та від'ємні іони сульфату SO_4^{2-}, то свинцевий електрод, приєднуючи йон сульфату SO_4^{2-}, утворює нейтральну молекулу сірчанокислого свинцю. Два електрони, які звільняються під часу такої реакції, надають цьому електроду негативний електричний заряд. Таку реакцію можна записати у вигляді:

$$Pb - SO_4^{2-} - 2\bar{e} - PbSO_4 . \qquad (6.5.1)$$

Другий електрод (переоксид свинцю), вступаючи в реакцію з йонами водню та сульфату, теж призводить до утворення

сірчанокислого свинцю, що може відбутись лише за умови приєднання двох електронів за такою схемою:

$$PbO_2 + 4H^+ + SO_4^{2-} + 2\bar{e} \rightarrow PbSO_4 + 2H_2O \,. \qquad (6.5.2)$$

За відсутності двох електронів реакція не відбудеться, а недостача двох електронів (двох від'ємних елементарних зарядів) на електроді з переоксиду свинцю еквівалентна додатному заряду цього електрода. Отже, за рахунок хімічних реакцій свинцевий електрод набуває від'ємного заряду, а електрод з переоксиду свинцю − додатного заряду, що і зумовлює електрорушійну силу такого акумулятора. Якщо з'єднати такі два електроди провідником, то в ньому виникне електричний струм – упорядкований рух електронів і якраз два електрони, які створюють негативний заряд свинцевого електрода переходячи по провіднику на електрод з переокису свинцю, зумовлюють реакцію (6.5.2) утворення сірчанокислого свинцю.

Початкова електрорушійна сила зарядженого кислотно-свинцевого акумулятора становить 2,7 *В*. Під час розрядження ЕРС швидко зменшується до 2,2 *В*, а потім повільно спадає до 1,85 *В*, після чого може наступити повна розрядка акумулятора, тобто раніше додатний та негативний електроди стають електрично нейтральними електродами з сірчанокислого свинцю. Щоб відновити попередню електрорушійну силу розрядженого свинцевого акумулятора, необхідно сірчанокислий свинець на відповідних електродах перетворити у свинець та його переоксид. Таке відновлення називається заряджанням акумулятора за допомогою постійного електричного струму, який пропускають через електроліт акумулятора. Для цього використовують так званий зарядний пристрій. Сучасні зарядні пристрої – це випрямлячі змінного струму з електронною системою керування процесом заряджання акумулятора. Додатний полюс зарядного пристрою з'єднується з анодним електродом, а негативний полюс – з катодним електродом акумулятора (рис.6.5.6).

При проходженні струму через електроліт акумулятора додатні два йони H^+ водню рухаються до катода, приєднуючи два електрони (від зарядного пристрою), нейтралізуються і вступають у реакцію

$$PbSO_4 + 2H \rightarrow Pb + H_2SO_4. \qquad (6.5.3)$$

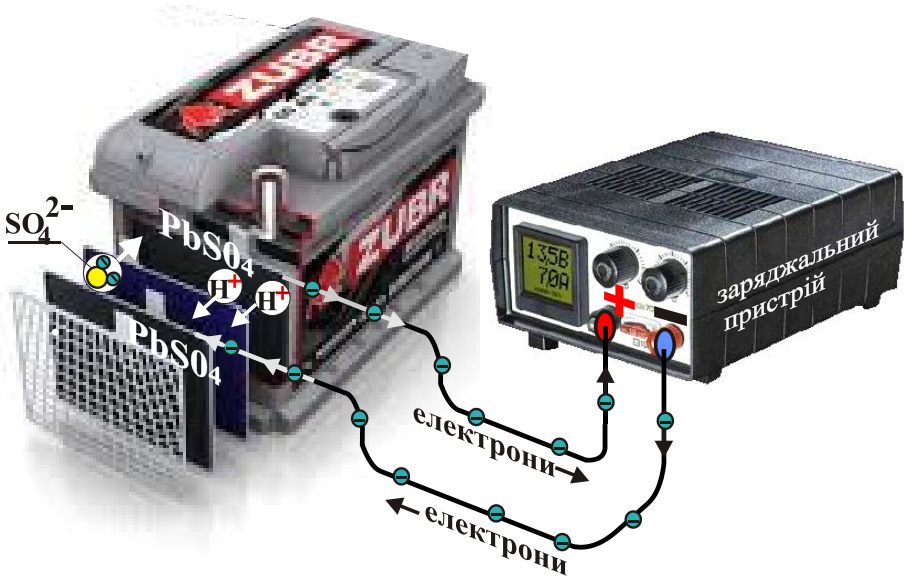


Рисунок 6.5.6

У той же час негативні йони SO_4^{2-} сульфату, досягають анода і нейтралізуються, віддаючи два електрони зарядному пристрою (електричне коло замкнуте) та вступають у реакцію

$$PbSO_4 + SO_4 \rightarrow Pb(SO_4)_2. \qquad (6.5.4)$$

Потім $Pb(SO_4)_2$ вступає у реакцію з водою:

$$Pb(SO_4)_2 \square 2H_2O \square \ PbO_2 \square 2H_2SO_4. \qquad (6.5.5)$$

Отже, у результаті таких реакцій катод стає чистим свинцем, а анод стає переоксидом свинцю – акумулятор заряджений і його можна використовувати як джерело електричного струму.

Важливою характеристикою акумулятора є його ємність, яка вимірюється в ампер-годинах. **Ампе́р-годи́на** — кількість електрики, яка проходить через переріз провідника або прилад протягом 1 год при незмінному струмі акумулятора в 1*А*. Позначається міжнародним знаком ***Ah*** або українським *А·год* (1 *А·год* дорівнює 3600 кулонам).

Сучасна промисловість випускає широкий асортимент свинцевих акумуляторів різної ємності. Наприклад, в автомобілях застосовують акумулятори ємністю 50÷100 *А·год*.

Кислотні акумулятори мають високу номінальну напругу (12 *В*), малий внутрішній опір та відносно високий К.К.Д. (до 0.85). Проте, невеликий термін служби, недостатня міцність та незадовільна робота при низьких і високих температурах обмежують їх застосування. Лужні акумулятори мають ряд переваг перед кислотними: вони міцніші, не бояться перевантажень, добре працюють у широкому інтервалі температур, невимогливі до виробничих умов. Основні їх недоліки: низькі К.К.Д. (до 60 %) і напруга (1,2;1,25;1,33 *В*).

До лужних акумуляторів належать залізо-нікелевий, кадмієво-нікелевий і срібно-цинковий акумулятори. Електролітом для таких акумуляторів є 20-30% розчин лугу KOH *і* $LiOH$. У залізо-нікелевого акумулятора негативним електродом є спресований порошок заліза з добавками меркурій перексиду (HgO_2), а позитивним електродом – $Ni(OH)_3$ (точніше, гідратований нікель оксид $Ni_2O_3 \cdot H_2O$ або HgO_2, $Li(OH)$).

У кадмієво-нікелевому акумуляторі замість заліза катодом є губчастий кадмій. У срібнево-цинковому акумуляторі катодом є цинк, а анодом – аргентум оксид (Ag_2O). Електрорушійна сила срібно-цинкових акумуляторів становить 1,85 *В* і вони мають високу ємність на одиницю маси і тому в останній час вони набувають все більшого застосування.

Одним з найбільш перспективних напрямів застосування акумуляторів є електромобілі. **Електромобіль** — автомобіль, що приводиться в рух одним або декількома електродвигунами з живленням від акумуляторів, а не двигуном внутрішнього згоряння. Підвидами електромобіля вважаються електрокар (вантажний транспортний засіб для руху на закритих територіях) і електробус (автобус з акумуляторною тягою). Не дивлячись на очевидні переваги електромобілів (їх екологічність) над іншими видами автомобільного транспорту, є ряд суттєвих факторів, що стримують їх масове виробництво. У першу чергу − це висока вартість електромобілів та порівняно малий пробіг від однієї зарядки акумуляторів. Крім цього, невеликі електромобілі спрощеної конструкції (електрокари, електронавантажувачі і т. д.) широко застосовуються для перевезення

вантажів на вокзалах, у цехах і великих магазинах, а також в атракціонах. У цьому випадку всі недоліки, зокрема і малий запас ходу, висока собівартість і маса, перекриваються перевагами: відсутністю шкідливих викидів. Так, на рис.6.5.7 показаний екскурсійний електробус "Мерседес" в дендропарку "Софіївка", м. Умань.

Якщо ж в загальному говорити про застосування акумуляторів, то без них важко уявити наш побут. Наприклад, всі мобільні телефони мають акумулятори і саме індустрія мобільних телефонів змусила фізиків та інженерів до пошуків нових ефективних акумуляторів. Дійсно, якщо використовувати лужні акумулятори, то їх розміри набагато перевершували би розміри самих телефонів. До речі, у 2013 р. відзначався 40-річний ювілей першого дзвінка по мобільному телефону. Перший мобільний телефон був масою 1,15 кілограма (це в основному маса акумулятора). Щодо джерел акумуляторів, які забезпечують роботи мобільних телефонів, то на зміну лужних акумуляторів прийшло їх нове покоління. Так, принципово новими акумуляторами є літій-полімерні акумулятори, де використовується явище переходу деяких полімерів в напівпровідниковий стан у результаті проникнення в них йонів електроліту, за рахунок чого виникає електрорушійна сила. Так само з часом будуть створені високоефективні акумулятори для електромобілів.

Рисунок 6.5.7

Крім вище розглянутих хімічних джерел струму (гальванічних елементів, акумуляторів) особливе місце займають так звані паливні елементи. ***Паливний елемент*** – електрохімічний пристрій, подібний до гальванічного елемента або акумулятора, але відрізняється тим, що речовина для електрохімічної реакції подається в паливний елемент ззовні. Тому паливні елементи на відміну гальванічних елементів чи акумуляторів не можуть зберігати електричну енергію. Паливні елементи здійснюють пряме перетворення енергії хімічної

реакції палива, яке поступає у паливний елемент в електричну, минаючи процеси горіння. Таким чином, час роботи паливного елемента обмежується часом подачі у нього палива. Можливі різні варіанти комбінацій палива та окиснювача. Так, водневий паливний елемент використовує водень в якості палива та кисень (зазвичай з повітря) як окиснювач. Схема сучасного воднево-кисневого паливного елемента показана на рис.6.5.8. У такому елементі використовується так звана полімерна протонопровідна мембрана, яка розділяє негативний та позитивний електроди паливного елементу. Внутрішня будова полімерної протонопровідної мембрани дає можливість пропускати через себе тільки додатні йони водню (тобто його ядра) і не пропускати електрони. Кожний електрод – це вугільна пластина (матриця) з нанесеним каталізатором.

На каталізаторі молекулярний водень, який підводиться як паливо до паливного елемента, дисоціює і втрачає електрони. Протони, у даному випадку додатні йони водню проходять через полімерну мембрану, а електрони переходять у зовнішнє електричне коло, оскільки мембрана не пропускає електрони. Пройшовши через мембрану додатні йони водню отримують із зовнішнього кола "свої втрачені" електрони і, стаючи нейтральними молекулами, вступають у реакцію з киснем, який підводиться до цього паливного елемента. У результаті продуктом такої реакції є вода.

На рис.6.5.8 реакції у воднево-кисневому паливному елементі ілюструються на прикладі реакцій двох молекул водню та однієї молекули кисню. Оскільки кінцевим продуктом роботи такого паливного елемента є вода, то з екологічної точки зору паливні

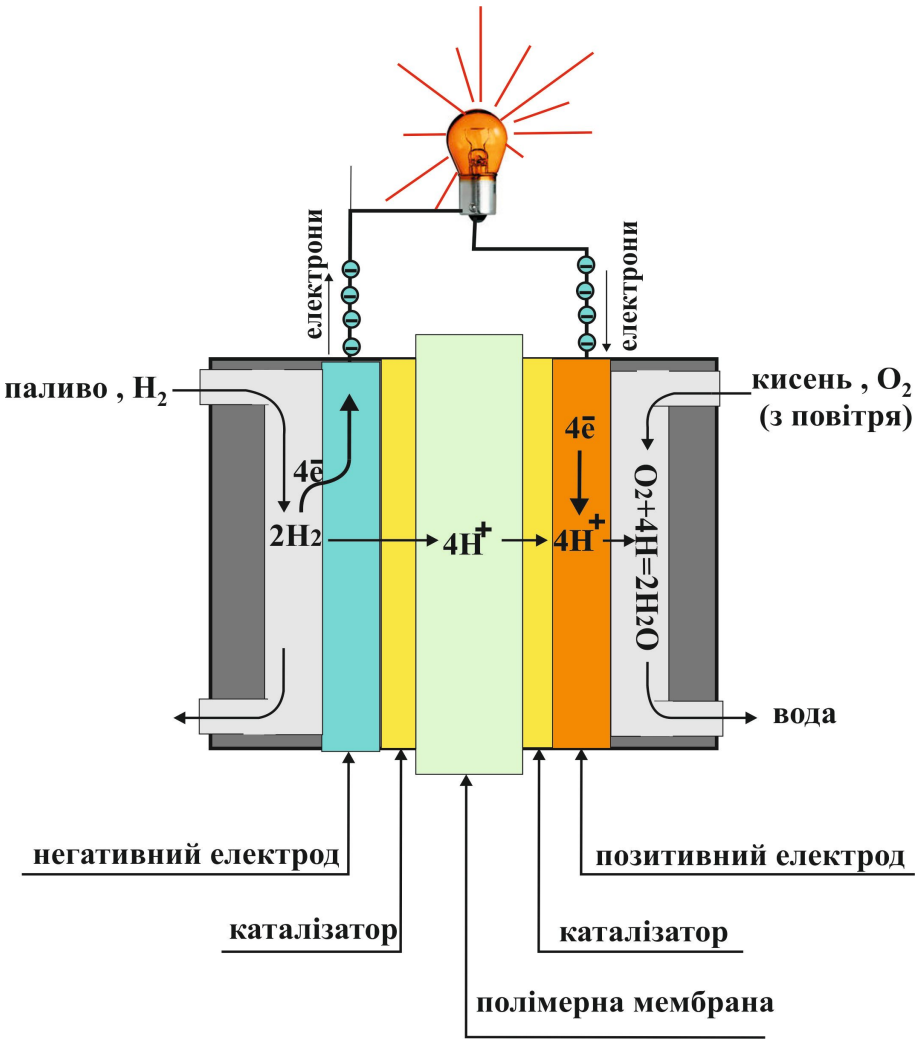


Рисунок 6.5.8

елементи стають одним із перспективних методів отримання електричної енергії, особливо для автомобілів. Крім того, якщо коефіцієнт корисної дії (К.К.Д.) теплових двигунів обмежується законами термодинаміки і К.К.Д. найкращих сучасних теплових двигунів не перевищує 40%, то для паливних елементів такого термодинамічного обмеження немає. Так, в існуючих паливних елементах від 60 до 70% енергії палива безпосередньо перетворюється на електрику. Невеликі розміри і маса паливних елементів дозволили використовувати їх у космічній техніці. У поєднанні з електродвигуном постійного струму паливний елемент буде ефективним джерелом рушійної сили екологічно чистого

автомобіля. Але поки що висока вартість паливних елементів обмежує їх широке практичне застосування.

5.6 Електрохімічні методи захисту металів від корозії

Під дією навколишнього середовища метали руйнуються, перетворюються в оксиди, гідрати оксидів та інші сполуки. Руйнування металів під дією навколишнього середовища називається корозією (з латинської *corrosio* – роз'їдання). Розрізняють два види корозії: хімічну та електрохімічну. Особливо великої шкоди завдає електрохімічна корозія, яка зумовлена взаємодією металу з водою або електролітами. Так, згідно оцінкам спеціалістів різних країн втрати металу за рахунок корозії становлять біля 20 млн. тон на рік, тому боротьба з корозією є важливою проблемою, для вирішення якої застосовують різні методи. Одним з таких методів є використання різноманітних захисних покриттів. Але у місцях навіть незначного порушення покриття починається процес корозії. Звичайно, на пошкоджену ділянку можна знову нанести захисне покриття. Але як бути у випадку металевих конструкцій, які практично неможливо піддати відновленню, наприклад, підземні трубопроводи. У таких випадках застосовують особливі електрохімічні методи. Оскільки металевий трубопровід знаходиться у вологій землі, яку можна вважати електролітом, то з'єднавши цей трубопровід з поруч закопаним іншим металічним провідником отримаємо гальванічний елемент. Якщо електродний потенціал такого провідника буде більш від'ємний ніж у електродного потенціалу металу трубопроводу, то руйнування буде зазнавати не трубопровід, а закопаний поруч з ним провідник. Такий провідник, який виготовляють з магнієвих, алюмінієвих, цинкових сплавів називають протекторним або жертовним, він ніби приносить себе в жертву заради врятування трубопроводу. На рис. 6.6.1 показаний трубопровід, який з'єднаний з розташованими поруч жертовними електродами. Однак, застосування такого ***протекторного методу***

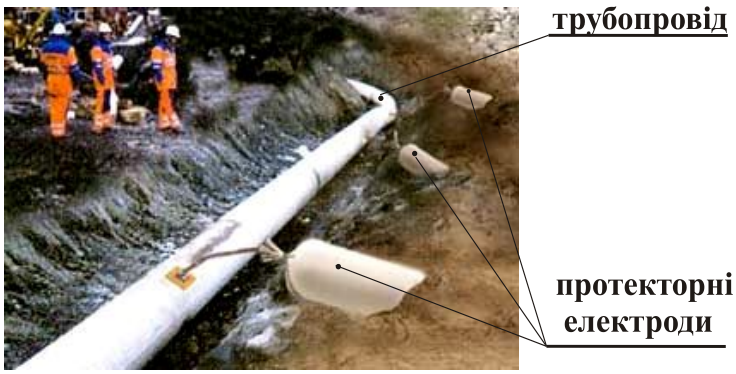


Рисунок 6.6.1

ефективне лише за низького електричного опору ґрунтів. Тому у даний час широке застування знаходить ***катодний захист*** від корозії, який практично вже не залежить від властивостей ґрунту. Принцип цього методу полягає у тому, що потенціал поверхні металу відносно ґрунту зсувається у сторону від'ємних значень за рахунок зовнішнього джерела електричного струму, у результаті чого залізо трубопроводу не переходить в розчин у вигляді додатних йонів. Для практичного здійснення катодного захисту використовують спеціальне обладнання, яке називається станцією катодного захисту. Така станція складається з джерела постійного струму, як правило випрямляча змінного струму, контрольних та регулюючих приладів і з'єднувальних кабелів.

Контрольні запитання

1 *У чому полягає явище електролітичної дисоціації*?
2 *Що характеризує коефіцієнт дисоціації і як в залежності від значення цього коефіцієнта розрізняють сильні та слабкі електроліти*?
3 *Як утворюється сольватна оболонка йона*?
4 *Як вводиться поняття рухомості йонів і який її фізичний зміст*?
5 *Який вигляд має закон Ома в диференціальній формі для електролітів*?
6 *У чому полягає явище електролізу і якими прикладами електрохімічних реакцій можна ілюструвати це явище*?
7 *Як формулюються та записуються перший і другий закони електролізу Фарадея*?
8 *Як вводиться поняття числа Фарадея і який його фізичний зміст*?
9 *Яке практичне застосування електролізу в:*
   - електрометалургії,
   - гальванопластиці,
   - гальваностегії,
   - медицині?
10 *Яка будова першого гальванічного елементу – "Вольтового стовпа"*?
11 *Як відбувалось удосконалення гальванічних елементів (на прикладах елементів Даніеля та Лекланше)*?

12 *Яку будову має найбільш поширений сучасний гальванічний елемент, так звана батарейка на 1,5 В*?
13 *Яка будова нормального елементу Вестона та яке його застосування*?
14 *Який принцип роботи свинцевого акумулятора*?
15 *Який механізм дії паливних елементів*?
16 *Як здійснюються гальванічні та катодні методи захисту металічних трубопроводів від корозії*?

Розділ 7 Електричний струм у газах

Мабуть найпершим електричним струмом у газах, яким скористалася людина, була атмосферна електрика у вигляді блискавки. Вогонь запалених блискавкою дерев зберігався в багаттях печер, даючи первісним людям перші блага.

Початок вивчення атмосферної електрики був закладений у 18 ст. американським вченим Бенджаміном Франкліном, з іменем якого пов’язане винайдення блискавковідводів. Інтенсивне вивчення струмів у газах розпочинається після створення штучних джерел електричного струму, що дало можливість встановити види газових розрядів, їх характеристики та основний механізм електропровідності.

7.1 Іонізація газів

На відміну від металів та електролітів, які є добрими провідниками електричного струму, гази за нормальних умов є практично діелектриками і причиною цьому є величезна різниця в концентраціях вільних зарядів. Так, якщо концентрація вільних зарядів у провідниках, наприклад, в металах є величиною порядку $10^{22}\,см^{-3}$, то в газах, для прикладу у повітрі, за нормальних умов вона не перевищує $10^{3}\,см^{-3}$. Оскільки молекули газу складаються з нейтральних атомів, то все ж таки звідкіля у газі є незначна концентрація вільних зарядів і яка їх природа. Причиною цього є явище іонізації – відрив електрона від атома або молекули у результаті чого утворюється два вільних заряди – позитивний йон та електрон (від’ємний заряд) і цей електрон може бути захопленим молекулою у результаті чого вона стає від'ємним йоном. За нормальних умов, згідно розподілу Максвелла молекул за швидкостями, є незначна кількість "швидких" молекул, які здатні іонізувати своїх "повільних" сусідів. Крім того, слабке радіоактивне випромінювання, так званий радіоактивний космічний фон, також

зумовлює незначну іонізацію газів (у тому числі молекул газів повітря).

Зрозуміло, що для іонізації молекули необхідно виконати роботу і ця робота (позначається A_i і вимірюється в електрон-вольтах) називається роботою іонізації. Величина роботи іонізації залежить від хімічної природи газу та енергетичного рівня електрона в атомі. Після видалення з атома одного електрона зв'язки ядра з електронами що залишились зростають, відповідно зростає робота їх виходу. Наприклад, щоб відірвати з зовнішньої електронної оболонки атому азоту (N) лише один електрон, і тим самим утворити позитивний йон N^+, потрібна робота 14,5 *eB*. Для відриву наступного електрона, тобто утворення йона N^{++}, знадобиться вже більша робота, яка становить 29,5 *eB*. Оскільки робота виходу здійснюється частинками які "бомбардують" нейтральні молекули газу і виривають з них електрони, то роботу зручно подавати через потенціал іонізації φ_i. За взірець бомбардуючої частинки беруть електрон і тоді ***потенціалом іонізації*** φ_i ***називається та різниця потенціалів, яку повинен пройти електрон у прискорюючому електричному полі щоб його енергія була рівна роботі йонізації***, ***тобто*** $A_i = e \cdot \varphi_i$***, отже***

$$\varphi_i = \frac{A_i}{e} . \qquad (7.1.1)$$

Одночасно з процесом іонізації в газах відбувається процес рекомбінації (молізації) йонів у нейтральні атоми.

7.2 Несамостійний газовий розряд

Проходження електричного струму через гази називається газовим розрядом і одним з його видів є несамостійний розряд, де сама назва вказує на його механізм, тобто відбувається у результаті дії зовнішнього іонізатора.

Так, якщо за нормальних умов газ є практично діелектриком, то за схемою вказаною на рис.7.2.1а електричного струму в такому колі не буде (дві пластини знаходяться у повітрі і під'єднані до джерела струму). Якщо ж тепер у простір між пластинами внести, наприклад,

запалений сірник, то у колі виникне електричний струм, який фіксує гальванометр (рис.7.2.1б). Зрозуміло, що причиною цього є термічна іонізація – внаслідок нагрівання газу кінетична енергія теплового руху молекул газу стає достатньою для їх іонізації. Кількісною характеристикою іонізації є число пар йонів Δn_i, які виникають під дією іонізатора за одиницю часу в одиниці об'єму газу. Одночасно з процесом іонізації відбувається процес рекомбінації і, відповідно, число рекомбінованих йонів за одиницю часу в одиниці об'єму позначимо Δn_r. Зрозуміло, що для рекомбінації потрібна "зустріч" двох йонів протилежних знаків і ймовірність такої зустрічі пропорційна як числу позитивних, так і негативних йонів. Тому число Δn_r рекомбінованих йонів за одиницю часу в одиниці об'єму пропорційне квадрату числа n пар йонів в одиниці об'єму:

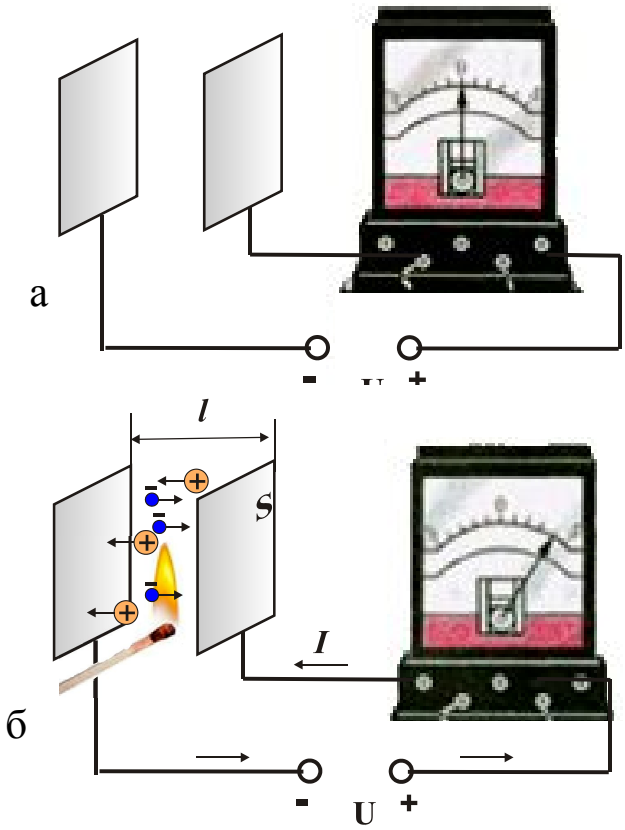


Рисунок 7.2.1

$$\Delta n_r = r\, n^2, \tag{7.2.1}$$

де r – коефіцієнт пропорційності.

У рівноважному стані число йонів, які виникають і рекомбінують, є однаковим, тобто

$$\Delta n_i = r\, n^2, \tag{7.2.2}$$

звідки

$$n = \sqrt{\frac{\Delta n_i}{r}}. \tag{7.2.3}$$

Отже, запалений сірник або інший іонізатор за одиницю часу в одиниці об'єму створює Δn_i пар йонів і в рівноважному стані стільки ж пар йонів рекомбінують. А тепер при запаленому сірнику, як вказано на рис.7.2.1б, подамо напругу на пластини і тоді ті йони які не встигли рекомбінувати зумовлять електричний струм. Нехай при цьому за одиницю часу з одиниці об'єму газу для забезпечення струму вибуває Δn_j пар йонів. Оскільки об'єм газу, де відбувається його несамостійний розряд (рис.7.2.1) становить $V = S \cdot l$, то кожну секунду до електродів надходить $\Delta n_j \cdot S \cdot l$ пар йонів. Тоді сила струму *I* в колі дорівнює:

$$I = q \Delta n_j S l, \tag{7.2.4}$$

де q – заряд йона.

Оскільки густина струму визначається відношенням $J = I/S$, то

$$\Delta n_j = \frac{J}{q l}. \tag{7.2.5}$$

Отже, загальне число пар йонів Δn_i, які виникають у рівноважному стані, дорівнює сумі числа рекомбінованих йонів Δn_r та числа Δn_j, які зумовлюють електричний струм:

$$\Delta n_i = \Delta n_r + \Delta n_j. \tag{7.2.6}$$

Підставивши у (7.2.6) вирази (7.2.2) та (7.2.5), приходимо до співвідношення

$$\Delta n_i = r n^2 + \frac{J}{q l}. \tag{7.2.7}$$

За аналогією струмів в електролітах густина сили струму в газах буде дорівнювати:

$$J = qn(u_+ + u_-)E, \tag{7.2.8}$$

де u_+ та u_- – рухливість додатних та від'ємних йонів. Таким чином, згідно співвідношення (7.2.8), густина струму несамостійного газового розряду повинна бути пропорційна напруженості електричного поля, тобто повинен виконуватись лінійний закон Ома. Але така лінійна залежність виконується лише у випадку електричних полів за яких густина струму буде дуже малою, а це значить що доданком $\frac{J}{q\,l}$ порівняно з rn^2 можна знехтувати, тобто можна вважати, що втрата йонів з міжелектродного простору відбувається в основному за рахунок рекомбінації. Тоді співвідношення (7.2.7) переходить в (7.2.2), так що для рівноважної концентрації електронів отримуємо вираз (7.2.3). Підставивши це значення n у формулу (7.2.8), отримаємо:

$$J = q\sqrt{\frac{\Delta n_i}{r}}(u_+ + u_-)E. \tag{7.2.9}$$

При подальшому збільшенні напруженості електричного поля всі йони будуть досягати електродів не встигаючи рекомбінувати і тому у виразі (7.2.7) доданком $r\,n^2$, який визначає рекомбінацію йонів, можна знехтувати. Отже, співвідношення (7.2.7) буде мати такий вигляд:

$$\Delta n_i = \frac{J}{q\,l}. \tag{7.2.10}$$

Звідси значення густини струму, який створюється всіма йонами утвореними іонізатором (запаленим сірником) у стовпчику газу з одиничною площею поперечного перерізу, дорівнює:

$$j = q\,\Delta n_i l. \tag{7.2.11}$$

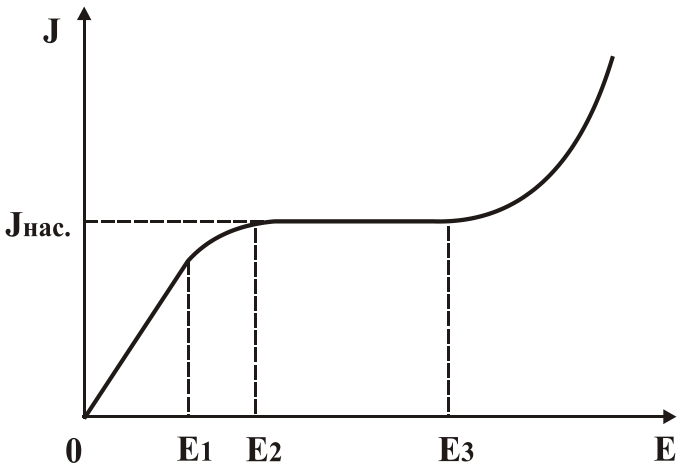


Рисунок 7.2.2

Тобто ця густина струму є найбільшою за даної інтенсивності іонізатора та заданої відстані l між електродами і вона називається густиною струму насичення.

Залежність густини струму несамостійного розряду в газах залежно від напруженості електричного поля ілюструє рис. 7.2.2, де спочатку зі зміною напруженості поля до деякого значення E_1 зміна струму згідно рівняння (7.2.9) відбувається за лінійним законом. Далі, при поступовому збільшенні напруженості до значення E_2, залежність сили струму від напруженості поля має нелінійний характер, а в подальшому, коли всі йони утворені іонізатором досягають електродів, наступає струм насичення, який залишається сталим до збільшення напруженості до "особливого" значення E_3. Особливість такого значення напруженості електричного поля полягає у тому, що за даних умов створені зовнішнім іонізатором електрони встигають за час свого вільного пробігу набути енергії завдяки електричному полю щоб, зіткнувшись з нейтральною молекулою, викликати її іонізацію (на відміну від електронів додатні йони не встигають набути такої енергії). Таким чином відбувається лавиноподібне зростання числа йонів, що зумовлює різке зростання струму газового розряду, який все ж таки залишається несамостійним. Дійсно, якщо припинити дію іонізатора (на рис.7.2.1 запаленого сірника), то розряд продовжується до тих пір, поки всі електрони (первинні та вторинні) не досягнуть електродів і струму не буде.

7.3 Самостійний газовий розряд

Сама назва такого виду газового розряду вказує на те, що для нього вже не потрібна дія зовнішнього іонізатора, процеси у такому газовому розряді самі забезпечують утворення йонів. Механізм таких

процесів може бути різним, але в їх основі лежать наступні фізичні явища:

- *зіткнення електронів з молекулами* можуть мати пружний та непружний характер. У випадку пружного удару сумарна кінетична енергія частинок залишається без змін і ніякої іонізації при цьому не відбувається. За непружного удару електрон не іонізуючи молекулу може перевести її у збуджений стан, тобто перевести електрони молекули на вищі енергетичні рівні, що згодом призведе до випромінювання такою молекулою світла. Якщо ж електрон володіє достатньою енергією, то за непружного удару він "виб'є" електрон з нейтральної молекули, тобто зумовить її іонізацію;
- *фотоіонізація* – явище іонізації молекули під дією світла за умови, що енергія фотона достатня для цього процесу. Енергія фотонів видимого світла недостатня для фотоіонізації і лише ультрафіолетове та інше випромінювання більш високих частот може здійснити фотоіонізацію. У випадку самостійного газового розряду збуджені молекули можуть самі випромінювати фотони, які здатні іонізувати наступні нейтральні не збуджені молекули;
- *вторинна електронна емісія* – випускання електронів поверхнею тіла під дією ударів електронів або йонів;
- *автоелектронна емісія* – випускання електронів поверхнею металу у тому випадку, коли біля поверхні металу створюється електричне поле великої напруженості.

В залежності від того, яке з цих явищ визначає несамостійну провідність газів можна виділити окремі найбільш характерні види газових розрядів, наприклад, тліючий розряд.

7.4 Тліючий розряд

Найпростішим і найбільш вивченим щодо механізму газових розрядів є тліючий розряд, де його сама назва вказує на основну властивість – тліти, тобто повільно без полум'я горіти.

В лабораторних умовах здійснення тліючого розряду не викликає особливих забруднень, навіть його демонстрацію здійснюють на шкільних уроках з фізики. Для цього використовують

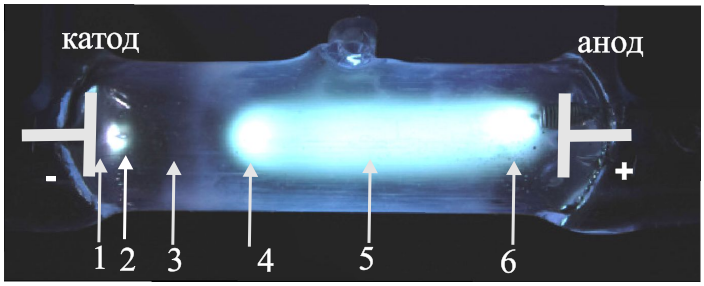


Рисунок 7.4.1

скляну трубку довжиною 30-50 *см* в яку впаяно два електроди між якими подається напруга порядку 1000*В*. Відкачуючи з трубки повітря можна помітити, що при зменшенні тиску до 50 *мм.рт.ст*. виникає самостійний розряд у вигляді тонкої гнутої нитки і який з'єднує катод з анодом, а при тиску біля 5 *мм.рт.ст*. виникає тліючий розряд, вигляд якого наведений на рис. 7.4.1. У такому тліючому розряді можна виділити наступні характерні частини:

1 – вузький темний простір біля катоду. У цьому просторі електрони ще не встигають набути в електричному полі енергії для збудження молекул повітря;

2 – катодний світний шар – невелика яскрава частина газового розряду в якій електрони вже мають достатню енергію для збудження, але поки що не іонізують нейтральних молекул повітря. Збуджені молекули повітря якраз і зумовлюють свічення в катодному шарі;

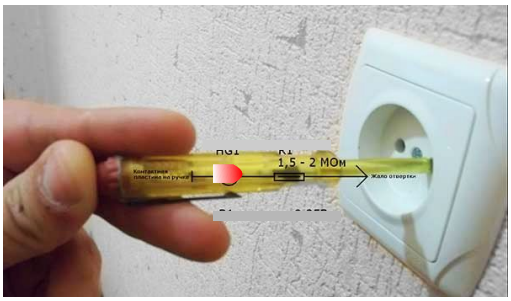
3 – катодний темний простір – це простір, в якому розпочинається лавиноподібний процес наростання йонів, що в подальшому зумовить появу тліючого розряду який займає більшу частину трубки і де можна виділити ще ряд окремих частин;

4, 5, 6 – область тліючого розряду розділена більш темним проміжком 5, який називається фарадеївським темним простором. Свічення в частині 4 зумовлене рекомбінацією йонів з електронами, а також переходів атомів із збудженого стану у нормальний. Оскільки після цього значна частина електронів рекомбінована, то в подальшому їх менше число буде рухатись до аноду і зменшує свічення газу та зумовлює фарадеївський темний простір. За фарадеївським простором розташована світла частина 6, яка досягає анода. Цю частину, що вже не впливає на підтримання самостійного розряду, називають позитивним світним анодним стовпом, який є іонізованим газом і його свічення, в основному, відбувається за рахунок рекомбінації електронів з йонами газу.

Більш детальне вивчення тліючого розряду вказує на його окремі особливості. Наприклад, позитивний стовп може розпадатись на кілька шарів, а при зменшенні відстані між електродами він буде скорочуватись до повного зникнення. Але основні фізичні процеси, що відповідають за самостійний газовий розряд, відбуваються до цього позитивного стовпа і особливу роль відіграє матеріал катоду з його катодним простором. Саме вторинна електронна емісія, тобто випускання електронів з поверхні катоду під дією ударів прискорених

електричним полем додатних йонів "живить" самостійний газовий розряд. Тому від значення роботи виходу електронів з матеріалу катода залежить напруга запалювання несамостійного газового розряду. Так, у неонових лампах залізний катод, для якого робота виходу електронів дорівнює 4,7 *eB*, покривають шаром барію з роботою виходу електронів 2,5 *eB*, що забезпечує напругу запалювання несамостійного розряду в таких лампах до 50-70 *B*.

Завдяки дуже малому споживанню струму, неонова лампа є простим, економічним і надійним індикатором мережевої напруги 220 вольт, як це показано на рис.7.4.2а. Наприклад, неонова лампа МН-3, яка використовується в таких індикаторах показана на рис.7.4.2б, є скляним балоном заповненим неоном при низькому тиску (декілька міліметрів ртутного стовпчика). Один електрод



а

б

Рисунок 7.4.2

Та

газ	Колір свічення
Гелій	Синій
Неон	Червоно-оранжевий
Аргон	Бузковий
Криптон	Синьо-білий
Пари ртуті	Блакитно-зелений

виготовлений у вигляді циліндра, а другий є стержнем по осі цього циліндра. Поруч з рисунком неонової лампи наведене її позначення на електричних схемах. Як і всі газорозрядні лампи, неонова лампа може світитися без безпосереднього електричного живлення, наприклад під впливом сильного електромагнітного поля.

В таблиці 7.4.1 вказані кольори свічення тліючих самостійних розрядів у різних

Рисунок 7.4.3

газах, що знаходить широке застосування в рекламних газорозрядних трубках (рис.7.4.3), де трубка літери "О" заповнена неоном.

Але найбільш сучасним застосуванням самостійних газових розрядів є їх використаннях у лазерах. Будова та дія газових лазерів буде розглянута у наступний книзі курсу фізики.

7.5 Іскровий розряд. Блискавка

Якщо тліючий розряд в газах є самостійним розрядом при низьких тисках, то за нормальних умов у газі теж можливий самостійний, але для цього потрібні значно більші напруженості електричного поля і одним з видів такого розряду є іскровий розряд. Сама назва цього розряду вказує, що за певної напруженості електричного поля у газі "проскакує" характерна іскра, яка має вигляд зигзагоподібного яскравого та інколи розгалуженого каналу по якому проходить короткочасний імпульс струму. На рис.7.5.1 показаний небажаний іскровий розряд між полюсами вимикача високовольтної підстанції.

Рисунок 7.5.1

Іскровий розряд у газах є його пробоєм, тобто за певної напруженості електричного поля відбувається нестаціонарний процес інтенсивної іонізації газу. У цьому випадку достатньо лише одного електрона, який в електричному полі набуває енергії для подальшої лавинної іонізації. Для повітря його пробій за нормальних умов настає при напруженості електричного поля порядку 30000 *В*/*см*. Між іншим, [illegible] уженості електрики "на око" визначають високі [illegible]чають на якій відстані між двома високовольтними електродами "проскакує" іскра. Після того як відбувся пробій газу, опір іскрового каналу дуже малий і через нього проходить короткочасний імпульс струму, який зумовлює виділення значної кількості теплоти. При цьому нагрітий газ швидко розширюється що зумовлює утворення ударних хвиль, які супроводжуються звуковими ефектами – малі іскрові розряди супроводжуються потріскуванням, а такий потужний іскровий розряд

як атмосферна блискавка супроводжується громом. Отже, блискавка – перший атмосферний розряд, який, про що було сказано у короткому вступі, дав вогонь первісній людині.

Блискавка – атмосферний іскровий розряд, довжина якого може сягати декілька кілометрів. Миттєвий знімок блискавки довжиною біля 1 км наведений на рис.7.5.2 і ця блискавка є прикладом більшості блискавок, що здебільшого відбуваються між хмарами та поверхнею землі. Рідше трапляються блискавки між хмарами. В загальних рисах процеси в блискавці між хмарою та землею відбуваються у певній послідовності. Зокрема, в нижній частині негативно зарядженої хмари виникають "загострені" місця в яких напруженість

Рисунок 7.5.2

для початку процесу іонізації молекул повітря, внаслідок чого виникають електронні лавини що зумовлюють появу так званих стрімерів (з англ. strem – текти) які є розгалуженими електропровідними каналами. Ці канали, об’єднуючись між собою, утворюють один канал з великою провідністю, який завершує перший етап утворення блискавки. Сама блискавка є результатом короткочасного протікання струму від 10000 до 5000000 ампер, що зумовлює яскраве світіння іонізованого газу та його нагрів і, як наслідок, виникають ударні звукові хвилі – грім. Після того, як відбулась така "розрядка" хмари, можливе утворення повторних блискавок за рахунок зарядів що знаходяться у більш високих шарах хмари.

Окрім того, що блискавка дала первісній людині вогонь, її дії сучасній людині завдають інколи значної шкоди. По-перше – це пряме ураження людини блискавкою, що може призвести навіть до смертельних випадків. Тому, перше правило поведінки людини під час грози – ніколи не стояти на відкритій місцевості або під деревом. З іншими правилами можна ознайомитись на сайтах Інтернету, де наводиться багато цікавих фактів про дію блискавок. Для захисту

будівель та промислових підприємств від руйнівної дії блискавок використовують блискавковідводи.

Блискавковідвід — пристрій, який встановлюють на будівлях і спорудах. Даний пристрій служить для захисту від удару блискавки. У більшості випадків цей пристрій не що інше, як високо встановлене та заземлене металеве вістря, з якого можливе стікання зарядів і саме на цьому явищі базується захисна дія блискавковідводу. Так, під час грози на поверхні Землі з'являються індуковані від заряджених хмар електричні заряди і тоді з металічного вістря (заземленого блискавковідводу) відбувається стікання електричних зарядів, тобто струм проходить у Землю через цей блискавковідвід, обминаючи і не завдаючи шкоди будівлям чи спорудам. Так, на рис. 7.5.3 показано нафтосховище, цистерни якого захищені блискавковідводами – заземленими металічними стержнями, які приймають на себе розряди блискавки. Для захисту високовольтних ліній електропередач роль блискавковідводів виконує металевий трос, який приєднується до верхівки електроопор, як це показано на рис. 7.5.4.

Рисунок 7.5.3

Рисунок 7.5.4

Вважають, що блискавковідвід винайшов у 1752 р. Бенджамін Франклін, з іменем якого пов’язані значні наукові досягнення в галузі досліджень електричних явищ, про що вже йшла мова в підрозділі 1.1.

Особливий вид блискавки – це кульова блискавка – загадкове природне явище у вигляді світної кулі розміром від кількох до кількадесят сантиметрів, іноді видає звук подібний до шипіння. Ця куля здатна переміщатися за непередбачуваною, іноді дивною для очевидців траєкторією. Найчастіше вона як би «виходить» з провідника або породжується звичайними блискавками, інколи опускається з хмар, в поодиноких випадках несподівано з'являється в повітрі або, як повідомляють очевидці, може вийти з будь-якого предмета і тому надзвичайно мало її фотографій,

Рисунок7.5.5

адже не у кожного в такий момент є фотокамера. Рідкісний знімок кульової блискавки наведений на рис.7.5.5.

Можна зустріти самі різноманітні описи кульової блискавки, яка може при вибуху привести до руйнувань або навіть смертельних уражень, а інколи не завдаючи ніякої шкоди вона сама по собі щезає.

Існує близько 400 теорій, що пояснюють явище утворення кульової блискавки, але жодна з них не отримала визнання. У лабораторних умовах лише схожі, але короткочасні явища вдалося отримати декількома різними способами, так що питання про природу кульової блискавки залишається відкритим.

7.6 Коронний розряд

Коро́нний розряд — особливий вид газового розряду, що виникає в сильних неоднорідних електричних полях навколо загострених або з малою кривизною поверхні провідників і свічення цього розряду має вигляд корони – звідси назва такого розряду.

Напруженість електричного поля, що необхідна для виникнення коронного розряду, повинна перевищувати 3×10^4 *В/см*. Сильне неоднорідне поле має виникнути навколо лише одного електрода, інший може бути віддаленим, його роль можуть виконувати будь-які заземлені предмети. У високовольтних лініях електропередач виникнення коронного розряду призводить до значних втрат електроенергії. Тому для зменшення цих втрат застосовують захисні кільця або екрани. Так, рис.7.6.1 ілюструє коронний розряд в захисному кільці лінії електропередачі на 500 *кВ*.

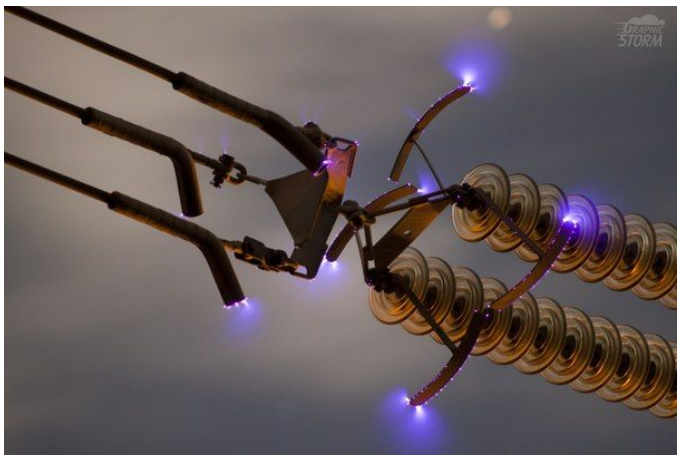


Рисунок 7.6.1

Якщо коронний розряд виникає навколо негативного електрода, то корона називається «негативною», якщо навколо позитивного електрода – позитивною. Механізми виникнення позитивної й негативної корони різні.

При виникненні негативної корони позитивно заряджені йони, що утворюються внаслідок виникнення електронних лавин, прискорюються у сильному електричному полі поблизу катода й при зіткненні вибивають із нього електрони за механізмом вторинної електронної емісії. Вибиті електрони утворюють нові лавини. Утворення лавин обривається на певному віддаленні від електроду, оскільки електричне поле там слабше й електрони не встигають набрати між зіткненнями енергії достатньої для іонізації нейтральних молекул
газу.

Позитивна корона виникає в тому випадку, коли загостреним електродом є анод. У цьому випадку електронні лавини

зароджуються на межі корони й розповсюджуються до нього. Іонізація нейтральних молекул далеко від аноду виникає внаслідок поглинання короткохвильового випромінювання збудженого газу в області розряду. Утворені при іонізації позитивні йони відтягуються в напрямку до катода.

Коронні розряди нерідко виникають у природних умовах як результат дії атмосферної електрики. Особливо цікавим явищем, пов’язаним з коронним розрядом, є так звані вогні святого Ельма – електричний розряд у вигляді свічення, який виникає при великій напруженості електричного поля на гострих кінцях високих предметів. Під час грози таке свічення, яке бачили моряки на корабельних щоглах (рис.7.6.2), назвали вогнями святого Ельма, покровителя моряків Середземномор'я, де їх поява сприймалась як добрий знак.

Рисунок 7.6.2

Крім того що коронний розряд у вигляді вогнів святого Ельма для моряків був добрим знаком, у даний час цей розряд теж має неабияке корисне застосування.

Наприклад, посудина заповнена димом раптово стає прозорою, якщо у посудину внести гострі металеві електроди під’єднанні до високовольтного джерела струму. Як тільки біля електродів виникає коронний розряд, йони газу захоплюють частинки диму які рухаються до електродів та осідають на них. На такому принципі діють так звані електрофільтри, що знаходять широке застосування у техніці. Про особливе застосування коронного розряду для реєстрації радіоактивного випромінювання буде йти мова у відповідному розділі атомної та ядерної фізики наступної третьої книги курсу фізики.

У медицині, зокрема у косметології, коронний розряд застосовують для стимулювання обміну речовин у шкірі та її дихання. Таке використання коронного розряду називається дарсонвалізацією за іменем винахідника такого методу фізіотерапії французького фізіолога і фізика Арсена д′Арсонваля.

7.7 Дуговий розряд

Якщо два електроди між якими виник іскровий розряд наближати один до одного, то за певної відстані між ними виникає характерне свічення у вигляді дуги (рис.7.7.1), звідси назва дугового розряду. Дуговий розряд можна отримати минаючи його іскровий початок. Для цього електроди приводять у контакт, у якому виділяється значна кількість теплоти, електроди розжарюються, після чого їх розводять на певну відстань і між ними виникає електрична дуга. Мабуть ви не раз спостерігали за роботою електрозварювальника коли він приводить в контакт один електрод до деталі а потім, отримавши дугу, відводить його від зварювальної деталі. Саме так у 1802 році російський вчений (навчався у Харкові) В. В. Петров відкрив явище електричної дуги, яку зумовлює дуговий розряд (термоелектронна емісія з розжареного катоду та термічна іонізація газу в між електродному просторі, який є по суті плазмою і яка стає провідником, завдяки чому електрони досягають анода).

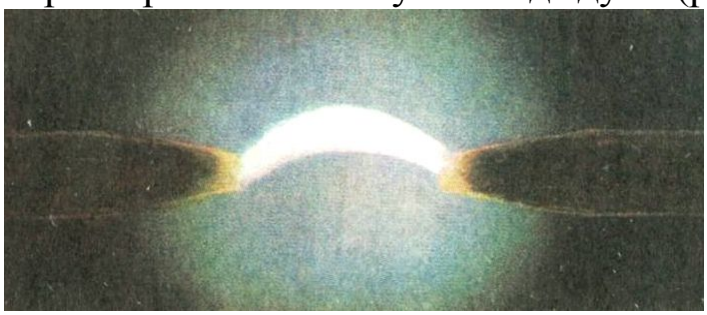


Рисунок 7.7.1

Класичний дуговий розряд – це розряд між спеціальними вугільними електродами виготовленими з пресованого порошкоподібного графіту та зв’язуючих речовин. При горінні дуги відстань між електродами близько 5 мм. У процесі горіння дуги вугільний катод загострюється, а на аноді виникає заглибина, яка називається кратером дуги у якому температура при нормальному атмосферному тиску становить біля 4000^0С, а при значно більших тисках може досягати 7000^0С. Електричну дугу можна отримати і за допомогою металевих електродів, що знаходить широке застосування в електрозварюванні, але температура тут нижча ніж дуги з вугільними електродами і становить біля 2500^0С. Винахідником електрозварювання за допомогою електричної дуги вважають інженера М.М. Бернадоса (1842–1905 рр. нині село Мостове Братського

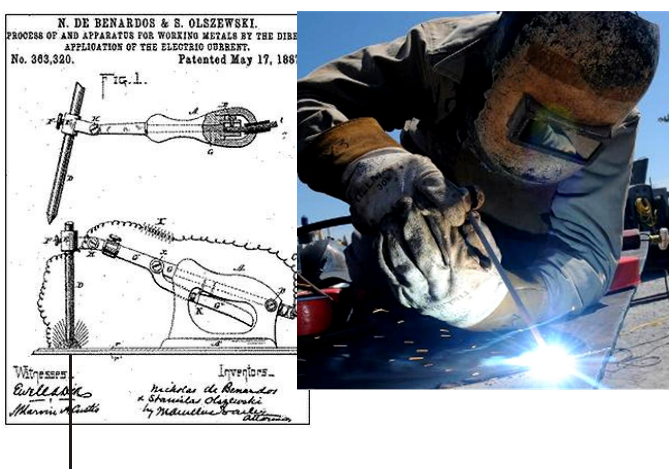


Рисунок 7.7.2

району Миколаївської області). Тривалий час працював у Санкт-Петербурзі. На рис. 7.7.2 наведена фотокопія патенту за 1887р. на винахід електрозварювання, виданий Бернадосу та Ольшевському – купцю, який мав відношення до відкриття лише як спонсор наукових робіт Бернадоса. Якщо порівняти схему електрозварювання Бернадоса з екіпіровкою і сучасним виконанням ручних електрозварювальних робіт, то картина подібна до патенту Бернадоса. Разом з тим, сучасне, навіть ручне електрозварювання за обладнанням і матеріалами, джерелами струму та автоматичним пристроями роблять електрозварювання однією з найважливіших галузей промисловості. Лідером світового сучасного електрозварювання є науково-дослідний інститут електрозварювання імені Є.О. Патона – найбільший в Україні і світі науково-технічний центр в галузі зварювання та спецелектрометалургії.

7.8 Поняття про плазму

Відомо, що при нагріванні твердого тіла за певної температури, яка називається температурою плавлення, відбувається перехід тіла з твердого в рідкий стан. Далі збільшення температури зумовлює перехід рідини в газоподібний стан, а ще при подальшому зростанні температури різко зростає процес термічної іонізації і може наступити такий момент, що газ буде повністю іонізованим, стаючи квазінейтральним, тобто густини додатних та від'ємних зарядів стануть практично однаковими і такий стан речовини називається плазмою.

У стані плазми перебуває більша частина речовини Всесвіту – зорі, галактичні туманності та простір між зірками. Навколо Землі плазма існує у вигляді сонячного вітру та іоносфери, де висока ступінь іонізації зумовлена фотоіонізацією за рахунок короткохвильового випромінювання Сонця. *Все це разом дозволяє вважати плазму четвертим станом речовини.*

Плазма, яка виникає при газовому розряді, називається газорозрядною і саме таку плазму можна створити та вивчати в лабораторних умовах. Кількісною характеристикою, яка визначає квазінейтральність плазми, є так званий дебаївський радіус екранування (скорочено Д.р.е.), який вперше ввів нідерландський фізик Петер Джозеф Вільям Дебай (1884-1966). Д.р.е. – характерний просторовий масштаб в плазмі, на якому екранується поле зарядженої

частинки за рахунок хмаринки зарядів протилежного знаку що оточують цю частинку. Користуючись поняттям дебаївського радіуса або теж саме дебаївської довжини, основоположник вчення про плазму американський фізик Ірвінг Ленгмюр (1881-1957) дає означення плазми як іонізованого газу за наступної умови: лінійні розміри області яку займає плазма повинні бути значно більшими дебаївської довжини. Для експериментального вивчення плазми або за загальноприйнятою термінологією – діагностики плазми Ленгмюр у 1923 р. розробив спеціальний прилад, який отримав назву зонда Ленгмюра. Таким зондом у вигляді сферичного або циліндричного провідника, який вводиться у плазму, визначають густину струму заряджених частинок в залежності від потенціалу зонда. Зрозуміло, що будь-який зонд введений в плазму спотворює її характеристики, тому більшість сучасних методів діагностики плазми є безконтактними, які в свою чергу діляться на пасивні та активні. Пасивні методи базуються на реєстрації випромінювання і потоку частинок з досліджуваної плазми. Активні методи безконтактної діагностики основані на вимірюванні характеристик зовнішнього зондуючого випромінювання, наприклад лазерного, при проходженні його через досліджувану плазму і на реакцію самої плазми на це випромінювання, але такий метод строго кажучи не є абсолютно безконтактним.

Щодо параметрів плазми, то такі поняття як концентрація її заряджених частинок та температура самої плазми вимагають суттєвого уточнення. Так, оскільки в плазмі можуть бути як однозарядні так багатозарядні йони, то їх концентрація неоднакова з концентрацією електронів.

Якщо плазму розглядати як своєрідну суміш двох ідеальних газів – електронного та іонного за умови термодинамічної рівноваги, то температура всіх компонентів такої суміші буде однаковою і така плазма перебуває у рівноважному стані. Реальна плазма в багатьох експериментальних установках як правило перебуває у нерівноважному стані. Так, газорозрядна плазма нагрівається за рахунок енергії електронів при проходженні струму. При зіткненні з важкими частинками (йонами та атомами) електрони віддають лише частину своєї енергії, тому у плазмі встановлюється особлива квазітермодинамічна рівновага, яка відповідає встановленню електронної температури T_e (температури електронного газу) та

іонної температури T_i (температури іонного газу). Таку плазму ще називають неізотермічною або двохтемпературною. Наприклад, в газорозрядних трубках температура електронного газу досягає десятків тисяч градусів кельвіна, у той же час температура іонного газу не перевищує 1000–2000 *К*. У рівноважній плазмі обидві температури однакові і в залежності від цього розрізняють низькотемпературну (менше мільйона К) та високотемпературну (температура мільйон К та вище). Такий поділ зумовлений важливістю високотемпературної плазми в проблемі здійснення керованої термоядерної реакції, про що буде йти мова у відповідному розділі наступної книги курсу фізики.

Закінчуючи короткий огляд поняття про плазму не можна не вказати на її застосування в добре відомих плазмових телевізорах, точніше в їх плазмових дисплеях. Дисплей, тобто екран сучасного плазмового телевізора, складається не менше як з одного мільйона так званих пікселів – елементів зображення (з англійської *picture* – картина, зображення; *cell* – клітинка, елемент). Принцип дії плазмового дисплею ґрунтується на явищі свічення люмінофору під впливом ультрафіолетових променів, що виникають при електричному розряді в іонізованому газі, тобто у плазмі.

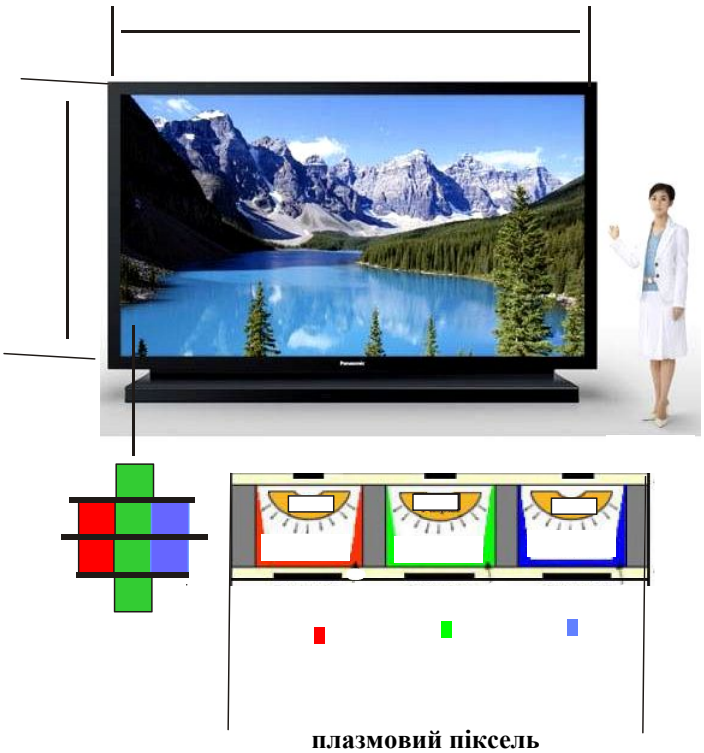


Рисунок 7.8.1

На рис. 7.8.1а показаний загальний вигляд сучасного плазмового телевізора Panasonic TH-103VX200W, діагональ дисплею якого становить 262 *см*. Плазмовий піксель розміром 1,2 *мм* має у складі три газонаповнені комірки, всередині яких розташовані прозорі електроди між якими і відбувається розряд. Кожна комірка внаслідок плазмового розряду світиться "своїм" кольором – червоним, зеленим та синім в залежності від люмінофору комірки.

Зображення формується електронною системою, яка подає відповідні "запалюючі" напруги на відповідні пікселі дисплею.

Контрольні запитання

1 *У чому полягає явище йонізації газів і яка його кількісна характеристика?*
2 *Як дати означення роботи йонізації молекули та як вводиться поняття потенціалу йонізації?*
3 *Який розряд називається несамостійним та які його основні характеристики?*
4 *Поясніть графік залежності струму несамостійного розряду від напруженості електричного поля з трьома характерними ділянками: 1) лінійної залежності; 2) струму насичення; 3) різкого зростання струму.*
5 *Які можливі механізми процесів за якими відбувається самостійний газовий розряд?*
6 *За яких умов відбувається тліючий розряд і який його механізм?*
7 *Яке практичне застосування тліючого розряду?*
8 *Який механізм іскрового розряду і за яких напруженостей електричного поля він відбувається?*
9 *Як і які процеси зумовлюють утворення атмосферної блискавки?*
10 *Які методи захисту від руйнівної дії блискавки та що відомо у даний час про утворення і властивості кульової блискавки?*
11 *Який вигляд має коронний розряд та який механізм виникнення негативної та позитивної корон?*
12 *Яке особливе явище пов'язане з коронним розрядом спостерігається в природі?*
13 *Яке практичне застосування коронного розряду?*
14 *Як відбувається і які характеристики та особливості дугового розряду між вугільними електродами?*
15 *Яке практичне застосування дугового розряду?*

ЧАСТИНА ІІІ ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

Розділ 8 Магнітне поле та його характеристики

Електромагнетизм – галузь фізики, що вивчає закони і явища пов'язані з взаємозалежністю між електрикою та магнетизмом. Що таке електрика було розглянуто в попередньому розділі. А що ж таке магнетизм?

Щоб відповісти на це питання спочатку перенесемося у древню малу Азію де біля міста Магнесії були поклади особливого каменю який притягав залізні предмети і цей камінь отримав назву магніт. Уявіть, що подібний камінь уперше був знайдений у Карпатах, тоді для нас звичним терміном був би карпіт (а не магніт) з його північним та південним полюсами і розділ фізики «Електрика і магнетизм» називався б «Електрика і карпатизм». Але що стосується природи магнетизму, то лише на початку 19 ст. стало зрозумілим, що магнетизм як явище пов’язане з рухом електричних зарядів і особлива заслуга у цьому належить Ерстеду (датський фізик – (1777-1851)). Ерстед у своїх дослідах встановив, що електричний струм в провідниках діє на магнітну стрілку. Таким чином, якщо джерелом електростатичного поля є електричні заряди, то магнітне поле створюється рухомими електричними зарядами. Але як пояснити магнітні властивості речовини, тобто чому «камінь з Магнесії» є магнітом, адже там ніби немає рухомих зарядів? Рухомі заряди є, але ми їх не бачимо – це електрони, що обертаються навколо ядра і такий рух створює магнітне поле. Далі буде показано, що такий обертальний рух створює так званий орбітальний магнітний момент. Крім того, самі електрони подібні до маленьких магнітів, володіють власним магнітним моментом який називають спіновим. Магнітним моментом володіють не тільки електрони, але й ще багато інших елементарних частинок. ***Отже, магнетизм – особлива форма взаємодії між рухомими електричними зарядами та окремими частинками з магнітними моментами***.

Зрозуміло, що така взаємодія повинна чимось здійснюватись і це "чимось" природно назвати магнітним полем, яке подібно до електричного поля є особливою формою матерії. Далі буде показано принципову різницю між електричним та магнітним полями. Крім того, в третій книзі цього підручника електромагнітна взаємодія буде

розглянута як одна з відомих на даний час фундаментальних взаємодій.

7.1 Магнітне поле. Індукція магнітного поля. Контур зі струмом в магнітному полі

Силовою характеристико електричного поля є вектор напруженості $\vec{E}$, який визначається відношенням сили $\vec{F}$, яка діє на позитивний точковий заряд q вміщений у дану точку поля, до

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

величини цього заряду ( ). Цей заряд інколи називають пробним. Зауважимо, що на нерухомі електричні заряди магнітне поле не діє. Отже, для визначення силової характеристики магнітного поля необхідно підібрати такий "пробний об'єкт ", на який би діяло магнітне поле і цю дію можна б було кількісно оцінити. Таким ідеальним "пробним об'єктом" міг би бути теоретично передбачений англійським фізиком Діраком (1902-1984) ***монополь*** – частинка лише з одним магнітним полюсом (південним або північним), своєрідний аналог електричного заряду. Тоді силовою характеристикою магнітного поля було б відношення сили $\vec{F}$, яка діє на магнітний заряд (монополь) g, до величини цього магнітного заряду монополя, а також у цьому випадку напрям вектора силової характеристики магнітного поля (назвемо вектором магнітної індукції $\vec{B}$) співпадає з напрямом сили, що діє на монополь. Оскільки теоретично передбачені монополі поки що не виявлені, то розглянемо методи встановлення силової характеристики магнітного поля, які базуються на його дії на рухомі заряди і на провідник чи контур зі струмом. Так, контур зі струмом для дослідження магнітного поля назвемо пробним контуром і контур повинен бути настільки малим, щоб у межах контуру поле було однорідним. Орієнтацію такого контуру у просторі будемо характеризувати напрямом нормалі $\vec{n}$ до цього контуру, яка визначається за правилом свердлика (рис.8.1.1*а*). Векторна фізична величина, яка характеризує магнітні властивості контуру зі струмом, називається магнітним моментом $\vec{p}_m$, модуль якого дорівнює добутку сили струму I в контурі на площу S обмеженої ним поверхні, а напрям збігається з напрямом нормалі до площини контуру:

$$p_m = I \cdot S \,. \qquad (8.1.1)$$

Досліди показують, що контур зі струмом в однорідному магнітному полі не переміщається у просторі, а тільки повертається під дією деякого моменту сили (обертового моменту) M і, як це показано на рис.8.1.1*б*, при цьому напрям магнітного моменту $\vec{p}_m$ співпадає з напрямом магнітної стрілки (від південного полюсу до північного). Отже, цей напрям і визначає напрям індукції $\vec{B}$ магнітного поля.

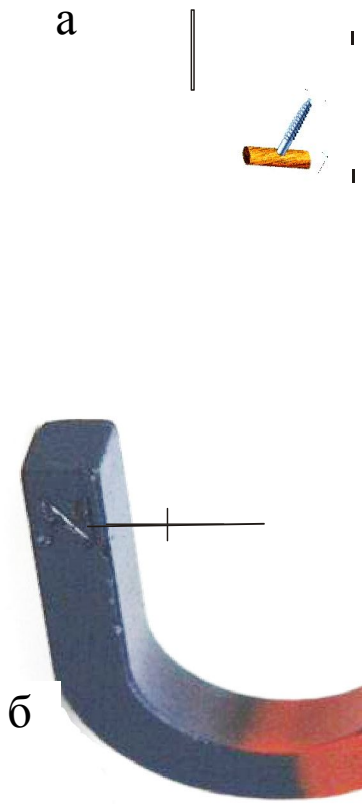


Рисунок 8.1.1

Про величину магнітної індукції можна судити за величиною моменту сили, який діє на контур в магнітному полі, і цей момент сили визначається наступним співвідношенням:

$$M = k \cdot B \cdot (IS) \sin \alpha \,. \quad (8.1.2)$$

Одиницю індукції магнітного поля встановлюють з умови, що у співвідношенні (8.1.2) кут $\alpha = 90$. Тоді на контур діє максимальний момент сили, тобто

$$M_{\max} = B \cdot (IS) \Rightarrow B = \frac{M_{\max}}{I \cdot S} \quad (8.1.3)$$

або, враховуючи (8.1.1),

$$B = \frac{M_{\max}}{p_m} \,. \quad (8.1.4)$$

Отже, якщо $M_{\max} = 1 H \cdot м$, а $p_m = 1 A \cdot м^2$, то в системі СІ одиниця вимірювання індукції магнітного поля $1 \frac{H \cdot м}{A \cdot м^2}$, яка отримала назву ***тесла*** ($1 Тл$) в честь Ні́коли Те́сла (1856-1943) – сербського та американського винахідника і фізика. Таким чином **1*Тл*** – ***це індукція такого магнітного поля, в якому на контур з одиничним магнітним моментом діє одиничний максимальний обертальний момент сили***.

