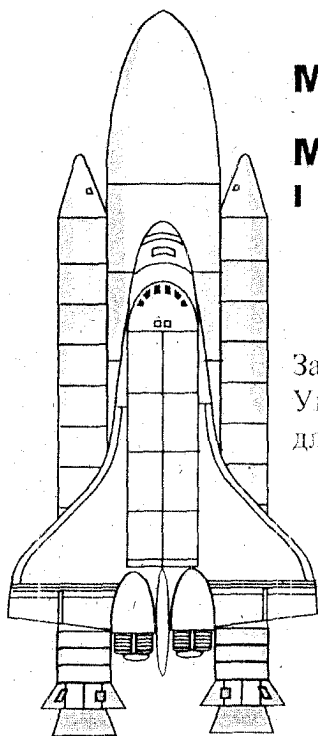


М. О. ГАЛУЩАК

Курс загальної фізики

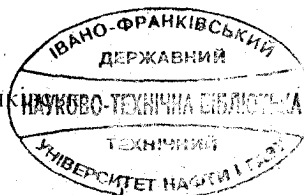


МЕХАНІКА

**МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА
І ТЕРМОДИНАМІКА**

Затверджено Міністерством освіти
України як навчальний посібник
для студентів технічних вузів

м. Івано-Франківськ
2000



Курс загальної фізики : У трьох книгах.

Кн.1. Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка.

Навч. посібник / М.О. Галушак. – Івано-Франківськ: Факел, 2000. – 447 с.

У посібнику викладено основні закони механіки, молекулярної фізики і термодинаміки, які потрібні для подальшого вивчення як фізики, так і суміжних з нею технічних наук. До кожного розділу приведені контрольні запитання, підібрано приклади розв'язування задач і задачі для закріплення теоретичного матеріалу, а тому книга є базою для самостійної роботи студентів при вивченні фізики.

Для студентів технічних спеціальностей вищих закладів освіти.

Рецензенти: М.А. Рувінський, д-р фіз.-мат. наук, професор
Д.М. Фреїк, д-р хім. наук, професор

Підписано до друку 30.09.1999. Формат 60х84¹/₁₆. Друк офсетний. Ум. друк. аркушів 28. Наклад 1000 пр. Замовл.47

„ФАКЕЛ” Видавництво Івано-Франківського державного
технічного університету нафти і газу
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська,15

ВСТУП

Предмет фізики і її зв'язок з іншими науками. Предмет фізики – вивчення найпростіших і водночас найзагальніших форм руху матерії.

Матерія знаходиться у неперервному русі, під яким розуміють всяку зміну взагалі. Матерія існує і рухається в просторі і в часі.

Процес пізнання у фізиці, як і в будь-якій науці, починається із спостереження явищ в природних умовах або із спеціально поставлених дослідів-експериментів. Для пояснення експериментальних результатів використовують гіпотези. Гіпотеза – це наукове припущення, що висувається для пояснення якого-небудь факту або явища і яке вимагає перевірки для того, щоб стати науковою теорією. Вірність гіпотези перевіряється шляхом проведення відповідних дослідів і співставлення наслідків, що випливають із гіпотези, з результатами дослідів і спостережень.

Гіпотеза, яка успішно пройшла перевірку на досліді і вірно передбачає ряд нових, раніше невідомих явищ, входить в науку як фізична теорія. Фізична теорія – це система основних ідей, що узагальнюють дослідні дані і відбивають об'єктивні закономірності природи. Вона дає пояснення цілої області явищ природи з єдиної точки зору.

Фізика пов'язана з іншими науками і технікою. Як відзначав академік С.І.Вавілов (1891–1955), цей зв'язок фізики з іншими галузями природознавства привів до того, що фізика глибоким корінням уросла в астрономію, хімію, геологію, біологію і інші науки. В результаті створився ряд нових дисциплін, таких як астрофізика, фізична хімія, геофізика, біофізика і інші.

Історія розвитку фізики та техніки показує, яке велике значення мали відкриття в фізиці для створення і розвитку нових галузей техніки. Фізика є

фундаментом, на якому виросли такі галузі як електро- і радіотехніка, електронна, обчислювальна і ядерна техніка та інші. Фізика озброюють промисловість новими приладами і установками, створюють основи нових методів виробництва. В свою чергу, техніка значно впливала і впливає на розвиток фізики. Відомо, що саме технічні потреби суспільства в свій час служили поштовхом для розвитку механіки, необхідної для будівництва різних споруд. Необхідність у створенні економічних теплових двигунів викликало швидкий розвиток термодинаміки. Таких прикладів можна навести дуже багато. Розвиток техніки значно впливає на розвиток експериментальних методів фізичних досліджень, дає змогу застосовувати нові, точніші прилади і установки (електронні мікроскопи, мас-спектрографи, напівпровідникові фото- і термоелементи, лазери, прискорювачі елементарних частинок і т.д.).

З наведеної короткої характеристики фізики та її зв'язку з технікою зрозуміла та роль, яку відіграє курс фізики у вузі: по-перше, фізика є базовою дисципліною для багатьох загальноінженерних і спеціальних дисциплін. Її закони і методи дослідження широко застосовуються в курсах опору матеріалів, електротехніки, теплотехніки, в різних технологічних курсах та ін.; по-друге, вивчення фізики має велике значення для формування наукового світогляду; по-третє, розвиток різних галузей сучасного виробництва тісно переплітається з фізикою, а тому інженер будь-якого профілю повинен володіти фізикою настільки, щоб він міг застосувати її досягнення в конкретному виробництві.

Одиниці фізичних величин і їх розмірність. Вивчення фізичних явищ і процесів пов'язано з вимірюванням фізичних величин. Виміряти фізичну величину – це значить порівняти її з такою ж фізичною величиною, умовно прийнятою за одиницю. В загальному випадку одиниці фізичних величин можна було б вибрати довільно, але тоді виникнуть труднощі при їх порівнянні. Тому вводять систему одиниць, яка охоплює одиниці всіх фізичних величин. Для побудови системи одиниць довільно вибирають одиниці для кількох, не залежних одна від одної фізичних величин. Ці одиниці називають основними. Ті одиниці, які встановлюються за допомогою формул, що пов'язують їх з основними одиницями, називають похідними.

В Україні обов'язкова у використанні Міжнародна система одиниць –

Система Інтернаціональна (СИ), – яка складається з семи основних одиниць: метр, кілограм, секунда, ампер, кельвін, моль, кандела і двох додаткових: радіан і стерадіан.

Метр (м) дорівнює 1650763,73 довжини хвилі у вакуумі випромінювання, яке відповідає переходу між рівнями $2p_{10}$ і $5d_5$ атома криптона-86.

Кілограм (кг) дорівнює масі міжнародного прототипу кілограма (платиноїридівового циліндра, що зберігається в Севрі у Міжнародному бюро мір і ваги).

Секунда (с) дорівнює 9192631770 періодам випромінювання, яке відповідає переходу між двома надтонкими рівнями основного стану атома цезія-133.

Ампер (А) – величина сили сталого струму, який, проходячи по двох паралельних прямолінійних провідниках нескінченної довжини і дуже малого кругового перерізу, розміщених на відстані 1м один від одного у вакуумі, створював би між цими провідниками силу, яка дорівнює $2 \cdot 10^{-7} N$ на кожний метр довжини.

Кельвін (К) дорівнює $1/273,16$ термодинамічної температури потрібної точки води.

Моль (моль) дорівнює кількості речовини системи, яка містить стільки ж структурних елементів, скільки структурних елементів (атомів) міститься в 0,012 кг ізотопу вуглецю-12.

Кандела (кд) дорівнює силі світла в заданому напрямі джерела, що випромінює монохроматичне світло частотою $540 \cdot 10^{12} \text{ Гц}$, енергетична сила якого в цьому напрямі становить $1/683 \text{ Вт/ср}$.

Радіан (рад) дорівнює куту між двома радіусами кола, довжина дуги між якими дорівнює радіусу.

Стерадіан (ср) дорівнює тілесному куту з вершиною в центрі кулі, який вирізає на її поверхні площу, що дорівнює квадрату радіуса кулі.

Розмірність фізичної величини є її вираженням через основні одиниці. Наприклад, з II закону Ньютона розмірність сили запишеться так:

$$[F] = MLT^{-2},$$

де M – розмірність маси; L – розмірність довжини; T – розмірність часу.

Розмірності обох частин фізичних рівностей повинні бути однакові.

ми, оскільки фізичні закони не можуть залежати від вибору одиниць фізичних величин. Виходячи з цього, можна перевіряти правильність одержаних фізичних формул, наприклад, при розв'язуванні задач, а також встановлювати розмірності фізичних величин.

Контрольні запитання

1. Що є предметом фізики?
2. Які ви знаєте методи фізичного дослідження?
3. Яка роль фізики у формуванні наукового світогляду?
4. Яка роль фізики в розвитку техніки?
5. Наведіть приклади впливу техніки на розвиток фізики.
6. Охарактеризуйте роль курсу фізики у втузі.
7. Які прийняті основні одиниці фізичних величин в СІ?
8. Що називається розмірністю фізичної величини?

Розділ 1. ОСНОВИ КІНЕМАТИКИ

1.1. Основні поняття

Механікою називають частину фізики, яка вивчає найпростішу форму руху матерії – механічний рух. Механічним рухом називається зміна взаємного розміщення тіл або їх частин одна відносно одної в просторі протягом певного часу. Тілами називаються макроскопічні системи, які складаються з великого числа молекул або атомів і розміри цих систем в багато разів більші міжмолекулярних відстаней. В класичній механіці (механіка Галілея – Ньютона) вивчаються рухи тіл, швидкості яких малі порівняно з швидкістю світла у вакуумі. Рухи тіл, швидкості яких близькі до швидкості світла, вивчаються у релятивістській механіці, основою якої є теорія відносності Ейнштейна. Рухи мікроскопічних тіл (атомів, протонів, нейтронів, електронів та інших елементарних частинок) вивчає квантова механіка.

Традиційно вивчення курсу фізики розпочинається з класичної механіки. Щодо підходу до вивчення механічних рухів, механіку поділяють на

кінематику, динаміку і статику.

Кінематика вивчає зміну положення тіл або їх частин у просторі і в часі без урахування взаємодії з іншими тілами. **Динаміка** визначає вплив взаємодії між тілами на їх механічний рух. **Статика** вивчає закони додавання сил і умови рівноваги тіл.

Поняття простору і часу – основні не тільки для механіки або фізики в цілому, а також для всього природознавства. Всяке тіло має об'єм, тобто просторову протяжність. Час виражає послідовність станів матерії, що становлять будь-який процес, рух; він є мірою тривалості процесу. Отже, простір і час – найзагальніші форми існування матерії.

Так само безглузді поняття про “порожній” простір і “чистий” час, не зв'язані з рухомою матерією. Важливу роль у з'ясуванні властивостей простору і часу відіграла теорія відносності, яка вказала на існування взаємозв'язку цих двох форм існування матерії і залежності їх властивостей від руху матерії.

Залежно від властивостей тіл і постановки задачі в класичній механіці використовують різні моделі реальних тіл: матеріальна точка, абсолютно тверде тіло, система матеріальних точок, ідеальна рідина тощо. Найпростіша модель тіла – матеріальна точка. **Матеріальною точкою** називають таке тіло, розмірами і формою якого можна знехтувати в даній задачі. **Абсолютно твердим тілом** називають тіло, відстань між будь-якими двома точками якого стала, які б не були сили, що діють на нього. Інакше кажучи, форма і розміри такого тіла залишаються незмінними.

Абсолютно тверде тіло може здійснювати поступальний або обертальний рух.

Поступальним називають такий рух, при якому будь-яка пряма лінія, зв'язана з тілом (наприклад, проведена через дві його точки), переміщується паралельно сама собі. Поступально рухаються автобуси, автомашини, поїзди на прямолінійних ділянках шляхів (але не їх колеса), поршні двигунів, компресорів тощо. Оскільки при поступальному русі всі точки тіла рухаються однаково, то досить розглянути рух однієї довільної точки тіла.

Обертальним називають такий рух, при якому всі точки тіла рухаються по колах, центри яких лежать на одній прямій, що називається віссю обертання. Обертання навколо нерухомої осі здійснюють ротори турбін,

електричних генераторів і двигунів, колінчасті вали двигунів внутрішнього згорання, колеса різних видів транспорту, маховики двигунів тощо.

Поступальний і обертальний рухи твердого тіла є лише найпростішими видами його руху. В теоретичній механіці доводиться, що будь-який складний рух тіла можна подати як сукупність поступального і обертального рухів.

Всяке тіло можна уявно розбити на велике число частин, дуже малих порівняно з розмірами всього тіла. Кожну таку частину можна розглядати як матеріальну точку, а саме тіло або будь-яку систему тіл – як систему матеріальних точок.

За видом об'єктів дослідження механіку поділяють на механіку матеріальної точки, механіку твердого тіла, механіку суцільних середовищ (гідродинаміку, газодинаміку, теорію пружності) тощо.

Опис руху будь-якого тіла має сенс тільки тоді, коли цей рух розглядається відносно іншого тіла або системи тіл, які називають тілом відліку. Оскільки механічний рух відбувається в просторі і в часі, то для його повного опису потрібно знати розміщення тіла в будь-який момент часу. Для цього з тілом відліку зв'язують систему координат і годинник. Тіло відліку з відповідно зв'язаною системою координат і годинник утворюють систему відліку.

Система координат – це набір масштабів, за допомогою яких фіксується розміщення рухомих тіл у будь-який момент часу. За систему відліку можна прийняти, наприклад, дві стіни і підлогу кімнати. Приймаючи вершину тригранного кута кімнати за початок декартових координат O і провівши з точки O осі координат вздовж ребер цього кута (рис 1.1), можна визначити положення рухомої матеріальної точки A в певний момент часу за допомогою трьох координат x, y, z .

Під час руху точки A її координати змінюються з часом. В загальному випадку її рух визначається трьома скалярними рівняннями:

$$\begin{aligned}x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t).\end{aligned}\tag{1.1}$$

Виключивши з цих рівнянь час, можна знайти рівняння траєкторії $f(x, y, z) = 0$.

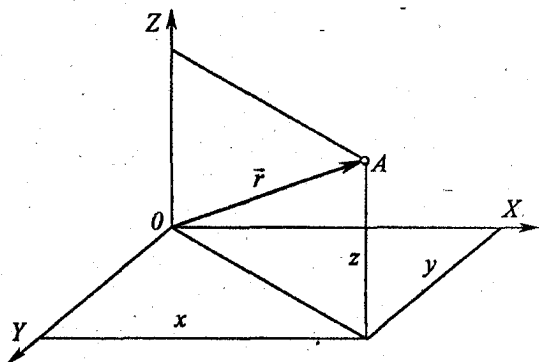


Рис. 1.1

Траєкторія руху матеріальної точки – це лінія, яку описує ця точка в просторі. Залежно від форми траєкторії руху поділяються на прямолінійні і криволінійні.

Замість трьох рівнянь (1.1) для координат рухомої матеріальної точки її рух можна задати одним векторним рівнянням:

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \quad (1.2)$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор, проведений з початку координат.

У будь-який момент часу проекції радіус-вектора на координатні осі дорівнюють координатам матеріальної точки. Тому через координати точки радіус-вектор виражають так:

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z,$$

де $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – орти, тобто одиничні вектори, які визначають додатні напрямки координатних осей.

Число незалежних координат, які повністю визначають положення точки в просторі, називають числом ступенів вільності. При русі в просторі точка характеризується трьома ступенями вільності (координати x, y, z), якщо рух відбувається по деякій поверхні – то двома ступенями

вільності, якщо по кривій лінії – то одним ступенем вільності. Абсолютно тверде тіло має шість ступенів вільності.

Розглянемо рух матеріальної точки вздовж довільної криволінійної траєкторії AB (рис.1.2).

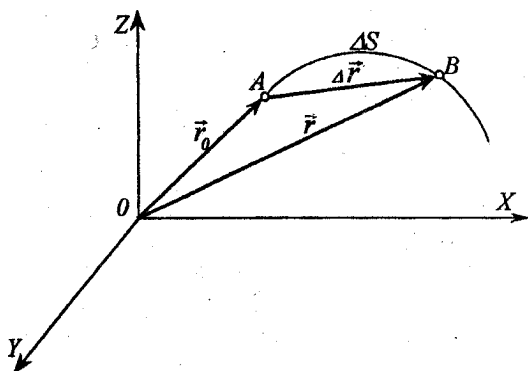


Рис. 1.2

Почнемо відлік часу ($t=0$) з моменту, коли матеріальна точка була в положенні A . Довжина ділянки траєкторії AB , пройденої точкою з моменту початку відліку часу, називається довжиною шляху ΔS і є скалярною функцією часу:

$$\Delta S = \Delta S(t). \quad (1.3)$$

Вектор $\Delta \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$, проведений з початкового положення рухомої точки в положення її в даний момент часу, називається переміщенням. При прямолінійному русі вектор переміщення збігається з відповідною ділянкою траєкторії, тому модуль переміщення $|\Delta \vec{r}|$ дорівнює пройденому шляху ΔS . Через відповідні зміни координат рухомої точки вектор переміщення можна виразити у такому вигляді:

$$\Delta \vec{r} = \vec{i} \Delta x + \vec{j} \Delta y + \vec{k} \Delta z.$$

1.2. Швидкість

Щоб охарактеризувати рух матеріальної точки, вводять векторну величину – швидкість, яка визначає як швидкість руху, так і його напрям у даний момент часу.

Середньою швидкістю $\vec{V}_c$ називається векторна фізична величина, що визначається відношенням вектора переміщення $\Delta\vec{r}$ до проміжку часу Δt , за який відбулось переміщення:

$$\vec{V}_c = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \quad (1.4)$$

Напрямок середньої швидкості збігається з напрямом переміщення (рис. 1.3).

Оскільки вектор переміщення неповністю відображає характер руху, то вводиться поняття миттєвої швидкості.

Миттєвою швидкістю $\vec{V}$ називається векторна фізична величина, що визначається границею, до якої наближається середня швидкість, за умови, коли проміжок часу Δt прямує до нуля:

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (1.5)$$

Миттєва швидкість дорівнює першій похідній від вектора переміщення за часом і спрямована по дотичній до траєкторії в бік руху (рис. 1.3).

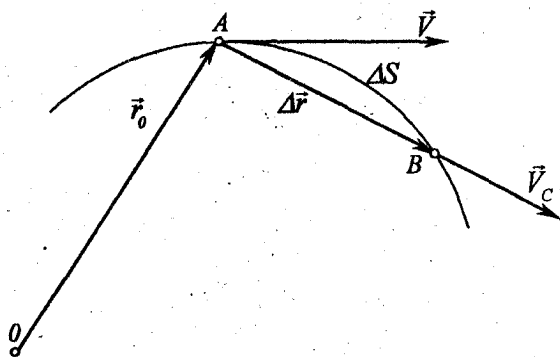


Рис. 1.3

Вектор швидкості, як і будь-який вектор, можна виразити через його проєкції на координатні осі:

$$\vec{V} = \vec{i} V_x + \vec{j} V_y + \vec{k} V_z, \quad (1.6)$$

де $V_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}, \quad V_y = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt}, \quad V_z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{dz}{dt}.$

Числове значення вектора швидкості

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}. \quad (1.7)$$

Оскільки $|\vec{dr}| = dS$, то числове значення вектора миттєвої швидкості точки дорівнює першій похідній від довжини шляху за часом:

$$V = \frac{dS}{dt}. \quad (1.8)$$

Інтегруючи за часом в межах від t до $t + \Delta t$, знайдемо довжину шляху S , пройденого точкою за проміжок часу Δt :

$$S = \int_t^{t+\Delta t} V \cdot dt. \quad (1.9)$$

Рух, при якому величина і напрям вектора швидкості з часом не змінюються, називають рівномірним та прямолінійним. У даному випадку швидкість визначається відношенням пройденого шляху до часу його проходження:

$$V = \frac{S}{t}. \quad (1.10)$$

Швидкість вимірюють: метр за секунду (м/с), сантиметр за секунду (см/с), кілометр за годину (км/год).

Зауваження щодо поняття середньої швидкості – це не середнє арифметичне, а середнє за часом значення швидкості.

1.3. Прискорення

При русі матеріальної точки у загальному випадку швидкість може змінюватись як за величиною, так і за напрямом. Фізична величина, яка характеризує інтенсивність зміни швидкості, називається прискоренням.

Середнім прискоренням $\vec{a}_c$ називається векторна фізична величина, що визначається відношенням вектора зміни швидкості $\Delta\vec{V} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$ до часу Δt , за який ця зміна відбулась:

$$\vec{a}_c = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} \quad (1.11)$$

Миттєвим прискоренням $\vec{a}$ називається векторна фізична величина, що визначається границею, до якої наближається середнє прискорення $\vec{a}_c$, коли проміжок часу Δt прямує до нуля:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{i} \frac{dV_x}{dt} + \vec{j} \frac{dV_y}{dt} + \vec{k} \frac{dV_z}{dt} = \\ &= \vec{i} \frac{d^2x}{dt^2} + \vec{j} \frac{d^2y}{dt^2} + \vec{k} \frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Вектор прискорення спрямований в той самий бік, що і вектор зміни швидкості $\Delta\vec{V}$, тобто в бік угнутості траєкторії. Прискорення вимірюється в метрах на секунду в квадраті (м/с^2), сантиметрах на секунду в квадраті (см/с^2).

Розглянемо випадок руху матеріальної точки по криволінійній траєкторії (рис.1.4,а) з положення A в положення B за дуже малий проміжок часу $\Delta t = t_2 - t_1$. Зробимо паралельне перенесення векторів швидкості $\vec{V}_1$ і $\vec{V}_2$, які мала матеріальна точка в положеннях A і B в моменти часу t_1 і t_2 , на окремий рисунок (рис.1.4,б).

Вектор зміни швидкості $\Delta\vec{V}$ розкладемо на дві складові: $\Delta\vec{V}_\tau$ — вздовж вектора $\vec{V}_1$, який називають тангенціальною складовою; $\Delta\vec{V}_n$ — вздовж нормалі до $\vec{V}_1$, який називають нормальною складовою:

$$\Delta\vec{V} = \Delta\vec{V}_\tau + \Delta\vec{V}_n$$

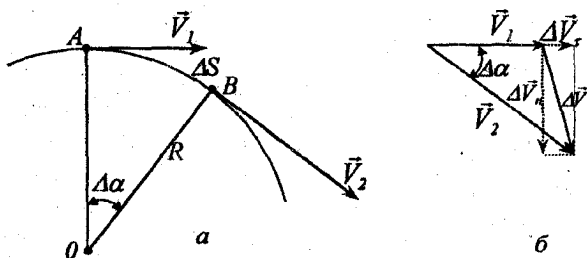


Рис.1.4

Розділимо цю рівність на Δt і перейдемо до границі при $\Delta t \rightarrow 0$ (при цьому $\Delta\alpha \rightarrow 0$, тобто напрями векторів $\vec{V}_1$ і $\vec{V}_2$ будуть майже збігатися):

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}_\tau}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}_n}{\Delta t}$$

або
$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n, \quad (1.13)$$

де $\vec{a}_\tau$ і $\vec{a}_n$ – відповідно тангенціальна і нормальна складові прискорення.

Тангенціальне прискорення характеризує зміну швидкості за величиною і спрямоване по дотичній до траєкторії. Нормальне, або доцентрове, прискорення характеризує зміну швидкості за напрямом і спрямоване вздовж миттєвого радіуса кривини до центра.

Модуль тангенціального прискорення визначається за формулою:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} \quad (1.14)$$

Визначимо величину нормальної складової прискорення. Оскільки $\Delta S = R \cdot \Delta\alpha$ (α в радіанах), а $\Delta V_n = V \Delta\alpha = V \frac{\Delta S}{R}$ (індекс швидкості можна відкинути, оскільки $\vec{V}_1 \approx \vec{V}_2$), то

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V_n}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V}{R} \cdot \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{V^2}{R} \quad (1.15)$$

Модуль і напрям повного прискорення в даній точці M траєкторії (рис.1.5) відповідно визначаються за формулами:

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_n^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{a_n}{a_r}. \quad (1.16)$$

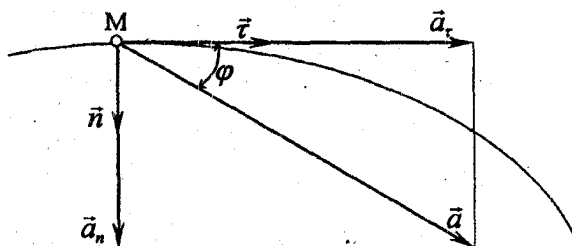


Рис.1.5

З урахуванням тангенціальної і нормальної складових прискорення рух можна класифікувати таким чином:

- 1) $a_r=0, \quad a_n=0$ – прямолінійний рівномірний рух;
- 2) $a_r=a=\text{const}, \quad a_n=0$ – прямолінійний рівнозмінний рух.

Якщо початковий момент часу $t_1=0$ і початкова швидкість $V_1=V_0$, то, позначивши $t_2=t$ і $V_2=V$, одержимо:

$$a_r = a = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1} = \frac{V - V_0}{t},$$

звідки

$$V = V_0 + at.$$

Проінтегрувавши дану формулу в межах від нуля до довільного моменту часу t , одержимо формулу для пройденого шляху при рівнозмінному русі:

$$S = \int_0^t V \cdot dt = \int_0^t (V_0 + at) dt = V_0 t + \frac{at^2}{2};$$

- 3) $a_r = f(t), \quad a_n = 0$ – прямолінійний рух із змінним прискоренням;
- 4) $a_r = 0, \quad a_n = \text{const}$ – рівномірний рух по колу;

- 5) $a_\tau = \text{const}$, $a_n \neq 0$ – криволінійний рівнозмінний рух;
 6) $a_\tau = f(t)$, $a_n \neq 0$ – криволінійний рух із змінним прискоренням.

1.4. Кінематика обертального руху

Для встановлення основних закономірностей обертального руху розглянемо найпростіший випадок обертання абсолютно твердого тіла навколо нерухомої осі OO' (рис. 1.6). За додатній напрям цієї осі виберемо напрям

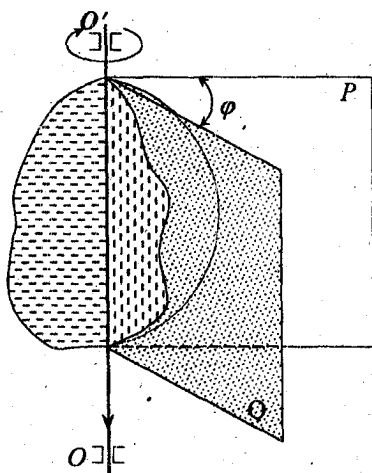


Рис. 1.6

від точки O' до точки O , як це показано на рисунку стрілкою. Проведемо через вісь OO' дві площини: P і Q . Нехай тілом відліку буде нерухома площина P . Площину Q жорстко зв'яжемо з тілом. Обертання тіла навколо осі можна задати за допомогою кута φ між цими площинами. Кут повороту φ повністю визначає розміщення тіла (орієнтацію). Тіло, що обертається навколо нерухомої осі, має одну ступінь вільності.

Зміна кута повороту з часом

$$\varphi = \varphi(t) \quad (1.17)$$

залежить від характеру обертального руху тіла і називається **рівнянням обертального руху тіла**.

При обертанні твердого тіла окремі його точки рухаються по колах, центри яких лежать на осі обертання (рис.1.7).

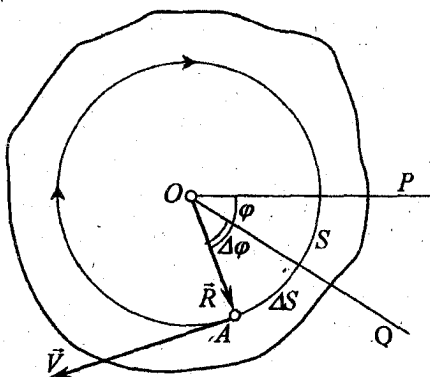


Рис.1.7

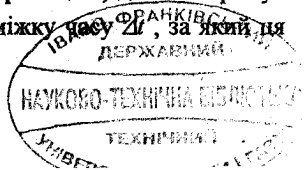
Всі радіуси-вектори $\vec{R}$, що з'єднують точки (наприклад, точка A тіла) з центрами описуваних ними кіл, повертаються протягом однакового проміжку часу Δt на однаковий кут $\Delta\varphi$.

Кутовою швидкістю ω (або миттєвою кутовою швидкістю) називається фізична величина, що визначається границею, до якої прямує відношення кута повороту $\Delta\varphi$, до проміжку часу Δt , за який відбулось обертання тіла, за умови, коли проміжок часу Δt прямує до нуля:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \quad (1.18)$$

Обертання тіла із сталою кутовою швидкістю називають **рівномірним**. Нерівномірне обертання тіла характеризують за допомогою кутового прискорення.

Кутовим прискоренням ε (або миттєвим кутовим прискоренням) називається фізична величина, що визначається границею, до якої прямує відношення зміни кутової швидкості $\Delta\omega$ до проміжку часу Δt , за який ця



зміна відбулась, за умови, коли проміжок часу Δt прямує до нуля:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \quad (1.19)$$

Оскільки $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$,

то
$$\varepsilon = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) = \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \quad (1.20)$$

Отже, значення кутової швидкості і кутового прискорення тіла відповідно дорівнюють першій та другій похідній від кута повороту за часом. При обертальному русі всі точки твердого тіла мають однакові кутові швидкості і кутові прискорення. Кутову швидкість вимірюють у радіанах за секунду (рад/с), а кутове прискорення – у радіанах на секунду в квадраті (рад/с^2).

Кінематичні характеристики різних рухомих точок (шлях, швидкість, прискорення) зв'язані одна з одною і з кінематичними характеристиками обертального руху всього тіла в цілому (кут повороту, кутова швидкість, кутове прискорення). Розглянемо довільну точку A (рис.1.7). Якщо φ вимірювати в радіанах, то S і φ зв'язані відомою рівністю:

$$S = R \cdot \varphi \quad (1.21)$$

За проміжок часу Δt тіло повернеться на кут $\Delta \varphi$ і точка A пройде шлях

$$\Delta S = R \cdot \Delta \varphi \quad (1.22)$$

Розділивши обидві частини рівності (1.22) на Δt і перейшовши до границі, матимемо:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = R \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$$

або
$$V = R \cdot \omega \quad (1.23)$$

На основі формул (1.14) і (1.15), враховуючи (1.23), знаходимо, що тангенціальне прискорення

$$a_{\tau} = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(R \cdot \omega) = R \frac{d\omega}{dt} = R \cdot \varepsilon, \quad (1.24)$$

а нормальне прискорення

$$a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{(R\omega)^2}{R} = R\omega^2. \quad (1.25)$$

Повне прискорення точки тіла згідно з (1.16)

$$a = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}. \quad (1.26)$$

З формули (1.26) випливає, що, знаючи кутову швидкість і кутове прискорення тіла, яке обертається, а також відстань точки від осі обертання, можна визначити величину і напрям прискорення будь-якої точки тіла.

Оскільки лінійна швидкість і лінійне прискорення – векторні величини, а крім того, між величинами V , a_{τ} , a_n і ω і ε існує взаємозв'язок у вигляді (1.23) – (1.25), то кутову швидкість і кутове прискорення доцільно визначати як вектори.

Вектор кутової швидкості $\vec{\omega}$ спрямований вздовж осі обертання тіла в бік поступального руху правого гвинта, коли його повертати за напрямом обертання тіла (рис. 1.8).

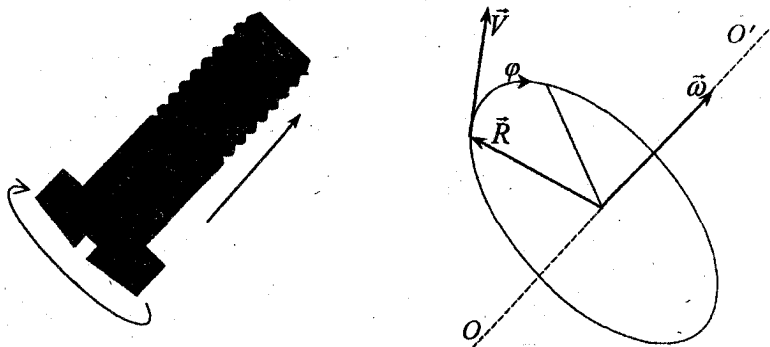


Рис. 1.8

Такий вектор називають осевим або аксіальним. Оскільки кутова швидкість є вектор, то зміна кутової швидкості $d\vec{\omega}$ – також вектор. Отже, кутове прискорення є вектор, який збігається за напрямом з вектором $d\vec{\omega}$. При збільшенні кутової швидкості вектор кутового прискорення збігається з вектором кутової швидкості, а при зменшенні кутової швидкості вектори $\vec{\varepsilon}$ і $\vec{\omega}$ – протилежні.

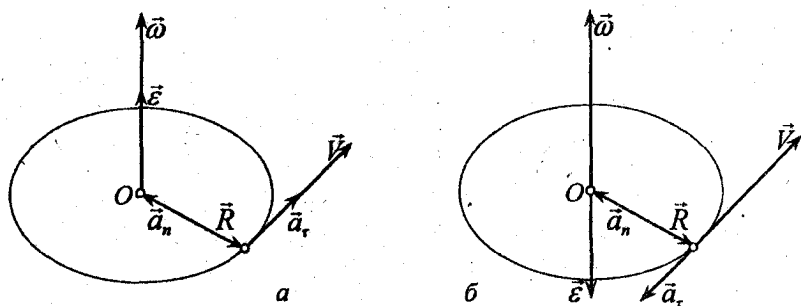


Рис. 1.9

На рис. 1.9 показано розміщення векторів $\vec{V}$, $\vec{\omega}$, $\vec{R}$, $\vec{a}_t$, $\vec{a}_n$ (a – кутова швидкість збільшується; b – зменшується).

Запишемо співвідношення (1.23) – (1.25) у векторній формі. На основі означення векторного добутку маємо:

$$\vec{V} = [\vec{\omega}, \vec{R}], \quad (1.27)$$

$$\vec{a}_t = [\vec{\varepsilon}, \vec{R}], \quad (1.28)$$

$$\vec{a}_n = -\omega^2 \vec{R}. \quad (1.29)$$

У формулі (1.29) знак “-” вказує на те, що нормальне прискорення спрямоване в протилежний бік до радіуса $\vec{R}$, тобто до центра обертання.

При постійному кутовому прискоренні розрахункові формули для кутової швидкості і кута повороту мають вигляд

$$\omega = \omega_0 + \alpha t; \quad \varphi = \omega_0 t + \frac{\alpha^2}{2}, \quad (1.30)$$

де ω_0 – кутова швидкість в початковий момент часу $t_1=0$.

Обертання тіла характеризується також періодом обертання і частотою.

Період обертання T – це час одного повного оберту тіла навколо осі обертання.

Частота обертання n – це кількість обертів, які здійснює тіло за одиницю часу.