Для графічного зображення магнітного поля використовують лінії магнітної індукції – це лінії, дотичні до яких у кожній точці співпадають з напрямом вектора $\vec{B}$ в цих же точках. Але на відміну від електростатичного поля, де його силові лінії беруть початок з додатних зарядів, лінії магнітної індукції замкнуті, оскільки відсутні магнітні заряди (такі приклади ілюструє рис.8.1.2). Так, лінії індукції магнітного поля прямолінійного провідника зі струмом є концентричні кола (рис.8.1.2а), напрям яких визначається за правилом свердлика. За таким же правилом визначаються силові лінії магнітного поля соленоїда (рис.8.1.2б), яке за своєю формою подібне до поля постійного магніту (рис.8.1.2в).

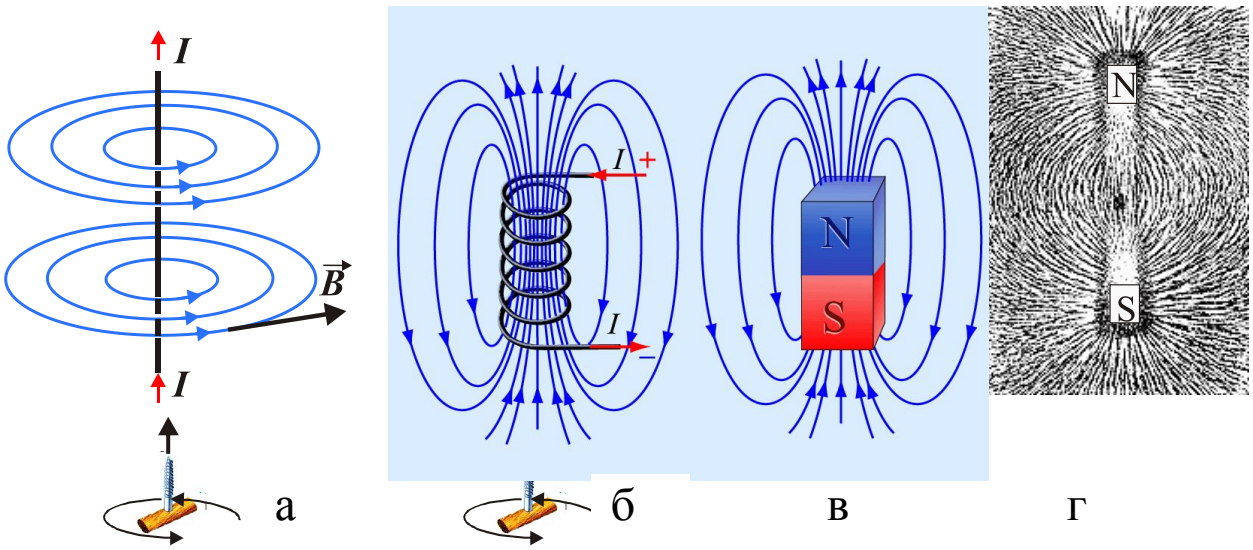


Рисунок 8.1.2

Картину силових ліній магнітного поля можна отримати за допомогою залізних ошурок, які подібно маленьким магнітним стрілкам розташовуються вздовж ліній індукції магнітного поля (рис.8.1.2г).

8.2 Магнітний потік. Теорема Гауса для потоку вектора магнітної індукції

Подібно до поняття вектора напруженості електричного поля вводиться поняття потоку вектора магнітної індукції. Так, для однорідного магнітного поля потік вектора магнітної індукції Φ_B через поверхню площею S_n, орієнтовану перпендикулярно до ліній індукції поля, дорівнює

$$\Phi_B = B \cdot S_n . \qquad (8.2.1)$$

Якщо $S_n = 1м^2$, то $\Phi_B = B$ (чисельно). Отже, через одиничну поверхню перпендикулярну до ліній індукції магнітного поля проходить така кількість ліній індукції магнітного поля, яка чисельно дорівнює значенню індукції цього поля. Одиницею потоку вектора індукції магнітного поля є 1 *Вб (вебер,* $1Вб = 1Тл \cdot 1м^2$), яка названа в честь німецького фізика Вебера В.Є. (1804-1891).

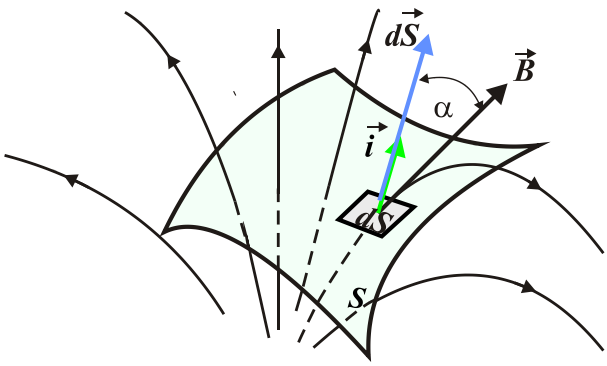


Рисунок 8.2.1

В загальному випадку неоднорідного поля (рис. 8.2.1) сумарний магнітний потік через довільну поверхню S дорівнює сумі елементарних потоків $d\Phi_B$ через елементарні поверхні площею dS:

$$\Phi_B = \int_S d\Phi_B = \int_S B\, dS \cos\alpha , \qquad (8.2.2)$$

де α – кут між вектором індукції $\vec{B}$ магнітного поля та перпендикуляром до поверхні dS. Враховуючи, що добуток dS на одиничній вектор $\vec{i}$, що співпадає з нормаллю до dS, дає вектор $\vec{dS} = \vec{i}\, dS$, то рівняння (8.2.2) прийме наступний вигляд:

$$\Phi_B = \int_S (\vec{B}, d\vec{S}) \quad . \qquad (8.2.3)$$

Оскільки лінії індукції магнітного поля замкнуті, то ***потік вектора індукції магнітного поля через довільну замкнуту поверхню дорівнює нулю,*** що є математичним формулюванням в інтегральній формі теореми Гауса для магнітного поля, тобто магнітне поле має вихровий характер (силові лінії замкнуті):

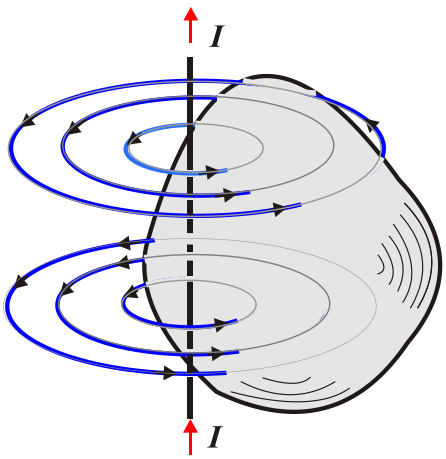


Рисунок 8.2.2

$$\oint (\vec{B}, d\vec{S}) = 0 \quad . \qquad (8.2.4)$$

Дійсно, кожна лінія індукції яка входить у замкнуту поверхню з одної сторони, виходить з іншої (рис. 8.2.2 – для магнітного поля прямого провідника зі струмом).

Стягуючи замкнуту поверхню в будь-яку точку ***p*** ми там не знайдемо джерела магнітного поля (точки, з якої би виходили або входили лінії індукції магнітного поля). Математично таке "стягування" поверхні, при якому визначається границя до якої прямує відношення $\lim_{V \to P} \frac{\Phi_B}{V}$, називається дивергенцією (у даному випадку) вектора $\vec{B}$:

$$div\, \vec{B} = \lim_{V \to P} \frac{\Phi_B}{V} \quad . \qquad (8.2.5)$$

Оскільки потік вектора індукції через довільну замкнуту поверхню дорівнює нулю ($\Phi_B = 0$), то

$$div\, \vec{B} = 0 \quad . \qquad (8.2.6)$$

Вираз (8.2.6) є диференціальною формою теореми Гауса для магнітного поля, яка математично стверджує відсутність магнітних зарядів (про це вже йшла мова у вступі до розділу 1 і про теоретично

передбачені але експериментально не виявлені особливі частинки – монополі, частинки з одним магнітним полюсом).

8.3 Напруженість магнітного поля. Закон Біо-Савара-Лапласа

В електростатиці на відміну від магнетизму порівняно все "просто": є нерухомий електричний заряд, який є джерелом електричного поля і навіть у формулу напруженості – силової характеристики електричного поля входить значення величини цього заряду. У магнетизмі силовою характеристикою магнітного поля є його індукція і в формулу, яка визначає цю індукцію не входить нічого такого, щоб вказувало на причину існування магнітного поля. Оскільки такою причиною може бути електричний струм, то виникає питання – чи не можливо ввести фізичну величину, яка б характеризувала магнітне поле тільки макрострумів (струмів провідності в провідниках). Зрозуміло, що ця величина повинна визначатись силою струму (чим більший струм, тим "сильніше" його магнітне поле) і геометрією провідника зі струмом (той же самий провідник може бути прямолінійним або у вигляді котушки). Такою фізичною величиною є напруженість магнітного поля – вектор $\vec{H}$. ***Доцільність введення напруженості магнітного поля полягає в тому, що, розрахувавши в даній точці напруженість*** $\vec{H}$ ***магнітного поля створеного струмом провідності, ми зможемо визначити індукцію магнітного поля в цій же точці, помноживши розраховане значення*** $\vec{H}$ ***на коефіцієнт*** k***, який залежить від вибору системи одиниць вимірювань та враховує магнітні властивості середовища***, тобто

$$\vec{B} = k\vec{H}. \qquad (8.3.1)$$

Значення напруженості магнітного поля розраховується за законом Біо-Савара-Лапласа – основного експериментального закону електродинаміки. Початково французькі фізики Жан-Батіст Біо і Фелікс Савар у 1820 р. на підставі своїх експериментів сформулювали закон, що визначав напруженість магнітного поля навколо прямолінійного провідника зі струмом. Згодом відомий французький математик і фізик Лаплас узагальнив результати Біо та Савара, сформулювавши закон, який визначав напруженість

магнітного поля в будь-якій точці навколо контуру зі струмом довільної форми. Згідно цього закону напруженість у будь якій точці магнітного поля струму провідності визначається за принципом суперпозиції, тобто векторною сумою напруженостей $\vec{dH}$ створених магнітними полями всіх елементів dl провідника зі струмом I. Що стосується значення $\vec{dH}$, то його модуль визначається за формулою (8.3.2), яка називається законом Біо-Савара-Лапласа:

$$dH = k' \frac{I\, dl \sin\alpha}{r^2}, \qquad (8.3.2)$$

де k' – коефіцієнт пропорційності, який у системі СІ дорівнює $\frac{1}{4\pi}$.

Тобто елементарна напруженість dH магнітного поля, створеного елементом провідника у довільній точці простору пропорційна елементу струму Idl, обернено пропорційна квадрату відстані r від елемента струму до точки ***p,*** де необхідно визначити напруженість поля і залежить від кута α між елементом провідника та радіусом – вектором $\vec{r}$ (рис.8.3.1).

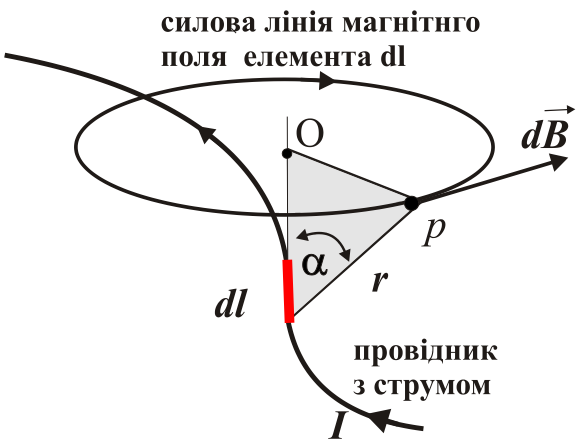


Рисунок 8.3.1

З (8.3.2) випливає, що в системі СІ напруженість вимірюється в $А/м$.

Розрахувавши напруженість магнітного поля, можна «перейти» до його індукції $\vec{B}$. Такий перехід здійснюється за допомогою коефіцієнта μ_0, який називається магнітною сталою і він дорівнює $4\cdot\pi\cdot10^{-7}$ *Тл·м/А*. Можна довести, що 1 Тл·м/А = 1 Гн/м (Гн – одиниця індуктивності) і тому магнітна стала $\mu_0 = 4\cdot\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м. Ввівши магнітну сталу μ_0, зв'язок між індукцією магнітного поля $\vec{B}_0$ у вакуумі та напруженістю $\vec{H}$ матиме вигляд:

$$\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}. \qquad (8.3.3)$$

Якщо ж середовище не вакуум, то результуюче поле визначається макро- та мікрострумами. У такому випадку індукція магнітного поля буде рівна

$$\vec{B}_0 = \mu\,\mu_0 \vec{H}, \qquad (8.3.4)$$

де μ – магнітна проникність речовини, безрозмірна величина, яка показує в скільки разів саме за рахунок мікрострумів у речовині індукція магнітного поля збільшується (або зменшується) у порівнянні з індукцією магнітного поля у вакуумі.

7.4 Магнітне поле прямого та колового струмів

Застосовуючи закон Біо-Савара-Лапласа, можна розрахувати магнітне поле струмів провідників будь-якої геометрії. Звичайно, чим складніша форма провідника, тим складніші розрахунки. Тому розглянемо найбільш прості випадки розрахунку магнітних полів провідників зі струмом. Наприклад, поле на відстані a від відрізка прямого провідника зі струмом силою I. Як видно з рисунку 8.4.1, напрям dH у точці p однаковий для полів всіх елементів струму $I\,d\vec{l}$, тому геометричну суму полів $d\vec{H}$ можна при розрахунках замінити алгебраїчною сумою. Тоді модуль шуканої напруженості визначається означеним інтегралом від виразу закону Біо-Савара-Лапласа:

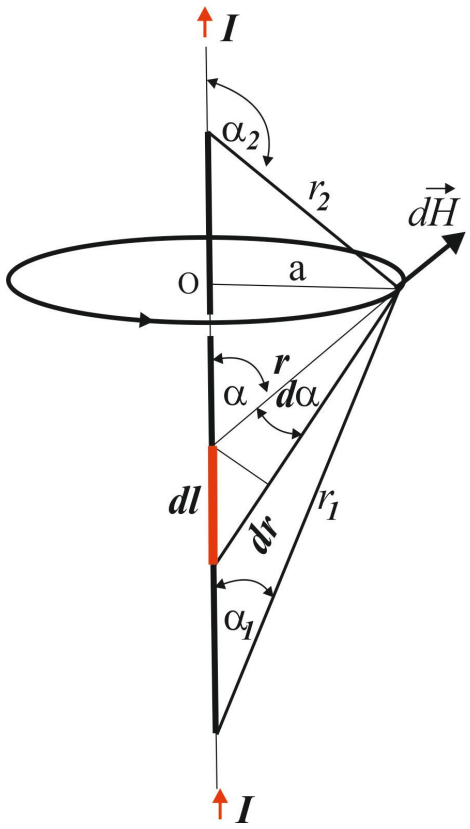


Рисунок 8.4.1

$$H = \frac{I}{4\pi}\int_l \frac{dl\sin\alpha}{r^2}, \qquad (8.4.1)$$

тобто інтегрування слід проводити за всіма елементами провідника. Оскільки в підінтегральному виразі є три змінні, то для інтегрування їх треба виразити через

одну змінну, наприклад кут α. З рисунку 8.4.1 неважко встановити наступні співвідношення:

$$\frac{a}{r} = \sin\alpha \Rightarrow r = \frac{a}{\sin\alpha}; \frac{h}{dl} = \sin\alpha \Rightarrow dl = \frac{h}{\sin\alpha}; \frac{h}{r} = \sin(d\alpha) = d\alpha \Rightarrow h = r\,d\alpha.$$

Послідовно підставляючи ці співвідношення в (8.4.1), отримаємо:

$$H = \frac{I}{4\pi a}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\sin\alpha\, d\alpha = \frac{I}{4\pi a}\left(coc\alpha_1 - \cos\alpha_2\right). \qquad (8.4.2)$$

Для нескінченного прямолінійного провідника $\alpha_1 = 0$ і $\alpha_2 = \pi$, тому

$$H = \frac{I}{2\pi a}. \qquad (8.4.3)$$

Отже, напруженість $1\,A/м$ ***– це напруженість магнітного поля створеного нескінченно довгим провідником зі струмом силою*** $2\pi\,A$ ***на відстані*** **1м.**

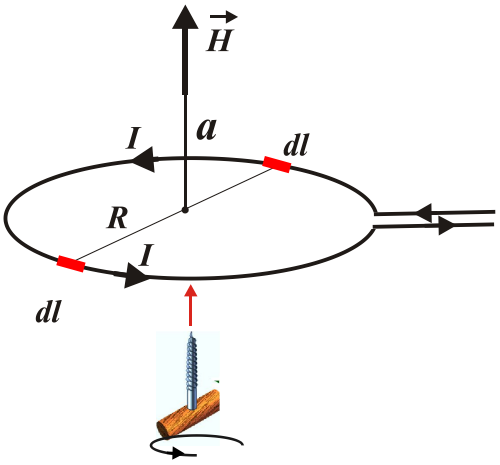


Рисунок 8.4.2

Опускаючи громіздкий математичний вивід напруженості магнітного поля колового струму радіуса R на відстані a від його центра (рис. 8.4.2), ця напруженість дорівнює

$$H = \frac{I\,R^2}{2\left(R^2 + a^2\right)^{3/2}}. \qquad (8.4.4)$$

Напруженість магнітного поля $H_ц$ у центрі колового струму дістанемо з формули (8.4.4) за умови, що $a = 0$, тобто

$$H_ц = \frac{I}{2R}. \qquad (8.4.5)$$

8.5 Циркуляція вектора напруженості магнітного поля. Закон повного струму

Теорема Гауса для магнітного поля встановлює відсутність магнітних зарядів,вказує на його вихровий характер. А як математично описати цей вихровий характер? Безвихровий характер електростатичного поля визначався циркуляцією вектора напруженості цього поля, а саме: навколо нерухомого електричного заряду "йшли" по довільному замкнутому контуру елементарними "кроками" $\vec{dl}$ і визначали інтегральну суму $(\vec{E}, \vec{dl})$, тобто циркуляцію вектора $\vec{E}$, яка виявилась рівною нулю ($\oint (\vec{E}, \vec{dl}) = 0$). Подібним чином визначимо циркуляцію вектора напруженості магнітного поля. Оскільки магнітні заряди відсутні, то замкнутим контуром охопимо провідник зі струмом, який створює вихрове магнітне поле. Для спрощення розрахунків виберемо замкнутий контур у вигляді кола, що співпадає з силовою лінією магнітного поля прямого нескінченного провідника зі струмом (рис. 8.5.1) і будемо "йти" вздовж цього замкнутого колового контуру радіуса r кроками $\vec{dl}$, "збираючи" на кожному кроці скалярні добутки $(\vec{H}, \vec{dl})$ у "кошик", тобто визначаючи інтегральну суму $\oint_l (\vec{H}, \vec{dl})$. Оскільки у даному випадку магнітне поле – це поле нескінченного провідника, то напруженість магнітного поля такого провідника на відстані r згідно (8.4.3) дорівнює $H = \frac{I}{2\pi r}$. Так як у даному випадку кут між векторами $\vec{H}$ та $\vec{dl}$ дорівнює нулю, то скалярний векторний добуток можна замінити скалярним добутком їх модулів, тобто

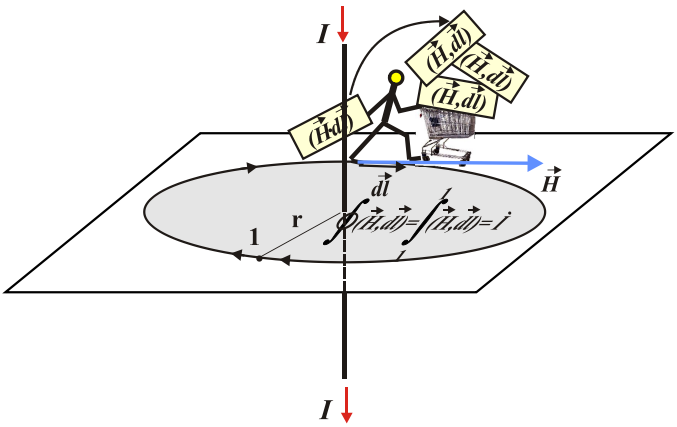


Рисунок 8.5.1

$$\oint_l \left(\vec{H}, d\vec{l}\right) = \frac{I}{2\pi r} \int_0^{2\pi r} dl = I \quad . \qquad (8.5.1)$$

Ця формула отримана для магнітного поля прямого провідника зі струмом. Можна довести, що вона справедлива і для поля струму в провіднику довільної форми. ***Якщо магнітне поле створене системою струмів, то циркуляція вектора напруженості магнітного поля по замкнутому контуру дорівнює алгебраїчній сумі струмів охоплюваних цим контуром:***

$$\oint_l \left(\vec{H}, d\vec{l}\right) = \sum_{i=1}^{n} I_i \quad . \qquad (8.5.2)$$

Сформульовану теорему про циркуляцію вектора напруженості магнітного поля та рівність (8.5.2) також ***називають законом повного струму.***

Оскільки скалярний добуток векторів $\vec{H}$ та $d\vec{l}$ можна подати у вигляді $\left(\vec{H}, d\vec{l}\right) = (H \cdot dl)\cos\alpha$, де α – кут між векторами $\vec{H}$ і $d\vec{l}$, або $\left(\vec{H}, d\vec{l}\right) = H_l dl$, де H_l – проекція вектора $\vec{H}$ на напрям $d\vec{l}$, то

$$\oint_l \left(\vec{H}, d\vec{l}\right) = \oint_l (H \cdot dl)\cos\alpha = \oint_l H_l dl = \sum_{i=1}^{n} I_i \quad . \qquad (8.5.3)$$

У розділі 6, розглядаючи основні характеристики електричного струму було вказано, що знаючи густину струму у кожній точці провідника, можна підрахувати силу струму через загальну площу його нормального перерізу як інтегральну суму елементарних струмів ($dI = J \cdot dS_n$) через елементарні перерізи dS_n цього провідника, тобто $I = \int_S J \cdot dS_n = \int_S (\vec{J}, \vec{S})$. Тоді, якщо замкнутий контур охоплює такий провідник, то рівність (8.5.2) можна записати у вигляді:

$$\oint_l (\vec{H}, d\vec{l}) = \int_S (\vec{J}, d\vec{S}) \quad . \qquad (8.5.4)$$

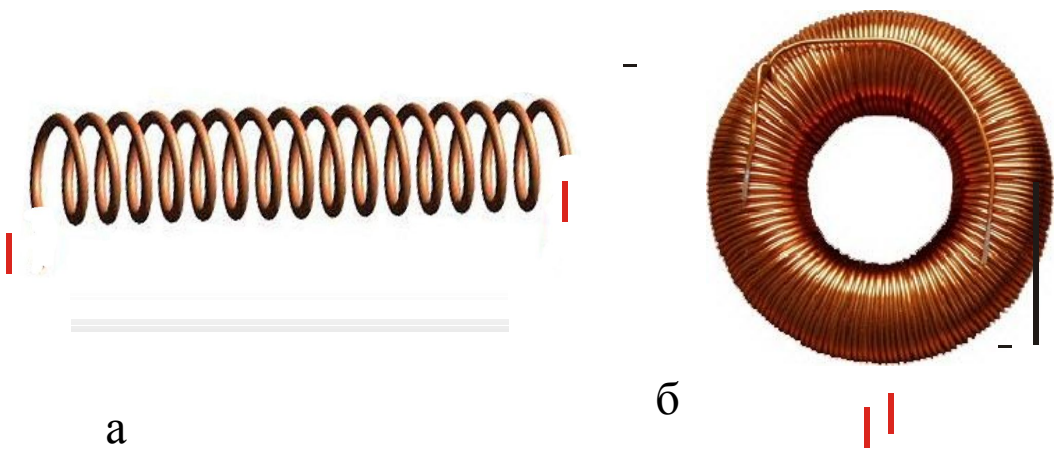
Якщо стягувати замкнутий контур у точку і при цьому визначати границю, до якої прямує відношення $\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_l (\vec{H}, d\vec{l})}{\Delta S}$, то перейдемо до диференціальної форми теореми про циркуляцію вектора напруженості магнітного поля. Оскільки вектор, проекція якого на напрям нормалі до площини контуру вздовж якого визначається циркуляція вектора напруженості магнітного поля називають ротором, то у даному випадку – це ***ротор вектора*** $\vec{H}$ (позначається $rot\vec{H}$). Застосувавши відому теорему Стокса, дістанемо:

$$\oint_l (\vec{H}, d\vec{l}) = \int_S (rot\vec{H}, d\vec{S}) \quad . \qquad (8.5.5)$$

Прирівнявши праві частини рівностей (8.5.4) та (8.5.5), отримаємо:

$$\vec{J} = rot\vec{H} \quad . \qquad (8.5.6)$$

Крім того, що рівності (8.5.5) та (8.5.6) є фундаментальними законами магнітостатики, вони у деяких випадках спрощують розрахунок магнітних полів струмів провідності. Наприклад, застосуємо формулу (8.5.2) для розрахунку магнітного поля нескінченно довгого соленоїда. У такому випадку магнітне поле однорідне і зосереджене всередині соленоїда. Так, на рис. 8.5.2а показаний відрізок такого соленоїда зі струмом силою I.



а б

Рисунок 8.5.2

Для застосування формули (8.5.2) виберемо прямокутний замкнутий контур 1-2-3-4 який охоплює n – струмів, тобто n – витків соленоїда. Тоді, згідно закону повного струму

$$\int_1^2 H_l dl + \int_2^3 H_l dl + \int_3^4 H_l dl + \int_4^1 H_l dl = nI \quad . \qquad (8.5.7)$$

На ділянках 4-1 та 2-3 контур перпендикулярний до ліній поля і тому там $H_l = 0$. На ділянці 4-3 поле відсутнє. Тоді, з чотирьох інтегралів залишається один – $\int_1^2 H_l dl$. Оскільки поле всередині соленоїда вважаємо однорідним ($H = const$), то цей останній інтеграл прийме такий вигляд: $H\int_0^l dl = Hl$ і тоді згідно (8.5.3)

$$Hl = n\,I \quad . \qquad (8.5.8)$$

Отже, напруженість магнітного поля по осі нескінченно довгого соленоїда зі струмом силою I дорівнює

$$H = \frac{I\,n}{l} \quad . \qquad (8.5.9)$$

Якщо соленоїдальну обмотку перетворити в коло, то отримаємо тороїд (рис.8.5.2.б). Можна довести, що для тороїда, радіус якого значно більший радіуса його витка, магнітне поле однорідне і розраховується за такою ж формулою (8.5.9) як і для нескінченного соленоїда.

Контрольні запитання

1 *Яка історична довідка щодо походження терміну "магніт"?*
2 *Дайте означення індукції магнітного поля з точки зору дії магнітного поля на контур зі струмом і яка при цьому одиниця індукції магнітного поля?*
3 *Сформулюйте означення в скалярній та векторній формах магнітного моменту контуру зі струмом та за яким правилом визначається напрям вектора магнітного моменту?*

4 *Яка принципова різниця між силовими лініями електростатичного та магнітного полів і який вигляд мають, наприклад, силові лінії прямого провідника зі струмом, соленоїда та постійного магніту?*

5 *Як вводиться поняття потоку вектора магнітної індукції та в яких одиницях він вимірюється?*

6 *Як формулюється та записується теорема Гауса для потоку вектора магнітної індукції і який її фізичний зміст?*

7 *Як записується закон Біо-Савара-Лапласа для розрахунку магнітного поля провідників зі струмом ?*

8 *Яка необхідність, крім індукції магнітного поля, ввести ще одну його характеристику – напруженість магнітного поля та за якою формулою встановлюється зв'язок між індукцією та напруженістю магнітного поля?*

9 *Як на основі закону Біо-Савара-Лапласа розрахувати напруженість магнітного поля прямого та кругового провідників зі струмом?*

10 *Як записується та формулюється закон повного струму і як від циркуляції вектора напруженості магнітного поля перейти до його диференціальної характеристики – ротора вектора напруженості?*

11 *Як на основі закону повного струму отримати формулу для розрахунку напруженості магнітного поля соленоїда ?*

Розділ 9 Основні магнітні явища

9.1 Дія магнітного поля на провідник зі струмом. Сила Ампера

Результат обертання контуру (рамки) зі струмом в магнітному полі є наслідком його дії на провідники цього контуру. Сила, яка діє на провідник зі струмом в магнітному полі називається силою Ампера: ***сила, яка діє на прямолінійний провідник зі струмом в однорідному магнітному полі пропорційна силі струму*** I ***в провіднику, його довжині*** l***, магнітній індукції*** B ***та синусу кута*** α ***між напрямом струму в провіднику і вектором*** $\vec{B}$, тобто

$$F = I \cdot B \cdot l \sin \alpha \,. \tag{9.1.1}$$

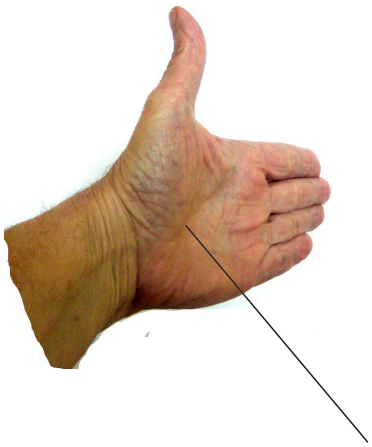


Рисунок 9.1.1

Напрям сили Ампера визначається за правилом лівої руки (рис. 9.1.1).Оскільки сила та індукція магнітного поля є векторними величинами, то формулу сили Ампера можна записати у векторній формі:

$$\vec{F} = I\left[\vec{l}, \vec{B}\right], \tag{9.1.2}$$

де вектор $\vec{l}$ рівний довжині провідника та за напрямом співпадає з напрямом струму у цьому провіднику.

У випадку неоднорідного магнітного поля для визначення сили Ампера необхідно виділити такі малі елементи провідника dl, в межах яких поле можна вважати однорідним. Тоді сила, яка діє на такий елемент провідника зі струмом в магнітному полі дорівнює

$$d\vec{F}_l = I\left[d\vec{l}, \vec{B}\right], \tag{9.1.3}$$

а загальна сила Ампера, що діє на весь провідник, визначається векторною інтегральною сумою:

$$\vec{F} = \int_l d\vec{F}_l \,. \qquad (9.1.4)$$

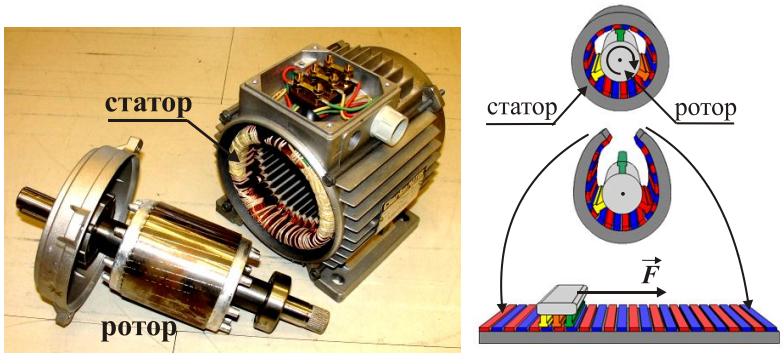
Користуючись формулою сили Ампера можна дати іншу, але еквівалентну за фізичним змістом та одиницею вимірювань, одиницю індукції магнітного поля $1 Тл$. Так, якщо $\alpha = 90^0$, то сила Ампера приймає максимальне значення і тоді

$$B = \frac{F_{\max}}{I \cdot l} \,. \qquad (9.1.5)$$

$$[B] = \frac{H}{A \cdot м} = Тл$$

Отже, , тобто ***за один тесла приймають індукцію такого однорідного магнітного поля, яке на відрізок провідника завдовжки 1 м зі струмом силою 1 А, розташований перпендикулярно до силових ліній поля, діє з силою 1 Н.***

Який би не був за своєю конструкцією електричний двигун, то в більшості випадків його принцип дії базується на використанні сили Ампера. Нерухома частина електродвигуна, яка називається статором, служить для створення магнітного поля. Рухома частина – ротор це по суті рамка зі струмом, яка обертається у магнітному полі. На рис. 9.1.2а зображений електродвигун у розібраному виді. В останній час набувають застосування так звані лінійні електродвигуни, у яких відсутній обертовий рух. В них ротор стає провідником, який рухається у магнітному полі "розвернутого" статора як це показано на рис. 9.1.2б. Такі лінійні електродвигуни з використанням так званих магнітних подушок дозволяють створити надшвидкі електропоїзди, які називаються ***маглевами*** або ***магнітопланами*** (від англ. *Magnetic levitation*). Наприклад, в Японії швидкість маглева під час його випробувань досягала 580 км/год.



а б

Рисунок 9.1.2

9.2 Робота при переміщенні провідника зі струмом в магнітному полі

Якщо провідник зі струмом рухається в магнітному полі, то при цьому виконується робота. Нехай прямий провідник зі струмом силою ***I*** може вільно переміщатись у магнітному полі по двох інших контактних (подібно до рейок) провідниках (рис.9.2.1). Зовнішнє магнітне поле будемо вважати однорідним з індукцією ***B*** і перпендикулярним до рухомого провідника довжиною l. Тоді на провідник буде діяти сила Ампера $F = BIl$ і при переміщенні провідника на dx буде виконана робота

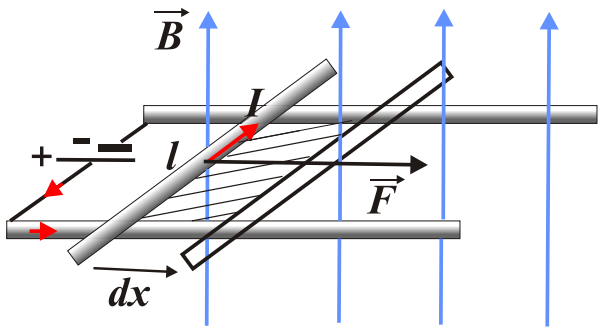


Рисунок 9.2.1

$$dA = IBl \cdot dx . \qquad (9.2.1)$$

Добуток $l \cdot dx$ дорівнює заштрихованій площі. Оскільки магнітний потік Φ однорідного магнітного поля через поверхню площею S перпендикулярну вектору B дорівнює $\Phi = B\,S$, то $Bl\,dx = d\Phi$ є потік магнітної індукції, який перетинає провідник при русі в магнітному полі. Отже,

$$dA = I\,d\Phi . \qquad (9.2.2)$$

Отриманий результат можна узагальнити на випадок неоднорідного поля. Для цього потрібно на провіднику виділити такі малі елементи, щоб в межах кожного поле вважати однорідним. Тоді загальна робота при переміщенні провідника буде визначатись інтегральною сумою елементарних робіт.

Визначаючи роботу при переміщенні провідника зі струмом в магнітному полі, треба мати на увазі, що роботу переміщення провідника зі струмом виконує електричний струм, а не магнітне поле. Дійсно, при русі провідника зі струмом в магнітному полі останнє не зазнає ніяких змін, а щоб на провідник діяла сила Ампера необхідно в провіднику підтримувати струм, а цей струм підтримує

джерело струму, виконуючи при цьому роботу яка в кінцевому результаті визначає роботу переміщення провідника зі струмом в магнітному полі.

Окремим випадком роботи переміщення провідника зі струмом в магнітному полі може бути робота при обертанні або переміщенні рамки (контуру) в магнітному полі. Можна довести, що у цьому випадку така робота обертання або переміщення дорівнює

$$A = I(\Phi_2 - \Phi_1), \qquad (9.2.3)$$

де Φ_1та Φ_2 – початкове та кінцеве значення магнітних потоків які перетинають площу контуру.

9.3 Взаємодія паралельних провідників зі струмом

Одиниця струму *1А*, яка названа в честь німецького фізика Ампера, у системі СІ встановлюється саме з сили амперівської взаємодії паралельних провідників зі струмом. Наприклад, два нескінченних прямих паралельних провідники зі струмами I_1 та I_2 розташовані на відстані a (рис.9.3.1). Виберемо на кожному провіднику елемент довжиною l і кожен з цих елементів знаходиться у магнітному полі сусіднього провідника. Так, другий провідник зі струмом I_2 знаходиться в магнітному полі з індукцією $B_1 = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi a}$ прямого нескінченного провідника зі струмом I_1 і на його елемент l діє сила Ампера

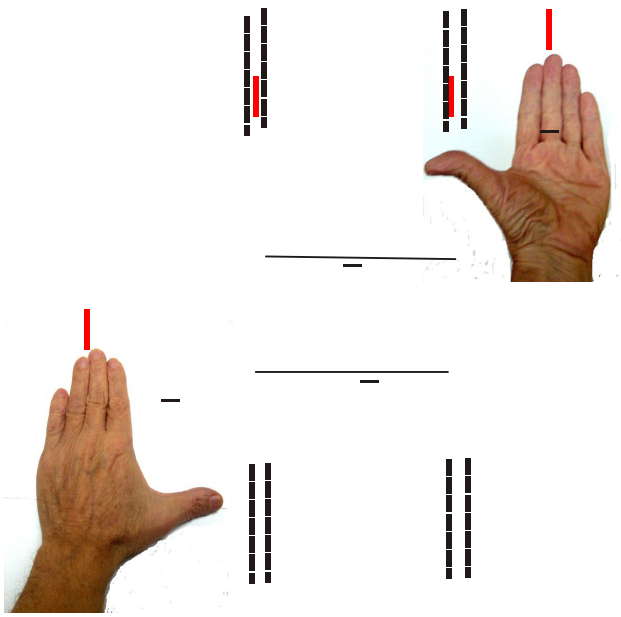


Рисунок 9.3.1

$$F_{21} = I_2 B_1 l = \frac{\mu_0}{2\pi a} l \cdot I_2 I_1 . \qquad (9.3.1)$$

Напрям цієї сили F_{21} легко зрозуміти з рис.9.3.1. Оскільки перший провідник знаходиться в магнітному полі другого провідника, то по аналогії з формулою (9.3.1) можна записати:

$$F_{12} = I_1 B_2 l = \frac{\mu_0}{2\pi a} l \cdot I_1 I_2 . \qquad (9.3.2)$$

Згідно сили магнітної взаємодії між нескінченними паралельними провідниками в системі СІ встановлюється одиниця сили струму **ампе́р** (**А**). ***Ампер дорівнює силі такого постійного струму, який, протікаючи по двох прямих паралельних нескінченних провідниках і дуже малого поперечного перерізу, розміщених на відстані 1 метр один від одного у вакуумі, створював би між цими провідниками силу $2 \cdot 10^{-7}$ ньютонів на кожний метр довжини.***

Встановивши одиницю струму IA, легко визначити значення магнітної сталої. Так, якщо $I_1 = I_2 = 1A$, $a = 1м$ та $F = 2 \cdot 10^{-7} H$, то згідно (9.3.1) або (9.3.2) $2 \cdot 10^{-7} H = \frac{\mu_0 м}{2\pi\, м} A^2$, звідки $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H \cdot м}{A^2 м}$ або $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Гн}{м}$, (*Гн (генрі)* – одиниця індуктивності).

9.4 Дія магнітного поля на рухомий заряд. Сила Лоренца

Розглядаючи силу, яка діє на провідник зі струмом в магнітному полі, ми вказували, що ця сила є результатом дії магнітного поля на рухомі заряди. Отже, формулу сили Ампера можна виразити через силу, яка діє на окремі рухомі заряди в магнітному полі. Для цього виділимо в провіднику зі струмом I деякий елемент довжиною l та площею нормального поперечного перерізу S, який знаходиться в магнітному полі з індукцією B (рис. 9.4.1). На цей провідник діє сила Ампера, модуль якої дорівнює

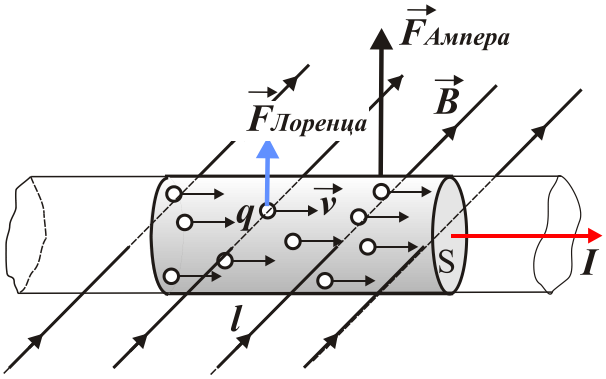


Рисунок 9.4.1

$$F_A = IBl\sin\alpha \,. \qquad (9.4.1)$$

Будемо вважати, що струм у провіднику зумовлений рухом вільних додатних зарядів q, а середня швидкість впорядкованого руху становить v. Тоді сила струму в цьому провіднику дорівнює

$$I = n\,q\,v\,S \,, \qquad (9.4.2)$$

де n – концентрація вільних зарядів у провіднику. Враховуючи, що концентрація визначається відношенням кількості N вільних зарядів до об'єму V ($n = N/V$), а об'єм виділеного елемента $V = l\,S$, то

$$I = \frac{1}{l} N\,q\,v \,. \qquad (9.4.3)$$

Підставивши це значення струму в формулу сили Ампера (9.4.1), отримаємо:

$$F_A = N(q \cdot v \cdot B\sin\alpha) \,. \qquad (9.4.4)$$

Отже, сила, яка діє лише на один рухомий заряд в магнітному полі, визначається відношенням загальної сили $F_Л$ до кількості зарядів N:

$$F_Л = q\,v\,B\sin\alpha \qquad (9.4.5)$$

або у векторній формі

$$F_Л = q\left[\vec{v} \times \vec{B}\right] \,. \qquad (9.4.6)$$

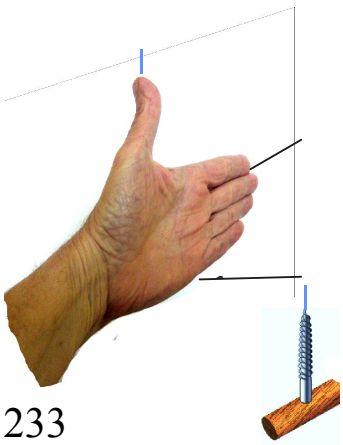


Рисунок 9.4.2

Вираз (9.4.6) був вперше отриманий нідерландським фізиком Лоренцом (1853-1928) і тому сила яка діє на рухомий заряд отримала назву сили Лоренца. Сила Лоренца для додатного заряду визначається за правилом лівої руки як це вказано на рис.9.4.2.

Користуючись формулою (9.4.5) можна дати інше еквівалентне означення одиниці індукції магнітного поля. Так, якщо $\alpha = 90^0$, то сила Лоренца приймає максимальне значення, звідки

$$B = \frac{F_{Л\max}}{q \cdot v} . \qquad (9.4.7)$$

$$[B] = \frac{H}{Кл \cdot \frac{м}{с}} = \frac{H}{А \cdot с \cdot \frac{м}{с}} = \frac{H}{А \cdot м}$$

І тоді , тобто $[B] = Тл$. Таким чином, на основі сили Лоренца, ***1Тл – індукція такого магнітного поля, в якому на одиничний точковий заряд, що рухається зі швидкістю*** $1 м/с$ ***, діє максимальна сила*** **1** ***Н.***

До речі таке означення індукції магнітного поля є фізично найбільш коректним, адже в цьому означенні йде мова про визначення індукції магнітного поля у його заданій точці, де визначається сила що діє на одиничний точковий заряд який "проскакує" цю точку з одиничною швидкістю. Але експериментально визначити силу, що діє на рухомий заряд в магнітному полі у заданій точці поля, значно складніша задача ніж визначення сили, яка діє на елемент провідника зі струмом або моменту сили, який обертає контур зі струмом у магнітному полі.

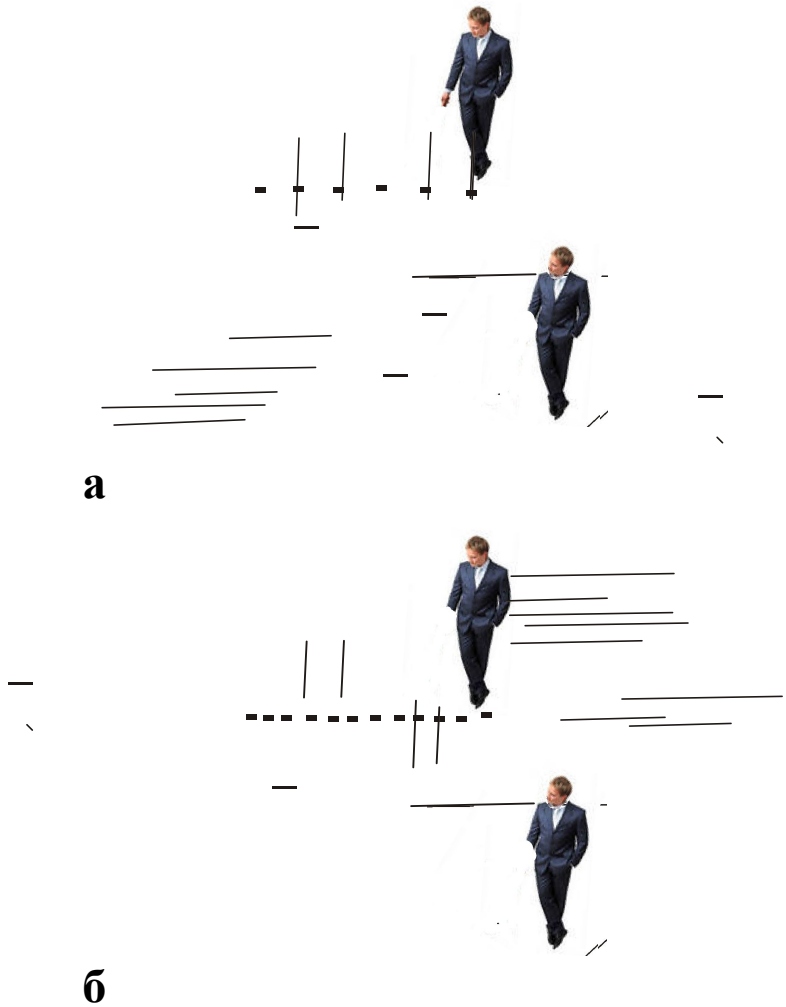
У загальному випадку на рухомий заряд, крім магнітного поля, може ще діяти електростатичне поле напруженістю $\vec{E}$. Тоді результуюча сила дорівнює сумі сил електричної та магнітної дії, тобто

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v} \times \vec{B}] . \qquad (9.4.8)$$

9.5 Магнетизм як релятивістський ефект

Між електрикою та магнетизмом існує тісний зв'язок. На основі спеціальної теорії відносності покажемо, що магнітна взаємодія рухомих зарядів з магнітним полем струму може бути пояснена як

електрична взаємодія. Опускаючи громіздкий математичний вивід, розглянемо фізичну суть такого зв'язку – а саме, як магнітна взаємодія "перетворюється" в електричну. Тому спочатку звернемося до раніше відомого явища – в магнітному полі з індукцією B перпендикулярно до його силових ліній зі швидкістю v рухається додатній заряд q. Тоді на нього діє сила Лоренца $F_Л = qvB$. На рис. 9.5.1 магнітне поле створюється струмом і спостерігач К (рис. 9.5.1 а), який "стоїть" на провіднику бачить, що повз нього "мчиться" заряд q разом зі спостерігачем K'. Спостерігач К, "заглянувши" всередину провідника встановив, що електричний струм зумовлений рухом вільних додатних і від'ємних зарядів. Ці заряди можна уявити як своєрідний ланцюжок. Ланцюжок додатних зарядів рухається праворуч, від'ємних – ліворуч зі швидкістю u – швидкістю їх впорядкованого руху. Оскільки провідник електрично нейтральний, то лінійна густина ланцюжків додатних і від'ємних зарядів, відстань між якими l_0, однакова.



а

б

Рисунок 9.5.1

А що тепер скаже про це спостерігач K', який разом з зарядом q перебувають на одній площині (рис. 9.5.1б)? Для спостерігача K' заряд нерухомий у магнітному полі провідника зі струмом. Але ж на нерухомі заряди сила Лоренца не діє. А що стверджує перший постулат теорії відносності Ейнштейна? Він стверджує, що всі закони природи однакові в усіх інерційних системах відліку, а в нашому випадку бачимо протиріччя. Для спостерігача K, який "стоїть чи сидить" на

провіднику зі струмом, на рухомий заряд діє сила Лоренца, а для спостерігача K', який бачить цей заряд нерухомим в магнітному полі провідника зі струмом, сила Лоренца не діє. Вихід з протиріччя дає знову ж таки теорія відносності Ейнштейна, з якої випливає, що при однаковості фізичних законів в різних інерційних системах відліку, відносними можуть бути лише значення окремих фізичних величин, що входять в ці закони. В нашому випадку цей позірний парадокс – "є сила Лоренца, немає сили Лоренца" легко розв'язується відносністю лінійних розмірів тіл в різних інерційних системах відліку. Так, з точки зору спостерігача K', який бачить нерухомий заряд, провідник зі струмом "мчиться" повз нього зі швидкістю v, тобто з тією самою швидкістю, що "мчався" заряд q для спостерігача K в протилежному напрямі. Отже, для спостерігача K' згідно наслідків з теорії відносності Ейнштейна, відстань між зарядами в їх ланцюжку, які разом з провідником рухаються зі швидкістю v, стане меншою, тобто

$$l \square l_0 \sqrt{1 \square \frac{v^2}{c^2}} .$$

Оскільки ці ланцюжки самі рухаються в провіднику зі швидкістю u, то як видно з рисунку відстань l_- між від'ємними зарядами буде меншою ніж відстань l_+ між додатними зарядами. Дійсно, від'ємний "ланцюжок" відносно K' рухається зі швидкістю $v+u$, а додатний $v-u$. Таким чином відносно K' рухомий провідник виявиться від'ємно зарядженим і поле цього від'ємного заряду буде діяти на нерухомий заряд з такою ж самою силою як магнітне поле цього провідника на рухомий заряд. Отже, на рухомий заряд в магнітному полі провідника зі струмом діє сила Лоренца ($F_Л$, рис.9.5.1а). Якщо заряд вважати нерухомим, а рухається провідник з таким же струмом, то на нерухомий заряд буде діяти така ж сама за величиною і напрямом сила як сила Лоренца, але електричного походження ($F_{ел}$,рис.9.5.1б). Зазначимо, що прояв електричного і магнітного полів має не абсолютний, а відносний характер. У природі існує електромагнітне поле, а його окремі випадки у вигляді електричного або магнітного полів залежать від систем відліку в яких вивчається їх дія.

9.6 Ефект Холла та його застосування

Американський фізик Е.Холл (1855-1938) відкрив явище виникнення в провіднику зі струмом, розташованим в магнітному полі, електричного поля напрямленого перпендикулярно до напряму струмів та магнітного поля і це явище отримало назву ефекту Холла. Щоб зрозуміти механізм ефекту Холла, розглянемо провідник прямокутної форми і нехай носіями струму у такому провіднику є вільні додатні заряди. Під'єднаємо до провідника джерело постійного струму. Тоді при силі струму I вільні заряди набудуть впорядкованого руху з деякою швидкістю v. Якщо такий провідник зі струмом помістити в магнітне поле перпендикулярно до напряму струму, тобто і перпендикулярно до напряму швидкості руху вільних зарядів, то під дією сили Лоренца, як показано на рис. 9.6.1, траєкторія їх руху зміниться, у результаті чого на "верхній" поверхні провідника буде надлишок додатних зарядів (знак "+"), а на нижній поверхні їх недостача (знак"-"), у результаті чого в такому провіднику виникне електричне поле. А тепер кількісно встановимо співвідношення, які характеризують ефект Холла, тобто визначимо напруженість Е електричного поля яке виникає в провіднику показаному рис. 9.6.1 за відомої в ньому сили струму та відомої величини заряду q провідності, якщо вектор індукції магнітного поля перпендикулярний бічній поверхні цього провідника.

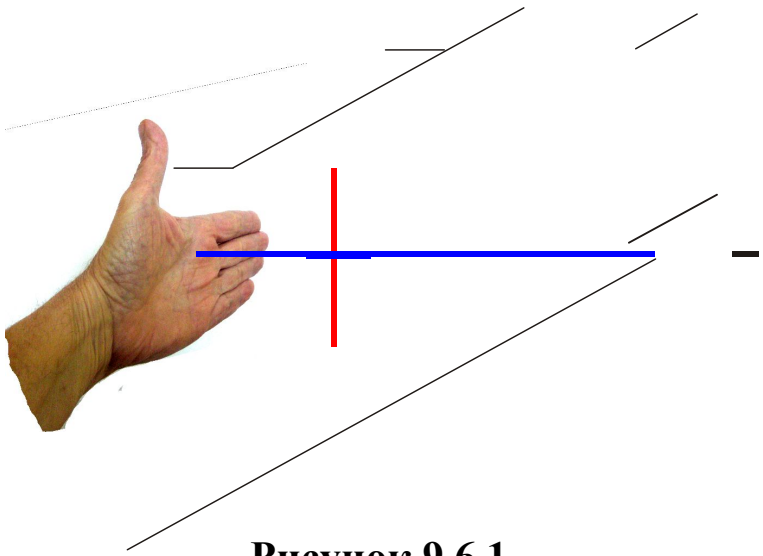


Рисунок 9.6.1

Оскільки для визначення сили Лоренца ($F_Л = qvB$) необхідно знати величину швидкості заряду *v*, то з формули $I = nqvS$

$$v = \frac{I}{nqS}. \qquad (9.6.1)$$

Отже,

$$F_Л = \frac{BI}{nS}. \qquad (9.6.2)$$

В результаті дії на рухомі заряди сили Лоренца виникає електричне поле, і тоді на заряди буде діяти електростатична сила з боку цього поля $F = qE$. Перерозподіл зарядів в провіднику триватиме доти, поки рівнодійна сил у вертикальному напрямі не стана рівна нулю, тобто $F_Л = F_{ел}$. Отже,

$$\frac{BI}{nS} = qE, \qquad (9.6.3)$$

звідки напруженість електричного поля в провіднику, що виникає в ньому за рахунок ефекту Холла, дорівнює:

$$E = \frac{BI}{nqS}. \qquad (9.6.4)$$

Обчисливши таку напруженість електричного поля, можна визначити різницю потенціалів $\Delta\varphi$, яка при цьому виникає на протилежних поверхнях провідника. Оскільки $E = \frac{\Delta\varphi}{a}$ (зв'язок напруженості електричного поля з різницею потенціалів) та $S = a\,b$, то

$$\Delta\varphi = \frac{1}{qn} \cdot \frac{IB}{b}. \qquad (9.6.5)$$

Рисунок 9.6.2

Величину $\frac{1}{qn}$ називають сталою Холла і позначають R_x.

Розглядаючи механізм та вивід формули різниці потенціалів Холла ми вважали, що носіями струму в провіднику є вільні додатні заряди. В металах вільними зарядами є

електрони (негативні заряди), отже сила Лоренца, що діє на рухомі електрони в провіднику, матиме протилежний напрям. Тому протилежний напрям матиме і електричне холлівське поле в провіднику, тобто знак різниці потенціалів буде протилежним. Таким чином за допомогою ефекту Холла можна визначити вид носіїв заряду в провіднику. Особливо це має значення для напівпровідників, де можлива електронна (негативна) та позитивна (діркова) провідності. Крім того, експериментально визначивши сталу Холла, можна оцінити концентрацію вільних зарядів в провіднику. Оскільки холлівська різниця потенціалів $\Delta\varphi$ визначається добутком IB, то це дає змогу створити прилад для вимірювання індукції магнітного поля за допомогою давача Холла. Сучасний давач Холла – це тонка металева або напівпровідникова пластинка малих розмірів по якій протікає струм відомої сили. Якщо такий давач розташувати у магнітному полі і виміряти холлівську різницю потенціалів, то згідно формули (9.6.5) можна розрахувати індукцію цього поля. Такі розрахунки виконує прилад – магнітометр з цифровою індикацією отриманого результату. На рис.9.6.2 показаний вигляд сучасного цифрового магнітометра, де 1 – давач Холла, 2 – дисплей приладу зі значенням індукції магнітного поля в 32*мТл*.

8.7 Рух заряджених частинок в магнітному полі

Оскільки сила Лоренца перпендикулярна швидкості руху зарядженої частинки яка рухається в магнітному полі, то сила Лоренца роботи не виконує, а тільки змінює напрям її руху. Тому розглянемо окремі випадки руху зарядженої частинки в магнітному полі.

1. Частинка із зарядом q та масою m рухається зі швидкістю v в однорідному магнітному полі з індукцією B перпендикулярно до його силових ліній. Тоді сила Лоренца $F = qvB$, як сила перпендикулярна до швидкості частинки, змінює її напрям і надає їй нормального (доцентрового) прискорення $a = \frac{v^2}{R}$, тобто частинка

буде рухатись по колу деякого радіуса R. Згідно другого закону Ньютона $F = ma = m\dfrac{v^2}{R}$ і тому

$$qvB = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mv}{qB}. \qquad (9.7.1)$$

Звідси можна визначити відношення заряду q частинки до її маси m і це відношення називається питомим зарядом частинки:

$$\frac{q}{m} = \frac{v}{RB}. \qquad (9.7.2)$$

Наприклад, для електрона $\dfrac{e}{m_e} = 1{,}7588 \cdot 10^{11}\ \dfrac{Кл}{кг}$.

На основі формули (9.7.2) базується метод ***масспектрометрії***, метод визначення хімічного, фазового складу і молекулярної структури речовини шляхом реєстрації спектра мас йонів, утворених внаслідок іонізації атомів і (або) молекул речовини. Рис.9.7.1 ілюструє принцип роботи масс-спектрометра.

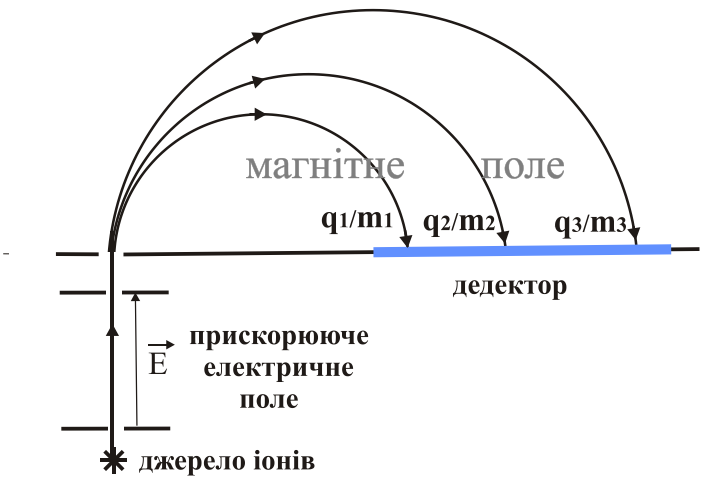


Рисунок 9.7.1

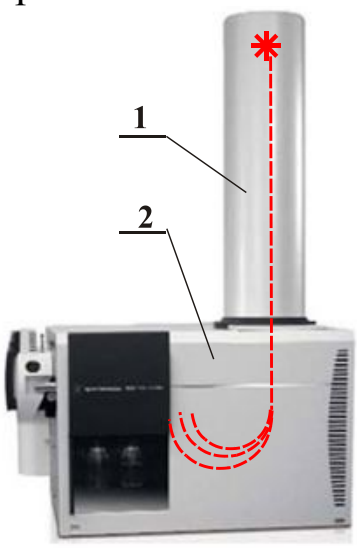


Рисунок 9.7.2

З джерела йонів досліджуваної речовини формується їх вузький потік, який прискорюється електричним полем, після чого потрапляє

в магнітне поле перпендикулярне швидкості йонів. В залежності від питомого заряду йонів, згідно формули (9.7.2), радіус кривизни їх траєкторій буде різним і це фіксується спеціальним детектором, який визначає різні точки "попадання" йонів з різними значеннями питомого заряду. Загальний вигляд сучасного портативного мас-спектрометра показаний на рис. 9.7.2. Його основними елементами є пристрій 1 в якому формується і прискорюється електричним полем пучок йонів досліджуваної речовини та блок 2 у якому відбувається відхилення йонів магнітним полем. В цьому ж блоці 2 розташований детектор та вся електронна вимірювальна система.

2. Якщо заряджена частинка рухається в однорідному магнітному полі не перпендикулярно до його силових ліній, то траєкторія руху частинки є гвинтова лінія (рис. 9.7.3). Дійсно, розклавши швидкість частинки v на дві складові v_τ – тангенціальну, яка співпадає з вектором B індукції магнітного поля та v_n – перпендикулярну до неї легко бачити, що частинка приймає участь у двох незалежних рухах: обертальному русі по колу зі швидкістю v_n, радіус якого згідно формули (9.7.1) дорівнює

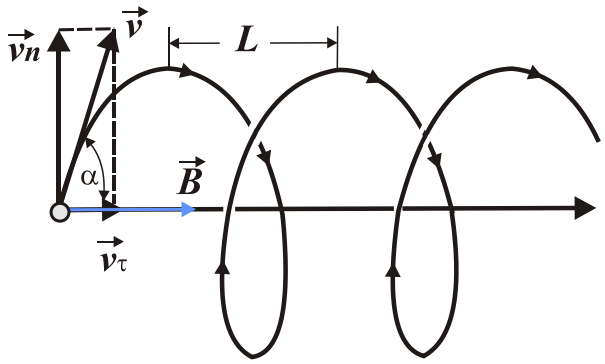


Рисунок 9.7.3

$$R = \frac{mv_n}{qB} \qquad (9.7.3)$$

та рівномірному зі швидкістю v_τ вздовж лінії індукції магнітного поля, що в результаті дає гвинтову (спіральну) траєкторію. За час рівний періоду обертання T частинки, вона вздовж поля з швидкістю v_τ пройде відстань L, яка називається кроком спіралі $L = v_\tau T$. Оскільки частинка по колу рухається зі швидкістю v_n, то $2\pi R = v_n T$, звідки $T = \frac{2\pi R}{v_n}$. Отже, $L = v_\tau \frac{2\pi R}{v_n}$, а враховуючи формулу (9.7.3) та те, що $v_\tau = v\cos\alpha$, отримаємо:

$$L = \frac{2\pi\, m}{q\, B} v \cos\alpha \quad . \qquad (9.7.4)$$

Про такий рух зарядженої частинки в магнітному полі по гвинтовій лінії говорять, що частинка "намотується" на силову лінію магнітного поля.

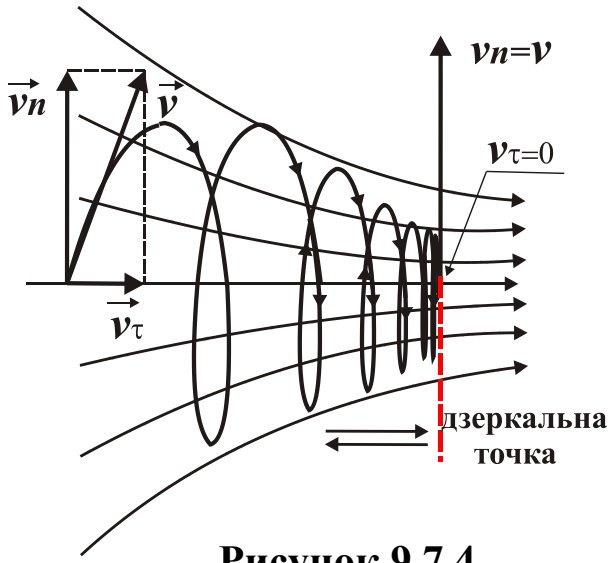


Рисунок 9.7.4

3. Особливий випадок руху зарядженої частинки в неоднорідному магнітному полі. Наприклад, заряджена частинка рухається в напрямі збільшення індукції магнітного поля так, як це показано на рис. 9.7.4. Навіть з формули (9.7.3) видно, що потрапляючи в область поля з більшою індукцією, радіус кола по якому рухається частинка буде зменшуватись. Але це ще не все. Треба мати на увазі, що обертальний рух заряду створює власне магнітне поле яке напрямлене протилежно зовнішньому полю і існує енергія взаємодії цих полів. Але в природі будь-яка система намагається зменшити свою енергію. Якщо магнітне поле однорідне, то енергія взаємодії зовнішнього і наведеного поля рухомого заряду в усіх точках однакова і тому рухомій зарядженій частинці байдуже в якій точці однорідного поля їй перебувати. Якщо поле неоднорідне, то енергія взаємодії полів буде менша в тій області простору, де менше зовнішнє поле. Тому в неоднорідному магнітному полі завжди існує сила, яка виштовхує рухому заряджену частинку з області сильнішого поля. І ця сила напрямлена уздовж градієнта індукції магнітного поля. Оскільки сила Лоренца роботи не виконує, адже її напрям перпендикулярний швидкості частинки, то її кінетична енергія змінюється, залишається сталим модуль повної швидкості. Тому рухома частинка, "виштовхуючись" з поля більшої індукції, буде зменшувати тангенціальну складову швидкості (швидкості в напрямі поля) і може наступити такий момент, коли ця складова стане рівна нулю та частинка зупиниться, продовжуючи обертатися зі швидкістю $v_n = v$, а після, продовжуючи обертатись, вона почне рухатися в

протилежному напрямі. Така точка неоднорідного магнітного поля, у якій наступає своєрідне явище подібне до відбивання частинки у протилежному напрямі, отримала назву дзеркальної точки. Далі буде показано, що магнітне поле Землі біля її полюсів є неоднорідним з дзеркальними точками, які для заряджених космічних частинок в магнітосфері Землі є своєрідними пастками. У лабораторних умовах магнітні пастки використовують для дослідження стосовно проблеми утримання суміші великого числа позитивно і негативно заряджених часток — плазми. Найпростіша схема магнітної пастки показана на рис. 9.7.5, де неоднорідне магнітне поле створюється двома котушками зі струмом. Вдосконалення магнітних пасток для плазми направлено на здійснення з їх допомогою керованої термоядерної реакції.

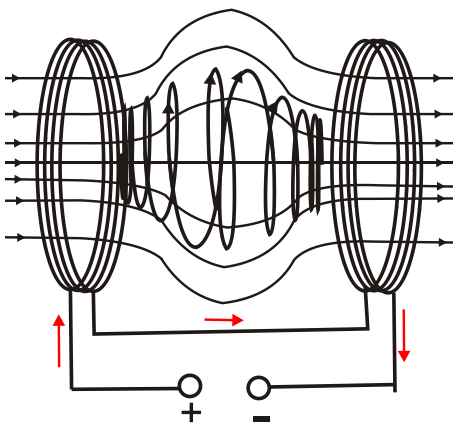


Рисунок 9.7.5

8.8 Елементи земного магнетизму

Земля володіє магнітним полем, що дозволяє вважати нашу планету магнітом з двома полюсами (північним і південним). Південний магнітний полюс знаходиться в північній півкулі на півострові Бутія, на самій півночі Канади, а північний — в південній півкулі в Антарктиді. Силові лінії, що йдуть від одного полюса до іншого, називаються магнітними меридіанами. Вони не збігаються з географічними за напрямом, а тому магнітна стрілка компаса не вказує строго напрям північ-південь. Спрощено магнітне поле Землі можна уявити собі як поле магнітного диполя, нахиленого приблизно під кутом 10° відносно осі обертання Землі (рис. 9.8.1). Кут між магнітним і географічним меридіанами називають магнітним схиленням. Магнітним меридіаном називається проекція силових ліній магнітного поля Землі на її поверхню. Наявність магнітного поля Землі пов'язують з протіканням струмів в її рідкому металевому ядрі. Магнітний момент Землі дорівнює $2 \cdot 10^{22}$ *А·м*². Середня напруженість магнітного поля біля поверхні Землі дорівнює 40 *А/м*. В деяких місцях Землі величини, які характеризують магнітне поле, різко відрізняються від середніх значень і ці місця отримали назву

Рисунок 9.8.1

магнітних аномалій, які пояснюються покладами гірських порід з вмістом залізної руди, наприклад Криворізька магнітна аномалія.

Ділянка навколоземного простору, фізичні властивості якої визначаються магнітним полем Землі, називається її ***магнітосферою.*** Незважаючи на назву, магнітосфера за формою зовсім не сферична, а має складну форму, яка була встановлена прямими вимірюваннями за допомогою супутників. Складна форма магнітосфери Землі зумовлена так званим сонячним вітром – потоком заряджених частинок від Сонця, які створюють своє магнітне поле що впливає на магнітне поле Землі.

Магнітосфера Землі вкрай асиметрична (рис. 9.8.2): з боку Сонця магнітне поле сильно стиснуте, а з протилежного боку навпаки, дуже витягнуте і утворює довгий, до 1 млн. км, магнітосферний хвіст. Це є наслідком обтікання магнітосфери сонячним вітром. При цьому тут, залежно від тиску сонячного вітру, границя магнітосфери з боку Сонця магнітопауза то наближається до Землі (при зростанні тиску), то віддаляється (при його послаблені). Плазма сонячного вітру обтікає магнітосферу Землі з надзвуковою швидкістю, внаслідок чого перед магнітосферою утворюється ударна хвиля, яка відокремлена від магнітопаузи перехідною областю. Силові лінії геомагнітного поля, що відходять назад під дією сонячного вітру, утворюють хвіст або "шлейф" магнітосфери. Він розділений магнітонейтральним шаром на два сектори північний і південний. Всередині магнітосфери розташовані радіаційні пояси. Вони складаються із заряджених частинок протонів і електронів, захоплених магнітними полем Землі з потоку сонячного вітру. Радіаційні пояси утворюють в атмосфері шар

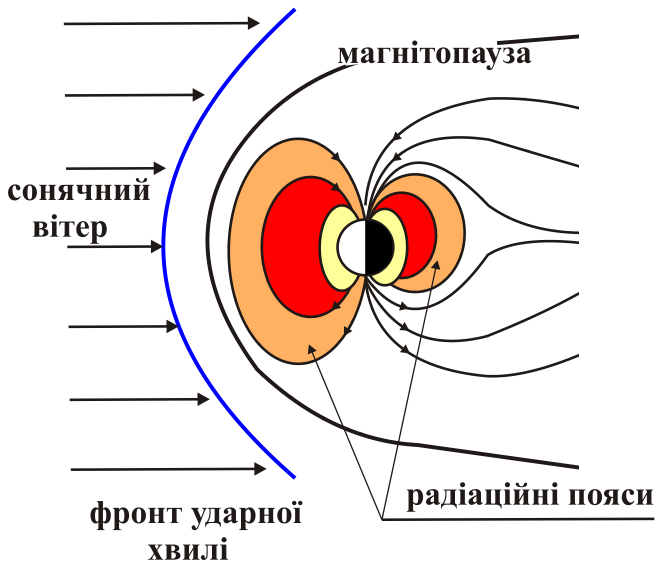


Рисунок 9.8.2

іоносфери і вважаються областю захопленої радіації: вони є магнітними пастками для заряджених частинок космосу.

Радіаційні пояси Землі відкриті американським вченим Ван-Алленом під час досліджень супутника Експлорер-1 за програмою міжнародного геофізичного року (1958) і їх називають поясами Ван-Аллена. Заряджені частки поблизу магнітних полюсів, де магнітні силові лінії входять в земну поверхню, взаємодіють із верхніми шарами атмосфери (іоносферою), іонізують молекули і спричинюють полярні сяйва. У разі відсутності магнітосфери у Землі біологічно активна складова сонячного випромінювання безперешкодно надходила би до земної поверхні й згубно впливала на усе живе.

У періоди підвищення сонячної активності відбуваються так звані магнітні бурі — швидкі та сильні зміни в магнітному полі Землі.

Геомагнітні бурі впливають на багато областей діяльності людини, з яких можна виділити порушення зв'язку, систем навігації космічних кораблів тощо. Також магнітні бурі можуть негативно впливати на самопочуття та здоров'я людей.

Контрольні запитання

1 *Як вводиться поняття індукції магнітного поля та яка її одиниця вимірювання в системі СІ?*
2 *За якою формулою визначається магнітний момент контуру і за яким правилом визначається напрям вектора магнітного моменту контуру?*
3 *У чому полягає метод графічного зображення магнітного поля за допомогою ліній магнітної індукції (силових ліній)? Який вигляд мають силові лінії магнітного поля прямого провідника зі струмом, соленоїда та постійного магніту?*
4 *Як вводиться поняття потоку вектора магнітної індукції і в яких одиницях він вимірюється?*
5 *Як формулюється та записується в інтегральній і диференціальній формі теорема Гауса для потоку вектора магнітної індукції?*
6 *Як пояснити доцільність введення напруженості магнітного поля і яка одиниця її вимірювання в системі СІ?*
7 *Яка формула закону Біо-Савара-Лапласа для розрахунку напруженості магнітного поля елемента провідника зі струмом і яким рисунком можна ілюструвати цей закон?*

8 *Як обчислити за законом Біо-Савара-Лапласа напруженість магнітного поля прямого та колового провідників зі струмом?*
9 *Як вводиться поняття циркуляції вектора напруженості магнітного поля і як виводиться закон про цю циркуляцію (закон повного струму) в інтегральній та диференціальній формах?*
10 *Як, користуючись законом повного струму, обчислити напруженість магнітного поля нескінченого соленоїда?*
11 *Як діє магнітне поле на провідник зі струмом та за якою формулою можна визначити цю дію?*
12 *Як визначити роботу при переміщенні провідника зі струмом в магнітному полі?*
13 *Як із взаємодії паралельних провідників зі струмом у системі СІ встановлюється одиниця сили струму 1А?*
14 *Як формула сили Лоренца у скалярній та векторній формі описує дію магнітного поля на рухомий заряд? За яким правилом і як визначається напрям сили Лоренца?*
15 *Чому на прикладі дії магнітного поля провідника зі струмом на рухомий заряд магнетизм можна вважати релятивістським ефектом?*
16 *У чому полягає ефект Холла та яке його застосування?*
17 *Яка і чому траєкторія руху зарядженої частинки у магнітному полі, якщо: а) частинка рухається в однорідному магнітному полі перпендикулярно або під довільним кутом до ліній індукції цього магнітного поля?; б) частинка рухається в неоднорідному магнітному полі?*
18 *Що собою являє магнітосфера Землі та який вплив на неї сонячного вітру?*
19 *Який механізм утворення радіаційних поясів Землі?*
20 *Чим зумовлені магнітні бурі і які наслідки вони спричиняють?*

Розділ 10 Магнітні властивості речовини. Постійне магнітне поле в речовині

У попередньому розділі, не розглядаючи магнітних властивостей речовини було вказано, що є така фізична величина як магнітна проникність речовини (μ) і вона показує у скільки разів індукція магнітного поля у цій речовині відрізняється від індукції магнітного поля у вакуумі. Щоб з'ясувати вплив магнітного поля на речовину, необхідно вивчити процеси які відбуваються під дією зовнішнього магнітного поля на атоми і молекули речовини. Тому перш за все з'ясуємо, чи є атоми і електрони тими елементами, які "чутливі" до зовнішнього магнітного поля і в кінцевому результаті можуть визначати магнітні властивості речовини.

9.1 Магнітні моменти електронів і атомів

Уперше гіпотезу про природу магнетизму в речовинах висунув Ампер. Він допустив, що всередині речовини циркулюють молекулярні струми, які створюють магнітні поля. Тепер ця гіпотеза не викликає сумніву, адже електрон, який обертається навколо ядра атома, можна вважати тим струмом, що створює магнітне поле. Але врахуйте, що гіпотеза Ампера була сформульована на початку 19 ст. коли взагалі не було ніяких уявлень про будову атома та електрони і тому гіпотеза Ампера на той час була надзвичайно сміливим науковим передбаченням, яке згодом отримало беззаперечне підтвердження. Тому спочатку з точки зору класичної фізики про будову атома, в якому навколо ядра обертаються електрони, з'ясуємо магнітні властивості атома.

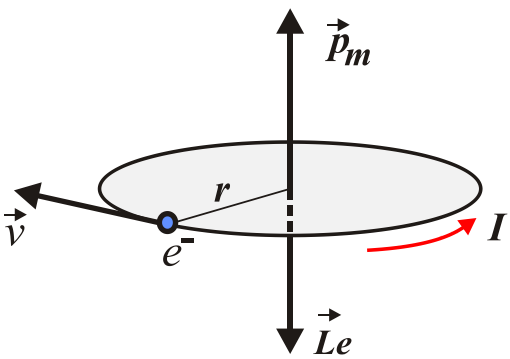


Рисунок 10.1.1

Припустимо, що електрон в атомі рухається по круговій орбіті радіуса r зі швидкістю v (рис. 10.1.1) Оскільки за напрям струму вибрали напрям руху додатних зарядів, то струм, що зумовлений орбітальним рухом електрона як від'ємного заряду має напрям протилежний його руху. Згідно

означення магнітного моменту контуру зі струмом, орбітальний магнітний момент електрона дорівнює

$$p_m = IS = I\pi r^2, \qquad (10.1.1)$$

де S – площа орбіти електрона. Напрям вектора $\vec{p}_m$ визначається за відомим правилом свердлика. Оскільки рух електрона еквівалентний електричному струму, то сила цього струму дорівнює відношенню заряду e електрона до періоду T його обертання, тобто

$$I = \frac{e}{T}. \qquad (10.1.2)$$

При швидкості v електрон за час T по коловій орбіті радіуса r пройде шлях рівний довжині цього кола: $2\pi r = vT$, звідки $T = \frac{2\pi r}{v}$. Отже, $I = \frac{ev}{2\pi r}$. Підставивши це значення струму в (10.1.1), отримаємо:

$$p_m = \frac{evr}{2}. \qquad (10.1.3)$$

Також електрон, що обертається по коловій орбіті, володіє моментом імпульсу, який називають орбітальним і він як для матеріальної точки яка рухається по колу радіуса r зі швидкістю v чисельно дорівнює

$$L_e = mvr. \qquad (10.1.4)$$

З формул (10.1.3) і (10.1.4) випливає наступне значення відношення числового значення орбітального магнітного моменту електрона до числового значення його орбітального моменту імпульсу, яке отримало назву ***гіромагнітного відношення g*:**

$$g = \frac{p_m}{L_e} = \frac{e}{2m}. \qquad (10.1.5)$$

Оскільки вектори $\vec{p}_m$ та $\vec{L}_e$ мають протилежні напрями, то

$$\vec{p}_m = -\left(\frac{e}{2m}\right)\vec{L}_e = -g\vec{L}_e. \qquad (10.1.6)$$

Блискуче експериментальне підтвердження наявності орбітальних магнітних моментів у 1915 р. було здійснено Ейнштейном та нідерландським фізиком де Гаазом. Ідея досліду дуже проста (її ілюструє рис. 10.1.2). У відсутності зовнішнього магнітного поля орбітальні магнітні моменти в тілі (вектори $\vec{p}_m$) орієнтовані хаотично (рис.10.1.2а). В досліді Ейнштейна-де Гааза таким тілом був тонкий залізний циліндр 2, підвішений на пружній нитці 4 та розташований всередині соленоїда 1. Якщо тепер створити магнітне поле (пропускаючи струм через соленоїд), то орбітальні магнітні моменти $\vec{p}_m$ електронів "вишикуються" в напрямі вектора $\vec{B}$ індукції цього поля. Відповідно однакову орієнтацію, тільки у протилежному напрямі, займуть вектори $\vec{L}_e$ орбітальних моментів імпульсів електронів. Якщо сумарний момент імпульсу всього циліндра та всіх електронів дорівнює нулю і циліндр не обертається, то в іншому випадку циліндр почне обертатись у протилежному напрямі обертання електронів (рис.10.1.2б) згідно фундаментального закону збереження моменту імпульсу. Механічну модель цього явища можна відтворити, посадивши людину на крісло що може обертатись. Якщо тепер дати людині, наприклад, велосипедне колесо, яке вона

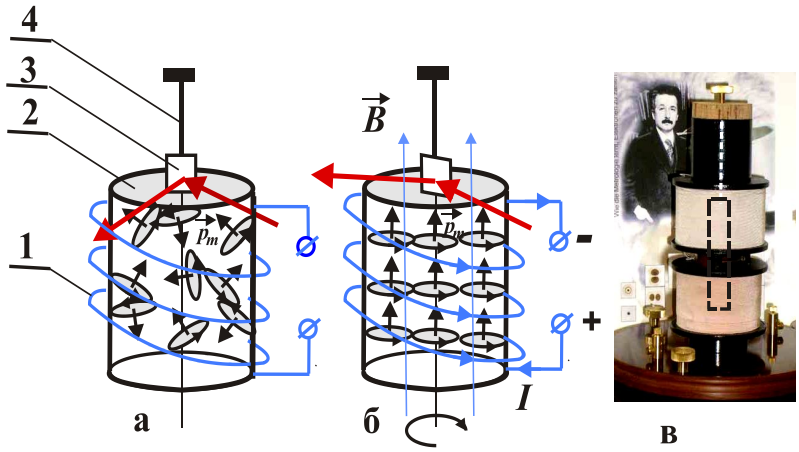


Рисунок 10.1.2

почне над собою обертати, то вона сама і крісло будуть обертатись в протилежному напрямі.

У досліді Ейнштейна-де Гааза обертання циліндра фіксувалось за змішенням відбитого променя від дзеркала встановленого на циліндрі. Оскільки обертання циліндра було незначним, то для підсилення ефекту був застосований метод резонансу – до соленоїда підводився змінний струм,частота якого підбиралась рівній частоті власних крутильних коливань циліндра. На рис.10.1.2в показаний загальний вигляд експериментальної установки досліду Ейнштейна-де Гааза та зображення самого Ейнштейна.

В результаті проведених дослідів було встановлено гіромагнітне відношення, яке виявилось рівним $\frac{e}{m}$, тобто в два рази більше теоретичного значення. Аналогічне значення гіромагнітного відношення, також у два рази більшого за теоретичне, отримав в своїх дослідах Барнет. Ідея досліду Барнета дуже проста. Так, магнітні орбітальні моменти електронів, відповідні їм механічні моменти імпульсів в не намагніченому тілі орієнтовані хаотично (рис.10.1.3а). Якщо це тіло (в дослідах Барнета залізний стержень) привести в швидкий обертовий рух, то орбітальні механічні моменти імпульсів електронів згідно законів динаміки обертального руху "вишикуються" в напрямі осі обертання цього стержня. Відповідно одну орієнтацію вздовж осі обертання (тільки в протилежному напрямі) займуть орбітальні магнітні моменти електронів (рис.10.1.3б) в результаті чого стержень виявиться намагніченим. Визначаючи це намагнічення Барнет встановив, що гіромагнітне відношення у два рази більше теоретичного.

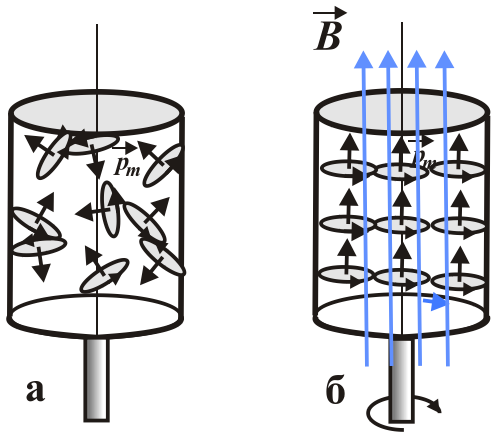


Рисунок 10.1.3

В подальшому було встановлено, що за цю половину магнітного моменту, якої не вистачає, відповідають електрони, тобто сам електрон володіє власним магнітним моментом який отримав назву ***спінового магнітного моменту*** (p_{ms}). Таку назву він отримав тому, що спочатку вважали електрон маленькою кулькою, яка обертається

(з англійської ***to spin*** – обертатись). Але згодом від такої спрощеної механічної моделі довелось відмовитись, оскільки вона приводила до суттєвих суперечностей. Тому в даний час наявність власного механічного моменту електрона (***спіна***) та пов'язаного з ним магнітного моменту електрона приймається як його невід'ємна властивість (так само як маса та заряд). Це важко уявити – ніякого струму "всередині" електрона немає для створення його магнітного моменту, а електрон все-таки володіє магнітним моментом. Якщо вважати умовно електрон як об'єкт радіуса порядку $10^{-23}\,м$, адже електрон не є маленькою кулькою і на рис.10.1.4*а* він умовно зображений колом без чіткого контуру та вказаний вектор його спінового магнітного моменту. Оскільки згідно теорії Бора електрон в атомі може приймати дискретні значення енергії, то власний магнітний момент електрона отримав назву ***магнетона Бора***, який позначається μ_B і дорівнює $0{,}927\cdot10^{-23}\,А\cdot м^2$, тобто магнетон Бора еквівалентний магнітному моменту колового провідника, площа контуру якого $S=\pi R^2=1м^2$ та струм силою $0{,}927\cdot10^{-23}\,А$ (рис.10.1.4*б*).

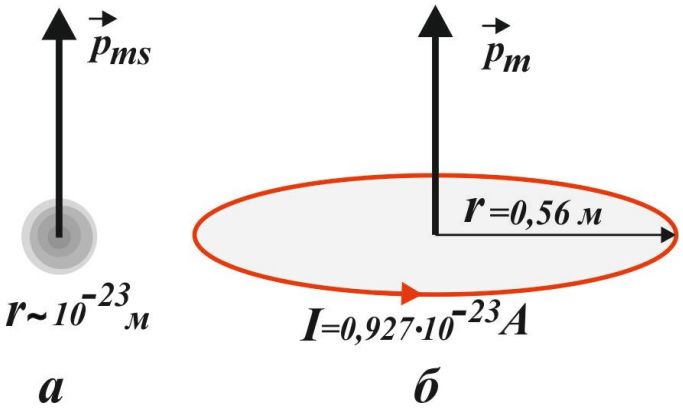


Рисунок 10.1.4

Отже, магнітний момент атома складається з орбітальних та спінових магнітних моментів електронів, а також з магнітного моменту ядра, який зумовлений магнітними моментами протонів та нейтронів. Але магнітний момент ядра значно менший магнітних моментів електрона, а тому в більшості випадків ними можна нехтувати і магнітний момент атома чи молекули можна вважати рівним сумі магнітних моментів всіх електронів що входять у склад цього атома чи молекули.

9.2 Намагнічення магнетика. Типи магнетиків

Оскільки електрони, які входять в атоми чи молекули речовини володіють магнітними моментами, то в цілому речовина також може

володіти магнітним моментом, тобто стати магнітом, бути намагніченою. Отже, необхідна фізична величина яка б кількісно характеризувала це намагнічення. Якщо речовина не намагнічена, то сумарний магнітний момент атомів або молекул цієї речовини дорівнює нулю. Під дією зовнішнього магнітного поля магнітні моменти атомів чи молекул набувають переважної орієнтації і тим самим речовина намагнічується, тому намагніченість речовини природно характеризувати магнітним моментом одиниці об'єму цієї речовини. Цю величину називають ***вектором намагнічення*** або просто намагніченням і позначають $\vec{J}$. У випадку неоднорідної намагніченості, вектор намагнічення у даній точці речовини визначається наступним співвідношенням:

$$\vec{J} = \frac{\sum \vec{p}_m}{\Delta V}, \qquad (10.2.1)$$

де ΔV – фізично нескінченно малий об'єм в межах даної точки, де магнітні властивості речовини можна вважати однаковими, $\vec{p}_m$ – магнітний момент елемента речовини в цьому об'ємі ΔV.

Як випливає з формули (10.2.1) одиницею намагніченості речовини є $[J] = \frac{А \cdot м^2}{м^3} = \frac{А}{м}$, тобто така ж сама як одиниця напруженості магнітного поля. Тому дуже зручно визначати намагніченість речовини в залежності від напруженості зовнішнього магнітного поля. Тобто розташуємо досліджуваний магнетик (залізний стержень), наприклад, всередину соленоїда і змінюючи в ньому силу струму будемо змінювати напруженість H_0 намагнічуючого поля і одночасно з тим визначати намагніченість J досліджуваного феромагнетика. Але треба врахувати, що однакові за одиницями вимірювань намагніченість J та напруженість H_0 мають принципову фізичну відмінність. Так, напруженість магнітного поля є характеристикою поля макрострумів (струмів провідності в провідниках), а намагніченість визначається мікрострумами (електрони обертаються навколо ядра атома). Для багатьох

магнетиків в не надто сильних магнітних полях має місце практично лінійна залежність між J та H_0:

$$\vec{J} = \chi \vec{H}_0, \qquad (10.2.2)$$

де χ – безрозмірна величина, яка називається магнітною сприйнятливістю речовини (про відхилення від лінійної залежності J від H, особливо для феромагнетиків, буде сказано далі).

Якщо розрахунок напруженості магнітного поля макрострумів можна виконати за законом Біо-Савара-Лапласа, то як розрахувати магнітне поле в магнетику, поле його мікрострумів? Для цього розглянемо магнетик у вигляді циліндра довжиною l та площею поперечного перерізу S, що знаходиться в однорідному магнітному полі напруженістю H_0 (наприклад, поле створене зовнішніми макроскопічними струмами у соленоїді). Нехай вектор напруженості H_0 цього зовнішнього поля напрямлений вздовж осі циліндра і його магнічення вважаємо однорідним (рис. 10.2.1). Магнітні моменти p_m мікрострумів при цьому будуть орієнтовані вздовж осі циліндра, а самі струми своїми площинами повернуться перпендикулярно до цієї осі так, як вказано на рис.10.2.1. Приймаючи ці мікроструми коловими неважко з рис. 10.2.1 помітити, що всередині речовини напрями цих мікрострумів протилежні, а тому магнітні поля створені такими мікростумами всередині магнетика взаємно компенсуються. Зате колові струми на поверхні магнетика мають однакові напрями і "зливаються" в один струм силою ***I***, який ніби циркулює по поверхні магнетика. Якщо число таких циркулюючих струмів на поверхні циліндричного магнетика N, то сумарний магнітний момент таких колових струмів всього магнетика дорівнює

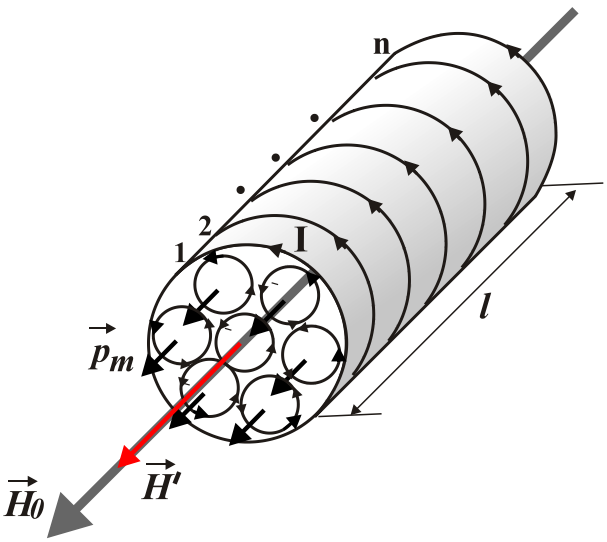


Рисунок 10.2.1

$$p_{mV} = \sum_V p_m = N(IS) \quad . \tag{10.2.3}$$

Розділивши дві частини цього рівняння на об'єм $V = Sl$ циліндричного магнетика і враховуючи, що $\frac{\sum_V p_m}{V}$ визначає намагніченість J магнетика, отримаємо:

$$J = \frac{IN}{l} \quad , \tag{10.2.4}$$

де права частина цієї рівності є не що інше як напруженість соленоїда зі струмом. В даному випадку – це поле особливого соленоїда, створеного коловими струмами «кінчиків» мікрострумів, яке в кінцевому результаті визначає напруженість $\vec{H}'$ магнітного поля самого магнетика. Отже,

$$\vec{J} = \vec{H}' \quad . \tag{10.2.5}$$

Таким чином результуюча напруженість $\vec{H}$ магнітного поля в магнетику визначається напруженістю H_0 зовнішнього магнітного поля макрострумів та напруженістю $\vec{H}'$ мікрострумів:

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}' \tag{10.2.6}$$

або враховуючи співвідношення (10.2.5)

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{J} \quad . \tag{10.2.7}$$

Оскільки $\vec{J} = \chi \vec{H}_0$, то

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + \chi \vec{H}_0 = \vec{H}_0(1 + \chi) \quad . \tag{10.2.8}$$

Беручи до уваги зв'язок між напруженістю та індукцією магнітного поля $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, можна записати:

$$\vec{B} = \vec{B}_0(1 + \chi) \tag{10.2.9}$$

Або, позначивши $(1 + \chi) = \mu$, дістанемо:

$$\mu = \frac{B}{B_0}. \tag{10.2.10}$$

Отже, μ – безрозмірна фізична величина, яка називається магнітною проникністю речовини, показує у скільки разів відрізняється індукція магнітного поля в речовині (як результат суперпозиції зовнішнього поля макрострумів та поля мікростумів) від індукції зовнішнього намагнічуючого поля.

Залежно від значень магнітної сприйнятливості χ або магнітної проникності μ речовини розрізняють такі типи магнетиків:

діамагнетики, для яких $\chi \le 0$ і згідно $\vec{J} = \chi \vec{H}_0$ це означає, що вектор намагнічення такої речовини протилежний напряму зовнішнього намагнічуючого поля. Так як $(1 + \chi) = \mu$, то для діамагнетиків $\mu \le 1$. Отже, діамагнетик зменшує модуль індукції магнітного поля в μ- разів. Наприклад, вода, яка є діамагнетиком, має $\chi = -0{,}000013$ і $\mu = 0{,}000087$. Діамагнетики надзвичайно «слабкі» магнетики. Їх намагнічення дуже мале і не зберігається після дії на них зовнішнього магнітного поля. Згодом буде показано, що діамагнетизм властивий усім магнетикам, але на фоні більш «сильного» намагнічення він практично непомітний;

парамагнетики, для яких $\chi \ge 0$ та $\mu \ge 1$ і це означає, що вектор намагнічення такої речовини співпадає з напрямом зовнішнього намагнічуючого поля. Отже, парамагнетики дещо збільшують модуль індукції магнітного поля. Наприклад, для кальцію, який є парамагнетиком, $\chi = +0{,}000044$ і $\mu = 1{,}000044$. Тобто в порівнянні з діамагнетиками, парамагнетики дещо підсилюють магнітне поле;

феромагнетики – особливий вид магнетиків, для яких значення магнітної сприйнятливості і магнітної проникності може навіть

досягати значень 10^4. Тобто феромагнетики є "сильними" магнетиками які, як буде згодом показано, крім великого значення магнітної проникності ще володіють особливими властивостями.

Перерахувавши основні типи магнетиків, розглянемо їх властивості.

10.3 Діамагнетизм

Діамагнетики, як вже вказувалось вище, це речовини, намагнічення яких протилежне напряму зовнішнього "намагнічуючого" поля. Механізм діамагнетизму можна пояснити на основі внутрішньої будови речовини. Основним елементом, чутливим в речовині до магнітного поля є атом, в якому електрони, що обертаються навколо ядра, володіють орбітальним магнітним моментом. Тому з'ясуємо, що відбувається з таким атомом у зовнішньому магнітному полі?

Електрон, який обертається навколо ядра, володіє орбітальним моментом імпульсу і якщо вісь обертання "штовхнути", то ця вісь, подібно до обертання дзиґи (рис.10.3.1*а*),почне здійснювати прецесію, тобто виникне додатковий обертальний рух і якщо сама дзиґа обертається з кутовою швидкість ω відносно "своєї" осі обертання, то сама вісь обертається відносно вертикальної осі зі значно меншою кутовою швидкістю Ω, яка називається кутовою швидкістю прецесії. В розділі "Механіка" було детально розглянуте явище прецесії, тому опустимо строгий математичний виклад прецесії електронної орбіти та розглянемо фізичний зміст цього явища наслідком якого є діамагнетизм.

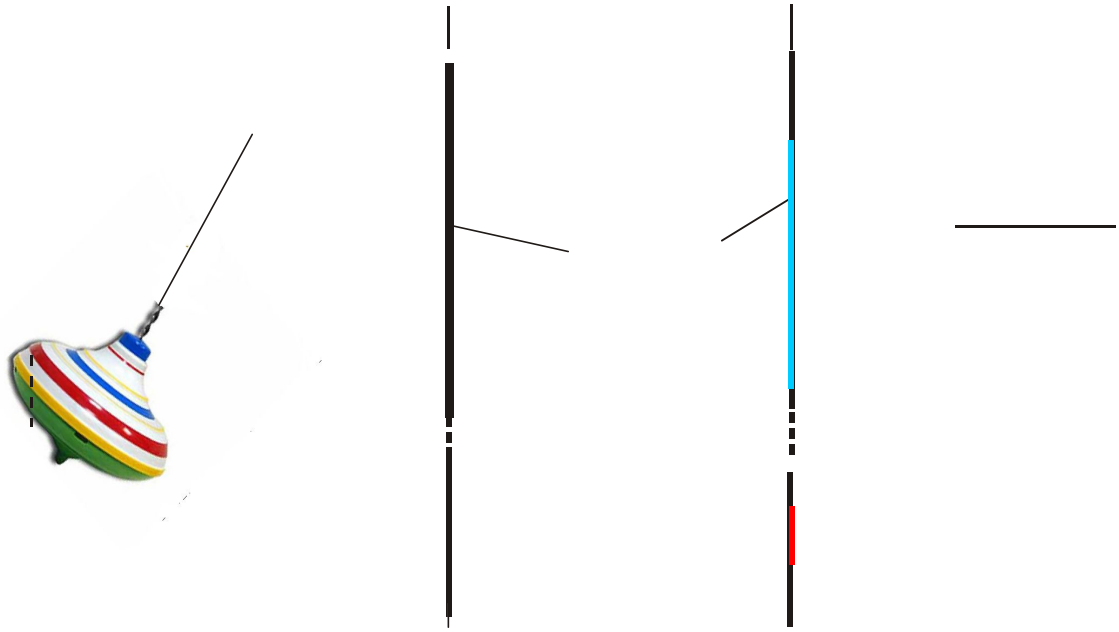


Рисунок 10.3.1

Так, якщо орбітальний магнітний момент електрона $\vec{p}_m$ складає деякий кут з напрямом індукції $\vec{B}$ зовнішнього магнітного поля, то під дією моменту сили $\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}]$ орбіта електрона буде здійснювати прецесійний рух з кутовою швидкістю Ω, яка дорівнює

$$\Omega = \frac{eB}{2m}. \qquad (10.2.3)$$

Дану кутову швидкість називають ***частотою ларморової прецесії*** або просто ***ларморовою частотою*** (Джозеф Лармор –ірландський фізик (1857-1942)). Ця частота не залежить ні від кута нахилу орбіти по відношенню до напряму магнітного поля, ні від радіуса орбіти та швидкості електронів, тобто вона однакова для всіх електронів які входять до складу атома.

Щоб переконатись, що прецесія зумовлює діамагнетизм, треба проаналізувати напрям всіх векторних величин, які "задіяні" в прецесії. Так, вектор $\vec{v}$ вказує напрям орбітальної швидкості електронів, а вектором $\vec{L}_e$ вказаний напрям орбітального моменту імпульсу електрона. Оскільки за напрям струму вибраний напрям руху додатних зарядів, то напрям орбітального струму протилежний напряму руху електронів як від'ємних зарядів. Згідно вказаного на рис.10.31б напряму орбітального струму проведений вектор $\vec{p}_m$

орбітального магнітного моменту електрона. В результаті прецесії вектори $\vec{L}_e$ та $\vec{p}_m$ обертаються відносно осі OZ, яка співпадає з вектором $\vec{B}$ індукції магнітного поля, з ларморовою частотою Ω значно меншою за кутову швидкість ω електрона. Порівнюючи два положення орбіти (рис 10.3.1*а* та 10.3.1*в*) бачимо, що напрям додаткового обертального руху електронної орбіти протилежний напряму орбітального руху електронів. Отже, напрям електричного струму $\Delta I_{прецесії}$ протилежний напряму орбітального струму, що створить додатковий магнітний момент $\Delta\vec{p}_m$ протилежний напряму зовнішнього магнітного поля. Тобто в результаті прецесії електронних орбіт виникає діамагнетизм. Але при цьому треба мати на увазі, що діамагнітні властивості мають ті речовини, в яких атоми не володіють власним магнітним моментом або векторна сума орбітальних та спінових магнітних моментів дорівнює нулю. В противному разі орієнтуюча дія зовнішнього магнітного поля на власні магнітні моменти атомів чи молекул значно переважає діамагнетизм. До таких явищ належать парамагнетизм та феромагнетизм.

10.4 Парамагнетизм

Парамагнетизм – це властивість речовин слабо намагнічуватися в напрямі дії зовнішнього поля. Зрозуміло, що речовини, яким притаманна така властивість, називаються парамагнетиками і кількісно така властивість характеризується близьким до одиниці значенням магнітної проникності – $\mu \geq 1$.

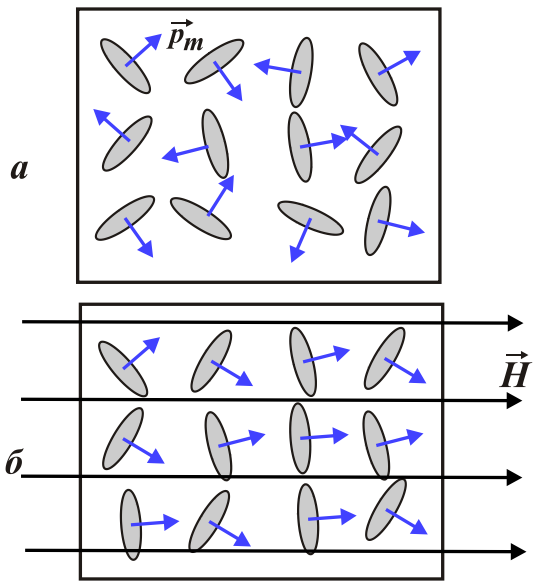


Рисунок 10.4.1

У відсутності зовнішнього магнітного поля магнітні моменти частинок парамагнетика внаслідок теплового руху орієнтовані хаотично (рис.10.4.1*а*) і сумарний магнітний момент парамагнетика дорівнює нулю. В зовнішньому магнітному полі вектори магнітних моментів частинок

парамагнетика орієнтуються в напрямі поля (цій орієнтації в певній мірі перешкоджає тепловий рух) в результаті чого має місце переважаюча орієнтація магнітних моментів частинок парамагнетика (рис.10.4.1*б*). У цьому випадку напрям магнітного поля збігається з напрямом зовнішнього поля і підсилює його. При збільшенні напруженості зовнішнього магнітного поля намагніченість парамагнетика зростає за законом $\vec{J} = \chi \vec{H}$. Разом з тим збільшення температури дезорієнтує впорядкований напрям магнітних моментів частинок парамагнетика, а тому його магнітна сприйнятливість зменшується і це зменшення описується експериментальним законом Кюрі:

$$\chi = \frac{C}{T}, \qquad (10.4.1)$$

де C – стала Кюрі, яка залежить від природи речовини.

Класична теорія парамагнетизму була створена французьким фізиком Ланжевеном (1872-1946), згідно якої стала Кюрі для моля речовини дорівнює

$$C = \frac{N_A p_m^2}{3k}. \qquad (10.4.2)$$

Але треба мати на увазі, що в сильних полях і за низьких температур спостерігаються відхилення від лінійної залежності намагніченості $\vec{J}$ парамагнетика від напруженості $\vec{H}$ магнітного поля. Зокрема, може настати стан магнітного насичення, при якому подальше збільшення напруженості магнітного поля вже не призводить до зростання намагніченості, оскільки всі магнітні моменти речовини орієнтовані вздовж поля.

9.5 Феромагнетизм

Щоб зрозуміти загально прийняте означення феромагнетизму як спонтанної намагніченості за температур нижче точки Кюрі необхідно з'ясувати, що таке спонтанна намагніченість та точка Кюрі.

Ряд магнітних властивостей феромагнетиків було встановлено ще в минулому столітті, але розуміння цих властивостей дає лише сучасна квантова фізика.

Згідно гіпотези французького фізика Вейса (1865-1940), яка пізніше експериментально підтвердилась, особливі властивості феромагнетиків зумовлені наявністю в них областей спонтанного (самовільного) намагнічення, які отримали назву ***доменів*** (від французького – володіння). Домени мають розміри порядку $10^{-2} – 10^{-3}$*мм*, в яких величезна кількість спінових магнітних моментів електронів строго орієнтовані в одному напрямі і причиною цього є квантові ефекти. В спонтанній орієнтації спінових моментів електронів основну роль відіграють особливі взаємодії, які в квантовій механіці називаються обмінними. Обмінна взаємодія приводить до того, що в феромагнетиках енергетично вигідним є стан, при якому спіни електронів в незаповнених оболонках сусідніх атомів є паралельними, в зв'язку з чим і виникає спонтанне намагнічення. Напрям спонтанного намагнічення визначається внутрішньою будовою феромагнетика. Наприклад, чисте залізо має внутрішню будову з об'ємноцентрових кубічних кристалічних решіток (рис. 10.5.1). Встановлено, що в такому залізі осями найбільш легкого намагнічення є осі куба. Це значить, що спінові магнітні моменти електронів можуть орієнтуватись в одному з шести напрямів: ±X; ±Y; ±Z і ці напрями мають "перевагу" над іншими можливими напрямами в кристалі заліза.

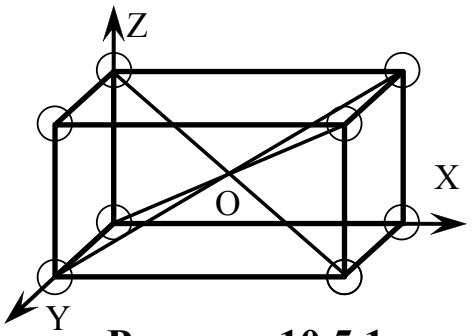


Рисунок 10.5.1

Спрощено механізм виникнення самих доменів можна пояснити таким чином. Нехай весь феромагнетик являє собою один великий домен, в якому внаслідок обмінної взаємодії всі спінові магнітні моменти орієнтувались в одному напрямі вздовж "найлегшого" намагнічення (рис. 10.5.1*а*). Такий великий домен по суті являє собою постійний магніт і в зовнішньому просторі існує магнітне поле, яке володіє певною енергією.

Відомо, що будь-яка система намагається зайняти

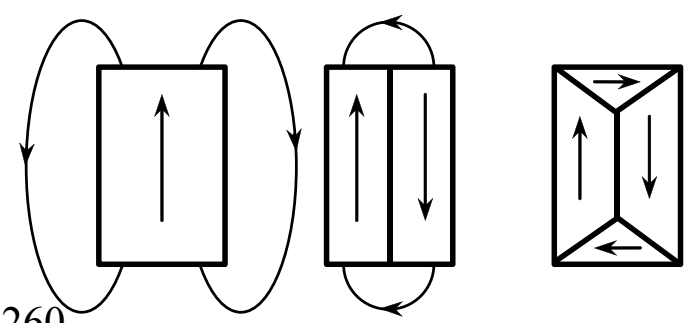


Рисунок 10.5.2

стан з мінімальною енергією. Тому, якщо даний феромагнетик буде являти собою сукупність двох доменів з протилежними напрямами намагнічення (рис. 10.5.2*б*), то зовнішнє магнітне поле буде меншим і такий стан феромагнетика буде більш енергетично вигідним, ніж попередній. На рис.10.5.2*в* вказаний такий випадок, коли взагалі зовнішнє магнітне поле відсутнє. Тут феромагнетик "розбився" на такі окремі домени, де їх магнітні поля замикаються і даний стан феромагнетика стає найбільш енергетично вигідним.

Існування доменів у феромагнетиках експериментально доведено різними дослідами. Наприклад, один з методів полягає в утворенні порошкових структур. Так, якщо на відполіровану поверхню феромагнетика нанести шар рідини, в якій знаходиться надзвичайно дрібні крупинки феромагнітного порошку Fe_2O_3, то ці крупинки, притягуючись доменами, "вимальовують" їх границі. Такі порошкові фігури можна спостерігати в мікроскоп навіть при невеликому збільшенні. На рис. 10.5.3 показана картина доменної структури поверхні феромагнетика.

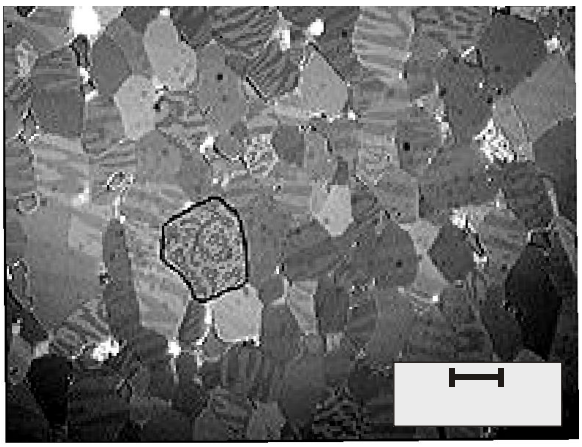


Рисунок 10.5.3

Для кожного феромагнетика існує певна температура при якій відбувається руйнування його доменів, тобто феромагнетик перетворюється в парамагнетик. Ця температура, як вже вище вказувалось, називається точкою Кюрі. Перехід від феромагнітних властивостей до парамагнітних є прикладом фазового переходу другого роду. Прикладом фазового переходу другого роду є перехід металу в надпровідний стан. До фазового переходу другого роду також відноситься надтекучість гелію, коли повністю зникає внутрішнє тертя.

Дія магнітного поля на домени на різних стадіях намагнічення є різна. Спочатку відбувається зміщення границь доменів, "ростуть" ті домени, магнітні моменти яких складають малі кути з напрямом зовнішнього поля. Далі має місце інший ефект – магнітні моменти доменів повертаються в напрямі зовнішнього поля. Нарешті, коли всі магнітні моменти доменів будуть орієнтовані в напрямі зовнішнього поля, наступає явище магнітного насичення. Подальше збільшення

напруженості магнітного поля вже не приводить до збільшення намагніченості.

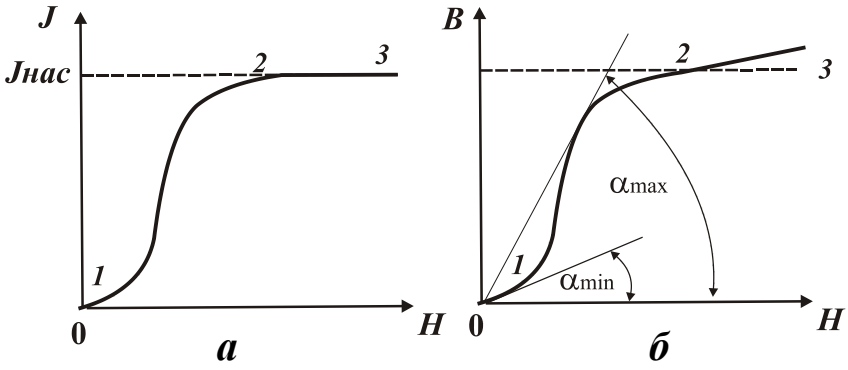


Рисунок 10.5.4

На рис. 10.5.4*а* наведена крива намагнічення феромагнетика, магнітний момент якого спочатку був рівним нулю. Така крива називається основною або нульовою кривою намагнічення.

На даній кривій ділянка *1-2* відповідає збільшенню намагнічення за рахунок росту доменів та їх орієнтації вздовж поля, а ділянка *2-3* характеризує насичення. На практиці визначають залежність індукції B магнітного поля феромагнетика від напруженості H намагнічуючого поля. Оскільки $B = \mu_0(H + 4\pi J)$, то залежність B від H має вигляд зображений на рис. 10.5.4*б*. Спочатку зі збільшенням $\boldsymbol{H}$ різко зростає B внаслідок відповідного зростання намагнічення J (ділянка 1-2). В подальшому, при настанні насичення, намагнічення J залишається сталим, а зростання індукції B відбувається тільки за рахунок безпосереднього збільшення напруженості H зовнішнього магнітного поля (окремі позначення $\alpha_{\min}$ та $\alpha_{\max}$ будуть використані для пояснення властивостей феромагнетиків).

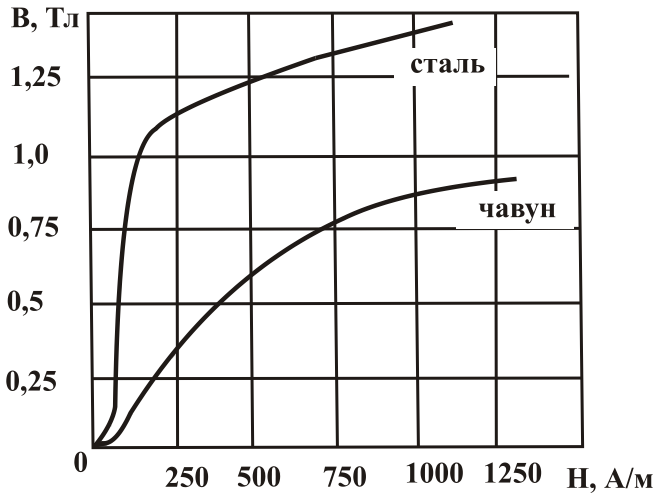


Рисунок 10.5.5

Криві намагнічення чавуну та сталі ілюструє рис.10.5.5.

Окрім нелінійної залежності між H та J (або H і B) для феромагнетиків характерне явище ***гістерезису*** (з грецької – *відставання*), яке можна встановити наступним чином. Для цього досліджуваний феромагнетик (рис. 10.5.6) вставляють в соленоїд, який під'єднують до джерела постійного струму. Вимірявши силу струму I (блок джерела струму має цифровий амперметр) та знаючи

кількість витків n соленоїда і його довжину l, за формулою $H = \frac{nI}{l}$ знаходимо напруженість магнітного поля (поле вважаємо

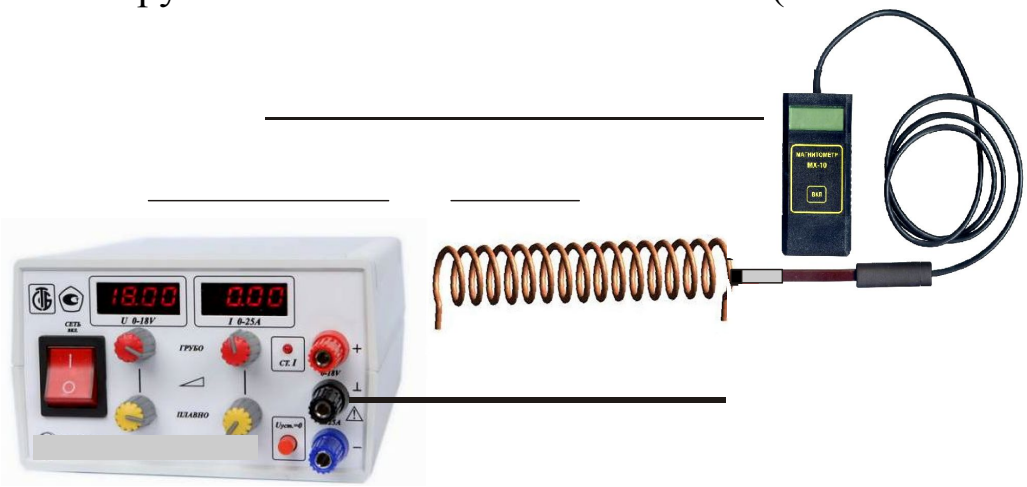


Рисунок 10.5.6

однорідним). Індукцію магнітного поля феромагнетика визначаємо датчиком Холла з цифровою індикацією результатів вимірювань.

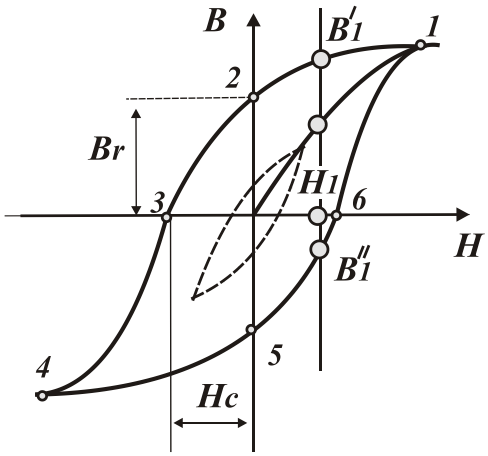


Рисунок 10.5.7

Змінюючи силу та напрям струму в соленоїді, визначають залежність індукції B магнітного поля у феромагнетику від напруженості H зовнішнього магнітного поля (поля соленоїда). На рис. 10.5.7 наведений графік такої експериментальної залежності, яка називається петлею гістерезису з такими характерними ділянками:

0-1 – намагнічення феромагнетика до насичення;

1-2 – зовнішнє магнітне поле зменшується (крива розмагнічення не співпадає з кривою намагнічення) і при відсутності зовнішнього поля $H=0$ у феромагнетику спостерігається ***залишкова намагніченість***, яка характеризується значенням індукції B_r. Феромагнетик у цьому стані є постійним магнітом;

2-3 – намагніченість раніше намагніченого феромагнетика зникає під дією поля напруженістю H_c, яка має напрям протилежний

полю, що викликав дане намагнічення. Така напруженість називається коерцитивною силою (від гр. слова – стримувати). Далі феромагнетик знову намагнічується до насичення (3-4), потім зовнішнє магнітне поле зменшується (4-5) і знову маємо залишкову намагніченість B_5, тільки в протилежному напрямі. Ділянка 5-6 відповідає розмагніченню, а 6-1 □ намагніченню до насичення до початкового значення.

Гістерезис зумовлює неоднозначність функції намагнічення феромагнетика від напруженості магнітного поля, оскільки вона залежить від передісторії взірця феромагнетика – тобто від того, в яких полях він раніше перебував. Так, в полі напруженістю H_1 індукція магнітного поля у феромагнетику може мати значення в межах від B_1' до B_1''. Тому з неоднозначністю залежності B від H поняття магнітної проникності застосовується лише для основної кривої намагнічення (0-1). Якщо провести з початку координат лінію, що приходить через будь-яку точку кривої намагнічення, то тангенс кута нахилу цієї прямої пропорційний відношенню B/H, тобто магнітній проникності μ для відповідного значення напруженості магнітного поля. Як видно з рис.10.5.4*б*, кут нахилу такої прямої змінюється від мінімального $\alpha_{\min}$ до максимального значення $\alpha_{\max}$, а магнітна проникність змінюється від $\mu_{\min}$ до $\mu_{\max}$. З рис.10.5.4*б* видно, що максимальне значення $\alpha_{\max}$ і $\mu_{\max}$ досягається дещо раніше ніж насичення. Якщо в кожній точці кривої (рис.10.5.4*б*) визначити кут нахилу відповідної прямої що з'єднує цю точку з початком координат, то за тангенсом кута цього нахилу можна отримати криву (рис.10.5.8) залежності магнітної проникності даного феромагнетику від напруженості магнітного поля. При необмеженому зростанні H магнітна проникність μ феромагнетику асимптоматично наближається до одиниці, оскільки у виразі $\mu = 1 + J/H$ не може перевершити значення

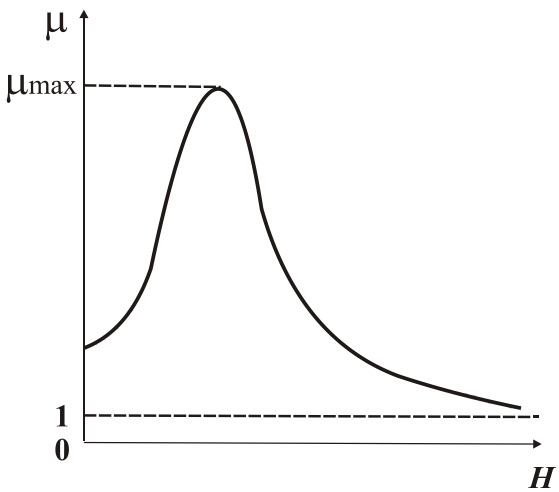


Рисунок 10.5.8

$J_{нас.}$ – намагніченості насичення. Тому в табличних значеннях магнітних властивостей феромагнетиків вказується максимальне значення їх магнітної проникності.

Таблиця 10.5.1

Матеріал	□, магнітна проникність
Сталь	100
Нікель	600
Електротехнічна сталь (сплав заліза з кремнієм (0,5-5%) та 0,1-0,3% *Mn*	4000
Пермалой (залізо-нікелевий сплав)	8000
Мю-метал (сплав нікелю (77%), заліза (16%) та молібдену або хрому (2%))	20000

Також магнетики за значенням коорцетивної сили розрізняються магнітотверді та магнітом'які. Так, якщо коорцетивна сила матеріалу велика, то такий матеріал називається магнітотвердим і для нього характерна широка петля гістерезису. Наприклад, ***алніко*** (від ***ал***(юміній), ***ні***(кель) і ***ко***(бальт)) — магнітно-тверді сплави на основі системи залізо-кобальт-нікель-алюміній володіють надзвичайно великою коорцетивною силою, яка складає 52000 *А/м* і їх використовують для виготовлення постійних магнітів. Натомість магнітом'які матеріали характеризуються малим значенням коорцетивної сили. Такі магнітом'які матеріали використовуються в тих пристроях, де необхідне постійне перемагнічування, наприклад, в осердях трансформаторів. Зокрема, для електротехнічної сталі, з якої виготовляють різноманітні осердя, коорцетивна сила порядку 1*А/м*.

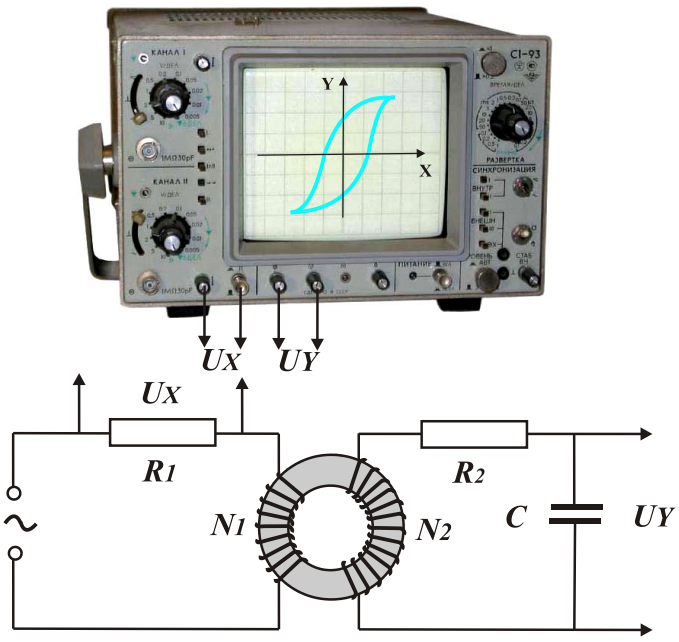


Рисунок 10.5.9

Звичайно, наведена на рис.10.5.6 схема лише ілюструє принцип одержання петлі гістерезису. На практиці використовуються такі електричні схеми, які дають можливість отримати готову петлю гістерезису. Наприклад, за допомогою електронного осцилографа на його екрані формується

повне зображення петлі гістерезису (рис.10.5.9*а*). Для цього на досліджуваний феромагнетик (рис.10.5.9*б*) встановлюють дві обмотки – первинну з числом витків N_1 та вторинну N_2. Первинну обмотку вмикають в джерело змінного струму. Якщо напругу U_X на кінцях опору R_1 подати на горизонтально відхиляючі пластини осцилографа, то зміщення електронного променя на екрані осцилографа буде пропорційне напрузі U_X і відповідно силі струму, а значить пропорційне напруженості H намагнічуючого поля.

Електрорушійна сила електромагнітної індукції, яка виникає у вторинній обмотці, пропорційна швидкості зміни магнітного потоку ($\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$). Оскільки магнітний потік через витки вторинної обмотки дорівнює $\Phi = N_2 BS$, то електрорушійна сила електромагнітної індукції буде пропорційна швидкості зміни з часом індукції магнітного поля $\left|\frac{dB}{dt}\right|$ у феромагнетику. Щоб подати на вертикальні пластини напругу U_Y, яка б "рухала" електронний промінь "вверх-вниз" пропорційно індукції магнітного поля, необхідно отримати інтегральну залежність індукції магнітного поля від часу. Роль такого інтегруючого пристрою відіграє опір R_2 і конденсатор C, який по суті накопичує заряд та створює напругу U_Y, пропорційну індукції магнітного поля. Таким чином електронний промінь осцилографа, рухаючись у двох взаємно перпендикулярних напрямах – один з яких пропорційний напруженості магнітного поля, а другий індукції магнітного поля, дає на екрані осцилографа петлю гістерезису досліджуваного феромагнетика. Для встановлення кількісних характеристик отриманої петлі (коорцетивної сили, залишкового намагнічення тощо) необхідні значення відповідних коефіцієнтів між зміщеннями x та y (в міліметрах) променя на екрані та значеннями напруженості і індукції магнітного поля, тобто $H = k_x x$ та $B = k_y B$. Всі ці операції автоматично виконують сучасні цифрові прилади. Одним з таких приладів є структуроскоп магнітний СМ-401.1 і СМ-401.2, який працює разом з персональним комп’ютером і крім того що на екрані монітора отримаємо зображення петлі гістерезису

досліджуваного феромагнетику, можна отримати ще "роздруківку " його магнітних властивостей.

Завершуючи розгляд питань феромагнетизму, слід вказати на його практичне застосування. Магнітні матеріали широко використовуються в сучасній техніці. Особливе місце займають ферити. Ферити – магнітні напівпровідники зі структурою іонних кристалів, утворені на основі хімічної сполуки окису заліза Fe_2O_3 з оксидами інших металів. Ферити завдяки їх великому електричному опору можуть використовуватися на дуже високих частотах, оскільки забезпечують зниження втрат енергії на перемагнічування, зменшення вихрових струмів і пов'язаних з ними електромагнітних втрат. У промисловості ферити стали використовуватися близько півстоліття тому і до недавнього часу на основі феритів базувався магнітний запис інформації (згадайте магнітофонні стрічки та касети або дискети до перших персональних комп'ютерів).

Контрольні запитання

1 *Яку гіпотезу про природу магнетизму в речовинах висунув Ампер?*
2 *Як дати означення орбітального магнітного моменту електрона та за якою формулою його можна визначити?*
3 *За якою формулою визначається механічний орбітальний момент імпульсу електрона?*
4 *Як дається означення гіромагнітного відношення для електрона і яке значення цього відношення?*
5 *Які і ким проведені експерименти показали, що гіромагнітне відношення для електрона виявилось в два рази більшим теоретичного значення і як в подальшому було встановлено наявність власного (спінового) магнітного моменту електрона?*
6 *Як вводиться поняття вектора намагнічення речовини і які одиниці його вимірювання?*
7 *Як вводяться поняття магнітної сприйнятливості χ та магнітної проникності μ речовини та який між ними зв'язок?*
8 *На які типи в залежності від значень їх магнітної сприйнятливості або магнітної проникності діляться магнетики?*
9 *У чому полягає явище діамагнетизму та яка його природа?*
10 *У чому полягає явище парамагнетизму та яка його природа?*

11 *Як пояснити явище феромагнетизму на основі доменної теорії?*
12 *Чому точка Кюрі для феромагнетиків є прикладом фазового переходу другого роду?*
13 *Який вигляд має петля гістерезису феромагнетиків і якими основними ділянками вона характерна та як при цьому дати означення коерцитивної сили ?*
14 *Як експериментально за допомого осцилографа можна отримати петлю гістерезису досліджуваного феромагнетика?*
15 *Яке практичне застосування феромагнетиків?*

Розділ 11 Електромагнітна індукція

У фізиці як і в інших природничих науках відбуваються великі відкриття, які по суті визначають подальший розвиток технічного та матеріального розвитку суспільства. До таких відкриттів належить зроблене у 1831р. англійським фізиком Майклом Фарадеєм (1791-1867) відкриття явища електромагнітної індукції. Якщо говорити про значення цього відкриття, то без нього неможливо уявити життя сучасного суспільства, оскільки виробництво електроенергії, її передавання на відстані та використання споживачами відбуваються завдяки відкритому Фарадеєм явищу електромагнітної індукції.

10.1 Явище електромагнітної індукції. Досліди Фарадея. Правило Ленца

Історія відкриття явища електромагнітної індукції дуже цікава та повчальна і цій історії присвячено немало публікацій в різних виданнях. Тут йде мова про наступне: якщо електричний струм створює магнітне поле, то повинно бути зворотне явище – магнітне поле повинно створити електричний струм. Над такою проблемою і працював, проводячи багато дослідів, Фарадей. Ось як сам Фарадей описує результати проведених дослідів:

1) ***двісті три фути*** *(1фут=0,3м)* ***мідного дроту були намотані на великий дерев'яний барабан, а інші двісті три фути такого ж дроту були прокладені у вигляді спіралі між витками першої обмотки, причому металевий контакт був скрізь усунений за допомогою шнурка. Одна з цих спіралей була з'єднана з гальванометром, а інша — з добре зарядженою батареєю із ста пар пластин в чотири квадратні дюйми з подвійними мідними пластинками. При замиканні контакту спостерігалася раптова, але дуже слабка дія на гальванометр, і подібна ж слабка дія мала місце при розмиканні контакту з батареєю.*** Сучасну демонстрацію такого досліду Фарадея ілюструє рис.11.1.1;

2) ***я узяв циліндричний магнітний брусок і ввів одного його кінця всередину спіралі з мідного дроту довжино 220 футів сполученого з гальванометром. Потім я швидким рухом ввів магніт всередину спіралі на всю його довжину і стрілка гальванометра різко відхилилась. Потім я так само швидко***

Рисунок 11.1.1

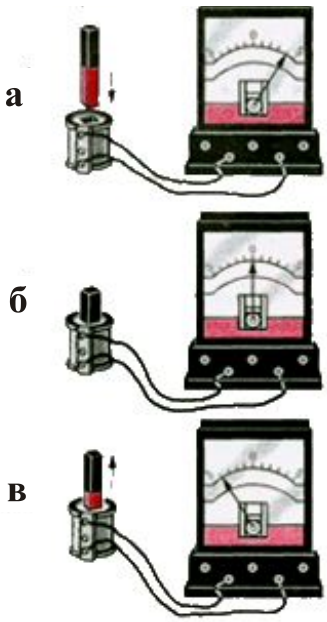


Рисунок 11.1.2

витягнув магніт із спіралі і стрілка знову гойднулася, але в протилежну сторону. Ці гойдання стрілки повторювалися всякий раз, коли магніт вводився або виводився зі спіралі. Сучасну демонстрацію такого досліду Фарадея ілюструє рис. 11.1.2.

На основі проведених дослідів Фарадей стверджує, що "електрична хвиля виникає тільки при русі магніту, або вмикання чи вимикання струму в одній котушці приводить до її появи у витках першої" (мовою сучасної техніки – це принцип роботи трансформатора). Під "електричною хвилею" Фарадей розуміє відкрите ним явище, яке він згодом назвав явищем електромагнітної індукції. Хоча сам Фарадей математично не описував відкрите ним явище, це явище згодом в математичній формі набуває наступного змісту:

при будь-якій зміні магнітного потоку, що пронизує провідний замкнутий контур, в цьому контурі виникає електричний струм і електрорушійна сила електромагнітної індукції пропорційна швидкості зміни магнітного потоку, тобто

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}, \qquad (11.1.1)$$

де знак "мінус" є математичним виразом правила Ленца (1804-1864), а саме – ***індукційний струм в замкненому провідному контурі має***

такий напрям, що створюване ним власне магнітне поле протидіє будь-якій зміні магнітного поля, яке індукує цей струм.

Правило Ленца легко проілюструвати наступним дослідом. Два легкі алюмінієві кільця, які закріплені на кінцях коромисла, можуть обертатись навколо вертикальної осі. Одне кільце має прорізь, а друге замкнуте. Якщо в кільце з прорізом вносити магніт, то індукційного струму в такому кільці не буде, адже електричне коло не замкнуте і коромисло не буде повертатись. При внесенні магніту в суцільне кільце (рис.11.1.3*а*) в цьому кільці виникає струм електромагнітної індукції такого напряму, що його магнітне поле буде протидіяти внесенню магніту (тобто збільшенню магнітного потоку через площу кільця) в результаті чого будемо спостерігати повертання коромисла в протилежну сторону до напряму внесення магніту (кільце відштовхується від магніту який вносять в це кільце). Інша картина спостерігається при винесенні магніту з суцільного кільця (рис.11.1.3*б*): магнітне поле індукованого струму протидіє зменшенню магнітного потоку і кільце з таким струмом намагається "не відпускати" магніт – це засвідчує напрям повертання коромисла.

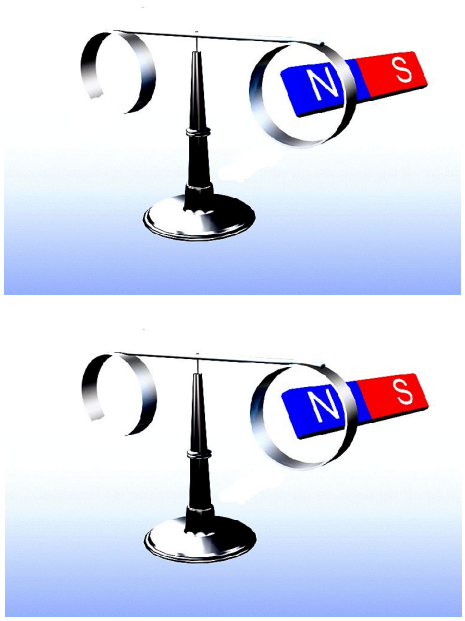


Рисунок 11.1.3

Наведене вище означення явища електромагнітної індукції, де йде мова про виникнення струму в провідному замкнутому контурі, часто називають ***фарадеєвським означенням*** цього явища.

Далі буде показано, що Максвелл дав узагальнене формулювання явища електромагнітної індукції як явища виникнення вихрового електричного поля при зміні магнітного поля незалежно від наявності провідного контуру. Провідний контур в дослідах Фарадея був лише індикатором вихрового електричного поля яке виникало при зміні магнітного поля. Під дією цього вихрового електричного поля заряди в провіднику приходили в рух, тобто виникав електричний струм який і спостерігав у своїх дослідах Фарадей.