Між періодом і частотою обертання існує зв'язок:

$$n = \frac{1}{T} \quad (1.31)$$

Оскільки за період тіло повертається на кут $\Delta\varphi = 2\pi$, то

$$\omega = 2\pi n \quad (1.32)$$

Контрольні запитання

1. Як можна задати рух матеріальної точки в просторі?
2. Дайте визначення основних фізичних величин, які характеризують рух матеріальної точки, а також поступальний і обертальний рухи абсолютно твердого тіла.
3. Який фізичний зміст нормального і тангенціального прискорення матеріальної точки?
4. Наведіть класифікацію руху матеріальної точки з врахуванням значень нормальної і тангенціальної складових прискорення.
5. Який зв'язок існує між кінематичними характеристиками точки при поступальному і обертальному русі твердого тіла?

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Човен проплив відстань між двома населеними пунктами на річці вниз за течією протягом $t_1=480$ с, назад – за $t_2=720$ с. За який час t човен проплив би цю відстань у стоячій воді?

Розв'язання. Позначимо відстань між пунктами буквою S , швидкість руху човна в стоячій воді – буквою V і швидкість руху води в річці – буквою U . Запишемо рівняння руху човна вниз за течією: $S = (V + U) \cdot t_1$ і проти течії: $S = (V - U) \cdot t_2$. З цих рівнянь необхідно знайти величину $t = \frac{S}{V}$.

Перепишемо їх так, щоб виключити U :

$$\frac{S}{t_1} = V + U, \quad \frac{S}{t_2} = V - U.$$

Додавши ці рівняння, одержимо: $\frac{S}{t_1} + \frac{S}{t_2} = 2V$.

Звідси $t = \frac{S}{V} = \frac{2t_1 t_2}{t_1 + t_2} = 576 \text{ с.}$

Приклад 2. Автомобіль рухається по шосе, яке має радіус кривини $R = 50 \text{ м}$. Закон руху автомобіля описується рівнянням

$$S = 10 + 10 \cdot t - 0,5t^2$$

(шлях вимірюється в метрах, час – у секундах). Знайти швидкість автомобіля V , його нормальне a_n , тангенціальне a_τ і повне прискорення в момент часу $t = 5 \text{ с}$.

Розв'язання. Вззявши похідну від шляху за часом, одержимо вираз для швидкості:

$$V = \frac{dS}{dt} = 10 - t.$$

Значення швидкості в даний момент знайдемо, якщо у формулу швидкості підставимо значення часу t :

$$V = 10 - 5 = 5 \text{ м/с}.$$

Тангенціальне прискорення знайдемо, взявши похідну від швидкості за часом:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = -1 \text{ м/с}^2.$$

Знак “-” вказує на те, що рух автомобіля рівносповільнений.

Нормальне прискорення

$$a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{5^2}{50} = 0,5 \text{ м/с}^2$$

Повне прискорення знаходимо як геометричну суму тангенціального і нормального прискорень (рис.1.10):

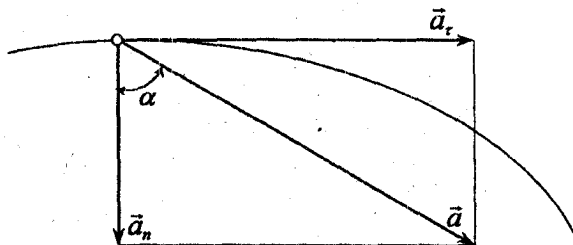


Рис.1.10

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{1 + 0,25} = 1,12 \text{ м/с}^2$$

Напрямок повного прискорення визначимо, якщо знайдемо кут між повним прискоренням і напрямом радіуса кривини траєкторії або напрямом нормального прискорення:

$$\cos \alpha = \frac{a_n}{a} = \frac{0,5}{1,12} = 0,446, \quad \alpha = 63^\circ 30'$$

Приклад 3. Маховик, який робить n обертів за одиницю часу, почав обертатися рівномірно-сповільнено з того моменту, коли вимкнули двигун, і зупинився через час t . Скільки обертів N зробив маховик за цей час?

Розв'язання. Як і в попередніх прикладах починаємо із визначення закону руху. Розглянемо рух будь-якої точки на ободі маховика колеса. Шлях, пройдений цією точкою з моменту початку гальмування до повної зупинки, $S = 2\pi RN$, де R – відстань від осі обертання до вибраної точки,

N – шукане число обертів.

Закон руху вибраної точки можна виразити формулою

$$2\pi RN = V_0 t - \frac{at^2}{2},$$

або $V_0 = \omega_0 R$, де ω_0 – кутова швидкість маховика до початку гальмування. Оскільки

$$\omega_0 = 2\pi n, \quad V_0 = 2\pi n R, \quad a = \frac{V_0 - 0}{t} = \frac{2\pi n R}{t},$$

$$2\pi RN = 2\pi n R t - \frac{2\pi n R t^2}{2t},$$

звідки

$$N = \frac{n}{2} t.$$

Приклад 4. При русі автомобіля його колесо радіусом $r = 0,75$ м котиться без ковзання по колу радіусом $R = 6$ м в горизонтальній площині з швидкістю $1,5$ м/с.

Знайти: 1) кутову швидкість і кутове прискорення колеса;

2) кут, утворений вектором $\vec{\omega}$ і вертикаллю.

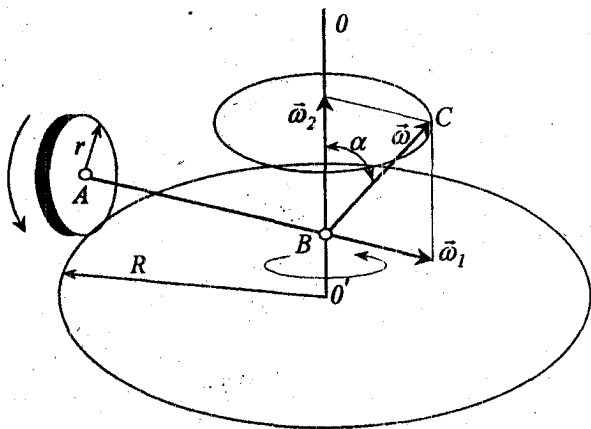


Рис. 1.11

Розв'язання. Кочення колеса представимо як суму двох обертових рухів з кутовою швидкістю: 1) $\vec{\omega}_1$ навколо горизонтальної осі AB (рис.1.11); 2) $\vec{\omega}_2$ разом з віссю AB навколо вертикальної осі OO' . Напрями векторів $\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2$ на рисунку відповідають правилу правого гвинта. Результуючий вектор кутової швидкості за модулем дорівнює:

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \quad (1)$$

Кутова швидкість чисельно дорівнює відношенню лінійної швидкості до радіуса обертання:

$$\omega_1 = \frac{V}{r}; \quad \omega_2 = \frac{V}{R} \quad (2)$$

Замінюючи у формулі (1) ω_1 і ω_2 виразами (2), остаточно дістанемо:

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{V}{r}\right)^2 + \left(\frac{V}{R}\right)^2} = \frac{V}{r} \sqrt{1 + \frac{r^2}{R^2}} \approx 2 \frac{pad}{c^2}$$

Як видно із рисунка, вектор $\vec{\omega}$ утворює з вертикаллю кут

$$\alpha = \arctg\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) = \arctg\left(\frac{R}{r}\right) = 83^\circ$$

Кутове прискорення – це швидкість зміни вектора кутової швидкості. При коченні колеса модуль ω_1 не змінюється, але сам вектор змінюється: він повертається навколо осі OO' . Оскільки його початок (точка B на рис.) нерухомий, то швидкість зміни $\vec{\omega}$, тобто величина ε , дорівнює швидкості руху кінця вектора $\vec{\omega}$ – точки C . Точка C опише коло радіусом, що чисельно дорівнює ω_1 , за час, що дорівнює періоду T_2 обертання колеса навколо осі OO' . Тому дістанемо

$$\varepsilon = \frac{2\pi \cdot \omega_1}{T_2} = \omega_2 \cdot \omega_1 = \frac{V^2}{rR} = 0,5 \frac{pad}{c^2}$$

Задачі для самостійних вправ

1. Автомобіль проходить першу третину шляху з швидкістю V_1 , а

решту шляху – з швидкістю $V_2 \doteq 50 \text{ км/год}$. Визначити швидкість на першій ділянці шляху V_1 , якщо середня швидкість на всьому шляху $V_c = 37,5 \text{ км/год}$.

Відповідь: 25 км/год .

2. Пасажир сидить біля вікна поїзда, що рухається з швидкістю 90 км/год . Назустріч рухається поїзд довжиною 700 м з швидкістю 36 км/год . Скільки часу другий поїзд рухається повз пасажирів?

Відповідь: 20 с .

3. Електропоїзд проходить перегон $S=2 \text{ км}$ за $t=2 \text{ хв}$. 20 с . Максимальна швидкість поїзда $V=60 \text{ км/год}$. На початку і в кінці перегону поїзд рухається з постійними прискореннями, рівними за абсолютною величиною. Знайти ці прискорення.

Відповідь: $0,83 \text{ м/с}^2$; $-0,83 \text{ м/с}^2$.

4. М'ячик, кинутий з балкона в вертикальному напрямку, через $t=3 \text{ с}$ впав на землю. Знайти початкову швидкість м'ячика, якщо висота балкона над землею дорівнює $14,1 \text{ м}$. Опором повітря знехтувати.

Відповідь: 10 м/с .

5. Один із способів оцінки якості автомобіля базується на визначенні швидкості розгону з місця до швидкості 60 км/год . Хороші шини забезпечують без ковзання прискорення приблизно $0,5 g$. Скільки часу і яка відстань потрібна в цьому випадку для розгону до 60 км/год ?

Відповідь: $3,4 \text{ с}$; $28,3 \text{ м}$.

6. Траєкторія руху бурової колони задана рівнянням $y = 3 + 10^{-4} t$ (y вимірюється в метрах, t – в секундах). Чому дорівнює швидкість буріння?

Відповідь: $10 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}$.

7. Залежність пройденого тілом шляху S від часу t задана рівнянням $S = Bt^2 + Ct^3$, де $B = 0,14 \text{ м/с}^2$; $C = 0,01 \text{ м/с}^3$.

Через скільки часу після початку руху прискорення тіла дорівнює 1 м/с^2 ? Чому дорівнює середнє прискорення тіла за цей же час?

Відповідь: 12 с ; $a_c = 0,64 \text{ м/с}^2$.

8. Канатний шків обертається з постійним кутовим прискоренням $\varepsilon = 2 \text{ с}^{-2}$. Через $0,5 \text{ с}$ після початку руху повне прискорення шківів $a = 13,6$

см/с^2 . Чому дорівнює радіус шківів?

Відповідь: 6,1 см.

9. Чому дорівнює доцентрове прискорення тіла на екваторі, зумовлене обертанням Землі? Радіус Землі 6370 км.

Відповідь: 0,034 м/с^2 .

10. Маховик обертається рівноприскорено. Знайти кут, який утворює вектор повного прискорення будь-якої точки маховика з радіусом у той момент, коли маховик здійснив перші два оберти.

Відповідь: $2^\circ 17'$.

11. Канатний шків станка-качалки радіусом 0,2 м обертається згідно з рівнянням $\varphi = Bt + Ct^2$, де $B = -1 \text{ рад/с}$; $C = 0,1 \text{ рад/с}^2$. Знайти тангенціальне, нормальне і повне прискорення точок на ободі шківів для моменту часу $t = 10 \text{ с}$.

Відповідь: $0,04 \text{ м/с}^2$; $0,2 \text{ м/с}^2$; $0,204 \text{ м/с}^2$.

Розділ 2. ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ І ПОСТУПАЛЬНОГО РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА

2.1. Завдання динаміки. І закон Ньютона.

Маса і сила

В основі динаміки лежать три закони Ньютона, сформульовані ним у праці "Математичні начала натуральної філософії" (1687 р.). Ці закони – результат геніального узагальнення багатовікового досвіду і знань людства про різного роду рухи тіл. На їх основі Ньютон розробив загальний метод вивчення складних механічних явищ, який використовують для конструювання машин і механізмів, керування їх рухом. Закони динаміки встановлюють зв'язок між рухом тіл і причинами, які спричинили або змінили цей рух.

Основні задачі динаміки: знаючи характер взаємодії тіл, визначити кінематичні характеристики їх руху; знаючи кінематичні характеристики, визначити сили взаємодії тіл.

І закон Ньютона: всяка матеріальна точка (тіло) зберігає стан спокою або рівномірного прямолінійного руху доти, доки дія з боку інших тіл

не змусить його змінити цей стан. Явище, що полягає в збереженні швидкості руху тіл або їх спокою при відсутності дії на них інших тіл, називають інерцією. Тому I закон Ньютона називають ще законом інерції.

Експериментально перевірити I закон Ньютона неможливо, але якщо створити умови, за яких всі зовнішні дії на тіло взаємно зрівноважуються, то як показує дослід, тіло або перебуватиме в стані спокою (наприклад, усі предмети в кімнаті), або рухатиметься рівномірно і прямолінійно (наприклад, усталений рух парашутиста). I закон Ньютона справджується не в усіх системах відліку. Це зумовлене тим, що стан спокою або рівномірного прямолінійного руху тіла має відносний характер і залежить від системи відліку, відносно якої розглядається стан тіла. Наприклад, пасажир, що сидить у вагоні поїзда чи літака, нерухомий відносно їх стінок, але в той же час він рухається разом з ними відносно землі, причому цей рух може бути нерівномірним і непрямолінійним. Система відліку, відносно якої виконується I закон Ньютона, називається інерціальною системою відліку. З великим ступенем точності інерціальною системою відліку можна вважати геліоцентричну систему відліку, тобто систему, в якій початок координат розміщено в центрі Сонця, а напрямки координатних осей орієнтовано на три відповідні зірки. Іноді при розв'язанні практичних задач вважають інерціальною системою відліку систему, зв'язану із Землею. Оскільки Земля обертається навколо своєї осі і здійснює рух по еліптичній орбіті навколо Сонця, то така система відліку неінерціальна. Проте ефекти, зумовлені неінерціальністю земної системи відліку, дуже малі. Тому надалі вважатимемо цю систему відліку інерціальною, а при розгляданні законів механіки користуватимось тільки інерціальними системами відліку.

Вивчення різних рухів відносно інерціальних систем відліку дає змогу зробити висновок, що прискорення тіл завжди зумовлене дією на них інших тіл. Для кількісної оцінки дії одного тіла на інше в класичній механіці введено поняття сили. Під силою в механіці розуміють не фізіологічні відчуття зусиль, а фізичну причину, яка виникає внаслідок взаємодії двох тіл і змінює стан їх руху. Взаємодія тіл може проявлятися не тільки в наданні їм прискорення, а й у зміні форми або об'єму тіл, тобто в їх деформації. Силою називається векторна величина, що є мірою механічної дії на тіло з боку інших тіл або полів, в результаті якої тіло набуває прискорення.

або деформується. Між силами, що виникають при безпосередньому дотиканні тіл (пружні сили, сили тертя), і силами, що виникають при дії полів (сили всесвітнього тяжіння, взаємодії між електричними зарядами або електромагнітні сили), принципових відмінностей немає. І ті, і інші сили зумовлені існуванням полів. Сили, що виникають при безпосередньому дотиканні тіл, зумовлені полями молекул і атомів тіл. Оскільки поля молекул і атомів різко зменшуються із збільшенням відстаней між ними, то дія цих полів проявляється при дуже малих відстанях між молекулами та атомами, тобто практично при безпосередньому дотиканні тіл.

Із дослідів відомо, що прискорення тіла залежить не тільки від величини діючої на нього сили, а й від деякої фізичної властивості прискорюваного тіла. Ця властивість змінюється із зміною кількості речовини тіла і називається інертністю. Інертність тіл проявляється тільки в динамічних явищах, тобто при їх взаємодії та дії на них інших тіл. Маса тіла – фізична величина, яка є мірою інертності тіла.

2.2. II закон Ньютона. Сила, як похідна імпульсу тіла

На запитання, яким буде рух матеріальної точки (тіла) під дією прикладеної сили, дає відповідь II закон Ньютона – основний закон динаміки поступального руху. Можна встановити зв'язок між величиною сили, що діє на тіло, і прискоренням, якого воно набуває. Для цього користуються візком, встановленим на гладенькій поверхні (рис.2.1). До візка прикладено силу натягу нитки $\vec{F}$, яку вимірюють динамометром. Спочатку встановлюють залежність прискорення від величини діючої сили. Змінюючи натяг нитки так, щоб динамометр показав сили $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots$, приходять до висновку, що в усіх випадках рух рівноприскорений з відповідними прискореннями $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots$. Відношення сили до прискорення при $m = \text{const}$ є величина стала:

$$\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = \dots \quad (2.1)$$

Звідси випливає, що прискорення, з яким рухається тіло, пропорційне діючій силі:

$$\vec{a} \sim \vec{F} \quad (2.2)$$

Якщо в дослідях з візком діючу силу залишити сталою, а змінювати

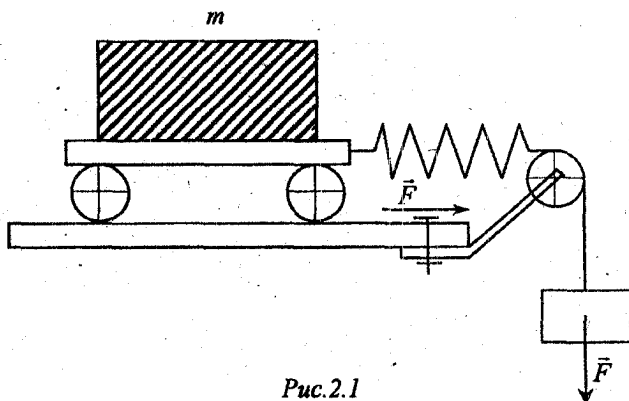


Рис. 2.1

навантаження візка m , то прискорення буде різним. При цьому із збільшенням навантаження прискорення зменшується:

$$a \sim \frac{1}{m} (F = \text{const}) . \quad (2.3)$$

Враховуючи (2.2) і (2.3), можна записати

$$\vec{a} = k \frac{\vec{F}}{m} . \quad (2.4)$$

Формула (2.4) є математичним записом II закону Ньютона.

В СІ коефіцієнт пропорційності $k = 1$. Тоді

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}, \quad \vec{F} = m\vec{a} . \quad (2.5)$$

Формула (2.5) дає змогу вибрати одиницю сили. В СІ за одиниці сили беруть ньютон (Н).

Ньютон – це така сила, яка тілу масою 1 кг надає прискорення 1 м/с^2 .

II закон Ньютона формулюють так: сила, що діє на тіло, дорівнює добутку маси тіла на прискорення, якого воно набуває. Оскільки наслідком

її сили є прискорення, то з точки зору фізики правильніше буде сформулювати його так: прискорення, якого набуває тіло, прямо пропорційне діючій силі і обернено пропорційне його масі.

Якщо на матеріальну точку (тіло) масою m одночасно діє кілька сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots$, то II закон Ньютона матиме такий вигляд:

$$\vec{F} = m\vec{a},$$

а $\vec{F} = \sum \vec{F}_i$ називається головним вектором системи сил, а також рівнодійною або результуючою силою. Його можна записати ще в такому вигляді:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{V}}{dt} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}. \quad (2.6)$$

Рівняння (2.5) або (2.6) можна записати в скалярній формі:

$$\begin{aligned} F_x &= ma_x = m \frac{dV_x}{dt} = m \frac{d^2 x}{dt^2}; \\ F_y &= ma_y = m \frac{dV_y}{dt} = m \frac{d^2 y}{dt^2}; \\ F_z &= ma_z = m \frac{dV_z}{dt} = m \frac{d^2 z}{dt^2}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Система рівнянь (2.7) називається рівнянням руху матеріальної точки.

Враховуючи, що маса матеріальної точки (тіла) в класичній механіці є величиною сталою, II закон Ньютона можна записати в іншій формі:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt} (m\vec{V}). \quad (2.8)$$

Векторна величина

$$\vec{p} = m\vec{V}, \quad (2.9)$$

яка чисельно дорівнює добутку маси матеріальної точки на її швидкість і

яка має напрямок швидкості, називається імпульсом (кількістю руху) матеріальної точки.

Підставивши (2.9) в (2.8) дістанемо:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad (2.10)$$

Тепер II закон Ньютона формулюють так: похідна від імпульсу матеріальної точки за часом дорівнює силі, що діє на неї і збігається з нею за напрямком. Зауважимо, що рівняння (2.10) можна строго використовувати тільки для матеріальної точки. Для тіла його також можна використовувати, якщо під $\vec{V}$ розуміти швидкість центра мас тіла, а не якої-небудь довільної точки тіла.

2.3. III закон Ньютона

У I і II законах Ньютона йдеться тільки про силу, що діє на дане тіло, але нічого не сказано про інші тіла, з боку яких ця сила діє. Сила характеризує взаємодію щонайменше двох тіл. Роль другого тіла в динамічних явищах відображена в III законі динаміки, який формулюється так: два тіла діють одне на одне з силами, які спрямовані вздовж однієї прямої, рівними за абсолютними величинами і протилежними за напрямком:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad (2.11)$$

де $\vec{F}_{12}$ – сила, з якою діє друге тіло на перше, а $\vec{F}_{21}$ – сила, з якою діє перше тіло на друге.

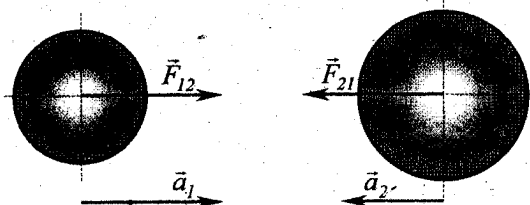


Рис.2.2

Розглянемо, наприклад, два різноіменно заряджених тіла масами m_1 і m_2 , які притягуються одне до одного (рис.2.2).

Під дією сил $\vec{F}_{12}$ і $\vec{F}_{21}$ тіла набувають прискорень $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$.

Згідно з II законом Ньютона можна записати :

$$\vec{F}_{12} = m_1 \vec{a}_1 \quad \text{і} \quad \vec{F}_{21} = m_2 \vec{a}_2 . \quad (2.12)$$

Використовуючи вирази (2.11) і (2.12), дістанемо:

$$m_1 \vec{a}_1 = -m_2 \vec{a}_2$$

або

$$\vec{a}_1 = -\frac{m_2}{m_1} \vec{a}_2 ,$$

тобто прискорення двох тіл, що взаємодіють між собою, обернено пропорційно їх масам і спрямовані в протилежні боки.

Зауважимо, що III закон Ньютона говорить про рівність сил, прикладених до різних тіл, а тому не можна говорити про їх рівнодійну.

Ньютон, досліджуючи рух різних тіл, прийшов до висновку, що всі механічні рухи підпорядковані трьом законам динаміки. Може здатися, що I закон є окремим випадком II закону. Справді, якщо у формулі (2.5) вважати, що $\vec{F} = 0$, то $\vec{a} = 0$, тобто тіло перебуває в спокої або рухається рівномірно прямолінійно. Проте рівняння, яке виражає II закон Ньютона, справджується тільки в інерціальній системі відліку. Існування такої системи відліку стверджує саме I закон Ньютона. Отже, I закон Ньютона не можна розглядати як окремий випадок II закону.

2.4. Неінерціальні системи відліку. Сили інерції

У попередніх підрозділах розглянуто рух матеріальної точки (тіла) відносно інерціальних систем відліку. Системи відліку, які рухаються прискорено відносно інерціальних систем, називаються неінерціальними. В неінерціальних системах відліку закони Ньютона взагалі не виконуються. Тіло може рухатись прискорено в неінерціальній системі відліку, якщо на нього не діють інші тіла. Наприклад, при раптовому гальмуванні автобуса пасажир зазнає прискореного відхилення в напрямку руху. При повороті автобуса пасажир відхиляється в протилежний бік до центра траєкторії

його руху. Закони Ньютона можна використовувати і для неінерціальних систем відліку, якщо крім сил, зумовлених дією одних тіл на інші, введемо поняття сил особливого роду – так званих сил інерції, які зумовлені прискоренням рухомої системи відліку.

З урахуванням сил інерції, II закон Ньютона буде справедливим для будь-якої системи відліку: добуток маси тіла на прискорення в розглядуваній системі відліку $\vec{a}'$ дорівнює сумі всіх сил, що діють на тіло. Прискорення $\vec{a}'$ в неінерціальній системі відліку тіло набуває під дією сил $\vec{F}$, зумовлених дією одних тіл на інші, і сил інерції $\vec{F}_{in}$, тобто

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{in}. \quad (2.13)$$

Оскільки $\vec{F} = m\vec{a}$ ($\vec{a}$ – прискорення тіла в інерціальній системі відліку), то $m\vec{a}' = m\vec{a} + \vec{F}_{in}$.

Підкреслимо, що сила інерції – це не результат дії іншого тіла, а властивість системи відліку. Для сили інерції не існує протидіючої сили. Отже, III закон Ньютона для сил інерції не виконується. Іноді ці сили називають фіктивними, однак така назва недоцільна, оскільки ці сили реально існують і їх можна виміряти динамометром. Характерною властивістю сил інерції є їх пропорційність масі тіл. Тому сили інерції аналогічні силі тяжіння.

Розглянемо випадки руху тіл в неінерціальних системах відліку.

1. Рух тіл у неінерціальних системах, що перебувають у поступальному прискореному русі.

Нехай система відліку $x'O'y'$, яка зв'язана з вагоном, рухається поступально з прискоренням $\vec{a}_0$ відносно інерціальної системи відліку xOy , яка зв'язана з Землею (рис.2.3). До стелі вагона на нитці підвішено кульку масою m . Під час прискореного руху вагона кулька відхиляється від вертикалі на деякий кут φ . Спостерігач, який знаходиться в системі $x'O'y'$ (наприклад, на пероні вокзалу), відхилення кульки пояснює так. Коли вагон починає рухатися прискорено, кулька намагається зберегти свій попередній стан і тому відставатиме від вагона, відхиляючись на деякий кут. Нитка відхилятиметься доти, доки рівнодійна сил тяжіння $\vec{P}$ і натягу нитки $\vec{T}$ не досягне величини $\vec{F}$, яка забезпечить рух кульки з прискоренням $\vec{a}_0$.

Спостерігач, який знаходиться в неінерціальній системі відліку $x'O'y'$ (у вагоні), стверджує, що відхилена кулька відносно нього перебуває

в спокої, тобто рівнодійна сил, які діють на кульку, дорівнює нулю. Оскільки нитка з кулькою відхилена на кут φ , то спостерігач вважає, що на кульку, крім сил $\vec{P}$ і $\vec{T}$, діє сила $\vec{F}_{in}$, яка зрівноважує силу $\vec{F}$. Таким чином,

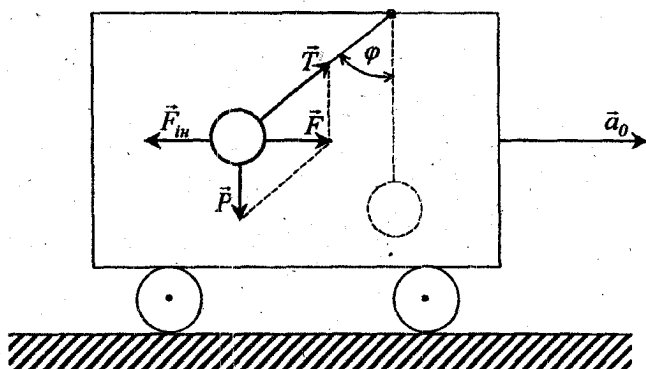


Рис.2.3

$$\vec{F}_{in} = -\vec{F} = -m\vec{a}_0. \quad (2.14)$$

Кут нахилу нитки від вертикалі

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F}{P} = \frac{ma_0}{mg} = \frac{a_0}{g},$$

тобто збільшується при зростанні a_0 .

Прикладом таких неінерціальних систем є всі види транспорту, які рухаються прискорено на початку руху або при зупинці. Значні сили інерції проявляються при запуску і посадці космічних кораблів.

2. Сили інерції у системах відліку, що рівномірно обертаються.

Нехай система відліку обертається із сталою кутовою швидкістю $\vec{\omega}$. В такій системі тіло може перебувати у спокої і може рухатись відносно неї.

А. Спочатку розглянемо випадок, коли тіло перебуває в спокої відносно неінерціальної системи відліку. Такою системою може бути диск, який

обертається навколо вертикальної осі (рис.2.4).

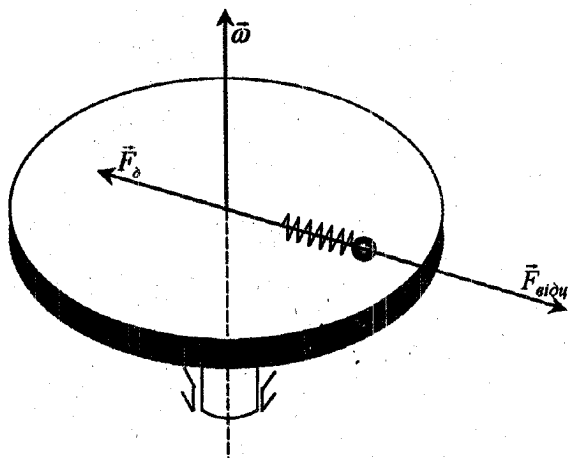


Рис.2.4

Разом з диском обертається насаджена на стержень кулька, яка з'єднана з центром диска пружиною. Розглянемо рух кульки в інерціальній (кімната) і неінерціальній (рухомий диск) системах відліку. Спостерігач в інерціальній системі відліку робить висновок, що на кульку, яка обертається разом з диском, повинна діяти доцентрова сила $F_o = m\omega^2 R$, величина якої дорівнює силі пружності розтягнутої пружини. Спостерігач, який знаходиться в рухомій системі, робить висновок, що на кульку діє сила, спрямована по радіусу від центра, яка зрівноважується пружною силою розтягнутої пружини. Тому відцентрова сила інерції дорівнює доцентровій:

$$\vec{F}_{відч} = -\vec{F}_o = m\omega^2 \vec{R}, \quad (2.15)$$

тобто вона залежить від маси, кутової швидкості, відстані від центра обертання і спрямована по радіусу від центра.

Відцентрові сили можуть досягати великих значень у відцентрових механізмах: сепараторах, центрифугах, насосах. При проектуванні деталей

машин, які швидко обертаються (маховики двигунів, ротори, гвинти літаків і вертольотів), приймаються відповідні заходи для зрівноважування відцентрових сил інерції.

Б. Розглянемо випадок, коли тіло рухається з швидкістю $\vec{V}'$ відносно обертальної неінерціальної системи відліку. Для цього над горизонтальним диском встановимо нерухомий похилий жолоб, з якого на диск скочується кулька (рис.2.5).

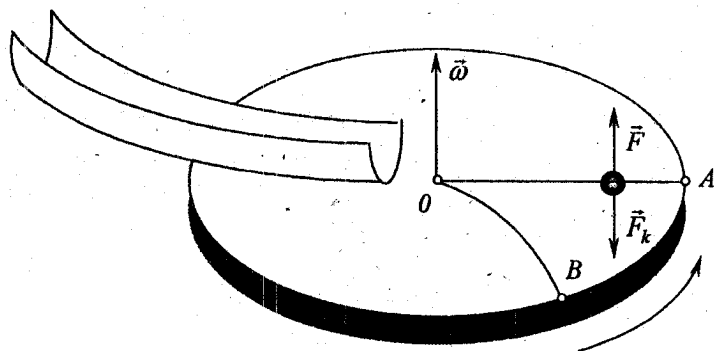


Рис.2.5

Якщо диск не обертається, то кулька котиться вздовж радіуса по траєкторії OA . Коли кулька скочується на диск, який обертається з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$, то її траєкторією буде дуга OB ; при цьому швидкість кульки $\vec{V}'$ змінює свій напрямок. Спостерігач, який знаходиться у рухомій системі відліку, пояснює викривлення траєкторії руху кульки дією сили, яка перпендикулярна до напрямку швидкості її руху. Цією силою є сила Коріоліса

$$\vec{F}_k = -2m[\vec{\omega}, \vec{V}'] \quad (2.16)$$

Для того, щоб змусити кульку котитися вздовж радіуса OA при обертанні диска, на кульку слід подіяти з силою $\vec{F}$, яка дорівнює за значенням

сили $\vec{F}_k$ і протилежна за напрямком. Підкреслимо, що сила Коріоліса діє тільки на тіла, які перебувають у русі відносно систем відліку, що обертаються. Дією сили $\vec{F}$ пояснюється ряд явищ на Землі: праві береги рік північної півкулі Землі розмиті та круті, а в південній півкулі крутіші ліві береги; тепла течія Гольфстрім, яка виходить з Мексиканської затоки у напрямку, близькому до меридіального, під дією сили Коріоліса пересікає Атлантичний океан і виходить у Баренцове море; тіла, які падають на Землю, рухаються не по вертикалі, а відхиляються на схід (відхилення буде максимальним на екваторі і дорівнює нулю на полюсах); силою Коріоліса пояснюється повертання площини коливань маятника Фуко (доказ обертання Землі навколо своєї осі).

Розкриваючи зміст сил інерції $\vec{F}_{in}$ у формулі (2.13), дістанемо основний закон динаміки для неінерціальних систем відліку:

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{in} + \vec{F}_{відц} + \vec{F}_k, \quad (2.17)$$

де сили інерції задаються формулами (2.14) – (2.16).

Контрольні запитання

1. Що називається масою тіла?
2. Сформулюйте I закон Ньютона.
3. Яку властивість матерії характеризує маса?
4. Який фізичний зміст поняття сили?
5. Яка система відліку називається інерціальною?
6. Сформулюйте II закон Ньютона.
7. Що називається імпульсом тіла?
8. Сформулюйте III закон Ньютона.
9. В яких системах відліку справджуються закони Ньютона?
10. Які системи відліку називаються неінерціальними?
11. Внаслідок чого виникають сили інерції?
12. Запишіть рівняння руху матеріальної точки відносно неінерціальної системи відліку.
13. Перелічіть відомі вам явища, зумовлені неінерціальністю земної системи відліку. Дайте пояснення цим явищам.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Автомобіль масою $m = 1500$ кг рухається по шосе з швидкістю $V_1 = 120$ км/год. Якщо відпустити педаль газу, то за $t = 5$ с його швидкість зменшиться до $V_2 = 105$ км/год. Чому дорівнює результуюча сила опору (при такій швидкості це в основному опір повітря)?

Розв'язання. Знайдемо середнє прискорення:

$$a_c = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V_2 - V_1}{t} = \frac{-4,17}{5} = -0,834 \text{ м/с}^2.$$

Середня сила: $F = ma = 1,5 \cdot 10^3 (-0,834) = -1,25 \cdot 10^3 \text{ Н}$.

Ця величина становить 8,5% ваги автомобіля.

Приклад 2. Визначити прискорення тягарців і силу натягу ниток (рис.2.6). Вважати нитки нерозтяжними, тертям і масою ниток та блоків нехтувати. $m_1 > m_2 + m_3$ і $m_2 > m_3$.