11.2 Електрорушійна сила електромагнітної індукції

Звертаючись до рис.11.1.3, який ілюструє правило Ленца, неважко зрозуміти, що поява індукційного струму в замкнутому (контурі на рис.11.1.3 це суцільне алюмінієве кільце) пов'язана з виконанням роботи. Дійсно, вводячи магніт в кільце (рис.11.1.3*а*) ми повинні виконати роботу проти сил відштовхування магнітного поля індукованого струму, а виймаючи магніт з цього кільця (рис.11.1.3*б*), виконуємо роботу проти сил притягання знову ж таки магнітного поля індукованого струму. При цьому виконана робота "нікуди не пропадає". За рахунок цієї роботи з'являється електричний струм і робота цього струму може йти як на переміщення, так і на нагрівання провідного контуру. Все відповідає закону збереження і перетворення енергії. З такої точки зору німецький фізик Гельмгольц (1821-1894) показав, що закон електромагнітної індукції є наслідком закону збереження і перетворення енергії. Подібно до того, як були проведені розрахунки роботи переміщення провідника зі струмом в магнітному полі, визначимо цю роботу з урахуванням того, що струм в провіднику забезпечує окреме джерело струму з електрорушійною силою E_0. Для цього розглянемо провідник опором R, довжиною l та силою струму I, що може вільно переміщатись у магнітному полі по двох інших контактних (подібно до рейок) провідниках (рис.11.2.1). Зовнішнє магнітне поле будемо вважати однорідним з індукцією B і перпендикулярним до рухомого провідника. Згідно закону Ома сила струму в такому колі дорівнює

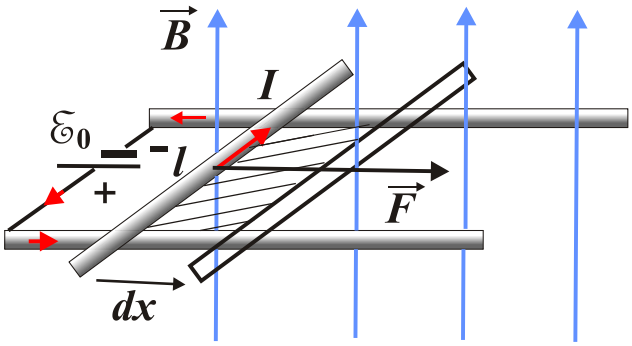


Рисунок 11.2.1

$$I = \frac{\varepsilon_0}{R + r}. \qquad (11.2.1)$$

Якщо б провідник був нерухомий, то вся робота електричного струму затрачалась би на нагрівання провідника і за час dt згідно закону Джоуля-Ленца виділиться наступна кількість теплоти:

$$dQ = I^2(R + r)dt \quad . \tag{11.2.2}$$

Оскільки провідник рухається, то робота переміщення провідника зі струмом в магнітному полі дорівнює

$$dA = Id\Phi \quad . \tag{11.2.3}$$

За цей же час dt джерело струму з електрорушійною силою $\mathcal{E}_0$ витратить енергію

$$dW = I\varepsilon_0 dt \quad . \tag{11.2.4}$$

Згідно закону збереження та перетворення енергії $dW = dQ + dA$ або $I\varepsilon_0 dt = I^2 R dt + I\varepsilon_0 dt$, звідки отримаємо:

$$I = \frac{\varepsilon_0 - \dfrac{d\Phi}{dt}}{R + r} \quad . \tag{11.2.5}$$

Отже, крім електрорушійної сили ε_0 джерела струму в даному колі виникає електрорушійна сила $\varepsilon = -\dfrac{d\Phi}{dt}$, яка зумовлена зміною магнітного потоку завдяки руху провідника в магнітному полі. Ця електрорушійна сила і є електрорушійною силою електромагнітної індукції.

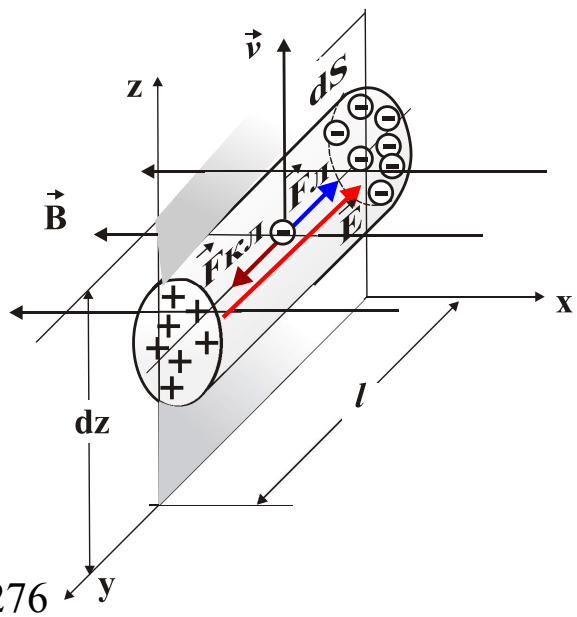


Рисунок 11.2.2

Проведений вивід ЕРС електромагнітної індукції хоча і визначає значення цієї ЕРС, але не розкриває механізму цього явища. Найпростіше пояснити механізм явища електромагнітної індукції можна на основі електронних уявлень, розглядаючи рух провідника в магнітному полі. Наприклад, металевий провідник довжиною l рухається зі

швидкістю v перпендикулярно до силових ліній однорідного магнітного поля з індукцією B (рис.11.2.2). Зрозуміло, що разом з провідником рухаються його заряди – вільні електрони та додатні йони у вузлах кристалічної ґратки і на них діятиме сила Лоренца. Оскільки в такому провіднику можуть вільно рухатись тільки електрони під дією сили Лоренца, то відбудеться перерозподіл зарядів. У раніше електронейтральному провіднику на одному кінці з'являється надлишок електронів (від'ємний заряд), а на другому кінці – їх нестача (додатний заряд). Внаслідок такого перерозподілу зарядів у провіднику виникає електричне поле, яке буде протидіяти подальшому перерозподілу зарядів і умовою рівноважного стану буде рівність за модулем сили Лоренца $F_{Л}$ та кулонівської сили $F_{Кл}$ з боку електричного поля напруженістю E перерозподілених зарядів:

$$evB = eE. \qquad (11.2.6)$$

Звідси отримуємо кількісне співвідношення між електричним і магнітним полями:

$$E = vB, \qquad (11.2.7)$$

тобто при русі в магнітному полі провідника в останньому виникає електричне поле, напруженість якого пропорційна швидкості руху цього провідника. Якщо при цьому різниця потенціалів на кінцях провідника довжиною l становить $\Delta\varphi$, то напруженість E електричного поля як градієнт потенціалу з протилежним знаком дорівнює $E = -\frac{\Delta\varphi}{l}$. Отже, згідно (11.2.7)

$$\Delta\varphi = -Bvl. \qquad (11.2.8)$$

Даний провідник, що рухається у магнітному полі, можна вважати джерелом електричного струму в якому роль сторонніх сил виконує сила Лоренца, адже вона переміщає заряди проти сил електричного поля. Отже, різниця потенціалів яка при цьому виникає на кінцях провідника (як різниця потенціалів на кінцях розімкненого

джерела струму) є електрорушійною силою електромагнітної індукції. Тому можна записати, що

$$\varepsilon = -Bvl \,. \qquad (11.2.9)$$

Якщо за час dt провідник в напрямі осі z переміститься на відстань dz, то миттєва швидкість провідника $v = \frac{dz}{dt}$ і тоді

$$\varepsilon = -B\frac{dz}{dt}l \,. \qquad (11.2.10)$$

Оскільки $l \cdot dz = dS$, тобто площі яку перетинає провідник, то при цьому виникає зміна магнітного потоку $d\Phi = BdS$ і тоді приходимо до формули електрорушійної сили електромагнітної індукції у вигляді

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} \,. \qquad (11.2.11)$$

Отже, на основі електронної теорії механізм електромагнітної індукції знаходить просте і логічне пояснення – в магнітному полі рухається провідник і на його вільні заряди діє сила Лоренца, яка зумовлює перерозподіл зарядів і на кінцях провідника виникає різниця потенціалів яка і є електрорушійною силою електромагнітної індукції. Але ж Фарадей встановив, що індукційний струм виникає і в нерухомому провідному контурі за умови зміни магнітного поля. В такому випадку на нерухомі заряди в провіднику сила Лоренца не діє, а заряди рухаються і в замкнутому провідному контурі виникає електричний струм. Вихід з цього ускладнення вказав Максвелл допустивши, що змінне магнітне поле породжує вихрове електричне поле (детально буде йти мова в розділі 12 "Основи теорії Максвелла для електромагнітного поля").

11.3 Явище самоіндукції. Індуктивність

Електрорушійна сила електромагнітної індукції визначається тільки швидкістю зміни магнітного потоку, а не способом його зміни. Тому, якщо в провіднику чи провідному контурі змінюється сила струму, то змінюється індукція магнітного поля цього струму і відповідно змінюється магнітний потік через поверхню яку охоплює цей контур. Отже, в результаті такої зміни магнітного потоку в цьому ж самому контурі виникає електрорушійна сила електромагнітної індукції. Тому ***явище виникнення електрорушійної сили електромагнітної індукції в провідному контурі при зміні сили струму в цьому контурі отримало назву самоіндукції.***

Очевидно, що магнітний потік через поверхню яку охоплює замкнутий контур залежить не тільки від сили струму в цьому контурі, але і від його геометрії (форми, розмірів) та від магнітних властивостей середовища в якому перебуває цей контур. Такою характеристикою контуру, яка визначає його магнітні властивості щодо значення магнітного потоку Φ через поверхню обмежену цим контуром при заданій силі струму I, називається ***індуктивністю*** і позначається L. Таким чином

$$\Phi = L\,I\,. \qquad (11.3.1)$$

З (11.3.1) встановлюється одиниця індуктивності 1 *Гн* (*генрі*) на честь американського фізика Джозефа Генрі (1797-1878), а саме $1Гн = 1\dfrac{Вб}{А}$, тобто ***індуктивністю* 1*Гн* *володіє такий контур, в якому при силі струму в ньому* 1*А* *магнітне поле цього ж струму зумовлює магнітний потік* 1*Вб* *через поверхню обмежену цим контуром***. Таке означення індуктивності контуру є його статичною характеристикою, оскільки визначає незмінний з часом (статичний) магнітний потік через поверхню обмежену цим контуром.

Закон (11.1.1) електрорушійної сили електромагнітної індукції з врахуванням (11.3.1) визначає електрорушійну силу самоіндукції:

$$\varepsilon = -L\frac{dI}{dt}\,. \qquad (11.3.2)$$

На основі (11.3.2) можна отримати інше означення індуктивності **1 *Гн***: $1Гн = \frac{B}{A/c} = \frac{B \cdot c}{A}$, тобто індуктивністю **1*Гн*** ***володіє такий контур, в якому при зміні в ньому сили струму зі швидкістю* 1*А* *за секунду виникає електрорушійна сила самоіндукції* 1*В*** .Оскільки в такому означенні мова йде про зміну з часом струму в контурі, тобто відповідну зміну магнітного потоку що зумовлює появу ЕРС самоіндукції, то таке означення характеризує динамічну індуктивність. Зрозуміло, що одиниця статичної та індуктивної індуктивності одна і таж – $1Гн$, а необхідність розрізняти ці індуктивності визначається умовами за якими визначаємо індуктивність контуру.

Знак "–" в (11.3.2) як математичний вираз правила Ленца вказує на те, що ЕРС самоіндукції протидіє будь-якій зміні струму в контурі. Тобто, якщо струм збільшується, то ЕРС самоіндукції протидіє цьому збільшенню і навпаки – ЕРС самоіндукції "намагається" підтримати струм що зменшується. Таким чином індуктивність контуру є його мірою інерції у відношенні до зміни струму.

Розрахунок індуктивності елементів електричних кіл надзвичайно важлива практична задача. Наприклад, в багатьох електричних приладах та пристроях використовують соленоїди. Соленоїд (від грецьк. solen – трубка, eidos –вид) – це котушка циліндричної форми з щільно намотаними витками. Визначимо індуктивність соленоїда за умови, що його довжина значно більша його діаметра і тоді при пропусканні струму всередині соленоїда магнітне поле можна вважати однорідним (рис.11.3.1). Тоді при силі струму I індукція такого однорідного магнітного поля всередині соленоїда довжиною l з кількістю витків N дорівнює: $B = \mu_0 \mu H = \mu_0 \mu \frac{NI}{l}$ і тому магнітний потік індукції магнітного поля через площу S, яку охоплює один виток, становить

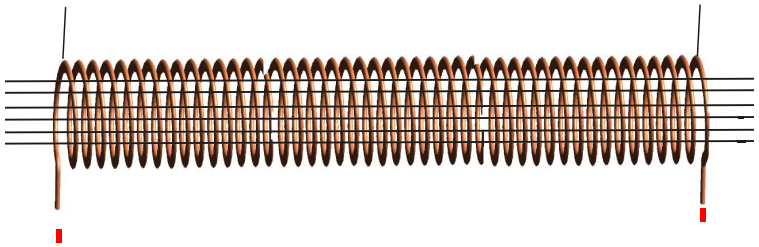


Рисунок 11.3.1

$\Phi_1 = BS = \mu_0 \mu \frac{NI}{l} S$. Оскільки соленоїд має N витків, то повний потік через всі витки дорівнює

$$\Phi = \mu_0 \mu \frac{N^2 I}{l} S . \qquad (11.3.3)$$

Враховуючи формулу (11.3.1), можна записати:

$$LI = \mu_0 \mu \frac{N^2 I}{l} S , \qquad (11.3.4)$$

звідки отримуємо значення індуктивності соленоїда

$$L = \mu_0 \mu \frac{N^2}{l} S . \qquad (11.3.5)$$

Оскільки об'єм соленоїда $V = lS$, а $\frac{N}{l} = n$ – число витків на одиницю довжини соленоїда, то формулу (11.3.5) можна записати так:

$$L = \mu_0 \mu n^2 V . \qquad (11.3.6)$$

Таке ж саме значення формули (11.3.6) можна отримати визначаючи динамічну індуктивність соленоїда. Саме динамічна індуктивність визначає механізм особливих явищ які відбуваються в електричних колах з індуктивністю. Особливо такі явища, як буде показано далі, відіграють основну роль у роботі електричного коливального контуру. Окремим прикладом прояву динамічної індуктивності є так звані екстраструми вмикання та вимикання електричних кіл.

11.4 Екстраструми замикання і розмикання

Встановимо основні закономірності екстраструмів, які виникають при замиканні та розмиканні електричних кіл що мають індуктивності. Розглянемо електричне коло схема якого наведена на рис.11.4.1. На цій схемі замикання та розмикання кола здійснюється рухомим ключем ***К***. Так, якщо ключ ***К*** замкне контакт ***а***, то це відповідатиме вмиканню джерела струму з електрорушійною силою ε_0 в електричне коло з індуктивністю L та омічним опором R. Тоді в такому замкнутому електричному контурі діятимуть дві електрорушійні сили: ε_0 – ЕРС джерела постійного струму та $\varepsilon_0 = -L\frac{dI}{dt}$ – ЕРС самоіндукції. На основі другого правила Кірхгофа алгебраїчна сума ЕРС в замкнутому контурі дорівнює алгебраїчній сумі спадів напруг. У даному випадку це лише спад напруги на омічному опорі R. Отже,

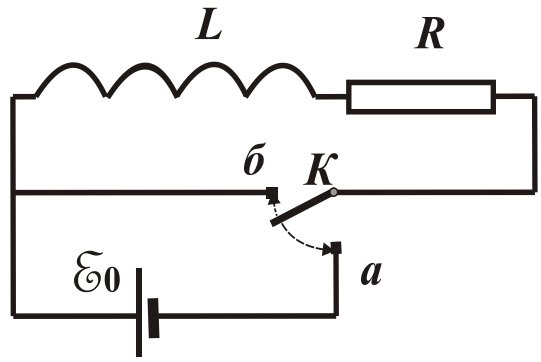


Рисунок 11.4.1

$$-L\frac{dI}{dt} + \varepsilon_0 = IR \qquad (11.4.1)$$

або

$$L\frac{dI}{dt} + IR - \varepsilon_0 = 0 \qquad (11.4.2)$$

Вираз (11.4.2) є неоднорідним диференціальним рівнянням, розв'язок якого з врахуванням початкових умов ($t = 0$, $I = 0$) є функція такого вигляду:

$$I = \frac{\varepsilon_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right). \qquad (11.4.3)$$

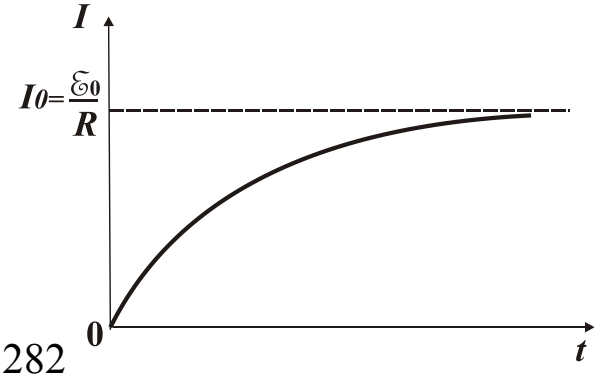


Рисунок 11.4.2

Отже, при вмиканні джерела струму в електричне коло з індуктивністю наростання сили

струму відбувається не миттєво а поступово за законом (11.4.3). Графічна залежність такого закону показана на рис. 11.4.2, де сила струму з часом асимптоматично наближається до значення $I_0 = \frac{\varepsilon_0}{R}$, тобто до значення сили струму у відсутності в електричному колі індуктивності.

Після того як струм в колі з індуктивністю наблизиться до значення I_0 відімкнемо джерело струму ε_0, тобто переведемо вимикач (ключ К) в положення ***б*** (рис.11.4.1). Оскільки тепер в такому колі ε_0=0, то рівняння (11.4.2) набуде вигляду:

$$L\frac{dI}{dt} + IR = 0 \qquad (10.4.4)$$

і його розв'язком, з врахуванням початкової умови, що при $t = 0$ $I_0 = \frac{\varepsilon_0}{R}$, буде рівняння

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}. \qquad (10.4.5)$$

Таким чином, після вимкнення джерела електрорушійної сили, сила струму в колі не миттєво стає рівна нулю, а поступово зменшується за експоненціальним законом (рис.11.4.3). Зауважимо, що коли розімкнути коло з великою індуктивністю, то індукована висока напруга самоіндукції може створити іскру або навіть дугу в місці розриву. В електротехніці є навіть такий вираз – "вимикач тягне дугу", що ілюструє рис.11.4.4. Наприклад, потужний електродвигун з великою індуктивністю увімкнений до електромережі через розподільний щит вимикачем ножової конструкції (рухомі контакти у вигляді металевих ножів входять в паз нерухомого контакту (рис.11.4.4*а*)). При розмиканні електричного кола рухомі контакти виходять з пазів нерухомих, коло розривається і при цьому напруга самоіндукції може значно перевищувати напругу мережі, що зумовлює появу іскри або навіть дуги між парами контактів (рис.11.4.4*б*). Для запобігання такого небажаного явища використовують масляні вимикачі, в яких "гасіння" дуги відбувається

у трансформаторному маслі (оливі). Трансформаторне масло – це мінеральне масло високої чистоти та малої в'язкості.

11.5 Явище взаємної індукції

ЕРС електромагнітної індукції не залежить від способу зміни магнітного потоку, а тільки від його швидкості зміни з часом. Але в окремих випадках доцільно підкреслити спосіб зміни магнітного потоку. Так, говорячи про самоіндукцію, маємо на увазі зміну магнітного потоку зумовлену зміною струму в тому ж самому контурі. Якщо ж що при зміні струму в одному контурі виникає струм в близько розташованому другому контурі, то таке явище отримало назву взаємної індукції і його кількісні характеристики можна встановити наступним чином. Наприклад, два контури ***1*** та ***2*** розташовані близько один від одного (рис.11.5.1). Якщо в контурі ***1*** тече струм

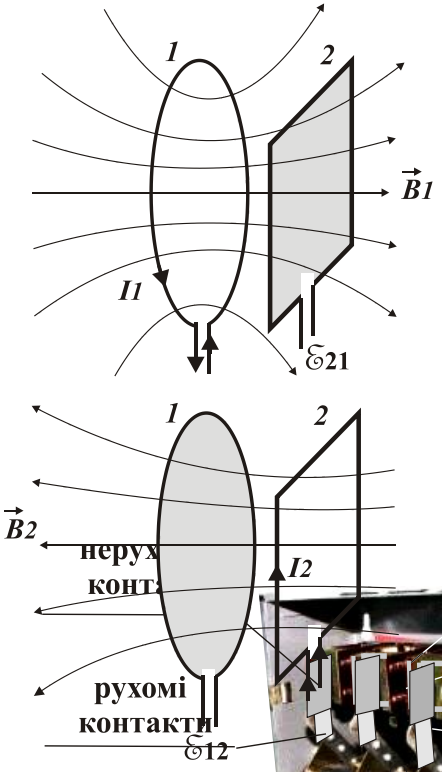


Рисунок 11.5.1

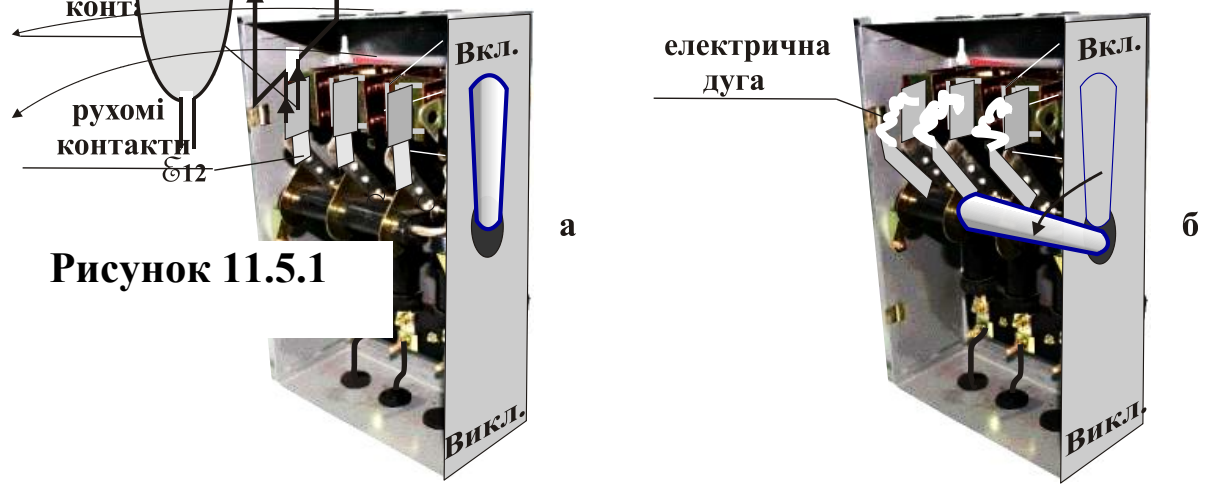


Рисунок 11.4.4

силою I_1, то він створює через площу контуру ***2*** магнітний потік пропорційний I_1, тобто

$$\Phi_2 = L_{21} I_1 \qquad (11.5.1)$$

і тоді зміна струму I_1 призводить до появи ЕРС ε_{21} електромагнітної індукції в контурі ***2***:

$$\varepsilon_{21} = -L_{21}\frac{dI_1}{dt}. \qquad (11.5.2)$$

Аналогічно сила струму I_2 в контурі ***2*** призводить до магнітного потоку Φ_1 через площу контуру ***1***, а саме

$$\Phi_1 = L_{12}I_2 \qquad (11.5.3)$$

і відповідно зміна сили струму I_2 зумовлює ЕРС ε_{12} електромагнітної індукції в контурі ***1***:

$$\varepsilon_{12} = -L_{12}\frac{dI_2}{dt}. \qquad (11.5.4)$$

У даному випадку, коли зміна сили струму в одному контурі призводить до появи контури ЕРС електромагнітної індукції в другому контурі і навпаки, то такі контури називають індуктивно зв'язаними, а L_{12} та L_{21} □ коефіцієнтами взаємоіндукції. Значення цих коефіцієнтів залежить від форми, розмірів, взаємного розташування контурів, а також від магнітних властивостей середовища. Відповідний розрахунок дає, що у відсутності феромагнетиків ці коефіцієнти завжди рівні між собою:

$$L_{12} = L_{21}. \qquad (11.5.5)$$

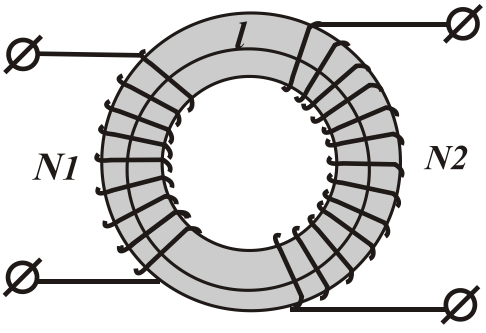


Рисунок 11.5.2

В загальному випадку розрахунок коефіцієнтів взаємоіндукції за наявності феромагнетиків складна задача. Найпростішій випадок – це індуктивність двох котушок намотаних на тороїдальне осердя

(рис.11.5.2). Тоді взаємна індуктивність таких котушок визначається такими формулами:

$$L_{21} = \frac{S}{l}\mu_0 \mu N_1 N_2, \quad (11.5.6)$$

$$L_{12} = \frac{S}{l}\mu_0 \mu N_1 N_2, \quad (11.5.7)$$

де N_1 та N_2 – кількості витків у першій і другій котушках, S – площа поперечного перерізу осердя, l – його довжина. Оскільки значення магнітної проникності μ феромагнітного осердя залежить від напруженості магнітного поля, то один і той же струм, який протікає один раз по першій, а другий раз по другій котушці, створить в осерді магнітне поле різної напруженості. Відповідно значення магнітної проникності μ в обох випадках будуть неоднаковими і значення L_{12} та L_{21} будуть різними.

Явище взаємоіндукції знаходить велике практичне застосування. Так, дослід Фарадея з двома обмотками, коли зміна струму в одній з них індукувала струм в іншій, є по суті прообразом трансформатора, про роботу якого буде розглянуто в розділі "Змінний електричний струм".

11.6 Енергія магнітного поля струму

Згідно правила Ленца ЕРС самоіндукції протидіє збільшенню сили струму в контурі. Але, незважаючи на цю протидію, струм в контурі все ж таки збільшується. Отже, для "подолання" цієї протидії необхідно виконати роботу проти ЕРС самоіндукції. Цю роботу виконує зовнішнє джерело електричного струму. Таке джерело струму з електрорушійною силою ε_0, яке "живить" електричне коло з індуктивністю L і активним опором R (електрична лампа розжарення), схематично зображене на рис.11.6.1. Спочатку коло розімкнене (рис.11.6.1*а*) і струм відсутній. При замиканні електричного кола (вимикач в положенні *1*) зростаючий в такому колі струм зумовить появу ЕРС самоіндукції ε_c і тоді згідно другого правила Кірхгофа алгебраїчна сума ЕРС (в даному випадку $\varepsilon_0 + \varepsilon_c$)

Рисунок 11.6.1

дорівнює алгебраїчній сумі спадів напруг (в даному випадку тільки один спад напруги $U = IR$ на активному опорі).

Таким чином

$$\varepsilon_0 + \varepsilon_c = IR \,. \tag{11.6.1}$$

Враховуючи, що ЕРС самоіндукції $\varepsilon_c = -L\dfrac{dI}{dt}$, рівняння (11.6.1) можна записати так:

$$\varepsilon_0 = IR + L\frac{dI}{dt} \,. \tag{11.6.2}$$

Якщо б сила струму була сталою, то за час t джерело струму виконало б роботу $A = \varepsilon_0 It$. Оскільки за рахунок ЕРС самоіндукції струм в даному колі з індуктивністю не одразу досягає максимального значення, то спочатку слід визначити елементарну роботу dA за елементарний проміжок часу dt, протягом якого струм можна вважати сталим, тобто

$$dA = \varepsilon_0 I\, dt \,. \tag{11.6.3}$$

Тоді згідно (11.6.2) та (11.6.3) робота, яку здійснює за час dt джерело струму ε_0, становить:

$$\varepsilon_0 I\, dt = I^2 R\, dt + LIdI \,. \tag{11.6.4}$$

Перший доданок у рівнянні (11.6.4) – це звичайна кількість теплоти, яка виділяється при нагріванні провідника опором R електричним струмом (на рис.11.6.1*б* – лампа розжарення). Другий доданок – додаткова робота затрачена на збільшення струму в індуктивності і ця робота при збільшенні струму від нуля до певного значення дорівнює означеному інтегралу:

$$A = \int_0^I LIdI = \frac{LI^2}{2} \quad . \tag{11.6.5}$$

Отриманий вираз (11.6.5) роботи визначає енергію W магнітного поля струму силою I, що протікає по контуру з індуктивністю L:

$$W = \frac{LI^2}{2} \quad . \tag{11.6.6}$$

Дійсно, якщо на схемі (рис.11.6.1) вимкнути зовнішнє джерело струму (вимикач в положенні *2*), то лампочка ще деякий час буде "горіти" за рахунок енергії магнітного поля. Ось тут ми підійшли до основаного положення про те, що носієм енергії є магнітне поле, хоча у формулі (11.6.6), яка визначає енергію магнітного поля, немає ні одної характеристики магнітного поля. Щоб енергія магнітного поля визначалась через характеристики магнітного поля, розглянемо випадок однорідного магнітного поля соленоїда, індуктивність якого $L = \mu\mu_0 n^2 V$. Оскільки індукція магнітного поля соленоїда становить $B = \mu\mu_0 nI$, то

$$I = \frac{B}{\mu\mu_0} \cdot \frac{1}{n} \quad . \tag{11.6.7}$$

Підставивши значення індуктивності L та сили струму I в (11.6.6), визначимо енергію магнітного поля:

$$W = \frac{LI^2}{2} = \frac{1}{2}\mu\mu_0 n^2 V \left(\frac{B}{\mu\mu_0} \cdot \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} V \quad . \tag{11.6.8}$$

Відношення енергії магнітного поля до об’єму, який займає це поле, визначає об'ємну густину ω його енергії:

$$w = \frac{W}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0\mu} \quad . \tag{11.6.9}$$

Враховуючи співвідношення $B = \mu_0 \mu H$ між індукцією та напруженістю магнітного поля, вираз (11.6.9) можна записати в іншій формі:

$$w = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu} = \frac{BH}{2} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}, \qquad (11.6.10)$$

яка дуже подібна до формули густини енергії електричного поля $w = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}$, що вказує на тісний зв'язок між електричними та магнітними явищами і про такий зв'язок буде йти мова у наступному розділі.

Контрольні запитання

1 *Які досліди дали Фарадею можливість відкрити явище електромагнітної індукції і яке фарадеєвське означення цього явища?*
2 *Як математично визначається ЕРС електромагнітної індукції і який при цьому фізичний зміст правила Ленца?*
3 *Як на основі закону збереження і перетворення енергії вивести закон електромагнітної індукції?*
4 *Як на основі електронної теорії можна пояснити механізм виникнення та значення ЕРС електромагнітної індукції і чому ця теорія не може у загальному випадку пояснити явище електромагнітної індукції?*
5 *У чому полягає явище самоіндукції і за якою формулою визначається ЕРС самоіндукції?*
6 *Яка одиниця індуктивності та який її фізичний зміст?*
7 *Як визначити індуктивність соленоїда?*
8 *За яким законом зростає екстраструм замикання?*
9 *За яким законом зменшується екстраструм розмикання?*
10 *У чому полягає явище взаємоіндукції та за якою формулою визначається ЕРС взаємоіндукції?*
11 *Як визначається енергія та об'ємна густина енергії магнітного поля?*

Розділ 12 Основи теорії Максвелла для електромагнітного поля

Основою класичної механіки є закони Ньютона та принцип відносності Галілея, що дозволяє дуже логічно і крок за кроком від простого до складного описати всю механіку загального курсу фізики. Навіть молекулярно-кінетична теорія ідеальних газів теж використовує основані елементи класичної фізики. Так, тиск газів є результатом ударів молекул, а застосовуючи закони Ньютона до таких ударів отримують основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії ідеальних газів. Також на основі класичної механіки, як ми вже бачили, можна вивести закон Ома не торкаючись при цьому природи електричних сил що діють на електрони. Більше того, з ньютонівської корпускулярної теорії світла легко вивести закон його відбивання. Але в законах Ньютона немає і не може бути навіть згадки про сили відмінні від сил гравітації. Після епохи Ньютона Кулоном був відкритий кількісний закон нової електростатичної взаємодії, а далі з’явились нові факти і відкриття з електрики і магнетизму. По суті ці факти і відкриття знайшли відображення в усіх попередніх розділах, де окремо розглядались питання електрики і магнетизму, хоча в розділі "Електромагнітна індукція" був показаний тісний зв'язок між електричними та магнітними явищами. Отже, повинна існувати загальна теорія електричних і магнітних явищ, повинні бути фундаментальні рівняння електромагнетизму з яких випливали би всі раніше відомі закони електрики і магнетизму, подібно як з рівнянь Ньютона випливають всі закони класичної механіки. Такими рівняннями є рівняння Максвелла, про що буде йти мова у цьому розділі, в якому спочатку буде показано, що змінне магнітне поле породжує особливе вихрове електричне поле, а змінне електричне поле у свою чергу створює магнітне поле і лише після цього буде виписана вся повна система рівнянь Максвелла як фундаментальних законів електромагнетизму.

12.1 Вихрове електричне поле. Перше рівняння Максвелла в інтегральній та диференціальній формах

В розділі 7 було показано, що при будь якій зміні магнітного потоку, який пронизує провідний замкнутий контур, у ньому виникає

електричний струм. У цьому і полягає суть так званого фарадеєвського тлумачення явища електромагнітної індукції. Виникнення електрорушійної сили (ЕРС) електромагнітної індукції легко пояснити на основі електронної теорії лише у тому випадку, якщо зміна магнітного потоку зумовлена рухом у магнітному полі провідника або контуру (див.7.2), де на рухомі заряди з боку нерухомого магнітного поля діє сила Лоренца. Але ЕРС електромагнітної індукції виникає і в нерухому провіднику чи контурі під час зміни магнітного потоку, де на нерухомі заряди в провіднику чи контурі вже не діє сила Лоренца. Що тоді змушує рухатись вільні заряди в цьому провіднику чи контурі і тим самим створювати електричний струм? Оскільки електричні заряди "відчувають" дію електричного поля, то змусити рухатись у даному випадку зможе лише електричне поле. Але яке це поле? Ніяких зовнішніх електричних зарядів поблизу провідника чи контуру немає, а у даному випадку ЕРС електромагнітної індукції викликана зміною з часом магнітного поля (точніше магнітного потоку), то Максвелл приходить до сміливого на той час висновку – змінне магнітне поле породжує вихрове електричне поле, електричне поле без електричних зарядів і силові лінії такого поля замкнуті. Отже, ***за Максвеллом явище електромагнітної індукції – це явище виникнення вихрового електричного поля скрізь, де є змінне магнітне поле***, а провідник чи контур є лише індикатором цього поля під дією якого вільні заряди приходять у рух і тим самим створюють електричний струм. Після такої чіткої фізичної картини явища електромагнітної індукції Максвеллу залишилось "одягти в математичне вбрання фарадеєвську Попелюшку" і записати просту формулу:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

По-перше, він "перекроює" праву частину цієї формули, де замість $\frac{d\Phi}{dt}$ записує $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ і тим самим частинною похідною підкреслює свою ідею – зміна магнітного потоку відбувається за рахунок зміни з часом магнітного поля а не руху провідника чи контуру. Якщо в загальному випадку довільний замкнутий контур площею S знаходиться в неоднорідному магнітному полі, то потік

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

вектора індукції через площу такого контуру дорівнює .

Отже, права частина рівняння $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$ матиме вигляд:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B}\,d\vec{S} \quad . \qquad (12.1.1)$$

А тепер перейдемо до лівої частини рівняння, до електрорушійної сили. Складається цікава ситуація, оскільки поняття електрорушійної сили ми зазвичай поєднуємо з джерелом струму (генератори, батарейки тощо), в якому "працюють" сторонні сили, то тоді електрорушійна сила визначається як циркуляція вектора $\varepsilon = \oint_l \vec{E}_{cm} d\vec{l}$ сторонніх сил – , а тут нічого такого немає – "гола" електрорушійна сила без будь-яких "батареєк". Ні, вона не "гола", стверджує Максвелл, її "одягом" є циркуляція вектора напруженості вихрового електричного поля, яке виникає при зміні з часом магнітного поля, тобто

$$\oint_l \varepsilon = \vec{E}\,d\vec{l} \quad . \qquad (12.1.2)$$

Таким чином Максвелл приходить до рівняння

$$\oint_l \vec{E}\,d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad , \qquad (12.1.3)$$

яке отримало назву першого рівняння Максвелла в інтегральній формі і це рівняння встановлює зв'язок між магнітним та електричними полями (саме так – а не навпаки). Тобто це рівняння з фізичної точки зору слід читати справа наліво, а саме:

при будь якій зміні з часом (озвучуємо $\frac{\partial}{\partial t}$***) потоку вектора магнітної індукції, що пронизує контур площею*** S ***(це інтеграл*** $\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ ***), в цьому контурі виникає вихрове електричне поле,***

циркуляція вектора якого вздовж цього контуру (інтеграл $\oint_l \vec{E}\,d\vec{l}$) дорівнює з протилежним знаком (знак "-" у правій частині) швидкості зміни з часом магнітного потоку, що пронизує площу цього контуру (повертаємось до правої частини рівняння).

Щоб перейти від інтегральної до диференціальної форми запису першого рівняння Максвелла, тобто що відбувається у будь якій точці змінного магнітного поля, використаємо для циркуляції вектора напруженості електричного поля математичну теорему Стокса:

$$\oint_l (\vec{E}, d\vec{l}) = \int_S (rot\vec{E}, d\vec{S}), \tag{12.1.4}$$

$$\oint_l \vec{E}\,d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}. \tag{12.1.5}$$

Рівняння (12.1.4) та (12.1.5) – видозмінений вигляд рівняння (12.1.3).

Звідси отримуємо перше рівняння Максвелла у диференціальній формі:

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \tag{12.1.6}$$

При будь якій зміні з часом у даній точці простору індукції магнітного поля у цій же точці простору виникає електричне вихрове поле, ротор вектора напруженості якого в цій точці дорівнює з протилежним знаком швидкості зміни індукції магнітного поля.

Таким чином наявність зв’язку між магнітним та електричним полями (встановлює рівняння (12.1.6)) говорить про те, що окремий розгляд електричного і магнітного полів має відносний зміст. Наприклад, якщо електричні заряди нерухомі відносно деякої інерціальної системи відліку, то відносно інших систем ці заряди рухаються і відповідно крім електричного поля вони створюють магнітне поле, а змінне магнітне поле породжує вихрове електричне

поле. Таким чином в одній системі поле може бути "чисто" електричним або "чисто" магнітним, а відносно інших систем відліку є сукупністю електричного і магнітного полів, які утворюють єдине електромагнітне поле.

12.2 Струми зміщення. Друге рівняння Максвелла в інтегральній та диференціальній формах

Якщо змінне магнітне поле породжує вихрове електричне поле, що математично описує перше рівняння Максвелла, то чи не можливе зворотне явище – змінне електричне поле породжує магнітне поле? Відповідь на це питання дає друге рівняння Максвелла, при виводі якого Максвелл вводить поняття особливих струмів названих струмами зміщення. Щоб зрозуміти ідею введення цих особливих струмів зміщення, які лежать в основі другого рівняння Максвелла, розглянемо коло змінного струму з ємністю (конденсатором).

Для кола постійного струму конденсатор є розривом цього кола, адже між обкладками конденсатора є діелектрик або вакуум. У колі змінного струму обкладки конденсатора перезаряджаються і в підвідних провідниках до конденсатора тече електричний струм – струм провідності (рис.12.2.1) зумовлений рухом в провідниках вільних зарядів. Якщо на рис. 12.2.1 конденсатор "закрити рукою", то все виглядає так, що електричне коло замкнуте, а раз так, то чому не вважати що між обкладками конденсатора навіть у вакуумі, де відсутні вільні заряди, теж тече струм сила якого дорівнює силі струму провідності. Ось такі напевне були міркування Максвелла і цей струм Максвелл назвав струмом зміщення, вважаючи що причиною цього може бути зміщення, а не переміщення, зарядів в діелектрику або у вакуумі, зміщення частинок ефіру, особливого середовища яке раніше вважали заповнює весь простір. На рис.12.2.1 наведена миттєва картина ліній струму: в підвідних провідниках їх густота більша, а на пластинах конденсатора лінії "розходяться" і переходять в лінії струму зміщення. Нехай миттєве значення заряду на обкладках конденсатора

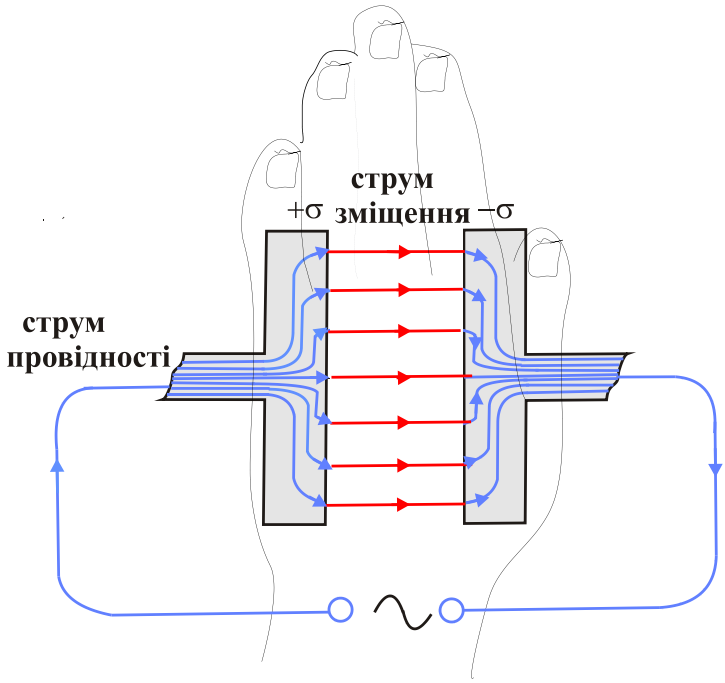


Рисунок 12.2.1

становить деяку величину q. Тоді миттєве значення струму провідності дорівнює:

$$I = \frac{dq}{dt}. \qquad (12.2.1)$$

Така ж сила струму зміщення, але звичайно без вільних електричних зарядів. Тоді що ж може "забезпечити" струм зміщення? Раз вільних зарядів між обкладками конденсатора немає, а є тільки електричне поле, причому змінне, то напевне це поле якимось чином "відповідає" за цей особливий струм зміщення. Оскільки у даному випадку сила струму провідності дорівнює силі струму зміщення (коло замкнуте), то у формулі (12.2.1) замість заряду q необхідно ввести певну характеристику змінного електричного поля між обкладками конденсатора яка і відповідає за струм зміщення. Так, якщо миттєве значення заряду обкладинок конденсатора становить деяку величину q, то при площі S обкладок цього конденсатора поверхнева густина зарядів дорівнює $\sigma = \frac{q}{S}$ і тоді, згідно відомої формули напруженості електричного поля плоского конденсатора, будемо мати:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{q}{S \varepsilon_0 \varepsilon} \Rightarrow q = \left(E \cdot \varepsilon_0 \varepsilon\right) S. \qquad (12.2.2)$$

Беручи до уваги, що $E\varepsilon_0\varepsilon = D$ □ тобто модуль вектора електричного зміщення, а $D \cdot S = \Phi_D$ визначає потік вектора електричного зміщення, то формула 12.2.1 набуде такого вигляду:

$$I = \frac{d\Phi_D}{dt}. \qquad (12.2.3)$$

Оскільки поверхня S обкладки конденсатора нерухома і не деформується, то зміна потоку вектора електричного зміщення через поверхню S зумовлена зміною тільки з часом. Тому повну похідну в рівнянні (12.2.3) слід замінити частинною похідною:

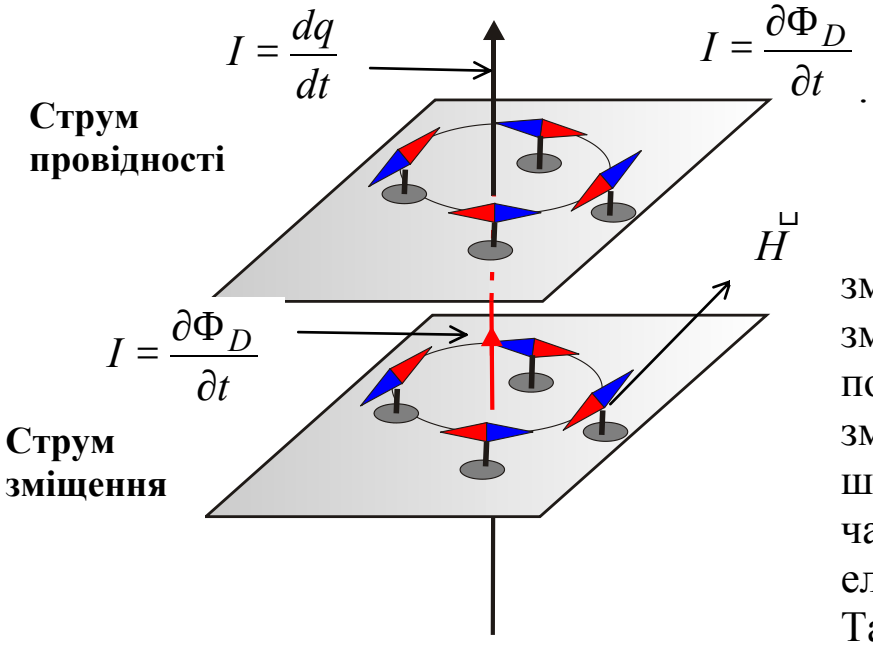


Рисунок 12.2.2

$$\oint \vec{H}, d\vec{l} = I \qquad (12.2.4)$$

Отже, за струм зміщення "відповідає" змінне електричне поле, а сила струму зміщення визначається швидкістю зміни з часом потоку вектора електричної індукції. Таким чином термін "струм зміщення" є чисто умовним, адже по суті струм зміщення це змінне з часом електричне поле. Підставою назвати величину $\frac{\partial \Phi_D}{\partial t}$ струмом є те, що одиниця вимірювання цієї величини співпадає з одиницею вимірювання струму, тобто ампер. Але якщо звичний "ампер струму" нагріває провідник або зумовлює електроліз, то що"робить ампер струму зміщення"? Струм зміщення подібно до струму провідності володіє лише однією властивістю – створювати магнітне поле, що в подальшому отримало блискуче експериментальне підтвердження. Наприклад, між обкладками конденсатора розташуємо магнітні стрілки (рис.12.2.2) і такі ж стрілки будуть розташовані навколо підвідних провідників до конденсатора. При зарядці або розрядці конденсатора в підвідних провідниках виникає електричний струм провідності, провідник може нагріватись і разом з тим навколо провідника виникає магнітне поле в якому повертаються магнітні стрілки. В той же самий час магнітні стрілки між обкладками конденсатора теж фіксують магнітне поле ніби між обкладками конденсатора (де немає вільних зарядів) протікає струм. Це і є струм зміщення. Отже, змінне електричне поле породжує змінне магнітне поле – ось така основна ідея другого рівняння Максвелла. Тому у законі повного струму (див.формулу 8.5.2 розділу 8.5) до струму провідності треба додати

силу струму зміщення, а точніше причину цього струму – змінне електричне поле і тоді маємо:

$$\oint_l \vec{H}, d\vec{l} = I_{пр} + \frac{\partial \Phi_D}{\partial t} \quad . \qquad (12.2.5)$$

В загальному випадку контур, який пронизує потік вектора зміщення електричного поля, може бути довільної форми і поле неоднорідним, то сумарний потік Φ_D дорівнює інтегральній сумі елементарних потоків через елементи площею dS де поле можна вважати однорідним, тобто $\Phi_D = \int_S \vec{D}, d\vec{S}$. Так само густина струму провідності $\vec{J}$ в різних точках поверхні контуру може бути різна і тоді сумарна сила струму провідності через площу S даного контуру дорівнює $I_{пр} = \int_S \vec{j}, d\vec{S}$ (див. розділ 4.1). Тому тепер рівняння 12.2.5 матиме вигляд:

$$\oint_l \vec{H}, d\vec{l} = \int_S \vec{J}, d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D}, d\vec{S} \quad . \qquad (12.2.6)$$

Рівняння (12.2.6) є другим рівняння Максвелла в інтегральній формі та узагальнює закон повного струму на струми зміщення. Для вакууму або діелектрика, де відсутні струми провідності, рівняння стверджує, що ***при будь-якій зміні з часом*** ($\frac{\partial}{\partial t}$) ***потоку вектора електричного зміщення*** (інтеграл $\int_S \vec{D}, d\vec{S}$) ***через площу*** S ***замкнутого контуру у цьому контурі виникає магнітне поле,*** ***циркуляція вектора напруженості якого*** ($\oint_l \vec{H}, d\vec{l}$) ***по цьому замкнутому контуру дорівнює швидкості зміни з часом потоку вектора електричного зміщення. Тобто змінне електричне поле породжує змінне магнітне поле.***

$$\oint_l (\vec{H}, d\vec{l}) = \int_S (rot\vec{H}, d\vec{S})$$

Згідно теореми Стокса (див. формулу 5.5.6) та вносячи в підінтегральний вираз знак частинної похідної, рівняння 12.2.6 можна записати в такому вигляді:

$$\int_S (rot\vec{H}, d\vec{S}) = \int_S \vec{j}, d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, d\vec{S} \quad . \qquad (12.2.7)$$

Звідси отримуємо друге рівняння Максвелла у диференціальній формі:

$$rot\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad . \qquad (12.2.8)$$

Для вакууму або діелектрика, де відсутні струми провідності, це рівняння говорить про те, що ***коли у даній точці простору відбувається зміна з часом вектора електричного зміщення, то в тій же точці простору виникає магнітне поле ротор вектора напруженості якого дорівнює швидкості зміни з часом вектора електричного зміщення. Тобто це рівняння, як і попереднє рівняння в інтегральній формі, стверджує утворення магнітного поля змінним електричним полем.***

12.3 Повна система рівнянь Максвелла

Перше та друге рівняння Максвелла встановлюють зв'язок між електричними і магнітними явищами. Перше рівняння говорить про те, що змінне магнітне поле породжує вихрове електричне поле, а зворотне явище – утворення магнітного поля за рахунок зміни з часом електричного поля описує друге рівняння. Оскільки в ці рівняння входять величини, що характеризують електричне та магнітне поля, то додатково до основних першого та другого рівнянь Максвелла необхідні "рівняння-тлумачення" які б встановлювали фундаментальні властивості цих полів. У найпростішому випадку безмежних ізотропних середовищ ці рівняння мають вже знайомий вигляд:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}, \qquad (12.3.1)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}, \qquad (12.3.2)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} + \vec{J}_{стор}. \qquad (12.3.3)$$

Рівняння (12.3.1) встановлює зв'язок між вектором $\vec{E}$ напруженості і вектором $\vec{D}$ зміщення електричного поля в середовищі з діелектричною проникністю ε (див. розділ 2.4). Зв'язок між вектором $\vec{H}$ напруженості магнітного поля та вектором індукції $\vec{B}$ в середовищі з магнітною проникністю μ встановлює рівняння (12.3.2) (див. розділ 8.3). Рівняння (12.3.3) є вже відомим законом Ома в диференціальній формі (див. розділ 4.3), тільки в цьому законі другий доданок визначає густину струму зумовлену силами неелектричного походження, тобто сторонніми силами.

А тепер перейдемо безпосередньо до рівнянь Максвелла, які зазвичай записують у вигляді двох пар рівнянь, що мають в інтегральній та диференціальній формах такий вигляд:

	Інтегральна форма	диференціальна форма
Перша пара:	$\oint_l \vec{E}\,d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$, (12.3.4) $\int D dS = \int \rho dV$	$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, (12.3.5) $div\vec{D} = \rho$. (12.3.7)
Друга пара:	$\oint_l \vec{H}, d\vec{l} = \int_S \vec{J}, d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{D}, d\vec{S}$,(12.3.8) $\oint \vec{B}, d\vec{S} = 0$	$rot\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, (12.3.9) $div\vec{B} = 0$. (12.3.11)

Рівняння (12.3.4) і (12.3.5) – це перші рівняння Максвелла з яких випливає, що змінне магнітне поле породжує вихрове електричне поле, а рівняння (12.3.6) і (12.3.7) як своєрідні "рівняння-тлумачення" говорять про те, що джерелом електростатичного на відміну від вихрового електричного поля, є нерухомі електричні заряди і ці

рівняння є відомою теоремою Гауса в інтегральній та диференціальній формах для потоку вектора електричного зміщення (див. розділ 2.4).

Рівняння (12.3.8) і (12.3.9) – це другі рівняння Максвелла, які є узагальненням закону повного струму (див. розділ 8.5) на струми зміщення. Оскільки струми зміщення замовлені змінним електричним полем (права частина рівнянь), то таке поле породжує змінне магнітне поле (ліва частина рівнянь). У випадку відсутності струмів зміщення, тобто змінного електричного поля, маємо відому картину – магнітне поле створюється струмами провідності. Якщо ж струм провідності змінний, то відповідно буде змінним і електричне поле. Отже, до струму провідності додається ще струм зміщення, але при цьому всередині провідників струм зміщення дуже малий в порівнянні зі струмом провідності. Рівняння (12.3.10) і (12.3.11) є теоремами Гауса для магнітного поля, які математично стверджують відсутність магнітних зарядів (див.8.2).

Надзвичайно важливим наслідком теорії Максвелла є передбачена ним наявність електромагнітних хвиль, які згодом були експериментально виявлені Герцем. Детально про електромагнітні хвилі та їх надзвичайно широке сьогоденне практичне застосування буде йти мова у розділі 16.

Контрольні запитання

1 *Як Максвелл вводить поняття вихрового електричного поля і як він при цьому дає означення явища електромагнітної індукції?*
2 *Як записується та формулюється перше рівняння Максвелла в інтегральній формі та який його фізичний зміст?*
3 *Як записується та формулюється перше рівняння Максвелла в диференціальній формі та який його фізичний зміст?*
4 *Як вводиться поняття струмів зміщення та як математично визначається сила струму зміщення?*
5 *Як записується та формулюється друге рівняння Максвелла в інтегральній формі та який його фізичний зміст?*
6 *Як записується та формулюється друге рівняння Максвелла в диференціальній формі та який його фізичний зміст?*
7 *Які матеріальні рівняння входять в повну систему рівнянь Максвелла?*

8 Як записується та формулюється повна система рівнянь Максвелла в інтегральній формі?

ЧАСТИНА IV КОЛИВАННЯ

З коливаннями пов’язані перші дні нашого життя, коли нас колишуть мамині руки або розгойдують в колисці, а далі ми постійно живемо в світі коливань і хвиль, тобто в природі чи в техніці відбуваються процеси які періодично повторюються з часом. З поняттям хвилі у багатьох людей в першу чергу виникає асоціація хвиль на поверхні води, тобто коливного процесу який поширюється в просторі. Звук теж хвиля, швидкість поширення якої у повітрі становить $340\,м/с$. Це все так звані механічні коливання і хвилі, тобто тіла чи їх частини періодично змінюють своє положення відносно рівноваги і ці зміни можна описати законами механіки. Але існують коливання і хвилі в яких періодичних змін з часом зазнають електричні та магнітні поля і процес поширення в просторі взаємопов’язаних змінного електричного і магнітного полів є електромагнітною хвилею. Діапазон довжин електромагнітних хвиль, які поширюються у вакуумі зі швидкістю $3\cdot10^{8}\,м/с$, тобто зі швидкістю світла (світло теж електромагнітна хвиля), надзвичайно широкий: від γ- променів радіоактивного випромінювання з довжиною хвилі 10^{-12} м до наддовгих радіохвиль (десятки кілометрів). До речі, мобільні телефони використовують електромагнітні хвилі довжиною 30 см. Якщо природа механічних та електромагнітних коливань і хвиль все ж таки відома – знаємо "що там коливається", то є особливі хвилі де навіть не знаємо "що там коливається". Це особливі хвилі – хвилі де-Бройля (французький фізик(1892-1987)), які вказують на те, що будь-яка рухома частинка є не тільки частинкою, але й хвилею і будь які механічні аналогії тут неприйнятні (це вже питання квантової фізики). Такі хвилі знаходять широке практичне застосування. Наприклад, в Україні ці хвилі "дають роботу" Сумському заводу електронних мікроскопів – у цих мікроскопах замість світлових хвиль використовуються хвильові властивості електронів як хвиль де-Бройля. Нарешті повинні бути, як випливає із загальної теорії відносності Ейнштейна, гравітаційні хвилі. Гравітаційна хвиля — збурення гравітаційного поля, що розповсюджується зі швидкістю світла, але зважаючи на їхню надзвичайно малу величину поки що не виявлені експериментально.

Разом з тим різні за своєю природою коливні процеси можна математично описати однаковими за формою рівняннями. Тому звідси випливає доцільність єдиного підходу до вивчення коливань різної фізичної природи, де спочатку, не розглядаючи природи різних коливань, встановлюють їх найбільш загальні характеристики.

Розділ 13 Коливання

13.1 Гармонічні коливання та їх характеристики

Коливання, які відбуваються за законом синуса чи косинуса, отримали назву гармонічних коливань. Їх характеризують такі фізичні величини:

A – максимальне значення змінної величини яке називається ***амплітудою***. У випадку механічних коливань – це максимальне лінійне або кутове змішення маятника від положення рівноваги, а для змінного струму – відповідне максимальне значення його сили чи напруги тощо;

T – ***період коливання***, тобто час одного повного коливання;

ν – ***частота коливань*** – число повних коливань за одиницю часу. Вимріюється в $\frac{1}{c} = c^{-1}$ і одиницею частоти є ***герц*** **(*Гц*)**. $1Гц$ – частота такого періодичного процесу, при якому за $1c$ здійснюється один цикл цього процесу.

Між частотою ν та періодом T є такий зв'язок:

$$\nu = \frac{1}{T}. \qquad (13.1.1)$$

Для характеристики гармонічних коливань ще вводиться поняття ***циклічної або кругової частоти*** ω**,** яка зв’язана зі звичайною частотою ν або періодом коливань T таким співвідношенням:

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi\frac{1}{T}, \qquad (13.1.2)$$

тобто циклічна частота дорівнює числу коливань за час 2π секунд.

Тоді аналітично рівняння гармонічного коливання можна записати у такому вигляді:

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0) \tag{13.1.3}$$

або

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0), \tag{13.1.4}$$

де x – значення змінної величини в будь-який момент часу,

φ_0 – початкова фаза коливань (з грецької *phasis* – прояв), величина, яка визначає значення змінної величини в момент часу $t = 0$,

$(\omega t + \varphi_0)$ – фаза коливань, яка визначає значення змінної величини у будь - який момент часу.

Для механічних гармонічних коливань перша похідна від зміщення x за часом t визначає миттєву швидкість

$$v = \frac{dx}{dt} = A\cos\omega(\omega t + \varphi), \tag{13.1.5}$$

а друга похідна від виразу (13.1.3) дає значення миттєвого прискорення, тобто

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi). \tag{13.1.6}$$

Оскільки $x = A\sin(\omega t + \varphi_0)$, то вираз (13.1.6) набуде такого вигляду:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \tag{13.1.7}$$

або

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad \text{чи} \quad x'' + \omega^2 x = 0. \tag{13.1.8}$$

Рівняння (13.1.8) є диференціальним рівнянням гармонічних коливань. Оскільки в загальному випадку x може бути координатою точки, то у такому випадку значення змінної величини, того ж самого зміщення x, позначають буквою ξ (ксі – гр. алфавіт) і тоді рівняння (13.1.8) запишеться так:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \omega^2\xi = 0 \quad . \qquad (13.1.9)$$

В подальшому це рівняння буде часто згадуватись і використовуватись, і така форма запису буде особливо доцільна при розгляді рівняння біжучої хвилі.

Усі попередні рівняння (13.1.4 – 13.1.9) – це аналітичний спосіб опису гармонічних коливань. Крім того, гармонічні коливання можна описати графічним методом як залежність змінної величини x від часу. Наприклад, амплітуда механічних коливань маятника 8*см*, період 2*с*, тобто циклічна частота $\omega = \frac{2\pi}{2c} = \pi c^{-1}$. Нехай ми увімкнули секундомір в момент часу $t = 0$, коли зміщення від положення рівноваги складає 4 см. Якщо описувати коливання функцією синуса (рівняння 13.1.3), то за даних умов $4 = 8\sin(\omega 0 + \varphi_0)$, звідки $\sin\varphi_0 = \frac{1}{2}$. Отже, $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$ і тоді аналітично таке коливання запишеться рівнянням: $x = 8\sin(\pi t + \frac{\pi}{6})$, а описуючи це коливання функцією косинуса будемо мати $x = 8\cos(\pi t + \frac{\pi}{3})$.

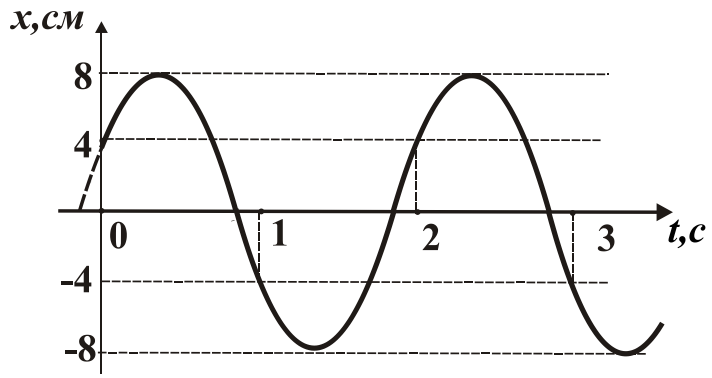
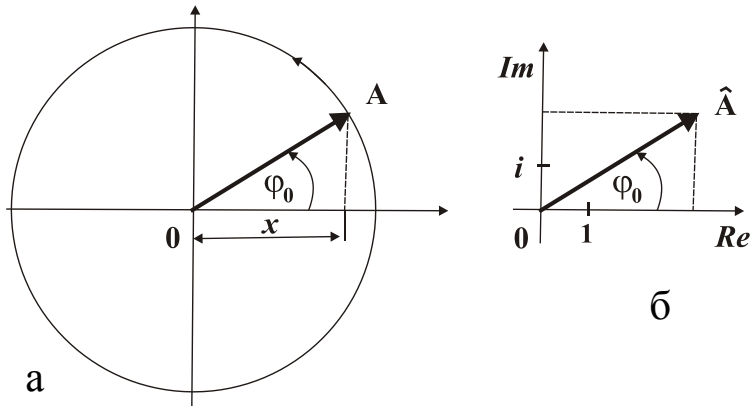


Рисунок 13.1.1

Також гармонічні коливання можна описати графічним методом як залежність змінної величини x від часу. Так, якщо звернутись до розглянутого прикладу з коливанням маятника, то графік таких коливань матиме вигляд

показаний на рис.13.1.1, де синусоїда не починається з нуля а з того положення, коли при $t = 0$ зміщення x дорівнює половині амплітуди.

Наочним і зручним методом опису є метод векторних діаграм, особливо при додаванні механічних та електричних коливань. Суть цього методу полягає в тому, що на координатній площині відносно вибраного напряму початку координат проводять вектор у вибраному масштабі, модуль якого дорівнює амплітуді коливань, а кут нахилу цього вектора відносно вибраного напряму визначає початкову фазу φ_0 коливань (рис.13.1.2а). Якщо цей вектор обертання **A** з кутовою швидкістю ω рівною циклічній частоті коливань, то проекція цього вектора на вибраний напрям буде здійснювати гармонічні коливання за законом $x = A\sin(\omega t + \varphi_0)$.



а б

Всі наведені методи опису гармонічних коливань так чи інакше вимагають знання тригонометричних функцій. Інакше кажучи без синуса або косинуса не обійтись, незважаючи на громіздкість тригонометричних операцій та зміну вигляду цих функцій при їх диференціюванні та інтегруванні. А чи не можна аналітично описати гармонічні коливання іншим аналітичним методом, щоб не було тригонометрії. Ви скажете – як це гармонічні коливання без синуса чи косинуса? А ось як – порівняйте рис.13.1.2а з рисунком 13.1.2б, де показана вісь дійсних (*Re – real)* та уявних *(Im – image)* чисел, уявне число – це $i = \sqrt{-1}$. У такій координатній системі дійсних та уявних чисел вектор амплітуди (той що зліва) стає на рис.13.1.2б комплексним числом, яке має дійсну та уявну частину:

$$\hat{A} = a + bi = A\cos\varphi + iA\sin\varphi, \qquad (13.1.10)$$

де a та b проекції вектора на координатні осі. Враховуючи, що при обертанні вектора A з кутовою швидкістю ω відбувається відповідна зміна з часом кута φ, а саме $\varphi = \omega t + \varphi_0$, то

$$\tilde{A} = A\cos(\omega t + \varphi_0) + iA\sin(\omega t + \varphi_0). \qquad (13.1.11)$$

Згідно теореми Ейлера будь-яке дійсне число можна представити комплексною експонентою з тригонометричними функціями, а саме:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \qquad (13.1.12)$$

Тому рівняння гармонічного коливання можна записати у комплексній формі:

$$\tilde{x} = Ae^{i(\omega t + \varphi_0)}, \qquad (13.1.13)$$

де дійсна частина (позначимо Re) є гармонічне коливання

$$\mathrm{Re}(\tilde{x}) = A\cos(\omega t + \varphi_0). \qquad (13.1.14)$$

В подальшому позначення Re опускають і рівняння (13.1.14) записують у такому вигляді:

$$x = Ae^{i(\omega t + \varphi_0)}. \qquad (13.1.15)$$

Ось і все – немає синуса чи косинуса, а рівняння (13.1.15) описує гармонічне коливання. Такий метод опису гармонічних коливань отримав назву символічного методу і має низку переваг над іншими методами. Дійсно, сама назва цього методу говорить, що гармонічному калюванню ставиться у відповідність його символ (рівняння (13.1.15)) а не тригонометрична функція, яка може бути синусом чи косинусом у залежності від початкової фази і цей символ не змінюється при диференціюванні чи інтегруванні (похідна від експоненти є експонентою). Крім того, при додаванні коливань замість тригонометричних функцій використовуються більш прості правила додавання комплексних чисел.

13.2 Додавання коливань одного напряму. Биття

Тіло може одночасно приймати участь у декількох коливних процесах і тоді можна говорити про додавання механічних коливань. Якщо в електричному колі одночасно діють різні змінні напруги, то у провіднику спостерігаємо додавання різних коливань струмів тощо. В усіх цих випадках виникає питання – який результат такого додавання коливань? Для цього спочатку розглянемо найпростіший випадок додавання коливань одного напряму і однакової частоти, які аналітично описуються такими рівняннями:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= A_1\cos(\omega t+\varphi_1)\\ x_2 &= A_2\cos(\omega t+\varphi_2)\end{aligned}\right\}. \qquad (13.2.1)$$

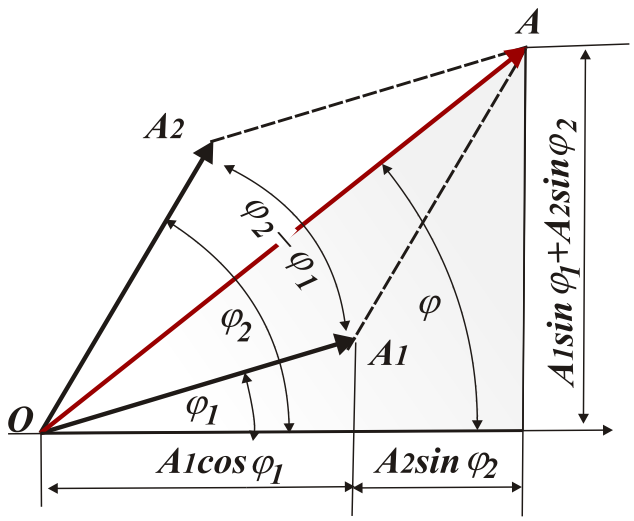


Рисунок 13.2.1

Додавання таких коливань виконаємо методом векторних діаграм (рис.13.2.1).

Оскільки вектори A_1 та A_2 обертаються з однаковою кутовою швидкістю, адже частоти коливань однакові, то різниця фаз $(\varphi_2-\varphi_1)$ між ними залишається сталою і в результаті отримуємо результуюче коливання тієї ж самої частоти з деякою результуючою амплітудою A та початковою фазою φ.

З векторної діаграми видно, що амплітуда результуючого коливання за теоремою косинусів буде дорівнювати

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_2), \qquad (13.2.3)$$

а його початкова фаза φ, як видно з прямокутного трикутника, визначається таким відношенням:

$$tg\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}. \qquad (13.2.4)$$

Особливо цікаве явище відбувається при додаванні двох гармонічних коливань з близькими частотами, тобто такими частотами ω_1 та ω_2, що їх різниця значно менша цих частот, а саме $\omega_2 - \omega_1 << \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$. Тоді такі частоти називають близькими, наприклад 100 та 102 Гц.

Нехай амплітуди двох коливань з близькими частотами однакові і початкові фази дорівнюють нулю. Записавши рівняння цих коливань

$$\begin{aligned} x_1 &= A\cos\omega_1 t \\ x_2 &= A\cos\omega_2 t \end{aligned} \qquad (13.2.5)$$

і додаючи їх, отримаємо:

$$x = x_1 + x_2 = 2A\left(\cos\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}\right)\cdot\left(\cos\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right), \qquad (13.2.6)$$

тобто відбувається гармонічне коливання з середньою частотою коливань (перший косинус), в той же час результуюча амплітуда цих коливань повільно змінюється за законом

$$A_{результ.} = \left|2A\cos\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right|. \qquad (13.2.7)$$

Це значить, що частота зміни результуючої амплітуди значно менша частот зміни косинуса (оскільки амплітуда додатне число, тому визначаємо косинус за модулем).

Таке ***явище періодичної зміни амплітуди коливання, яке виникає при додаванні двох гармонічних коливань з близькими частотами, називається биттям і частота биття дорівнює різниці частот коливань що додаються.***

Назва цього явища "биття" досить влучно відображає суб'єктивне відчуття цього явища, особливо при додаванні механічних коливань, наприклад, струну музикального інструменту (гітари, скрипки тощо) треба настроїти на ноту "ля" першої октави – це 440*Гц*. Якщо струна не настроєна а дає коливання, наприклад 450*Гц*, то почуємо характерне вібрування з частотою 10*Гц* яке ніби б'є, неприємно "ріже" слух.

Крім такого застосування биття для настроювання музичних інструментів, биття набуло широкого застосування в радіотехніці. Щоб мати більш наочне уявлення розглянемо приклад додавання двох коливань з близькими частотами (рис.13.2.2). Так, частота першого коливання (рис13.2.2а) становить 10*Гц* (підрахуйте самі – 10 коливань за одну секунду), а другого коливання – 12*Гц* (рис.13.2.2б). А тепер на одному рис.13.2.2в сумістимо ці два графіки коливань, а на рис.13.2.2г додамо ці коливання, враховуючи їх фази коливань. Бачимо, що в один момент часу коливання відбуваються у протилежних фазах і результуюча амплітуда стане рівною нулю (рис.13.2.2г), а потім "синусоїди співпадають", тобто коливання в однакових фазах і амплітуда результуючого коливання досягає максимального значення та змінюється за гармонічним законом з частотою 2*Гц*, тобто різницею частот коливань які додаються, що узгоджується з аналітично отриманим висновком (формула (13.2.7)).

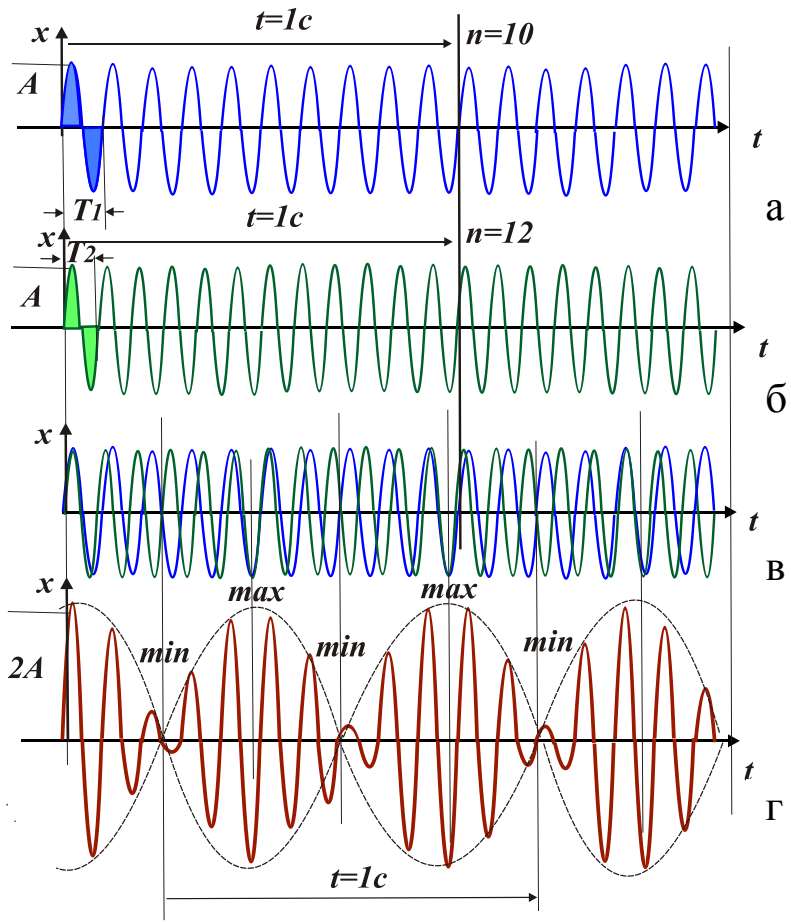
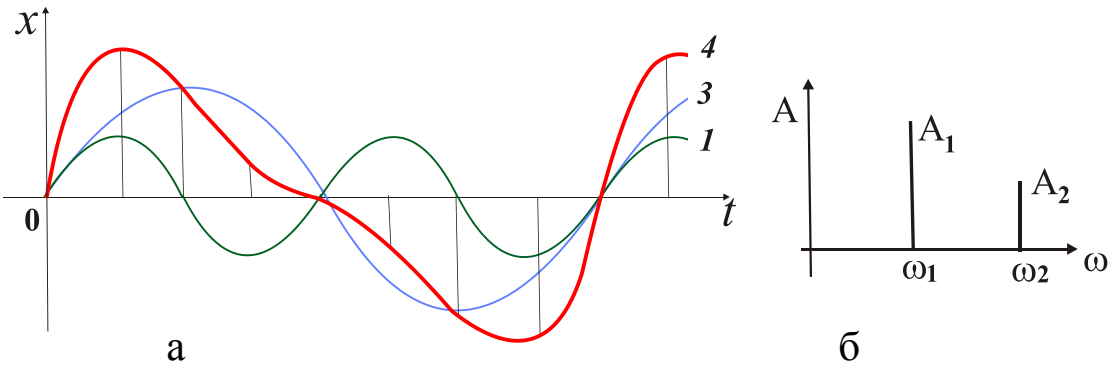


Рисунок 13.2.2

Графічний метод додавання гармонічних коливань різних частот та різних амплітуд наведений на рис.13.2.3а і, як бачимо, результуюче коливання не є гармонічним. Крім того, результуюче коливання можна подати у вигляді так званого частотного спектру (рис.13.2.3б), де по осі абсцис відкладаються значення частот коливань, а по осі ординат – їх амплітуди. Ввівши в комп'ютер дані частотного спектру



а б

Рисунок 13.2.3

багатьох коливань, можна отримати результуючу криву та навіть почути "звук" цієї кривої. На основі такого принципу – додавання гармонічних коливань, працюють синтезатори звуків як музичних інструментів, так і мови людини.

Під синтезом мови розуміють відтворення вголос довільної текстової інформації, а не "програвання" раніше записаних звукових файлів.

Таким чином, якщо в загальному випадку при додаванні гармонічних коливань отримуємо результуюче негармонічне коливання, то можлива зворотна математична дія – складне негармонічне коливання можна розкласти на відповідні гармонічні коливання. Відповідь на це питання дає теорема Фур'є про розкладання будь-якого коливання в ряд (названий рядом Фур'є): ***будь-яке складне коливання з періодом T можна подати у вигляді суми простих гармонічних коливань (гармонік). Частоти цих гармонік кратні основній частоті даного складного коливання.***

13.3 Додавання взаємно перпендикулярних коливань

Напевне не один з нас відчував на собі "додавання коливань в різних напрямах", їдучи в автомобілі по наших дорогах, коли вас "трясло" і "кидало" в різних напрямах. Навіть з такої точки зору при конструкції автомобілів питання врахування складання таких

коливань має практичне значення. Тому розглянемо окремі випадки додавання взаємно перпендикулярних коливань.

Нехай два коливання однакової частоти ω та різних амплітуд a та b відбуваються у двох перпендикулярних напрямах вздовж координатних осей x та y. Якщо коливання відбуваються в однакових фазах, то рівняння цих коливань можна записати у такому вигляді:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\sin\omega t \\ y &= b\sin\omega t \end{aligned}\right\}, \qquad (13.3.1)$$

звідки

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b} \Rightarrow y = \frac{b}{a}x, \qquad (13.3.2)$$

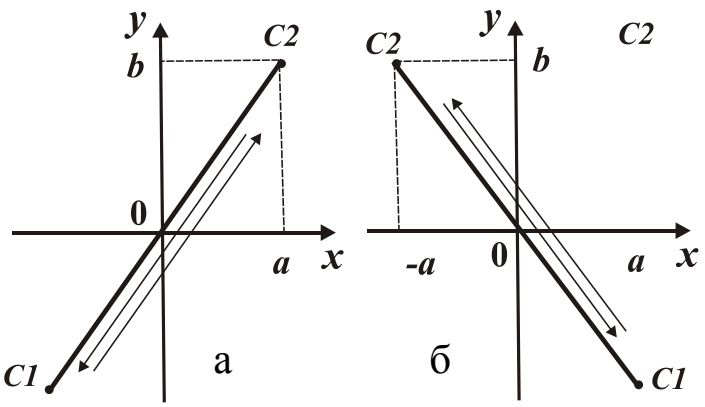


Рисунок 13.3.1

тобто траєкторія точки C результуючого коливання є пряма C_1C_2 (рис.13.3.1а), нахил якої до осі абсцис визначається відношенням амплітуд взаємно перпендикулярних коливань. Такі коливання називаються лінійно поляризованими.

Коли різниця фаз коливань дорівнює π, то

$$\left.\begin{aligned} x &= a\sin(\omega t + \pi) = -a\sin\omega t \\ y &= b\sin\omega t \end{aligned}\right\} \qquad (13.3.3)$$

і тоді рівняння траєкторії точки C буде теж пряма лінія C_1C_2 –

$$y = -\frac{b}{a}x, \qquad (13.3.4)$$

але яка розташована в іншому квадранті (рис.13.3.1б).

Якщо ж різниця фаз двох коливань дорівнює $\pi/2$, то рівняння таких коливань матиме такий вигляд:

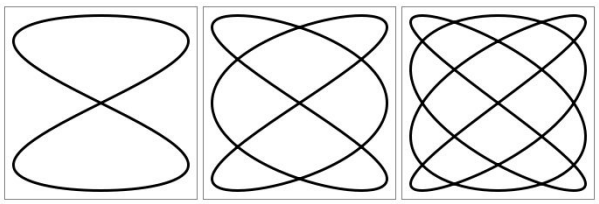
$$\left.\begin{aligned} x &= a\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = a\cos\omega t \\ y &= b\sin\omega t \end{aligned}\right\}. \qquad (13.3.5)$$

Підносячи ці рівняння до квадрату та додаючи їх і враховуючи, що $\cos^2\omega t + \sin^2\omega t = 1$, отримаємо рівняння траєкторії (формула (13.3.6)) результуючого коливання як еліпсу (рис.13.3.2) і таке коливання називається еліптично поляризованим:

Рисунок 13.3.2

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (13.3.6)$$

Для того, щоб визначити напрям руху по еліпсу, знайдемо положення точки *C* для двох послідовних моментів часу, наприклад, якщо $t_2 = 0$, то $x_1 = a$ і $y_1 = 0$, а коли $t_2 = \frac{1}{4}T$, то $x_2 = 0$ і $y_2 = b$. Отже, точка буде рухатись по еліпсу проти годинникової стрілки (рис. 12.3.2). Легко переконатись, що при різниці фаз $\frac{3}{2}\pi$ напрям руху буде протилежний.



1:2 2:3 3:4

Рисунок 13.3.3

Різні криві, які отримують при складанні взаємно перпендикулярних коливань, називаються фігурами Ліссажу (французький вчений (1822-1880)). Вигляд таких кривих при різних співвідношеннях частот взаємно перпендикулярних коливань наведений на рис 13.3.3.

Особливого застосування фігури Ліссажу набули у техніці як метод визначення або порівняння частот за допомогою осцилографа.

Для цього на одну пару відхиляючих пластин (наприклад, відхилення по осі OX) подається сигнал невідомої частоти, а на другу пару сигнал від генератора (відхилення по осі OY), частоту якого можна плавно змінювати (рис.13.3.4). Змінюючи частоту генератора на екрані осцилографа отримують фігури Ліссажу і, наприклад, показана на екрані осцилографа фігура (рис.13.3.4) відповідає відношенню частоти генератора до частоти досліджуваного коливання як 2:3.

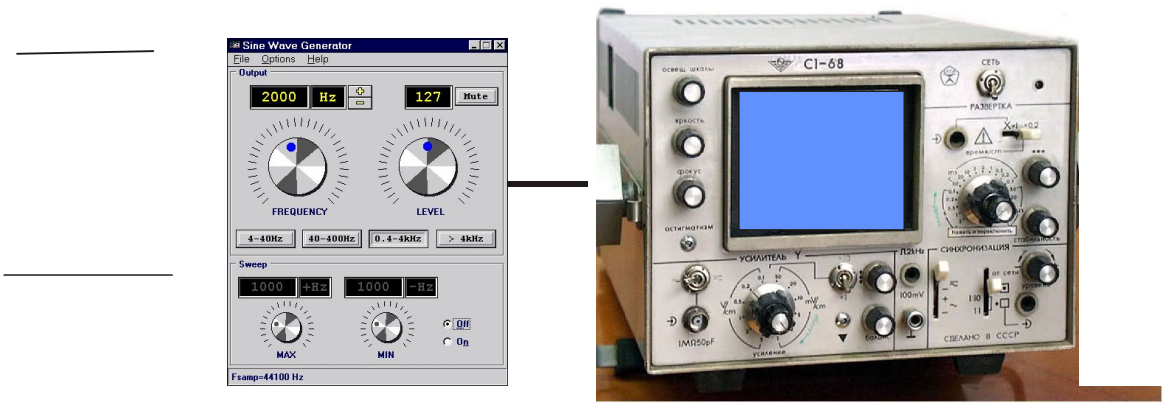


Рисунок 13.3.4

13.4 Гармонічний осцилятор. Механічні гармонічні коливання. Пружинний, математичний і фізичний маятники та їх вільні незатухаючі коливання

Гармонічний осцилятор (з лат. oscilare – коливатись) – система, яка здійснює гармонічні коливання. Процеси, що відбуваються в різних гармонічних осциляторах, можуть бути різної природи. Так, в електричному коливальному контурі відбуваються електромагнітні коливання. Навіть атом чи електрон теж може бути осцилятором (вивчає квантова фізика). Оскільки питання квантової фізики будуть розглядатись в окремому курсі фізики, розглянемо найпростіші осцилятори, починаючи з механічних, у яких відбувається проста періодична зміна положення тіла від стану рівноваги на прикладі пружинного, математичного та фізичного маятників.

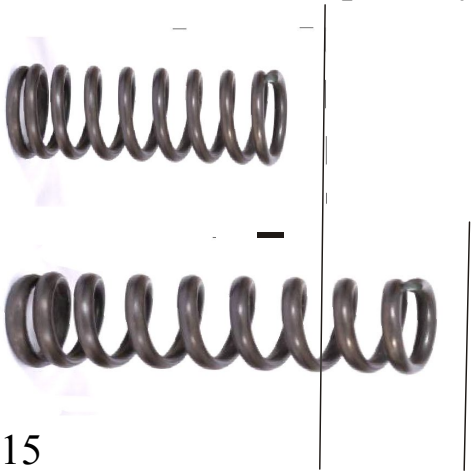


Рисунок 13.4.1

Пружинний маятник – це система двох з’єднаних тіл:

пружини жорсткістю k та тіла масою m. Тіло може бути підвішене на пружині або прикріплено до горизонтально розташованої пружини (рис. 13.4.1). Звичайно, для цього повинна бути деяка горизонтальна площина – опора для переміщення тіла. Якщо відвести тіло від положення рівноваги і відпустити, то це тіло почне здійснювати коливання. У випадку абсолютно пружної пружини та у відсутності сил опору і тертя при русі тіла коливання будуть незатухаючими. У такому випадку рух тіла здійснюється виключно під дією сили пружності, яка напрямлена до положення рівноваги і згідно закону Гука в проекціях на вибраний напрям вона дорівнює

$$F = -kx. \qquad (13.4.1)$$

Під дією цієї сили тіло набуває прискорення, яке визначається за другим законом Ньютона $a = \frac{F}{m}$.

Оскільки сила змінна і залежить від зміщення x, то кожному значенню x буде відповідати "своє" миттєве прискорення $a = \frac{d^2x}{dt^2}$. Отже, з врахуванням сили пружності (13.4.1), що діє на тіло, другий закон Ньютона прийме такий вигляд:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \qquad (13.4.2)$$

або

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \qquad (13.4.3)$$

Отже, отримали диференціальне рівняння вільних незатухаючих коливань, розв'язком якого є гармонічна функція $x = A\sin(\omega t + \varphi_0)$, а згідно диференціального рівняння (формула (13.1.8))

$$\frac{k}{m} = \omega^2. \qquad (13.4.4)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Звідси, враховуючи що , період власних незатухаючих коливань такого маятника дорівнює

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} . \qquad (13.4.5)$$

Амплітуда коливань та їх початкова фаза визначаються тільки з початкових умов.

Оскільки ми розглядаємо незатухаючі коливання, то повна енергія такого механічного осцилятора, тобто сума кінетичної E_K та потенціальної енергії $E_П$, є сталою величиною. Приймаючи до уваги, що кінетична енергія тіла масою m дорівнює $E_K = \frac{mv^2}{2}$, а потенціальна енергія у даному випадку є енергія пружної деформації пружини $E_П = \frac{kx^2}{2}$, то повна енергія

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} . \qquad (13.4.6)$$

Беручи до уваги рівняння (13.1.3), (13.1.5) та (13.4.4), маємо:

$$E = \frac{mA^2\omega^2\cos^2(\omega t + \varphi_0)}{2} + \frac{mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \varphi_0)}{2} . \qquad (13.4.7)$$

Якщо тіло проходить положення рівноваги ($x = 0$), то повна механічна енергія такого осцилятора дорівнює його максимальній кінетичній енергії, тобто

$$E = \frac{mv_{\max}^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2} . \qquad (13.4.8)$$

У випадку максимального відхилення тіла від рівноваги ($x = A$) повна енергія дорівнює максимальній потенціальній енергії осцилятора, тобто

$$E = \frac{kA^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2} \quad . \qquad (13.4.9)$$

Ідеальним механічним осцилятором може бути матеріальна точка підвішена на невагомій нерозтяжній нитці і такий осцилятор називається ***математичним маятником***. Звичайно, матеріальну точку неможливо підвісити, тому близьким до математичного маятника є тіло, розмірами якого можна нехтувати у порівнянні з довжиною нитки і такий маятник з маленькою кулькою масою m підвішеній на нитці довжиною l показаний на рис.13.4.2. Якщо кульку відвести від положення рівноваги, то вона буде здійснювати коливання під дією сили напрямленої до положення рівноваги. Визначимо, як ця сила залежить від зміщення від положення рівноваги, що дасть можливість скласти рівняння коливань такого маятника.

На кульку, в подальшому розуміючи що це матеріальна точка, діють сила тяжіння $m\vec{g}$ та сила натягу нитки $\vec{F}_н$ і, як видно з рис.13.4.2, складова сили натягу нитки визначає силу яка "повертає" кульку до положення рівноваги. У випадку малих коливань кутові відхилення будуть такі незначні, що $\sin\alpha \cong tg\alpha$, а відрізок дуги по якій рухається точка, тобто зміщення x від положення рівноваги, практично є відрізком прямої. За такої умови, розглядаючи два трикутники де в одному сторонами є це зміщення x та довжина нитки l, а в другому – сила тяжіння $m\vec{g}$ і "повертаюча" сила F, можна записати:

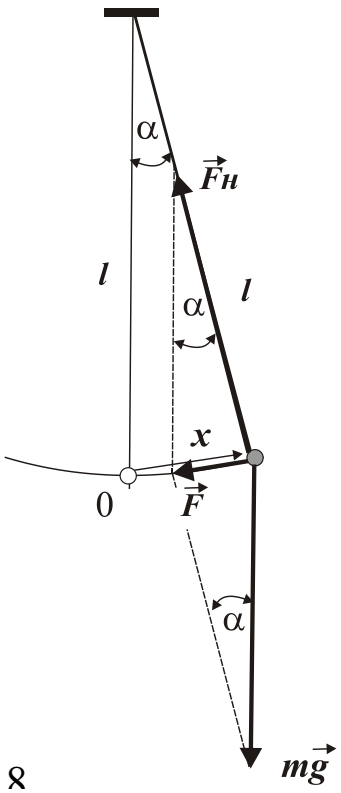


Рисунок 13.4.2

$$\frac{F}{mg} = \frac{x}{l}, \qquad (13.4.10)$$

звідки з врахуванням знаку проекції вектора сили F на напрям переміщення x

$$F = -\frac{mg}{l}x \quad . \qquad (13.4.11)$$

Отже, коливання математичного маятника відбувається під дією сили яка пропорційна зміщенню від положення рівноваги, тобто подібно силі пружності закону Гука $F = -kx$, де тепер роль жорсткості k пружини виконує коефіцієнт $\frac{mg}{l}$ і така сила називається квазіпружною (з лат. quasi – ніби). Оскільки раніше було доведено, що коливання під дією такої сили є гармонічними, то враховуючи що для математичного маятника $k = \frac{mg}{l}$, рівняння (13.4.2) прийме такий вигляд:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{mg}{l}x = 0 \quad . \qquad (13.4.12)$$

Розв'язком такого рівняння є гармонічна функція, в якій амплітуда A та початкова фаза φ_0 визначаються виключно з початкових умов, а циклічна частота згідно (13.4.4) визначається таким співвідношенням:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{g}{l} \qquad (13.4.13)$$

і тоді період власних незатухаючих коливань математичного маятника дорівнює

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad . \qquad (13.4.14)$$

Тобто він не залежить при малих коливаннях від маси матеріальної точки або тіла (кульки), розміри якого значно менші довжини самого маятника. Експериментально можна встановити, що при відхиленнях такого маятника не більше 5^0, період його коливань залишається однаковим. При більшому відхиленні (більшій

амплітуді) період коливань дещо зростає, а аналітична залежність періоду коливань маятника від амплітуди дається в спецкурсах теорії коливань, наприклад, при кутових відхиленнях маятника до $\alpha \le 60^0$ його період коливання можна обчислити за такою формулою:

$$T = T_0\left(1+\frac{1}{4}\sin^2(\frac{\alpha}{2})^2\right). \quad (13.4.15)$$

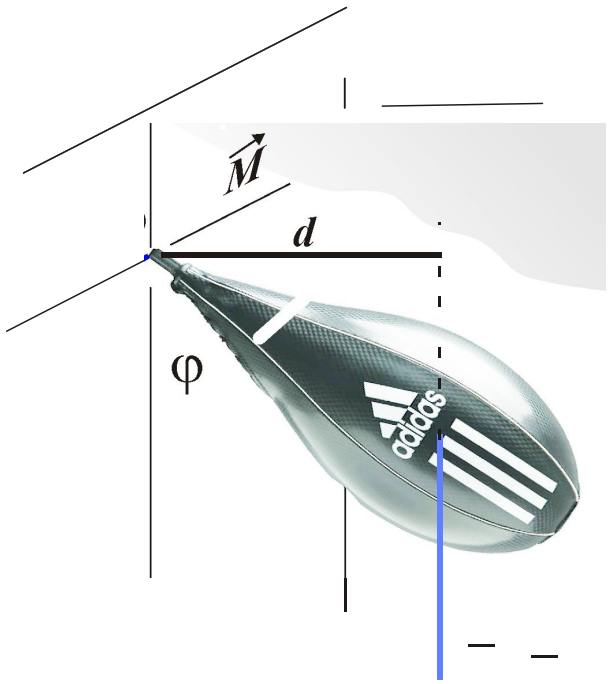


Рисунок 13.4.3

На відміну від математичного маятника будь-яке тіло, що може коливатись відносно осі яка не проходить через його центр мас, називається фізичним маятником і таким маятником можуть бути самі різні тіла, навіть гойдалка на атракціонах в парку. На рис.13.4.3 фізичним маятником є боксерська груша у якої вісь обертання не проходить через точку C – центр її маси. Якщо такий маятник (боксерську грушу) відхилити від положення рівноваги на деякий кут φ, то виникає момент сили який повертає тіло до положення рівноваги. Модуль цього моменту сили дорівнює добутку сили, тобто силі тяжіння, яка прикладена до центра мас тіла, на плече сили – найкоротшу відстань від осі обертання до напряму дії сили, тобто

$$M = mg \cdot d. \quad (13.4.16)$$

Позначивши через l відстань OC від осі обертання до центру мас тіла, з прямокутного трикутника $d = l\sin\varphi$ і, беручи до уваги лише малі коливання ($\sin\varphi \cong \varphi$), модуль моменту сили набере такого вигляду:

$$M = mg \cdot l \cdot \varphi. \quad (13.4.17)$$

Згідно рівняння динаміки обертального руху під дією прикладеної сили тіло з моментом інерції I набуває кутового прискорення $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$, тобто $\vec{M} = I\frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}$. У даному випадку згідно правила правого гвинта вектор моменту сили напрямлений "від нас" – це показано на рис. 13.4.3 (момент сили повертає тіло за стрілкою годинника). На цьому ж рисунку вказаний напрям вектора кутового переміщення який має протилежний напрям, адже тіло повернулось на кут φ проти стрілки годинника. Тому в проекціях на вибраний напрям осі обертання рівняння динаміки обертального руху запишеться у вигляді:

$$mgl\varphi = -I\frac{d^2\varphi}{dt^2} \tag{13.4.18}$$

або

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} + mgl\varphi = 0 \Rightarrow \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \underbrace{\frac{mgl}{I}}_{\omega^2}\varphi = 0 \tag{13.4.19}$$

тобто отримали вже відоме диференціальне рівняння гармонічних коливань, розв'язком якого є функція

$$\varphi = \varphi_{\max}\sin(\omega t + \varphi_{0)}, \tag{13.4.20}$$

де $\varphi_{\max}$ – кутове максимальне (амплітудне) значення відхилення маятника від положення рівноваги. Що стосується частоти коливань, то згідно формули (13.4.19)

$$\omega^2 = \frac{mgl}{I}. \tag{13.4.21}$$

Період коливань фізичного маятника дорівнює:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}. \tag{13.4.22}$$

Якщо порівняти формулу періоду коливань фізичного маятника $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ з формулою періоду коливань математичного маятника, то період коливання фізичного маятника буде таким самим як і математичного за умови $\frac{I}{ml} = l_{зв}$. Визначена за такої умови довжина $l_{зв}$ називається приведеною довжиною фізичного маятника.

13.5 Електричний коливальний контур. Вільні електромагнітні незатухаючі коливання в електричному коливальному контурі

Коливні процеси можуть відбуватись не тільки в механічних осциляторах, але і в інших за своєю природою системах. Прикладом цього може бути електричне коло з котушки індуктивності та електроємності (конденсатора). Так, на рис.13.5.1 конденсатор ємністю C зображений двома паралельними пластинами, а котушка індуктивності витками провідника. Якщо перемикач – ключ знаходиться в першому положенні, то обкладки конденсатора заряджаються від джерела (батарейки) постійного струму. Перемкнувши ключ в положення 2, у такому електричному колі, схематично зображеному на рис.13.5.2, почнуться коливні процеси які можна розділити на окремі етапи.

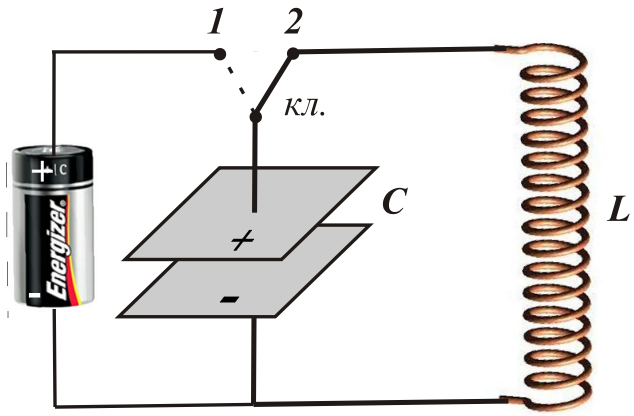
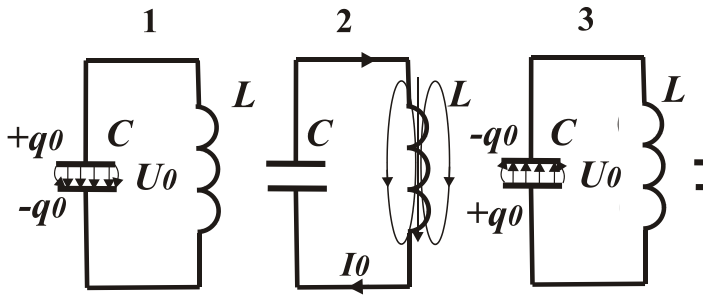


Рисунок 13.5.1

1. Конденсатор заряджений, струм відсутній. У даному випадку енергія контуру дорівнює максимальній енергії електричного поля конденсатора, заряд якого становить q_0 при різниці потенціалів U_0 між обкладками цього конденсатора.



$$W = \frac{1}{2}CU_0^2 = \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{c} \qquad W = \frac{1}{2}LI_0^2 \qquad W = \frac{1}{2}CU_0^2 = \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{c}$$

Рисунок 13.5.2

2. Оскільки пластини конденсатора з'єднані з котушкою індуктивності як провідником, то за рахунок розрядки конденсатора у колі виникає електричний струм, збільшенню якого протидіє електрорушійна сила самоіндукції. Коли конденсатор повністю розрядиться, струм досягає максимального значення I_0 і енергія контуру дорівнює максимальній енергії магнітного поля котушки індуктивності.

3. Конденсатор розряджений і немає його електричного поля для "підтримки" струму, струм "хоче" миттєво зменшитись. Але такому зменшенню протидіє електрорушійна сила самоіндукції, яка підтримує струм у попередньому напрямі і цей струм перезаряджає конденсатор. На його обкладках знову буде максимальний заряд та максимальна напруга і процес починається у зворотному напрямі – розрядка, перезарядка і т.д. Таким чином, у замкнутому електричному колі з конденсатора та котушки індуктивності відбувається періодичний процес – енергія електричного поля конденсатора переходить в енергію магнітного поля струму котушки індуктивності і навпаки. У випадку відсутності втрат енергії на нагрівання провідників або на випромінювання електромагнітних хвиль такі коливання у контурі будуть незатухаючими.

Для такого контуру, як замкнутого електричного кола, можна застосувати друге правило Кірхгофа – алгебраїчна сума спадів напруг на всіх ділянках кола дорівнює алгебраїчній сумі електрорушійних сил у даному контурі. У даному випадку є лише одна ЕРС самоіндукції $\varepsilon = -L\frac{dI}{dt}$, а напругою є $U = \frac{q}{C}$ – напруга між обкладками конденсатора. Отже,

$$\frac{q}{C} = -L\frac{dI}{dt}. \qquad (13.5.1)$$

Оскільки миттєве значення сили струму дорівнює $I = \frac{dq}{dt}$, то рівняння (13.5.1) прийме такий вигляд:

$$\frac{q}{C} = -L\frac{d^2q}{dt^2} \tag{13.5.2}$$

або

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d^2q}{dt^2} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega^2} q = 0 \,. \tag{13.5.3}$$

Тобто по аналогії з (13.4.2) отримали диференціальне рівняння, розв'язком якого є гармонічна функція

$$q = q_0 \sin(\omega t + \varphi_0)\,, \tag{13.5.4}$$

в якій q_0 – амплітудне значення заряду конденсатора і це значення, як і початкова фаза, визначається тільки з початкових умов.

Так само по аналогії з формулами (13.1.8) та (13.4.5) можна записати значення циклічної частоти та періоду вільних незатухаючих коливань в електричному коливальному контурі:

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}\,, \tag{13.5.5}$$

$$T = 2\pi\sqrt{LC}\,. \tag{13.5.6}$$

Остання формула отримала назву формули Томсона.

Оскільки похідна від заряду за часом визначає миттєве значення струму, то, взявши таку похідну за часом від рівняння (13.5.4), отримаємо залежність сили струму від часу у коливальному контурі:

$$I = \frac{dq}{dt} = q_0\omega\cos(\omega t + \varphi_0) = I_0\cos(\omega t + \varphi_0)\,, \tag{13.5.7}$$

де $q_0\omega$ визначає амплітудне значення I_0 сили струму у коливальному контурі.

Завершуючи розгляд вільних незатухаючих коливань слід відзначити, що всі отримані результати справедливі для так званих лінійних систем, тобто таких осциляторів, що їх параметри не змінюються під час процесу коливань і такі системи називаються *лінійними.* А може бути інший випадок нелінійних систем, коли параметри системи змінюються у результаті процесів у самій системі. Наприклад, коливання кульки на нитці у вертикальній площині. Нитка, на якій підвішена кулька не є ідеальною, не є нерозтяжною і тому при проходженні кулькою найнижчого положення нитка стає дещо довшою, а формула (13.4.14) цього не враховує. Так само формула Томсона (13.5.6) не враховує і не може враховувати зміни індуктивності при проходженні струму через витки котушки індуктивності, адже магнітна взаємодія провідників котушки може змінити відстань між ними та змінити індуктивність. Звичайно, якщо ці зміни настільки малі, що практично не впливають на параметри системи, то ними можна нехтувати і таку систему можна вважати лінійною.

13.6 Затухаючі коливання

В реальних осциляторах незалежно від їх природи є завжди втрати енергії і коливання в цих осциляторах завжди будуть затухаючими. Так, в механічних осциляторах, наприклад маятниках, наявність тертя зумовлює затухання коливань, зменшення їх амплітуди. В електричному коливальному контурі наявність активного опору теж спричинює затухання коливань, адже при проходженні струму провідники контуру нагріваються. Строго кажучи навіть у відсутності втрат енергії на нагрівання провідників коливального контуру, коливання в ньому все ж таки будуть затухаючими, адже змінне електричне поле, яке "трошечки" на краях конденсатора виходить за його межі, стає джерелом електромагнітних хвиль які забирають енергію контуру.

У всіх випадках закон затухання коливань визначається властивостями коливної системи (осцилятора), але всі ці закони описуються ідентичними лінійними диференціальними рівняннями як описувались незатухаючі коливання.

Наприклад, кулька підвішена на нитці під час коливань, як показано на рис.13.6.1, зазнає сили опору зі сторони повітря: чим більша швидкість, тим більша сила опору (якісно показано на рис.13.6.1а). У загальному випадку сила опору пропорційна швидкості тіла:

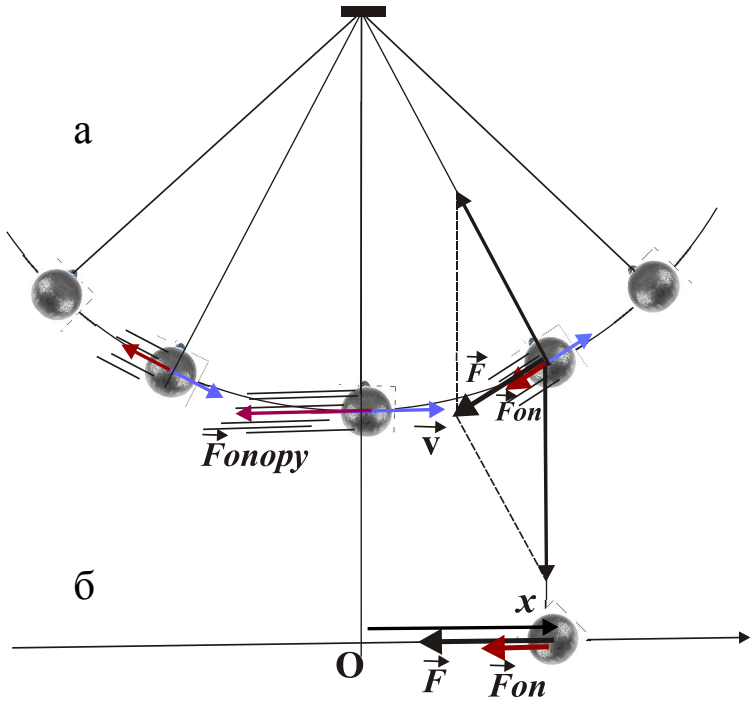


Рисунок 13.6.1

$$F_{on} = -rv = -r\frac{dx}{dt}, \quad (3.6.1)$$

де r – коефіцієнт опору, який враховує геометричні розміри та форму тіла і властивості середовища (наприклад, в'язкість) в якому рухається тіло.

Отже, на тіло, яке здійснює коливання під дією сили F пропорційної зміщенню, діє ще сила опору яка пропорційна швидкості (рис.13.6.1б) і рівнодійна цих сил надає тілу прискорення. В проекціях на вибраний напрям другий закон Ньютона прийме такий вигляд:

$$\underbrace{m\frac{d^2x}{dt^2}}_{ma} = \underbrace{-kx - r\frac{dx}{dt}}_{\sum F}. \quad (13.6.2)$$

Записаний у вигляді формули (13.6.2) другий закон Ньютона є по суті диференціальним рівнянням, якому надамо такого вигляду:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx + r\frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x + \frac{r}{m}\frac{dx}{dt} = 0. \quad (13.6.3)$$

Як бачимо, в це рівняння входить величина, що визначає частоту $\omega^2 = \frac{k}{m}$ вільних незатухаючих коливань, а яка в дійсності буде частота коливань повинен дати розв'язок рівняння. Але навіть не розв'язуючи рівняння можна зробити якісний висновок про те, що частота затухаючих коливань буде меншою вільних незатухаючих коливань, адже сили опору можуть бути настільки великими у порівнянні з силами що "повертають" тіло до положення рівноваги, що взагалі коливань не буде. Крім того, не розв'язуючи це рівняння можна зробити висновок, що у його розв'язок повинен входити деякий коефіцієнт, який визначається відношенням $\frac{r}{m}$ і характеризує затухання коливань. Дійсно, чим більша маса тіла, тим повільніше його коливання будуть затухати при тому ж значенні сил опору. Очевидно, на розв'язок рівняння повинно суттєво впливати співвідношення між силами що діють на тіло. Математично це повинно визначатись співвідношеннями між $\frac{k}{m}$ та $\frac{r}{m}$ і як дає теорія диференціальних рівнянь за умови $r/2m \le \sqrt{k/m}$ розв'язком рівняння (13.6.3) є функція виду:

$$x = A_0 e^{-\frac{r}{2m}t} \sin(\omega t + \varphi_0), \qquad (13.6.4)$$

де A_0 – значення амплітуди в момент часу $t = 0$ встановлюється з початкових умов так само, як і початкова фаза φ_0. Показник $\frac{r}{2m}$ експоненти визначає затухання коливань і тому величина цього показника отримала назву коефіцієнта затухання. Позначивши цей коефіцієнт як

$$\beta = \frac{r}{2m}, \qquad (13.6.5)$$

рівняння 13.6.4 прийме такий вигляд:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (13.6.6).$$

Тепер диференціальне рівняння (13.6.3) можна записати у вигляді:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x + 2\beta \frac{dx}{dt} = 0 \quad (13.6.7)$$

або в найбільш загальній формі

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (13.6.8)$$

Крім того, необхідно мати на увазі, що ω_0 визначає частоту вільних незатухаючих коливань, а в рівняння (13.6.6) входить ω – частота затухаючих коливань.

Якщо раніше, не розв'язуючи диференціального рівняння (13.6.3), якісно з'ясували зменшення періоду затухаючих коливань, то розв'язок цього рівняння за умови $\beta \le \sqrt{k/m}$ встановлює наступну залежність періоду таких коливань від коефіцієнта затухання:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (13.6.9)$$

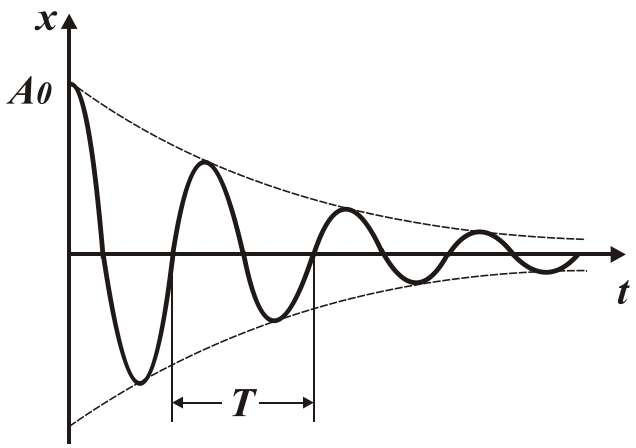


Рисунок 13.6.2

Також за умови $\beta \le \sqrt{k/m}$ амплітуда затухаючих коливань зменшується за експоненціальним законом

$$A = A_0 e^{-\beta t} \quad (13.6.10)$$

і графік такої залежності наведений на рис. 13.6.2.

Оскільки амплітуда затухаючих коливань зменшуються, то такі коливання не є гармонічними і тому під періодом їх коливань

розуміють проміжок часу між двома послідовними максимумами або мінімумами.

Затухання коливань можна характеризувати відношенням двох послідовних амплітуд відповідних моментам часу, які відрізняються на один період і таке відношення називається декрементом затухання (з лат.decrementum – убавлення):

$$\Delta = \frac{A_t}{A(t+T)}. \qquad (13.6.11)$$

Беручи до уваги формулу (13.6.10),

$$\Delta = e^{\beta T}. \qquad (13.6.12)$$

Більш наочною величиною, що характеризує затухання коливань, є логарифм декременту затухання, який називається логарифмічним декрементом затухання та визначається співвідношенням:

$$\square \square \ln \square \square \square T. \qquad (13.6.13)$$

Дійсно, якщо дві послідовні амплітуди однакові, то їх відношення дорівнює одиниці, а $\ln 1 = 0$, тобто затухання "нуль".

Енергетичною характеристикою затухання коливань є відношення з точністю множника 2π енергії одного коливання E до втрат енергії ΔE за наступний період коливання і ця характеристика називається добротністю коливної системи та позначається Q (*Quality* – якість):

$$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E}. \qquad (13.6.14)$$

Можна довести, що добротність осцилятора визначається його основними параметрами таким співвідношенням:

$$Q = \frac{1}{r}\sqrt{km} \quad . \qquad (13.6.15)$$

Оскільки всі результати розв'язку диференціального рівняння стосувались умови $\beta^2 < \omega^2$, тобто $\beta^2 < \frac{k}{m}$, то що буде коли $\beta^2 \geq \omega_0^2$. Формально це означає що коливань не буде, адже їх частота визначається за формулою (13.6.9). У такому випадку рух має аперіодичний (не періодичний) характер, а саме тіло виведене зі стану рівноваги повертається в це положення не здійснюючи коливань (крива 1 на рис.13.6.3), у чому легко переконатись на досліді. Наприклад, відхиліть маленьку кульку на нитці в оливі і відпустіть – кулька повільно буде рухатись до положення рівноваги. Якщо кульку трохи підштовхнути, то можливо вона лише один раз пройде положення рівноваги, а потім повільно буде рухатись у зворотному напрямі (крива 2. на рис.13.6.3).

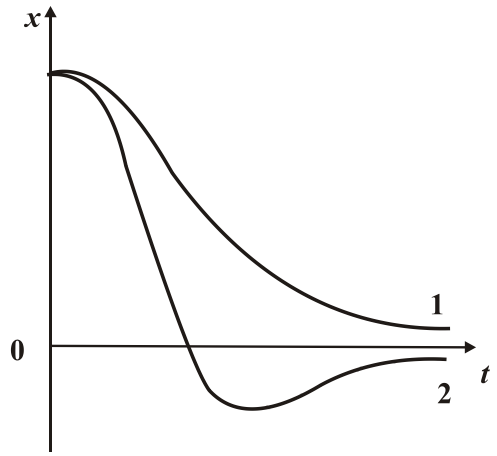


Рисунок 13.6.3

Що стосується кількісних характеристик аперіодичних коливань, то їх математичний вивід виходить за рамки даного курсу фізики.

Розглянувши затухаючі коливання механічного осцилятора далі побачимо повну аналогію їх диференціальних рівнянь та розв’язків з відповідним рівнянням затухаючих коливань в електричному коливальному контурі.

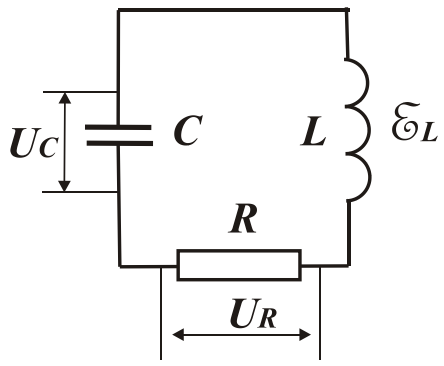


Рисунок 13.6.4

На рис. 13.6.4 наведена схема коливального контуру, де окремим резистором "зібрані" опори всіх провідників контуру за рахунок яких і відбувається затухання коливань. Згідно другого правила Кірхгофа для даного контуру як замкнутого електричного кола, сума напруг на конденсаторі ($U_C = \frac{q}{C}$) та активному опорі (

$U_R = IR = R\frac{dq}{dt}$) дорівнює ЕРС, яка діє у контурі, тобто ЕРС самоіндукції:

$$\frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt} = -L\frac{d^2q}{dt^2} \qquad (13.6.16)$$

або

—— — —— —— —— , (13.6.17)

або

$$q\square + 2\beta q\square + \omega_0^2 q = 0. \qquad (13.6.18)$$

Тобто повна аналогія з рівнянням (13.6.8) і тому затухання коливань в електричному коливальному контурі як і в механічному осциляторі відбувається за таким же самим законом:

$$q = q_0 e^{-\beta t}\sin(\omega t + \varphi_0), \qquad (13.6.19)$$

де максимальне значення заряду q_0 та початкова фаза φ_0 визначаються тільки з початкових умов при $t = 0$.

Коефіцієнт затухання β дорівнює

$$\beta = \frac{R}{2L}, \qquad (13.6.20)$$

а частота затухаючих коливань в електричному коливальному контурі визначається аналогічним співвідношенням механічного осцилятора $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. По аналогії з формулою (13.6.15) можна показати, що добротність коливального контуру дорівнює

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}. \qquad (13.6.21)$$

Рисунок 13.6.5

Прослідкувати за процесом затухання коливань можна за допомогою осцилографа, подаючи на одну пару вертикально відхиляючих пластин напругу U_C між обкладками конденсатора, яка пропорційна заряду, а на другу пару – так звану напругу розгортки, яка пропорційна часу і тоді електронний промінь дасть згідно формули (13.6.19) графік затухаючих коливань (рис.13.6.5).

Якщо ж на вертикально відхиляючі пластини подати на кінці резистора напругу U_R, яка пропорційна струму, то отримаємо аналогічну криву залежності струму, але ця крива буде зміщена відносно кривої напруги за фазою на деякий кут α. Взявши похідну за часом від функції (13.6.19), отримаємо залежність сили струму від часу:

$$I = \frac{dq}{dt} = \omega_0 q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0 + \alpha) = I_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0 + \alpha), \quad (13.6.22)$$

де I_0 – максимальне значення сили струму в момент часу $t = 0$, а кут α визначається за умовою $\cos\alpha = -\frac{\beta}{\omega_0}$. Отже, якщо відсутні затухання ($\beta = 0$), то $\cos\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{2}$, тобто коливання струму будуть відставати від коливань заряду за фазою на $\frac{\pi}{2}$. Наявність затухання коливань ($\beta > 0$) зменшує різницю в коливаннях сили струму та заряду.

Подібно до затухаючих механічних коливань, в електричному коливальному контурі за умови $\beta = \omega_0$ будуть спостерігатись аперіодичні процеси. Опір контуру R_k, за яким коливний процес переходить в аперіодичний, називається критичним. Значення такого критичного опору легко визначити з умови $\beta^2 = \omega_0^2$, враховуючи що $\beta = \frac{R}{2L}$, а $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$. Таким чином,

$$R_k = 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (13.6.23)$$

13.7 Вимушені коливання в механічному осциляторі

Будь-який осцилятор можна привести в коливання під дією зовнішньої періодичної дії. Якщо це механічний осцилятор, то це буде зовнішня періодична сила, а у випадку електричного коливального контуру, це буде зовнішній генератор змінного струму під'єднаний до цього контуру.

Оскільки принципової різниці між використанням функції синуса чи косинуса для опису гармонічних коливань немає, то нехай зовнішня періодична сила що діє на механічний осцилятор змінюється за таким рівнянням:

$$F = F_0 \cos \Omega t \,, \qquad (13.7.1)$$

де F_0 – амплітудне значення цієї сили, Ω – її частота. Тоді в диференціальне рівняння реального осцилятора, яке буде зазнавати дії цієї періодичної сили, необхідно ввести функцію (13.7.1):

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = F_0 \cos \Omega t \,. \qquad (13.7.2)$$

Записане диференціальне рівняння є неоднорідним.

Згідно теорії диференціальних рівнянь випливає, що *загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння дорівнює сумі загального розв'язку відповідного однорідного рівняння та частковому розв'язку неоднорідного рівняння:*

$$x_{загальн.неоднорід.} = x_{загальн.однорід.} + x_{частков.неоднорід.}. \qquad (13.7.3)$$

Загальним розв’язком однорідного рівняння (без $F = F_0 \cos \Omega t$) є вже раніше отримана функція (13.6.6), в яку входять величини що визначаються з початкових умов. Частковий розв'язок визначається тільки властивостями самого осцилятора та зовнішньою періодичною дією. Тому навіть не виводячи функції часткового розв'язку, цей розв'язок повинен мати такий вигляд:

$$x = A \cos(\Omega t - \varphi) \,, \qquad (13.7.4)$$

де А – амплітуда вимушених коливань і її значення залежить від параметрів осцилятора. Напевно, чим більша його маса m, то "важче" його розгойдати і, чим більша періодична сила F_0, тим більше вона буде "розгойдувати" осцилятор, наприклад маятник. Очевидно, що амплітуда вимушених коливань залежить і від співвідношення між власною частотою ω_0 коливань та частотою Ω зовнішньої періодичної сили .Уявіть, що масивний маятник з періодом власних коливань $2c$ намагається розгойдати сила з періодом $0{,}2c$. Але в кінцевому результаті все ж таки встановляться вимушені коливання з частотою Ω зовнішньої періодичної сили і тому в рівняння (13.7.4)

повинна входити ця частота. Як випливає з часткового розв'язку неоднорідного диференціального рівняння, амплітуда вимушених коливань визначається співвідношенням:

$$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}, \qquad (13.7.5)$$

яке кількісно підтверджує раніше описану якісну картину амплітуди вимушених коливань. Дійсно, раніше було правильно сказано, що амплітуда вимушених коливань залежить від співвідношення між власною частотою ω_0 коливань осцилятора та частотою Ω зовнішньої сили, але яка ця кількісна залежність, то її встановлює знаменник формули (13.7.5). Ми лише передбачили лінійну залежність амплітуди вимушених коливань від значення періодичної зовнішньої сили F_0 та обернену залежність від маси m осцилятора, що дійсно підтверджується співвідношенням (13.7.5).

Що стосується початкової фази φ вимушених коливань, то недарма в рівнянні (13.7.4) з якісних міркувань можна перед φ поставити знак мінус, адже механічний осцилятор не одразу почне коливатись згідно гармонічного закону зовнішньої сили; буде деяке відставання за фазою на кут φ, а значення кута дає лише частковий розв'язок диференціального рівняння, а саме:

$$\varphi = arctg \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \qquad (13.7.6)$$

Оскільки загальний розв'язок диференціального рівняння (13.7.2) складається, крім розглянутого часткового розв'язку, ще й із загального розв'язку однорідного рівняння, то виникає питання – яка його роль у вимушених коливаннях? Виявляється, що перший доданок, тобто загальний розв'язок в рівнянні (13.7.3) відіграє суттєву роль тільки на початковій стадії процесу

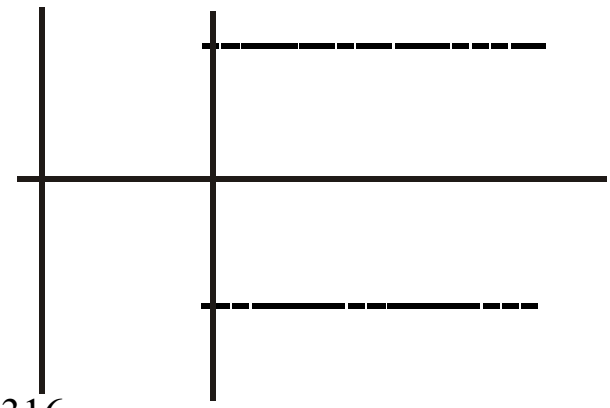


Рисунок 13.7.1

усталення вимушених коливань, тобто до того часу, поки амплітуда вимушених коливань досягне значення згідно формули (13.7.5). Графік вимушених коливань наведений на рис.13.7.1, на якому показана стадія усталення цих коливань.

Аналізуючи рівняння (13.7.5) амплітуди вимушених коливань можна прийти до висновку, що при певному співвідношенні між частотою ω_0 власних коливань осцилятора та частотою Ω змушуючої сили, амплітуда вимушених коливань досягне найбільшого значення. Продиференціювавши підкореневий вираз за ω і прирівнявши його до нуля, отримаємо умову яка визначає мінімум цього підкореневого виразу, тобто

$$-4\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)\Omega+8\delta^2\Omega=0. \qquad (13.7.7)$$

Ця рівність виконується за умови $\Omega=0$ та $\pm\sqrt{\omega_0^2-2\delta^2}$ і тільки додатний розв'язок має фізичний зміст. Отже, амплітуда вимушених коливань досягає максимального значення у тому випадку, коли частота зовнішньої періодичної сили дорівнює так званій резонансній частоті:

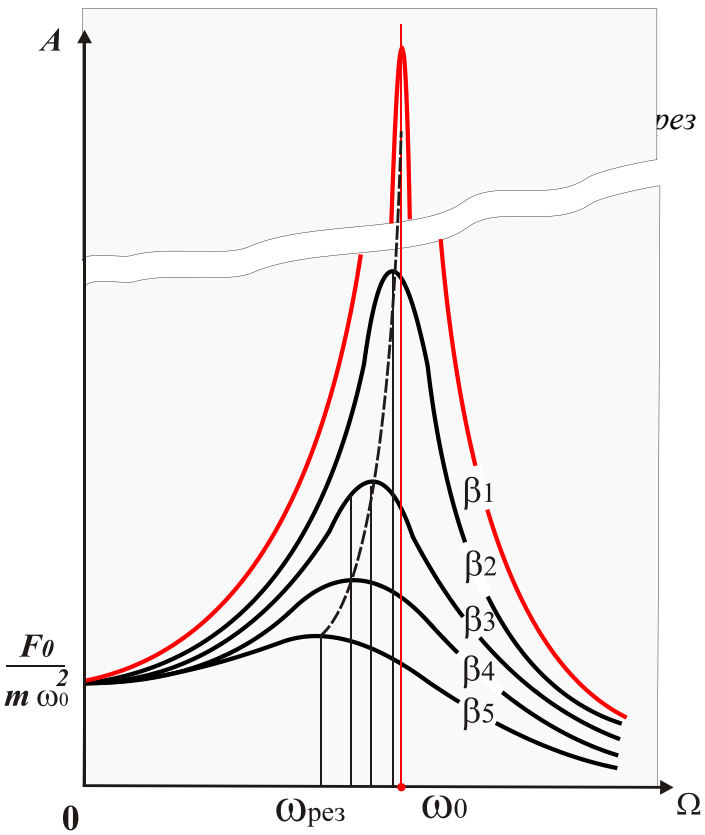


Рисунок 13.7.2

$$\omega_{рез}=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}, \qquad (13.7.8)$$

а саме ***явище, коли амплітуда вимушених коливань досягає максимального значення за умови наближення частоти зовнішньої періодичної сили до частоти що визначається співвідношенням (13.7.8), називається резонансом.***

У випадку малих коефіцієнтів затухання (

$\beta << \omega$) значення резонансної частоти практично співпадає з власною частотою осцилятора.

Графічна залежність амплітуди вимушених коливань осцилятора від частоти зовнішньої періодичної сили називається резонансною кривою. Такі резонансні криві за різних значень коефіцієнта затухання $\beta_5 > \beta_4 > \beta_3 > \beta_2 > \beta_1$ наведені на рис.13.7.2. Причому коефіцієнт затухання β_1 настільки малий, що при цьому резонансна частота практично співпадає з частотою власних коливань і резонансна крива найбільш "гостріша". Збільшення коефіцієнта затухання зумовлює зменшення резонансної частоти, а сама крива стає більш пологою. Якщо ж частота зовнішньої сили стає рівна нулю, то зрозуміло, що вимушені коливання припиняються, але осцилятор під дією тепер вже сталої сили буде зміщений від положення рівноваги на відстань яка визначається співвідношенням $F_0 / m\omega_0^2$ і таке зміщення називають статичним відхиленням.

Явище механічного резонансу може бути шкідливим і корисним. Так, якщо резонансна частота коливань механічної конструкції співпадає з частотою зовнішньої періодичної сили, то амплітуда вимушених коливань цієї конструкції може бути настільки великою, що призведе до її руйнувань. Майже в усіх підручниках наводять приклад про руйнування моста внаслідок того, що солдати йшли по ньому в ногу, тобто наступив резонанс – частота кроків солдатів співпала з власною частотою коливань мосту, що і призвело до його руйнування. Тому завжди солдатам дається наказ йти по мосту не в ногу.

Мабуть найбільшою руйнацією внаслідок резонансу є руйнування у 1940 р. Такомського моста загальною довжиною 1822м через протоку Такома-Нерроуз у штаті Вашингтон. Причиною руйнування стали крутильні коливання внаслідок поривів вітру. Можна привести ще багато інших випадків шкідливих проявів резонансу. Разом з тим явище резонансу знаходить широке корисне практичне застосування. Наприклад, відбійні молотки, віброущільнювачі бетону, ґрунту тощо працюють на основі явища резонансу. На рис.13.7.3 показана знайому всім картина – дорожні роботи з використанням відбійного молотка.

Відбійний молоток складається з двох основних частин. Перша частина **А** є пневматичним вібратором, в якому під дією стиснутого

повітря поршень-ударник здійснює поступально-зворотний рух у циліндрі за допомогою системи клапанів впуску і випуску повітря (на рисунку не показані). Друга частина **Б** – це механічний осцилятор у вигляді пружинного маятника, в якому тіло масою m є робочими інструментом (те що руйнує асфальт на дорозі). Відбійний молоток розрахований так, що частота ударів ударника по хвостовику робочого інструменту дорівнює резонансній частоті коливань механічного осцилятора, тобто робочого тіла зв'язаного з пружиною і тоді при резонансі досягається найбільша ефективність роботи відбійного молотка.

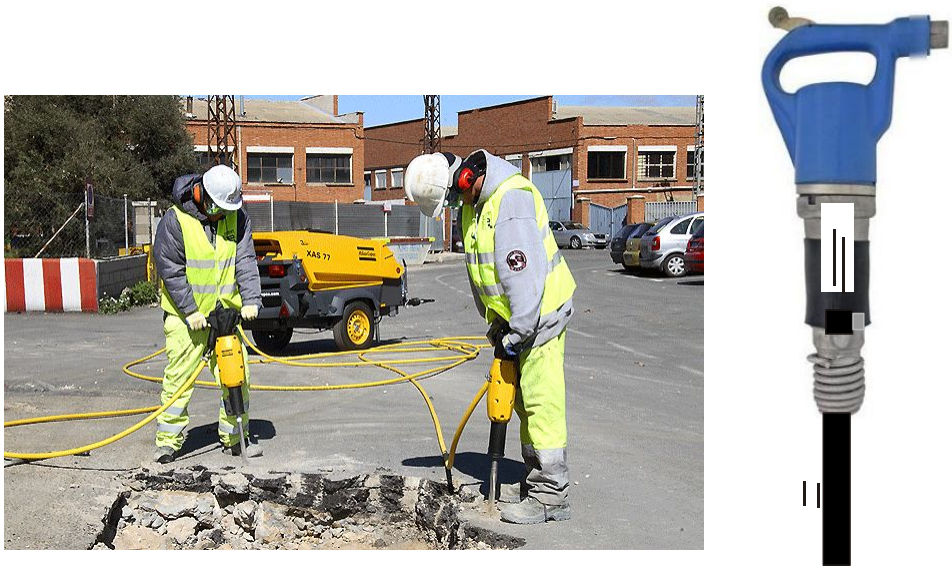


Рисунок 13.7.3

13.8 Вимушені коливання в електричному коливальному контурі

Якщо для здійснення вимушених коливань в механічному осциляторі на нього треба діяти зовнішньою періодичною силою, то для здійснення вимушених коливань в електричному коливальному контурі необхідна зовнішня змінна напруга, тобто необхідно в коло коливального контуру увімкнути джерело (генератор) змінної напруги U (рис.13.8.1).

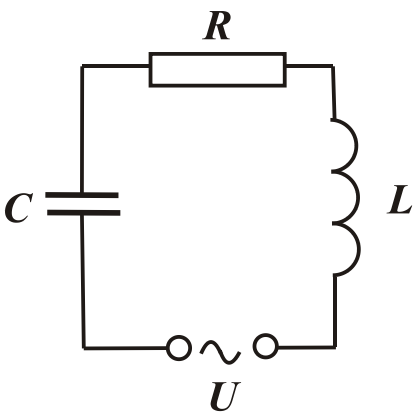


Рисунок 13.8.1

Нехай ця напруга, подібно як і змінна сила що діяла на вище розглянутий механічний осцилятор, змінюється за аналогічним законом косинуса:

$$U = U_0 \cos \Omega t, \qquad (13.8.1)$$

де U_0 – максимальне (амплітудне) значення зовнішньої напруги, Ω – її частота.

Тоді диференціальне рівняння вимушених коливань в коливальному контурі знову таки за повною аналогією з рівнянням (13.7.2) прийме вже відомий вигляд:

$$\ddot{q} + 2\beta \dot{q} + \omega_0^2 q = U_0 \cos \Omega t. \qquad (13.8.2)$$

Ми вже знаємо, що загальним розв'язком такого неоднорідного диференціального рівняння є сума загального розв'язку відповідного однорідного рівняння та часткового розв'язку неоднорідного рівняння і тому за аналогією з (13.7.4), (13.7.5) та (13.7.6) запишемо такі розв'язки рівняння (13.8.2):

$$q = q_0 \cos(\Omega t - \varphi), \qquad (13.8.3)$$

тобто вимушені коливання в електричному коливальному контурі відбуваються з частотою Ω прикладеної до контуру напруги, а часткові розв'язки дають амплітудне значення q_0 заряду та початкової фази φ коливань:

$$q_0 = \frac{U_0 / L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}. \qquad (13.8.4)$$

За аналогією з формулою (13.7.5) амплітуди коливань механічного осцилятора, роль максимального значення зовнішньої періодичної сили F_0 в електричному коливальному контурі відіграє максимальне значення зовнішньої змінної напруги, а замість маси m, наприклад пружинного маятника, є її аналог – індуктивність L коливального контуру. Так само аналогічно умові резонансу (13.7.8) механічного осцилятора виконується умова резонансу в

коливальному контурі. Тільки якщо для механічного осцилятора співвідношення $F_0 / m\omega_0^2$ визначає його статичне зміщення під дією сталої сили, то аналогічно $U_0 / L\omega_0^2$ – зміну заряду конденсатора при сталій зовнішній напрузі. Оскільки ємність конденсатора $C = \frac{q}{U}$, то умова резонансу для напруги є такою ж самою як і для заряду.

Що стосується початкової фази вимушених коливань в контурі, то її значення абсолютно ідентичне формулі (13.7.6).