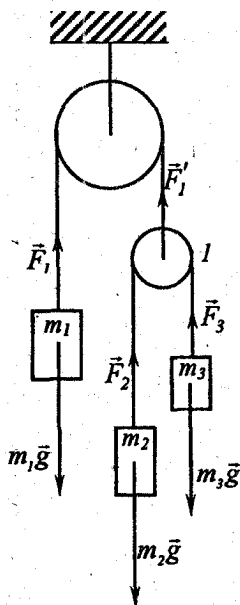


Рис.2.6

Розв'язання. Позначимо прискорення тіла масою m_1 і блока 1 як цілого через a , прискорення тіла масою m_2 відносно блока 1 – через a_1 . Вважатимемо величини додатними, які напрямлені вертикально вниз. Тоді прискорення мас m_2 і m_3 відносно нерухомого блока відповідно будуть $(a_1 - a)$ і $-(a + a_1)$.

Якщо нехтувати масами блоків і ниток, то сили натягу ниток повинні задовольняти такі умови:

$$F_2 = F_3, \quad F_1 = F_1' = F_2 + F_3 = 2F_2. \quad (1)$$

Тоді рівняння динаміки для кожного тягарця матимуть такий вигляд:

$$m_1 g - F_1 = m_1 a;$$

$$m_2 g - F_2 = m_2 (a_1 - a); \quad (2)$$

$$m_3 g - F_3 = -m_3 (a + a_1),$$

де g – прискорення вільного падіння.

Рівняння (2) перепишемо у такому вигляді:

$$\begin{aligned}m_1 g - 2F_2 &= m_1 a ; \\m_2 g - F_2 &= m_2 a_1 - m_2 a ; \\m_3 g - F_2 &= -m_3 a - m_3 a_1 .\end{aligned}\tag{3}$$

Розв'язавши систему рівнянь (3) відносно невідомих a, a_1 і F_2 , дістанемо:

$$\begin{aligned}a &= \frac{m_1(m_2 + m_3) - 4m_2 m_3}{m_1(m_2 + m_3) + 4m_2 m_3} \cdot g ; \\a_1 &= \frac{2m_1(m_2 - m_3)}{m_1(m_2 + m_3) + 4m_2 m_3} \cdot g ; \\F_2 &= \frac{4m_1 m_2 m_3}{m_1(m_2 + m_3) + 4m_2 m_3} \cdot g ; \\F_1 &= 2F_2 .\end{aligned}$$

Приклад 3. Льотчик натискає на сидіння крісла в нижній точці петлі Нестерова із силою $F=6250$ Н. Вага льотчика $P=780$ Н. Радіус петлі $r=250$ м. Визначити швидкість літака.

Розв'язання. У нижній точці петлі льотчик рухається по дузі кола під дією доцентрової сили $\vec{F}_o$, яка є рівнодійною ваги льотчика $\vec{P}$ і реакції сидіння $\vec{R}$:

$$\vec{F}_o = \vec{P} + \vec{R}\tag{1}$$

Сили $\vec{F}_o$ і $\vec{R}$ спрямовані вертикально вгору, а сила $\vec{P}$ – вертикально вниз. Тому

$$F_o = R - P.\tag{2}$$

За III законом Ньютона реакція сидіння $\vec{R}$ чисельно дорівнює силі $\vec{F}$, яка притискує льотчика до сидіння. Отже,

$$F_0 = F - P, \quad (3)$$

де

$$F_0 = \frac{mV^2}{r} \quad \text{або} \quad F_0 = \frac{PV^2}{gr} \quad (4)$$

Підставляючи вираз (4) у рівняння (3), дістанемо:

$$\frac{PV^2}{gr} = F - P,$$

звідки

$$V = \sqrt{gr \left(\frac{F}{P} - 1 \right)} = 131 \text{ м/с}.$$

Приклад 4. З вишки висотою h (рис. 2.7) падає тіло. Визначити величину відхилення тіла від вертикалі під час його падіння. Географічна широта місця φ .

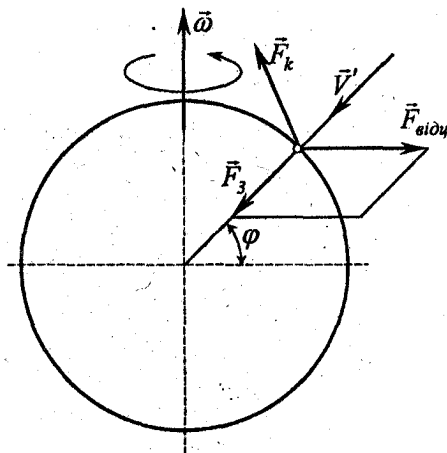


Рис. 2.7

Розв'язання. Рух тіла розглядатимемо в системі відліку, яка зв'язана з Землею. При падінні тіла на нього діятимуть три сили: сила тяжіння $\vec{F}_3$,

відцентрова сила $\vec{F}_{\text{відц}}$ і сила Коріоліса $\vec{F}_k$.

Сила Коріоліса $\vec{F}_k = -2m[\vec{\omega}, \vec{V}']$ перпендикулярна до площини, в якій лежать вектори $\vec{\omega}$ і $\vec{V}'$. У даному випадку вона перпендикулярна до площини рисунка і спрямована від нас. Величина сили $F_k = 2m\omega V' \cos \varphi$. Наближено $V' = gt$. Тоді $F_k = 2mg\omega t \cdot \cos \varphi$. Сила F_k надає прискорення тілу у горизонтальному напрямку на схід:

$$a = \frac{F_k}{m} = 2g\omega t \cdot \cos \varphi.$$

Проінтегрувавши прискорення двічі, дістанемо, що величина зміщення тіла на схід при його падінні

$$S = \frac{1}{3}\omega g t^3 \cos \varphi,$$

де t – час падіння тіла.

Задачі для самостійних вправ

1. Маса ліфта з пасажирами – 800 кг. Знайти, з яким прискоренням і в якому напрямку рухається ліфт, якщо відомо, що натяг каната, що утримує ліфт: а) 1200 Н; б) 6000 Н.

Відповідь: а) 5,2 м/с², ліфт піднімається; б) – 2,3 м/с², ліфт опускається вниз.

2. Через блок перекинута нитка, до кінця якої підвішені вантажі масою 2 і 2,1 кг. Початкові швидкості вантажів дорівнюють нулю. Яке переміщення вантажів за 2 с? Яка сила натягу нитки? Масою нитки і тертям у блоці нехтувати.

Відповідь: $\approx 0,48$ м; $\approx 20,1$ Н.

3. Вагон, маса якого $60 \cdot 10^3$ кг, під'їжджає з швидкістю 0,2 м/с до нерухомої платформи і ударяє в неї буфером, внаслідок чого платформа набуває швидкості 0,4 м/с. Яку масу має платформа, якщо після удару швидкість вагона зменшилася до 0,1 м/с?

Відповідь: $15 \cdot 10^3$ кг.

Автодрезина тягне дві платформи з вантажем, розвиваючи при цьому

силу тяги 800 Н . Маса першої платформи $12 \cdot 10^3\text{ кг}$, другої – $8 \cdot 10^3\text{ кг}$.
З якою силою натягується зчеплення між платформами?

Відповідь: 320 Н .

5. Мотузка витримує вантаж масою 90 кг при вертикальному підніманні його з деяким прискоренням і вантаж масою 110 кг при опусканні з таким самим прискоренням. Який вантаж можна піднімати за допомогою цієї мотузки рівномірно?

Відповідь: 990 Н .

6. До динамометра, підвішеного до кабіни ліфта, прикріпили вантаж масою 5 кг . Ліфт рухається вгору. Наскільки буде відрізнятись показ динамометра під час розгону від показу при гальмуванні, якщо відомо, що ліфт рухався з однаковим прискоренням 2 м/с^2 при розгоні і гальмуванні?

Відповідь: 20 Н .

7. З гармати випітає снаряд масою 10 кг з швидкістю 500 м/с . Знайти силу тиску порохових газів, вважаючи її постійною за весь час руху снаряда $0,1\text{ с}$ в стволі гармати.

Відповідь: 500 кН .

8. У вагоні, який рухається горизонтально з постійним прискоренням 3 м/с^2 , висить на дротині вантаж масою 2 кг . Знайти силу натягу дротини і кут її відхилення від вертикалі.

Відповідь: 21 Н ; 17° .

9. Вантаж масою 45 кг обертається на канаті довжиною 5 м в горизонтальній площині, здійснюючи 16 об/хв . Який кут з вертикаллю утворює канат і яка сила його натягу?

Відповідь: 45° ; 630 Н .

10. На будівництві будинку піднімають цеглу масою $m=100\text{ кг}$ за допомогою подвійного блока (два блока різних радіусів на одній осі жорстко скріплені між собою) силою $F=500\text{ Н}$, спрямованою під довільним кутом до вертикалі (рис.2.8).

Вісь блока обертається в підшипнику на кронштейні, прикріпленому до стіни. Знайти прискорення цегли, якщо радіуси блоків $r=10\text{ см}$ і $R=25\text{ см}$. Канат вантажу намотується на поверхню меншого блока. Масою блока, каната і тертям в осі блока нехтувати.

Відповідь: $2,7\text{ м/с}^2$.

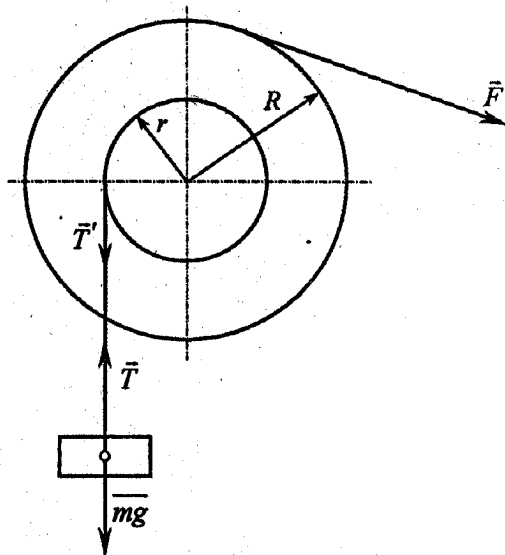


Рис. 2.8

11. Відро, до половини наповнене водою, обертають на витягнутій руці у вертикальній площині. Відстань від осі обертання до центра тяжіння води у відрі l м. З якою частотою потрібно обертати відро, щоб вода не виліталась з нього при проходженні через найвищу точку?

Відповідь: 30 об/хв.

Розділ 3. ЗАКОН ЗБЕРЕЖЕННЯ ІМПУЛЬСУ

3.1. Закон збереження імпульсу як фундаментальний закон природи

На практиці здебільшого доводиться мати справу не з одним тілом, а з системою тіл або матеріальних точок. Замкнутою системою будемо називати систему, на яку не діють зовнішні сили. Зовнішні сили – це сили взаємодії між системою і тілами, які не входять до неї, а внутрішні – це сили взаємодії між матеріальними точками самої системи.

Розглянемо механічну систему, що складається з n тіл. Позначимо

імпульси тіл через $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n$, а через $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ – зовнішні сили, що діють відповідно на тіла системи. Внутрішню силу, що діє на k -те тіло з боку i -го, – через $\vec{F}_{ik}$.

На підставі II закону Ньютона запишемо рівняння руху всіх тіл системи:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{p}_1}{dt} &= (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \dots + \vec{F}_{1n}) + \vec{F}_1; \\ \frac{d\vec{p}_2}{dt} &= (\vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \dots + \vec{F}_{2n}) + \vec{F}_2; \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{d\vec{p}_n}{dt} &= (\vec{F}_{n1} + \vec{F}_{n2} + \dots + \vec{F}_{n,n-1}) + \vec{F}_n.\end{aligned}\quad (3.1)$$

За III законом Ньютона кожній внутрішній силі $\vec{F}_{ik}$ відповідає сила $\vec{F}_{ki}$, яка задовольняє умові $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$.

При додаванні всіх рівнянь системи (3.1) дістанемо:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}, \quad (3.2)$$

де $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \dots + \vec{p}_n$ – повний імпульс системи;

$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$ – головний вектор усіх зовнішніх сил.

Якщо система замкнена ($\vec{F} = 0$), то

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0, \text{ або } \vec{p} = \text{const}. \quad (3.3)$$

Отже, повний імпульс замкнутої системи тіл є величина стала, тобто з бігом часу не змінюється. Це і є закон збереження імпульсу. З нього випливає, що внутрішні сили, які діють в системі, не можуть змінити повний імпульс системи, вони можуть зумовити тільки обмін імпульсами окремих тіл системи.

Рівняння (3.2) можна записати в скалярній формі:

$$\frac{dp_x}{dt} = \sum_{i=1}^n F_{ix}; \quad \frac{dp_y}{dt} = \sum_{i=1}^n F_{iy}; \quad \frac{dp_z}{dt} = \sum_{i=1}^n F_{iz}. \quad (3.4)$$

Зауважимо, що для незамкнутої системи проекція вектора повного

імпульсу на якусь вісь не залежить від часу, якщо проекція головного вектора зовнішніх сил на цю вісь дорівнює нулю. Наприклад, якщо $F_y = 0$, то $\frac{dp_y}{dt} = 0$ і $p_y = 0$. На Землі жодна система тіл не є замкнутою.

Закон збереження імпульсу – фундаментальний, тобто він справджується в усіх відомих взаємодіях. Існування закону збереження імпульсу зумовлюється не властивостями конкретних сил і рівнянь руху, а однорідністю простору. Однорідність простору полягає в тому, що при паралельному переносі в просторі замкненої системи тіл її фізичні властивості і закони руху не змінюються, тобто не залежать від вибору початку координат інерціальної системи відліку.

3.2. Реактивний рух

У природі часто зустрічаються тіла, маса яких змінюється у процесі їхнього руху. Наприклад, маса Землі збільшується з часом внаслідок падіння на неї метеоритів; маса айсбергів, що дрейфують, змінюється в процесі танення і намерзання льоду; реактивні літаки, ракети всіх систем і т.д. належать до тіл, маса яких зменшується під час руху.

Рівняння поступального руху тіла змінної маси вперше вивів професор Петербурзького університету І.В. Мещерський (1897 р.). Нехай у момент часу t тіло масою m має швидкість відносно нерухомої системи відліку $\vec{V}$. За час dt від тіла відокремились частинки масою dm з швидкістю $\vec{u}$ відносно тієї самої системи відліку. В момент відокремлення частинок між ними і тілом діє реактивна сила $\vec{F}_p$, яка для системи тіло – частинки є внутрішньою. Знайдемо зміну імпульсу системи за час dt . Імпульс системи в момент часу t

$$\vec{p}_1 = m\vec{V}.$$

Імпульс в момент часу $t+dt$ після відокремлення частинок масою dm складатиметься з імпульсу маси $m-dm$, яка має швидкість $\vec{V} + d\vec{V}$, і імпульсу частинок масою dm , що рухаються з швидкістю $\vec{u}$, тобто

$$\vec{p}_2 = (m - dm)(\vec{V} + d\vec{V}) + \vec{u}dm.$$

Зміну імпульсу системи на основі II закону Ньютона у формі

$$d\vec{p} = \vec{F} \cdot dt$$

запишемо так:

$$(m - dm)(\vec{V} + d\vec{V}) + \vec{u}dm - m\vec{V} = \vec{F}dt. \quad (3.5)$$

Нехтуючи дуже малою величиною $dm \cdot d\vec{V}$, вираз (3.5) перепишемо у такій формі:

$$md\vec{V} + \vec{u}dm - \vec{V}dm = \vec{F} \cdot dt \quad (3.6)$$

або

$$\frac{md\vec{V}}{dt} = \vec{F} - (\vec{u} - \vec{V})\frac{dm}{dt}. \quad (3.7)$$

Рівняння (3.7) є основним рівнянням руху тіла змінної маси і називається рівнянням Мещерського. Величина $\vec{u} - \vec{V} = \vec{v}$ — це швидкість відокремлення частинок тіла відносно самого тіла, яку називають відносною швидкістю. Тоді рівняння (3.7) матиме вигляд

$$\frac{md\vec{V}}{dt} = \vec{F} - \vec{v}\frac{dm}{dt} \quad (3.8)$$

За формою рівняння (3.8) збігається з рівнянням, що виражає II закон Ньютона. Другий доданок правої частини рівняння, який відіграє роль сили, можна трактувати як реактивну силу, зумовлену зміною маси тіла. З цією силою частинки масою dm діють на тіло масою m при їх відокремленні. З врахуванням поняття реактивної сили рівняння руху тіла змінної маси перепишемо так:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_p, \quad (3.9)$$

де $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$ — прискорення тіла, а $\vec{F}_p = -\vec{v}\frac{dm}{dt}$ — реактивна сила.

Реактивні сили використовують для створення літаючих апаратів. Ще в 1881 р. революціонер-народоволець М.І. Кибальчич склав проект реактивного літаючого апарата. Все життя видатного вченого К.Е. Цюлковського було присвячене питанням ракетної техніки і застосуванню ракет для міжпланетних польотів. Великий вклад у розвиток ракетної техніки і освоєння

космічного простору вніс академік С.П. Корольов, під керівництвом якого вперше в світі було здійснено політ російського громадянина Ю.О. Гагаріна в космос.

3.3. Центр інерції. Закон руху центра інерції

Кожне тіло являє собою систему матеріальних точок. Тому довільну систему тіл можна розглядати як систему матеріальних точок. У такій системі існує точка, яка при відсутності дії зовнішніх сил рухається рівномірно і прямолінійно або перебуває в спокої. Цю точку називають центром мас або центром інерції. Центром мас системи матеріальних точок називають точку, в якій зібралася б уся маса системи під дією зростаючих сил притягання між матеріальними точками.

Радіус-вектор центра інерції (центра мас) визначається за формулою

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i, \quad (3.10)$$

де m_i , $\vec{r}_i$, M – відповідно маси, радіуси-вектори матеріальних точок і маса всієї системи.

Координати центра інерції визначаються за такими формулами:

$$x_c = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i; \quad y_c = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i y_i; \quad z_c = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i z_i, \quad (3.11)$$

де x_i , y_i , z_i – координати матеріальних точок, маси яких m_i .

Для виведення закону руху центра інерції про диференціюємо обидві частини рівняння (3.10) за часом

$$\frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{M} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{M}. \quad (3.12)$$

Ліва частина (3.12) являє собою швидкість центра інерції. З (3.12) маємо

$$M\vec{V}_c = \sum_{i=1}^n m_i \vec{V}_i = \vec{p} , \quad (3.13)$$

тобто імпульс системи матеріальних точок або імпульс твердого тіла, дорівнює добутку маси системи на швидкість руху центра інерції.

Підставивши значення $\vec{p}$ з (3.13) у формулу II закону Ньютона $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$, дістанемо рівняння руху центра інерції системи:

$$M \frac{d\vec{V}_c}{dt} = \vec{F} , \text{ або } M\vec{a}_c = \vec{F} , \quad (3.14)$$

де $\vec{a}_c = \frac{d\vec{V}_c}{dt}$ – прискорення центра інерції.

Отже, центр інерції твердого тіла або системи тіл рухається як матеріальна точка, маса якої дорівнює масі тіла або системи тіл, під дією всіх прикладених зовнішніх сил.

Якщо система ізольована, то головний вектор прикладених до системи зовнішніх сил $\vec{F} = 0$. Тоді $\vec{a}_c = 0$ і $\vec{V}_c = \text{const}$, тобто центр інерції перебуває в стані спокою або рухається рівномірно і прямолінійно.

Контрольні запитання

1. Що називається імпульсом тіла ?
2. В чому полягає закон збереження імпульсу ?
3. Виведіть закон збереження імпульсу і наведіть приклади, що його ілюструють.
4. З якою властивістю простору пов'язаний закон збереження імпульсу ?
5. Виведіть рівняння руху тіла змінної маси.
6. Чим зумовлене виникнення реактивної сили ? Наведіть приклади її використання.
7. Що називається центром інерції системи матеріальних точок ?
8. Виведіть рівняння руху центра інерції.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. На рис. 3.1 зображено рушницю масою 3 кг, із якої з швидкістю 600 м/с вилітає куля масою 10 г. Яка буде швидкість віддачі рушниці, якщо вона вільна, тобто не притиснута до плеча ?

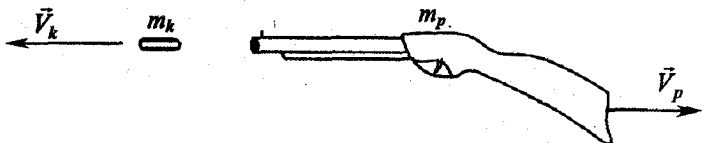


Рис.3.1

Розв'язання. За законом збереження імпульсу сума імпульсів рушниці і кулі до пострілу дорівнює сумі їх імпульсів після пострілу:

$$\vec{p}_p + \vec{p}_k = \vec{p}'_p + \vec{p}'_k. \text{ До пострілу } \vec{p}_p = \vec{p}_k = 0, \text{ тому } 0 + 0 = \vec{p}'_p + \vec{p}'_k,$$

тобто

$$-\vec{p}'_p = \vec{p}'_k, \text{ або } -m_p \vec{V}'_p = m_k \vec{V}'_k,$$

звідки

$$V'_p = -\frac{m_k}{m_p} \cdot V'_k = \frac{0,01}{3} \cdot 600 = -2 \text{ м/с}$$

Знак "-" свідчить про те, що швидкості кулі і рушниці спрямовані в протилежні боки.

Приклад 2. На горизонтальних рейках стоїть платформа з піском (загальна маса $m_1 = 5 \cdot 10^3$ кг). В пісок влучив снаряд масою $m_2 = 5$ кг, який летів вздовж рейок. В момент попадання швидкість снаряда $V = 400$ м/с і спрямована зверху вниз під кутом $\alpha = 37^\circ$ до горизонту (рис.3.2). Знайти швидкість платформи, якщо снаряд застряє в піску.

Розв'язання. Платформа набуває швидкості $\vec{u}$ в результаті взаємодії з снарядом. Якщо ввести вісь x , то

$$p_{1x} = p_{2x}, \tag{1}$$

де $p_{1x} = m_1 V \cos \alpha$, $p_{2x} = (m_1 + m_2) u$ – проекції вектора імпульсу системи на вісь x відповідно до і після взаємодії тіл. (Вираз для p_{2x} справедливий, якщо $u_x = u$).

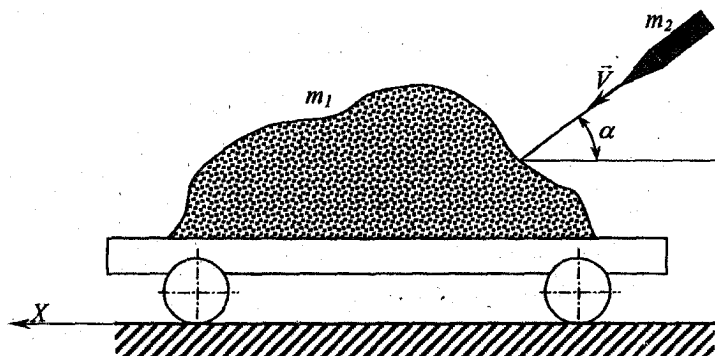


Рис.3.2

Рівняння (1) перепишемо у такому вигляді:

$$m_2 V \cos \alpha = (m_1 + m_2) u$$

звідки

$$u = \frac{m_2 V \cos \alpha}{m_1 + m_2} = 0,32 \text{ м/с}.$$

Приклад 3. Ракета, яка має початкову масу m_0 , починає рух із стану спокою. В деякий момент часу, коли витрачено певну масу m палива, ракета досягла швидкості V . Нехай паливо вилітає відносно ракети з швидкістю V_0 . Як в цьому випадку V залежить від m ?

Розв'язання. На рис.3.3 показано ситуацію відносно лабораторної системи координат, коли ракета витратила деяку кількість палива Δm (в цій системі $V=0$ при $m=0$).

Щоб встановити співвідношення між Δm і ΔV , скористаємося законом збереження імпульсу. Якщо швидкість ракети, яка має тепер масу $m_0 - m$, збільшилась на ΔV , то відповідний приріст імпульсу:

$\Delta p_1 = (m_0 - m) \Delta V$. При цьому відбувся викид палива Δm , швидкість

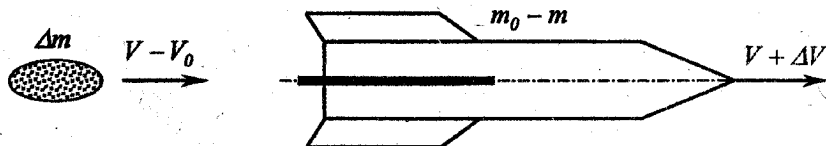


Рис.3.3

якого зменшилась на V_0 . Це відповідає зменшенню імпульсу палива на $\Delta p_2 = \Delta m V_0$. На основі закону збереження імпульсу маємо:

$$(m_0 - m) \Delta V = \Delta m V_0,$$

звідки

$$\Delta V = \frac{V_0 \Delta m}{m_0 - m}, \text{ або } \Delta V = \frac{V_0 dm}{m_0 - m}.$$

Щоб знайти швидкість V , проінтегруємо останнє співвідношення. Таким чином,

$$V = V_0 \int_0^m \frac{dm}{m_0 - m}, \quad V = V_0 \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - m} \right).$$

Кінцева швидкість досягається в той момент, коли $m_0 - m$ дорівнює масі ракети без палива.

Відношення $\frac{m_0}{m_0 - m}$ може дорівнювати 10, що забезпечить кінцеву швидкість $V = 2,3 V_0$. Якщо для виводу на орбіту потрібна більша швидкість, то використовують багатоступінчасті ракети.

Приклад 4. Визначити положення центра інерції половини суцільної кулі радіусом R (рис.3.4).

Розв'язання. Початок координат і напрямок осей системи координат розмістимо так, як показано на рис.3.4. Уявно поділимо півкулю на елемен-

тарні шари товщиною dx .

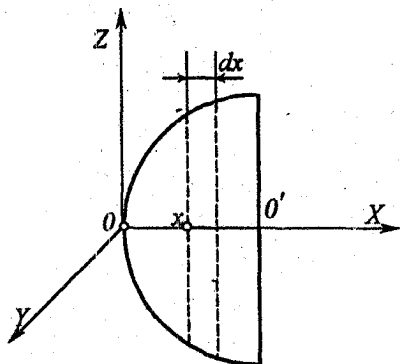


Рис.3.4

Тоді за формулою (3.11) знаходимо $x_c = \frac{\int x dm}{M}$, де dm – маса елементарного шару товщиною dx , який знаходиться на відстані x від точки O ; M – маса півкулі. Оскільки

$$dm = \rho \pi z^2 dx, \quad M = \frac{2}{3} \rho \pi R^3, \quad \text{а} \quad z^2 = R^2 - (R - x)^2 = 2Rx - x^2, \quad \text{то}$$

$$x_c = \frac{\int_0^R x \pi \rho (2Rx - x^2) dx}{\frac{2}{3} \rho \pi R^3} = \frac{5}{8} R$$

або $\frac{3}{8}$ від точки O' . Очевидно, що $y_c = 0$; $z_c = 0$.

Задачі для самостійних вправ

1. М'яч масою $0,1$ кг, що летів з швидкістю 20 м/с, ударився об горизонтальну площину. Кут падіння (кут між напрямом швидкості і перпен-

дикуляром до площини) дорівнює 60° . Визначити зміну імпульсу, якщо удар абсолютно пружний, а кут відбивання дорівнює куту падіння.

Відповідь: $2 \text{ кг} \cdot \text{м/с}$.

2. На вагонетку масою 800 кг , яка котиться по горизонтальній колії з швидкістю $0,2 \text{ м/с}$, насипали зверху 200 кг піску. На скільки при цьому зменшилась швидкість вагонетки?

Відповідь: $0,4 \text{ м/с}$.

3. Сидячи у човні, мисливець стріляє з рушниці в тому самому напрямку, в якому пливе човен. Яку швидкість мав човен, якщо він зупинився після двох пострілів, зроблених один за одним. Маса мисливця з човном 200 кг . Швидкість вильоту шроту та порохових газів становить 500 м/с .

Відповідь: $0,1 \text{ м/с}$.

4. З човна масою 200 кг , який рухається з швидкістю 1 м/с , стрибає хлопчик, що має масу 50 кг , у горизонтальному напрямі з швидкістю 7 м/с . Яка швидкість човна після стрибка хлопчика? Яка швидкість човна після стрибка, якщо він стрибає: з корми в бік, протилежний руху човна; з носа за ходом руху?

Відповідь: 3 м/с ; $-0,5 \text{ м/с}$.

5. Граната, яка летить із швидкістю $V_1 = 10 \text{ м/с}$, розірвалась на два осколки. Більший осколок, маса якого становить 60% маси всієї гранати, продовжував рухатись в тому ж напрямку, але із збільшеною швидкістю $u_1 = 25 \text{ м/с}$. Чому дорівнює швидкість меншого осколка?

Відповідь: $-12,5 \text{ м/с}$.

6. Куля масою 10 кг , яка летить горизонтально з швидкістю 300 м/с , ударяється в підвішену на вірьовках кулю масою 6 кг і застряє в ній. На яку висоту підніметься куля?

Відповідь: $1,28 \text{ см}$.

7. Реактивний літак, знаходячись в горизонтальному польоті, за $0,2 \text{ с}$ збільшив швидкість від 200 до 220 м/с . Продукти згоряння двигуна, густина яких становить $1,5 \text{ кг/м}^3$, вилітають з отвору діаметром 60 см зі швидкістю 800 м/с відносно літака. Знайти масу літака. При обчисленні швидкості продуктів згоряння відносно землі швидкість літака дорівнює 210 м/с .

Відповідь: $1,96 \cdot 10^3 \text{ кг}$.

8. Скільки палива потрібно для виводу космічного корабля масою

$5 \cdot 10^3$ кг на кругову орбіту навколо Землі, якщо швидкість витікання газів із сопла ракети постійна і дорівнює $4 \cdot 10^3$ м/с? Перша космічна швидкість 7,9 км/с. Силами опору рухові нехтувати.

Відповідь: $\approx 31,5 \cdot 10^3$ кг.

9. Ракета починає підніматись вертикально вгору з прискоренням 3 м/с^2 . Відносна швидкість витікання газів 2000 м/с. Нехтуючи опором повітря, знайти, через який час маса ракети зменшиться в два рази.

Відповідь: 35,4 с.

10. Продукти згоряння викидаються із сопла ракетного двигуна порціями по 0,2 кг кожна з початковою швидкістю 1000 м/с. Яку швидкість матиме ракета після викидання третьої порції, якщо в початковий момент її маса була 300 кг, а швидкість дорівнювала нулю? Дію сили тяжіння не враховувати.

Відповідь: ≈ 2 м/с.

Розділ 4. ЗАКОН ЗБЕРЕЖЕННЯ МОМЕНТУ ІМПУЛЬСУ

4.1. Момент імпульсу. Момент сили

Рух матеріальної точки характеризують не тільки імпульсом, а й моментом імпульсу.

Векторний добуток радіуса-вектора $\vec{r}$ на імпульс матеріальної точки $\vec{p}$ називається моментом імпульсу $\vec{L}$ матеріальної точки відносно точки O :

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]. \quad (4.1)$$

Якщо радіус-вектор $\vec{r}$, вектор імпульсу $\vec{p}$ лежать у площині рисунка (рис.4.1), то вектор моменту імпульсу за правилом векторного добутку спрямований перпендикулярно до площини рисунка і проходить через точку O від нас за рисунок.

Із рис.4.1 видно, що модуль вектора імпульсу частинки дорівнює

$$L = rp \cdot \sin \alpha = lp, \quad (4.2)$$

де $l = r \sin \alpha$ – плече імпульсу відносно точки O . Моментом імпульсу сис-

теми відносно точки O називається векторна сума моментів імпульсів частинок, що входять в систему:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i, \vec{p}].$$

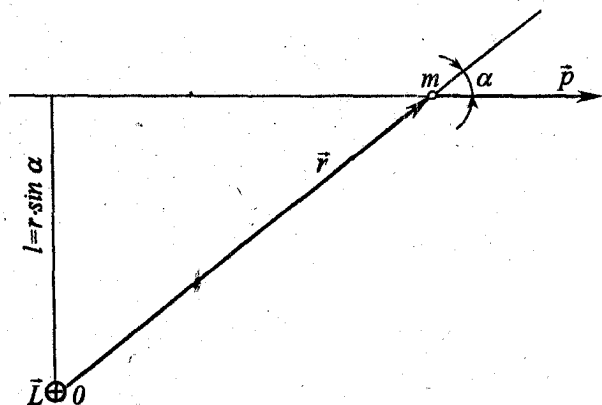


Рис. 4.1

Коли на матеріальну точку діє сила $\vec{F}$, то моментом сили $\vec{M}$ відносно деякої точки O називають векторний добуток радіуса-вектора $\vec{r}$ на силу $\vec{F}$:

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]. \quad (4.3)$$

За правилом векторного добутку вектор моменту сили спрямований так, як показано на рис.4.2 (вектори $\vec{r}$ і $\vec{F}$ лежать у площині рисунка).

Величина вектора моменту сили становить

$$M = r F \sin \alpha = l F, \quad (4.4)$$

де $l = r \sin \alpha$ – плече сили відносно точки O , тобто довжина перпендикуляра, опущеного з точки O на пряму, вдовж якої діє сила. Під моментом всіх сил, що діють на систему матеріальних точок, розуміють векторну суму моментів окремих сил:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i, \vec{F}_i].$$

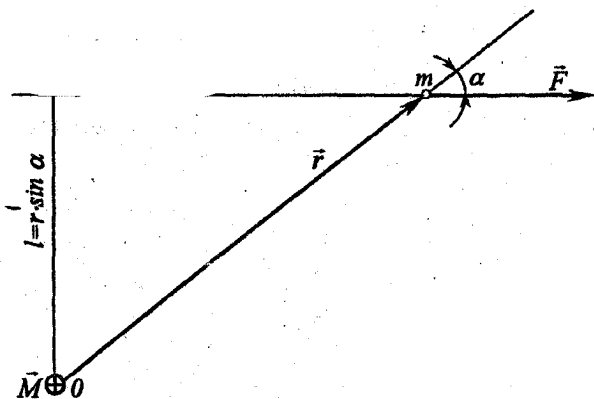


Рис. 4.2

Розглядаючи систему матеріальних точок, під моментом всіх сил слід розуміти моменти внутрішніх і зовнішніх сил. На основі III закону Ньютона легко довести, що геометрична сума моментів всіх внутрішніх сил відносно довільної точки O дорівнює нулю. Отже, під моментом всіх сил треба розуміти векторну суму моментів всіх зовнішніх сил, що діють на систему матеріальних точок.

4.2. Рівняння моментів. Закон збереження моменту імпульсу

Між введеними поняттями моменту імпульсу $\vec{L}$ і моменту сили $\vec{M}$ існує взаємозв'язок. Для його встановлення припустимо, що точка O нерухома. Диференціюючи вираз (4.1) за часом, дістанемо:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p} \right] + \left[\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right]. \quad (4.5)$$

В (4.5) $\left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p} \right] = 0 \quad i \quad \left[\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right] = \vec{M},$

оскільки

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}, \quad a \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

Тоді

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad (4.6)$$

Формула (4.6) виражає взаємозв'язок між величинами $\vec{L}$ та $\vec{M}$ і називається рівнянням моментів: похідна за часом від моменту імпульсу матеріальної точки відносно нерухомої точки дорівнює моменту діючої сили відносно тієї самої точки.