Підставивши у формулу (13.8.4) значення коефіцієнта затухання $\beta = \frac{R}{2L}$ та циклічної частоти $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, отримаємо:

$$q_0 = \frac{U_0}{\Omega\sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2}} \qquad (13.8.5)$$

та

$$tg\varphi = \frac{R}{\Omega L - \frac{1}{\omega C}}. \qquad (13.8.6)$$

Таким чином, рівняння (13.8.3) прийме такий вигляд:

$$q = \frac{U_0}{\Omega\sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{LC}\right)^2}} \cos\left(\Omega t - arctg\frac{R}{\Omega L - \frac{1}{\Omega C}}\right). \qquad (13.8.7)$$

Перша похідна за часом формули (13.8.7) дає закон зміни сили струму з часом у коливальному контурі:

$$I = \frac{dq}{dt} = -\frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2}} \cos\left(\Omega t - arctg\frac{R}{\Omega L - \frac{1}{\Omega C}}\right), \quad (13.8.8)$$

звідки амплітудне значення I_0 сили струму вимушених коливань дорівнює

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2}} \quad (13.8.9)$$

та досягає максимального значення за умови $\frac{1}{\Omega C} = \Omega L$, що відповідає $\omega^2 = \frac{1}{LC}$, тобто рівності частоти зовнішньої напруги прикладеної до контуру з власною частотою ω_0^2 його коливань. Отже, якщо резонансна частота в коливальному контурі для заряду q і напруги на конденсаторі визначається як $\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$, то амплітудне значення сили струму в контурі досягає найбільшої величини за умови $\omega_{рез} = \sqrt{\frac{1}{LC}}$, тобто коли частота зовнішньої прикладеної до контуру напруги співпадає з його власною частотою його коливань. Залежність амплітуди сили струму вимушених коливань в електричному коливальному контурі від частоти Ω зовнішньої напруги графічно ілюструються резонансними кривими, які наведені на рис.13.8.2 для різних значень активного опору R контуру. Як випливає з формули (13.8.9) чим менший опір R контуру, тим амплітудне значення сили струму за умови резонансу стає більшим, а сама резонансна крива гострішою і тому важливою характеристикою такої кривої є її ширина. Під шириною резонансної кривої розуміють різницю частот $\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1$, для яких енергія коливань у два рази менша від енергії коливань за резонансу. Оскільки енергія

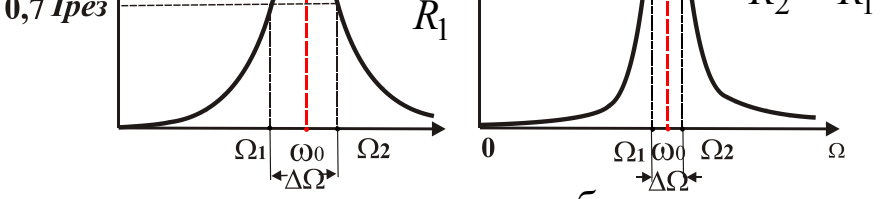


Рисунок 13.8.2

гармонічних коливань пропорційна квадрату їх амплітуди, то на резонансній кривій ширина резонансної кривої визначається за умови, що сила струму I на "краях" ширини резонансної кривої дорівнює $I = I_{рез}/\sqrt{2}$, де $I_{рез}$ – амплітудне значення сили струму за умови резонансу як це вказано на рис.13.8.2. Визначивши ширину резонансної кривої, можна визначити добротність коливального контуру:

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\Omega}. \qquad (13.8.10)$$

Розглянуті питання вимушених коливань в електричному коливальному контурі та явище резонансу мають надзвичайно велике практичне застосування. Без перебільшення можна сказати, що ми стали "заручниками" електричних коливальних контурів, які ми майже завжди носимо з собою в мобільних телефонах, а декілька таких коливальних контурів є у квартирах (телевізор, радіоприймач). В коливальний контур "мобілки", радіоприймача чи телевізора електромагнітними хвилями передаючих радіостанцій надходять коливання самих різних частот (ці коливання "вловлює" антена). Наприклад, мобільний зв'язок працює на частоті 900*МГц*, це значить коливальний контур мобільного телефону "вловлює, відгукується" саме на цю частоту найбільшим значенням сили струму в цьому контурі, а далі справа за "електронікою" – підсилити сигнал, виділити з нього голосову або відеоінформацію, яка зазвичай подається у цифровому вигляді.

Якщо мобільні телефони – це пристрої з фіксованим налагодженням частоти, то в радіоприймачах чи телевізорах "вибирають" необхідну радіостанцію чи телевізійний канал відповідним налагоджуванням коливального контуру на необхідну частоту. Наприклад, радіоприймач (рис.13.8.3а) – від метрового до кілометрового діапазону електромагнітних хвиль (відповідно частоти 0,3*МГц* – довгі хвилі, 300*МГц* – ультракороткі хвилі). Всередині радіоприймача є коливальний контур винесений окремим рисунком (рис.13.8.3б). Для коротких та довгих хвиль цей контур складається з котушки зі сталою індуктивністю L та конденсатора змінної ємності C, де обертанням ручки в проміжок між системою нерухомих пластин вводиться система рухомих пластин, яка змінює ємність такого конденсатора. Повертаючи цю ручку, ми тим самим змінюємо

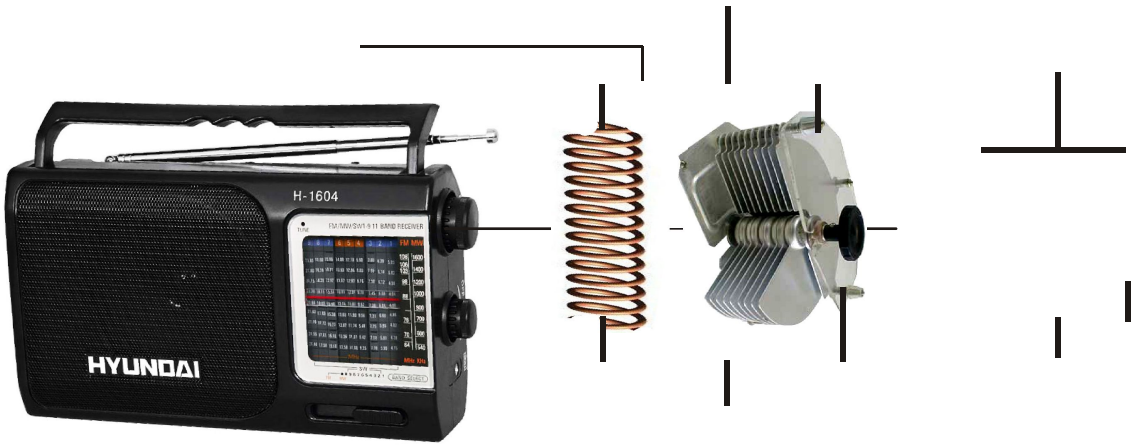


Рисунок 13.8.3

власну частоту коливань контуру і налаштовуємось на ту чи іншу частоту передавальної радіостанції. Принципова електрична схема коливального контуру з конденсатором змінної ємності наведена на рис.13.8.3в.

Оскільки на високих частотах, які відповідають ультракоротким електромагнітним хвилям, ємність конденсатора повинна бути незначною, то налагодження коливального контуру на такі частоти здійснюється зміною індуктивності за допомого феромагнітного осердя яке переміщається всередині котушки індуктивності. Але сучасна електроніка знайшла шлях зміни параметрів коливального контуру без будь-яких механічних переміщень осердя котушки індуктивності чи обкладок конденсатору і цей шлях був знайдений на основі фізики напівпровідників, що дало можливість створити особливий

Рисунок 13.8.4

напівпровідниковий елемент – ***варікап*** (англ. ***vari****able* ***cap****acitance diode*), тобто напівпровідниковий конденсатор змінної ємності з електронним керуванням. Принцип дії варикапу полягає у властивості електронно-діркового переходу (p-n переходу) змінювати свою товщину в залежності від прикладеної напруги, тобто тим самим змінювати ємність такого своєрідного конденсатора обкладками якого є p-n перехід. Позначення варікапу на електричних схемах наведено на рис.13.8.4. Вся сучасна телевізійна техніка використовує варікапи. Так, пульт дистанційного управління телевізора надсилає відповідні команди електронній системі телевізора, яка подає відповідну керуючу напругу на віракап коливального контуру і тим самим налаштовує його на відповідний телевізійний канал. У приймачах систем супутникового телебачення такий електронний блок налаштування зазвичай називають тюнером (з англ. *tuner* – налаштування, настроювання).

13.9 Параметричні коливання та параметричний резонанс

До цього часу ми розглядали коливання в таких осциляторах, де протягом коливань їх параметри не змінюються. Наприклад, не змінюється довжина маятника, не змінюється індуктивність чи ємність коливального контуру тощо. Якщо під час коливань змінюються параметри осцилятора, в яких зосереджена енергія коливань, то такі коливання називають параметричними, а якщо результатом таких змін є розгойдування осцилятора (збільшення його амплітуди коливань), то таке явище називається параметричним резонансом. При цьому зміна параметрів осцилятора супроводжується виконанням роботи зовнішніми силами (так звана накачка або нагнітання осцилятора), що зумовлює збільшення енергії всієї коливної системи.

Щоб це явище було більш зрозумілим, спочатку розглянемо всім відомий механічний осцилятор у вигляді гойдалки.

Як можна розгойдатись на гойдалці? Можна, наприклад, попросити кого-небудь це зробити і він буде періодично в такт з коливаннями гойдалки підштовхувати її, тобто гойдалка як механічний осцилятор буде здійснювати вимушені коливання у режимі резонансу. Але всі знають, що гойдалку можна розгойдати і без сторонньої допомоги. Для цього потрібно стоячи на гойдалці періодично присідати і випрямляти ноги, або сидячи підгинати і

випрямляти їх. Розмах коливань, тобто їх амплітуда зростає найбільше коли присідати в положеннях максимального відхилення і випрямлятись при проходженні через положення рівноваги (показано на рис. 13.9.1).

Так за рахунок чого при параметричному резонансі збільшується амплітуда коливань від A_1 до A_2 як це показано на рис.13.9.1а? У даному випадку людина присідаючи і піднімаючись на

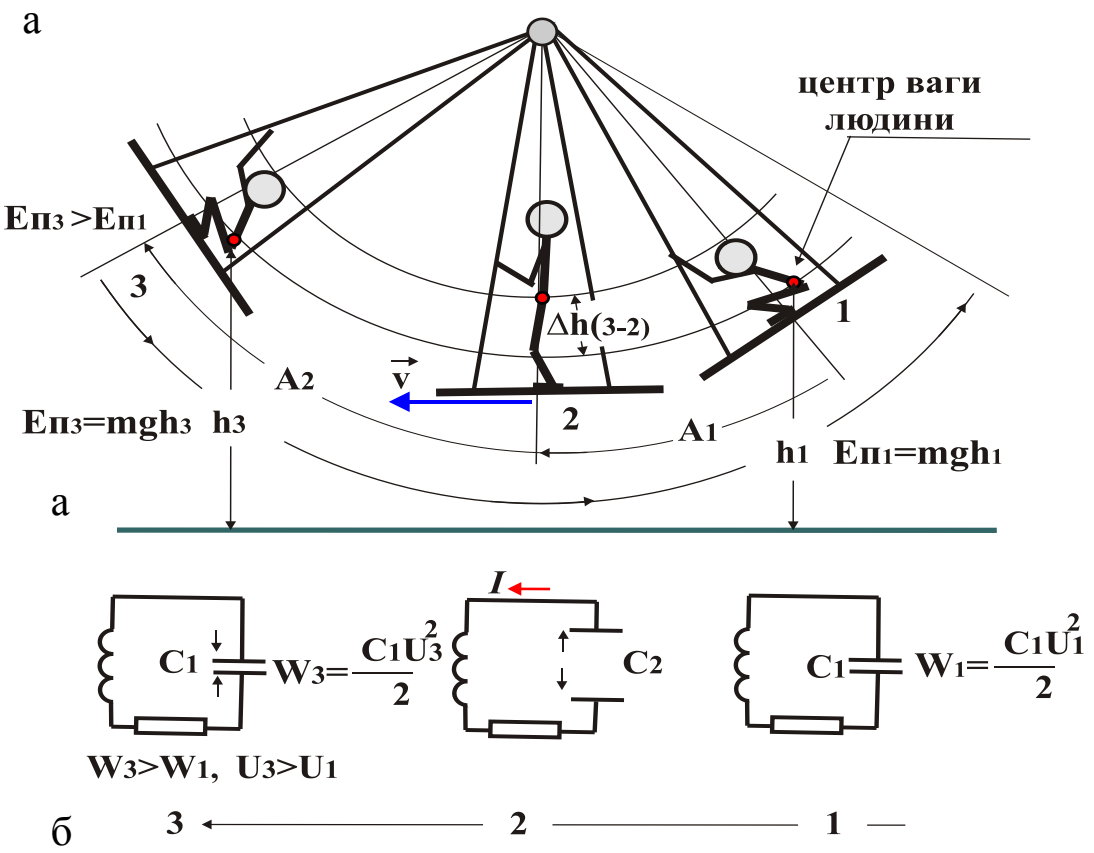


Рисунок 13.9.1

гойдалці виконує роботу $A = mg\Delta h$ пов'язану з переміщенням її центра ваги (точніше центра мас) і за рахунок цієї роботи збільшується енергія осцилятора (гойдалки) та відповідно збільшується амплітуда коливань. Але тут є ще одна особлива суттєва різниця між "класичним" резонансом та параметричним. Так, якщо в класичному резонансі вимушені коливання можна започаткувати зі стану спокою осцилятора, то якщо спочатку гойдалка нерухома і скільки б разів ви не присідали і не вставали ніяких коливань не буде, тобто для здійснення параметричного резонансу потрібне хоча б незначне початкове виведення осцилятора зі стану рівноваги.

Антологічний з точки зору закону збереження і перетворення енергії буде механізм параметричних коливань в електричному коливальному контурі. Так, зміни таких параметрів як індуктивність L та ємність С коливального контуру супроводжується виконанням роботи зовнішніх сил. Дійсно, якщо в котушці індуктивності тече стум, то щоб "розсунути" витки котушки треба виконати роботу, адже між витками котушки діють сили притягання внаслідок магнітної взаємодії струмів. Так само, щоб "розсунути" обкладки зарядженого конденсатора і тим самим змінити його ємність, теж треба виконати роботу, адже між його різнойменно зарядженими обкладками існують сили притягання. Параметричний резонанс в електричному коливальному контурі якісно ілюструє рис.13.9.1б. Розсуваючи обкладки конденсатора, його ємність зменшують від C_1 до C_2 за рахунок відповідного виконання роботи. Якщо б ємність залишалась сталою, енергія електричного поля повністю перейшла б в енергію магнітного поля котушки індуктивності завдяки струму самоіндукції. Оскільки "робота зроблена", то вона дарма не пропадає, а іде на збільшення енергії магнітного поля котушки індуктивності та згодом перетворюється в енергію електричного поля конденсатора але вже з більшою напругою. Таким чином, розсуваючи і наближаючи обкладки конденсатора коливального контуру в такт з його власними коливаннями (подібно як присідаючи і встаючи на гойдалці), ми кожен раз будемо збільшувати його енергію. Явище параметричного резонансу знайшло широке практичне застосування, особливо в далекому супутниковому та космічному радіозв’язку, де дуже слабкі сигнали підсилюється особливими параметричними підсилювачами. На відміну від звичайних підсилювачів, які дають так звані власні "шуми", параметричні підсилювачі дають "чисте" підсилення за рахунок того, що підсилення відбувається від енергії зовнішнього джерела яке періодично змінює ємність або індуктивність коливального контуру приймача. Зрозуміло, в таких складних параметричних підсилювачах зміна ємності відбувається не механічним переміщенням обкладок конденсатора, а за допомогою варікапів з електронним керуванням їх ємності.

13.10 Автоколивання

Для того, щоб коливання в реальному осциляторі були незатухаючими, необхідно поповнювати втрати енергії. Розглядаючи вимушені коливання та явище резонансу ми говорили "нехай, наприклад, на механічний осцилятор діє зовнішня періодична сила, а в коливальний контур введена зовнішня змінна напруга". Тоді виникає питання – де для кожного осцилятора взяти "свій індивідуальний генератор"? Також виникає й інше питання – а навіщо окремий генератор – нехай сам осцилятор поповнює втрати енергії за рахунок постійного джерела енергії – бере енергію в такт зі своїми коливаннями. Наприклад, коли відхилення маятника максимальне, то він саме на цей момент відкриває пристрій який штовхне маятник в потрібному напрямі і тим самим поповнить втрати енергії, тобто маятник це робить автоматично. Отже, ***автоколивання – це незатухаючі коливання, які підтримуються в системі за рахунок постійного зовнішнього джерела енергії, причому сама система керує ним так, що забезпечує надходження енергії певними порціями в необхідні моменти часу.***

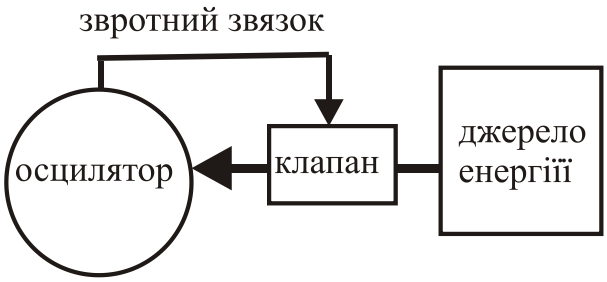


Рисунок 13.10.1

Будь-яка автоколивна система складається з таких основних елементів (рис.13.10.1): 1) з осцилятора, 2)джерела енергії, 3) клапану – деякого елементу, який відкриває доступ енергії до осцилятора, 4) зворотного зв’язку який керує роботою клапану за рахунок процесів у самому осциляторі.

Схема рис.13.10.2 ілюструє автоколивну систему, яка складається з вище вказаних частин: 1) осцилятором є маятник – куля підвішена на нитці, 2) джерелом енергії є стовпчик води, 3) клапаном є справжній клапан, який закриває отвір в посудині з водою і при потребі відкриває потік води, 4) роль зворотного зв’язку виконує шток, який приводиться в рух маятником. Така автоколивна система працює наступним чином: при зміщенні від положення рівноваги куля маятника приводить в рух шток, який відхиляє клапан що відкриває шлях потоку води напрямленого на цю кулю. Зрозуміло, що куля, отримавши від потоку води порцію енергії, почне рухатись назад до положення рівноваги, продовжуючи коливний рух, але одночасно з тим клапан закриє отвір (куля більше не штовхає шток

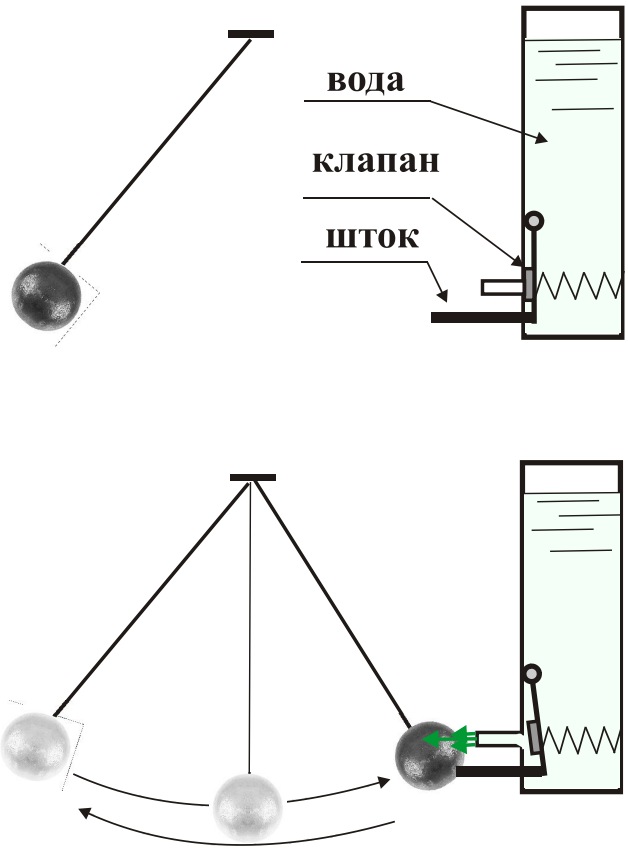


Рисунок 13.10.2

зв’язаний з клапаном). Зробивши одне повне коливання куля знову опиниться в попередньому правому положенні та приведе в рух шток, який відкриє клапан і потік води знову штовхне кульку, клапан закриється і т.д. Процес таких незатухаючих коливань буде продовжуватись доти, поки не вичерпається запас енергії, у даному випадку поки не буде використана вся вода у посудині. Можливо з технічної точки зору робота такої автоколивної системи може викликати низку питань: якою має бути конструкція штока, який має бути клапан, щоб щільно приставав до отвору тощо, але в розглянутій схемі відтворений сам принцип автоколивної системи. Зазвичай у всіх підручниках прикладом механічних автоколивань наводять так званий храповий механізм годинникового маятника, в якому цей механізм періодично в такт з коливаннями маятника штовхає його за рахунок енергії стиснутої пружини (в механічних годинниках вона закручена у спіраль).

За принциповою схемою (рис.13.10.3) працює автоколивна система, що підтримує незатухаючі коливання в електричному коливальному контурі, в якому осцилятором є власне сам коливальний контур, джерелом енергії є джерело постійного струму (батарейка), роль клапана виконує транзистор, який в потрібний момент відкриває доступ струму від батарейки до коливального контуру, а зворотний зв'язок "каже" транзистору коли відкривати клапан, тобто підвести струм до контуру і тим самим підзарядити конденсатор. Описавши основні елементи такої автоколивної системи, розглянемо її в дії.

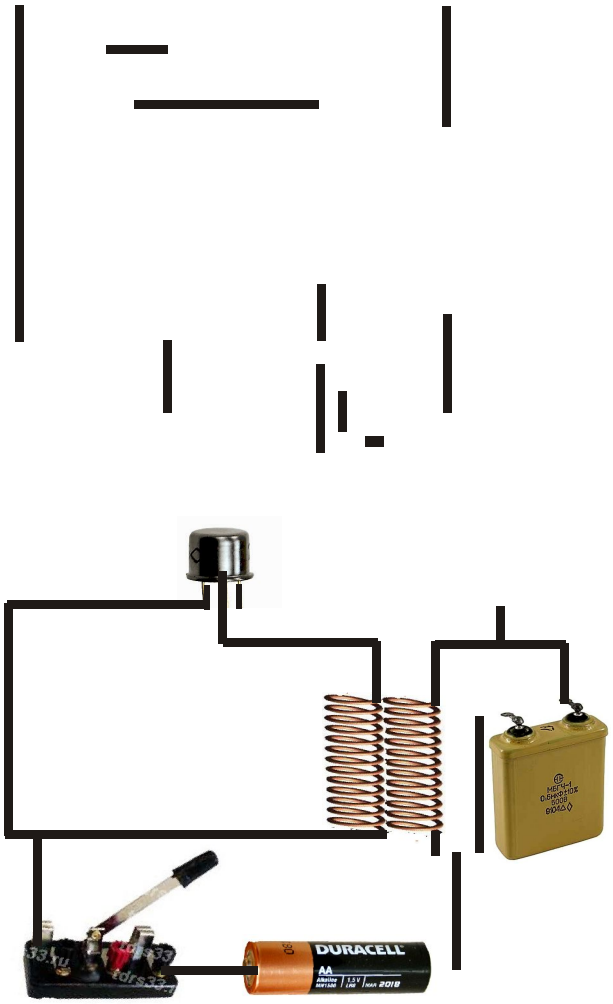


Рисунок 13.10.3

Коливальний контур під'єднаний до джерела постійного струму послідовно з транзистором. Емітерний перехід транзистора через котушку $L_{зв}$ індуктивно зв'язаний з коливним контуром. Цю котушку називають індуктивністю зворотного зв'язку.

При замиканні кола через транзистор проходить імпульс струму який заряджає конденсатор коливального контуру, у результаті чого у контурі виникають коливання малої амплітуди. Струм, який тече по виткам котушки L, індукує на кінцях катушки зворотного зв'язку змінну напругу. Під дією цієї напруги електричне поле емітерного переходу періодично підсилюється та послаблюється, а транзистор то відкривається то закривається. В ті моменти часу, коли транзистор відкритий, через нього проходить імпульс струму. Якщо котушка $L_{зв}$ під'єднана правильно, то імпульси струму надходять в контур у ті моменти, коли контур заряджається і тим самим поповнюють енергію контуру роблячи його коливання незатухаючими.

13.11 Релаксаційні коливання

У вступі до розділів "Коливання і хвилі" було вказано, що ми живемо у світі коливань та хвиль і мали змогу ознайомитись з їх широким класом, починаючи від незатухаючих до автоколивань. Але ще є особливий клас автоколивань, які називають релаксаційними (з латинської *relaxation* – розслаблення). Релаксаційні коливання відбуваються в нелінійних системах, де тривалий час іде збільшення

фізичної величини що характеризує даний процес, а потім за короткий час різке зменшення цієї величини. Звичайно, поняття тривалого та короткого часу треба розуміти у відносному понятті стосовно конкретної коливної системи. Прикладом механічних

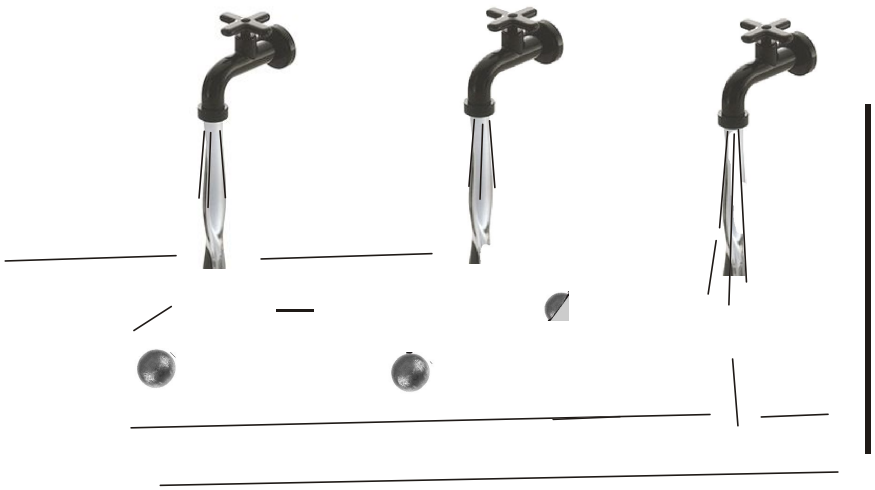


Рисунок 13.11.1

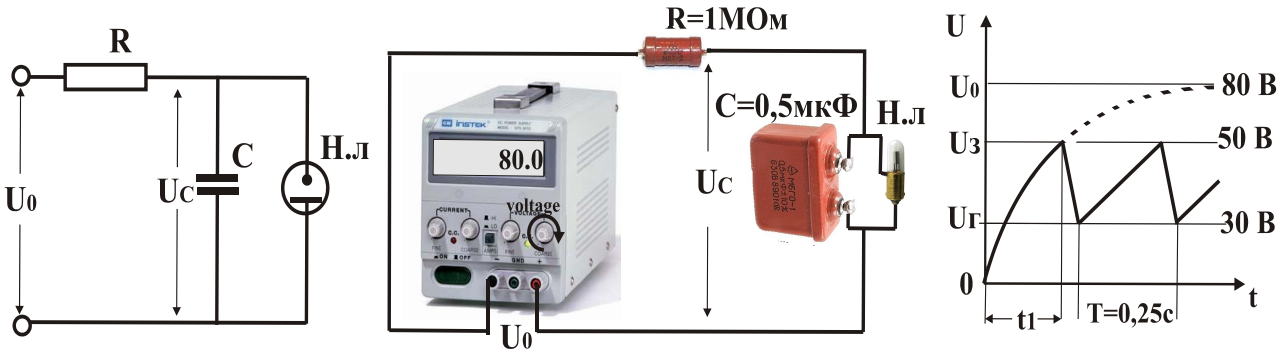
релаксаційних коливань можуть бути процеси в системі, схема якої наведена на рис. 13.11.1. Тут посудина, яка наповнюється водою, може обертатись відносно осі ОО. Щоб при відхиленні від рівноваги порожня посудина поверталась у попереднє положення, до дна посудини прикріплений стержень з кулькою так, що центр C_1 ваги такої загальної системи (без води) розташований нижче осі обертання, тобто така система без води перебуває у стані стійкої рівноваги. Відкриємо кран (позиція 1) і струмина води буде заповнювати посудину. Як тільки центр C_2 ваги посудини повністю заповненої водою підніметься вище осі обертання (позиція 2), то стійка рівновага порушиться і посудина різко повернеться, вода виллється (позиція 3), а після чого вже порожня посудина повернеться у попереднє положення стійкої рівноваги.

Графічна залежність такого процесу має пилоподібний вигляд, (рис.13.11.1). Таким чином, кожен період релаксаційного коливання характеризується різко відмінними процесами, які відповідають повільним і швидким змінам стану системи. Очевидно, що період таких релаксаційних коливань залежить від швидкості подачі води, яку можна регулювати водяним краном, від ємності посудини та в значній мірі від співвідношення між положеннями осі обертання

посудини і її центрами ваги (до заповнення і після заповнення водою).

Електричним аналогом такої механічної релаксаційної системи є генератор, принципова схема якого наведена на рис.13.11.2а.

Якщо в механічній релаксаційній системі потік води регулювався звичайним краном, то в електричній системі роль такого крану відіграє опір R – чим більший цей опір, тим менший "потік електрики" надходить в систему. В механічній релаксаційній системі



а б в

Рисунок 13.11.2

вода заповнювала посудину, а в електричній системі роль такої посудини виконує конденсатор електроємністю C. Конструкція механічної релаксаційної системи була такою, що при наповненні її водою центр системи піднімався вище осі обертання і посудина різко перехилялась внаслідок чого вода швидко виливалась. В електричній релаксаційній системі заряджений конденсатор теж швидко розряджається завдяки неоновій лампі (позначена на схемі Нл). Так ось, як тільки напруга на обкладках конденсатора стане рівна напрузі запалювання неонової лампи під'єднаної до конденсатора (аналог – центр ваги механічної системи піднявся вище осі її обертання), у лампі відбувається розряд – лампа спалахує, конденсатор розряджається (аналог попередньої механічної системи – посудина перевертається і з неї виливається вода). Оскільки конденсатор розрядився, то процес релаксаційних коливань знову починається з самого початку (повна аналогія з механічною релаксаційною системою). Можна довести, що час або період одного релаксаційного коливання у такому генераторі дорівнює

$$T = RC \ln \frac{U_0 - U_г}{U_0 - U_з}, \qquad (13.11.1)$$

де U_0 – напруга джерела постійного струму, $U_з$ – напруга запалювання неонової лампи, $U_г$ – напруга її гасіння.

Як виглядає так звана монтажна схема конкретного релаксаційного генератора дає уявлення рис.13.11.2б, де джерелом постійного струму є універсальний лабораторний блок живлення. Обертаючи ручку "voltage" (напруга) на виході блоку можна отримати необхідне значення напруги U_0, яке висвітлюється на цифровому дисплеї приладу. Опір резистора у даній схемі становить $1 МОм$, а ємність конденсатора $0{,}5 мкФ$. Неоновою лампою є лампа МН-3, яка має такі параметри: напруга запалювання $U_з = 50 В$, а гасіння $U_г = 30 В$.

Графік залежності напруги від часу релаксаційних коливань наведений на рис.13.11.2в. Якщо б у колі була відсутня неонова лампа, то не було б і релаксаційний коливань, і тоді напруга на обкладках конденсатора при його зарядці через опір від блоку живлення експоненціально наближалась би $U_0 = 80 В$ (пунктирна лінія кривої). Оскільки в колі є неонова лампа з напругою запалювання $U_з = 50 В$, то саме з цього моменту починаються релаксаційні коливання – лампа швидко гасне за напруги $U_г = 30 В$ і після цього знову починається процес "повільного" заряджання конденсатора та потім швидкої розрядки. Якщо за формулою 13.11.1 підрахувати час одного релаксаційного коливання, то він буде становити $0.25 с$.

Електричні релаксаційні коливання та їх генератори мають велике практичне застосування, особливо в так званих системах електронної розгортки, в яких досліджується залежність деякої змінної величини від часу, де лінійний плин часу задається лінійним збільшенням напруги на першій "повільній" ділянці релаксаційного процесу.

Контрольні запитання

1 *За яким математичним законом відбуваються гармонічні коливання?*
2 *Як даються означення амплітуди коливань, їх періоду та частоти?*
3 *Який вигляд має диференціальне рівняння вільних незатухаючих коливань?*
4 *В чому полягає метод аналітичного та графічного опису коливань?*
5 *В чому полягає метод векторного опису гармонічних коливань?*
6 *В чому полягає символічний метод опису гармонічних коливань?*
7 *Як провести методом векторних діаграм додавання коливань одного напряму та однакової частоти?*
8 *Який результат і як його отримати при додаванні коливань з близькими частотами?*
9 *Який результат і як його отримати при додаванні взаємно перпендикулярних коливань і що собою при цьому являють фігури Ліссажу?*
10 *Яке диференціальне рівняння вільних незатухаючих коливань пружинного маятника та який його розв'язок?*
11 *Як визначається повна енергія механічного осцилятора?*
12 *Яке диференціальне рівняння вільних незатухаючих коливань математичного маятника та який його розв'язок?*
13 *Яке диференціальне рівняння вільних незатухаючих коливань фізичного маятника та який його розв'язок?*
14 *Які процеси зумовлюють коливання в електричному коливальному контурі та яке диференціальне рівняння вільних незатухаючих коливань в такому контурі?*
15 *Як однаковими за формою диференціальними рівняннями описати затухаючі механічні коливання та затухаючі коливання в електричному коливальному контурі? Як при цьому вводяться поняття коефіцієнту затухання, логарифмічного декременту затухання та добротності осцилятора?*
16 *За яких умов затухаючі коливання стають аперіодичними?*
17 *Як записати диференціальне рівняння вимушених механічних коливань під дією зовнішньої змінної сили? Що визначають*

загальний та частковий розв'язки цього рівняння і як звідси випливає поняття резонансу та резонансної частоти?

18 *Як записати диференціальне рівняння вимушених коливань в електричному коливальному контурі під дією зовнішньої змінної напруги? Як з розв'язку цього рівняння випливає поняття резонансної частоти та резонансу сили струму в контурі?*

19 *Яке практичне значення має використання резонансу в електричному коливальному контурі?*

20 *Що таке параметричні коливання та параметричний резонанс?*

21 *Що таке автоколивання і за якою принциповою схемою осцилятор сам забезпечує автоколивання? Яка особлива роль зворотного зв'язку, наприклад, в генераторі незатухаючих коливань в електричному коливальному контурі?*

22 *Як дати означення релаксаційних коливань і яка аналогія між механічними та електричними релаксаційними коливаннями?*

Розділ 14 Змінний електричний струм

14.1 Одержання змінного струму

Принцип дії генератора базується на законі електромагнітної індукції — при будь-якій зміні магнітного потоку, що пронизує замкнутий контур в ньому виникає електрорушійна сила, яка не залежить від способу зміни магнітного потоку. Тому технічно можливі дві конструкції генератора змінного струму. А саме, в полі постійного магніту обертається контур у вигляді рамки (рис.14.1.1) і тоді зміна магнітного потоку, що пронизує площу рамки-контуру, відбувається за рахунок її обертання. Контакт рамки з зовнішнім електричним колом (відведення струму до споживачів електроенергії) здійснюється через систему двох кілець по яких ковзають струмознімачі (мідні пластинки або графітові стержні які називають "щітками").

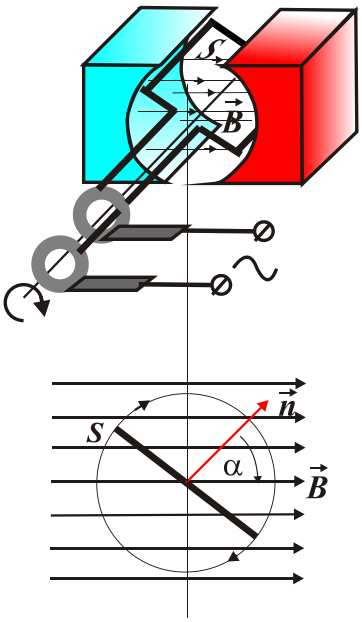


Рисунок 14.1.1

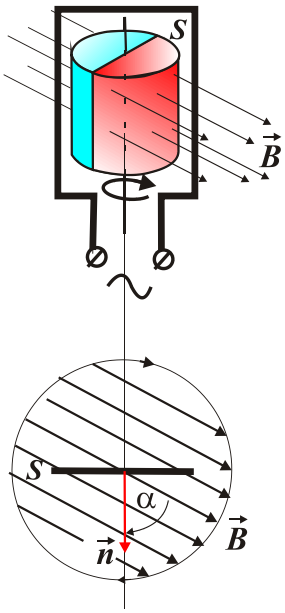


Рисунок 14.1.2

У другій конструкції (рис.14.1.2) рамка-контур нерухома, а зміна магнітного потоку, що пронизує її площу здійснюється обертанням магніту. У даному разі відведення струму не вимагає рухомих контактів. Малопотужний генератор, в якому використовують рухомий магніт, часто називають магнето. У потужних генераторах електростанцій нерухомою частиною (статором) є обмотки в яких індукується електрорушійна сила при обертанні ротора – електромагніту. В обох конструкціях генератора магнітний потік, що пронизує контур (рамку) площею S в однорідному магнітному полі індукцією B, дорівнює

$$\Phi = BS\cos\alpha\,, \qquad (14.1.1)$$

де α – кут між вектором $\vec{B}$ індукції магнітного поля та нормаллю $\vec{n}$ до поверхні рамки.

Якщо рамка чи магніт обертаються з кутовою швидкістю ω, то залежність кута α від часу t матиме такий вигляд:

$$\alpha = \omega t + \alpha_0 . \qquad (14.1.2)$$

Отже,

$$\Phi = BS\cos(\omega t + \alpha_0) . \qquad (14.1.3)$$

Тоді згідно закону електромагнітної індукції у рамці виникає електрорушійна сила (ЕРС), яка змінюється з частотою обертання рамки:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = BS\omega\sin(\omega t + \alpha_0) = \varepsilon_0\sin(\omega t + \alpha_0) , \qquad (14.1.4)$$

де $\varepsilon_0 = BS\omega$ – амплітудне значення ЕРС індукції. Якщо рамка має N витків, то відповідно амплітудне значення ЕРС індукції буде в N разів більшим.

Замкнувши контур рамки на зовнішнє коло опором R, в якому відсутні індуктивності або ємності, отримаємо змінний струм тієї ж частоти і миттєве значення сили такого струму буде визначатись за законом Ома:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r} = \frac{\varepsilon_0}{R + r}\sin(\omega t + \alpha_0) = I_0\sin(\omega t + \alpha_0) , \qquad (14.1.5)$$

де r – внутрішній опір джерела струму, у даному випадку є опір самої рамки, а I_0 – амплітудне значення сили змінного струму.

Отриманий таким способом змінний електричний струм ще називають однофазним, оскільки миттєве значення сили струму визначається лише одним значенням фази коливань. Згодом буде розглянутий трифазний струм як система трьох однофазних струмів.

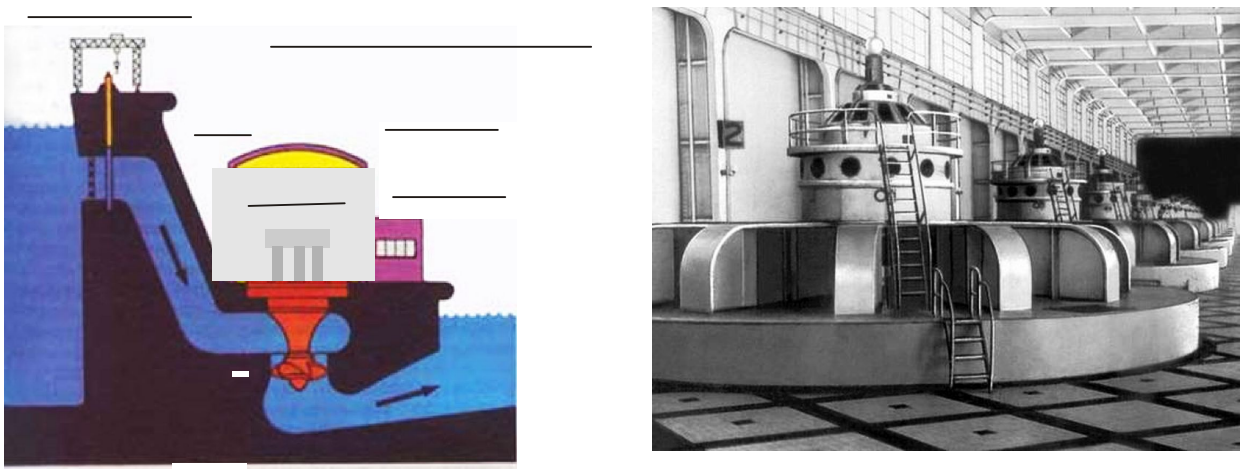
У більшості країн світу застосовують промислові струми з частотою 50*Гц*, а лише США та Канада – 60*Гц*. В деяких країнах,

наприклад в Японії, використовують два стандарти частот змінного струму – 50 і 60*Гц*. В авіації та військовій техніці з метою зменшення маси пристроїв та збільшення частоти обертання електродвигунів використовують струми частотою 400*Гц*.

В більшості випадків на електростанціях застосовують синхронні генератори, тобто такі, в яких кутова швидкість обертання магнітного поля, що збуджує ЕРС в нерухомих обмотках (статора), пропорційна кутовій швидкості обертання ротора генератора. Якщо ротор генератора двополюсний (рис.14.1.2), то за один повний оберт індукована електрорушійна сила здійснить один повний цикл своєї зміни. Отже, частота ЕРС синхронного генератора в герцах буде становити $\nu = \frac{n}{60}$, де n – число обертів ротора в хвилину. Наприклад, парова турбіна найбільш оптимально працює тоді, коли її частота обертання становить 3000 обертів за хвилину, завдяки чому і була вибрана частота промислового струму 50*Гц*.

Якщо ж генератор має p полюсів, то частота електрорушійної сили такого генератора дорівнює $\nu = p\frac{n}{60}$. Наприклад, масивні і тихохідні потужні гідравлічні турбіни на гідроелектростанціях обертаються зі швидкістю 150 обертів за хвилину і тоді генератори повинні мати 40 полюсів.

На рис.14.1.3*а* наведена принципова схема гідроелектростанції (ГЕС). Гребля, яка перегороджує ріку, створює водосховище. В залежності від підняття рівня води у водосховищі розрізняють високонапірні (більше 60 м), середньонапірні (від 25 м) та низьконапірні (від 3 до 25м) ГЕС. Гідроелектростанції України в основному низьконапірні. Наприклад Канівська ГЕС працює при



а б

Рисунок 14.1.3

напорі води 7,2 м. Фізичний принцип роботи ГЕС дуже простий – потенціальна енергія води перетворюється в кінетичну енергію і рухомий потік води обертає гідротурбіну, яка в свою чергу приводить в рух генератор змінного струму. За допомого заставки регулюванням потоку здійснюється вибір оптимального режиму роботи електростанції. Отриманий змінний електричний струм поступає в електричну мережу через трансформаторну підстанцію. На потужних гідроелектростанціях електроенергію виробляють багато генераторів, які розташовані в так званому машин-ному залі. Вигляд такого машинного залу відомої української дніпровської гідроелектростанції (ДНІПРОГЕС) наведений на рис.14.1.3*б*.

14.2 Квазістаціонарний струм

Електричний струм у провіднику як упорядкований рух електричних зарядів відбувається під дією електричного поля, швидкість поширення якого c = 300 000 км/с.

Якщо джерело постійного струму, електрорушійна сила якого не змінюється, під'єднати до лінії електропередачі, то з часом у цій лінії, якою б довгою вона не була, буде вдосталь часу для поширення електричного поля щоб в цій лінії встановився стаціонарний струм. Це значить, що сила струму в усіх ділянках такої нерозгалуженої лінії буде однаковою. Якщо опором лінії нехтувати, то напруга вздовж такої лінії буде однаковою і вольтметри вздовж всієї лінії будуть показувати однакові значення напруги. Зрозуміло, що для стаціонарних струмів в будь-якій ділянці кола справджуються закони Ома та правила Кірхгофа. А тепер уявімо, що до лінії електропередачі будь-якої великої довжини увімкнено генератор змінного струму з частотою 50*Гц* (рис.14.2.1б). У такій лінії буде поширюватись змінне електричне поле у вигляді біжучої хвилі довжиною $\lambda = c \cdot T = 300000 \frac{км}{с} \cdot \frac{1}{50} с = 6000\,км$. Миттєвий графік такої хвилі як залежність напруги від координат точок лінії наведений на рис.14.2.1б, відповідно покази вольтметрів будуть різними (будемо вважати, що вольтметри безінерційні і показують амплітудне значення напруги). Через четверть періоду графік хвилі (вся синусоїда зміститься на 1500*км* (рис.14.2.1в). Але за деяких умов змінний струм можна вважати квазістаціонарним (*квазі* з латині –

ніби) і тоді для такого струму з достатньою мірою точності виконуються закони постійного струму.

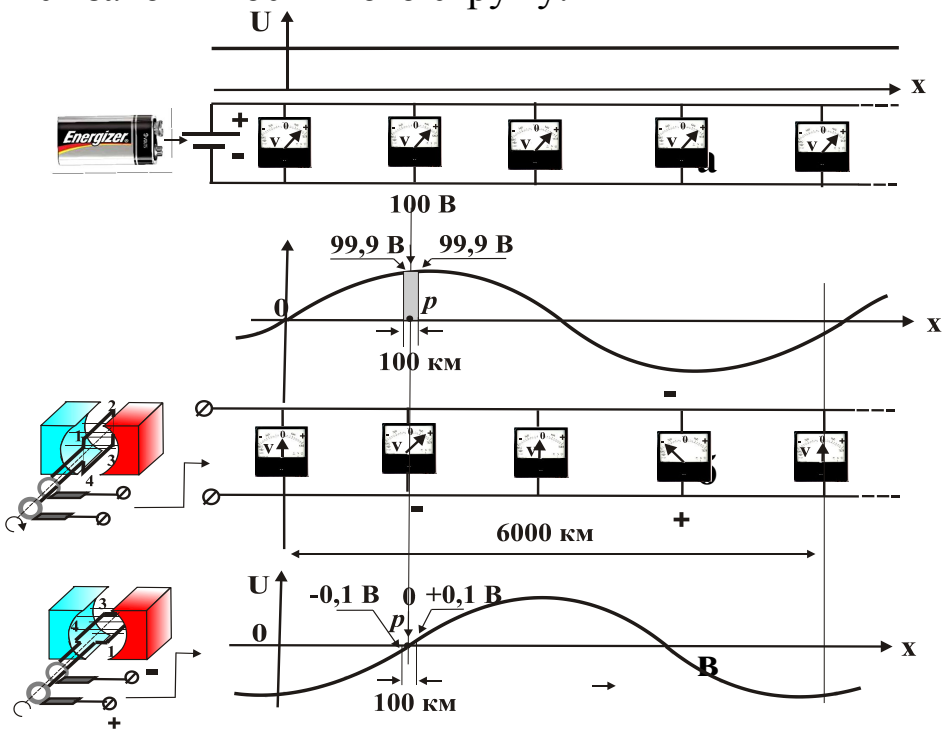


Рисунок 14.2.1

Для цього геометричні розміри електричного кола повинні бути значно меншими довжини хвилі даного змінного струму і тоді миттєве значення сили струму на такій малій ділянці можна вважати однаковим в усіх перерізах нерозгалуженого кола. Так, промисловий струм частотою $50Гц$ квазістаціонарний для ліній довжиною до $l \approx 100\,км$. Чому саме $100км$? Відстань $100км$ хвиля

$$\tau = \frac{100км}{300000\frac{км}{с}} = \frac{1}{3000}с$$

змінного струму пройде за час . Нехай в момент часу $t = 0$ миттєве значення напруги в точці ***p*** дорівнює її максимальному значенню, наприклад $U_0 = 100\,В$ (рис.14.2.1б) і тоді рівняння, що описує зміну напруги з часом для даної точки, прийме такий вигляд:

$$U = U_0 \sin(2\pi\nu t + \frac{\pi}{2}) . \qquad (14.2.1)$$

Оскільки умовою квазістаціонарності вибраний відрізок довжиною $100км$, то від точки ***p*** кінці цього відрізка віддалені на

$50км$ і цю відстань хвиля змінного струму пройде за час $\Delta t = \frac{50км}{300000\frac{км}{с}} = \frac{5}{3}10^{-4}с$.

Отже, миттєві значення напруги на кінцях відрізка лінії довжиною 100 *км* будуть становити:

$$U = U_0 \sin(2\pi \cdot 50 \cdot \frac{5}{3}10^{-5} + \frac{\pi}{2}) = 0{,}999 U_0 .$$

Оскільки $U_0 = 100\,B$, то $U = 99{,}9\,B$.

Через четверть періоду миттєве значення напруги в точці ***p*** стане рівне нулю і в цьому випадку напруга на кінцях відрізку буде відрізнятись від нуля не більше 0,1 В. Таким чином, відносна похибка у визначенні умови квазістаціонарності становить $\frac{0{,}1B}{100B} = 0{,}001$ або 0,1%, що практично дає можливість вважати змінний струм частотою $50Гц$ квазістаціонарним у нерозгалуженому електричному колі довжиною порядку $100км$.

14.3 Діючі (ефективні) значення сили та напруги змінного електричного струму

За один період напрям і величина змінного стуму змінюються два рази, а тому середнє значення змінного струму за один період дорівнює нулю. Тоді виникає питання, якими "амперами" та "вольтами" характеризувати змінний струм? Для цього вводять поняття діючих або ефективних значень сили $I_{еф}$ та напруги $U_{еф}$ змінного струму, порівнюючи теплову дію даного змінного струму з такою ж самою за своїм значенням дією постійного струму. ***А саме, величина змінного струму, який при проходженні по провіднику опором R зумовлює виділення такої ж самої кількості теплоти Q як і постійний струм за той же самий час, називається ефективним або діючим значенням даного змінного струму***.

Оскільки сила змінного струму змінюється від нуля до свого максимального (амплітудного) значення I_0, то найбільш доцільно встановити співвідношення між ефективним та максимальним (амплітудним) значенням сили змінного струму.

Згідно закону Джоуля-Ленца кількість теплоти Q, що виділяє змінний струм з ефективною силою $I_{еф}$ за час рівний періоду T одного коливання, дорівнює

$$Q = I_{еф}^2 RT \quad . \tag{14.3.1}$$

Ця ж сама кількість теплоти може бути визначена як інтегральна сума елементарних кількостей теплоти dQ, які виділяються в провіднику за час dt коли струм можна вважати постійним з миттєвим значенням його сили I:

$$Q = \int_0^T I^2 R dt \quad . \tag{14.3.2}$$

Якщо сила струму змінюється за синусоїдальним законом

$$I = I_0 \sin \omega t \quad , \tag{14.3.3}$$

то

$$Q = \int_0^T I_0^2 R \sin^2 \omega t dt = \int_0^T \frac{I_0^2 R}{\omega} \sin^2 \omega t \, d(\omega t) =$$

$$= \int_0^T I^2{}_0 R \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} dt = \frac{I_0^2 R}{2} \int_0^T dt - \int_0^T \cos \frac{2\pi}{T} t dt = \frac{I_0^2 RT}{2} + 0 \quad . \tag{14.3.4}$$

Прирівнюючи рівності (14.3.1) та (14.3.4), отримаємо:

$$I_{еф} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = 0{,}707 I_0 \quad . \tag{14.3.5}$$

Оскільки кількість теплоти, яка вділяється в провіднику при проходженні струму можна виразити через значення напруги $Q = \frac{U^2}{R} t$, то можна отримати аналогічне до (14.3.5) співвідношення між ефективним (діючим) та амплітудним значенням напруги:

$$U_{еф} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} = 0.707 U_0 \quad . \qquad (14.3.6)$$

Амперметри (аналогові та цифрові), які використовують у колах змінного струму, градуюють на ефективні значення сили струму та напруги. Побачити синусоїду змінного струму можна за допомогою осцилографа і безпосередньо визначити амплітудне значення сили струму або напруги.

14.4 Активний опір, індуктивність і ємність в колі змінного струму. Закон Ома для кола змінного струму

На перший погляд опір провідника як в колі постійного, так і змінного струму повинен бути однаковий, а значить однакові кількості теплоти, які виділяються за однакових умов як постійним, так і змінним струмом. Дійсно, так і буде лише в одному випадку, коли практично провідник не володіє індуктивністю або ємністю. Наявність індуктивності або ємності провідника, як далі буде показано в колі змінного струму збільшує його опір, але ні в якому разі не збільшує кількість теплоти що виділяє змінний струм у цьому провіднику. Таким чином є ніби два різні за своїм змістом електричні опори. Той опір провідника, який визначає теплову дію струму згідно закону Джоуля-Ленца, називається активним або омічним. Інший опір (теж в омах), що зумовлений наявністю в колі змінного струму індуктивності та ємності, називається реактивним і він не спричинює в індуктивності чи ємності теплової дії струму. Згодом ми розглянемо як впливає індуктивність чи ємність провідника на його опір в колі змінного струму, а поки що розглянемо найпростіший випадок кола змінного струму з активним опором.

Рисунок 14.4.1

Нехай до кінців кола, яке складається тільки з активного опору R (рис.14.4.1) прикладена змінна синусоїдальна напруга

$$U = U_0 \sin \omega t \quad . \qquad (14.4.1)$$

Вважаючи струм квазістаціонарним, згідно закону Ома миттєве значення сили струму буде дорівнювати

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U_0}{R}\sin\omega t = I_0 \sin\omega t \,, \qquad (14.4.2)$$

де I_0 – амплітудне значення сили змінного струму.

З формул (14.4.1) та (14.4.2) випливає, що напруга та струм змінюються в однакових фазах, тобто напруга і струм одночасно досягають своїх максимальних і мінімальних значень (рис.14.4.2, на якому у довільних масштабах наведені синусоїдальна зміна напруги – крива 1 та струму – крива 2). Якщо за опорну вісь взяти вісь струмів, то у даному випадку вектор амплітудного значення напруги співпадає з вектором амплітуди струму (рис.14.4.3).

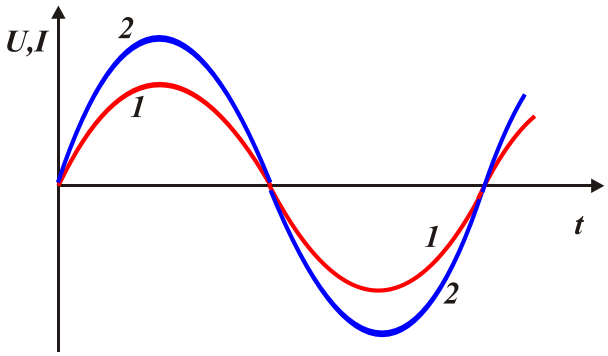


Рисунок 14.4.2

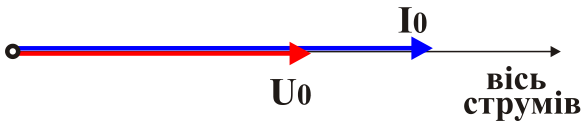


Рисунок 14.4.3

Якщо в колі змінного струму знаходиться індуктивність L, наприклад, соленоїд (рис.14.4.4), то внаслідок явища самоіндукції коливання сили струму не будуть співпадати по фазі з коливаннями напруги. Дійсно, збільшенню струму в соленоїді перешкоджає ЕРС самоіндукції, внаслідок чого сила струму досягає максимального значення пізніше в порівнянні з максимальним значенням напруги.

Рисунок 14.4.4

Отже, закон Ома для такого кола, де діє ЕРС самоіндукції ε та прикладена зовні напруга U, прийме такий вигляд:

$$U + \varepsilon = IR \,. \qquad (14.4.3)$$

Розглянемо коло, де активний опір відсутній (R=0), тоді

$$U = -\varepsilon \qquad (14.4.4)$$

та враховуючи, що ЕРС самоіндукції $\varepsilon = -L\frac{dI}{dt}$, отримаємо:

$$U = L\frac{dI}{dt}. \qquad (14.4.5)$$

Нехай, як і в попередньому випадку з активним опором, прикладена напруга змінюється за синусоїдальним законом, тоді

$$U_0 \sin \omega t = L\frac{dI}{dt}. \qquad (14.4.6)$$

Звідси

$$dI = \frac{U_0}{L}\sin \omega t\, dt. \qquad (14.4.7)$$

Інтегруючи (14.4.7), отримаємо залежність миттєвого струму від часу:

$$I = \frac{U_0}{L\omega}\int \sin \omega t\, d(\omega t) = -\frac{U_0}{L\omega}\cos \omega t + C. \qquad (14.4.8)$$

Оскільки струм змінний, то константа інтегрування С повинна дорівнювати нулю, адже в даному колі постійний (сталий) струм відсутній. Таким чином

$$I = -\frac{U_0}{L\omega}\cos \omega t = I_0 \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}), \qquad (14.4.9)$$

де

$$I_0 = \frac{U_0}{L\omega} \qquad (14.4.10)$$

визначає амплітудне значення сили змінного струму в колі змінного струму з індуктивністю L.

Оскільки напруга прикладена до індуктивності та змінюється за законом $U = U_0 \sin \omega t$, то з (14.4.9) випливає, що коливання сили

струму в колі тільки з індуктивністю відстають від коливань напруги на $\frac{\pi}{2}$. Векторна діаграма такого відставання коливань амплітуди сили струму від напруги наведена на рис.14.4.5. В динаміці, в залежності від часу, за зсувом фаз між миттєвими значеннями коливань напруги та сили стуму можна прослідкувати на рис.14.4.6.

Так, якщо за проміжок часу від нуля до $t = \frac{1}{4}T$ напруга зростає від нуля до максимального значення, то струм ніби "забув" що йому треба збільшуватись, а навпаки – зменшується від свого максимального значення до нуля і ця "забудькуватість" у даному випадку називається відставанням за фазою на $\frac{\pi}{2}$.

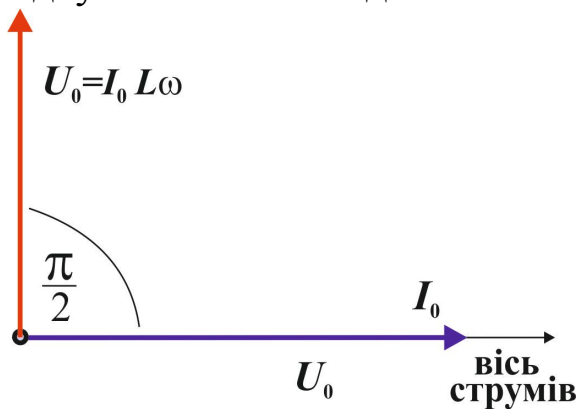


Рисунок 14.4.5

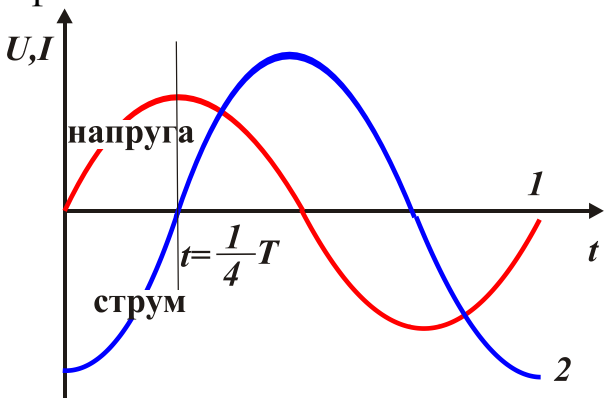


Рисунок 14.4.6

З отриманих розрахунків, крім наявності зсуву фаз між коливаннями напруги та сили струму в колі змінного струму з індуктивністю, випливає ще один важливий результат про так званий індуктивний опір. Так, якщо порівняти відомий закон Ома для ділянки кола з активним опором ($I = \frac{U}{R}$) з виразом (14.4.10), то легко побачити, що роль опору R в колі змінного струму з індуктивністю відіграє величина ωL, яку називають реактивним індуктивним опором або просто індуктивним опором і позначають

$$X_L = \omega L. \qquad (14.4.11)$$

Одиницею вимірювання індуктивного опору як і активного опору є Ом. Але якщо на активному опорі електричний струм зумовлює згідно закону Джоуля-Ленца виділення теплоти, то на індуктивному опорі цього не відбувається. Крім того, індуктивний опір залежить від частоти струму. Строго кажучи активний опір металевих провідників теж залежить від частоти, особливо при високих частотах за рахунок особливого скін-ефекту. Скін-ефе́кт (від англ. *Skin* – шкіра) – це проходження змінного електричного струму високої частоти не через увесь переріз провідника, а переважно лише в поверхневому шарі, внаслідок чого опір провідника при високих частотах зростає. При низьких частотах, наприклад, струм промислової частоти 50 Гц, скін-ефектом можна нехтувати.

Розглянемо коло змінного струму з електроємністю (конденсатором, рис.14.4.7). Очевидно, що для кола постійного струму конденсатор є розривом такого кола, адже між обкладками конденсатора діелектрик або вакуум і вільні заряди відсутні.

Рисунок 14.4.7

В колі змінного струму між обкладками конденсатора теж не буде струму провідності, але обкладки конденсатора в такт з коливаннями напруги змінного струму будуть перезаряджатись і в підвідних до конденсатора провідниках буде протікати змінний електричний струм. Все формально виглядає так, ніби електричне коло змінного струму замкнуте і в даному випадку можна прийти до якісного висновку про випередження коливань струму відносно коливань напруги. Дійсно, при замиканні кола конденсатор заряджається, струм зростає і лише після того як конденсатор зарядиться, струм припиниться і напруга досягне максимального значення. А тепер кількісно опишемо явища, що відбуваються в колі змінного струму з конденсатором. Нехай напруга, яка прикладена до обкладок конденсатора, змінюється за синусоїдальним законом $U = U_0 \sin \omega t$. Згідно означення електроємності конденсатора $C = \frac{q}{U}$ миттєве значення заряду на обкладках конденсатора буде рівним

$$q = CU = CU_0 \sin t. \qquad (14.4.12)$$

Тоді миттєве значення сили струму визначається похідною від значення заряду за часом:

$$I = \frac{dq}{dt} = CU_0\omega\cos\omega t = I_0\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}), \qquad (14.4.13)$$

де

$$I_0 = CU_0\omega \qquad (14.4.14)$$

визначає амплітудне значення сили змінного струму.

З формули (14.4.13) у порівнянні з формулою $U = U_0\sin\omega t$ випливає, що коливання струму в колі з конденсатором випереджають коливання напруги за фазою на $\frac{\pi}{2}$. Тобто, в колі з конденсатором струм "спішить", залишаючи позаду напругу за фазою на $\frac{\pi}{2}$, що ілюструє векторна діаграма наведена на рис.14.4.8 та рис.14.4.9. Так, в

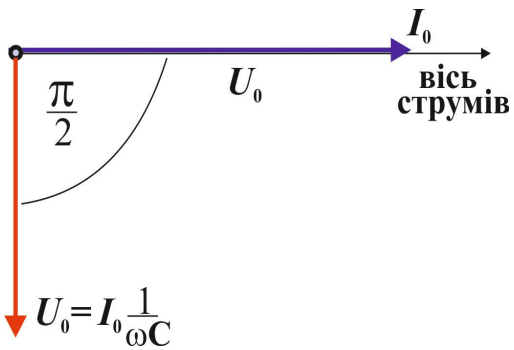


Рисунок 14.4.8

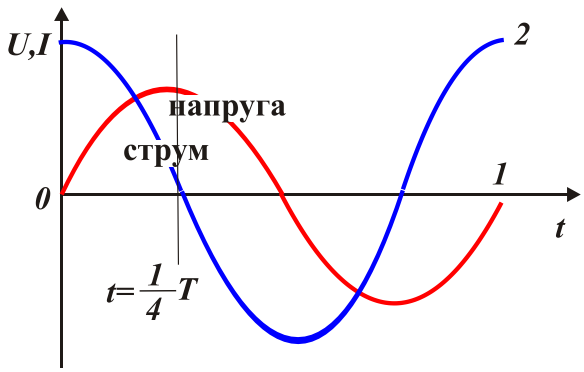


Рисунок 14.4.9

початковий момент часу струм досяг максимального значення, конденсатор "щосили заряджається", залишаючи позаду себе напругу.

Якщо записати формулу (14.4.14) у такому вигляді як

$$I_0 = \frac{U_0}{\frac{1}{\omega C}} \qquad (14.4.15)$$

і порівняти з законом Ома для активного опору $I = \frac{U}{R}$, то величина

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \qquad (14.4.16)$$

теж є електричним опором, який називається ємнісним реактивним опором. Зрозуміло, що подібно до реактивного індуктивного опору електричний струм на ємнісному реактивному опорі не приводить до теплової дії.

А тепер узагальнимо всі попередні випадки, розглянувши електричне коло змінного струму з активним опором R, індуктивністю L та конденсатором ємністю С (рис.14.4.10). Якщо на одній координатній площині побудувати всі попередні векторні діаграми, то вони матимуть вигляд зображений на рис.14.4.11.

Результуюче амплітудне значення напруги U_0 в колі дорівнює векторній сумі амплітудних напруг на кожному елементі цього кола: на активному опорі U_{0R}, індуктивності U_{0L} та ємності U_{0C}. З рис.14.4.11 модуль вектора результуючої амплітуди, як гіпотенузи прямокутного трикутника, дорівнює:

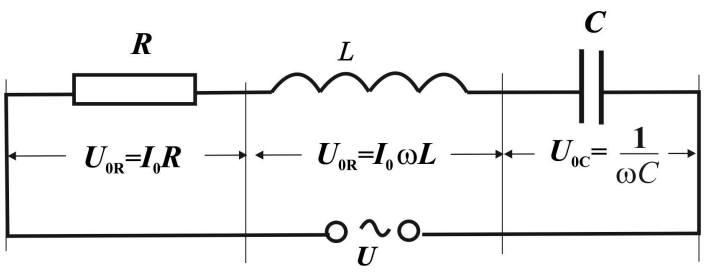


Рисунок 14.4.10

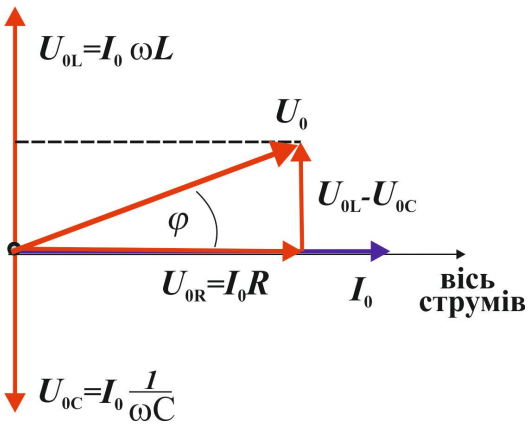


Рисунок 14.4.11

$$U_0 = \sqrt{U_{0R}^2 + (U_{0L} - U_{0C})^2} = \sqrt{(I_0R)^2 + \left(I_0\omega L - I_0\frac{1}{\omega C}\right)^2} =$$

$$= I_0\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}. \qquad (14.4.17)$$

Звідси амплітудне значення сили струму в такому колі становить:

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \qquad (14.4.18)$$

Отримане співвідношення (14.4.18) називається законом Ома для кола змінного струму і це співвідношення справедливе для амплітудних або ефективних значень сили струму та напруги, але не для їх миттєвих значень.

Величина

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \qquad (14.4.19)$$

називається імпедансом (з лат., *impedio* – перешкоджаю) або повним опором кола змінного струму, де R – активна складова опору Z, а $X_L - X_C$ – реактивна складова.

З векторної діаграми (рис.14.4.11) можна визначити кут φ, який визначає різницю фаз між коливаннями результуючої напруги та сили струму в колі даного змінного струму:

$$tg\varphi = \frac{U_{0L} - U_{0C}}{U_{0R}} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \qquad (14.4.20)$$

14.5 Резонанс напруг

Якщо в колі змінного струму з послідовним з'єднанням активного опору, індуктивності та ємності індуктивний опір дорівнює ємнісному опору

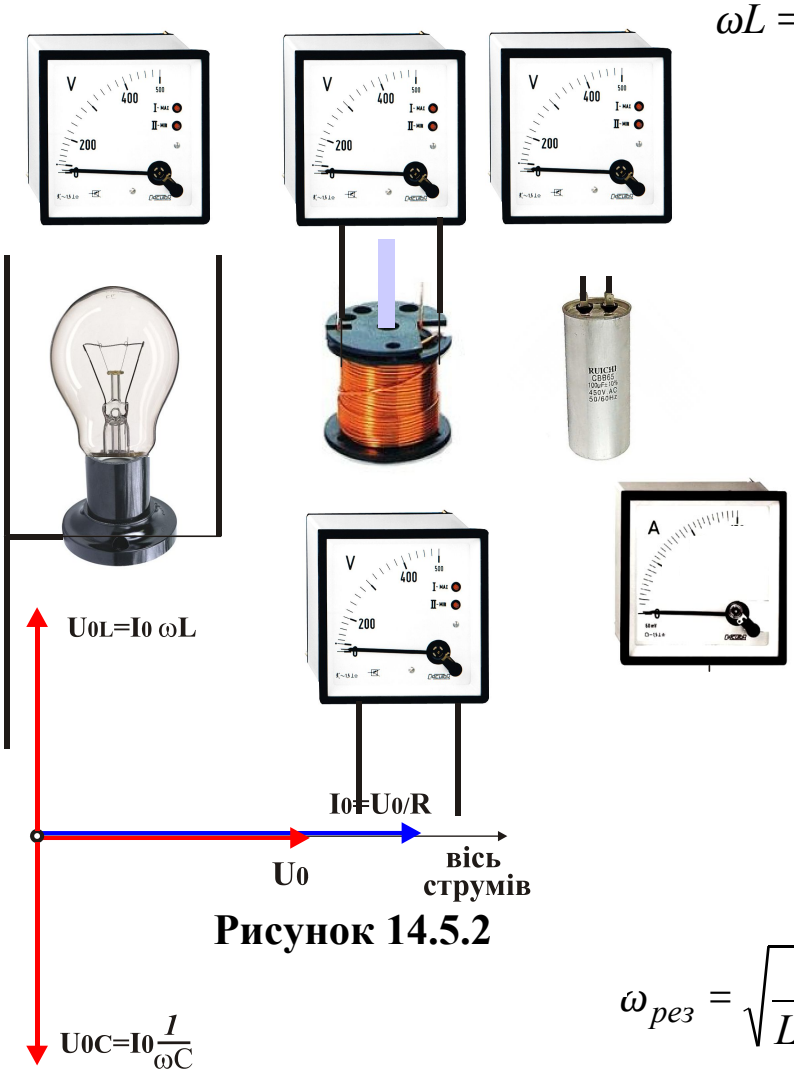


Рисунок 14.5.2

Рисунок 14.5.1

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}, \qquad (14.5.1)$$

то при цьому напруги на індуктивності та ємності однакові за амплітудою та протилежні за фазою ($U_{0L} = U_{0C}$). ***Таке явище називається резонансом напруг або послідовним резонансом.***

З рівності (14.5.1) випливає, що частота зовнішньої напруги, за якої відбувається резонанс напруг, дорівнює

$$\omega_{рез} = \sqrt{\frac{1}{LC}} \qquad (14.5.2)$$

і називається резонансною частотою. З (14.5.2) також випливає вже відома формула Томсона періоду вільних незатухаючих коливань:

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \qquad (14.5.3)$$

Векторна діаграма для резонансу напруг наведена на рис.14.5.1.

На рис.14.5.2 показана схема досліду для спостереження резонансу в колі змінного струму промислової частоти 50 Гц. Зрозуміло, що зразу в колі встановити таку ємність С та індуктивність L які б точно відповідали умові резонансної частоти практично неможливо. Тому в схемі встановлюють конденсатор відомої ємності, наприклад, *С=10 мкФ,* а індуктивність L котушки змінюють до умови резонансу залізним осердям яке вводять в

котушку. Значення індуктивності, за якої буде спостерігатись резонанс напруг за частоти 50 Гц буде, як випливає з формули (14.5.2), рівним $0{,}507\,Гн$. Роль активного опору в колі відіграє лампа опором $100\,Ом$.При такому положенні осердя в котушці індуктивності, що відповідає умові резонансу, розжарення лампи буде максимальним, а при більшій або меншій індуктивності розжарення лампи буде меншим.

Якщо підрахувати реактивні опори конденсатора та котушки індуктивності, то отримаємо такі значення: $X_C = X_L = 159{,}2\,Ом$.

Але повний опір кола змінного струму за умови резонансу напруг визначається тільки активним опором і тоді ефективне значення сили струму за прикладеної змінної ефективної напруги $220B$ дорівнює $I_{еф} = 2{,}27\,A$. За такої ефективної сили струму ефективні значення напруг на індуктивності та ємності при резонансі напруг будуть рівними і становитимуть $U_L = U_C = 350\,B$, тобто значно перевищують зовнішню напругу $220B$ і ці значення дають покази вольтметрів під'єднаних паралельно до котушки індуктивності і конденсатора (рис.14.5.2). Оскільки напруга на реактивних опорах додається геометрично і коливання напруги на індуктивності та ємності відбуваються у протилежних фазах, то в результаті резонансу напруг сумарна напруга на індуктивності і ємності дорівнює нулю. Явище резонансу напруг широко застосовується на практиці,про що вже йшла мова раніше (використання резонансу в електричному коливальному контурі).

13.6 Резонанс струмів

При послідовному з'єднанні котушки індуктивності та конденсатора за умови рівності індуктивного та ємнісного опорів $\omega L = \dfrac{1}{\omega C}$ спостерігається, як ми вже бачили, явище резонансу напруг. А що буде, якщо ця умова виконується при паралельному з'єднанні відповідних елементів? Наприклад, електричне коло

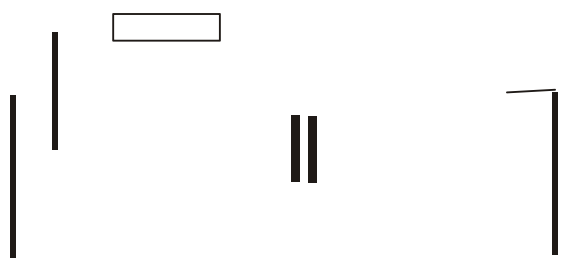


Рисунок 14.6.1

змінного струму складається з паралельно з'єднаних котушки індуктивності L та конденсатора ємності C (рис.14.6.1). Оскільки обмотка котушки намотана провідником, що володіє деяким активним опором R,то у вітці з індуктивністю будемо враховувати цей активний опір (на рис.14.6.1 цей опір котушки показаний відокремлено). При паралельному з'єднанні ділянок кола з індуктивністю та ємністю напруга на кінцях цих ділянок однакова, то за опорну вісь доцільно вибрати вісь напруги. Якщо прикладена зовнішня напруга змінюється за синусоїдальним законом

$$U = U_0 \sin \omega t, \qquad (14.6.1)$$

то коливання сили струму на ємності будуть випереджати коливання напруги за фазою на $\frac{\pi}{2}$:

$$I_C = \frac{U_0}{X_C} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = U_0 \omega C \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = I_{0C} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}), \qquad (14.6.2)$$

де I_{0C} – амплітудне значення коливань сили струму на конденсаторі ємністю C. На векторних діаграмах (рис.14.6.2) вектор амплітуди сили цього струму перпендикулярний осі напруг і випереджає коливання напруги за фазою на $\frac{\pi}{2}$.

Якщо б активний опір провідників котушки індуктивності був відсутній, то коливання струму на такій котушці індуктивності відставали би за фазою на $\frac{\pi}{2}$ від коливань напруги $I_L = \frac{U_0}{X_L} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$. З врахуванням активного опору відставання коливань струму від коливань напруги буде меншим $\frac{\pi}{2}$ і це відставання визначиться кутом φ_L, тангенс якого згідно формули (14.4.20) дорівнює: $tg\varphi_L = \frac{\omega L}{R}$.

Нехай у колі змінного струму електроємність залишається сталою, а індуктивність котушки будемо змінювати введенням феромагнітного осердя і визначаючи при цьому відповідні значення амплітудних сил струму зображати їх на векторних діаграмах та слідкувати за напрямами струмів в усіх ділянках кола як це показано на рис.14.6.2.

1) Індуктивність котушки незначна, індуктивний опір котушки менший реактивного опору конденсатора ($\omega L_1 < \frac{1}{\omega C}$), тому амплітудне значення сили змінного струму через конденсатор більше амплітудного значення сили струму через індуктивність ($I_{OC} > I_{0L_1R}$). Векторна сума цих сил струмів визначає сумарний струм I_{01} у даному колі.

2) Введемо в котушку осердя так, щоб індуктивний опір став більшим за реактивний опір конденсатора ($\omega L_2 > \frac{1}{\omega C}$) і тоді амплітуда сили струму через індуктивність стане більшою амплітудного значення сили струму через конденсатор ($I_{0L_1R} > I_{0C}$). Це збільшення зумовить не тільки зміну вектора амплітуди результуючого струму до значення I_{02}, але й зміну напряму струму в нерозгалуженій частині кола.

3) Пересуваючи осердя можна знайти таке його положення, при якому індуктивний опір котушки стане рівний реактивному опору конденсатора ($\omega L_3 = \frac{1}{\omega C}$) і стануть рівними амплітуди сил "ємнісного" та "індуктивного" струмів. Оскільки коливання сили струму на індуктивності та ємності відбуваються у протилежних фазах, то в даному випадку їх результуюча амплітуда дорівнює нулю. Залишається нерівним нулю сила струму, що зумовлена тільки активним опором розгалуженої частини кола і цей струм, як бачимо з векторних діаграм, буде найменшим таке явище називається резонансом струмів (паралельним резонансом). ***Отже, резонанс струмів – це явище, при якому амплітудні значення сил струмів в розгалуженій частині кола (ємності, індуктивності) досягають однакового максимального значення і коливання сил струмів відбувається у протилежних фазах, внаслідок чого сила струму в***

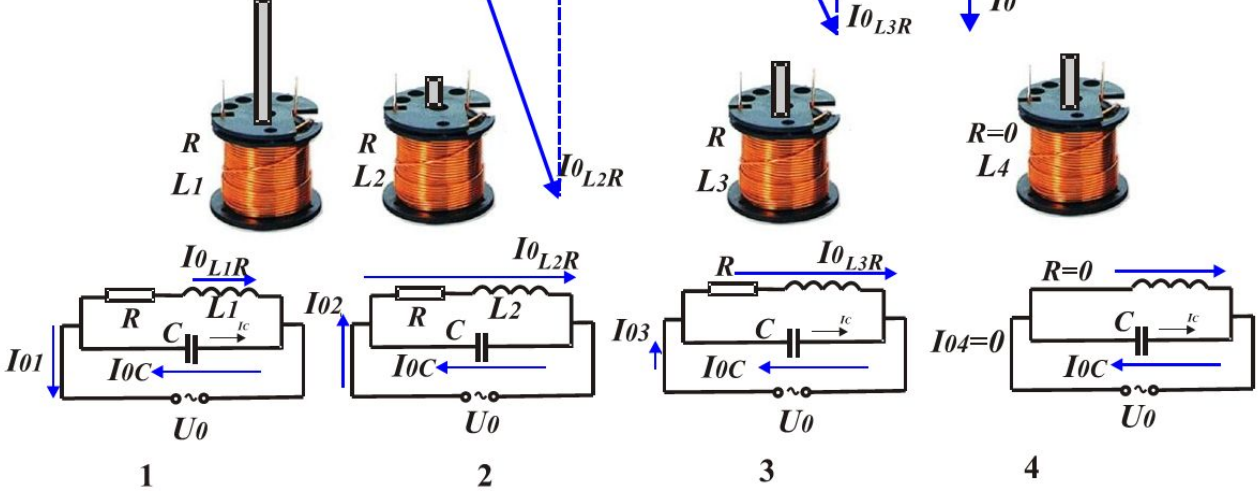


Рисунок 14.6.2

нерозгалуженій частині кола (підвідних провідниках) набуває мінімального значення.

З умови $\omega L = \dfrac{1}{\omega C}$ випливає умова резонансної частоти – $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

Тут доцільно знайти амплітуду такого змінного струму за умови резонансу. З рис.14.6.2 випливає, що

$$I_0 = I_{0L} \cos\varphi_L . \qquad (14.6.3)$$

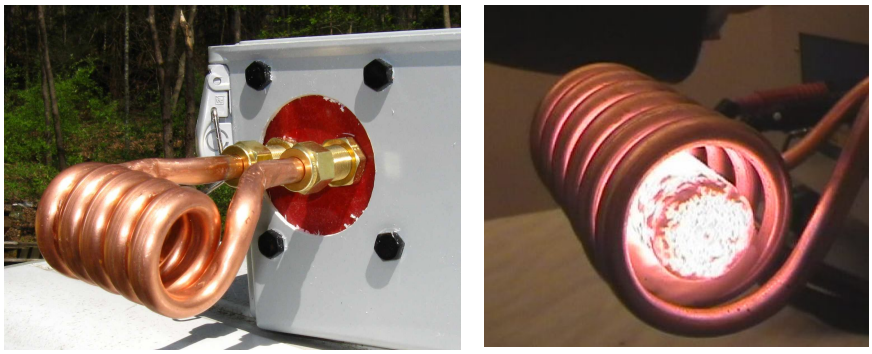
Так як $I_{OL} = \dfrac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$, а $\cos\varphi_L = \dfrac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$ і якщо вважати $(\omega L)^2 >> R^2$, то

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cong U_0 \frac{RC}{L} . \qquad (14.6.4)$$

4) Особливий випадок – активний опір котушки індуктивності відсутній або настільки малий у порівнянні з реактивними опорами, що активним опором можна нехтувати. У такому випадку струм в нерозгалуженій частині кола дорівнює нулю. Спостерігаємо незвичне явище. До кінців паралельного з'єднання прикладена напруга, а струму немає, тобто згідно закону Ома $I = \dfrac{U}{R}$ опір такого паралельного з'єднання при резонансі струмів стає нескінченно великим. Нічого дивного тут немає, при резонансі струмів, коли активний опір відсутній, відбуваються вільні незатухаючі коливання в такому паралельному з'єднанні і для підтримання незатухаючих коливань немає

потреби "брати" змінний струм від зовнішнього джерела змінного струму.

При резонансі струмів сила струму в обох вітках розгалуженого кола може бути значно більшою ніж сила струму в підвідних провідниках, що заходить широке застосування в радіотехніці та електротехніці, зокрема в індукційних нагрівачах, загальний вигляд яких показано на рис.14.6.3а. Потужний високочастотний генератор створює резонанс струмів в розгалуженому електричному колі. Електроємність (конденсатор) цього кола знаходиться всередині корпусу генератора, а назовні виведені витки індуктивності, які виготовлені з провідників великого діаметру, адже при резонансі струми можуть досягати сотні ампер. Якщо всередину витків внести металеву деталь (рис.14.6.3б), то змінне високочастотне магнітне поле витків котушки індукує в деталі змінний струм, який може нагріти деталь навіть до температури плавлення. Індукційний нагрів має ряд суттєвих переваг у порівнянні з іншими видами нагріву. Наприклад, індукційний нагрів дає змогу здійснити надчисте безконтактне плавлення, термічну обробку деталей, здійснити поверхневе загартування тощо.



а б

Рисунок 14.6.3

14.7 Робота і потужність змінного струму

За час t постійним електричним струмом силою I за напруги U буде виконана робота $A = IUt$, потужність P такого постійного струму становить величину рівну $P = IU$. Для кола змінного струму тільки з активним опором, де відсутній зсув фаз між коливаннями сили струму та напруги, роботу струму можна визначити через ефективні або діючі значення сили струму на напруги – $A = I_{еф}U_{еф}t$. При цьому потужність змінного струму дорівнює $P = I_{еф}U_{еф}$.

А тепер розглянемо загальний випадок кола змінного струму, де реактивні опори (індуктивності та ємності) зумовлюють зсув фаз між коливаннями сили струму та напруги. Нехай коливання напруги здійснюються за законом $U = U_0 \cos \omega t$, а сили струму $I = I_0 \cos(\omega t - \varphi)$. Тоді миттєве значення потужності такого змінного струму дорівнює

$$P = (U_0 \cos \omega t) \cdot (I_0 \cos(\omega t - \varphi)) . \qquad (14.7.1)$$

Скориставшись формулою тригонометрії про добуток косинусів $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$, вираз (14.7.1) миттєвої потужності набуде такого вигляду:

$$P = \frac{1}{2} I_0 U_0 \cos \varphi + \frac{1}{2} I_0 U_0 \cos(2\omega t - \varphi) . \qquad (14.7.2)$$

Зрозуміло, що потужність змінного струму за даних значень амплітуди сил струму та напруги за будь-який час визначається середньою потужністю за один період коливань. Оскільки середнє значення гармонічної функції синуса чи косинуса за один період дорівнює нулю, то визначаючи середню потужність змінного струму за один період у формулі (14.7.2) значення $\cos(2\omega t - \varphi)$ за один період буде рівним нулю. Отже, потужність змінного струму буде визначатись таким співвідношенням:

$$P = \frac{I_0 U_0}{2} \cos \varphi . \qquad (14.7.3)$$

Або, враховуючи, що $I_{еф} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ і $U_{еф} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$, співвідношення (14.7.3) набуде вигляду:

$$P = I_{еф} U_{еф} \cos \varphi . \qquad (14.7.4)$$

Як бачимо у вираз потужності змінного струму входить множник $\cos\varphi$, який називається *коефіцієнтом потужності.*

Очевидно, якщо споживачем електричної енергії змінного струму є, наприклад, чисто індуктивний опір, то зсув фаз між коливаннями сили струму на напруги становить $\varphi = \pi/2$, а $\cos\varphi = 0$ і такий "споживач" з нульовою потужністю не споживає електричної енергії якими би великими не були значення сили струму та напруги. У цьому випадку кількість енергії, яку передає джерело змінного струму за четверть періоду в зовнішнє коло, в точності дорівнює енергії яку цей "споживач" віддає джерелу змінного струму. Але врахуйте, що до такого "споживача" струм підводиться провідниками з активним опором і цей струм "туди-сюди" не виконуючи ніякої корисної роботи нагріває підвідні провідники. Звичайно, це ідеальна картина марнотратства електроенергії. Але в реальних електричних мережах завжди присутні реактивні опори, які приводять до деякого зсуву фаз між коливаннями сили струму і напруги та до непотрібних втрат енергії. Тому в промислових мережах є спеціальна "служба $\cos\varphi$", адже згідно затверджених норм найменш допустиме значення коефіцієнту потужності дорівнює 0,85. Особливо до зсуву фаз причетні електродвигуни, обмотки яких є по суті індуктивностями і якщо електродвигун працює в режимі марного ходу, то споживаючи струм він не виконує корисної роботи та зумовлює значне зменшення $\cos\varphi$.

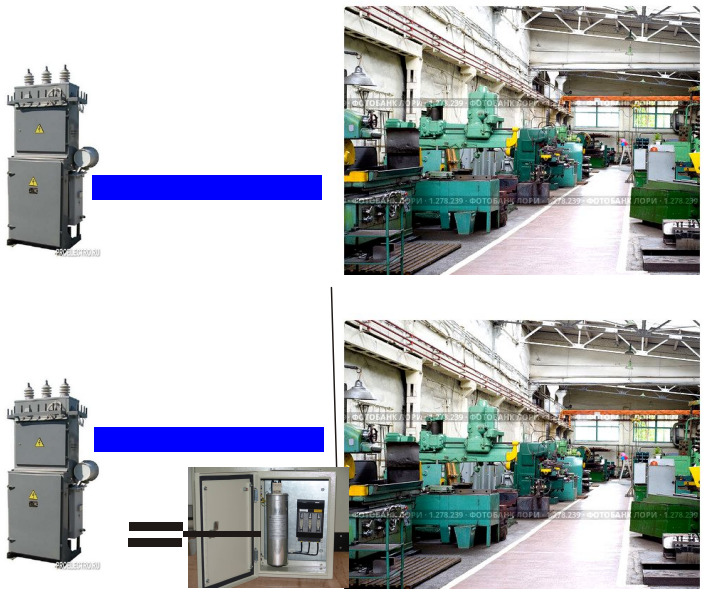


Рисунок 14.7.1

Рисунок 14.7.1 ілюструє один з шляхів збільшення коефіцієнту потужності в промисловій електромережі, яка від розподільчої трансформаторної підстанції 1 живить промисловий цех 2 з обладнанням, що приводиться в рух електричними двигунами. Оскільки обмотки двигунів як індуктивності зумовлюють певний зсув фаз між коливаннями сили стуму та напруги, то струм в підвідній лінії до цеху

складається з активної (корисної) та реактивної (не корисної) складових. Якщо активна складова крім виконання корисної роботи (приводить у рух верстати в механічному цеху) і все ж таки нагріває провідники лінії (від цього нікуди не дінешся), то реактивна складова нічого "не крутить", але йдучи по провідникам туди-сюди нагріває їх – ось в чому шкодить зсув фаз між коливаннями сили струму та напруги Тому, для зменшення реактивного опору і підвищення $\cos\varphi$, вмикають паралельно відповідно розрахований конденсатор C, який називається косинусним або компенсуючим.

14.8 Передавання електричної енергії .Трансформатори

Передавання електричної енергії від джерела до споживача завжди супроводжується певними втратами цієї енергії. В основному ці втрати зумовлені тепловою дією струму в провідниках ліній електропередач і ці втрати згідно закону Джоуля-Ленца $Q = I^2Rt$ пропорційні опору лінії та квадрату сили струму. Оскільки потужність струму $P = IU$, то зменшення таких втрат за рахунок зменшення сили струму можна досягти відповідним збільшенням

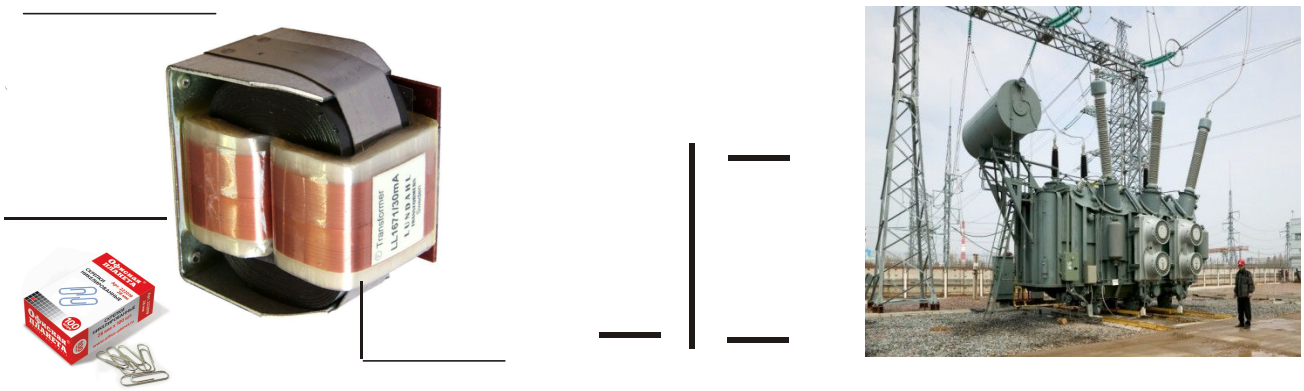


Рисунок 14.8.1

напруги. Таке збільшення напруги змінного струму здійснюється за допомогою трансформаторів (від лат. *transformo* — перетворювати).

Трансформатор складається з двох або декілька обмоток ізольованого провідника, намотаних на замкнуте феромагнітне осердя (рис.14.8.1а).

Одна з обмоток називається первинною, а друга – вторинною. Первинна обмотка приєднується до джерела змінного струму, а вторинна – до споживачів електроенергії. Позначення трансформатора на електричних схемах показано на рис.14.8.1б. Конструктивно в багатьох трансформаторах вторинна обмотка розташовується поверх первинної. Можливі інші конструктивні особливості трансформаторів, наприклад, так звані ЛАТРи (лабораторні автотрансформатори) – трансформатори з однією обмоткою, де роль первинної обмотки виконує частина всієї обмотки, а інша частина – вторинної). Нарешті потужні високовольтні трансформатори лінії електропередач – це складні інженерні конструкції (рис.14.8.1в).

А тепер розглянемо сам механізм трансформації, як і чому трансформатор збільшує або зменшує напругу змінного струму?

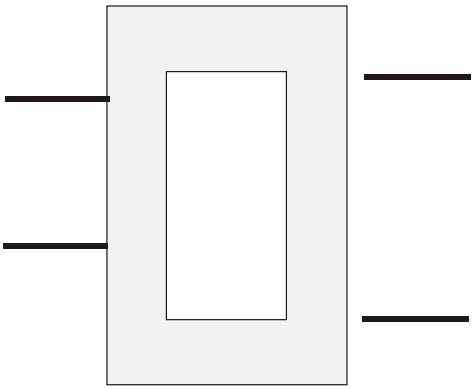


Рисунок 14.8.2

Нехай первинна обмотка має n_1, а вторинна n_2 витків (рис.14.8.2). Якщо на первинну обмотку подати змінну напругу U_1, то в результаті змінний струм первинної обмотки створює в осерді трансформатора змінний магнітний потік, який змінюється за гармонічним законом

$$\Phi = \Phi_0 \sin \omega t \,. \qquad (14.8.1)$$

Зміна цього магнітного потоку викликає появу в первинній обмотці ЕРС самоіндукції

$$\varepsilon_1 = -n_1 \frac{d\Phi}{dt} \,, \qquad (14.8.2)$$

а у вторинній обмотці ЕРС індукції

$$\varepsilon_2 = -n_2 \frac{d\Phi}{dt} \,. \qquad (14.8.3)$$

Якщо активні опори первинної та вторинної обмоток становлять R_1 та R_2, то згідно закону Ома відповідні напруги на кінцях первинної і вторинної обмоток будуть дорівнювати:

$$U_1 = I_1 R_1 - \varepsilon_1 = I_1 R_1 + n_1 \frac{d\Phi}{dt}, \qquad (14.8.4)$$

$$U_2 = I_2 R_2 - \varepsilon_2 = I_2 R_2 + n_2 \frac{d\Phi}{dt}, \qquad (14.8.5)$$

де I_1 та I_2 – значення сил струмів у первинній та вторинній обмотках. У випадку ненавантаженого трансформатора (так званий даремний хід) струм у вторинній обмотці відсутній ($I_2 = 0$). Оскільки первинні обмотки в трансформаторах мають незначний активний опір, то незначним буде і сила струму, тобто першим доданком в рівнянні (14.8.4) можна нехтувати. Тоді з рівнянь (14.8.4) та (14.8.5) отримуємо відношення:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{n_2}{n_1} = k, \qquad (14.8.6)$$

де k – коефіцієнт трансформації. Трансформатор для якого $k > 1$ – називається підвищувальним, а при $k < 1$ – трансформатор знижувальний. Наприклад, міські трансформаторні підстанції знижують напругу з 10 000 В до 220 В.

Режим робочого ходу трансформатора полягає в тому, що його вторинна обмотка під'єднана до споживача електроенергії і тепер в такому замкнутому колі протікає електричний струм силою I_2, який своїм магнітним полем призводить до зміни магнітного поля первинної обмотки і тим самим спричинює в ній струм силою I_1. Коефіцієнт корисної дії технічних трансформаторів досить високий і досягає 95%. Тому можна вважати, що потужності струму в первинній та вторинній обмотці однакові – $I_1 U_1 = I_2 U_2$, звідси

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{n_2}{n_1} = k \qquad (14.8.7)$$

і якщо така трансформаторна підстанція ненавантажена (струм у вторинній обмотці відсутній), то у режимі марного ходу трансформатор підстанції зумовлює значний зсув фаз між коливаннями струму та напруги.

14.9 Трифазний струм. Обертове магнітне поле

Розглянемо, що являє собою трифазний струм, як його отримати та довести до споживача електроенергії.

Принципова схема будови генератора трифазного струму показана на рис.14.9.1. Такий генератор має три обмотки, які розташовані по колу і зміщені одна від одної на 120^o. При обертанні ротора (магніту) в кожній з обмоток виникає змінна ЕРС електромагнітної індукції так, що різниця їх фаз коливань відрізняється на $\frac{2}{3}\pi$. Наприклад, якщо вважати, що в першій обмотці коливання ЕРС відбуваються за законом

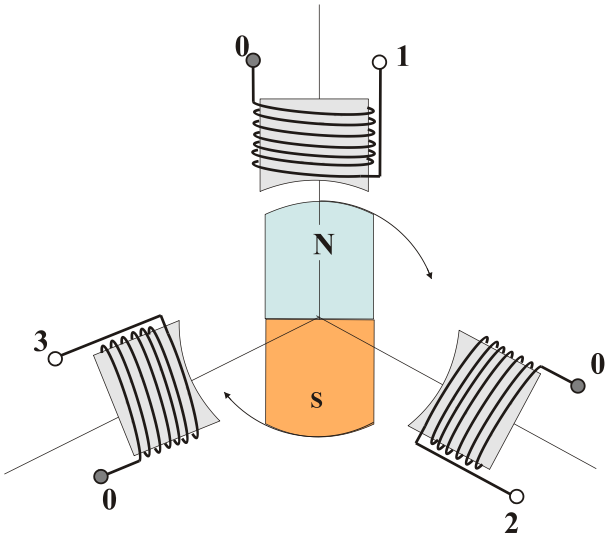


Рисунок 14.9.1

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 \sin \omega t, \qquad (14.9.1)$$

то в другій та третій обмотках згідно вказаного на рисунку напряму обертання ротора з кутовою швидкістю ω коливання ЕРС будуть відповідно відставати на $\frac{2}{3}\pi$ та $\frac{4}{3}\pi$ і тоді

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 \sin(\omega t - \frac{2}{3}\pi), \qquad (14.9.2)$$

$$U_1 = U_0 \sin(\omega t - \frac{4}{3}\pi). \qquad (14.9.3)$$

Якщо кожну обмотку під'єднати до споживача електричної енергії з відповідними опорами R_1, R_2, R_3 (рис.14.9.2), то отримаємо три узгоджених змінних струми зі сталою різницею фаз коливань цих струмів і така система змінних струмів називається трифазною або трифазним струмом.

При такому з'єднанні (рис.14.9.2а) генератора трифазного струму зі споживачами електричної енергії потрібна лінія з 6 окремих провідників. Тоді виникає питання – у чому перевага трифазного струму, адже по суті в одному генераторі працюють три генератори і для кожного генератора потрібна окрема двопровідна лінія, краще нехай працює один більш потужний генератор. А перевага ось в чому. З'єднаємо три обмотки генератора за схемою рис.14.9.2б, яка називається *з'єднанням зіркою*. При такому з'єднанні достатньо чотирьох провідників, а якщо опори споживачів будуть однаковими, то відпадає необхідність ще одного провідника ОО, який називають нульовим проводом. Напруга між фазовим та нульовим провідниками називається фазовою напругою і в наших побутових електромережах становить $U_Ф = 220\,В$, тому інколи можна почути – немає "фази", "пропала фаза" – це значить немає контакту з точкою 1 або 2 чи 3. Напруга між двома фазовими провідниками називається лінійною ($U_Л = \sqrt{3}U_Ф$) і в побутових мережах вона дорівнює 380 В.

Також можливе ще інше з'єднання, для якого достатньо лише трьох провідників для передачі електроенергії – це *з'єднання трикутником* (рис.14.9.2в). При такому з'єднанні лінійні та фазові

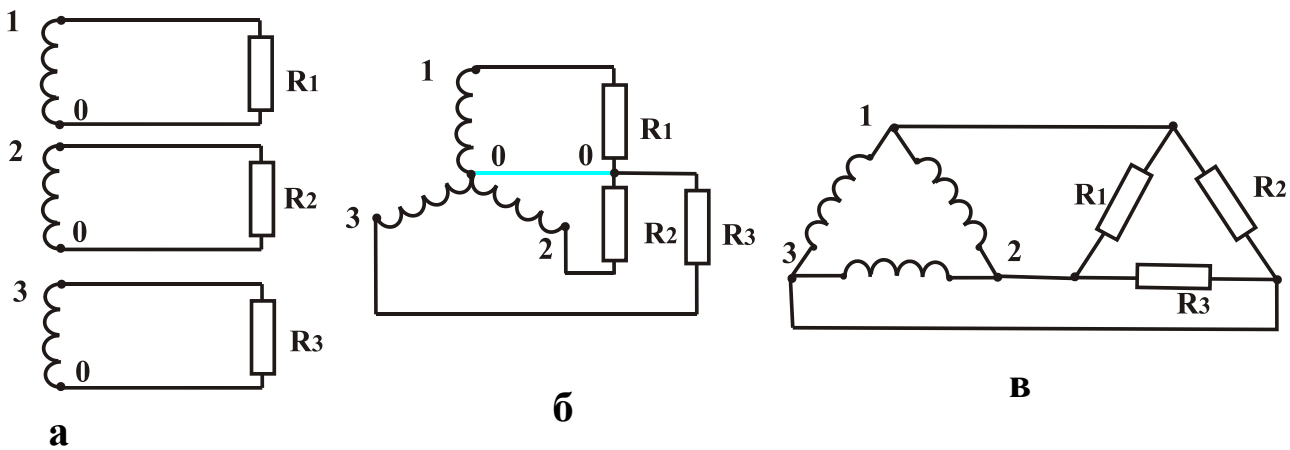


Рисунок 14.9.2

напруги однакові. Вибір того чи іншого з'єднання визначається конкретними умовами та задачами ліній електропередач.

Безсумнівною перевагою трифазного струму є можливість створення ним так званого обертового магнітного поля, яке можна отримати за принципом – "зроби все навпаки". А саме, якщо до обмоток генератора, з'єднаних, наприклад, зіркою, подати змінну трифазну напругу, то почергово через 1/3 періоду кожна котушка внаслідок протікання в ній струму стає своєрідним магнітом і все виглядає так, ніби південний (чи північній) полюси магніту рухаються по колу, тобто виникає обертове магнітне поле. Якщо всередині такого обертового магнітного поля розташувати магніт (показано на рис.14.9.3), то під дією цього поля магніт почне обертатись, тобто така система працює як електричний двигун і, зверніть увагу, немає потреби підвідних контактів (щіток) струму до ротора на відміну від електродвигунів постійного струму. На практиці рухомою обертовою частиною (ротором) трифазного двигуна (рис.14.9.4а) є залізне осердя, у пазах якого розташована обмотка у вигляді "колеса білки" (рис.14.9.4б).

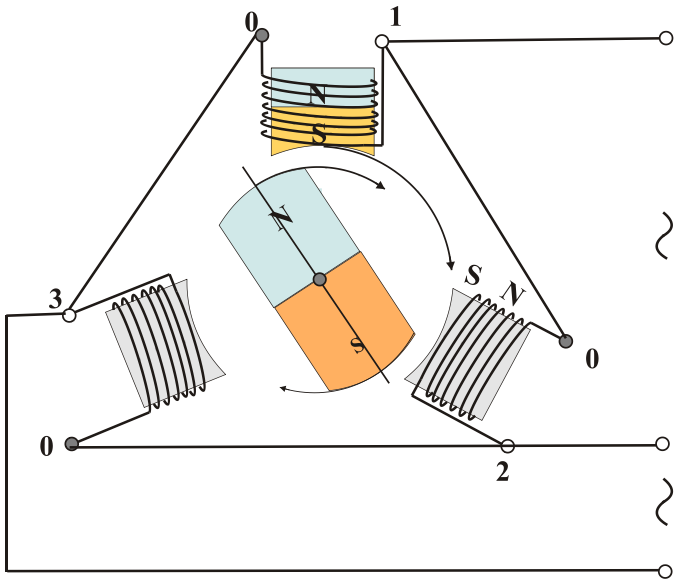


Рисунок 14.9.3

а б

Рисунок 14.9.4

Внаслідок виникнення обертового магнітного поля в обмотці ротора виникає індукційний струм, який взаємодіє з магнітним полем статора (магнітним полем обмоток) в результаті чого ротор обертається. Електричний трифазний двигун такого типу називається асинхронним (з лат. синхронний – одночасний, асинхронний – неодночасний). Стосовно такого електродвигуна це

означає, що обертання ротора відбувається неодночасно з обертанням магнітного поля.

Асинхронні двигуни трифазного струму відзначаються простотою будови, мають добрі механічні характеристики і тому вони отримали надзвичайно широке практичне застосування.

Контрольні запитання

1 *Який принцип роботи генератора змінного струму і яка його будова?*
2 *Як вивести формулу ЕРС генератора змінного електричного струму?*
3 *Якими і в яких країнах є найбільш поширені частоти промислового змінного струму?*
4 *Який струм називається квазістаціонарним і яка умова квазістаціонарності змінного струму?*
5 *Чому і як вводяться поняття ефективного значення сили змінного струму?*
6 *У чому полягає метод векторних діаграм який застосовується в електротехніці?*
7 *Що таке активний опір і яка векторна діаграма для кола змінного струму з таким опором?*
8 *Які фізичні процеси та чому ці процеси зумовлюють відставання коливань струму від напруги у колі змінного струму з індуктивністю? Як довести, що це відставання за фазою становить* $\pi/2$ *і яка у цьому випадку векторна діаграма?*
9 *Як показати, що індуктивність у колі змінного струму є реактивним опором і яке значення цього опору?*
10 *Які фізичні процеси та чому ці процеси зумовлюють випередження коливань струму відносно напруги в колі змінного струму з електроємністю. Як довести, що це випередження*

за фазою становить $\pi/2$ *і яка у цьому випадку векторна діаграма?*
11 *Як показати, що електроємність у колі змінного струму є реактивним опором і яке значення цього опору?*

12 *Який вигляд має векторна діаграма для кола змінного струму з активним опором, індуктивністю та ємністю і як з цієї діаграми визначити повний опір кола (імпеданс), отримати закон Ома для такого кола та визначити зсув фаз між коливаннями сили струму та напруги?*

13 *У чому полягає явище резонансу напруг, яка при цьому електрична схема з'єднання елементів кола, яка умова резонансу та яка векторна діаграма резонансу напруг?*

14 *У чому полягає явище резонансу струмів, яка при цьому електрична схема з'єднання елементів кола, яка умова резонансу та яка векторна діаграма резонансу струмів?*

15 *Чому, визначаючи роботу і потужність змінного струму, необхідно враховувати зсув фаз між коливаннями сили струму та напруги і за якою формулою визначається ця робота чи потужність з врахуванням такого зсуву фаз?*

16 *Чому в промислових електромережах необхідні спеціальні методи зменшення зсуву фаз між коливаннями сили струму і напруги?*

17 *Чому в лініях електропередач доцільно струм передавати при високих напругах?*

18 *Який принцип роботи та будова трансформатора і що таке його коефіцієнт трансформації?*

19 *Що таке трифазний струм і яка будова генератора трифазного струму? Які переваги застосування трифазного струму?*

20 *У чому полягає з'єднання обмоток генератора змінного струму "зіркою" та "трикутником"?*

21 *Чому і як за допомогою трифазного змінного струму можна отримати обертове магнітне поле і як на основі цього явища працює асинхронний електродвигун?*

ЧАСТИНА V ХВИЛІ

Розділ 15 Механічні хвилі

15.1 Поширення хвиль у пружному середовищі

Поняття про хвилі зазвичай асоціюється з коливанням поверхні води. Що ми при цьому бачимо? Бачимо, що поверхня води здійснює коливання – вверх-вниз (човен гойдається на хвилі), а сама хвиля, її гребень рухається в певному напрямі як це показано на рис.15.1.1. Наведений приклад є прикладом хвилі пружності.

Рисунок 15.1.1

Пружні хвилі — це збурення, що поширюються в твердих, рідких і газоподібних середовищах. При поширенні хвилі не відбувається переносу речовини, її частинки коливаються поблизу положення рівноваги. Спільною рисою для пружних хвиль є те, що силовим фактором, що забезпечує повернення частинки середовища в положення рівноваги є сили пружності. Залежно від напряму коливань частинок середовища по відношенню до напряму поширення, хвилі розрізняють ***поперечні та повздовжні хвилі.*** У поперечній хвилі частинки середовища коливаються перпендикулярно до напряму поширення хвилі, наприклад, хвилі на поверхні рідини. Наочним прикладом поперечних хвиль є хвилі, що поширюються при коливаннях лінійних елементів, наприклад у вигляді шнурів чи струн (рис.15.1.2). Так, на пружному шнурі, на рівних відстанях $1/4$ довжини хвилі закріпимо і пронумеруємо невеликі кульки. Оскільки координати кульок визначаються координатою x, то зміщення кульок від положення рівноваги позначимо буквою ξ (ксі – гр. алфавіт) і в подальшому цією буквою

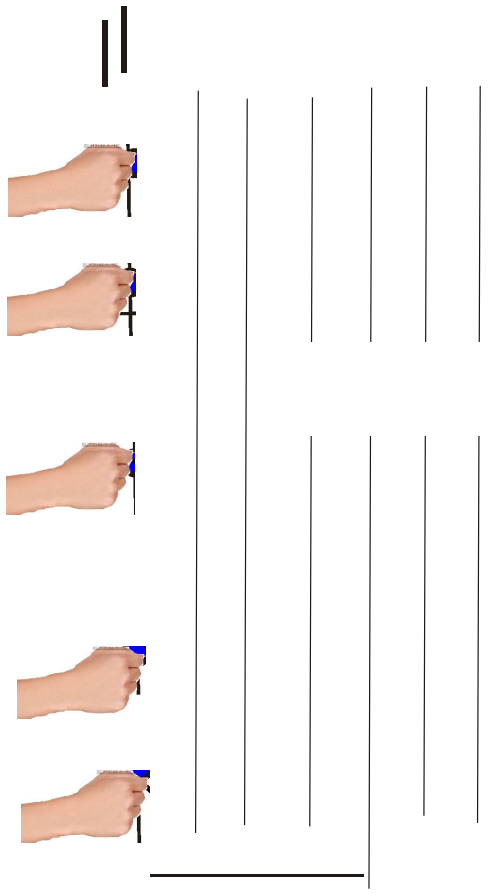


Рисунок 15.1.2

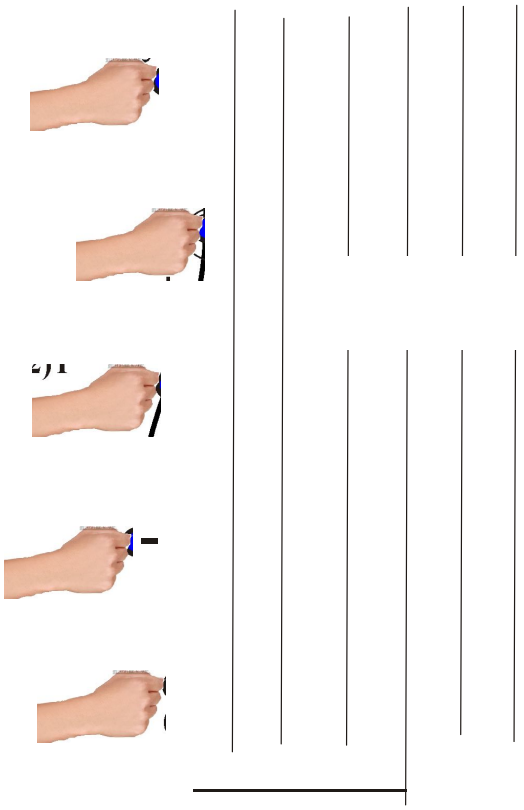


Рисунок 15.1.3

будемо позначати зміщення точок від положення рівноваги в інших хвилях. Почнемо рукою приводити в коливання кульку 1 (лівий кінець шнура). Через $1/4$ періоду кулька 1 досягне крайнього верхнього зміщення від положення рівноваги, тобто досягне максимального (амплітудного) значення ξ_{max} і внаслідок сил пружності шнура кулька 2 почне зміщуватись від положення рівноваги. Ще через четверть періоду перша частинка (кулька) буде проходити положення рівноваги, рухаючись зверху вниз, друга частинка досягає крайнього верхнього положення, а третя частинка починає рухатись вгору з положення рівноваги. В момент часу рівний періоду T перша частинка закінчить повний цикл коливання і хвиля за цей час, пройшовши зі швидкістю v відстань $v \cdot T$, досягне точки 5 і т.д., тобто вздовж шнура поширюється біжуча поперечна хвиля.

У повздовжніх хвилях частинки середовища коливаються в напрямі поширення хвилі.

Рисунок 15.1.3 ілюструє поширення повздовжньої хвилі, наприклад, кульки з'єднані пружинками (на рис. пружинки не

показані, оскільки роль таких пружинок можуть виконувати в тілі сили пружності). Усі міркування, які стосуються поведінки в раніше розглянутій поперечній хвилі, можна перенести для повздовжньої хвилі, замінивши змішення "вверх-вниз" зміщенням "вправо-вліво".

З рисунку 15.1.3 видно, що поширення повздовжньої хвилі створюється послідовними згущеннями та розрідженнями (місця згущення частинок обведені).

Найменша відстань між частинками хвилі, які коливаються в однакових фазах або відстань, яку проходить хвиля за час рівний періоду коливань, називається довжиною хвилі і позначається λ:

$$\lambda = vT,$$

де v – фазова швидкість хвилі, швидкість поширення фази коливань або швидкість руху всієї синусоїди. Якщо в середовищі поширюється група хвиль, яка є багаточастотна за складом, то визначають так звану групову швидкість хвилі, швидкість руху цілої групи і тоді фазова швидкість може бути більшою групової швидкості. Фізичне явище, що зумовлює таку різницю є дисперсія хвиль. Залежність швидкості хвиль у даному середовищі від частоти коливань називається *дисперсією* і таке явище буде розглянуте в розділі "Хвильова оптика" наступної книги курсу фізики. А поки що, розглядаючи хвилі пружності та в подальшому електромагнітні хвилі як монохроматичні хвилі (хвилі однієї частоти), під терміном швидкість хвилі будемо розуміти її фазову швидкість.

Коливання, які поширюються від їх джерела, з часом охоплюють все нові та нові частини простору. Геометричне місце точок до яких у даний момент часу дійшли коливання називається ***фронтом хвилі або хвильовим фронтом***. Геометричне місце точок які коливаються в однакових фазах називається ***хвильовою поверхнею.*** Отже, хвильових поверхонь існує скільки завгодно багато, в той час як хвильовий фронт тільки один, а тому зазвичай графічно зображають лише фронт хвилі який може бути різної форми. В найпростіших випадках – це сферичний, циліндричний та плоский фронт хвиль (рис.15.1.4). Так, у випадку точкового джерела коливань (осцилятора) фронт хвилі є сферою (рис.15.1.4а), а наочним прикладом кругового фронту є круги на поверхні води які утворюються поплавком – осцилятором (рис.15.1.4а′).

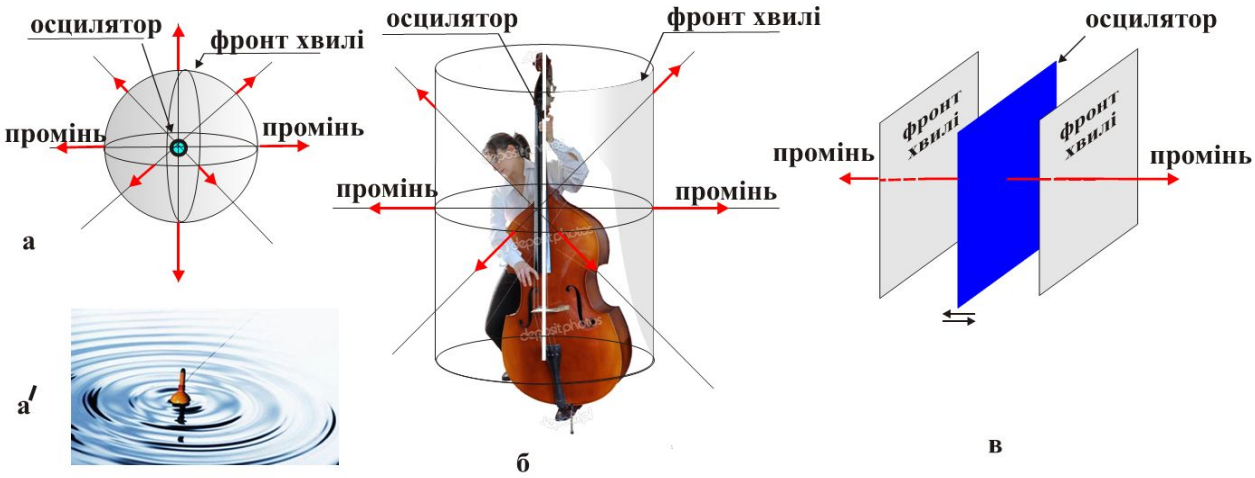


Рисунок 15.1.4

Якщо ж осцилятором є лінійний елемент, наприклад струна контрабасу, то фронт хвилі (у даному випадку звуку) є циліндричною поверхнею (рис.15.1.4б). Близьким до плоского фронту хвилі є фронт хвилі утворений деякою площиною на невеликій відстані від неї (рис.15.1.4в), але навіть елемент сферичного чи циліндричного фронту хвилі великого радіусу можна вважати елементом плоского фронту хвилі. В усіх випадках ***напрям поширення хвилі визначається променем*** (перпендикуляром до фронту хвилі).

15.2 Рівняння плоскої хвилі

Якщо в пружному середовищі привести в коливання одну частинку цього середовища, то виникне біжуча хвиля і з часом все більше частинок середовища будуть коливатись подібно але трохи пізніше від джерела коливань і це запізнення залежить як далеко знаходяться точки середовища від джерела коливань, тобто від їх координат x, y, z. Отже, якщо позначити через ξ зміщення частинок середовища в якому поширюється хвиля, то це зміщення буде залежати як від часу t, так і від координат частинок та описується рівнянням

$$\xi = \xi(x, y, z, t). \qquad (15.2.1)$$

Встановимо вигляд цього рівняння у найпростішому випадку плоскої хвилі, тобто такої, де хвильові поверхні або фронт хвилі є площина. Для спрощення спрямуємо вісь координат так, щоб вісь x

співпадала з напрямом поширення хвилі. Тоді хвильові поверхні будуть перпендикулярними до осі x і оскільки всі точки хвильової поверхні коливаються однаково, то зміщення ξ буде залежати тільки від x та t.

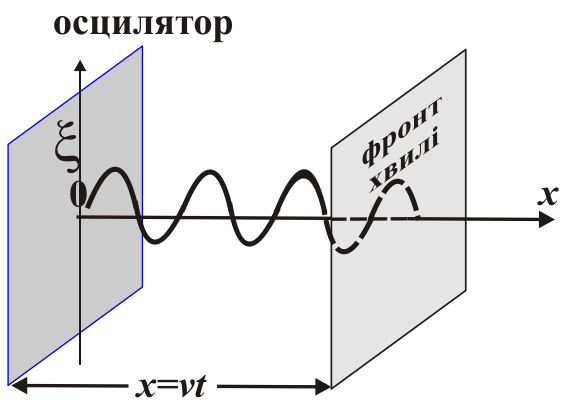


Рисунок 15.2.1

Нехай коливання точок які лежать в площині $x = 0$ (рис.15.2.1) відбуваються за гармонічним законом

$$\xi_{(0,t)} = A\cos(\omega t + \varphi_0) \quad (15.2.2)$$

(в принципі рівняння можна записати і через функцію синуса, але ми надаємо перевагу косинусу завдяки його парності).

За час τ фронт хвилі пройде відстань $x = v \cdot \tau$ і всі точки цього фронту з координатою x почнуть коливатись за гармонічним законом (15.2.2), але пізніше на час τ ніж коливання в площині $x = 0$, тобто

$$\xi_{(x,t)} = A\cos[\omega(t-\tau)+\varphi_0] = A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\varphi_0\right]. \quad (15.2.3)$$

Отже, рівняння плоскої хвилі як поперечної, так і повздовжньої що поширюється в одному напрямі, наприклад осі x, має такий вигляд:

$$\xi_{(x,t)} = A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\varphi_0\right]. \quad (15.2.4)$$

Враховуючи, що $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, а $v \cdot T = \lambda$, будемо мати:

$$\xi_{(x,t)} = A\cos\left[\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)+\varphi_0\right]. \quad (15.2.5)$$

$\frac{2\pi}{\lambda}$

Величина λ називається хвильовим числом k, яке дорівнює кількості довжин хвиль λ (в метрах), що вкладаються на відрізку довжиною 2π метрів. Враховуючи, що $\lambda = \mathrm{v} \cdot \mathrm{T}$, а $\frac{2\pi}{T} = \omega$, то

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{\mathrm{v}}. \qquad (15.2.6)$$

Увівши хвильове число, рівняння плоскої хвилі запишеться у такому вигляді:

$$\xi_{(x,t)} = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0). \qquad (15.2.7)$$

Рівняння хвилі, що поширюється у протилежному напрямі від початку відліку відрізняється від рівняння (15.2.7) тільки знаком біля kx. Що стосується амплітуди A коливань частинок в плоскій хвилі, то у відсутності поглинання енергії хвилі середовищем амплітуду коливань можна вважати сталою.

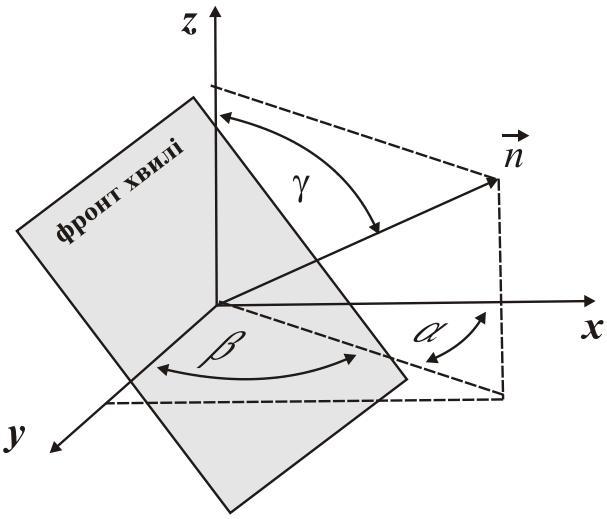


Рисунок 15.2.2

Можна показати, що рівняння плоскої хвилі, яка поширюється у просторі у довільному напрямі який утворює з осями координат x, y, z кути α, β, γ (рис.15.2.2), має такий вигляд:

$$\xi_{(x,t)} = A\cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \varphi_0), \qquad (15.2.8)$$

де

$$k_x = \frac{\omega}{\mathrm{v}}\cos\alpha, k_y = \frac{\omega}{\mathrm{v}}\cos\beta, k_z = \frac{\omega}{\mathrm{v}}\cos\gamma.$$

15.3 Хвильове рівняння

В розділі 13.1 було показано, що рівняння $\xi = A\sin(\omega t + \varphi_0)$ гармонічного коливання будь-якого осцилятора є розв'язком диференціального рівняння $\frac{d^2\xi}{dt^2} + \omega^2\xi = 0$. Тоді рівняння хвилі $\xi = \xi(x, y, z, t)$ теж повинно бути розв'язком деякого диференціального рівняння яке називають *хвильовим.* Щоб встановити вигляд хвильового рівняння скористаємось аналогічним методом яким виводили диференціальне рівняння гармонічних коливань (див. вивід формули 13.1.9), беручи другу похідну від рівняння коливань. Для цього двічі продиференціюєм функцію 15.2.8 по кожній змінній:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \varphi_0) = -\omega^2\xi \quad , \qquad (15.3.1)$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = -k_x^2 A\cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \varphi_0) = -k_x^2\xi \quad , \qquad (15.3.2)$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} = -k_y^2 A\cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \varphi_0) = -k_y^2\xi \quad , \qquad (15.3.3)$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = -k_z^2 A\cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \varphi_0) = -k_z^2\xi \quad . \qquad (15.3.4)$$

Склавши похідні за координатами, отримаємо:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)\xi = -k^2\xi \quad . \qquad (15.3.5)$$

Визначивши з (15.3.1) $\xi = -\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$ та підставивши в (15.3.5), будемо мати:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{k^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad . \tag{15.3.6}$$

Оскільки $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ та $\omega = \frac{2\pi}{T}$, то $\left(\frac{k}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{T}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{1}{\frac{\lambda}{T}}\right)^2 = \frac{1}{v^2}$, і тоді отримуємо рівняння

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad , \tag{15.3.7}$$

яке називається ***хвильовим рівнянням***, а використовуючи оператор Лапласа це рівняння записують у такому вигляді:

$$\Delta \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad . \tag{15.3.8}$$

Для плоскої хвилі, яка поширюється лише в одному напрямі, наприклад вздовж осі x, хвильове рівняння матиме вигляд:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad . \tag{15.3.9}$$

15.4 Енергія біжучої хвилі пружності

Усі попередні питання хвиль у пружному середовищі – це питання їх кінематики, тобто рівняннями описували зміщення точок пружного середовища у якому поширюється хвиля. Але ж хвиля переносить енергію і напевне значення цієї енергії визначається багатьма параметрами хвилі: частотою коливань, амплітудою тощо. Тому виникає питання, яка фізична величина може бути енергетичною характеристикою хвилі? Для прикладу розглянемо плоску хвилю у якій виділимо об'єм ΔV настільки малий, щоб швидкість руху частинок та деформацію в усіх точках цього об'єму можна вважати однаковими. Виділений об'єм володіє енергією ΔW і

відношення цієї енергії до об’єму ΔV визначає об'ємну густину енергії хвилі як одну з її енергетичних характеристик:

$$w = \frac{\Delta W}{\Delta V}. \qquad (15.4.1)$$

Можна довести, що миттєве значення густини енергії хвилі амплітудою A, яка поширюється в середовищі густиною ρ, дорівнює

$$w = \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0). \qquad (15.4.2)$$

Отже, середовище в якому поширюється хвиля володіє енергією і ця енергія "транспортується" хвилею від джерела коливань у різні точки середовища. Фізична величина, яка визначає кількість енергії яку хвиля переносить (транспортує) за одиницю часу через деяку поверхню, називається ***потоком енергії*** через цю поверхню. Якщо через цю поверхню за час Δt переноситься енергія ΔW, то потік енергії Φ дорівнює

$$\Phi = \frac{\Delta W}{\Delta t}. \qquad (15.4.3)$$

Оскільки площа поверхні через яку хвиля переносить енергію може бути різною, то для характеристики перенесення енергії цією хвилею в різних точках простору вводиться векторна величина $\vec{J}$, яка ***називається густиною потоку енергії.*** Ця величина чисельно дорівнює потоку енергії через поверхню одиничної площі, яка розташована у даній точці простору перпендикулярно до напряму поширення хвилі. Напрям вектора густини енергії співпадає з напрямом перенесення енергії. Отже, якщо через поверхню площею ΔS_n орієнтовану нормально до напряму поширення хвилі за час Δt переноситься енергія ΔW, то модуль густини потоку енергії дорівнює

$$J = \frac{\Delta \Phi}{\Delta S_n} = \frac{\Delta W}{\Delta S_n \Delta t}. \qquad (15.4.4)$$

Рисунок 15.4.1

Через поверхню площею ΔS_n (рис.15.4.1) за час Δt буде перенесена енергія ΔW що є в об'ємі $\Delta V = (v\Delta t)\cdot \Delta S_n$, тоді згідно рівняння (15.4.1)

$$\Delta W = w\cdot \Delta V = w(v\Delta t\cdot \Delta S_n) \quad (15.4.5)$$

Підставляючи це значення ΔW у формулу (15.4.4), отримаємо значення густини потоку енергії

$$J = w\cdot v \quad (15.4.6)$$

або у векторному вигляді

$$\vec{J} = w\cdot \vec{v}. \quad (15.4.7)$$

Такий вектор вперше ввів Н.А.Умов (російський фізик (1846-1915)) і називається ***вектором Умова***.

Оскільки згідно (15.4.2) густина енергії змінюється з часом за законам квадрата синуса, то середнє значення вектора густини потоку енергії дорівнює

$$\langle \vec{J} \rangle = \langle w \rangle \vec{v} = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 \vec{v} \quad (15.4.8)$$

і це значення визначає ***інтенсивність хвилі*** (позначається I) як фізичної величини, що чисельно дорівнює середній енергії, яку переносить хвиля за одиницю часу крізь одиницю площі поверхні перпендикулярної до напряму поширення хвилі, тобто

$$I = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 v, \quad (15.4.9)$$

а одиниця її вимірювання – $\frac{Дж}{м^2 с} = \frac{Вт}{м^2}$.

15.5 Стоячі хвилі

В розділі 1.4 йшла мова про принцип суперпозиції електричних полів, тобто в одній точці простору можуть накладатись скільки завгодно полів різної напруженості. Аналогічний принцип виконується і для хвиль, тобто в одному і тому ж середовищі можуть поширюватись та накладатись скільки завгодно хвиль і тому виникає питання – якою буде результуюча хвиля? Якщо коливання зумовлені окремими хвилями в кожній точці середовища за час спостереження відбуваються зі сталою різницею фаз, то такі хвилі називаються когерентними. При накладанні когерентних хвиль виникає явище інтерференції, за яким коливання в одних точках підсилюють, а в інших точках послаблюють одне одного. Особливий випадок інтерференції спостерігається при накладанні двох зустрічних хвиль однакової частоти та амплітуди, в результаті чого утворюються стоячі хвилі. Практично зустрічні хвилі виникають при відбиванні прямої хвилі від перешкоди. Наприклад, джерелом коливань є звукових хвиль, який відображення хвилі
відбувається від рухомого поршня в скляній трубі в якій поширюється звукова хвиля (рис.15.5.1). Щоб визначити результуюче коливання у будь-якій точці накладання таких хвиль, необхідно записати та додати рівняння прямої та відбитої хвиль. Для простоти розрахунків будемо вважати початкові фази коливань у цих хвилях рівними нулю і тоді рівняння (15.5.1) прямої та відбитої хвилі (15.5.2) запишуться у такому вигляді:

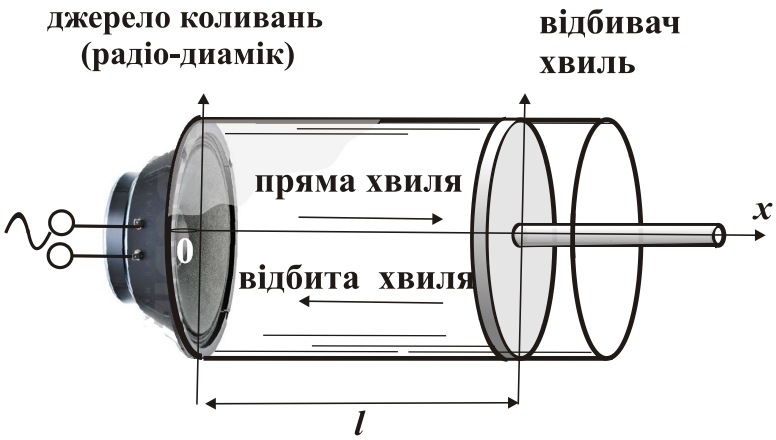


Рисунок 15.5.1

$$\xi_1 = A\cos(\omega t - kx), \qquad (15.5.1)$$

$$\xi_2 = A\cos(\omega t + kx). \qquad (15.5.2)$$

Тепер, згідно формули суми косинусів, отримаємо:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A(\cos\omega t)(\cos kx). \qquad (15.5.3)$$

Якщо ж, враховуючи що $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, надати рівнянню (15.5.3) такого вигляду як

$$\xi = \left[2A\cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \right] \cos \omega t \quad , \qquad (15.5.4)$$

то це рівняння є рівнянням гармонічних коливань частинок середовища, амплітуда коливань яких залежить від їх координат і такий стан середовища можна назвати стоячою хвилею (загальне означення стоячої хвилі буде подано дещо нижче). У точках, координати яких задовольняють умові

$$\cos 2\pi \frac{x}{\lambda} = 1 \Rightarrow \quad 2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm\pi\, n \qquad (n = 0,1.2,3,...) \quad , \qquad (15.5.5)$$

амплітуда коливань досягає максимального значення $2A$. Ці точки називаються ***пучностями*** стоячої хвилі. З (15.5.5) координати пучностей приймають такі значення:

$$x_{пучн} = \pm n \frac{\lambda}{2} \qquad (n = 0,1,2,3,...) \quad . \qquad (15.4.6)$$

В точках, координати яких задовольняють умові

$$\cos 2\pi \frac{x}{\lambda} = 0 \Rightarrow \quad 2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm\left(n + \frac{1}{2} \right)\pi \qquad (n = 0,1.2,3,...) \quad , \qquad (15.5.7)$$

коливання відсутні, їх амплітуда стає рівна нулю і такі точки називаються вузлами стоячої хвилі, а координати вузлів мають такі значення:

$$x = \pm\left(n + \frac{1}{2} \right)\pi \qquad (n = 0,1,2,3,...) \quad . \qquad (15.5.8)$$

Оскільки джерело коливань стоячої хвилі є пучністю, а відбивач хвиль є пасивним елементом, тобто вузлом стоячої хвилі, то легко переконатись, що умовою утворення стоячої хвилі на відрізку довжиною l, тобто відстанню між джерелом коливань та відбивачем хвиль, повинно вкладатись непарне число півхвиль. Отже, пересуваючи поршень як відбивач хвиль (рис.15.5.1), легко добитись умови утворення стоячої звукової хвилі, що буде відчутно збільшенням гучності звуку. Вимірюючи відстань між такими двома положеннями поршня, ми тим самим знаходимо половину довжини звукової хвилі (даний метод визначення довжини звукової хвилі описано в лабораторному практикумі з фізики).

Усі проведені розрахунки математично описують стоячу хвилю. А як вона виглядає, яка відмінність від біжучої хвилі? Розрізнити ці два види хвиль можна порівнюючи послідовність миттєвих "картинок" за різні проміжки часу, наприклад, через четверть періоду (ілюструє рисунок 15.5.2). Зверніть увагу, у вибраний момент часу $t = 0$ "миттєві картинки" біжучої та стоячої хвилі однакові. Через четверть періоду біжуча хвиля перемістилась на четверть довжини хвилі, переміщається фаза коливань і переміщається вся синусоїда як жорстке ціле (рис.15.5.2а). За той же час синусоїда біжучої хвилі "зникла" завдяки тому, що частинки середовища які були "зверху", пішли "вниз", а ті що були "внизу", пішли вгору. Ще через четверть періоду "картинки" біжучої та стоячої хвиль однакові. Але якщо в біжучій хвилі відбувається переміщення фази коливань (переміщення синусоїди), то у стоячій хвилі відсутнє просторове переміщення фаз коливань і відповідно відсутнє перенесення енергії. Отже, стояча хвиля – особливий стан пружного середовища у якому коливання всіх частинок не зумовлюють переміщення фази коливань

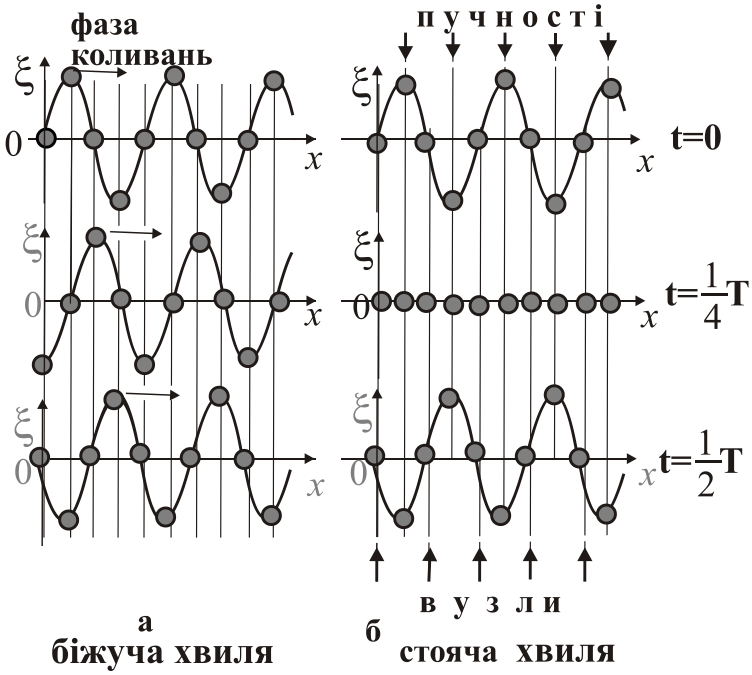


Рисунок 15.5.2

та існують точки у яких амплітуда коливань приймає максимальне значення (пучності стоячої хвилі) і точки, де амплітуда коливань дорівнює нулю (вузли). На відміну від біжучої хвилі стояча хвиля не переносить енергії.