Рівняння моментів можна узагальнити для випадку системи матеріальних точок відносно довільного центра:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{зовн}}, \quad (4.7)$$

тобто швидкість зміни моменту імпульсу системи $\vec{L}$ ($\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i$) матеріальних точок відносно довільного центра дорівнює векторній сумі моментів всіх зовнішніх сил відносно того самого центра. Якщо момент зовнішніх сил дорівнює нулю ($M_{\text{зовн}} = 0$), то

$$\vec{L} = \text{const} \quad (4.8)$$

Для замкнутої системи матеріальних точок моменти зовнішніх сил відсутні і момент імпульсу є величина стала. В цьому і полягає суть одного з фундаментальних законів фізики – закону збереження моменту імпульсу.

Можливий випадок, коли система не повністю ізольована, але в деякому напрямку, наприклад вздовж осі x , проекція моменту сил дорівнює нулю ($M_x = 0$). Тоді рівняння моментів (4.6) у проекціях на осі декартової системи координат еквівалентне такій системі трьох рівнянь:

$$\frac{dL_x}{dt} = 0; \quad \frac{dL_y}{dt} = M_y; \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z \quad (4.9)$$

Отже, систему можна вважати замкнутою тільки по відношенню до x – компоненти моменту імпульсу.

$$L_x = \text{const} . \quad (4.10)$$

Тому закон збереження моменту імпульсу, так само, як і імпульсу, можна застосовувати і до частково ізольованих систем.

4.3. Рух у центральному силовому полі. Закони Кеплера. Закон всесвітнього тяжіння

Розглянемо рух матеріальної точки A , яка знаходиться в центральному полі сил (рис.4.3). У такому полі напрям сили, що діє на матеріальну

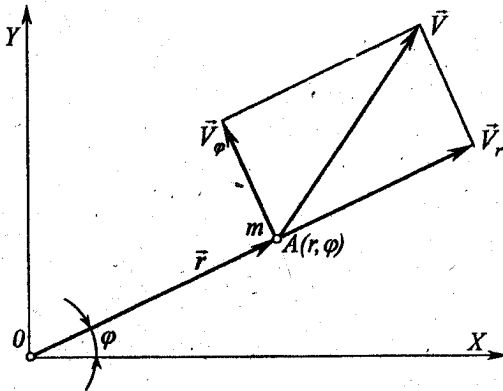


Рис.4.3

точку, проходить через точку O – центр поля, а величина сили залежить тільки від відстані до цього центра. Залежність сили $\vec{F}$ від $\vec{r}$ має такий вигляд:

$$\vec{F} = f(r) \frac{\vec{r}}{r} , \quad (4.11)$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор, проведений з центра сил O в рухому точку A ; $f(r)$ – проекція вектора сили на напрям радіуса-вектора, яка залежить тільки від відстані r між точками O і A .

Для сили відштовхування – функція $f(r)$ додатна, для сили притягання – від'ємна. Момент сили $\vec{F}$ відносно точки O дорівнює нулю:

$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] = \frac{f(r)}{r} [\vec{r}, \vec{r}] = 0$. Тому за законом збереження моменту імпульсу для матеріальної точки A відносно точки O :

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{V}] = \text{const}, \quad (4.12)$$

де m – маса точки A ; $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ – її швидкість.

Вектор $\vec{L}$ перпендикулярний до площини, яка проходить через вектори $\vec{r}$ і $\vec{V}$. З (4.12) витікає, що ця площина не змінює своєї орієнтації в просторі, тобто траєкторія точки A є плоскою кривою. Тому положення точки A можна задати за допомогою двох полярних координат r і φ , а її швидкість $\vec{V}$ розкладемо на дві складові:

$$\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_\varphi. \quad (4.13)$$

Модуль першої складової, яку позначили $\vec{V}_r$, дорівнює:

$$V_r = \frac{dr}{dt}. \quad (4.14)$$

Вона характеризує швидкість зміни модуля радіуса-вектора $\vec{r}$. Друга складова, яка позначена $\vec{V}_\varphi$, дорівнює:

$$V_\varphi = r \frac{d\varphi}{dt}. \quad (4.15)$$

Складова швидкості $\vec{V}_\varphi$ характеризує швидкість зміни радіуса-вектора за напрямком.

З (4.12) – (4.15) випливає, що

$$\vec{L} = [\vec{r}, m\vec{V}_r] + [\vec{r}, m\vec{V}_\varphi]. \quad (4.16)$$

(Перший доданок дорівнює нулю, оскільки вектори $\vec{r}$ і $\vec{V}_r$ колінеарні).

Внаслідок взаємної перпендикулярності векторів $\vec{r}$ і $\vec{V}_\varphi$

$$L = mr^2 \frac{d\varphi}{dt} = \text{const}. \quad (4.17)$$

При повертанні радіуса-вектора $\vec{r}$ за час dt на малий кут $d\varphi$ він описує

круговий сектор, площа якого $dS = \frac{1}{2} r^2 d\varphi$. Тому величину

$$\sigma = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} \quad (4.18)$$

назвемо секторіальною швидкістю. З (4.17) і (4.18) видно, що при русі матеріальної точки в центральному силовому полі секторіальна швидкість точки стала:

$$\sigma = \frac{L}{2m} = \text{const} . \quad (4.19)$$

Такий висновок уперше зробив Кеплер для руху планет у полі тяжіння Сонця і називається він другим законом Кеплера. Цей закон можна сформулювати по-іншому: радіус-вектор планети за однакові проміжки часу описує рівні площі.

Щоб визначити траєкторію руху матеріальної точки A , необхідно скористатись законами збереження моменту імпульсу і енергії. Особливий інтерес представляють силові поля, для яких функція $f(r)$ у формулі (4.11) має вигляд

$$f(r) = \frac{a}{r^2} , \quad (4.20)$$

де a – стала величина ($a > 0$ відповідає випадку відштовхування від центра O , $a < 0$ – притягання до центра). До таких сил належать гравітаційні та кулонівські сили.

Отже, повна механічна енергія матеріальної точки, яка рухається в полі центральних сил, обернено пропорціональних квадрату відстані, виражається за формулою

$$E = \frac{mV^2}{2} + \frac{a}{r} , \quad (4.21)$$

де $\frac{mV^2}{2}$ – кінетична енергія, а $\frac{a}{r}$ – потенціальна. Замінивши значення V відповідно до (4.13) – (4.15), дістанемо, що

$$2E = m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + mr^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{2a}{r} \quad (4.22)$$

Таким чином, приходимо до системи двох диференціальних рівнянь:

$$mr^2 \frac{d\varphi}{dt} = L = \text{const} ,$$

$$m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + mr^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{2a}{r} = 2E = \text{const} . \quad (4.23)$$

Проінтегрувавши ці рівняння, можна знайти r і φ як функції від t , тобто траєкторію і характер руху матеріальної точки. Зауважимо, що в рівняння (4.23) входять перші похідні за часом від r і φ , тому їх набагато легше розв'язати порівняно з рівняннями, що випливають із законів Ньютона, які містять другі похідні від координат.

Розв'язання системи рівнянь (4.23) виходить за рамки даного посібника, а тому приведемо остаточний результат. Якщо точка A притягується до силового центра, то $a < 0$ і рівняння її траєкторії можна записати в такій формі:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi} , \quad (4.24)$$

де
$$p = \frac{L^2}{m|a|} \quad \text{і} \quad e = \sqrt{\frac{2EL^2}{ma^2} + 1} . \quad (4.25)$$

Траєкторія точки A є кривою другого порядку, причому p – її фокальний параметр, а e – ексцентриситет (відношення фокусної відстані h до великої півосі b , рис.4.4).

Можливі такі типи траєкторій точки A :

- а) еліптична орбіта ($e < 1$) при $E < 0$;
- б) параболічна орбіта ($e = 1$) при $E = 0$;
- в) гіперболічна орбіта ($e > 1$) при $E > 0$;
- г) прямолінійна траєкторія, що проходить через центр сил ($p = 0$, $e = 1$) при $L = 0$.

У перших трьох випадках центр сил збігається з одним із фокусів орбіти. Для планет, що рухаються в полі тяжіння Сонця, $E < 0$. Тому для них

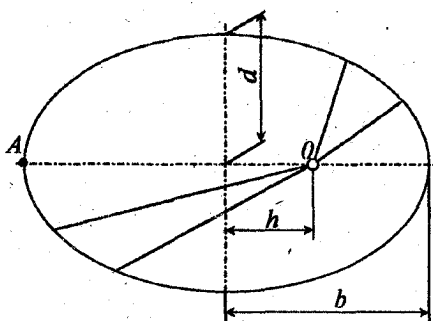


Рис. 4.4

справедливий перший закон Кеплера: усі планети Сонячної системи рухаються по еліпсах, в одному з фокусів яких знаходиться Сонце.

За другим законом Кеплера секторіальна швидкість кожної з планет стала. Формулу (4.19) можна записати ще так:

$$\sigma = \frac{S}{T}, \quad (4.26)$$

де S – площа еліпса, а T – період обертання планети. Площа $S = \pi b d$, де b і d – його велика і мала півосі. Враховуючи, що

$$d = b\sqrt{1 - e^2} \quad \text{і} \quad p = b(1 - e^2),$$

а також користуючись виразом (4.19), дістанемо

$$T^2 = \frac{\pi^2 p}{L^2 / 4m^2} b^3.$$

Оскільки за формулою (4.25)
$$p = \frac{L^2}{m|a|},$$

де $|a| = \gamma m M$ (M – маса Сонця, γ – гравітаційна стала), то

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma M} b^3 \quad (4.27)$$

Формула (4.27) є математичним записом третього закону Кеплера: квадрат періоду обертання планети залежить тільки від великої півосі орбіти і прямо пропорційний її кубу.

Якщо періоди обертання двох планет навколо Сонця відповідно дорівнюють T_1 і T_2 , а великі півосі їхніх орбіт – b_1 і b_2 , то третій закон Кеплера математично записується у такому вигляді:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{b_1^3}{b_2^3} \quad (4.28)$$

тобто квадрати періодів обертань планет навколо Сонця відносяться як куби великих півосей їх еліптичних орбіт.

Закони Кеплера дали можливість Ньютону встановити закон всесвітнього тяжіння. Доцентрові прискорення планет, які рухаються майже по колових орбітах,

$$a_o = \omega^2 R = \frac{4\pi^2}{T^2} R \quad (4.29)$$

де T – період обертання, R – радіус колової орбіти планети.

Відношення прискорень для двох планет

$$\frac{a_{o1}}{a_{o2}} = \frac{T_2^2}{T_1^2} \cdot \frac{R_1}{R_2} \quad (4.30)$$

На основі третього закону Кеплера (4.28) вираз (4.30) можна записати у вигляді:

$$\frac{a_{o1}}{a_{o2}} = \frac{R_2^2}{R_1^2} \quad (4.31)$$

На основі II закону Ньютонa вираз (4.31) можна записати так:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{m_1}{R_1^2} \cdot \frac{m_2}{R_2^2} \quad (4.32)$$

З (4.32) випливає, що сила, яка діє з боку Сонця на планету, прямо пропорційна масі планети і обернено пропорційна квадрату її відстані до Сонця:

$$F = k_1 \frac{m}{R^2}, \quad (4.33)$$

де k_1 – коефіцієнт пропорційності, однаковий для всіх планет.

За III законом Ньютона, планета діє на Сонце з силою

$$F = k_2 \frac{M}{R^2}, \quad (4.34)$$

де M – маса Сонця; k_2 – коефіцієнт пропорційності, величина якого залежить від маси планети. Оскільки (4.33) і (4.34) виражають сили взаємного притягання двох тіл, то можна записати, що сила взаємодії між двома тілами (планетою і Сонцем) прямо пропорційна добутку їхніх мас і обернено пропорційна квадрату відстані між ними:

$$F = \gamma \frac{mM}{R^2}, \quad (4.35)$$

де γ – коефіцієнт пропорційності, який називають гравітаційною сталою. На основі спостережень за рухом Місяця Ньютон перевіряв припущення про те, що сила обернено пропорційна квадрату відстані, і зробив висновок, що сили такого самого характеру діють між будь-якими тілами. Закон всесвітнього тяжіння (4.35) справедливий і для матеріальних точок. Характерне для сил тяжіння те, що вони не залежать від проміжного середовища та від природи взаємодіючих тіл. Дією сил тяжіння Ньютон пояснив виникнення припливів і відпливів, які відбуваються внаслідок дії на воду сил з боку Місяця. За допомогою закону всесвітнього тяжіння обчислюють маси небесних тіл і періоди їх обертання, розраховують траєкторії руху небесних тіл та космічних кораблів.

Контрольні запитання

1. Що називається моментом імпульсу матеріальної точки відносно

нерухомої точки O ?

2. Що називається моментом сили відносно нерухомої точки O ?
3. Яке співвідношення називається рівнянням моментів ?
4. Сформулюйте закон збереження моменту імпульсу.
5. Які сили називаються центральними ?
6. Виведіть і сформулюйте закони Кеплера.
7. Як Ньютон встановив закон всесвітнього тяжіння на основі законів Кеплера ?

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Вздовж осі жорстко закріпленої труби протягнута нитка, до кінця якої прив'язано кульку масою m , що може рухатись по колу навколо осі труби (рис.4.5). В початковий момент кулька рухається по колу раді-

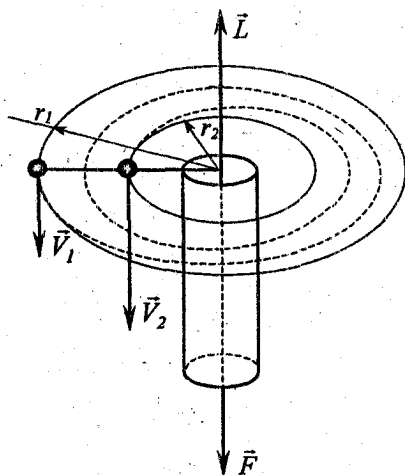


Рис.4.5

усом r_1 з швидкістю V_1 . Внаслідок прикладання до нитки сили F кулька рухається по спіралі з усе меншим радіусом і змінною швидкістю. Знайти швидкість V_2 кульки, коли вона в кінці рухається по колу радіусом r_2 .

Розв'язання. Задача досить складна, якщо її розв'язувати за допомогою рівнянь руху. Її розв'язання спрощується, якщо скористатись законом збереження моменту імпульсу: сила, що діє на кульку, завжди спрямована вздовж радіуса, тому її момент $M = 0$, а момент імпульсу $L = \text{const}$. В початковий момент $L = r_1 m V_1$, а в кінцевий $L = r_2 m V_2$. Звідси знаходимо швидкість кульки: $V_2 = \frac{r_1 m V_1}{r_2 m} = \frac{r_1}{r_2} V_1$.

Приклад 2. Припустивши, що середня густина Землі дорівнює $\rho = 5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, Ньютон обчислив числове значення γ . Знайти γ через ρ , R_3 (радіус Землі) і g .

Розв'язання. Використаємо формулу (4.35) для сили тяжіння, що діє на деяке тіло масою m з боку Землі масою M (тіло лежить на поверхні Землі)

$$F = \gamma \frac{Mm}{R_3^2}.$$

За II законом Ньютона дана сила дорівнює ma , де $a = g$. Таким чином,

$$\gamma \frac{Mm}{R_3^2} = mg,$$

звідки
$$\gamma = \frac{gR_3^2}{M}.$$

Враховуючи, що M дорівнює добутку густини на об'єм, тобто $M = \rho \frac{4}{3} \pi R_3^3$, дістанемо, що

$$\gamma = \frac{3gR_3^2}{4\rho\pi R_3^3} = \frac{3g}{4\pi R_3 \rho}.$$

Підставивши в дану формулу $R_3 = 6,37 \cdot 10^6 \text{ м}$, $g = 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ і $\rho = 5 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, маємо $\gamma = 7,35 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$, що тільки на 10% перевищує прийняте значення $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$.

Приклад 3. Довести, що величина прискорення, з яким рухається Місяць по коловій орбіті навколо Землі і яку дістали за кінематичними формулами і рівняннями динаміки, має однакове значення.

Розв'язання. Якщо вважати, що Місяць рухається навколо Землі по коловій орбіті, то цього доцентрове прискорення

$$a_0 = \frac{V^2}{R} = \frac{4\pi^2}{T^2} R,$$

де R – радіус орбіти Місяця, а T – період його обертання навколо Землі. Величини R і T відомі на основі астрономічних спостережень. Тоді

$$a_0 = 0,0027 \frac{m}{c^2}$$

Оскільки доцентрове прискорення Місяця зумовлене силою тяжіння Землі $F = \gamma \frac{Mm}{R^2}$, де m – маса Місяця, M – маса Землі, то за II законом

$$\text{Ньютона} \quad a_0 = \frac{F}{m} = \gamma \frac{M}{R^2}. \quad (2)$$

Сила земного тяжіння надає тілам, піднятим над поверхнею Землі, прискорення

$$g = \gamma \frac{M}{R_3^2}, \quad (3)$$

де R_3 – радіус Землі.

З формул (2) і (3) отримаємо

$$a = g \left(\frac{R_3}{R} \right)^2 = 0,0027 \text{ м/с}^2,$$

оскільки $R = 60R_3$ і $g = 9,8 \text{ м/с}^2$, що і потрібно було довести. Збіг цих результатів, добутих різними методами, є доказом справедливості закону всесвітнього тяжіння.

Приклад 4. Космічний корабель складається з двох відсіків, з'єднаних переходом довжиною 20 м (рис.4.6). Скільки обертів в секунду повинен здійснювати такий корабель для підтримання у космонавтів нормальної ваги? (Обертанням корабля створюється штучне тяжіння).

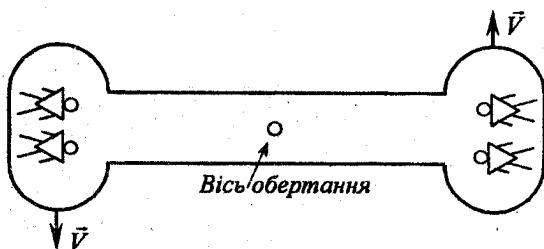


Рис.4.6

Розв'язання. Нехай T – час одного оберту, а n – число обертів в секунду. Між цими величинами існує такий зв'язок:

$$n = \frac{1}{T} \quad \text{або} \quad T = \frac{1}{n}$$

Підставимо тепер $\frac{1}{n}$ замість T в формулу доцентрового прискорення:

$$a_d = \frac{4\pi^2}{T^2} R = 4\pi^2 n^2 R$$

Звідси

$$n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{a_d}{R}}$$

Якщо $a_d = g$, то уявна вага дорівнює mg ;

$$n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{R}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{9,8 \text{ м/с}^2}{10 \text{ м}}} = 9,5 \text{ об/хв}$$

Таким чином, космонавти, находячись у кораблі на відстані 10 м від осі обертання, будуть почувати себе так само, як і на Землі.

Приклад 5. Штучний супутник Землі, рухаючись по коловій орбіті на висоті h від поверхні Землі, в результаті короточасної дії гальмівної установки зменшив свою швидкість і почав знижуватись. Рухаючись весь час під дією сили тяжіння, супутник досягає Землі, причому його швидкість в цей момент спрямована по дотичній до земної поверхні. Знайти час

спускання супутника (рис.4.7).

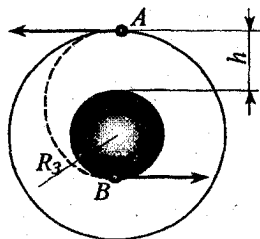


Рис.4.7

Розв'язання. Рух супутника в полі тяжіння Землі, як і рух тіла в будь-якому центральному полі, описується законами Кеплера. З другого закону Кеплера випливає, що супутник рухався по еліпсу, в одному з фокусів якого знаходиться центр Землі. Використавши третій закон Кеплера, знайдемо час спускання супутника. Для цього співставимо рух двох тіл в полі тяжіння Землі: супутника і Місяця (для Місяця період обертання T_M і радіус орбіти R_M – табличні величини).

За третім законом Кеплера маємо

$$\frac{T_C^2}{T_M^2} = \frac{b^3}{R_M^3},$$

де b – велика піввісь орбіти супутника; T_C – період його обертання по еліпсу.

Як видно з рис.4.7, де R_3 – радіус Землі,

$$b = R_3 + \frac{h}{2}.$$

Враховуючи, що час t спускання ракети дорівнює половині періоду T_C його обертання, дістанемо

$$t = \frac{T_M \left(R_3 + \frac{h}{2} \right)^{\frac{3}{2}}}{2 R_M^{\frac{3}{2}}}.$$

Задачі для самостійних вправ

1. Порівняти прискорення вільного падіння біля поверхні Місяця з прискоренням вільного падіння біля поверхні Землі.

Відповідь: $\approx 0,165$.

2. Визначити відстань від центра Землі до штучного супутника і його швидкість відносно поверхні Землі, якщо супутник запущено так, що він

рухається в площині земного екватора і весь час знаходиться в одній точці над поверхнею Землі.

Відповідь: $4,25 \cdot 10^7$ м; $\approx 3 \cdot 10^3$ м/с.

3. Чому дорівнює період обертання навколо Землі місячного модуля "Аполлон" перед посадкою, якщо радіус Місяця – 1740 км, а гравітаційна стала – $6,67 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг².

Відповідь: $6,5 \cdot 10^3$ с.

4. Визначити прискорення вільного падіння на поверхні Сонця, якщо відомі радіуси земної орбіти – $1,5 \cdot 10^6$ км; Сонця – $7 \cdot 10^5$ км і період обертання Землі навколо Сонця – один рік.

Відповідь: ≈ 28 g.

5. Найбільше віддалення від поверхні Землі першого штучного супутника Землі становило 947 км. Яку швидкість повинен мати супутник на цій висоті, щоб утримуватись на коловій орбіті?

Відповідь: 7300 м/с.

6. Радіус планети Марс становить 0,53 радіуса Землі. Маса Марса становить 0,11 від маси Землі. Визначити, у скільки разів сила притягання на Марсі менша від сили притягання на Землі.

Відповідь: $\approx 2,55$.

7. Припустимо, що космонавти, підлетівши до планети, надали кораблю горизонтальної швидкості 11 км/с. Ця швидкість забезпечила політ корабля по коловій орбіті радіусом 9100 км. Яке прискорення вільного падіння на поверхні планети, якщо її радіус 8800 км?

Відповідь: ≈ 14 м/с².

8. Час обертання Юпітера в 12 разів більший від часу обертання Землі навколо Сонця. Яка відстань між Юпітером і Сонцем, якщо від Землі до Сонця $150 \cdot 10^9$ м? Орбіти вважати коловими.

Відповідь: $\approx 7,86 \cdot 10^{11}$ м.

9. Космічний корабель, запущений на Марс, рухається по еліптичній орбіті, велика вісь якого дорівнює сумі відстаней від Землі і Марса до Сонця. На рис.4.8 орбіта корабля показана штриховою лінією. Скільки часу потрібно космічному кораблю, щоб досягнути поверхні Марса? Відстань від Марса до Сонця $2,28 \cdot 10^{11}$ м.

Відповідь: 2 роки.

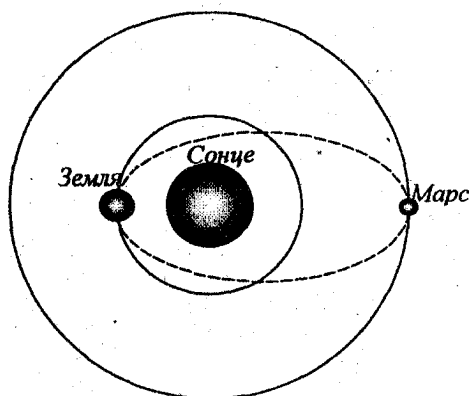


Рис. 4.8

Розділ 5. ЗАКОН ЗБЕРЕЖЕННЯ ЕНЕРГІЇ

5.1. Енергія. Робота і потужність

Введене поняття імпульсу тіла – це певна міра механічного руху. Проте ця динамічна характеристика тіла не в усіх випадках придатна для оцінки зміни різних форм руху. Наприклад, якщо куля рівномірно обертається навколо нерухомої осі симетрії, то векторна сума імпульсів усіх його частин дорівнює нулю при будь-якій кутовій швидкості, тобто імпульс тіла не може бути мірою обертального руху тіла. Єдиною мірою різних форм руху є енергія. Оскільки рух – невід’ємна властивість матерії, то енергія – універсальна кількісна міра руху матерії в усіх формах її руху. З різними формами руху матерії зв’язують різні види енергії: механічну, внутрішню, електромагнітну, ядерну і т.д.

Причиною зміни механічного руху тіла, а отже, і його енергії, є його взаємодія з іншими тілами. Щоб кількісно характеризувати процес обміну енергією між взаємодіючими тілами, в механіці розглядають досить важливу фізичну величину – роботу сили, прикладеної до тіла.

Фізична величина, яка вимірюється скалярним добутком векторів сили і переміщення, називається механічною роботою сили. Якщо тіло під дією сталої сили $\vec{F}$ переміщається на $\Delta\vec{r}$, то величина роботи

$$\Delta A = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} \quad (5.1)$$

Формулу (5.1) можна записати так :

$$\Delta A = F \cdot \Delta r \cdot \cos \alpha \quad (5.2)$$

де α – кут між векторами $\vec{F}$ і $\Delta\vec{r}$. Якщо діє стала сила і рух відбувається прямолінійно, то робота

$$A = F_s \cdot S = F \cdot S \cdot \cos \alpha \quad (5.3)$$

де $F_s = F \cdot \cos \alpha$ – проекція вектора сили на напрямок руху тіла.

У загальному випадку сила може змінюватися як за модулем, так і за напрямком. Щоб знайти роботу змінної сили, траєкторію руху ділять на елементарні ділянки ΔS_i , в межах яких величину сили можна вважати сталою.

Тоді елементарна робота (рис.5.1)

$$\Delta A_i = F_{s_i} \Delta S_i \quad (5.4)$$

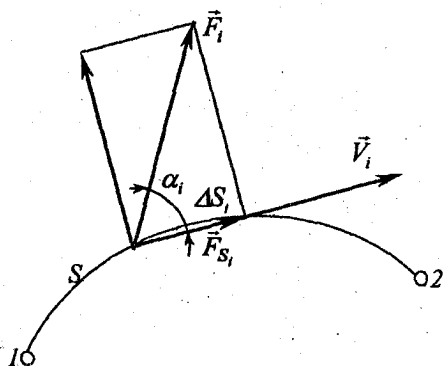


Рис.5.1

а на шляху S

$$A = \sum F_i \Delta S_i \quad (5.5)$$

При $\Delta S \rightarrow 0$ з (5.5) дістанемо

$$A = \int_1^2 F_{Si} dS_i = \int_1^2 F_i dS_i \cdot \cos \alpha_i \quad (5.6)$$

Для обчислення інтеграла (5.6) потрібно знайти залежність сили F від шляху S .

З формул (5.2) і (5.3) випливає, що при $\alpha < 90^\circ$ робота сили додатна, при $\alpha < 90^\circ$ – від'ємна, а при $\alpha = 90^\circ$ робота дорівнює нулю.

Одиницею вимірювання роботи є джоуль (Дж). Робота в 1 Дж – це робота, що виконується силою в 1 Н на шляху 1 м (1 Дж = 1 Н·м).

Щоб охарактеризувати швидкість виконання роботи, вводять поняття потужності. Потужність N є фізична величина, яка дорівнює відношенню роботи ΔA до проміжку часу Δt , за який вона виконується, тобто

$$N = \frac{\Delta A}{\Delta t} \quad (5.7)$$

Якщо потужність з часом змінюється, то користуються поняттям миттєвої потужності

$$N = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt} \quad (5.8)$$

Оскільки $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$, то

$$N = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{V} \quad (5.9)$$

тобто потужність дорівнює скалярному добутку вектора сили на вектор швидкості.

Одиницею потужності в СІ є ватт (Вт). Потужність в 1 Вт – це така потужність, коли робота в 1 Дж виконується за 1 с (1 Вт = 1 Дж/с).

5.2. Кінетична енергія

Кінетична енергія тіла є мірою його механічного руху. Покажемо, що кінетична енергія тіла зростає на величину роботи, яку виконує прикладена до нього результуюча сила $\vec{F}_p$. Ця робота при переміщенні тіла з точки 1 в точку 2 запишеться у вигляді

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}_p \cdot d\vec{r} \quad (5.10)$$

Тепер замінимо $\vec{F}_p$ на $m \frac{d\vec{V}}{dt}$, а $d\vec{r}$ – на $\vec{V} dt$:

$$A_{12} = \int_1^2 m \frac{d\vec{V}}{dt} \vec{V} dt \quad (5.11)$$

В (5.11) замінимо $\left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)\vec{V}$ на $V\left(\frac{dV}{dt}\right)$:

$$A_{12} = m \int_1^2 \left(V \frac{dV}{dt}\right) dt = m \int_1^2 V \left(\frac{dV}{dt}\right) dt$$

Величина $\left(\frac{dV}{dt}\right)dt$ дорівнює dV , оскільки для малого проміжку часу Δt маємо $\left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right)\Delta t = \Delta V$. Таким чином,

$$A_{12} = m \int_1^2 V dV = m \left[\frac{1}{2} V^2 \right]_1^2 = \frac{1}{2} m V_2^2 - \frac{1}{2} m V_1^2$$

В кінцевому вигляді дістанемо

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}_p \cdot d\vec{r} = T_2 - T_1 \quad (5.12)$$

Теорема про зв'язок енергії і роботи. Величину $T = \frac{1}{2} m V^2$ називають кінетичною енергією матеріальної точки або тіла. За допомогою цього поняття формулу (5.12) можна переписати так:

$$A_{12} = T_2 - T_1. \quad (5.13)$$

Отже, теорема стверджує, що робота, виконувана результируючою силою при переміщенні тіла із точки 1 в точку 2, дорівнює зміні кінетичної енергії цього тіла. Зауважимо, що оскільки швидкість тіла визначається відносно системи відліку, то кінетична енергія також залежатиме від вибору системи відліку, тобто вона – величина відносна.

5.3. Потенціальна енергія. Консервативні та неконсервативні сили

Надалі будемо часто користуватися теоремою (5.12) про зв'язок роботи і енергії. Оскільки ліва частина цього співвідношення дорівнює $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$, то зручно обчислити цей інтеграл для деяких сил і назвати його потенціальною енергією.

Потенціальна енергія – це енергія взаємодіючих тіл, що не залежить від швидкості їхнього руху.

Почнемо з обчислення потенціальної енергії взаємодії двох тіл (рис.5.2), між якими діє гравітаційна або електромагнітна сила $\vec{F}$. Зміна

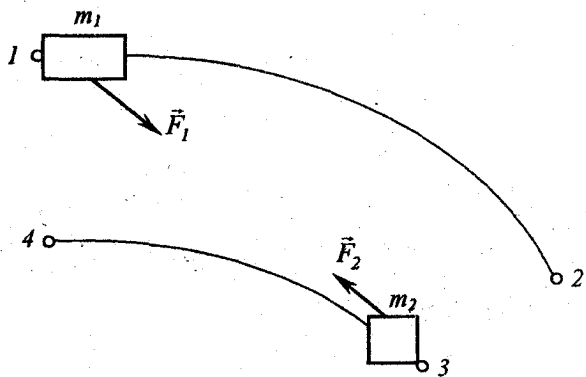


Рис.5.2

потенціальної енергії при переході тіла масою m_1 з точки 1 в точку 2 запишеться у вигляді

$$\Delta U_1 = - \int_1^2 \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1, \quad (5.14)$$

а зміна потенціальної енергії тіла m_2 при переході з точки 3 в точку 4 :

$$\Delta U_2 = - \int_3^4 \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2, \quad (5.15)$$

причому згідно з III законом Ньютона $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$. Якщо тіло масою m_2 – Земля, то зміщення $d\vec{r}_2$ настільки мале, що ΔU_2 практично дорівнює нулю.

Таким чином, якщо в систему входить тільки тіло масою m і Земля, то можна записати

$$\Delta U = U_2 - U_1 = - \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (5.16)$$

де ΔU – зміна потенціальної енергії, а $\vec{F}$ – сила, що діє між Землею і тілом. Звідси видно, що потенціальна енергія визначається як взята з протилежним знаком робота сил взаємодії.

Зміна потенціальної енергії дорівнює додатній роботі, яку слід виконати над тілом, щоб його повільно перемістити з точки 1 в точку 2 при наявності сил взаємодії.

Слід відзначити, що формула (5.16) не дає повного визначення величини потенціальної енергії в кожній точці, а визначає тільки зміну потенціальної енергії при переході з однієї точки в іншу. Абсолютна величина потенціальної енергії U залежить від вибору початку відліку потенціальної енергії, тобто тієї точки, в якій вона умовно дорівнює нулю. Як правило, за початок відліку вибирають таке положення, при якому взаємодія практично відсутня, наприклад, коли тіла, що взаємодіють, знаходяться нескінченно далеко одне від одного.

Якщо змінити початок відліку, то значення потенціальної енергії в усіх точках зміниться на одну і ту саму постійну величину C , тобто

$$U = U(r) + C. \quad (5.17)$$

Різниця енергій $U_2 - U_1$ для будь-яких двох точок залишається незмінною, оскільки при відніманні довільна стала C , яка входить в U_1 і U_2 , скорочується.

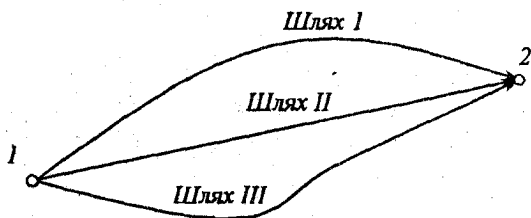


Рис.5.3

У формулі (5.16) можуть бути використані тільки сили певного типу, а саме консервативні сили. Рис.5.3 ілюструє визначення консервативних сил. Якщо $\vec{F}$ – консервативна сила, то

$$\int_{\text{Шлях I}}^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\text{Шлях II}}^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} .$$

$\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$ має одне і те ж саме значення для будь-якого шляху. Робота, що виконується дією на тіло консервативною силою, не залежить від шляху, яким тіло переміщається із довільної точки 1 в точку 2. Для консервативних сил характерна особливість полягає в тому, що робота їх по замкнутому контуру дорівнює нулю, тобто

$$A = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0 . \quad (5.18)$$

До консервативних або потенціальних сил належать сили тяжіння, сили пружності та електростатичні. Сили будуть консервативними за умови, коли в системі не спостерігається переходу механічного руху в інші форми руху матерії або навпаки. Сили, що не належать до консервативних,

називаються неконсервативними або дисипативними. Це сили тертя, що виникають при ковзанні одного тіла по поверхні іншого, сили опору, яких зазнають тіла, рухаючись у рідинах або газах. Ці сили завжди спрямовані проти напрямку швидкості, тому їх робота від'ємна.

З формули (5.16) випливає, що між діючими силами і потенціальною енергією системи тіл існує певний взаємозв'язок. Для його визначення розглянемо матеріальну точку, що знаходиться в силовому полі нерухомих тіл. Якщо сили консервативні, то можна ввести потенціальну енергію U , що має матеріальна точка в силовому полі, яка буде функцією радіуса-вектора $\vec{r}$ цієї точки або її координат x, y, z . Якщо матеріальна точка під дією сили $\vec{F}$ здійснила нескінченно мале переміщення $d\vec{r}$, то виконана робота цієї сили дорівнюватиме зменшенню потенціальної енергії, тобто

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -dU \quad (5.19)$$

$$\text{або} \quad F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dU. \quad (5.20)$$

З (5.20) маємо, що

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}, \quad (5.21)$$

тобто, якщо функція $U(x, y, z)$ відома, то визначення складових F_x, F_y, F_z зводиться до обчислення її частинних похідних від координат.

Оскільки

$$\vec{F} = \vec{i}F_x + \vec{j}F_y + \vec{k}F_z,$$

$$\text{то} \quad \vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} \right). \quad (5.22)$$

У правій частині рівності (5.22) маємо вектор, який називають градієнтом і позначають символом $\text{grad } U$. Тоді

$$\vec{F} = -\text{grad } U. \quad (5.23)$$

Отже, сила дорівнює градієнту потенціальної енергії з протилежним зна-

ком. Знак “-” вказує на те, що вектори сили і градієнта потенціальної енергії спрямовані у протилежні боки. Формули (5.21) і (5.23) можна узагальнити на довільну систему матеріальних точок, в якій діють тільки консервативні сили.

5.4. Закон збереження енергії в механіці. Закони збереження і симетрії простору та часу

Закон збереження енергії – один з головних законів природи і є окремим випадком загального закону збереження матерії і руху, відкритого М.В. Ломоносовим у 1748 р.

Розглянемо випадок, коли на тіло діє тільки консервативна сила $\vec{F}$. Використаємо теорему про зв'язок енергії і роботи (5.12):

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = T_2 - T_1.$$

Відповідно до визначення потенціальної енергії (5.16)

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = -(U_2 - U_1),$$

тобто робота A_{12} виконується за рахунок зменшення потенціальної енергії. Прирівнявши праві частини цих формул, дістанемо

$$T_2 - T_1 = U_1 - U_2$$

$$\text{або} \quad U_1 + T_1 = U_2 + T_2. \quad (5.24)$$

Суму кінетичної і потенціальної енергій називають повною механічною енергією E . З (5.24) маємо, що $E_1 = E_2$ або

$$E = U + T = \text{const}. \quad (5.25)$$

Звідси випливає, що сума потенціальної і кінетичної енергії тіла залишається незмінною. Можуть відбуватися тільки перетворення потенціальної енергії в кінетичну і навпаки. Це і є закон збереження енергії в механіці для тіла, яке знаходиться під дією тільки консервативної сили.

Тепер розглянемо загальний випадок, коли система складається з n

тіл, між якими діють консервативні та неконсервативні сили. Кожне тіло системи вважатимемо за матеріальну точку з масою m_i ($i=1,2,\dots, n$). Запишемо для тіла системи II закон Ньютона:

$$m_i \frac{d\vec{V}_i}{dt} = \vec{F}_i + \vec{F}_i' + \vec{F}_i^* , \quad (5.26)$$

де $\vec{F}_i$ – сума консервативних сил, що діють на i -те тіло системи;

$\vec{F}_i'$ – сума неконсервативних сил, що діють на i -те тіло;

$\vec{F}_i^*$ – сума зовнішніх сил, що діють на i -те тіло. Під дією цих сил протягом часу dt кожне із тіл системи переміститься відповідно на $d\vec{r}_1, d\vec{r}_2, \dots, d\vec{r}_n$.

Помножимо скалярно рівняння (5.26) на відповідне переміщення $d\vec{r}_i$:

$$m_i \frac{d\vec{V}_i}{dt} d\vec{r}_i = \vec{F}_i d\vec{r}_i + \vec{F}_i' d\vec{r}_i + \vec{F}_i^* d\vec{r}_i . \quad (5.27)$$

Ліва частина рівняння (5.27) являє собою зміну кінетичної енергії i -го тіла:

$$m_i \frac{d\vec{V}_i}{dt} d\vec{r}_i = m_i \frac{d\vec{V}_i}{dt} \vec{V}_i \cdot dt = d \left(\frac{m_i V_i^2}{2} \right) = dT_i .$$

Тоді (5.27) можна записати так:

$$dT_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i + \vec{F}_i' \cdot d\vec{r}_i + \vec{F}_i^* \cdot d\vec{r}_i . \quad (5.28)$$

Рівняння (5.28) запишемо для кожного із n тіл системи і почленно їх додамо:

$$\sum_{i=1}^n dT_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i' \cdot d\vec{r}_i + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^* \cdot d\vec{r}_i . \quad (5.29)$$

У рівнянні (5.29) $\sum_{i=1}^n dT_i = dT$ – зміна кінетичної енергії системи;

$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = -dU$ – робота всіх консервативних сил, яка дорівнює зменшенню потенціальної енергії системи;

$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i' \cdot d\vec{r}_i$ і $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i^* \cdot d\vec{r}_i$ – відповідно робота всіх неконсервативних і зовнішніх сил. Тепер рівняння (5.29) запи-

шемо так:

$$dT + dU = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i' \cdot d\vec{r}_i + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^* \cdot d\vec{r}_i$$

або

$$dE = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i' \cdot d\vec{r}_i + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^* \cdot d\vec{r}_i, \quad (5.30)$$

де $E = T + U$ – повна механічна енергія системи.

Отже, зміна механічної енергії системи дорівнює роботі, яку виконують неконсервативні та зовнішні сили.

Для замкнутої системи тіл $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i^* \cdot d\vec{r}_i = 0$, а тому

$$dE = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i' \cdot d\vec{r}_i, \quad (5.31)$$

тобто зміна механічної енергії системи тіл дорівнює роботі неконсервативних сил. Оскільки робота цих сил (наприклад, сил тертя), як правило, від'ємна, то механічна енергія системи не зберігається. Такий процес називають дисипацією енергії. Дисипація енергії зумовлена тим, що відбувається перетворення механічної енергії в інші, немеханічні види енергії. В цьому випадку виконується більш загальний закон збереження енергії – енергія ніколи не зникає і не з'являється знову, вона тільки перетворюється з одного виду в інший. У цьому і полягає фізична суть закону збереження і перетворення енергії – суть незнищимості матерії і її руху.

Якщо в системі відсутня дія неконсервативних сил, то з виразу (5.31) приходимо до закону збереження механічної енергії у вигляді (5.25).

Закони збереження та симетрії простору і часу. Закони збереження енергії, імпульсу і моменту імпульсу відіграють величезну роль в розумінні ходу різних фізичних процесів. Існування законів збереження зумовлюється не властивостями конкретних сил і рівнянь руху, а основними властивостями простору і часу.

В основі закону збереження енергії покладено однорідність часу, тобто незалежність законів руху системи від вибору початку відліку часу.

В основі закону збереження імпульсу лежить однорідність простору. Однорідність простору, як уже відзначалось, означає, що паралельний перенос в ньому замкнутої механічної системи як цілого не змінює механіч-

них властивостей системи.

Ізотропність простору покладено в основу закону збереження моменту імпульсу. Вона полягає в тому, що поворот замкненої системи як цілого не впливає на її механічні властивості.

Закони збереження широко використовуються при різних дослідженнях. Вони не залежать від характеру діючих сил, а тому за їх допомогою можна одержати важливі відомості про поведінку механічних систем у випадку, коли вони невідомі.

Однорідність та ізотропність простору і однорідність часу є їх найважливішими симетріями. Тому можна сказати, що закони збереження зумовлені симетрією простору і часу. Загальний доказ цього твердження дається в теоретичній механіці.

Контрольні запитання

1. Який фізичний зміст і в чому полягає відмінність між поняттями енергії і роботи ?
2. Що називається потужністю сили ?
3. Якими одиницями в системі СІ вимірюється енергія, робота і потужність ?
4. Дайте означення кінетичної і потенціальної енергії.
5. Як формулюється закон збереження механічної енергії ? Для яких систем тіл він виконується ?
6. У чому полягає відмінність між консервативною і дисипативною системами тіл ?
7. У чому полягає фізична суть закону збереження і перетворення енергії ?
8. Чим зумовлені закони збереження енергії, імпульсу і моменту імпульсу ?

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Вивести формулу потенціальної енергії деформованої пружини.

Розв'язання. На рис.5.4 показана нерозтягнута пружина. Помістимо

в кінці пружини початок координат. Як уже зазначалось, пружні сили належать до консервативних. Тому можна говорити про потенціальну енергію



Рис. 5.4

деформованої пружини. Пружна сила, що виникає при деформації, пропорційна значенню розтягу x , тобто $F_{np} = -kx$ (k – коефіцієнт пружності). За

III законом Ньютона для переборення сили пружності потрібно прикласти силу $F = -F_{np} = kx$. Елементарна робота dA , що виконується силою F при малій деформації пружини dx , дорівнює $dA = F \cdot dx = kx dx$, а повна робота

$$A = \int_0^x kx dx = \frac{kx^2}{2} + C = U + C$$

йде на збільшення потенціальної енергії пружини. Якщо вважати, що потенціальна енергія недеформованої пружини (при $x=0$) дорівнює нулю, то

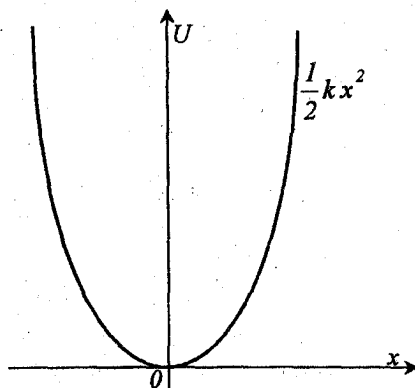


Рис. 5.5

$C=0$. Таким чином, потенціальна енергія деформованої пружини

$$U = \frac{kx^2}{2}, \quad (5.32)$$

тобто вона є функцією стану системи.

На рис.5.5 побудована залежність U від x відповідно до виразу (5.32).

Приклад 2. Визначити гравітаційну потенціальну енергію тіла масою m , що знаходиться на відстані h над поверхнею Землі (рис. 5.6).

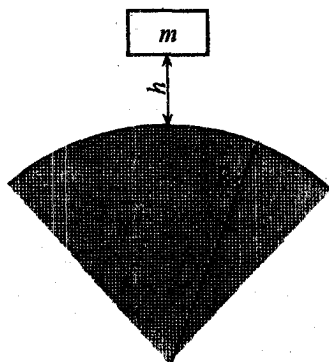


Рис.5.6

Розв'язання. Згідно з законом всесвітнього тяжіння, сила, що діє на тіло масою m на відстані r від центра Землі, дорівнює $F = -mg \frac{R_3^2}{r^2}$, де

R_3 – радіус Землі, а $r = R_3 + h$ (знак “-” вказує на напрямок дії сили: до центра Землі). Підставимо дане значення сили в формулу (5.16)

$$U_r - U_3 = \int_{R_3}^r \left(\frac{-mgR_3^2}{r^2} \right) dr,$$

де U_3 – потенціальна енергія тіла на поверхні Землі; U_r – потенціальна енергія тіла на відстані r від центра Землі.

Проінтегрувавши, дістанемо

$$U_r - U_3 = mgR_3^2 \int_{R_3}^r r^{-2} dr = mgR_3^2 \left[-\frac{1}{r} \right]_{R_3}^r = mgR_3^2 \left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{r} \right)$$

або

$$U_r - U_3 = mgR_3^2 \left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{r} \right) \quad (5.33)$$

Вираз (5.33) описує роботу, необхідну для переміщення тіла масою m на висоту h над поверхнею Землі ($h = (r - R_3)$). Для переміщення тіла на нескінченно велику відстань від Землі потрібна робота

$$U_r - U_3 = mgR_3^2 \left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{\infty} \right) = mgR_3$$

Поблизу поверхні Землі $r = R_3$, і в цьому випадку

$$U_r - U_3 = mgR_3^2 \left(\frac{r - R_3}{R_3 r} \right) = mg \frac{R_3}{r} h$$

або

$$U_r - U_3 \approx mgh \quad (5.34)$$

Якщо прийняти за нуль потенціальну енергію тіла, яке лежить на поверхні Землі ($U_3 = 0$), то потенціальна енергія тіла масою m , піднятого на висоту h над поверхнею Землі, дорівнює

$$U_r = mgh \quad (5.35)$$

Вираз (5.35) впливає також з того, що потенціальна енергія дорівнює роботі сили тяжіння при падінні тіла з висоти h на поверхню Землі.

Приклад 3. Снаряд масою m летить з швидкістю $\vec{V}$, паралельно поверхні Землі на висоті h і падає в точці M на Землю. Яку роботу виконує сила тяжіння?

Розв'язання. Обчислимо інтеграл $A_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 F dr \cos \alpha$, де

$F = mg$ – сила тяжіння. З рис. 5.7 маємо $dr \cos \alpha = dh$, а тому

$$A_{12} = \int_1^2 (-mg) dh = -mg \int_h^0 dh = mgh,$$

Якщо робота сили тяжіння не залежить від форми траєкторії руху тіла, а визначається взаємним розміщенням його початкового і кінцевого положень.

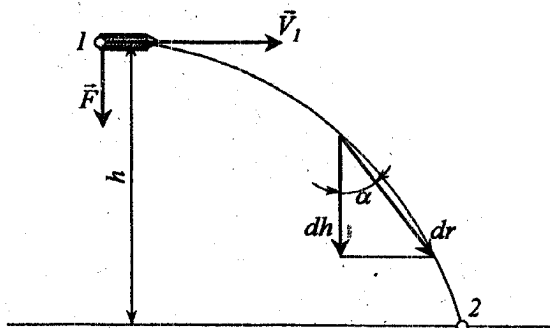


Рис.5.7

Приклад 4. Чому дорівнює швидкість снаряда на рис.5.7 в момент, коли він падає на Землю в точці 2?

Розв'язання. Зауважимо, що сила $F=mg$ є результируючою, а тому використаємо теорему про зв'язок енергії і роботи (5.12):

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}_p \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} m V_2^2 - \frac{1}{2} m V_1^2.$$

В попередньому прикладі знайшли, що $A_{12} = mgh$, а тому

$$mgh = \frac{1}{2} m V_2^2 - \frac{1}{2} m V_1^2,$$

звідки

$$V_2^2 = 2gh + V_1^2.$$

Приклад 5. Тіло масою $m=100$ кг впало на Землю з висоти $h=75$ м через $t=5$ с після початку руху. Знайти роботу сили опору F_o , вважаючи її постійною.

Розв'язання. В даному випадку систему не можна вважати замкнутою. Тому використаємо формулу (5.31):

$$\Delta E = A; \quad E_1 - E_2 = F_o \cdot h; \quad E_1 = mgh; \quad E_2 = \frac{mV^2}{2}.$$

Щоб знайти швидкість V , використаємо формули кінематики:

$$h = \frac{at^2}{2}; \quad \dot{V} = at,$$

звідки

$$V = \frac{2h}{t}.$$

Тоді

$$A = F_o \cdot h = mgh - \frac{2mh^2}{t^2} = 28,5 \text{ кДж}.$$

Приклад 6. Куля масою $m = 10 \text{ г}$ летить горизонтально з швидкістю $V = 300 \text{ м/с}$ і вдаряється в підвішений на нитці дерев'яний брусок масою $M = 6 \text{ кг}$ і загрузає в нього. Визначити, на яку висоту піднімається брусок.

Розв'язання. У горизонтальному напрямку на кулю і брусок зовнішні сили не діють, тому можна записати на основі закону збереження імпульсу: $mV = (M + m)v$, де v – швидкість бруска після попадання в нього кулі.

Розглянувши два стани бруска з кулею – в нижній точці і після підйому на висоту h , – на основі закону збереження енергії можна записати:

$$\frac{(M + m)v^2}{2} = (M + m)gh,$$

звідки

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{m^2 V^2}{2g(M + m)^2} = 1,28 \text{ см}.$$

Задачі для самостійних вправ

1. Сваю масою 100 кг забивають в ґрунт копром, маса якого 400 кг . Копер вільно падає з висоти 5 м і при кожному його ударі свая вгрузає в ґрунт на глибину 5 см . Визначити силу опору ґрунту, вважаючи її постійною.

Відповідь: 24500 Н .

2. Маса вертольота 3 т. На його підняття витрачається 30% потужності двигуна. Визначити потужність двигуна вертольота, якщо він може піднятися на висоту 1500 м за 2 хв. Рух вертольота вважати рівномірним.

Відповідь: $12,25 \cdot 10^9$ Вт.

3. По канату з коефіцієнтом пружності 49 кН/м рухається вантаж масою $4 \cdot 10^3$ кг з швидкістю 4 м/с. В деякий момент часу верхній кінець канату зупиняють. Визначити максимальну силу натягу канату при гальмуванні вантажу до повної зупинки.

Відповідь: 58 кН.

4. Яку роботу треба виконати, щоб телеграфний стовп масою 200 кг, до вершини якого прикріплено хрестовину масою 30 кг, перевести з горизонтального положення у вертикальне? Довжина стовпа – 10 м.

Відповідь: $\approx 12,7$ кДж.

5. Яку механічну роботу виконує маховик з радіусом 2 м і масою $6 \cdot 10^3$ кг при зміні частоти обертання від 10 до 4 об/хв?

Відповідь: ≈ 11200 Дж.

6. Лижник масою 70 кг з'їжджає з гори висотою 30 м. Визначити силу тиску лижника на сніг у кінці гори, якщо в нижній її частині він рухається по угнутій дузі кола радіусом 40 м. Тертям і опором повітря знехтувати.

Відповідь: $\approx 1,7 \cdot 10^3$ Н.

7. Нейтрон пружно ударяє в ядро вуглецю і рухається після удару в напрямку, перпендикулярному до початкового. Враховуючи, що маса ядра вуглецю в 12 разів більша від маси нейтрона, визначити, в скільки разів зменшиться енергія нейтрона в результаті удару.

Відповідь: 1,2.

8. Гідравлічний молот масою 12 т падає з швидкістю 5 м/с на ковадло, маса якого разом з куском заліза, який куять, 250 т. Визначити роботу, що її виконує молот для розплющування заліза, і енергію, втрачену на струс фундаменту, вважаючи удар абсолютно непружним.

Відповідь: $1,43 \cdot 10^5$ Дж, $6,87 \cdot 10^3$ Дж.

9. Визначити потужність двигуна бурової лебідки, яка може підняти вантаж масою 3 т з постійною швидкістю 6 м/хв, якщо коефіцієнт корисної дії лебідки дорівнює 0,8.

Відповідь: 3,675 кВт.

10. Невелике тіло зсувається вниз похилим жолобом, який переходить в мертву петлю радіусом 0,2 м. З якої висоти має почати свій рух тіло, щоб не відірватися від жолоба в верхній точці петлі? Тертям знехтувати.

Відповідь: 0,5 м.

11. Тіло масою 3 кг рухається з швидкістю 4 м/с і вдаряється об нерухоме тіло масою 3 кг. Вважаючи удар центральним і непружним, знайти кількість теплоти, яка виділилась при ударі.

Відповідь: 12 Дж.

12. Визначити роботу, яку потрібно виконати, щоб стиснути пружину на 0,2 м, якщо відомо, що сила прямо пропорційна деформації і під дією сили 29,4 Н пружина стискується на 0,01 м.

Відповідь: 58,8 Дж.

Розділ 6. ПРИНЦИП ВІДНОСНОСТІ В МЕХАНІЦІ. ЕЛЕМЕНТИ РЕЛЯТИВІСТСЬКОЇ ДИНАМІКИ

6.1. Механічний принцип відносності. Перетворення Галілея. Інваріанти перетворень

Г. Галілей сформулював механічний принцип відносності: закони природи однакові в усіх інерціальних системах відліку. Іноді принципи відносності Галілея формують так: жодними механічними дослідженнями, проведеними всередині інерціальної системи відліку, неможливо встановити, перебуває система в спокої чи в рівномірному прямолінійному русі.

Для доведення цього розглянемо рух матеріальної точки M відносно двох систем відліку K і K' . Систему K вважатимемо інерціальною, а систему K' такою, що рухається рівномірно та прямолінійно з швидкістю $\vec{V}_0$ вздовж осі Ox відносно системи K (рис. 6.1).

Позначимо координати точки M відносно цих систем відповідно через x, y, z і x', y', z' . Знайдемо формули перетворення координат, тобто формули, які дають змогу перейти від координат рухомої точки в одній системі до її координат в іншій системі. Нехай у момент часу $t=0$ початки обох систем відліку збігаються, тоді в момент часу t початок рухомої системи координат O' знаходиться в точці $x=V_0 t$ нерухомої системи. Очевидно, у будь-

який момент часу зв'язок між координатами точки М відносно систем відліку К і К' виражається формулами:

$$x = x' + V_o t, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t'. \quad (6.1)$$

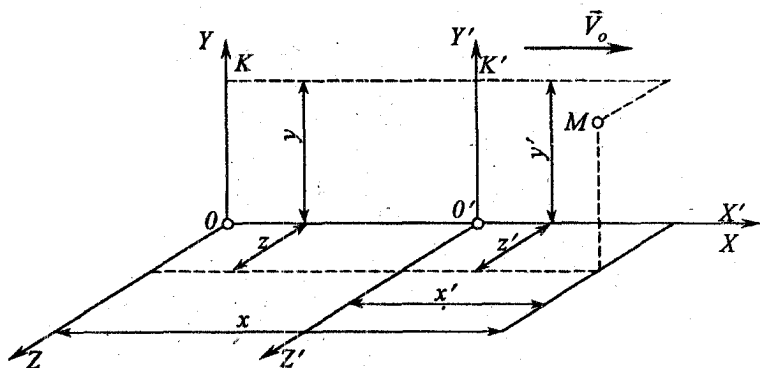


Рис.6.1

Рівняння $t = t'$ свідчить про те, що в класичній механіці час не залежить від відносного руху систем відліку. Систему рівнянь (6.1) називають перетвореннями Галілея.

Нерухомою системою відліку можна взяти систему К', тоді система К рухається відносно неї в напрямку від'ємних значень x' , тобто з швидкістю $-\vec{V}_o$. Для цього випадку формули перетворення матимуть вигляд

$$x' = x - V_o t, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t.$$

Якщо величина не змінює свого числового значення при перетворенні координат, то це означає, що вона має об'єктивне значення, незалежне від вибору системи координат. Такі величини називаються інваріантами перетворень.

Інваріантність довжини. Знайдемо довжину стержня у нерухомій К і рухомій К' системах відліку. В К системі відліку довжина стержня визначається за формулою

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

де x_1, y_1, z_1 і x_2, y_2, z_2 — координати відповідно початку і кінця стержня.

Користуючись співвідношеннями (6.1), знайдемо координати початку і кінця цього стержня в системі K' :

$$x'_1 = x_1 - V_0 t, \quad y'_1 = y_1, \quad z'_1 = z_1; \quad x'_2 = x_2 - V_0 t, \quad y'_2 = y_2, \quad z'_2 = z_2.$$

В рухомій системі відліку K' довжина стержня

$$\begin{aligned} l' &= \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2} = \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = l. \end{aligned} \quad (6.2)$$

З рівності (6.2) видно, що довжина стержня в обох системах відліку однакова, тобто інваріантна.

Інваріантність інтервалу часу доводиться на основі формули перетворення $t=t'$. Нехай в нерухомій системі координат відбулися події в моменти часу t_1 і t_2 .

Проміжок часу між цими подіями

$$\Delta t = t_2 - t_1. \quad (6.3)$$

В рухомій системі координат ці події на основі (6.1) відбулися в моменти $t'_1 = t_1$ і $t'_2 = t_2$. Інтервал часу між ними

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = t_2 - t_1 = \Delta t. \quad (6.4)$$

Таким чином, можна сказати, що інтервал часу є інваріантом перетворення Галілея.

Додавання швидкостей. Знайдемо зв'язок між складовими швидкостями точки в обох системах відліку. Продиференціювавши рівняння (6.1) з часом, дістанемо:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dx'}{dt} + V_0 \frac{dt}{dt}; \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dy'}{dt}; \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{dz'}{dt} \end{aligned}$$

$$\text{або} \quad V_x = V'_x + V_o, \quad V_y = V'_y, \quad V_z = V'_z. \quad (6.5)$$

У векторній формі система рівнянь (6.5) матиме такий вигляд:

$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{V}_o. \quad (6.6)$$

Формула (6.6) виражає закон додавання швидкостей Галілея.

Інваріантність прискорення. Продиференціюємо рівняння (6.6) за часом. При цьому матимемо

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{V}'}{dt} \quad \text{або} \quad \vec{a} = \vec{a}'. \quad (6.7)$$

Таким чином, при рівномірному та прямолінійному русі однієї системи відліку відносно іншої прискорення тіла в таких системах відліку інваріантні, хоча швидкості його відрізняються на величину, яка дорівнює швидкості руху однієї системи відліку відносно іншої. Отже, якщо на точку М не діють інші тіла ($\vec{a} = 0$), то згідно з (6.7) і $\vec{a}' = 0$, тобто система відліку К' є інерціальною (точка рухається відносно неї рівномірно і прямолінійно або знаходиться в стані спокою). Із співвідношення (6.7) випливає також підтвердження механічного принципу відносності: рівняння динаміки при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої не змінюються, тобто є інваріантними відносно перетворень координат Галілея.

6.2. Постулати спеціальної теорії відносності. Перетворення Лоренца

В кінці XIX ст. фізики вважали, що досягнуті знання фундаментальні і нові дослідження тільки їх доповнюватимуть. Механіка Ньютона глибоко пояснювала широке коло явищ макросвіту. Її результати покладені в основу багатьох галузей техніки.

Проте на початку XX ст. виявилось, що деякі висновки класичної механіки не узгоджуються з результатами експериментів. Так, перевірка формули додавання швидкостей (6.6) показала, що відхилення від неї тим значніші, чим більша швидкість. Особливо вони великі при швидкостях, близьких до швидкості світла. Ці відхилення вперше були відкриті при дослідженні швидкості світла, поведінка якої з точки зору класичної фізики

виявилась загадковою (швидкість світла однакова в усіх інерціальних системах відліку). В 1902 р. В. Кауфман, вивчаючи відхилення β -частинок в електричному і магнітному полях, знайшов відношення їх заряду до маси $\left(\frac{e}{m}\right)$ і встановив, що воно є функцією швидкості частинки. Це означає, що

маса частинки залежить від її швидкості. Для пояснення цих дослідів А. Ейнштейн в 1905 р. створив нову механіку, яка називається спеціальною теорією відносності. Аналізуючи основи механіки Ньютона, А. Ейнштейн прийшов до висновку, що уявлення про абсолютні простір і час неправильні. У спеціальній теорії відносності, яка називається релятивістською теорією, простір і час органічно пов'язані між собою і з рухом матерії. В основу теорії А. Ейнштейна покладено два постулати:

I. Принцип відносності. Цей постулат – узагальнення принципу відносності Галілея на всі фізичні явища. Таким чином, фізичні закони і їхні рівняння є інваріантними, тобто однакові за формою в усіх системах відліку. Згідно з цим постулатом, всі інерціальні системи відліку рівноправні (механічні, електродинамічні, оптичні і інші явища протікають в усіх інерціальних системах відліку однаково).

II. Принцип інваріантності швидкості світла.

Він показує, що швидкість світла у вакуумі ($c=3 \cdot 10^8$ м/с) однакова в усіх інерціальних системах відліку і не залежить від швидкості руху джерела світла і спостерігача.

З постулатів Ейнштейна випливає, що швидкість світла у вакуумі є граничною і цим самим відкидається принцип далекодії у класичній механіці.

Проаналізувавши явища в інерціальних системах відліку на основі сформульованих ним постулатів, Ейнштейн прийшов до висновку, що вони не сумісні з перетвореннями Галілея, а тому замість них увів перетворення Лоренца.

Нехай K і K' – дві інерціальні системи відліку, які вибрано так, що однойменні осі координат паралельні і їхні початки координат збігаються у момент часу $t=0$. Система K' рухається відносно системи K вздовж осі Ox з сталою швидкістю $\vec{V}_0$ (див. рис.6.1). Тоді перетворення Лоренца при переході від однієї системи відліку до іншої мають такий вигляд:

$$\begin{aligned}
& K' \rightarrow K & K \rightarrow K' \\
& x = \frac{x' + V_0 t'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & x' = \frac{x - V_0 t}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\
& y = y', & y' = y, \\
& z = z', & z' = z, \\
& t = \frac{t' + V_0 x' / c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & t' = \frac{t - V_0 x / c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\
& \beta = \frac{V_0}{c}.
\end{aligned} \tag{6.8}$$

При $V_0 \ll c$ перетворення Лоренца переходять у перетворення Галілея. Таким чином, перетворення Галілея є окремим випадком перетворень Лоренца. При $V_0 > c$ вирази (6.8) для x, t, x' і t' стають уявними. Це відповідає тому, що рух з швидкістю, більшою від швидкості світла в вакуумі, неможливий.

6.3. Релятивістський імпульс. Рівняння руху релятивістської частинки

З першого постулату А. Ейнштейна випливає, що рівняння динаміки, які описують рух тіл під дією сил, повинні бути інваріантними відносно перетворень Лоренца. Основний закон динаміки (II закон Ньютона) інваріантний відносно перетворень Лоренца за умови, що маса тіла залежить від швидкості його руху, а саме зростає із збільшенням швидкості за законом

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \tag{6.9}$$

де m_0 – маса спокою матеріальної точки (виміряна в тій інерціальній системі відліку, відносно якої матеріальна точка знаходиться в спокої), а m – релятивістська маса. Підставивши (6.9) у другий закон Ньютона, знайдемо

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \vec{V}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) \tag{6.10}$$

(релятивістське рівняння руху матеріальної точки)

або
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

де
$$\vec{p} = m\vec{V} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \vec{V} \quad (6.11)$$

релятивістський імпульс матеріальної точки, який є інваріантним відносно перетворень Лоренца.

Маса m (6.8) в релятивістській механіці, як і в класичній механіці, мірою інертності, але вона не залишається сталою, а зростає із збільшенням швидкості. При $V \rightarrow c$ маса $m \rightarrow \infty$, що і пояснює граничне значення швидкості світла у вакуумі. Релятивістське зростання маси із збільшення швидкості безпосередньо підтверджується в прискорювачах елементарних частинок.

Аналіз формул (6.8) – (6.10) свідчить, що при швидкостях, значно менших швидкості світла, імпульс $\vec{p} = m\vec{V} \approx m_0\vec{V}$ і $\vec{F} = m_0 \frac{d\vec{V}}{dt}$, тобто межею застосування законів класичної механіки є умова $\vec{V} \ll \vec{c}$.

6.4. Робота і енергія

Щоб знайти релятивістську формулу для енергії, помножимо рівняння (6.10) на переміщення частинки $d\vec{r} = \vec{V} \cdot dt$:

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \vec{V}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \vec{V} dt. \quad (6.12)$$

Ліва частина цього рівняння дає роботу dA , що виконується над частинкою за час dt . Із закону збереження енергії випливає, що ця робота повинна дорівнювати приросту енергії частинки dE , а тому запишемо

$$dE = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \vec{V}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \vec{V} dt = \vec{V} d \left(\frac{m_0 \vec{V}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right). \quad (6.13)$$

Враховуючи, що $\vec{V}d\vec{V} = d\left(\frac{V}{2}\right)^2$, після відповідних перетворень дістанемо

$$dE = \vec{V} \left\{ \frac{m_0 d\vec{V}}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{m_0 \vec{V} (\vec{V} d\vec{V} / c^2)}{(1-\beta^2)^{3/2}} \right\} = d \left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \right).$$

Інтегрування одержаного співвідношення дає

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + C. \quad (6.14)$$

Якщо $C=0$, то вираз для енергії з врахуванням (6.9) матиме вигляд:

$$E = mc^2, \quad (6.15)$$

де E – повна енергія.

Коли частинка рухається з швидкістю $V=0$, маємо

$$E = m_0 c^2 = E_0, \quad (6.16)$$

де E_0 – енергія спокою, або власна енергія частинки.

Формула (6.15) виражає фундаментальний закон природи – закон взаємозв'язку маси і енергії, зміст якого полягає в твердженні неможливості існування маси без енергії і енергії без маси. Цей закон пропорційності між енергією і масою не можна розглядати як закон еквівалентності енергії і маси, оскільки маса характеризує інерцію тіла, а енергія – здатність виконання роботи. Енергія як міра руху знаходить відображення у своїй протилежності – масі – як мірі інерції. Таким є діалектичний зміст закону взаємозв'язку маси та енергії. Зміна повної енергії тіла ΔE супроводиться зміною його маси $\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}$ і навпаки – $\Delta E = \Delta m \cdot c^2$.

Закон взаємозв'язку маси і енергії широко використовується у ядерній фізиці та фізиці елементарних частинок, де розглядаються процеси, які супроводжуються значними змінами енергії порівняно з енергією спокою елементарних частинок. Енергія інваріантна відносно перетворень Лоренца.

Енергія тіла (частинки) E_0 (6.16) містять у собі не тільки енергію спокою частинок, з яких воно складається, а й їхню кінетичну енергію (зумовлену їх рухом відносно центра мас тіла) і енергією їх взаємодії. З енергією спокою E_0 і повну енергію E не входить потенціальна енергія тіла в зовнішньому силовому полі. Отже, кінетичну енергію релятивістської частинки визначимо як різницю E і E_0 :

$$T = E - E_0 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right) \quad (6.17)$$

Цей вираз значно відрізняється від класичного $\frac{m_0 V^2}{2}$ і його не можна подати у вигляді $\frac{m V^2}{2}$, де m – релятивістська маса частинки.

Розглянемо випадок малих швидкостей ($V \ll c$). Користуючись формулою бінома Ньютона, розкладемо в ряд вираз $\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$:

$$(1 - \beta^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \dots$$

Обмежуючись першими двома членами ряду, матимемо

$$T \approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 - 1 \right) = \frac{1}{2} m_0 V^2$$

В результаті одержано класичний вираз для кінетичної енергії, що й слід було чекати, оскільки при швидкостях, набагато менших від швидкості світла, всі формули релятивістської механіки переходять у відповідні формули класичної механіки.

6.5. Наслідки із перетворень Лоренца

Відносність одночасності. У механіці Ньютона час вважається абсолютним, а його властивості – незалежними від системи відліку, тобто час однаковий для всіх систем відліку ($t = t'$). Отже, проміжок часу між двома даними подіями також однаковий у різних інерціальних системах відліку.

Спеціальна теорія відносності вважає, що час не є абсолютним і його перебіг залежить від системи відліку. Для доведення цього положення розглянемо такий простий приклад. Візьмемо дві інерціальні системи відліку K і K' (рис.6.2).

Система K' рухається відносно K вправо вздовж осі Ox з швидкістю V .