15.6 Звук та його характеристики

У вузькому значені під звуком розуміють хвилі пружності які сприймаються органами чуттів людини та іншими видами живого світу. Людське вухо сприймає звук як коливання в діапазоні частот від 16 Гц до 20000 Гц. Чим більша частота звукових коливань (його об'єктивна характеристика), тим звук вищий (суб'єктивна характеристика). Природа створила унікальний орган відчуття звуку – вухо. В людському вусі є 30000 так званих волоскових клітин – резонаторів (див. явище резонансу, розділ 13.7), які відгукаються лише на одну частоту – перша клітина "чує" звук 16*Гц*, друга 17*Гц* і т.д. У людей з так званим абсолютним музикальним слухом ще більш "гостре" налаштування цих резонаторів. Якщо говорять "ведмідь чи слон наступив на вухо", то природа не "подбала" про чітку настройку резонаторів у вусі цієї людини, але це не біда, не всім же бути видатними композиторами, музикантами чи співаками. Вухо людини інформує мозок про такі основні параметри звуку, як частоту та інтенсивність. В додаток до цього існує ще одна важлива бінауральна інформація – завдяки наявності двох вух ми відчуваємо об'ємний, так званий стереозвук.

Людське вухо найбільш чутливе в інтервалі частот від 1000 до 4000*Гц* і поріг чутності, тобто інтенсивність звуку який ще можна почути, становить $10^{-12}\ Вт/м^2$. За інтенсивності порядку $10\ Вт/м^2$ звукова хвиля перестає сприйматись як звук, а лише викликає больові відчуття. Отже, діапазон інтенсивностей звуку який сприймає наше вухо складає $10^{-12} - 10^{1}\ Вт/м^2$, тобто вухо якимось чином повинно розрізняти звуки інтенсивності яких відрізняються в мільйон мільйонів раз. Але тут природа "спресувала" цей широкий діапазон інтенсивностей звуку до суб'єктивного відчуття (описується психофізіологічним законом Вебера-Фехнера). Цей закон встановив німецький психофізіолог та анатом Ернст Генріх Вебер за результатами досліджень, здійснених у 1830–1834 роках. Остаточно

його сформулював Густав Фехнер (німецький фізик, філософ, засновник психофізики (1801-1887)). Стосовно звуку цей закон говорить про те, що суб'єктивне відчуття збільшення гучності звуку пропорційне логарифму збільшення його інтенсивності. На основі цього закону встановлюється рівень інтенсивності звуку L (перша буква анг. *Level* – рівень) як логарифм відношення інтенсивності I даного звуку до інтенсивності I_0 що прийнята за початкову. У даному випадку інтенсивність порогу чутності дорівнює

$$L = \lg \frac{I}{I_0}. \qquad (15.6.1)$$

Одиниця рівня інтенсивності L, яка визначається за формулою (15.6.1), називається ***белом*** (*Б*) в честь Олександра Бела ((1847-1922), вченого, винахідника і бізнесмена шотландського походження, основоположника телефонії). Зазвичай користуються в 10 раз меншими одиницями – децибелами (*дБ*) і тоді

$$L = 10 \lg \frac{I}{I_0}. \qquad (15.6.2)$$

Одиницю гучності звуку, як його суб'єктивну характеристику, визначають як гучність звукових коливань з частотою $1000 Гц$ і рівнем звукового тиску $40 дБ$ відносно порогу чутності $2 \cdot 10^{-5} Па$. Така одиниця гучності отримала назву **1*сон.*** На практиці гучність звуку прийнято характеризувати рівнем гучності в ***фонах***. Рівень гучності звуку $1000 Гц$ у фонах чисельно дорівнює рівню звукового тиску в *дБ*. Для довільного звуку його рівень гучності визначається підбором рівногучного тону $1000 Гц$ з відомим рівнем гучності. Це визначення основане на властивості людини встановлювати рівність гучності двох

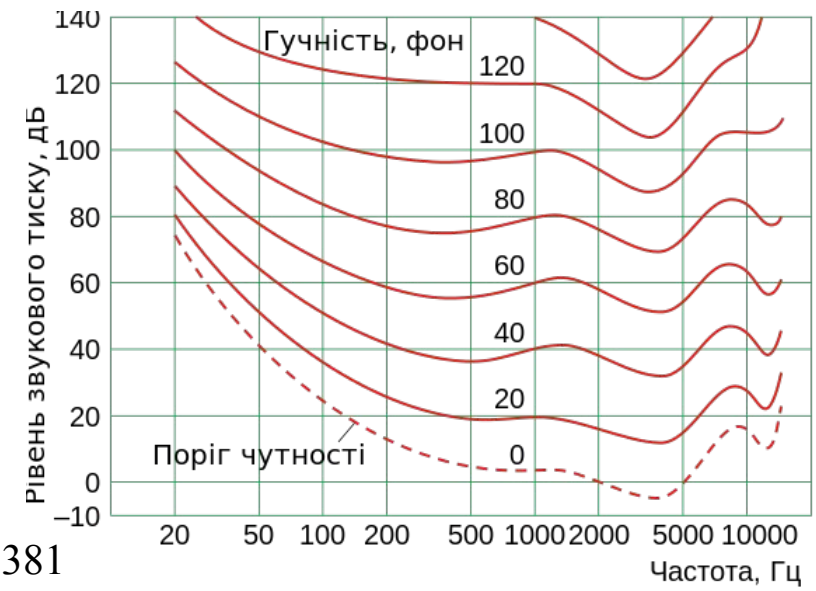


Рисунок 15.6.1

звуків. Наприклад, людина прикладає до вух два навушника, одне вухо сприймає звук невідомої гучності, а гучність звуку другого відомого навушника можна регулювати з використанням спеціального приладу який називається аудіометром (*з латинської audio - чую, metron- міра)*. На основі таких вимірювань будуються криві звуків рівної гучності в залежності від частоти звуку за різними значеннями рівня звукового тиску. Так звані стандартні криві рівних гучностей (*затверджені відповідними державними стандартами)* отримані для людей з нормальним слухом і наведені на рис.15.6.1. Як видно людське вухо найбільш чутливе для сприйняття звуків частотою ≈ 3000*Гц*. Криві рівної гучності використовують для роботи спеціальних приладів вимірювань шумів. У таблиці 15.6.1 наведені окремі значення рівнів гучності.

Таблиця 15.6.1

Джерело звуку	**Суб'єктивне відчуття звуку**	**Гучність звуку, в одиницях гучності, *сони***	**Рівень гучності звуку, *фони*(дБ)**
Тікання наручного годинника	Ледве чути	0,02	10
Тиха розмова	Досить чутно	1	40
Звичайна розмова	Таки досить чутно	4	60
Гучна розмова (1м)	Досить гучно	8	70
Крики, мотоцикл, бензопила тощо	Дуже шумно	32	90
Навушники плеєра	Таки дуже гучно – максимум за європейськими стандартами	64	100
Музика, дискотека	Надзвичайно гучно	128	110
Біля турбін літака	Невиносимо гучно, больові відчуття	256	120
При рівнях звуку більше 160 дБ можливий розрив барабанних перетинок у вусі та легень			
При рівнях звуку більше 200 дБ можливе смертельне ураження (шумова зброя)			

Швидкість звуку в газах, вважаючи їх ідеальними, можна визначити за такою формулою:

$$v = \sqrt{\frac{RT}{M}\gamma} \quad , \qquad (15.6.3)$$

де R – газова стала, T – температура газу, M – його молярна маса, $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$ відношення для даного газу.

За нормальних умов швидкість звуку в повітрі дорівнює 331 *м/с*.

В рідинах швидкість звуку значно більша, наприклад у чистій воді вона становить 1500 м/с. Ще більша швидкість звуку в твердих тілах, наприклад в залізі 5930*м/с*. Швидкість звуку в ізотропних твердих тілах можна розрахувати за такою формулою:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \qquad (15.6.4)$$

де E – модуль Юнга матеріалу тіла, ρ – його густина.

15.7 Ультразвук та його застосування

Ультразвук – це хвилі пружності з частотами більшими $20 кГц$. За частотами ультразвук умовно розділяють на три діапазони: $2 \cdot 10^4 - 10^5 Гц$ – низькі частоти; $10^5 - 10^7 Гц$ – середні частоти; $10^7 - 10^9 Гц$ – високі частоти. Звук з частотами понад $10^9 Гц$ називають гіперзвуком.

Ультразвук за своєю природою не відрізняється від звичного звуку. Однак, завдяки більш високим частотам і відповідно малим довжинам хвиль, поширення та дія ультразвуку має низку особливостей, що зумовлює його широке практичне застосування. Для отримання ультразвуку використовують різні пристрої які можна розділити на дві основні групи – механічні та електромеханічні. Механічні пристрої – це різноманітні повітряні та рідинні свистки і сирени. Так, ротаційні сирени мають камеру, яка закрита зверху лиском (статором) в якому зроблено велике число отворів. Стільки ж отворів є на диску (роторі), який обертається всередині камери. В камеру постійно подається стиснуте повітря, яке виривається з камери на ті короткі моменти коли отвори на роторі та статорі співпадають. Частота звуку в сиренах залежить від кількості отворів та швидкості обертання ротора. Такі ротаційні сирени в основному застосовуються в ультразвукових технологічних процесах . У даний час найбільш поширеними джерелами ультразвуку є електромеханічні пристрої які перетворюють електричні коливання в механічні. Для потужних джерел ультразвуку широке застосування набули магнітострикційні перетворювачі, дія яких базується на явищі магнітострикції, тобто явища зміни форм або розмірів окремих феромагнетиків під дією змінного магнітного поля. Так, на рис. 15.7.1 показаний сучасний ультразвуковий генератор УЗГ-5, де остання цифра вказує на його потужність – 5 кіловат. Магнітострикційний випромінювач ультразвуку має вигляд осердя трансформатора, осердя, яке під дією змінного магнітного поля струму від генератора

змінюючи свої розміри стає джерелом ультразвуку. В менш потужних генераторах джерелами ультразвуку є п’єзоелектри-чні перетворювачі, в яких використовується зворотній п’єзоефект – під дією електричного поля сегнетоелектрик змінює свої розміри. П’єзоелектричні випромінювачі застосовуються для генерування ультразвуку з частотами до 50*МГц*. Найбільш поширені керамічні перетворювачі з титанату барію. Внаслідок оборотності п'єзоелектричних ефектів ультразвукові випромінювачі застосовуються і для приймання ультразвуку – ультразвукові коливання перетворюється в електричні.

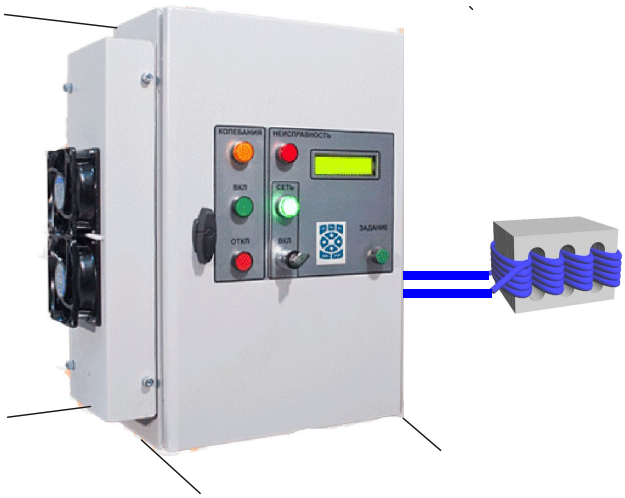


Рисунок 15.7.1

Ультразвук отримав надзвичайно широке практичне застування в різних галузях промисловості, техніки, медицини тощо, а тому лише коротко зупинимось на окремих показових прикладах застосування ультразвуку.

Ультразвукова дефектоскопія – це пошук дефектів у матеріалі виробів ультразвуковим методом, тобто шляхом випромінювання та прийняття ультразвукових коливань і подальшого аналізу їх амплітуди, часу приходу, форми за допомогою спеціального обладнання — ультразвукового дефектоскопа. Ультразвукове дослідження не руйнує і не пошкоджує зразок, що є його головною перевагою. Існує декілька методів проведення ультразвукової дефектоскопії, але найбільш поширеним є ехо-метод в якому випромінювання та прийом відбитої від дефекту ультразвукової хвилі здійснюється одним і тим же п’єзоелектричним елементом (рис.15.7.2). Від генератора електронного блока дефектоскопа надходять короткочасні високочастотні імпульси до п’єзоелектричного елементу, який відповідно випромінює в металі труби ультразвукову хвилю. В період "мовчання" генератора цей же п’єзоелемент вловлює відбиту хвилю, перетворюючи її коливання в електричні сигнали, які поступають на електронний блок

дефектоскопа і тоді на дисплеї приладу можна побачити два "піка". Перший "пік" відповідає відбиванню ультразвуку від нижньої поверхні труби, а другий пік, якщо він тільки є, відповідає дефекту металу труби.

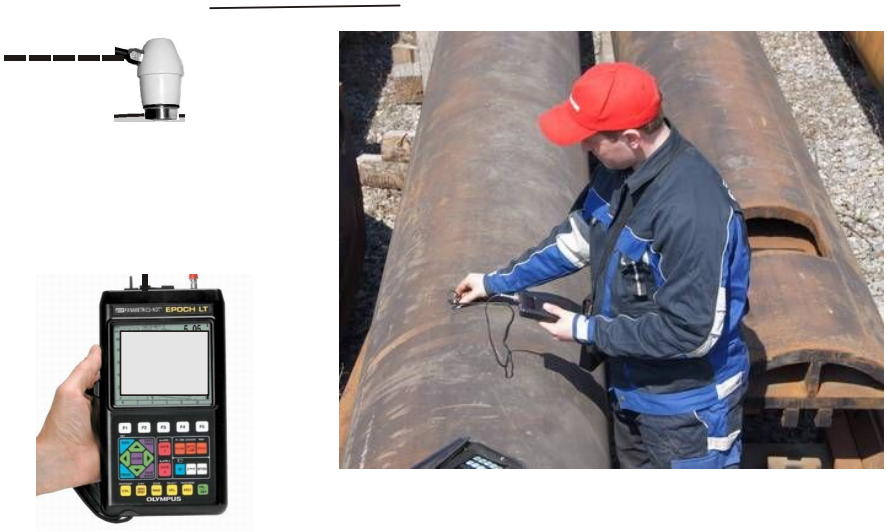


Рисунок 15.7.2

Ультразвукова обробка твердих матеріалів. Всі напевне знають як важко просвердлити отвір у склі або як складно зробити отвір у вигляді п'ятикутної зірки в твердому металі. Магнітострикційний вібратор може просвердлити отвір будь-якої форми і принципова схема такого ультразвукового свердління показна на рис.15.7.3. Ультразвукові коливання збуджуються в магнітострикторі, а насадка-вібратор передає ці коливання в рідину з величезною кількістю маленьких частинок абразивного елементу (корундовий порошок) і ці частинки при своїх коливаннях руйнують поверхню деталі, роблячи в ній необхідні отвори.

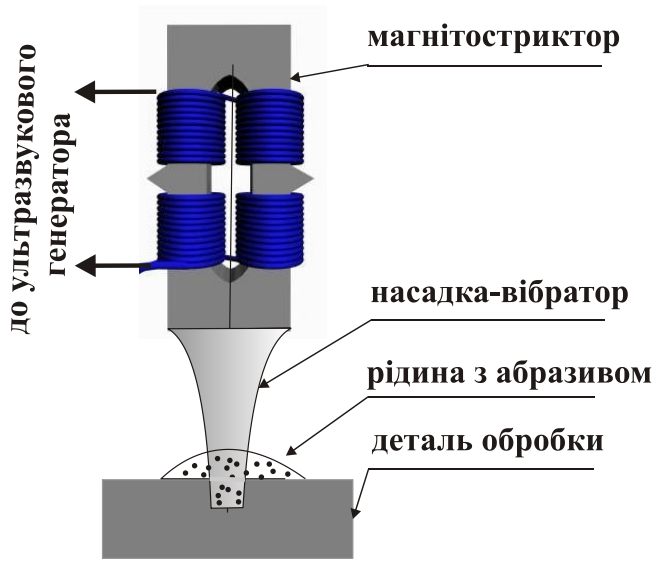


Рисунок 15.7.3

Ультразвукова очистка забруднених поверхонь нафтового і автомобільного обладнання має суттєві переваги над іншими методами, які вимагають високотоксичних, вогненебезпечних та дорогих реагентів. Замість таких реагентів використовується простий розчинник або навіть вода, в якій під дією високочастотних ультразвукових коливань відбувається явище ***кавітації,*** своєрідного

розриву рідини та утворення мікропорожнин, які потім різко зменшуються, утворюючи потужні гідропотоки що вимивають бруд.

Ультразвукове зварювання та паяння. Ультразвукове зварювання особливо великого застосування набуло при з'єднанні різноманітних полімерних матеріалів. Ультразвукові паяльники дають можливість паяти деталі з алюмінію, оскільки під дією ультразвуку руйнується оксидний шар алюмінію, який перешкоджає звичайним паяльникам нанести олово на поверхню алюмінію.

Можна було б навести ще багато прикладів практичного застосування ультразвуку, наприклад в хімії, металургії, харчовій промисловості тощо. Але особливе застосування ультразвук знайшов в медицині.

Ультразвукова діагностика (УЗД) в медицині – це по суті принцип раніше описаної ультразвукової дефектоскопії, тільки в людському організмі такими "дефектами" є його різні органи та тканини, які по різному відбивають та поглинають ультразвук. Сучасна комп'ютерна техніка та успіхи програмування дають можливість після відповідного аналізу та обробки відбитих ультразвукових сигналів отримати зображення внутрішніх органів людини, тобто створити ультразвукове бачення і якщо є якісь відхилення від нормального стану, то лікар на екрані монітора їх легко виявить. Сучасна 4D діагностика створює тривимірне кольорове зображення в реальному масштабі часу. Тут час грає роль четвертого виміру.

15.8 Ефект Доплера для звукових хвиль

Можливо їдучи автомобілем ви відчували характерний звук сигналу зустрічної машини – як тільки машини розминулись характер звуку різко змінюється. Так ось, це і є результат ефекту Доплера (австрійський фізик (1803-1853)): зміна частоти коливань або довжини хвилі яка сприймається спостерігачем при відносному русі спостерігача і джерела звукових коливань. Наприклад, нерухоме джерело коливань випромінює послідовність імпульсів з частотою так, що відстань між сусідніми імпульсами λ_0. Тоді нерухомий спостерігач буде сприймати ці імпульси як звук тієї ж довжини хвилі λ_0 або частоти ν_0 (виходимо із зв'язку між довжиною хвилі,

частотою та швидкістю v її поширення $\lambda_0 = v/\nu_0$). Якщо ж джерело коливань, на рис.15.8.1 це автомобіль швидкої допомоги з увімкненою сиреною, рухається зі швидкістю $v_{дж}$ в напрямі осі *OX* до спостерігача, то наступні імпульси "доганяють" попередні і відстань λ_1 між ними стає меншою ніж λ_0, а саме:

$$\lambda_1 = \frac{v_{звуку} - v_{дж}}{\nu_0} . \quad (15.8.1)$$

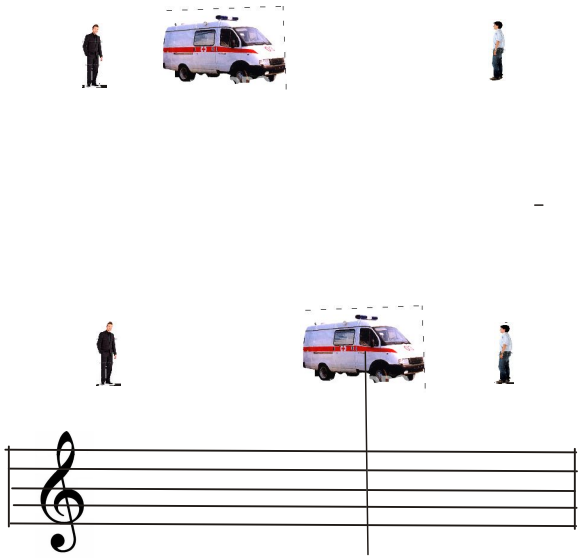


Рисунок 15.8.1

Таким чином, спостерігач **А** у даному випадку буде сприймати звук меншої довжини хвилі або більшої частоти, а суб'єктивно – звук більш високого тону. При віддаленні джерела коливань від спостерігача довжина хвилі збільшується, тобто

$$\lambda_2 = \frac{v_{звуку} + v_{дж}}{\nu_0} . \quad (15.8.2)$$

Тоді спостерігач **Б** сприймає звук більш низького тону.

В загальному випадку руху джерела звуку та його приймача, частота звуку ν', що сприймає спостерігач, дорівнює:

$$\nu' = \nu_0 \frac{v_{звуку} + v_{пр.}}{v_{звуку} - v_{дж}} . \quad (15.8.3)$$

Якщо $v_{пр} > 0$, то спостерігач (приймач) рухається до джерела звуку, якщо $v_{дж} > 0$, то джерело звуку рухається до спостерігача.

Відкритий в 19ст. ефект Доплера для звукових хвиль в останній час набув широкого практичного застосування завдяки сучасній комп'ютерній техніці. Особливу увагу заслуговує безконтактне вимірювання швидкості потоків рідин та газів, коли в цих потоках створюється ультразвукова хвиля відомої частоти і ця частота змінюється внаслідок доплерівського ефекту. Електронна система приладу визначає цю зміну, процесор приладу згідно цієї зміни розраховує швидкість потоку і видає результат у цифровому виді на дисплей приладу. Застосування ефекту Доплера дозволило надзвичайно точно визначати швидкість потоку крові в судинах людського організму.

Для електромагнітних хвиль, в тому ж числі й світла, теж має місце допплерівський ефект (про це буде йти мова в наступній книзі курсу фізики). Лише відмітимо, що так зване допплерівське "червоне зміщення", тобто зміщення довжин світлових хвиль в сторону більших довжин, дозволило встановити явище розширення Всесвіту.

15.9 Звуковий бар'єр. Ударна хвиля

На рис.15.9.1, який ілюструє ефект Доплера, довжина звукових хвиль в напрямі руху джерела звуку зменшується. А що буде, коли джерело звуку буде рухатись зі швидкістю звуку в даному середовищі? Очевидно, що згідно формули 15.8.1 коли $v_{джерела} = v_{звуку}$, довжина звукової хвилі стає рівна нулю і "картинка" звукових хвиль біля джерела звуку, тепер вже реактивного літака, матиме вигляд показаний на рис.15.9.1а. Коли ж швидкість літака стане більшою швидкості звуку, то при цьому говорять що літак подолав звуковий бар'єр, тобто ***подолання звукового бар'єру рівносильне перевищенню швидкості джерела звуку за швидкість звуку у даному середовищі.***

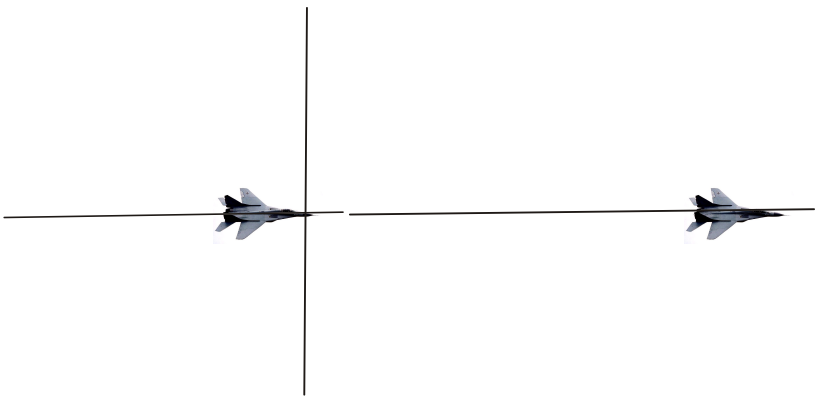


Рисунок 15.9.1

При подоланні звукового бар'єру на передньому краї тіла, що рухається з надзвуковою швидкістю, виникає ударна хвиля (рис.15.9.1б).

На фронті ударної хвилі (названої іноді

також стрибком ущільнення), що має дуже малу товщину (частки мм), відбуваються кардинальні зміни властивостей потоку — тиск в потоці і температура газу стрибком зростають. Коли ударна хвиля досягає спостерігача, який, наприклад, знаходиться на Землі, то він відчуває гучний звук подібний на вибух. Інколи помиляються, говорячи що в цей момент літак подолав звуковий бар'єр. Насправді в цей момент до спостерігача доходить ударна хвиля, яка постійно супроводжує літак в його надзвуковому польоті. Зазвичай зразу ж після такого "вибуху" чути гул двигунів літака, якого не було до проходження ударної хвилі, адже літак рухається швидше звуків які він сам створює.

Питання звукового бар’єру мають надзвичайно важливе значення для військової авіації, адже майже всі літаки у збройних силах є надзвукові. Щодо подолання звукового бар'єру, то будуть цікавими такі історичні факти:

– вперше звуковий бар’єр був подоланий в США у 1947р. на експериментальному літаку Bell X-1;

– першим пасажирським надзвуковим літаком був у 1961р. лайнер Douglas DC-8;

– у 1997р. англієць Енді Грін подолав звуковий бар’єр на автомобілі Thrust SSC;

– 14 жовтня 2012 р. Фелікс Баумгартнер став першою людиною, що подолала звуковий бар'єр без допомоги якого-небудь моторизованого транспортного засобу, у вільному падінні під час стрибка з висоти 39 кілометрів. У вільному падінні він досяг швидкості 1342,8 кілометра за годину.

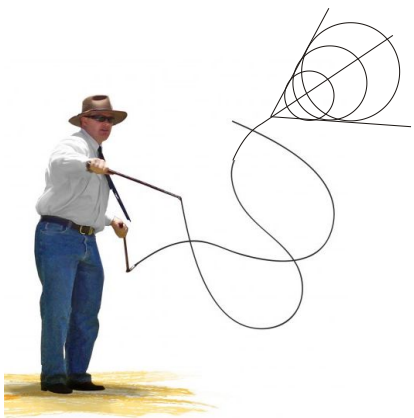


Рисунок 15.9.2

Але подолати звуковий бар'єр можна навіть в домашніх умовах і це роблять пастухи, ковбої, приборкувачі звірів і всі ті хто вправно володіє батогом. За певних навичок батіг може видавати різкі звуки, подібні до пострілів, це її є ударна хвиля яку створюю кінчик батога, рухаючись з надзвуковою швидкістю (рис.15.9.2).

Контрольні запитання

1 *Дайте означення поперечних і повздовжніх хвиль.*
2 *Як вводиться поняття фазової швидкості і довжини хвилі?*
3 *Що називається хвильовою поверхнею і фронтом хвилі та які найпростіші форми має фронт хвилі?*
4 *Як записати та пояснити рівняння плоскої хвилі?*
5 *Як записати та пояснити хвильове рівняння?*
6 *Як дати означення об'ємної густини енергії хвилі та за якою формулою визначається її миттєве значення?*
7 *Як вводиться поняття потоку енергії, густини потоку енергії і вектора Умова.?*
8 *Який фізичний зміст інтенсивності хвилі ?*
9 *Що собою являє стояча хвиля, як вона утворюється, чим характерні вузли та пучності стоячої хвилі і яка різниця графіків біжучої та стоячої хвилі?*
10 *Який інтервал частот пружних коливань людина сприймає як звук за допомогою вуха?*
11 *Як формулюється психофізіологічний закон Вебера-Фехнера щодо суб'єктивного сприйняття гучності звуку?*
12 *Як вводиться поняття рівня інтенсивності звуку та її одиниці Б (бела) та дБ (децибела)?*
13 *Як дається означення одиниці гучності 1сон?*
14 *Який вигляд мають криві звуків рівної гучності в залежності від частоти, так звані стандартні криві рівних гучностей (затверджені відповідними державними стандартами)?*
15 *Звуки якого рівня гучності у фонах викликають больові відчуття і можуть викликати травматичну дію на людину?*
16 *На які три умовні діапазони за частотами розділяють ультразвук?*
17 *Які основні методи одержання ультразвуку?*
18 *У чому полягає принцип ультразвукової дефектоскопії?*
19 *Як за допомогою ультразвуку проводиться обробка твердих матеріалів?*
20 *Як за допомогою ультразвуку проводиться очистка забруднених поверхонь і яка при цьому роль кавітації?*
21 *Який принцип та як здійснюється ультразвукова діагностика (УЗД) в медицині?*
22 *У чому полягає ефект Доплера для звукових хвиль та яке його практичне застосування?*
23 *Що таке звуковий бар'єр та ударна хвиля?*

Розділ 16 Електромагнітні хвилі

16.1 Хвильове рівняння електромагнітної хвилі

Навіть "неозброєним оком", тобто без особливої математики "глянувши" на рівняння Максвелла можна зробити висновок про існування електромагнітних хвиль – процесу поширення в просторі взаємозв'язаних електричного і магнітного полів. Так, записавши перше та друге рівняння Максвелла (рис.16.1.1), легко бачити: $1 \to 2$ – змінне магнітне поле породжує вихрове електричне поле і воно стає ($2 \to 3$) змінним електричним полем для другого рівняння Максвелла. Це змінне електричне поле породжує магнітне поле $(3 \to 4)$, яке стає $(4 \to 1)$ змінним магнітним полем для першого рівняння Максвелла і далі процес повторюється знову. Тепер необхідно кількісно описати ці процеси в просторі і часі. Але перед тим "матеріалізуємо" рівняння Максвелла, ввівши матеріальні рівняння $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$ та $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$, які враховують властивості середовища де є електричне та магнітне поля. Оскільки у даному випадку електричне поле створюється не електричними зарядами, а змінним магнітним полем, то в першій парі рівнянь треба вважати, що $div\vec{E} = 0$, а в другій парі $div\vec{B} = 0$ (відсутні магнітні заряди). Отже, "матеріалізовані" перше та друге рівняння Максвелла матимуть такий вигляд:

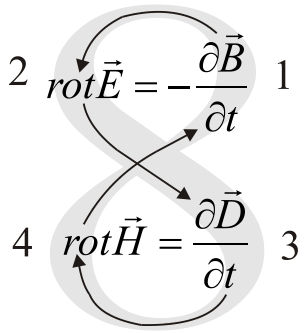


Рисунок 16.1.1

$$rot\vec{E} = -\mu_0 \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \qquad (16.1.1)$$

$$rot\vec{H} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \qquad (16.1.2)$$

Тепер вже можна пояснити процеси утворення в просторі і часі електричного поля магнітним і навпаки. Для цього застосуємо до

рівняння (16.1.1) операцію rot, яка означатиме диференціювання за координатами, тобто

$$rot(rot\vec{E}) = -\mu_0\mu\, rot\left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right). \qquad (16.1.3)$$

Змінюючи порядок диференціювання за координатами та часом, можна записати, що

$$rot\left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(rot\vec{H}\right). \qquad (16.1.4)$$

Здійснюючи цю заміну в рівнянні (16.1.3), отримаємо:

$$rot(rot\vec{E}) = -\mu_0\mu\frac{\partial}{\partial t}(rot\vec{H}). \qquad (16.1.5)$$

Підставимо в отриманий вираз значення $rot\vec{H}$ з рівняння (16.1.2), тоді

$$rot(rot\vec{E}) = -\mu_0\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \Rightarrow rot(rot\vec{E}) = -\mu_0\mu\varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \qquad (16.1.6)$$

Тепер скористаємось формулою математичної фізики $rot\,(rot\vec{E}) = grad\, div\vec{E} - \nabla^2\vec{E}$, де $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа і оскільки $div\vec{E} = 0$ (ми вже говорили – відсутні електричні заряди, немає звідки розходитись силовим лініям електричного поля а є вихрове електричне поле без електричних зарядів), то

$$rot\,(rot\vec{E}) = 0 - \nabla^2\vec{E}. \qquad (16.1.7)$$

Зіставивши записаний вираз (16.1.7) з формулою (16.1.6), отримаємо рівняння:

$$\nabla^2 \vec{E} = -\mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \qquad (16.1.8)$$

або, розписавши оператор Лапласа,

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} . \qquad (16.1.9)$$

Аналогічним шляхом можна отримати подібні рівняння для вектора $\vec{H}$ напруженості магнітного поля:

$$\nabla^2 \vec{H} = -\mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} ; \qquad (16.1.10)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} = \mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} . \qquad (16.1.11)$$

Відзначимо, що рівняння (16.1.9) та (16.1.11) нерозривно пов’язані між собою, оскільки вони отримані з (16.1.1) та (16.1.2).

Нагадаємо, що рівняння виду $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ є хвильовим рівнянням (див. розділ 15.3). Отже, отримані рівняння (16.1.9) та (16.1.11) є хвильовими рівняннями електромагнітної хвилі – сукупність змінних електричного і магнітного полів, що поширюються в просторі окремо від зарядів. Швидкість поширення електромагнітних хвиль, як випливає з їх хвильового рівняння, дорівнює:

$$\frac{1}{v^2} = \mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu}} . \qquad (16.1.12)$$

Але, підставляючи значення діелектричної проникності ε, треба мати на увазі, що значення ε в таблицях фізичних величин стосуються постійного електричного поля, а в змінному високочастотному полі воно може бути іншим. Наприклад, для води у

постійному полі приводять значення $\varepsilon = 81$, а в полі високої частоти $\varepsilon = 1{,}77$.

Для вакууму ($\varepsilon = 1, \mu = 1$) фазова швидкість поширення електромагнітної хвилі дорівнює

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{Ф}{м} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Гн}{м}}} = 3 \cdot 10^8 \frac{м}{с}.$$

Таким чином, у вакуумі швидкість електромагнітних хвиль співпадає зі швидкістю світла $c = 3 \cdot 10^8 \frac{м}{с}$, що дало Максвеллу можливість зробити висновок про електромагнітну природу світла.

Визначивши швидкість електромагнітних хвиль у вакуумі, яка дорівнює швидкості світла, формулу 16.1.12 можна записати у такому вигляді:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}. \qquad (16.1.13)$$

16.2 Плоска електромагнітна хвиля

В розділі 15.2 було розглянуто рівняння плоскої хвилі пружності, тобто такої, де хвильові поверхні або фронт хвилі є площина. Аналогічно можна ставити питання і про рівняння плоскої електромагнітної хвилі з такими ж ознаками хвильової поверхні чи фронту хвилі як і для плоскої хвилі пружності. Але якщо, розглядаючи хвилі пружності ми "йшли" від рівняння хвилі до диференціального хвильового рівняння, то тепер, маючи готові диференціальні хвильові рівняння електромагнітних хвиль (формули (16.1.9) та (16.1.11), одержимо з них як частковий випадок рівняння плоскої електромагнітної хвилі. Для цього в диференціальних рівняннях треба "забрати" дві вже непотрібні координати, залишивши, наприклад, координату x і вважаючи що в цьому напрямі поширюється плоска хвиля, то тоді хвильові рівняння приймуть простий вигляд:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}; \qquad (16.2.1)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} = \mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \qquad (16.2.2)$$

Покладаючи початкові фази коливань рівними нулю в точках, адже хвиля плоска і всі точки на фронті хвилі мають однакові координати x, тоді розв'язками цих рівнянь є відповідні рівняння плоских хвиль:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx); \qquad (16.2.3)$$

$$\vec{B} = B_0 \cos(\omega t - kx), \qquad (16.2.4)$$

де для максимальних (амплітудних) значень напруженості $\vec{E}_0$ електричного і B_0 магнітної індукції поля повинні виконуватись такі співвідношення як

$$kE_0 = \mu_0 \mu \omega H_0, \qquad (16.2.5)$$

$$\varepsilon_0 \varepsilon E_0 = kH_0, \qquad (16.2.6)$$

$k = \frac{\omega}{v}$ та хвильове число v. Справедливість розв'язків можна перевірити, взявши другі частинні похідні за координатою x і часом t та підставивши їх у хвильові рівняння.

Зі співвідношень (16.2.5) та (16.2.6) випливає важливий висновок щодо амплітудних значень напруженості електричного та магнітного полів в електромагнітній хвилі. Так, перемноживши ці співвідношення, отримаємо:

$$\varepsilon_0 \varepsilon E_0^2 = \mu_0 \mu H_0^2 \Rightarrow E_0 \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} = H_0 \sqrt{\mu_0 \mu}. \qquad (16.2.7)$$

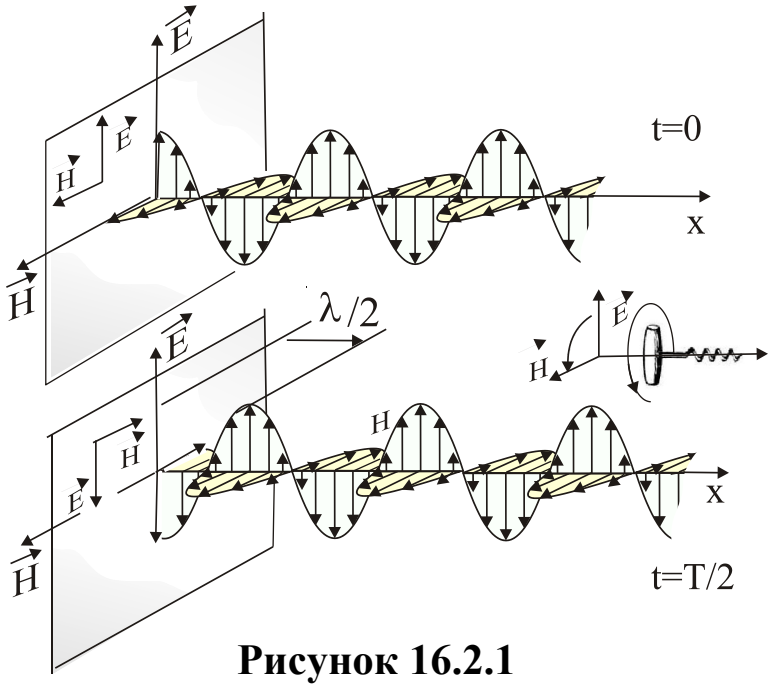


Рисунок 16.2.1

На рис.16.2.1 показані "моментальні фотографії" плоскої електромагнітної хвилі, тобто як у даний момент часу "завмерли" вздовж осі x вектори напруженості електричного і магнітного полів. Як видно з рисунку вектори $\vec{E}$ та $\vec{H}$ утворюють з напрямом поширення хвилі правогвинтову систему. У фіксованій точці простору вектори $\vec{E}$ та $\vec{H}$ змінюються за гармонічним законом одночасно досягаючи від нуля максимального значення. Так, в момент часу $t = 0$ в площині, яка знаходиться в початку відліку ($x = 0$), вектор $\vec{E}$ напрямлений вверх, а вектор $\vec{H}$ – вліво. Через четверть періоду значення цих векторів стане рівним нулю, а ще через четверть періоду вектор $\vec{E}$ стає напрямленим вниз, а вектор $\vec{H}$ – вправо.

Така зміна напрямів векторів $\vec{E}$ та $\vec{H}$ відбувається в усіх точках простору, але зі зсувом фаз який визначається відстанню між точками. Сама синусоїда, як огинаюча кінців усіх векторів, переміщається як одне ціле, тобто в напрямі осі x рухається плоска електромагнітна хвиля.

16.3 Експериментальне підтвердження електромагнітних хвиль. Досліди Герца

Все те, що ми вище говорили про електромагнітні хвилі мовою вищої математики, це теорія, з якої випливає наявність електромагнітних хвиль, що стали для сучасної людини атрибутом її життя (радіо, телебачення, мобільні телефони тощо). Але ж не все так було – люди раніше жили без використання електромагнітних хвиль, хоча вже була їх теорія. Проте, теорія без практики є мертвою. Тому першою задачею фізиків було експериментальне підтвердження

теорії Максвелла і з цією задачею блискуче справився німецький фізик Генріх Рудольф Герц (1857-1894). Але навіть отримавши і дослідивши електромагнітні хвилі, Герц вважав, що його відкриття немає ніякого практичного застосування. Ось його слова: "Все це абсолютно немає ніякої користі. Це тільки експеримент, який показує, що маестро Максвелл мав рацію. Ми всього-навсього маємо таємничі електромагнітні хвилі, які не можемо бачити, але вони є. А що ж далі? – запитав його один з студентів. – Я вважаю нічого, знизавши плечима, відповів Герц". Це було у 1888 році, а рівно через 8 років у 1896 перша радіограма здійснена А.С.Поповим на відстань 250*м* складалась з двох слів – "Генріх Герц". Це був початок нової ери – ери радіозв'язку, про що буде йти мова дещо пізніше.

Апаратура, якою користувався в своїх дослідах Герц, може тепер здаватись надзвичайно простою, але тим вагоміші отримані результати цих дослідів. Для отримання електромагнітних хвиль Герц застосував винайдений ним вібратор, який складається з двох металевих стержнів розділених іскровим проміжком (рис.16.3.1).

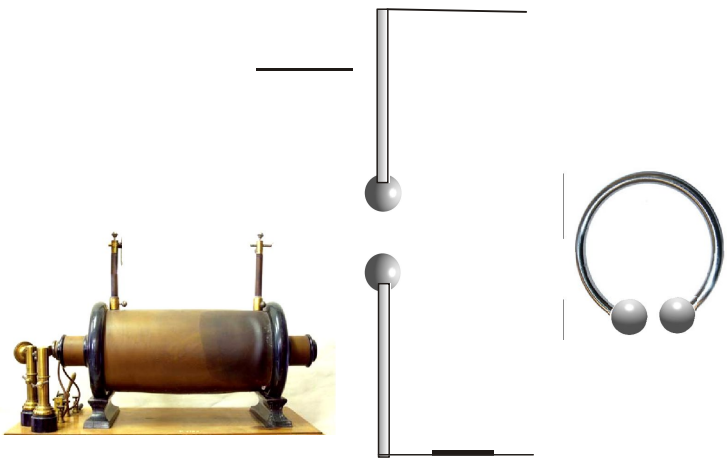


Рисунок 16.3.1

Вібратор, це по суті відкритий коливальний контур у якому обкладинками конденсатора ємністю C можна вважати поверхні протилежних кінців стержня, а котушка індуктивності L – це котушка "розтягнута" в прямий провідник, тобто стержень. Якщо зарядити протилежні кінці такого провідника, а потім з'єднати, то в такому контурі виникнуть електромагнітні коливання. Оскільки контур відкритий, то він буде випромінювати електромагнітну хвилю і коливання будуть затухаючими. Щоб такий вібратор періодично випромінював електромагнітну хвилю, необхідно періодично роз'єднувати стержні, заряджати їх і знову з'єднувати. В дослідах Герца роль такого вимикача виконував іскровий розряд між серединою стержнів, де іскра "проскакувала" від джерела високої напруги, яке одночасно заряджало вібратор в період його "мовчання". Коли напруга на іскровому проміжку досягала

пробивного значення, виникала іскра яка з'єднувала дві половини вібратора. В результаті виникали затухаючі коливання які продовжувались до тих пір, поки не згасне іскра. Після згасання іскри вібратор знову заряджався і процес повторювався. Для збудження таких коливань вібратор з'єднувався з котушкою Румкорфа (німецький винахідник, 1803-1877) – своєрідним високовольтним трансформатором, де первинна обмотка з малим числом витків через переривач живилась від джерела постійного струму. При такому імпульсному перериванні первинного кола у вторинній обмотці котушки Румкорфа з великою кількістю витків виникала імпульсна висока напруга – десятки тисяч вольт (тепер видозмінена котушка Румкорфа використовується в сучасних системах запалювання карбюраторних двигунів автомобілів).

У вібраторі під час коливань встановлювалась стояча хвиля струму та напруги. Сила струму була максимальною в середині вібратора і рівна нулю на його кінцях. Напруга в середині вібратора дорівнювала нулю (вузол напруги), а на кінцях приймала максимальне значення (пучність напруги). Довжина λ електромагнітної хвилі, яку випромінював вібратор, була в два рази більшою довжини вібратора, а тому подібний вібратор називають пів хвильовим. У своїх дослідах Герц використовував вібратори довжиною $1\div2{,}5м$, що відповідало довжинам електромагнітних хвиль $2\div5м$.

Щоб вловлювати хвилі, які випромінює вібратор, Герц придумав антену у вигляді незамкнутого кільця з такими кульками на її кінцях як вказано на рис.16.3.1. Як тільки у вібраторі "проскакувала" іскра, в той же час можна було помітити іскру в приймачі – резонаторі, що є беззаперечним доказом наявності електромагнітних хвиль. Крім факту існування електромагнітних хвиль, що є підтвердженням теорії Максвелла, Герц провів дослідження цих хвиль і результати цих досліджень дали можливість Герцу встановити швидкість поширення електромагнітної хвилі яка дорівнює швидкості світла. Герц також здійснив відбивання та заломлення електромагнітних хвиль і показав, що ці явища підпорядковуються таким же законам відбивання та заломлення світла. Нарешті Герц експериментально довів поперечність електромагнітних хвиль у тому розумінні, що вектор $\vec{E}$ напруженості електричного поля коливається перпендикулярно напряму поширення хвилі. Якби у той час за видатні досягнення фізичної науки присуджували Нобелівські премії, то її лауреатом без

сумніву був би Генріх Герц. Але найвища премія, яку отримало ім'я Генріха Герца, це одиниця частоти 1 *Гц* (один герц).

16.4 Енергія електромагнітної хвилі. Вектор Пойтінга

Оскільки електричне та магнітне поля володіють енергією (див.розділи 3.5, 11.6), то і електромагнітна хвиля теж повинна володіти енергією. Однією з енергетичних характеристик пружної хвилі є її об'ємна густина як відношення енергії хвилі до об’єму. Отже, якщо визначити відношення енергії тепер вже електромагнітної хвилі до об’єму який вона займає, то отримаємо її енергетичну характеристику – об'ємну густину енергії. Густина енергії w електромагнітної хвилі складається з густини енергії електричного поля (див. формулу (3.5.11)) та густини енергії магнітного поля (див. формулу (11.6.10)), тобто

$$w = w_E + w_H = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}. \qquad (16.4.1)$$

Раніше було сказано, що в даній точці простору вектори $\vec{E}$ та $\vec{H}$ змінюються в однаковій фазі, а тому співвідношення (16.2.7) між амплітудними значеннями E та H справедливе і для їх миттєвих значень. Завіси випливає, що густина енергій електричного і магнітного полів у кожний момент часу однакова ($w_E = w_H$), а тому рівняння (16.4.1) можна записати в іншому вигляді:

$$w = 2w_E = \varepsilon_0 \varepsilon E^2. \qquad (16.4.2)$$

Користуючись тим, що $E\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} = H\sqrt{\mu_0 \mu}$ (формула (16.2.7)), проведемо перетворення виразу (16.4.2):

$$w = (\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E) \cdot (\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E) = (\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E) \cdot (\sqrt{\mu_0 \mu} H) = \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu}\, E H, \qquad (16.4.3)$$

тобто отримали значення густини енергії електромагнітної хвилі за основними характеристиками її електричного та магнітного полів у вигляді

$$w = \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu}\, E\, H . \qquad (16.4.4)$$

Оскільки швидкість поширення електромагнітної хвилі згідно формули (16.1.12) дорівнює $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu}}$, то помноживши значення густини енергії w електромагнітної хвилі на швидкість її поширення v, отримаємо вираз для густини потоку енергії:

$$S = w \cdot v = E\, H . \qquad (16.4.5)$$

Як вже було раніше сказано вектори $\vec{E}$ та $\vec{H}$ утворюють з напрямом поширення електромагнітної хвилі правогвинтову систему, що ілюструє рис.16.2.1, то напрям векторного добутку $[\vec{E}\vec{H}]$ співпадає з напрямом перенесення енергії і модуль цього вектора вже визначений формулою (16.4.5). Отже, потік вектора густини енергії електромагнітної хвилі можна подати векторним добутком $\vec{E}$ та $\vec{H}$, тобто як вектор

$$\vec{S} = [\vec{E}\vec{H}]. \qquad (16.4.6)$$

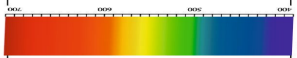
Такий вектор вперше ввів англійський фізик Джон Генрі Пойтінг (1852-1914) і отримав назву вектора Пойтінга.

16.5 Шкала електромагнітних хвиль

У природі існують електромагнітні хвилі самих різних частот, відповідно і різних довжин хвиль. Шкала електромагнітних хвиль – це широкий діапазон довжин або частот електромагнітних хвиль з виділенням на ньому характерних властивостей хвиль щодо способу їх отримання, застосування тощо. Така шкала електромагнітних хвиль наведена в таблиці 16.5.1. Межі між окремими ділянками шкали електромагнітних хвиль досить умовні і в деяких випадках перекриваються. Але якщо випромінювання та прийом електромагнітних хвиль здійснюється відповідними антенами і чим менша довжина хвилі, тим менша може бути антена, то тоді яка антена випромінює електромагнітні хвилі не тільки оптичного, але й рентгенівського випромінювання, не кажучи вже про γ-випромінювання? Ніяких тут електричних генераторів і антен немає – відбувається принципово інший механізм випромінювання

Таблиця 16.5.1

Шкала електричних хвиль

діапазон			**довжина хвилі**	**частота,Гц**
радіодіо-діапазон		наддовгі	більше 10000м	
		довгі	10000-1000м	
		середні	1000-100м	
		короткі	100-10м	
	ультракороткі	метрові	10-1м	
		дециметрові	10-1дм	
		сантиметрові	10-1см	
		міліметрові	10-1мм	
		суб міліметрові	1-0,4мм	
оптичний діапазон	інфрачервоний		0,4мм-0,76мкм	
	видимий		),76мкм-0,4мкм	
	ультрафілет.		400-10нм	
рентгенівський діапазон			10-0,004нм	
γ-випромінювання			менше 0,004нм	

електромагнітних хвиль. Хвилі оптичного діапазону випромінюють атоми і молекули не безперервно як радіопередавач, а порціями і така порція поширюється у вигляді особливої частинки – фотону, який одночасно володіє властивостями хвилі та частинки. Про механізм випромінювання оптичного та рентгенівського діапазонів буде йти мова у відповідних розділах атомної та квантової фізики. Так само процеси, що зумовлюють γ- випромінювання будуть розглянуті в

ядерній фізиці. Отже, залишаючи "на потім" оптичний діапазон, розглянемо окремі питання практичного застосування радіодіапазону, в першу чергу передачу інформації за допомогою електромагнітних хвиль.

16.6 Передача інформації за допомогою електромагнітних хвиль

Ми живемо у період величезної кількості інформації, яку до нас доносять радіохвилі шляхом використання радіо, телебачення, супутникового телебачення, інтернету тощо. Задача науковців та інженерів в цьому напрямі полягає в тому, щоб якомога більше "втиснути" в електромагнітну хвилю.

Перша інформація передана електромагнітними хвилями, це була радіограма (1896 р) і вона складалась з послідовності сигналів різної тривалості. Ось лише її друга частина передана азбукою Морзе

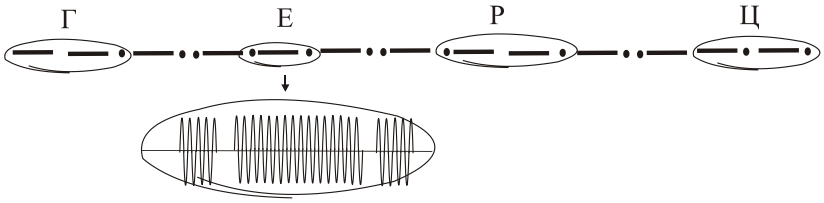


Рисунок 16.6.1

З цього часу радіоапаратура удосконалювалась, збільшувалась дальність радіозв'язку, всі кораблі мали радіорубки, звідки в ефір йшла "морзянка". Тільки у 1906 р. радіо заговорило: американським інженером Р.Фессенденом був здійснений перший дослід передачі мови і музики методом амплітудної модуляції.

Суть амплітудної модуляції – низькочастотний сигнал (мова, музика) накладається на високочастотні коливання електромагнітної хвилі таким чином, що амплітуда цих високочастотних коливань змінюється в такт за законом сигналу низької частоти (рис.16.6.2), де $T_{нч}$ – період низькочастотних звукових коливань, $T_{вч}$ – період високочастотних електромагнітних коливань. Амплітудна модуляція застосовувалась в діапазоні довгих, середніх та коротких хвиль. Суттєвий недолік такої модуляції – це перешкоди радіоприйманню дією атмос

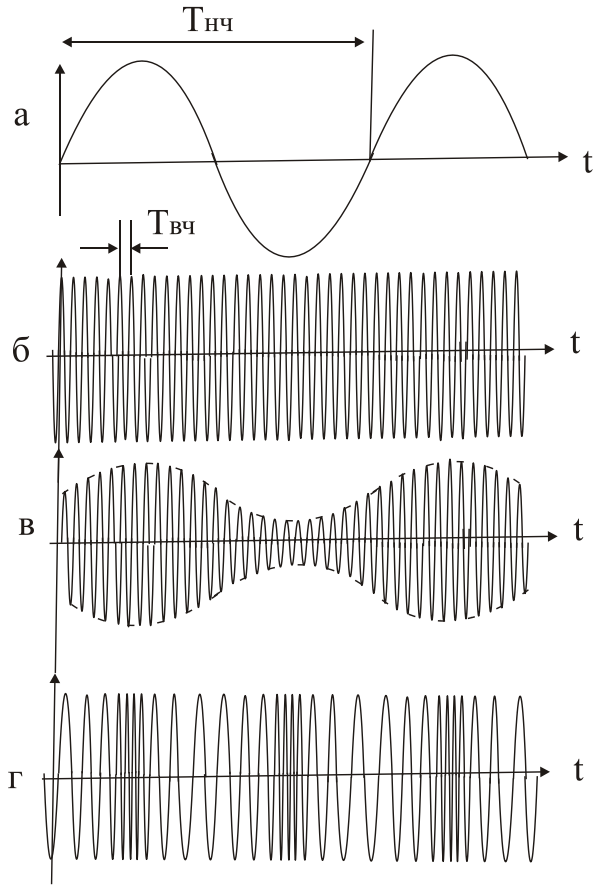


Рисунок 16.6.2

ферної електрики, особливо атмосферними розрядами, які є джерелами електромагнітних хвиль і коли слухати радіо на довгих хвилях, то завжди, особливо літом, чути потріскування, шуми, а також в містах не завжди добрий радіоприйом, бо перешкоди створюють контактні мережі тролейбусів, електроустаткування тощо. Цих недоліків позбавлена частотна модуляція, де амплітуда коливань не несе інформацію про сигнал. За частотної модуляції частота несучої електромагнітної хвилі змінюється в невеликому інтервалі за законом сигналу низької частоти (мова, музика). Зрозуміло, чим більша частота несучого сигналу, тим ефективніша його частотна модуляція сигналом низької частоти. Тому такий вид модуляції особливо ефективний для ультракоротких хвиль. Міжнародне позначення і загальноприйнятий термін для частотної модуляції це всім відоме FM (frequency (частотна) modulation) і радіо FM. У кінці 20ст. почався перехід на цифровий спосіб передачі інформації: цифрове телебачення, супутники зв'язку, мобільні телефони тощо. Все це вимагало нових методів модуляції і один з них – це амплітудна маніпуляція за якою відбувається дуже короткочасна зміна амплітуди коливань на високих частотах, на які практично не впливають перешкоди прийому, а також може бути передана велика кількість цифрової інформації. Крім того, існують ще інші види модуляції, що дозволяють збільшити кількість інформації яка передається одним сигналом. Так, квадратурна амплітудна модуляція здійснюється сумою двох несучих коливань однакової частоти, але зсунутими за фазою на 90^0 і кожне з цих коливань модульовано за амплітудою своїм модульованим сигналом. Крім того є ще інші, більш складні види модуляції, де змінюється не тільки амплітуда але й фаза коливань несучої частоти (квадратурна амплітудна маніпуляція).

Особливого застосування набула гаусівська маніпуляція з мінімальним зсувом частот, яка широко використовується для стільникового (мобільного) зв’язку. Справа в тому, що голосовий чи інший сигнал мобільний телефон "оцифровує" (стає послідовністю одиниць і нулів). Одиниця відповідає незміненій частоті несучого високочастотного сигналу, а "нуль" – декільком коливанням "трошки" зміненої частоти (рис.16.6.3). Така система модуляції використовується в стандарті GSM – Global System of Mobile communication – Всесвітня система мобільного зв’язку. Ми користуємось системою GSM 900, тобто з частотою 900МГц.

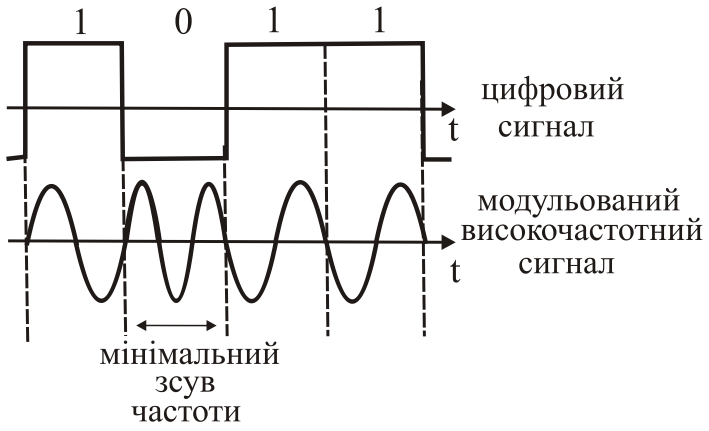


Рисунок 16.6.3

Крім цього, в Європі та на інших континентах використовується стандарт GSM 1800, тобто з частотою 1800 МГц, що дає можливість більшої і якіснішої передачі інформації. В даний час мобільний зв'язок розвивається настільки стрімко, що навіть не встигнувши набути широкого застосування системи третього покоління (3G generation), у скорому майбутньому будуть витіснені системами 4G та 5G.

Контрольні запитання

1 *Як з рівнянь Максвелла можна зробити висновок про існування електромагнітних хвиль?*
2 *Як з рівнянь Максвелла вивести хвильове рівняння електромагнітної хвилі?*
3 *Як з хвильового рівняння випливає значення швидкості електромагнітних хвиль у вакуумі та в середовищі відмінному від вакууму?*
4 *Як записати та пояснити рівняння плоскої електромагнітної хвилі?*
5 *Яке співвідношення між значеннями векторів напруженості електричного і магнітного полів в електромагнітній хвилі?*

6 *Який вигляд має моментальний "знімок" плоскої електромагнітної хвилі та графічне зображення у даний момент часу векторів напруженості електричного та магнітного полів електромагнітної хвилі?*

7 *Які досліди проводив Герц на підтвердження теорії Максвелла про існування електромагнітних хвиль? Що було джерелом та приймачем електромагнітних хвиль та які висновки зробив Герц у результаті проведених ним дослідів?*

8 *Як вводиться поняття об'ємної густини енергії електромагнітної хвилі та як значення цієї енергії можна визначити через характеристики електричного і магнітного полів хвилі?*

9 *Як записати та пояснити формулу вектора Пойтінга?*

10 *Який вигляд має шкала електромагнітних хвиль з основними діапазонами довжин та частот хвиль?*

11 *Який принцип амплітудної та частотної модуляцій, що використовуються для передачі інформації за допомогою електромагнітних хвиль?*

12 *Які нові сучасні методи модуляцій для передачі інформації у цифровому виді за допомогою електромагнітних хвиль?*

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Автоколивання 327
Акумулятори 176
Ампер 93
Ампер-година 178
Ампер на квадратний метр 94
Ампера сила 218
Амперметр 340

Біо-Савара-Лапласа закон 209
Блискавка 193
Блискавковідвід 80

Вебер 207
Вектор електричного зміщення 65
Вектор поляризації 57
Вектор Умова 373
Випрямлячі напівпровідникові 153
Відемана-Франца закон 127
Вольт 43
Вольта 173
Вольт-амперна характеристика 146
Вольта закони 140

Гальванометри 257
Гальванопластика 169
Гальваностегія 169
Гаус 28
Гауса теорема 64
Генрі 264
Герца досліди 393
Гіромагнітне відношення 237
Гістерезис діелектричний 72
 магнітний 250
Громовідвід 194
Густина заряду об'ємна 32
 поверхнева 40
 лінійна 37
Густина струму 95
 зміщення 279

Декремент затухання логарифмічний 307
Деполяризація 72
Дефектоскоп 381

Джерела струму 169
Диполь електричний 20
Дипольні моменти молекул 56
Диполя момент 20
Дисоціація електролітична 160
Діаграми векторні 287
Діамагнетики 244
Діелектрики 56
Діод 146
Добротність коливального контуру 313, 322
Домен 247

Еквіпотенціальні поверхні 48
Екстраструми 266
Електрети 76
Електрична стала 15
Електричне поле 17
Електродвигун асинхронний 361
Електроліз 165
Електролізу закони 166
 застосування 167
Електроліти 160
Електрон 11
Електрона заряд 12
Електрона заряд питомий 230
 маса 11, 122
Електрон-вольт 44
Електропровідність 123
 електролітів 162
 напівпровідників 149, 150
 питома 101
Електрорушійна сила 107
  гальванічного елемента 172
Електростатична машина 81
Електрохімічний еквівалент 166
Елемент струму 209
Елементи гальванічні 170
Емісія термоелектронна 145
Енергія біжучої хвилі пружності 371
Енергія зарядженого конденсатора 90
Енергія електромагнітних хвиль 395
 іонізації 185
 поля електричного 91
 поля магнітного 271
Ефект Доплера 383

Ємність 82

□ конденсатора 84
□ □плоского 85
□ □ циліндричного 88

Заземлення 78
Закон збереження заряду 13
Заряд елементарний 12
Заряди індуковані 84
□ поляризаційні 56
Захист електростатичний 82
Звук 376
Ізолятори 56
Імпеданс 349
Індуктивність 264
Індукція взаємна 267
□ електрична 12
□ електромагнітна 257
□ магнітна 205
Іонізація газів 185

Квазістаціонарності умова 339
Кірхгофа правило 109
Коефіцієнт взаємної індукції 268
□ дисоціації 160
□ затухання коливань 309
□ іонізації 185
□ Пельтьє 141
□ потужності 355
□ самоіндукції 263
□ трансформації 358
Коливання вільні 298
□ затухаючі 307
□ вимушені 314
Конденсатор 84
Конденсаторів сполучення 86
Контактна різниця потенціалів 137
Контур електричний 304
Кулон 12
Кулона дослід 14
Кулона закон 14
Кюрі закон 246
□ температура 73, 249

Лармора частота 245
Лапласа рівняння 53
Ленца закон 258
Ленца-Джоуля закон 119, 120

Лоренца сила 222
Магнетики 24
Магнетон 240
Магнітна сприйнятливість 241
Магнітна стала 211
Магнітне поле 204
□ □ колового струму 212
□ □ обертове 361
Магнітне поле прямого струму 212
Магнітний момент струму 205
□ потік 207
Магнітострикція 381
Максвелла закон 257
□ рівняння 275, 279, 283
Міллікен 12
Модуляція коливань 398

Надпровідність 132
Намагнічування 240
□ самодовільне 247
Напівпровідники 148
Напруга 108
Напруженість електричного поля 18
□ магнітного поля 208
□ поля сторонніх сил 102
Насичення магнітне 249

Ом 98
Ома закон 98, 102, 107, 108
Опір 98
□ активний 342
□ питомий 99
□ реактивний 345, 346
Остроградського-Гауса теорема 30, 32, 64
Осцилятор гармонічний 298

Парамагнетики 246
Пельтье тепло 143
П’єзоелектричний ефект 73
□ □ зворотний 74
Підсилювачі 155
□ напівпровідникові 156
Плазма іонна 200
Пойнтінга вектор 397
Поле диполя 20
Поле електричне 17
□ □ вихрове 275

 електромагнітне 278
 електростатичне 17
 магнітне 205
 розмагнічуюче 251
Поляризація діелектриків 57
Поляризованість 58
Потенціал електричного поля 43, 44
Потенціометр 109
Потік електричного зміщення 67
 магнітної індукції 207
Потужність змінного струму 355
 постійного струму 118
Правило лівої руки 218
Провідність діркова 151
 домішкова 150
Проникність діелектрична 59
 магнітна 211, 243
Пуассона рівняння 53

Резонанс напруг 349
 параметричний 324
 струмів 351
Релаксаційні коливання 349
Рівняння хвилі 367
 хвильове 369
Робота виходу 134
 змінного струму 355
 постійного струму 118
Розряд дуговий 199
Розряд іскровий 193
 коронний 197
 несамостійний 186
 самостійний 190
 тліючий 191
Рухливість
 йонів у газах 186, 190
 йонів у електролітах 162
Самоіндукція 263
Сегнетоелектрики 71
Сила струму 94
Силова лінія 24
Системи автоколивальні лінійні 307
Скін-ефект 345
Соленоїд 216, 265
Спін електрона 239
Сприйнятливість діелектрична 58
Стокса теорема 47

Струм електричний 93
 зміщення 278
 квазістаціонарний 337
 трифазний 359
Струми елементарні 236
Суперпозиції принцип 19

Термометр опору 100
Термоелектрика 141
Термоелектронна емісія 145
Тесла 206, 219, 224
Томсон 11
Томсона явище 144
Транзистор 155
Трансформатор 357
Тріод 148

Уітстона місток 114

Фарада 15, 83
Феромагнетизм 247
Феромагнетики 244
Формула Томсона 207
Франклін 11

Хвилі електромагнітні 388
 біжучі 367
 стоячі 373
Холла стала 227
 явище 226

ЛІТЕРАТУРА

1. Бушок Г.Ф., Венгер Є.Ф., Півень Г.Ф. Курс фізики. Навч. посібник. Кн. 1 Механіка. Електрика і магнетизм. - К.: Либідь, 2001.
2. Воловик П.М. Фізика для університетів. - К.: Ірпінь: Перун, 2005.
3. Галущак М.О., Рувінський Б.М. Фізика для інженерів. Навч. посібник. - Івано-Франківськ: ІФНТУНГ, 2006.
4. Зисман Г.А., Тодес О.М. Курс общей физики. Т.2. - М.: Наука, 1967.
5. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. - М.: Высшая школа, 2002.
6. Душенко В.П., Кучерук І.М. Загальна фізика. Т.2. - К.: Вища школа, 1993.
7. Калашніков С.Г. Курс загальної фізики. Електромагнетизм. Навчальний посібник. – Х.: Радянська школа. 1964.
8. Куліш В.В. Фізика для інженерних спеціальностей. Навч. посібник. - К.: Наука, 2004.
9. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики. Електрика і магнетизм. Навч. посібник. Т. 2. - К.: Техніка, 1999.
10. Лопатинський І.Є., Зачек І.Р., Кравчук І.М. та ін. Курс фізики. Підручник. - Львів: Афіша, 2003.
11. Савельев И.В. Курс физики. Т. 2, изд. 4-е. М.: Наука, 1970.
12. Трофимова Т. И. Курс физики. - М.: Наука, 1985.
13. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Электричество и магнетизм. Вып. 5. - М.: Мир, 1972.
14. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Электродинамика. Вып. 6. - М.: Мир, 1977.
15. Чолпан П.П. Основи фізики. Навч. посібник. - К.: Вища школа, 1985.
16. Чолпан П.П. Фізика. Підручник. - К.: Вища школа, 2004.

Навчальне видання

М. О. Галущак, О. Є. Федоров

КУРС ФІЗИКИ
ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

Підручник у 3-х книгах. Книга 2

За редакцією проф. М. О. Галущака

Видавництво Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу
вул. Карпатська, 15, м. Івано-Франківськ, 76019, Україна
тел. (03422) 42453, факс (03422) 42139,
http://nung.edu.ua, e-mail: public@nung.edu.ua
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців
ІФ № 18 від 12.03.2002 р.

Підписано до друку 02.03.2016 Формат 60è84/16 Папір офсетний

Ум. друк. арк. 23,54 Тираж 300 прим. Замовл. № 193