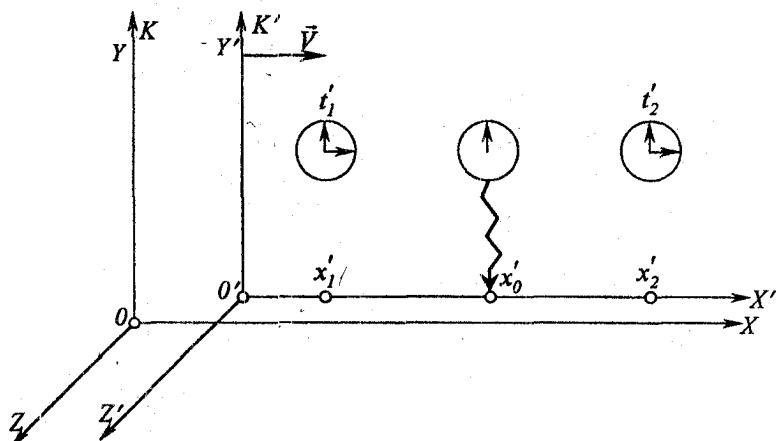


Рис.6.2

Нехай в деякій точці системи K' на осі Ox' з координатою x'_0 в деякий момент часу відбувся спалах блискавки. Оскільки швидкість поширення світла в усіх системах відліку дорівнює c , то світловий імпульс досягне обох рівновіддалених від точки x'_0 фотоеlementів, які розміщені в точках з координатами x'_1 і x'_2 , одночасно і вони спрацюють в момент часу $t'_1 = t'_2 = t'_0$ (t'_1 і t'_2 – покази годинників, які знаходяться в рухомій системі координат K' в точках x'_1 і x'_2).

Неважко побачити, що ці події (реєстрація світлового імпульсу) для спостерігача в нерухомій системі відліку K неодноразові. В системі K імпульс прийде в точку x'_1 раніше, ніж у точку x'_2 . У нерухомій системі координат події відбулися в точках x_1 і x_2 в моменти часу t_1 і t_2 (t_1 і t_2 – покази годинників, які знаходяться в нерухомій системі координат в точках x_1 і x_2). Зв'язок між величинами в рухомій і нерухомій системі координат

запишемо на основі перетворень Лоренца (6.8) :

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{x'_1 + Vt'_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}; & x_2 &= \frac{x'_2 + Vt'_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \\t_1 &= \frac{t'_0 + \frac{V}{c^2}x'_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}; & t_2 &= \frac{t'_0 + \frac{V}{c^2}x'_2}{\sqrt{1 - \beta^2}}\end{aligned}\quad (6.18)$$

Оскільки події відбуваються в точках на осі Ox , то координати y, z в обох системах дорівнюють нулю. З (6.18) видно, що в нерухомій системі координат ці події відбуваються неодноразомно ($t_1 \neq t_2$). Вони розділені інтервалом часу

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\frac{V}{c^2}(x'_2 - x'_1)}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Таким чином, події, одночасні в системі K' (інтервал часу між ними $\Delta t' = t'_2 - t'_1 = 0$), виявились неодноразомними в системі K ($\Delta t \neq 0$).

Поняття одночасності не має абсолютного значення, незалежного від системи координат. Щоб твердження про одночасність яких-небудь подій мало відповідний зміст, необхідно вказати, до якої системи координат це твердження належить.

Відносність проміжків часу. Нехай в деякій точці з координатою x' в рухомій системі координат K' відбуваються дві події, наприклад, два послідовні удари метронома, розділені проміжком часу (інтервалом) $\tau_0 = t'_2 - t'_1$. Система K' для цих подій є “системою спокою”, а час, вимірний відносно цієї системи, називається власним часом.

Інтервал часу τ між цими подіями вимірний за годинниками системи K , відносно якої події “рухаються”, тобто знаходяться в різних точках, буде

$$\tau = t_2 - t_1, \quad (6.19)$$

де, згідно з перетвореннями Лоренца (6.8)

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{Vx'_1}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t_2 = \frac{t'_2 + \frac{Vx'_2}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (6.20)$$

Підставивши (6.20) в (6.17), дістанемо

$$\tau = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (6.21)$$

Із співвідношення (6.21) випливає, що $\tau > \tau_0$. Отже, хід годинника сповільнюється в системі відліку, відносно якої годинник рухається.

Відносність довжин стержнів. Нехай в стані спокою відносно системи K' (рис.6.3) знаходиться стержень довжиною l_0 . Система K' рухається

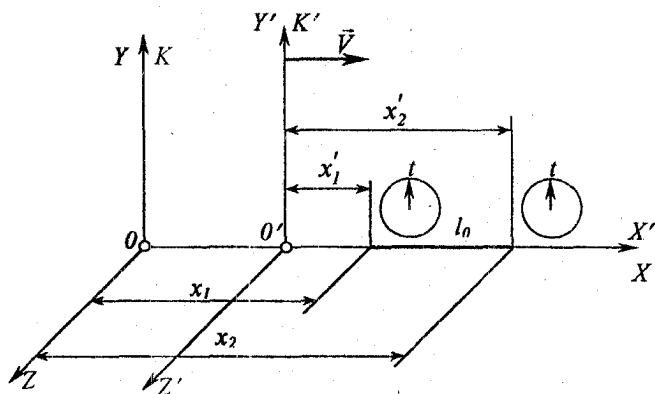


Рис.6.3

ся разом зі стержнем вздовж осі Ox відносно нерухомої інерціальної системи координат K з швидкістю $\vec{V}$. Довжину спокою запишемо так:

$$l_0 = x'_2 - x'_1, \quad (6.22)$$

де x'_1 і x'_2 — не змінні з часом t' координати початку і кінця стержня.

Визначимо довжину цього стержня в системі K . Для цього спостері-

гач, який знаходиться в системі К, одночасно в момент часу t (по своїх годинниках) вимірює координати кінців стержня. Їх різниця $x_2 - x_1 = l$ і буде шуканою довжиною стержня відносно системи К.

Використовуючи перетворення Лоренца (6.8), дістанемо

$$l_0 = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - Vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{x_1 - Vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} =$$

$$= \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{l}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

звідки

$$l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}, \quad (6.23)$$

тобто довжина рухомого стержня l менша за довжину нерухомого l_0 . Довжина не є абсолютною величиною, як вважали раніше, а залежить від швидкості руху тіла відносно даної системи відліку.

З другого і третього рівнянь перетворень Лоренца (6.8) випливає, що $y_2 - y_1 = y'_2 - y'_1$ і $z_2 - z_1 = z'_2 - z'_1$, тобто поперечні розміри тіла не залежать від швидкості його руху і однакові в усіх інерціальних системах відліку.

Зауважимо, що формули (6.21) і (6.23) підтверджені експериментально в різноманітних дослідженнях з елементарними частинками.

Релятивістський закон додавання швидкостей. Важливим кінетичним наслідком спеціальної теорії відносності є релятивістський закон додавання швидкостей.

Нехай матеріальна точка рухається вздовж осі Ox' системи K' , а та, в свою чергу, рухається відносно інерціальної системи координат К з швидкістю V_0 (рис.6.1).

Продиференціюємо рівняння (6.8):

$$dx' = \frac{dx - V_0 dt}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad dt' = \frac{dt - \frac{V_0}{c^2} dx}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (6.24)$$

Поділивши вираз dx' на dt' , дістанемо закон додавання швидкостей:

$$V' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - V_0 dt}{dt - \frac{V_0}{c^2} dx} = \frac{V - V_0}{1 - \frac{V_0 V}{c^2}}, \quad (6.25)$$

де $V' = \frac{dx'}{dt'}$ і $V = \frac{dx}{dt}$ – швидкості точки відповідно у рухомій K' і нерухомій K системах відліку.

Швидкість V можна виразити через V' в (6.25), якщо замінити V_0 на $-V_0$ (відносно системи відліку K' система K рухається з швидкістю $-V_0$) і величини швидкостей без штрихів на величини швидкостей з штрихами:

$$V = \frac{V' + V_0}{1 + \frac{V_0 V'}{c^2}}. \quad (6.26)$$

Якщо матеріальна точка рухається в системі K' з швидкістю $V' = c$ (c – швидкість світла в вакуумі), то її швидкість V відносно системи K запишемо так:

$$V = \frac{c + V_0}{1 + \frac{V_0 c}{c^2}} = c. \quad (6.27)$$

Подібно на основі (6.25) при $V = c$ дістаємо, що $V' = c$. Якщо $V' = c$ і $V_0 = c$, то згідно з (6.26) маємо

$$V = \frac{c + c}{1 + \frac{c \cdot c}{c^2}} = c. \quad (6.28)$$

Характерна властивість релятивістського закону додавання швидкостей (6.25) і (6.26) полягає в тому, що при будь-яких швидкостях результуюча швидкість не перевищує швидкості світла c .

Швидкості, більші за швидкість світла, неможливі, тому що формули перетворень Лоренца (6.8) втрачають зміст (стають уявними). Такий висновок природний, оскільки в основі перетворень Лоренца (а значить і формул додавання швидкостей) покладено твердження, що швидкість світла одна-

кова в усіх системах відліку.

Просторово-часовий інтервал між подіями. Поряд з відносністю одночасності подій, проміжків часу та довжин відрізків в різних системах відліку, у спеціальній теорії відносності є й абсолютні величини, які інваріантні по відношенню до перетворень координат. До них належать швидкість поширення взаємодій, яка дорівнює швидкості світла у вакуумі, а також просторово-часовий інтервал S_{12} , що розділяє дві події:

$$S_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2, \quad (6.29)$$

де $t_{12} = t_2 - t_1$ — проміжок часу між двома подіями;

$$l_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} -$$

відстань між точками тримірного простору, в яких ці події відбулися. Формулу (6.29) можна записати в іншому вигляді:

$$\begin{aligned} S_{12} &= \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2} = \sqrt{c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2} = \\ &= \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2}, \end{aligned} \quad (6.30)$$

де $\Delta t = t_2 - t_1$, $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$, $\Delta z = z_2 - z_1$.

Інтервал між тими ж самими подіями в системі K' , яка рухається відносно системи K вздовж осі Ox , дорівнює

$$S'_{12} = \sqrt{c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2}. \quad (6.31)$$

На основі перетворень Лоренца (6.8) знайдемо, що

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - V_0 \Delta t}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \Delta y' = \Delta y, \quad \Delta z' = \Delta z, \quad \Delta t' = \frac{\Delta t - V_0 \Delta x / c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Підставимо ці значення в (6.31), дістанемо, що

$$S'_{12} = \sqrt{c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2} = S_{12}, \quad (6.32)$$

тобто інтервал між двома подіями інваріантний при переході від одної інерціальної системи відліку до іншої. Отже, інваріантність інтервалу означає

що, незважаючи на відносність проміжків часу і довжин, хід подій носить об'єктивний характер і не залежить від системи відліку, що простір і час органічно пов'язані між собою і утворюють єдину форму існування матерії простір – час.

6.6. Зв'язок енергії і імпульсу. Перетворення енергії і імпульсу. Закони збереження енергії, маси та імпульсу

Встановимо зв'язок енергії з імпульсом. Енергія частинки (тіла) і її імпульс пов'язані з релятивістською масою (6.9) згідно з формулами (6.15) і (6.11) співвідношеннями:

$$E = mc^2; \quad \vec{p} = m\vec{V}.$$

Піднесемо обидва рівняння до квадрата, після чого друге рівняння помножимо на c^2 :

$$E^2 = m^2 c^4; \\ p^2 c^2 = m^2 V^2 c^2.$$

Віднімаючи від першого рівняння друге, дістанемо

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4 \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) = \frac{m_0^2 c^4 \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right)}{1 - \frac{V^2}{c^2}} = m_0^2 c^4$$

або
$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4. \quad (6.33)$$

Маса m_0 є інваріантом. Отже, і вираз (6.33) має однакову величину в усіх інерціальних системах відліку, тобто є інваріантом.

З рівняння (6.33) для релятивістської енергії одержимо такий вираз:

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}, \quad (6.34)$$

звідки випливає, що релятивістська енергія властива і для частинок з нульовою масою спокою ($m_0 = 0$). Наприклад, фотон, енергія якого

$$E = pc,$$

а імпульс

$$p = \frac{E}{c}. \quad (6.35)$$

Це означає, що потік фотонів повинен чинити тиск. Світловий тиск дуже малий (при нормальному падінні сонячного світла на чорну поверхню він становить $3,9 \cdot 10^{-6}$ Па). Вперше його експериментально виміряв російський вчений П.М.Лебедев.

Знайдемо формули перетворення для енергії та імпульсу. Величини енергії E і імпульсу $\vec{p}$ не є інваріантними, оскільки обидві величини залежать від швидкості $\vec{V}$, яка в різних системах відліку має неоднакове значення. Спочатку з'ясуємо, як перетворюється вираз енергії при переході від одної системи до іншої. Нехай в системі K' швидкість частинки дорівнює V'_x , яка згідно з (6.26) в системі K має такий вигляд:

$$V_x = \frac{V'_x + V_o}{1 + \frac{V_o V'_x}{c^2}}, \quad (6.36)$$

де V_o – швидкість руху системи K' відносно системи K .

Енергія цієї частинки в системі K

$$E = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - \frac{V_x^2}{c^2}}} \quad (6.37)$$

Підставивши (6.36) в (6.37), дістанемо

$$E = \frac{E' + V_o p'_x}{\sqrt{1 - \frac{V_o^2}{c^2}}} \quad (6.38)$$

Вираз (6.38) означає, що в перетворенні енергії відіграє роль тільки проекція імпульсу на вісь Ox , оскільки частинка рухається вздовж цієї осі (можна показати, що формула (6.38) правильна при будь-якій орієнтації

векторів $\vec{V}'$ і $\vec{V}_0$).

Знайдемо формули перетворення для проекцій імпульсу. Якщо частинка рухається вздовж осі Ox , то вираз для p_x має вигляд

$$p_x = \frac{m_0 V_x}{\sqrt{1 - \frac{V_x^2}{c^2}}} \quad (6.39)$$

Підставивши (6.37) у (6.39), дістанемо

$$p_x = \frac{p'_x + (V_0/c^2)E'}{\sqrt{1 - V_0^2/c^2}} \quad (6.40)$$

Якщо частинка рухається в системі K' паралельно осі $O'y'$, то легко довести, що

$$p_y = p'_y \quad (6.41)$$

Аналогічний результат можна дістати і для компоненти

$$p_z = p'_z \quad (6.42)$$

Записавши разом формули (6.38), (6.40), (6.41) і (6.42), дістанемо шукані перетворення імпульсу та енергії:

$$p_x = \frac{p'_x + (V_0/c^2)E'}{\sqrt{1 - V_0^2/c^2}}; \quad p_y = p'_y; \quad p_z = p'_z;$$

$$E = \frac{E' + V_0 p'_x}{\sqrt{1 - V_0^2/c^2}} \quad (6.43)$$

Обернені перетворення імпульсу і енергії дістанемо шляхом заміни V_0 на $-V_0$ та обміну місцями між відповідними величинами з штрихом і без штриха:

$$p'_x = \frac{p_x - (V_0/c^2)E}{\sqrt{1 - V_0^2/c^2}}; \quad p'_y = p_y; \quad p'_z = p_z;$$

$$E' = \frac{E - V_0 p_x}{\sqrt{1 - V_0^2 / c^2}} \quad (6.44)$$

Розглянемо закони збереження енергії та імпульсу для ізолюваних систем у релятивістській механіці. Ізолювані системи можуть бути двох видів: системи, в яких тіла не взаємодіють, і системи, в яких тіла взаємодіють між собою. Враховуючи адитивність повної енергії та імпульсу, для систем першого виду маємо:

$$E = \sum_{i=1}^n E_i = \sum_{i=1}^n \frac{m_{oi} c^2}{\sqrt{1 - \beta_i^2}} = \sum_{i=1}^n \sqrt{p_i^2 c^2 + m_{oi}^2 c^4} = \sum_{i=1}^n (m_{oi} c^2 + T_i) ; \quad (6.45)$$

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n \frac{m_{oi} \vec{V}_i}{\sqrt{1 - \beta_i^2}} , \quad (6.46)$$

де m_{oi} , $\vec{V}_i$, $\vec{p}_i$, T_i – відповідно маси спокою, швидкості, релятивістські імпульси і кінетичні енергії окремих тіл системи.

Для ізолюваних систем, в яких тіла не взаємодіють, $E = const$ і $\vec{p} = const$, оскільки швидкості тіл і їх релятивістські енергії стали.

Повну енергію системи, в якій тіла взаємодіють, запишемо

$$E = \sum_{i=1}^n m_i c^2 + U , \quad (6.47)$$

де U – потенціальна енергія взаємодії тіл (частинок).

Відзначимо, що у релятивістській динаміці поняття потенціальної енергії не можна ввести, оскільки скінченна швидкість взаємодій. Справді, конфігурація системи визначає її потенціальну енергію, а тому зміна конфігурації системи повинна миттєво змінювати її потенціальну енергію, що суперечить другому постулату Ейнштейна.

Але для деяких випадків взаємодії частинок закони збереження імпульсу і енергії справджуються. Наприклад, при зіткненнях частинок можна вважати, що до і після зіткнення вони рухаються вільно (не взаємодіють). При цьому разом з енергією зберігається і релятивістська маса; при пружних та непружних зіткненнях вона тільки по-різному розподіляється між масою спокою і масою, зв'язаною з кінетичною енергією макроскопічного

руху. Для цих випадків закони збереження енергії і імпульсу мають такий вигляд:

$$\sum_{i=1}^n \frac{m_{oi} c^2}{\sqrt{1 - \beta_i^2}} = \sum_{i=1}^{n'} \frac{m'_{oi} c^2}{\sqrt{1 - \beta_i'^2}} ; \quad (6.48)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{m_{oi} \vec{V}_i}{\sqrt{1 - \beta_i^2}} = \sum_{i=1}^{n'} \frac{m'_{oi} \vec{V}_i'}{\sqrt{1 - \beta_i'^2}} . \quad (6.49)$$

У цих рівняннях штрихами позначено величини після зіткнення. Зазначимо, що кількість частинок у системі до і після зіткнення може бути різною ($n \neq n'$), наприклад, при ядерних реакціях.

Пропорційність між релятивістською масою і повною енергією ($E = mc^2$) свідчить, що твердження про збереження повної енергії приводить до твердження про збереження релятивістської маси. На відміну від релятивістської маси сумарна маса спокою системи частинок, що взаємодіють, не зберігається. Наприклад, при непружному ударі двох частинок їх кінетична енергія до удару перетворюється у внутрішню енергію новоутвореної частинки, в результаті чого її маса спокою більша за суму мас спокою цих частинок до удару.

Закон взаємозв'язку маси і енергії, закони збереження імпульсу та енергії – маси надійно підтверджені численними дослідями в ядерній фізиці і фізиці елементарних частинок. Передбачені на їх основі енергетичні ефекти різних ядерних реакцій і перетворень елементарних частинок знаходяться у точній відповідності з результатами експериментів.

6.7. Зіткнення частинок. Система центра інерції і порогова енергія. Антипротонний поріг

Зіткнення частинок. У багатьох випадках взаємодія частинок має характер зіткнень.

Зіткненням частинок називається процес, у якому в початковий момент частинки настільки віддалені одна від одної, що кожна із них є вільною.

Приведене визначення зіткнення глибше загальноприйнятого

“життєвого” розуміння цього терміну. Наприклад, зіткненням двох заряджених кульок ми називаємо не тільки процес їх удару, а й процес, при якому, не дотикаючись, вони відхиляються від прямолінійного руху кулонівською взаємодією. При цьому частинки в остаточному стані за своїми внутрішніми властивостями можуть відрізнятися від частинок в початковому стані. У зв'язку з цим розрізняють пружні і непружні зіткнення.

Пружним називається зіткнення, в результаті якого внутрішній стан частинок не змінюється. Якщо внутрішній стан змінюється, то зіткнення називається **непружним**. Процеси зіткнень відіграють важливу роль, яка далеко виходить за рамки класичної механіки. Оскільки закони збереження справедливі не тільки в класичній, а й в квантовій фізиці, то результати, одержані із законів збереження при зіткненнях молекул, ядер, атомів і різних елементарних частинок, дають значний обсяг інформації про такі процеси.

Система центра інерції. Дуже важливий при дослідженні зіткнень частинок вибір системи відліку. Система відліку, в якій зіткнення вивчається дослідним шляхом, називається лабораторною (ЛС). Теоретичний аналіз зіткнень зручніше виконувати в іншій системі – системі центра інерції (СЦІ). В цій системі виключається рух центра інерції (мас) частинок, і сума їх імпульсів дорівнює нулю.

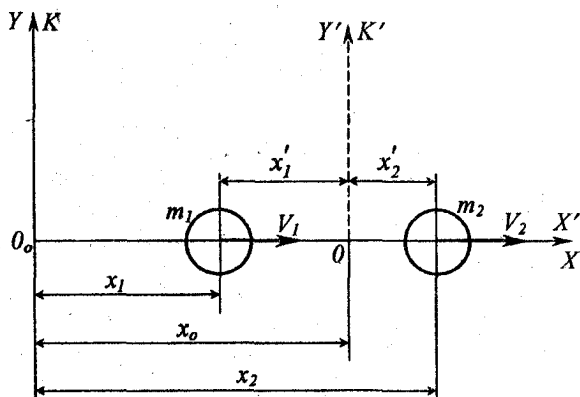


Рис. 6.4

Для знаходження інерціальних систем відліку припустимо, що K – відома інерціальна система відліку, відносно якої вивчається взаємодія двох частинок (рис.6.4), які рухаються вздовж осі O_x .

Знайдемо точку O , координата якої x_0 задовольняє умову

$$x_0 = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \quad (6.50)$$

а швидкість руху цієї точки

$$V_0 = \frac{dx_0}{dt} = \frac{m_1 V_1 + m_2 V_2}{m_1 + m_2}. \quad (6.51)$$

Якщо рух частинок відбувається тільки під дією внутрішніх сил (система ізольована), то чисельник виразу (6.51) – сумарний імпульс в системі K з часом змінюватись не буде. Отже, швидкість V_0 переміщення точки O відносно K буде постійною величиною. Якщо тепер з точкою O зв'язати нову систему відліку K' , то вона буде переміщатись відносно K прямолінійно та рівномірно і тому також буде інерціальною системою відліку. Точка O називається центром мас (центром інерції) даної системи відліку. Таким чином, для кожної ізольованої системи тіл, що взаємодіють, система відліку, зв'язана з її центром мас, є інерціальною.

Покажемо, що сумарний імпульс системи тіл відносно системи відліку K' , зв'язаної з центром мас, дорівнює нулю. В окремому випадку для системи двох тіл m_1 і m_2 , координати яких відносно K' позначені через x'_1 і x'_2 , маємо:

$$x'_1 = x_1 - x_0, \quad x'_2 = x_2 - x_0;$$

$$m_1 \frac{dx'_1}{dt} + m_2 \frac{dx'_2}{dt} = -(m_1 + m_2) \frac{dx_0}{dt} + \left(m_1 \frac{dx_1}{dt} + m_2 \frac{dx_2}{dt} \right).$$

Підставивши в цю формулу V_0 з (6.51), дістанемо

$$m_1 \frac{dx'_1}{dt} + m_2 \frac{dx'_2}{dt} = 0. \quad (6.52)$$

В більш загальному випадку маємо:

$$\sum m_i \frac{dx'_i}{dt} = 0; \quad \sum m_i \frac{dy'_i}{dt} = 0; \quad \sum m_i \frac{dz'_i}{dt} = 0$$

Порогова енергія і система центра інерції. Збереження енергії накладає загальні обмеження на взаємодії при зіткненнях частинок або на ядерні реакції. Наприклад, фотон високої енергії (гамма-промені) може породити електронно-позитронну пару за реакцією

$$\gamma \rightarrow e^- + e^+ \quad (6.53)$$

тільки при умові, що його енергія перевищує енергетичний еквівалент мас спокою електрона і позитрона. Таким чином, вже одна умова збереження енергії визначає поріг мінімальної енергії, необхідний для утворення електронно-позитронної пари:

$$E_\gamma = 2m_0c^2 \approx 1,02 \cdot 10^6 \text{ eV},$$

оскільки маси спокою m_0 електрона і позитрона однакові.

У вільному просторі ця реакція не може відбуватися ні при жодній енергії, оскільки не може бути забезпечене збереження імпульсу (імпульс фотона $p_\gamma = \frac{E_\gamma}{c}$).

Розглянемо реакцію в системі відліку, в якій центр мас позитрона і електрона залишається в спокої. В цій системі сума імпульсів електрона і позитрона дорівнює нулю

$$\vec{p}_e^- + \vec{p}_e^+ = 0. \quad (6.54)$$

Але в цій системі імпульс фотона не дорівнює нулю, оскільки не існує системи відліку, в якій імпульс фотона міг би зникнути. (Вибравши другу систему відліку, можна змінити частоту фотона, але при цьому він не може бути ні зупинений, ні знищений). Таким чином, в системі центра інерції

$$\vec{p}_\gamma \neq \vec{p}_e^- + \vec{p}_e^+ = 0 \quad (6.55)$$

реакція (6.53) не має місця внаслідок незбереження імпульсу. Реакція (6.53) можлива тільки поблизу другої частинки, наприклад, поблизу ядра атома,

оскільки ядро може поглинути зміну імпульсу. Ядро це і робить, штовхаючи своїм кулонівським полем заряджені частинки. Тому можливе співвідношення

$$\vec{P}_\gamma + \vec{P}_{\text{яд}} = \vec{P}'_{\text{яд}} + \vec{P}_{e^-} + \vec{P}_{e^+} . \quad (6.56)$$

При цьому реакція змінює імпульс ядра, але не викликає в ньому змін, тому ядро діє тільки як каталізатор. Тяжка частинка (наприклад, ядро) може служити добрим поглиначем імпульсу без суттєвого поглинання енергії. Це добре видно з формули нерелятивістської кінетичної енергії

$$T = \frac{mV^2}{2} = \frac{p^2}{2m} ,$$

в якій чим більша маса m , тим менша кінетична енергія T , яка зв'язана з імпульсом p .

Антипротонний поріг. Розрахуємо енергію, потрібну для генерації антипротонів (позначимо $\bar{p}$) шляхом бомбардування нерухомих протонів протонами високих енергій. Реакція може бути записана у вигляді:

$$p + p \rightarrow p + p + (p + \bar{p}) ,$$

тобто утворюється протонно-антипротонна пара. Закон збереження заряду виконується, оскільки антипротон має заряд $-e$. Яка порогова енергія цієї реакції?

Енергія спокою протонно-антипротонної пари дорівнює $2m_{op}c^2$, оскільки маси спокою протона і антипротона однакові. В системі центра інерції кінетична енергія повинна дорівнювати $2m_{op}c^2$, що становить $m_{op}c^2$ на кожну частинку (протон). До неї потрібно додати енергію спокою $m_{op}c^2$ кожного із вихідних протонів, отже, мінімальна повна енергія в системі центра інерції $E_{ц.і}$ повинна дорівнювати

$$E_{ц.і} = 4m_{op}c^2 . \quad (6.57)$$

В лабораторній системі відліку повна енергія дорівнює

$$E_{\pi} = \frac{E_{\pi,i}^2}{2m_{op}c^2} = 8m_{op}c^2 \quad (6.58)$$

Сюди входить $2m_{op}c^2$ у вигляді енергії спокою двох протонів і $6m_{op}c^2$ – у вигляді кінетичної енергії. Отже, порогова енергія

$$6m_{op}c^2 \approx 5,63 \text{ GeV} \quad (6.59)$$

Цей поріг енергії в лабораторній системі відліку являє собою мінімальну кінетичну енергію, яку повинен мати налітаючий протон, щоб викликати розглядувану реакцію. Порогова енергія для реакції релятивістської частинки набагато більша при спостереженні в лабораторній системі відліку, ніж в системі центра інерції. Цей ефект є одним з головних факторів, що звужують границі дослідження у фізиці елементарних частинок. Тому вся увага вчених та інженерів спрямована на розробку таких систем прискорювачів, в котрих у зіткнення приводять два пучки частинок, які поширюються в протилежних напрямках, так що лабораторна система відліку стає системою центра інерції.

Головний висновок теорії відносності полягає в тому, що сутністю простору і часу є рух як спосіб існування матерії. Отже, матерія, рух, простір і час – невіддільні.

Контрольні запитання

1. В чому полягає принцип відносності Галілея?
2. Запишіть формули перетворення Галілея.
3. Виведіть закон додавання швидкостей Галілея.
4. Які величини називаються інваріантними?
5. Сформулюйте постулати Ейнштейна.
6. Запишіть формули перетворення Лоренца.
7. Виведіть релятивістський закон додавання швидкостей.
8. Які наслідки випливають з постулатів Ейнштейна?
9. Запишіть формулу релятивістського імпульсу.
10. Запишіть релятивістську формулу II закону Ньютона.
11. Виведіть взаємозв'язок маси і енергії у спеціальній теорії віднос-

ності.

12. Сформулюйте закони збереження енергії та імпульсу в спеціальній теорії відносності.

13. В чому полягає відмінність між "лабораторною" системою відліку і системою відліку, зв'язаною з центром інерції?

14. Який фізичний зміст порогової енергії та антипротонного порогу?

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Спостерігач, який знаходиться в лабораторній системі відліку, намагається виміряти довжину стержня, що знаходиться в стані спокою в системі відліку "ракета" і розміщений вздовж осі OX' . Швидкість системи "ракета" відносно "лабораторії" становить $0,7$ швидкості світла. Як можна виконати це вимірювання? Який результат отримає спостерігач, якщо в системі "ракета" довжина стержня $l_0 = 1$ м?

Розв'язання. Щоб виміряти довжину стержня, спостерігач, який знаходиться в лабораторії, повинен визначити в один і той самий момент часу t_1 координати кінців стержня. Припустимо, що в цей момент часу один кінець пролітає повз годинник, що знаходиться в точці з координатою x_1 , а другий кінець – повз годинник, що знаходиться в точці з координатою x_2 . Отже, для цього спостерігача довжина стержня

$$l_x = x_2 - x_1 = \Delta x.$$

Значенням координат x_1 і x_2 відповідають координати x'_1 і x'_2 в системі "ракета" і $x'_2 - x'_1 = l_0$. Час за годинником спостерігача в ракеті, коли визначились ці координати, ролі не відіграє, оскільки відносно ракети стержень нерухомий, тобто координати x'_1 і x'_2 не залежать від часу.

Перехід від однієї системи відліку до іншої може бути здійснений на основі перетворень Лоренца. Оскільки час t'_1 і t'_2 вимірювання координат x'_1 і x'_2 невідомий, то слід переходити від координат системи "ракета" до координат системи "лабораторія", значення яких відповідають одному і тому ж моменту часу t_1 :

$$x'_1 = \frac{x_1 - V_o t_1}{\sqrt{1 - V_o^2/c^2}}; \quad x'_2 = \frac{x_2 - V_o t_2}{\sqrt{1 - V_o^2/c^2}},$$

де згідно зі способом вимірювання, $t_1 = t_2$. Взявши різницю $x'_2 - x'_1$, дістанемо

$$x'_2 - x'_1 = \frac{\Delta x}{\sqrt{1 - V_o^2/c^2}} \quad \text{або} \quad l_o = \frac{l_n}{\sqrt{1 - V_o^2/c^2}},$$

звідки
$$l_n = l_o \sqrt{1 - V_o^2/c^2} = 0,71 \text{ м} < l_o.$$

Приклад 2. Два надзвукових реактивних літаки летять назустрі один одному (рис.6.5) з швидкостями відносно Землі відповідно 1500 3000 км/год. Якою буде швидкість першого літака, виміряна пасажиром другого літака?

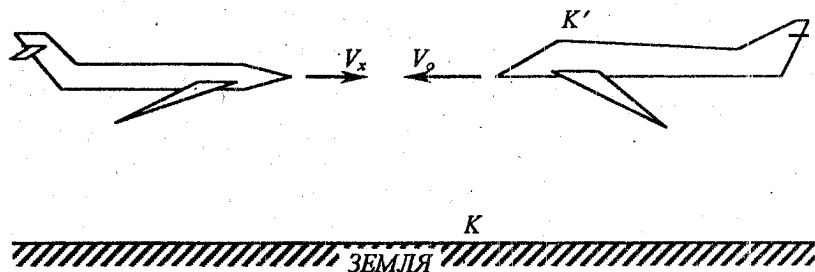


Рис.6.5

Розв'язання. У даному випадку Земля є нерухомою системою відлік К, а другий літак – рухомою К' системою відліку. Швидкість другого літака відносно Землі (системи К' відносно системи К) $V_o = 3000$ км/год, а швидкість першого літака відносно Землі $V_x = 1500$ км/год. Тоді, за законом додавання швидкостей, маємо

$$V'_x = \frac{V_x + V_o}{1 + \frac{V_o V_x}{c^2}} = \frac{1500 + 3000}{1 + (1,5 \cdot 3) 10^6 / c^2} = 4499,999999986 \text{ км/год.}$$

Очевидно, що класична фізика забезпечує дуже добре наближення навіть у випадку надзвукових літаків.

Приклад 3. Ракета рухається відносно нерухомого спостерігача на Землі з швидкістю $V_0 = 0,99c$. Знайти, як зміняться лінійні розміри тіл і густина речовини в ракеті (по лінії руху) для нерухомого спостерігача? Який час пройде за годинником нерухомого спостерігача, якщо за годинником в ракеті пройшов один рік?

Розв'язання. Розміри тіл вздовж лінії руху для земного спостерігача

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{V_0^2}{c^2}} = l_0 \sqrt{1 - \frac{(0,99c)^2}{c^2}} \approx 0,14 l_0$$

Густина речовини в ракеті для земного спостерігача

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m_0}{V \sqrt{1 - \beta^2}},$$

де V – об'єм.

Оскільки поперечні (по відношенню до лінії руху) розміри тіл не змінюються, то

$$V = l_0 S \sqrt{1 - \beta^2},$$

$$\rho = \frac{m_0}{l_0 S \sqrt{1 - \beta^2} \sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\rho_0}{1 - \beta^2},$$

де S – переріз тіла, перпендикулярний до лінії руху.

У даному випадку $\rho = 50,2 \rho_0$.

Час польоту ракети з точки зору земного спостерігача

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (0,99)^2}} \approx 7,1 \text{ років.}$$

Приклад 4. Серпухівський прискорювач розганяє протони до кінетичної енергії 76 Гев. Знайти: 1) масу; 2) швидкість прискореного протона.

Розв'язання. 1). Повна енергія прискореного протона $T + E_0 = mc^2$.

Розділивши обидві частини цієї рівності на $E_0 = m_0 c^2$, дістанемо

$$\frac{m}{m_0} = \frac{T + E_0}{E_0}, \quad m = \left(1 + \frac{T}{E_0}\right) m_0.$$

Оскільки E_0 для протона дорівнює 0,938 ГеВ і $T = 76$ ГеВ, то

$$m = \left(1 + \frac{76}{0,938}\right) m_0 \approx 82 m_0.$$

2).

$$T + E_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} c^2 = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

звідки

$$\beta^2 = 1 - \frac{E_0^2}{(T + E_0)^2} = \frac{2E_0 T + T^2}{(E_0 + T)^2}$$

і

$$V = \frac{c}{E_0 + T} \sqrt{T(2E_0 + T)}.$$

У даному випадку $T = 76$ ГеВ, $E_0 = 0,938$ ГеВ і $V = 0,9999$ с.

Приклад 5. Сонце випромінює щохвилини енергію $E = 6,6 \cdot 10^{21}$ кВт · год. Вважаючи випромінювання Сонця постійним, знайти, за який час маса Сонця M_c зменшиться вдвоє (1 кВт · год $= 3,6 \cdot 10^6$ Дж).

Розв'язання. Зменшення маси Сонця за 1 хв дорівнює

$$\Delta m = \frac{E}{c^2} \approx 26,4 \cdot 10^{10} \text{ кг.}$$

Тоді

$$t = \frac{M_c}{2\Delta m} \approx 7 \cdot 10^{12} \text{ років.}$$

Приклад 6. Ядро з масою m_0 випромінює фотон з енергією E_γ (ядро знаходиться в спокої). Яка його енергія віддачі після випромінювання?

Розв'язання. На основі закону збереження імпульсу маємо

$$0 = \vec{p}_\gamma + \vec{p}_{\text{яд}},$$

де $p_\gamma = E_\gamma / c$. Звідси імпульс віддачі ядра

$$|\vec{p}_{\text{яд}}| = \frac{E_\gamma}{c},$$

а енергія віддачі ядра

$$T_{\text{яд}} = \frac{p_{\text{яд}}^2}{2m_o} = \frac{E_\gamma^2}{2m_o c^2}.$$

При цьому припустили, що енергія віддачі може тут розглядатись як нерелятивістська.

Приклад 7. Частинка масою m_o перебуває в спокої. При її розпаді утворюються дві частинки, маси яких m_1 і m_2 . Визначити кінетичну енергію T_1 і T_2 продуктів розпаду.

Розв'язання. Запишемо закони збереження енергії та імпульсу в системі відліку, в якій частинки перебувають у спокої:

$$mc^2 = E_1 + E_2; \quad (1)$$

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0. \quad (2)$$

З останньої рівності маємо

$$\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \text{ або } p_1^2 = p_2^2. \quad (3)$$

Рівняння (3) на основі формули $E^2 - p^2 c^2 = m_o^2 c^4$ можна записати так:

$$E_1^2 - m_1^2 c^4 = E_2^2 - m_2^2 c^4$$

$$\text{або} \quad E_1^2 - E_2^2 = (m_1^2 - m_2^2) c^4. \quad (4)$$

Поділивши (4) на (1), дістанемо

$$E_1 - E_2 = \frac{(m_1^2 - m_2^2) c^2}{m}. \quad (5)$$

З рівностей (1) і (5) знаходимо, що

$$E_1 = \frac{(m_1^2 - m_2^2) c^2 + m^2 c^2}{2m},$$

$$E_2 = \frac{m^2 c^2 - c^2 (m_1^2 - m_2^2)}{2m}.$$

Тоді

$$T_1 = E_1 - m_1 c^2 = \frac{c^2}{2m} [(m - m_1)^2 - m_2^2],$$

$$T_2 = E_2 - m_2 c^2 = \frac{c^2}{2m} [(m - m_2)^2 - m_1^2].$$

Задачі для самостійних вправ

1. Яку довжину має метровий стержень, що рухається з швидкістю 0,6 с?

Відповідь: 0,8 м.

2. У верхніх шарах атмосфери народжується нестабільна частинка, яка рухається з швидкістю 0,98 с. Перш ніж розпастися, вона пролітає 400 м. Скільки часу живе ця частинка в нерухомій системі відліку (лабораторній) та власній системі відліку, зв'язаній з тілом у русі?

Відповідь: 1,4 мкс; 0,28 мкс.

3. Дві ракети рухаються рівномірно і прямолінійно з відносною швидкістю $V = 0,6$ с. Який час пройде для спостерігача в другій ракеті за 8 год, що пройшли для спостерігача в першій ракеті? Як зміниться проміжок часу між двома подіями в другій ракеті з точки зору спостерігача, що знаходиться в першій ракеті?

Відповідь: 10 год.

4. Дві ракети рухаються назустріч одна одній з швидкостями $V_1 = V_2 = \frac{3}{4}$ с по відношенню до нерухомого спостерігача. Знайти швидкість зближення ракет за класичною і релятивістською формулами додавання швидкостей.

Відповідь: 1,5 с; 0,96 с.

5. Яку масу має протон (в а.о.м.), що летить з швидкістю $2,4 \cdot 10^8$ м/с? Вважати, що маса спокою протона дорівнює 1 а.о.м.

Відповідь: 1,7 а.о.м.

6. Знайти швидкість частинки, якщо її кінетична енергія становить половину енергії спокою.

Відповідь: $2,22 \cdot 10^8$ м/с.

7. При якій швидкості кінетична енергія будь-якої елементарної час-

тинки дорівнює її енергії спокою?

Відповідь: $\approx 0,866$ с.

8. Визначити імпульс протона, маса якого дорівнює масі спокою ізотопу He^4 . Яку прискорюючу різницю потенціалів повинен пройти протон, щоб набути цей імпульс?

Відповідь: $\approx 19,6 \cdot 10^{-19}$ кГм/с²; $\approx 2,8 \cdot 10^9$ В.

9. Маса поїзда, який перебуває у стані спокою, 2000 т. На скільки збільшиться його маса під час руху з швидкістю 15 м/с?

Відповідь: $2,5 \cdot 10^{-9}$ кг.

10. Яка енергія міститься в 1 г піску? Порівняйте її з $2,9 \cdot 10^4$ Дж, що виділяються при згорянні 1 г вугілля.

Відповідь: $9 \cdot 10^{13}$ Дж.

11. Пара протон – антипротон може утворюватись при зіткненні протона з енергією $T = 6$ ГеВ з нерухомим протоном. Знайти, які повинні бути найменші однакові енергії зустрічних протонних пучків для здійснення цієї реакції.

Відповідь: 0,965 ГеВ.

12. Яка енергія віддачі (в електрон-вольтах) для ядра з масою 10^{-23} г після випромінювання гамма-променя з енергією в 1 МеВ?

Відповідь: 90 еВ.

Розділ 7. ТВЕРДЕ ТІЛО В МЕХАНІЦІ

7.1. Обертання твердого тіла. Момент інерції.

Основне рівняння динаміки обертального руху

Як уже відзначалось, поступальний рух твердого тіла повністю задається рухом будь-якої його точки, тому раніше вивчали кінематику і динаміку матеріальної точки.

Тепер детальніше зупинимось на вивченні обертального руху твердого тіла. Спочатку зупинимось на вивченні обертального руху тіла навколо нерухомої осі (у загальному випадку тверде тіло може обертатися навколо нерухомої точки, і при цьому його рух можна розглядати як суму трьох обертальних рухів відносно взаємно перпендикулярних осей, що проходять

через нерухому точку).

При обертанні твердого тіла навколо нерухомої осі всі його точки описують концентричні кола, центри яких знаходяться на осі обертання, рухаються з однаковими кутовими швидкостями ω . На основі уявлень про тверде тіло як систему матеріальних точок розглянемо рух однієї з них масою m_i , що знаходиться на відстані $\vec{r}_i$ від осі обертання і перебуває під дією довільно спрямованої сили $\vec{F}_i$ (рис.7.1).

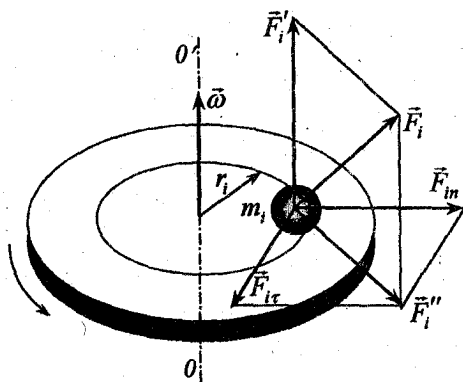


Рис.7.1

Але сила $\vec{F}_{in}$, напрямком якої проходить через вісь обертання, і сила $\vec{F}'_i$, яка паралельна осі, не можуть змінити кутову швидкість тіла. Тому прикладеної до точки зовнішньої сили $\vec{F}_i$ необхідно виділити складові $\vec{F}_i$ і $\vec{F}_{in}$, що не викликають обертання. Обертання може бути зумовлене тільки силою $\vec{F}_{tr}$ (обертальною силою), яка лежить в площині, перпендикулярній до осі обертання і спрямований по дотичній до кола, яке описує точка прикладання. Дія сили $\vec{F}_{tr}$ зумовлює тангенціальне прискорення $\vec{a}_{tr}$ матеріальної точки. За II законом Ньютона запишемо:

$$\vec{F}_{tr} = m_i \vec{a}_{tr}.$$

Оскільки між кутовим прискоренням $\vec{\epsilon}$ і $\vec{a}_{tr}$ існує взаємозв'яз

$\vec{a}_{i\tau} = [\vec{\varepsilon}, \vec{r}_i]$, то

$$\vec{F}_{i\tau} = m_i [\vec{\varepsilon}, \vec{r}_i]. \quad (7.1)$$

Помножимо обидві частини рівності (7.1) векторно на $\vec{r}_i$:

$$[\vec{r}_i, \vec{F}_{i\tau}] = m_i [\vec{r}_i, [\vec{\varepsilon}, \vec{r}_i]]. \quad (7.2)$$

Ліва частина рівняння (7.2) являє собою момент сили відносно нерухомої осі

$$\vec{M}_i = [\vec{r}_i, \vec{F}_{i\tau}] \quad (7.3)$$

або в скалярній формі

$$M_i = r_i F_{i\tau} \sin \alpha. \quad (7.4)$$

У даному випадку (див. рис.7.1) $r_i \sin \alpha = r_i = l(\alpha = 90^\circ)$ – плече сили $\vec{F}_{i\tau}$ відносно осі обертання. Момент вважають додатнім, якщо складова сили $\vec{F}_{i\tau}$ змушує обертатись тіло за стрілкою годинника, а від'ємним – при обертанні тіла проти стрілки годинника.

Права частина рівняння (7.2) у скалярній формі має такий вигляд: $m_i r_i^2 \varepsilon$. Величину $I_i = m_i r_i^2$, що дорівнює добутку маси матеріальної точки на квадрат її відстані від осі обертання, називають моментом інерції матеріальної точки відносно осі обертання. Тоді формулу (7.2) перепишемо у вигляді

$$M_i = m_i r_i^2 \varepsilon = I_i \varepsilon. \quad (7.5)$$

Очевидно, що співвідношення (7.5) можна записати для кожної матеріальної точки твердого тіла. Взявши алгебраїчну суму по всіх матеріальних точках, дістанемо

$$\sum M_i = \sum m_i r_i^2 \varepsilon = \sum I_i \varepsilon = \varepsilon \sum I_i. \quad (7.6)$$

Алгебраїчну суму $\sum M_i = M$ називають результуючим моментом сил відносно осі обертання. Фізичну величину $I = \sum m_i r_i^2$, що дорівнює сумі добутків мас матеріальних точок на квадрати їхніх відстаней від осі обертання, називають моментом інерції тіла відносно осі обертання.

Тоді формула (7.6) матиме вигляд

$$M = I\varepsilon . \quad (7.7)$$

Тобто результуючий момент сил, що діє на тіло, дорівнює добутку моменту інерції тіла на кутове прискорення. Рівняння (7.7) являє собою основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла відносно нерухомої осі. За формою воно подібне до II закону Ньютона. При обертальному русі роль сили відіграє момент сили, роль маси – момент інерції, а роль лінійного прискорення – кутове прискорення.

У векторній формі рівняння (7.7) має вигляд

$$\vec{M} = I\vec{\varepsilon} . \quad (7.8)$$

Враховуючи, що момент імпульсу твердого тіла L відносно осі є сума моментів імпульсу окремих його частинок (матеріальних точок)

$$L = \sum m_i V_i r_i = \sum m_i (\omega r_i) r_i = \omega \sum m_i r_i^2 = \omega I ,$$

тобто

$$L = I\omega , \quad (7.9)$$

то основне рівняння динаміки обертального руху (7.7) матиме вигляд

$$M = I \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} (I\omega) = \frac{dL}{dt} .$$

Оскільки момент імпульсу твердого тіла $\vec{L}$ – величина векторна (напрямок вектора $\vec{L}$ збігається з напрямком кутової швидкості $\vec{\omega}$, то

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} . \quad (7.10)$$

З (7.10) випливає, що результуючий момент сил дорівнює швидкості зміни моменту імпульсу, аналогічно тому, як результуюча сила, що діє на тіло, дорівнює швидкості зміни її імпульсу ($\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$).

Вираз (7.10) також є основним рівнянням динаміки обертального руху твердого тіла. Якщо $\vec{M} = 0$, то

$$\vec{L} = I\vec{\omega} = \text{const} . \quad (7.11)$$

Рівність (7.11) виражає закон збереження моменту імпульсу для обертального руху.

Зауважимо, що при поступальному русі системи при $\vec{p} = m\vec{V} = \text{const}$ внутрішні сили не можуть змінити ні імпульсу системи, ні її маси, а тому швидкість центра мас залишається сталою. Якщо рух обертальний, то внутрішні сили можуть привести до змін розподілу мас у системі, а це приведе до зміни моменту інерції I . Внаслідок цього відбудеться згідно з (7.11) зміна кутової швидкості обертання ω .

Прояви і використання закону збереження моменту імпульсу можна показати на багатьох прикладах: зміна тривалості доби внаслідок зміни моменту інерції Землі в результаті утворення гір, вулканічної діяльності; зміна кутової швидкості обертання фігуристів та акробатів; збереження напрямку осі при обертанні тіл (широко використовують у техніці) і ін.

Раніше відзначалось, що момент інерції характеризує інерційні властивості твердого тіла при його обертовому русі. Момент інерції тіла залежить від розміщення осі, відносно якої його визначають. Моменти інерції тіла відносно осей, що проходять через центр інерції (мас), найменші, і їх називають головними. Щоб обчислити момент інерції тіла, його поділяють на нескінченно велике число нескінченно малих елементів з масами dm .

Тоді у формулі (7.6) суму $\sum m_i r_i^2$ замінюють інтегралом:

$$I = \int_0^m r^2 dm, \quad (7.12)$$

де r – відстань від елемента dm до осі обертання.

Нерухома вісь обертання може проходити як через центр мас, так і поза ним (наприклад, вісь обертання літака, що виконує мертву петлю). Якщо момент інерції тіла визначено відносно якої-небудь осі, що проходить через центр мас I_o , то момент інерції цього тіла відносно будь-якої осі, паралельної першій I , визначається за теоремою Штейнера:

$$I = I_o + md^2, \quad (7.13)$$

де m – маса тіла, а d – відстань між осями.

З формул (7.12) і (7.13) видно, що момент інерції тіла залежить не тільки від його маси, а й від її розподілу відносно осі обертання. Наприклад, момент інерції прямого тонкого стержня відносно осі, перпендикуляр-

ної до стержня, яка проходить через його кінець ($I = \frac{1}{3}ml^2$), більший, ніж момент інерції цього стержня відносно його осі симетрії ($I = \frac{1}{12}ml^2$).

7.2. Кінетична енергія обертового тіла

Під час обертання твердого тіла різні його точки мають різну лінійну швидкість, а тому і різну кінетичну енергію. Кінетична енергія матеріальної точки

$$T_i = \frac{m_i V_i^2}{2} = \frac{m_i r_i^2 \omega^2}{2}, \quad (7.14)$$

де $V_i = r_i \omega$.

Кінетична енергія обертального руху тіла відносно нерухомої осі дорівнює сумі кінетичних енергій його частинок (матеріальних точок)

$$T = \sum \frac{m_i r_i^2 \omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_i r_i^2 = \frac{I \omega^2}{2}, \quad (7.15)$$

оскільки величина $\sum m_i r_i^2 = I$.

Формулу (7.15) можна записати через момент імпульсу:

$$T = \frac{L^2}{2I}. \quad (7.16)$$

Із порівняння формули для кінетичної енергії обертального руху (7.15) з виразом для кінетичної енергії поступального руху тіла ($T = \frac{mV^2}{2}$) випливає, що момент інерції тіла при обертальному русі – міра його інертності. Чим більший момент інерції, тим більшу енергію необхідно витратити для досягнення даної швидкості. Тіло може не тільки обертатись навколо осі, а й сама вісь може переміщатися. Тому повна кінетична енергія складається з кінетичної енергії поступального руху центра мас і кінетичної енергії обертального руху навколо осі, яка проходить через центр мас:

$$T = \frac{mV_o^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}, \quad (7.17)$$

де V_o – лінійна швидкість центра мас тіла.

На практиці широко використовують кінетичну енергію обертального руху маховиків. Наприклад, коли навантаження раптово збільшується, запас кінетичної енергії маховика витрачається на допомогу двигуну машини і забезпечує рівномірність її роботи.

7.3. Обертання тіла відносно точки. Вільні осі обертання. Гіроскопи

Під час вивчення обертального руху тіла навколо нерухомої точки вводять поняття моменту сили $\vec{F}$ відносно нерухомої точки:

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}], \quad (7.18)$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор, проведений від нерухомої точки до точки прикладання сили $\vec{F}$.

Цей момент сили намагається повернути тіло навколо осі, перпендикулярної до площини, в якій лежать точка обертання і сила. У даному випадку момент сили можна розглядати як векторну суму трьох моментів відносно трьох взаємно перпендикулярних осей обертання, що проходять через нерухому точку. Проекції вектора $\vec{M}$ на координатні осі (початок прямокутної системи координат збігається з точкою обертання) виражатимуться через такі співвідношення:

$$M_x = yF_z - zF_y; \quad M_y = zF_x - xF_z; \quad M_z = xF_y - yF_x, \quad (7.19)$$

де x, y, z – координати точки прикладання сили; M_x, M_y, M_z – проекції моменту сили відносно осей Ox, Oy, Oz .

Основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла відносно нерухомої точки має вигляд

$$\vec{M} = I\vec{\varepsilon}, \quad (7.20)$$

де I – момент інерції тіла відносно миттєвої осі, перпендикулярної до площини, в якій лежать вектор сили, прикладеної до тіла, і точка обертання.

Вже відзначалось, що моменти інерції тіла відносно різних осей різні за величиною, тому розв'язання рівнянь (7.19) є складною задачею (задача курсу теоретичної механіки).

Вільні осі обертання. Дослід показує, що орієнтація осі обертання тіла, яке перебуває в самостійному обертальному русі, в просторі змінюватиметься. Щоб вісь обертання твердого тіла не змінювала своєї орієнтації, на неї повинні діяти певні сили, наприклад, з боку підшипників. Але існують такі осі обертання тіл, які не змінюють своєї орієнтації в просторі без дії зовнішніх сил. Ці осі обертання називаються вільними осями.

Можна довести, що для будь-якого тіла існує три взаємно перпендикулярні осі, які проходять через його центр мас і являють собою вільні осі (головні осі інерції). Найбільш стійке обертання відповідає осі з найбільшим моментом інерції.

Розглянемо поведінку тіла, яке може змінювати своє розміщення відносно осі обертання. Нехай система, що складається з двох куль A і B , жорстко з'єднаних стержнем (масою стержня будемо нехтувати), приводиться в обертання за допомогою гумової нитки O_1O_2 (рис.7.2,а).

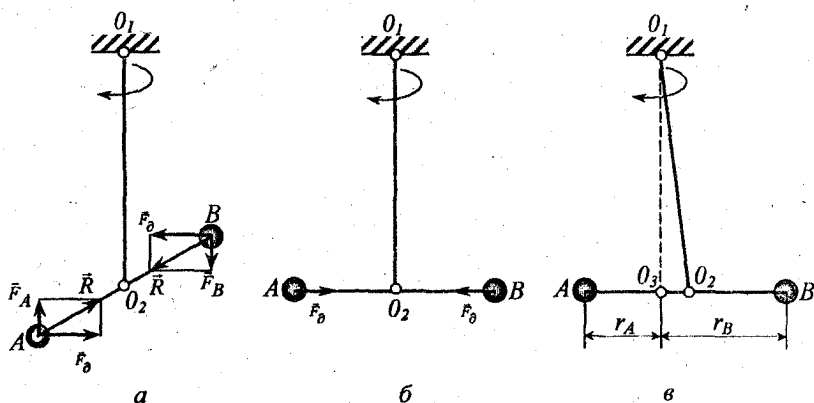


Рис.7.2

Щоб кулі А і В рухались по колу, до них повинні бути прикладені доцентрові сили $\vec{F}_o$. Ці сили виникають в результаті взаємодії між кулями і стержнем. Позначимо через $\vec{R}$ рівні за значенням сили, прикладені до куль з боку стержня.

Розкладемо ці сили на складові: сили $\vec{F}_o$, перпендикулярні до осі обертання, і сили $\vec{F}_A$ і $\vec{F}_B$, паралельні осі обертання. Сили $\vec{F}_o$ надають кулям доцентрового прискорення, а сили $\vec{F}_A$ і $\vec{F}_B$ викликають повертання системи навколо точки O_2 . Сили $\vec{F}_A$ і $\vec{F}_B$ будуть існувати доти, поки система не займе положення, показане на рис.7.2,б; в цьому стані $\vec{R} = \vec{F}_o$ і обертаючий момент відсутній. Якщо шляхом короткочасної зовнішньої дії, наприклад, удару по одній із куль, вивести систему з цього стану, то вона уже без зовнішньої дії знову повернеться в цей стан. Отже, стан тіла (системи), зображений на рис.7.2,б – стійкий. Зауважимо, що в цьому стані векторна сума доцентрових сил дорівнює нулю і момент інерції тіла відносно осі обертання має найбільше значення.

Тепер припустимо, що маси куль m_A і m_B не однакові. Ця система також переходить в стійкий стан, при якому сили $\vec{F}_A$ і $\vec{F}_B$ та їх моменти відсутні (рис.7.2,в). Оскільки стержень діє на кулі з однаковою силою, яка в стійкому положенні дорівнює доцентровим силам, то із рівності $R = m_A \omega^2 r_A = m_B \omega^2 r_B$ (ω – кутова швидкість обертання) випливає, що $r_A / r_B = m_B / m_A$, тобто кулі будуть рухатись по колах різного радіуса. Внаслідок цього вісь обертання буде проходити через точку O_3 , і якщо стержень закріплений не в цій точці, а в точці O_2 , то гумова нитка буде описувати конус. Відзначимо, що точка O_3 є центром мас даної системи.

Отже, тіло (система), що обертається, має тенденцію, зумовлену внутрішніми силами, до переходу в стійкий стан, при якому центр мас лежить на осі обертання – вільній осі.

Гіроскопи – це прилади, основною частиною яких є масивні симетричні тіла, що обертаються з великою кутовою швидкістю навколо осі з максимальним моментом інерції. Конструкція гіроскопів залежить від їх призначення. З'ясуємо їх основну властивість, скориставшись рис.7.3.

Припустимо, що в момент часу $t_0 = 0$ до осі гіроскопа, що обертається навколо осі O_1O_1 з кутовою швидкістю ω_1 і має момент інерції I , при-

кладена пара зовнішніх сил $\vec{F}$ (момент пари сил $M=Fl$, де F – величина сили, а l – відстань між лініями дії сил F , яку називають плечем пари), момент яких хоче повернути ось обертання O_1O_1 навколо перпендикулярної до неї осі O_2O_2 .

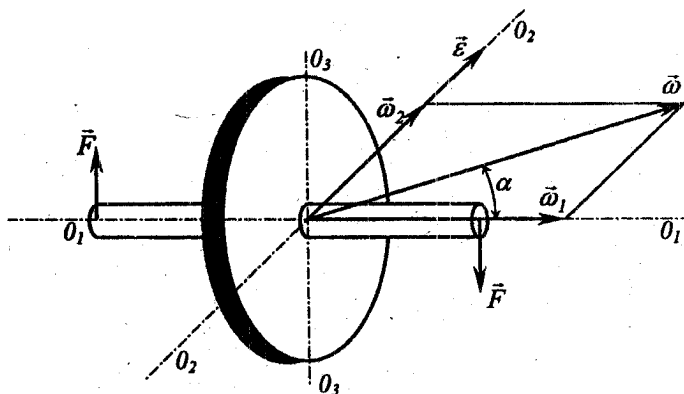


Рис.7.3

Через деякий час t під дією моменту $\vec{M}$ гіроскоп набуде кутової швидкості обертання $\vec{\omega}_2$ навколо осі O_2O_2 (рис.7.3). Щоб знайти результуючу кутову швидкість обертання гіроскопа, додамо вектори $\vec{\omega}_1$ і $\vec{\omega}_2$, які лежать в площині, що проходить через осі O_1O_1 і O_2O_2 , в цій же площині буде і вектор результуючої швидкості $\vec{\omega}$. Але для того, щоб до моменту часу t гіроскоп обертався з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$, вісь гіроскопа за цей час повинна повернутися навколо осі O_3O_3 на кут α . Отже, якщо гіроскоп не обертається, то зовнішній момент $\vec{M}$ примусить його обертатися навколо осі O_2O_2 ; якщо гіроскоп обертається, то той же момент $\vec{M}$ поверне гіроскоп навколо осі O_3O_3 . Це явище називається **гіроскопічним ефектом**. Якщо вісь гіроскопа O_1O_1 закріплена підшипниками, то зовнішній момент $\vec{M}$ викликає появу реакцій опор, які лежать в одній площині з вектором $\vec{M}$ і віссю O_1O_1 . Сили реакції опор називають **гіроскопічними силами** і вони

пропорціональні кутовій швидкості обертання гіроскопа. Ці сили проявляються, наприклад, в підшипниках турбін та генераторів, які встановлені на кораблях, при зміні курсу плавання. Гіроскопічний ефект використовується для навігаційних цілей. Реакція гіроскопа на всяку зміну напрямку осі обертання передається відповідним чином на рульовий пристрій корабля, літака, ракети, торпеди та ін.

Особливий вигляд рух гіроскопа має тоді, коли момент зовнішніх сил, що діють на гіроскоп, з часом не змінюється за значенням і повертається разом з віссю обертання гіроскопа, утворюючи з нею весь час кут 90° . Вісь гіроскопа при цьому повертатиметься із сталою кутовою швидкістю. Таке повертання осі гіроскопа називають **прецесією**. Прецесія, наприклад, відбувається при дії на гіроскоп моменту сили тяжіння (рис.7.4). Момент сили

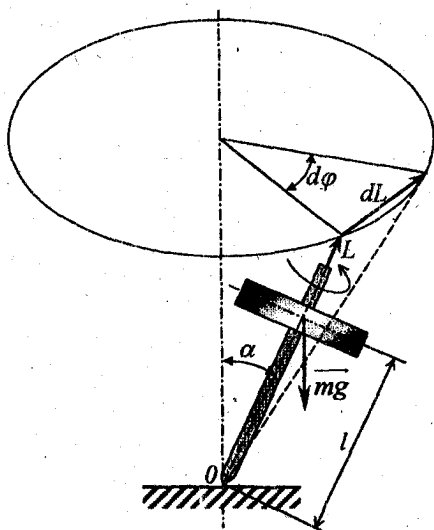


Рис.7.4

тяжіння $M = mgl \sin \alpha$ зумовлює протягом часу dt приріст моменту імпульсу гіроскопа

$$dL = Mdt = mgl \sin \alpha dt, \quad (7.21)$$

де m – маса гіроскопа, l – відстань від точки опори O до центра маси гіроскопа, α – кут між вертикаллю і віссю гіроскопа. Зміна моменту імпульсу на dL зумовлює повертання осі на кут $d\varphi$. Оскільки при повертання осі гіроскопа момент сили тяжіння залишається перпендикулярним до неї, то її обертання буде рівномірним і вісь гіроскопа описуватиме конічну поверхню.

З рис.7.4 видно, що

$$d\varphi = \frac{dL}{L \sin \alpha} = \frac{mgl \sin \alpha dt}{L \sin \alpha} = \frac{mgl dt}{L}.$$

Вираз кутової швидкості прецесії матиме вигляд

$$\omega_{np} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{mgl}{L} = \frac{mgl}{I\omega}, \quad (7.22)$$

де I і ω – відповідно момент інерції і кутова швидкість обертання гіроскопа.

Прецесійний рух осі обертання спостерігається у Землі та інших планет.

7.4. Статика

Розглянемо умови виникнення і відсутності обертання.

Існує ціла область інженерної науки, яка вивчає умови рівноваги твердих тіл, що знаходяться в спокої під дією сил. Важливо знати, які сили потрібно прикласти, щоб утримати тіло від руху або запобігти його руйнуванню. Вивчення статyki потрібне для конструювання різних веж, мостів, валів машин тощо. Ці знання студенти одержують при вивченні спеціальних курсів (теоретична механіка, опір матеріалів, теорія машин і механізмів і ін.); наведемо тільки короткий розгляд основних принципів подібних розрахунків.

Щоб утримати тіло в спокої (в рівновазі), потрібне виконання двох умов.

Умова 1. Векторна сума всіх сил дорівнює нулю:

$$\sum \vec{F}_i = 0 . \quad (7.23)$$

Умова 2. Векторна сума всіх моментів сил дорівнює нулю:

$$\sum \vec{M}_i = 0 . \quad (7.24)$$

Перша умова є наслідком I закону Ньютона. Друга умова випливає із співвідношення $\vec{M} = d\vec{L}/dt$ (якщо $\vec{L} = 0$, то і $d\vec{L}/dt = 0$).

У багатьох задачах статички розглядаються тверді тіла в площині, яка називається площиною xu . Тоді з умови 1 дістаємо два рівняння:

$$\sum (F_i)_x = 0 \text{ і } \sum (F_i)_y = 0 . \quad (7.25)$$

Умова 2 дає рівняння

$$\sum M_z = 0 . \quad (7.26)$$

Величина M_z додатна при обертанні тіла проти стрілки годинника і від'ємна, якщо обертання відбувається за стрілкою годинника. Таким чином, маємо систему трьох рівнянь, за допомогою якої можна знайти три невідомі величини. Зауважимо, що рівняння (7.23) – (7.24) або (7.25) – (7.26) виражають необхідні умови рівноваги твердого тіла. Однак вони не достатні. При виконанні цих умов центр мас може рухатися рівномірно і прямолінійно з будь-якою швидкістю, а саме тіло може здійснювати обертальний рух зі сталим моментом імпульсу. Для того, щоб тіло було нерухомим, його повна енергія повинна дорівнювати потенціальній енергії. При цьому не буде поступального і обертального рухів тіла.

Контрольні запитання

1. Що називається моментом інерції тіла відносно осі обертання?
2. Яку роль відіграє момент інерції в обертальному русі тіла?
3. Виведіть основне рівняння динаміки обертального руху.
4. Сформулюйте теорему Штейнера.
5. Виведіть формулу кінетичної енергії обертального тіла.
6. Які осі обертання називають вільними?
7. Що називають гіроскопом?
8. У чому полягає гіроскопічний ефект?

9. Виведіть формулу кутової швидкості прецесії.
10. Запишіть і сформулюйте умови рівноваги твердого тіла.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Знайти моменти інерції відносно осі симетрії обруча і твердого диска, маса кожного з яких m , а радіус R .

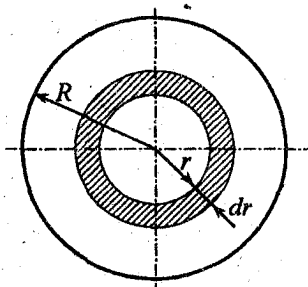


Рис. 7.5

Розв'язання. Всі елементи маси обруча розміщені на його ободі при $r = R$, тому

$$I_{\text{обр}} = \int_0^m R^2 dm = R^2 m \Big|_0^m = mR^2.$$

У випадку диска, як показано на рис. 7.5, площа кільця, що знаходиться в межах r і $r + dr$, дорівнює $dS = 2\pi r dr$. Повна площа диска $S = \pi R^2$. Отже,

$$\frac{dm}{m} = \frac{dS}{S} = \frac{2\pi r dr}{\pi R^2}, \text{ звідки } dm = m \frac{2r dr}{R^2}.$$

Тепер обчислимо момент інерції диска:

$$I_{\text{диска}} = \int_0^R r^2 dm = \int_0^R r^2 \left(\frac{2\pi r dr}{R^2} \right) = \frac{2\pi}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{2\pi}{R^2} \left(\frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^R = \frac{1}{2} \pi R^2$$

Приклад 2. На лаві Жуковського стоїть людина і тримає в руках стержень, розміщений вертикально вздовж осі обертання лави (рис.7.6,а).

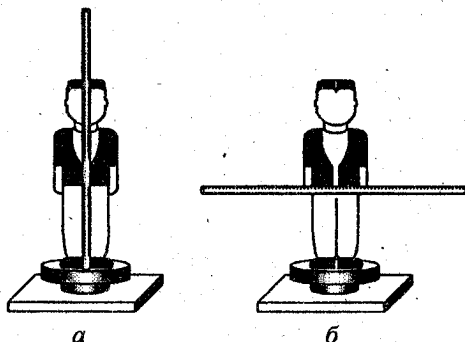


Рис.7.6

Лави з людиною обертається з частотою $n_1 = 1 \text{ c}^{-1}$. З якою частотою n_2 обертатиметься лави з людиною, якщо стержень повернути так, щоб він зайняв горизонтальне і симетричне положення відносно осі обертання (рис.7.6,б). Сумарний момент інерції людини і лави $I_1 = 6 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$. Довжина стержня $l = 2,4 \text{ м}$, а його маса $m = 8 \text{ кг}$.

Розв'язання. На основі закону збереження моменту імпульсу запишемо $I_1 \omega_1 = (I_2 + I_1) \omega_2$, де $I_2 = \frac{1}{12} m l^2$ — момент інерції стержня відносно осі, що проходить перпендикулярно до його середини. Оскільки $\omega = 2\pi n$, то маємо

$$I_1 2\pi n_1 = (I_1 + I_2) 2\pi n_2,$$

звідки

$$n_2 = \frac{I_1 n_1}{I_1 + I_2} = 0,61 \text{ c}^{-1}$$

Приклад 3. Тонкий однорідний стержень довжиною l може оберта-

тись навколо горизонтальної осі, що проходить через кінець стержня перпендикулярно до нього. Стержень відхилили на 90° від положення рівноваги і відпустили. Визначити швидкість V нижнього кінця стержня в момент проходження положення рівноваги.

Розв'язання. Стержень повертається навколо осі під дією моменту сили тяжіння. Оскільки при опусканні стержня цей момент зменшується, обертання стержня не буде рівнозмінім, тому використання основного рівняння динаміки обертового руху тут не виправдано.

Використаємо закон збереження енергії. Оскільки в даному випадку сили тертя відсутні, то енергія стержня (точніше системи стержень – Земля) не змінюється при його русі, тобто $U = T$, де U – потенціальна енергія піднятого стержня; T – кінетична енергія його обертового руху, якщо нульовий рівень відліку висоти ($00'$, рис. 7.7) проходить через центр мас в його нижньому положенні. Отже,

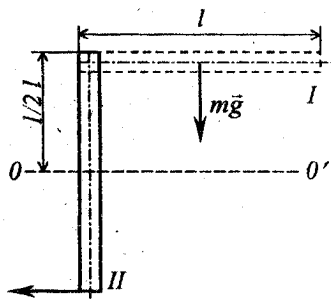


Рис. 7.7

$$U = \frac{mgl}{2}, \quad T = \frac{I\omega^2}{2}.$$

Прирівнявши праві частини цих рівнянь і врахувавши, що на основі теореми Штейнера момент інерції стержня відносно осі, яка проходить через його кінець, $I = \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{4}ml^2 = \frac{1}{3}ml^2$, а також що $V = \omega l$, для шуканої швидкості маємо $V = \sqrt{3gl}$.

Приклад 4. До обода диска радіусом $R=0,2$ м прикладена постійна дотична сила $F=98,1$ Н. При обертанні на диск діє момент сил тертя $M_{тр}=4,9$ Н·м. Знайти масу m диска, якщо відомо, що диск обертається з постійним кутовим прискоренням $\epsilon=100$ рад/с².

Розв'язання. Результуючий момент сил, під дією яких обертається диск, $M = FR - M_{тр}$. За основним законом динаміки обертового руху

$M = I\varepsilon$, де $I = \frac{mR^2}{2}$ – момент інерції диска.

З цих рівнянь легко знайти масу диска

$$m = -\frac{2(FR - M_{mp})}{\varepsilon R^2} = 7,36 \text{ кг.}$$

Приклад 5. На кінцях стержня довжиною l розміщені два тіла масою m_1 і m_2 (рис.7.8). На якій відстані від m_1 необхідно розмістити опору, щоб обидві маси були зрівноважені, тобто стержень не обертався?

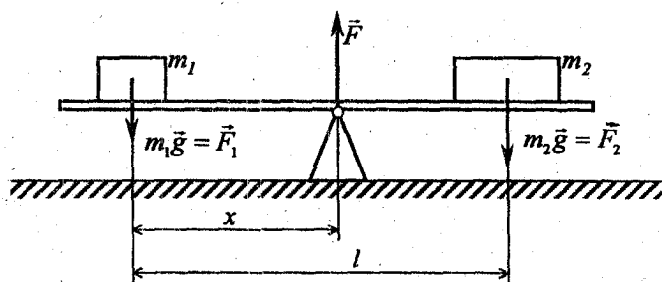


Рис. 7.8

Розв'язання. Задачу можна розв'язати, використавши умову рівноваги тіла: векторна сума всіх моментів сил дорівнює нулю ($\sum M_i = 0$).

Для цього необхідно вибрати початок відліку, відносно якого обчислюються моменти сил. Обчислення спрощуються, якщо за початок відліку взяти точку прикладання однієї (або декількох) із сил. Вибравши за початок відліку точку опори (рис.7.8), домоглися того, що момент сили $\vec{F}$ дорівнює нулю.

Момент сили F_1 , прикладеної до маси m_1 , викликає обертання системи в додатному напрямку, а до m_2 – у від'ємному; тому

$$M_1 + M_2 = m_1gx + [-m_2g(l-x)] = 0,$$

$$(m_1g + m_2g)x = m_2gl,$$

звідки

$$x = \frac{m_2}{m_1 + m_2} l$$

Цей приклад ілюструє принцип дії важеля. Зауважимо, що для зрівноважування або повільного піднімання тіла, на яке діє більша сила, можна використати малу силу F_1 . Відношення

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{x}{l-x}$$

являє собою вииграш у силі.

Приклад 6. Із валом рульового колеса автомобіля ВАЗ-2108 шарнірно з'єднана горизонтальна вісь, на яку насаджено колесо (вважатимемо його за циліндр з рівномірним розподілом маси по всьому об'єму) (рис.7.9,а). При плавному повертанні автомобіля колесо котиться по дузі кола внаслідок обертання рульового вала з деякою кутовою швидкістю $\omega = \text{const}$; відстань від осі вала до колеса l . Визначити силу тиску колеса на поверхню дороги, якщо його маса m , а радіус R .

Розв'язання. Рух колеса можна розглядати як вимушену прецесію гіроскопа, яким є колесо. Внаслідок цього на горизонтальну поверхню дороги діятиме, крім сили mg , гіроскопічна сила F_2 . Сила тиску на поверхню

$$\vec{F} = m\vec{g} + \vec{F}_2 \quad (1)$$

Визначимо силу $\vec{F}_2$. Дорога діє на колесо з силою $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$, момент якої $\vec{M}$.

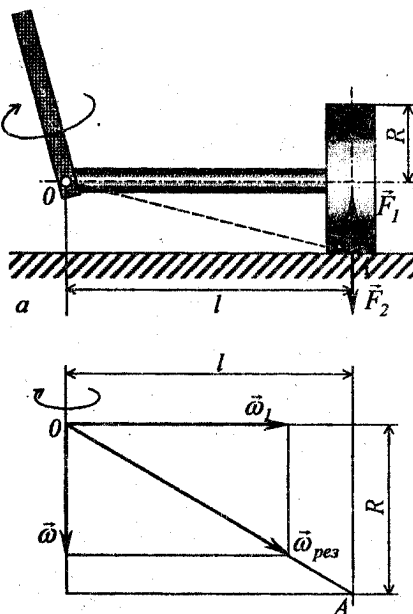


Рис.7.9

Оскільки рух колеса відбувається без ковзання, то миттєва вісь його результируючого руху проходить через точки O і A . Якщо кутова швидкість обертання колеса ω_l , то (рис. 7.9, б) маємо

$$\frac{\omega}{\omega_l} = \frac{R}{l} \quad (2)$$

Тоді
$$\omega_l = \frac{\omega l}{R}$$

Момент імпульсу колеса $L = I\omega_l$, де $I = \frac{1}{2}mR^2$ – момент інерції колеса (як циліндра).

Тоді
$$L = \frac{1}{2}m\omega l R \quad (3)$$

Кутова швидкість рульового вала ω є кутова швидкість прецесії колеса.

На основі формули (7.22) можна записати:

$$\omega = \frac{M}{L} = \frac{F_l l}{L},$$

звідки
$$F_l = \frac{L\omega}{l} = \frac{1}{2}m\omega^2 R \quad (4)$$

Якщо підставити (4) у (1), сила тиску на поверхню дороги буде

$$F = mg + \frac{1}{2}m\omega^2 R. \quad (5)$$

З формули (5) видно, що тиск на дорогу при повороті автомобіля різко зростає (з такою ж самою силою дорога тисне на колесо, на його підшипник).

Задачі для самостійних вправ

1. Маховик, момент інерції якого $I = 63,6 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, обертається з постійною кутовою швидкістю $\omega = 31,4 \text{ рад/с}$. Знайти гальмівний момент M , під дією якого маховик зупиняється через $t = 20 \text{ с}$.

Відповідь: $100 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

2. Кільце, маса якого рівномірно розподілена у досить тонкому шарі, один раз вільно скочується без проковзування з похилої площини висотою h , а другий раз вільно ковзає плазом з вершини тієї самої похилої площини.

Нехтуючи тертям кочення і тертям ковзання, визначити остаточну швидкість кільця в обох випадках.

Відповідь: $V = \sqrt{2gh}$; $V = \sqrt{gh}$.

3. Кругла платформа радіусом $R=1$ м, момент інерції якої $I=130$ кг $\cdot$ м², обертається за інерцією навколо вертикальної осі з частотою $n_1 = 1$ об/с. На краю платформи стоїть людина, маса якої $m=70$ кг. З якою частотою n_2 буде обертатись платформа, якщо людина перейде в її центр? (Момент інерції людини розраховувати як для матеріальної точки).

Відповідь: 1,5 об/с.

4. Обруч і диск скочуються по похилій площині, яка утворює кут α з горизонтом. Чому дорівнює їх прискорення?

Відповідь: $a_{\text{обр}} = \frac{1}{2} g \sin \alpha$; $a_{\text{диска}} = \frac{2}{3} g \sin \alpha$.

5. Обруч масою m котиться по горизонтальній площині. Швидкість центра обруча дорівнює V . Чому дорівнює кінетична енергія обруча?

Відповідь: $T = mV^2$.

6. Велосипед рухається з постійною швидкістю, якщо сила, що діє на заднє колесо з боку дороги, дорівнює $F_2=4$ Н (рис.7.10). З якою силою F_1 повинен діяти велосипедний ланцюг на зубчасте колесо, якщо $R_2/R_1 = 6$?

Відповідь: $F_1 = 24$ Н.

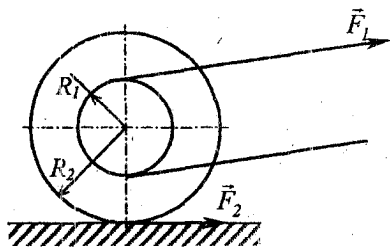


Рис.7.10

7. Вал масою $m=2500$ кг лежить на двох підшипниках, відстань між якими $AB=1,8$ м, і виступає за один підшипник на $0,7$ м. Посередині між підшипниками на вал діє сила $F_1=15000$ Н, спрямована вниз; на виступаючий кінець вала насаджений маховик масою $m_1=1000$ кг. Визначити силу тиску на підшипники (рис.7.11).

Відповідь: $R_1=11175$ Н; $R_2=38125$ Н.

8. Однорідний циліндр масою $m=10$ кг утримується в рівновазі на

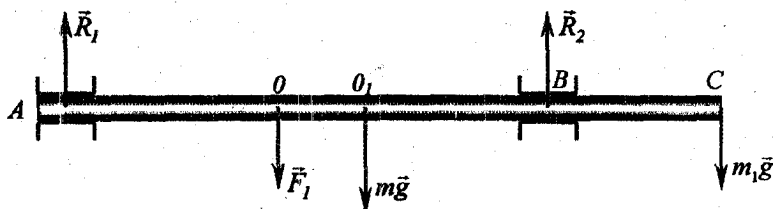


Рис.7.11

похилій площині ниткою, намотаною на циліндр і спрямованою вгору паралельно похилій площині. Кут нахилу площини до горизонту $\alpha = 30^\circ$. Прокльовування немає. Знайти силу натягу нитки.

Відповідь: 24,5 Н.

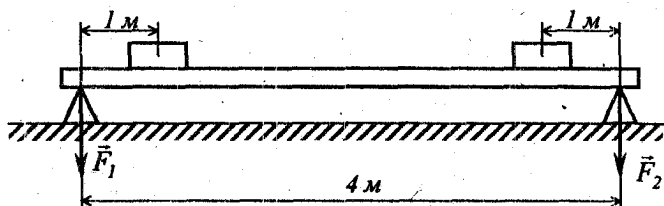


Рис.7.12

9. На рис.7.12 зображена балка, на якій знаходяться два тіла масою 10 кг кожне. Відстань між опорами балок 4 м. Знайти силу тиску балок на опори. Балки невагомі.

Відповідь: $F_1 = F_2 = 98$ Н.

10. Вентилятор обертається з частотою 15 об/с. Після виключення він зробив до повної зупинки 75 обертів. Робота сил гальмування становить 44,4 Дж. Знайти: 1) момент інерції вентилятора; 2) момент сил гальмування.

Відповідь: $I = 0,01$ кг $\cdot$ м²; $M = 9,4 \cdot 10^{-2}$ Н $\cdot$ м.

11. На поршень двигуна внутрішнього згоряння діє сила тиску $F = 500$ Н. Довжина шатуна АВ дорівнює 1 м, довжина кривошипа ВО дорівнює 0,2 м (рис.7.13). Знайти силу тиску повзуна на напрямну площину і силу, яка передається від шатуна АВ на кривошип ОВ, якщо в даний момент $\angle ABO = 90^\circ$.

Відповідь: 100 Н; 510 Н.

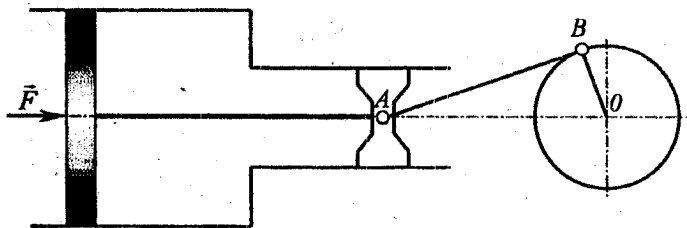


Рис.7.13

Розділ 8. ЕЛЕМЕНТИ МЕХАНІКИ СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ

8.1. Попередні поняття. Закони Паскаля і Архімеда. Гідростатичний тиск

Всі тіла складаються з атомів і молекул, які перебувають у безперервному хаотичному русі. У твердих тілах атоми і молекули коливаються навколо положень рівноваги і середня відстань між ними при сталій температурі залишається постійною, завдяки чому тверді тіла мають свою форму.

Між молекулами газів і рідин немає такого зв'язку, який є в твердих тілах. Розташування молекул одна відносно одної внаслідок хаотичного руху буде довільним. Тому рідини і гази не мають власної форми, а набувають форми тієї посудини, в якій вони знаходяться.

На відміну від газів у рідинах, незважаючи на хаотичний рух молекул, середня відстань між ними залишається майже незмінною. Отже, рідини без певної форми мають майже незмінний об'єм, який називають влас-

ним. Поверхню, що відділяє рідину від газу, називають вільною. Вільні поверхні у рідин дають їм можливість при певних умовах утворювати краплини.

Гази обмежені поверхнями твердих тіл або поверхнями рідин і не мають власного об'єму. Незначні сили, прикладені до поверхні деякого об'єму рідин або газу, приводять до переміщень одних частин відносно інших.

Для різних задач механіки відмінності між газами і рідинами неістотні.

Розділ механіки, в якому вивчається стан рівноваги та руху рідин і газів під дією зовнішніх сил, називають гідроаеромеханікою, яка поділяється на гідроаеростатику і гідроаеродинаміку.

У механіці рідини і гази розглядають як суцільні середовища, що безперервно заповнюють певну частину простору. Густина рідини мало залежить від тиску, а залежність густини газу від тиску при великих швидкостях знехтувати не можна. Далі рідину і газ будемо називати одним терміном – рідина, яку будемо вважати або стисливою (густина змінна) або нестисливою (густина стала).

Характерною властивістю рідин є їх текучість, тобто малий опір деформації зсуву, тому вони легко набувають форми тієї посудини, в якій перебувають.

Сили, які діють на довільний елементарний об'єм рідини, можна поділити на внутрішні та зовнішні. Внутрішні сили зумовлені взаємодією частинок рідини в цьому об'ємі. Ці сили враховувати не будемо, оскільки вони взаємно зрівноважуються. Зовнішні сили зумовлені дією сусідніх елементів, сил тяжіння тощо.

Для зміни об'єму рідини необхідна дія зовнішніх сил, а це вказує на те, що в них виникають пружні сили, дія яких однакова за значенням і протилежна за напрямом дії зовнішніх сил. Дія пружних сил виявляється в тому, що окремі елементарні об'єми рідин діють один на одного або на тіла, з якими вони межують.

Якщо в середину рідини, яка перебуває в спокої (елементарні об'єми не змінюють взаємного розміщення), занурити тонку пластинку, то частини рідини, розміщені по обидві її сторони, будуть діяти на площадку ΔS з си-

лами ΔF , які незалежно від орієнтації пластинки рівні за величиною і спрямовані перпендикулярно до неї (рис.8.1,а).

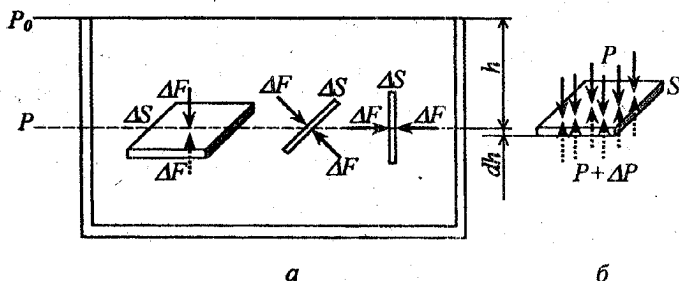


Рис.8.1

Ці сили існують і при відсутності пластинки, для будь-якої уявно проведеної площадки ΔS .

Границя

$$p = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} \quad (8.1)$$

є скалярною величиною і називається тиском в певному місці рідини.

Якщо сила, з якою рідина діє на поверхню площею ΔS , розподілена рівномірно, то величину, яка дорівнює відношенню сили, що діє нормально на елемент поверхні, до величини її площі, називають тиском (середнім тиском), тобто

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta S} \quad (8.2)$$

За одиницю тиску в СІ взято паскаль ($1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$).

Тиск, вищий від атмосферного, вимірюють в атмосферах та в міліметрах ртутного стовпа; у техніці тиск вимірюють технічними атмосферами.

Для рідин і газів (рідин), які перебувають у рівновазі, виконується закон Паскаля: тиск у будь-якій точці рідини, яка перебуває у спокої, однаковий у всіх напрямках і передається однаково по всьому об'єму рідини.

В умовах земного тяжіння відкрита поверхня рідини (невеликих роз-

мірів) – горизонтальна. На будь-якій горизонтальній поверхні всередині рідини тиск однаковий. В суміші неоднорідних рідин внизу розміщується рідина з більшою густиною; границею розділу між ними також буде горизонтальна поверхня.

Згідно з законом Архімеда на будь-яке тіло, занурене в рідину, діє з боку рідини виштовхувальна сила, яка дорівнює вазі витісненої тілом рідини. Ця сила спрямована вертикально вгору і прикладена до центра ваги витісненого об'єму:

$$F_A = \rho g V, \quad (8.3)$$

де ρ – густина рідини, а V – об'єм тіла.

Вона виникає у зв'язку з тим, що на різних рівнях у рідині тиски різні. Закон Архімеда використовується для оцінки стійкості і плавучості кораблів.

Запишемо рівняння рівноваги горизонтального шару рідини товщиною dh (рис.8.1,6). Для елемента з площею S сила тиску знизу повинна зрівноважити вагу елемента і силу тиску зверху; позначимо через ρ густину рідини, тоді $(p + dp)S = \rho g S dh + pS$, звідки $dp = \rho g dh$.

Якщо від поверхні $h=0$, на яку діє тиск p_0 , до глибини h величини ρ і g не змінюються, то, інтегруючи, дістанемо:

$$p - p_0 = \rho g h; \quad p = p_0 + \rho g h. \quad (8.4)$$

За формулою (8.4) розраховують тиск всередині нерухомої рідини на глибині h від відкритої горизонтальної поверхні: величина $\rho g h$ називається гідростатичним тиском.

Для вимірювання гідростатичного тиску застосовують прилади, які називають манометрами.

8.2. Стаціонарний рух рідини. Рівняння нерозривності і рівняння Бернуллі

Частинкою суцільного середовища називається дуже малий елемент об'єму середовища, розміри якого в той же час у багато разів більші міжмолекулярних відстаней (порядку 10^{-8} м), тому частинки рідини можна приблизно вважати точковими.

В кінематиці рідин можливі два різних методи описання руху. У першому вивчають рух кожної частинки окремо. Він вимагає визначення переміщення, швидкості і прискорення частинок рідини у просторі та в часі. Такий метод вивчення руху рідини називається методом Лагранжа, але його використання пов'язане із значними математичними труднощами. Тому на практиці для опису руху користуються методом Ейлера, який полягає в тому, що задають залежності значень вектора $\vec{V}$ швидкості течії рідини в різних точках простору від координат цих точок (x, y, z) і від часу t :

$$\vec{V} = f(\vec{r}, t) \quad \text{або}$$

$$V_x = f_1(x, y, z, t), \quad V_y = f_2(x, y, z, t), \quad V_z = f_3(x, y, z, t),$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор, проведений від початку координат в задану точку, а V_x, V_y, V_z – проекції вектора $\vec{V}$ на осі координат. При цьому говорять про швидкості і прискорення не частинок рідини, а її потоку, під яким розуміють сукупність частинок рухомої рідини.

Течію (рух рідин і газів) називають усталеною, або стаціонарною, якщо швидкість рідини у кожній точці простору, який займає рідина, не змінюється з часом.

Для наочності рух рідини зображають за допомогою ліній течії, які проводять так, щоб дотичні до них в кожній точці збігались з вектором швидкості. Зображуючи потік, умовилися проводити лінії так, щоб їх густота, тобто число ліній, які пронизують одиницю площі поверхні, проведеної в потоці перпендикулярно до ліній течії, чисельно дорівнювала б швидкості частинок потоку в даному перерізі. При стаціонарному потоці рідини лінії течії збігаються з траєкторіями руху частинок, а для нестационарних потоків такий збіг не спостерігається.

Поверхню, обмежену лініями течії, називають **трубкою течії**. Частину рідини, обмежену трубкою течії, називають **струминою**. При стаціонарній течії частинки рухаються так, що кожна з них весь час залишається в межах певної струмини. Якщо поперечний переріз струмини нескінченно малий, то можна вважати, що швидкість рідини для всіх точок заданого перерізу однакова.

Маса рідини, що протікає за час dt через поперечний переріз, визначається за формулою

$$dm = \rho V S dt \quad (8.5)$$

де ρ – густина рідини; S – площа поперечного перерізу.

При стаціонарному потоці маса рідини або газу, що протікає за одиницю часу через будь-який поперечний переріз струмнини, однакова для всіх перерізів. Якщо взяти два перерізи, площі яких S_1 і S_2 (рис.8.2), то можна записати, що $dm_1 = dm_2$ або

$$\rho_1 V_1 S_1 dt = \rho_2 V_2 S_2 dt \quad (8.6)$$

Для абсолютно нестисливої рідини $\rho_1 = \rho_2$ і тоді рівняння (8.6) перепишемо так:

$$V_1 S_1 = V_2 S_2 \quad (8.7)$$

або
$$VS = \text{const} \quad (8.8)$$

Рівняння (8.8) виражає теорему нерозривності струмнини: добуток швидкості течії нестисливої рідини на площу поперечного перерізу струмнини є величина стала, або секундна об'ємна витрата рідини стала вздовж струмнини.

Рідина може бути приведена в рух різними силами: силою тяжіння; різницею тисків в різних місцях об'єму; силами тертя (в'язкості) між шарами, які рухаються з різними швидкостями тощо. Встановимо зв'язок між тиском і швидкістю стаціонарного руху ідеальної рідини (нестисливої і позбавленої внутрішнього тертя). Для цього розглянемо струмнину рідини між

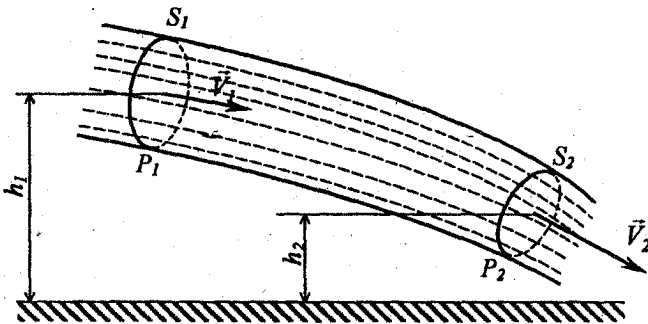


Рис.8.2

перерізами S_1 і S_2 , бічна поверхня якої утворена лініями течії (рис. 8.2). За малий проміжок часу Δt через переріз S_1 переміститься елементарний об'єм рідини в формі циліндра з основою S_1 і висотою $V_1 \Delta t$; кожна одиниця цього об'єму має кінетичну енергію $\frac{\rho_1 V_1^2}{2}$ і потенціальну енергію $\rho_1 g h_1$. Зовнішня сила $p_1 S_1$, що діє в перерізі S_1 , зміщує елементарний об'єм рідини на $V_1 \Delta t$ і тому здійснює додатну роботу, що дорівнює $p_1 S_1 V_1 \Delta t$. За той же час Δt через переріз S_2 вийде рідина в об'ємі циліндра $S_2 V_2 \Delta t$, а зовнішня сила $p_2 S_2$ виконає від'ємну роботу, що дорівнює $p_2 S_2 V_2 \Delta t$. Для стаціонарної течії повна енергія рідини в об'ємі струмнини між перерізами S_1 і S_2 повинна залишатись сталою, а тому сума змін всіх видів енергії і робіт зовнішніх сил повинна дорівнювати нулю:

$$S_1 V_1 \Delta t \left(\frac{\rho_1 V_1^2}{2} + \rho_1 g h_1 \right) + p_1 S_1 V_1 \Delta t - S_2 V_2 \Delta t \left(\frac{\rho_2 V_2^2}{2} + \rho_2 g h_2 \right) - p_2 S_2 V_2 \Delta t = 0. \quad (8.9)$$

Підставивши в (8.9) рівняння нерозривності струмнини (8.7) і $\rho_1 = \rho_2$ (рідина нестислива), дістанемо

$$\frac{\rho_1 V_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho V_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2. \quad (8.10)$$

Оскільки перерізи S_1 і S_2 взято довільно, то для будь-якого перерізу струмнини виконується умова

$$\frac{\rho V^2}{2} + \rho g h + p = \text{const}. \quad (8.11)$$

Рівняння (8.11) є рівнянням Бернуллі і виражає закон збереження енергії для стаціонарного руху нестисливої ідеальної рідини.

Величина $\frac{1}{2} \rho V^2$ являє собою питому кінетичну енергію, тобто кінетичну енергію одиниці об'єму рухомої рідини. Величина $\rho g h$ є питома потенціальна енергія в полі тяжіння, а величина p , яка має таку ж розмірність ($\text{Н/м}^2 = \text{Дж/м}^3$), являє собою питому потенціальну енергію сил тиску в

рідині.

При русі елементарного об'єму рідини відбувається перехід його енергії з однієї форми в іншу, але повна енергія цього об'єму залишається сталою.

Оскільки всі члени рівняння (8.11) мають розмірність тиску, то це рівняння можна сформулювати інакше. Величину $\frac{1}{2}\rho V^2$ називають динамічним напором, ρgh – гідравлічним напором, а величину p – статичним напором. Тоді із (8.11) витікає, що повний напір у рухомій рідині, яка складається з динамічного (швидкісного), гідравлічного і статичного напорів, залишається постійним.

У випадку горизонтальної струмینی (наприклад, при протіканні рідини в горизонтальній трубі) величина h стала, і рівняння Бернуллі набуває більш простого вигляду

$$\frac{\rho V^2}{2} + p = \text{const} , \quad (8.12)$$

де $\frac{\rho V^2}{2} + p = p_0$ називають повним тиском. З рівняння (8.12) для горизонтальної струмینی і рівняння нерозривності (8.7) випливає, що при русі рідини по горизонтальній трубі з різним поперечним перерізом швидкість рідини більша в місцях звуження, а статичний тиск більший в місцях розширення, тобто там, де швидкість менша.

Рівняння Бернуллі використовується для розв'язання деяких задач гідро- і аеромеханіки. Наведемо ряд прикладів.

1. Розрахунок швидкості витікання рідини через отвір у стіні або дні посудини. Для двох точок лінії течії 1 і 2 маємо (рис.8.3)

$$\frac{\rho V_1^2}{2} + \rho gh_1 + p_1 = \frac{\rho V_2^2}{2} + \rho gh_2 + p_2 .$$

Тиск p_1 рідини в перерізі S_1 відкритої посудини дорівнює атмосферному. Очевидно, що тиск p_2 в перерізі S_2 отвору теж дорівнює атмосферному. Нехтуючи зміною атмосферного тиску в межах висоти посудини, можна вважати, що $p_1 = p_2$. Тоді рівняння Бернуллі матиме вигляд

$$\frac{V_1^2}{2} + gh_1 = \frac{V_2^2}{2} + gh_2. \quad (8.13)$$

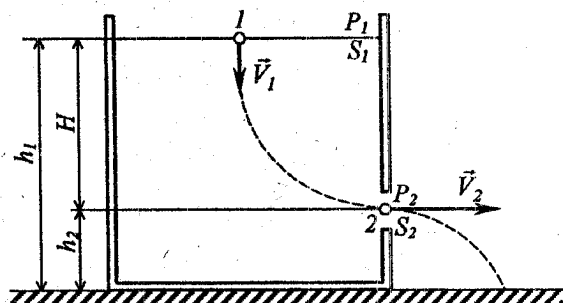


Рис.8.3

З рівняння нерозривності випливає, що

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{V_2}{V_1}.$$

Якщо $S_1 \gg S_2$, то членом $\frac{V_1^2}{2}$ в лівій частині рівняння (8.13) можна знехтувати. Тому $V_2^2 = 2g(h_1 - h_2) = 2gH$ або

$$V_2 = \sqrt{2gH}. \quad (8.14)$$

Вираз (8.14) називають формулою Торічеллі.

2. Розрахунок тиску в рідині, що протікає через вузьку частину труби (рис.8.4)

Для горизонтальної труби $h_1 = h_2$, а тому з рівняння Бернуллі (8.10) знайдемо

$$p_2 = p_1 - \frac{1}{2}\rho(V_2^2 - V_1^2). \quad (8.15)$$

Оскільки $V_2 > V_1$, то $p_2 < p_1$ і при великих швидкостях тиск може стати меншим атмосферного. Рідина, що протікає через вузьку частину

труби, перебуває в стані всебічного розтягу. Це явище застосовується в водоструминних насосах, карбюраторах, пульверизаторах та інших приладах.

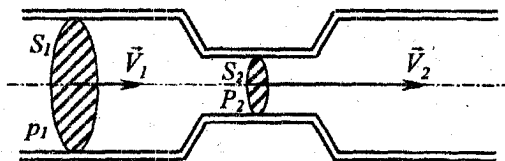


Рис.8.4

8.3. Гідродинаміка в'язкої рідини. Сили в'язкості. Формула Стокса

У реальних рідинах (газах) при русі одних шарів відносно інших діють сили, які дотичні до площини дотикання шарів і їх називають силами внутрішнього тертя або силами в'язкості. Ці сили зумовлені дією сил молекулярного зчеплення на межі двох шарів та перенесенням молекулами внаслідок хаотичного руху спрямованого імпульсу з одного шару в інший.

Ньютон експериментальним шляхом встановив, що сила внутрішнього тертя між шарами рідини (газу) пропорційна модулю градієнта швидкості $\left| \frac{dV}{dz} \right|$ і площі шарів S , тобто

$$F = \eta \left| \frac{dV}{dz} \right| S, \quad (8.16)$$

де η – коефіцієнт внутрішнього тертя або в'язкість, величина якого залежить від роду рідини та її температури.

Під градієнтом швидкості у формулі (8.16) розуміють зміну швидкості на одиницю довжини відстані між шарами. З цієї формули можна встановити фізичний зміст коефіцієнта в'язкості. Для $S=1$ і $\left| \frac{dV}{dz} \right|=1$ $\eta = F$, тобто коефіцієнт в'язкості чисельно дорівнює силі, що діє на одиницю по-

верхні шару рідини при градієнті швидкості рівному одиниці.

Одиницею в'язкості в СІ є така в'язкість, при якій градієнт швидкості 1 м/с на 1 м зумовлює виникнення сили внутрішнього тертя 1 Н на 1 м² площі поверхонь дотикання шарів. Ця одиниця називається паскаль-секунда і позначається Па·с.

Треба мати на увазі, що під час руху тіл у рідинах (газах), крім сил тертя, виникають так звані сили опору середовищ, які можуть перевищувати сили тертя. Дію сил тертя і опору під час руху тіл у рідинах або газах надалі називатимемо силою тертя. Для тіл сферичної форми, що рухаються у в'язких середовищах, для визначення сили тертя користуються формулою Стокса:

$$F = 6\pi\eta rV, \quad (8.17)$$

де r – радіус кульки; V – її швидкість; η – в'язкість середовища.

Формула (8.17) лежить в основі методу визначення коефіцієнта в'язкості, який полягає у вимірюванні швидкості руху кульки в рідині (метод Стокса). На кульку, яка падає в рідині вертикально вниз, діють три сили:

сила тяжіння $P = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g$ (ρ – густина кульки); сила Архімеда

$F_A = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho' g$ (ρ' – густина рідини) і сила тертя (опору) $F = 6\pi\eta rV$.

При рівномірному русі кульки $P = F_A + F$ або

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho' g + 6\pi\eta rV, \quad \text{звідки}$$

$$\eta = \frac{2(\rho - \rho')gr^2}{9V} \quad (8.18)$$

Відзначимо, що лінійна залежність сили тертя від швидкості (8.17) має місце при невеликих швидкостях руху тіла в рідині. При швидкостях, які більші за швидкість звуку в даному середовищі, залежність сили тертя від швидкості переходить в кубічну і на значення сили істотно впливає густина рідини. Рух тіла при надзвукових швидкостях характеризується за допомогою числа Маха M , яке дорівнює відношенню швидкості тіла до швидкості звуку в даному середовищі:

$$M = \frac{V}{V_{30}} \quad (8.19)$$

Сила тертя набуває максимального значення при $M=1,2$.

Підкреслимо, що викладені міркування стосуються як рідин, так і газів. Відмінність виявляється тільки в тому, що в'язкість рідин зменшується з підвищенням температури (особливо нафти, різних видів масел), а для газів – зростає з підвищенням температури.

8.4. Течія в'язких рідин у трубах. Формула Пуазейля. Закон подібності

Існує два види руху рідин: ламінарний і турбулентний. При ламінарному русі окремі шари рідини ковзають один відносно одного і не перемішуються. Швидкості частинок у різних шарах паралельні між собою, отже, ламінарна течія є стаціонарною. Вона спостерігається при невеликих швидкостях руху рідин, які зростають від нульового значення на стінці труби до максимального значення по її осі. Розподіл швидкості рідини в перерізі циліндричної труби показано на рис.8.5.

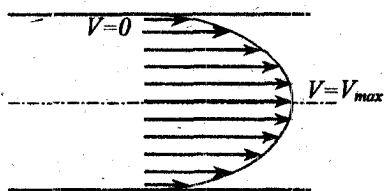


Рис.8.5

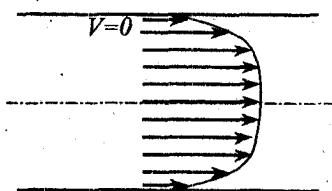


Рис.8.6

Із збільшенням швидкості руху характер течії істотно змінюється. Ламінарна (шарувата) течія переходить у турбулентну (вихрову). Цей перехід, як свідчать досліди, супроводжується зміною закону розподілу швидкості рідини по перерізу труби (рис.8.6). При турбулентному русі частинки рідини здійснюють хаотичні рухи по складних траєкторіях, оскільки їх швидкості змінюються як за величиною, так і за напрямом. Внаслідок цього

відбувається перемішування шарів рідини, тому їх швидкості в різних шарах мало відрізняються. Через великий градієнт швидкості поблизу стінок труби утворюються завихрення. Тому перехід ламінарної течії в турбулентну призводить до значного збільшення сил тертя між рідиною і стінками труби. Незважаючи на те, що турбулентний потік нестационарний, на практиці його умовно розглядають як стаціонарний з усередненими характеристиками. Прикладами турбулентного руху є рух диму, що виходить із заводських труб, рух води в гірських річках тощо.

Розглянемо закономірності ламінарної течії стаціонарного потоку рідини у горизонтальній трубі радіусом R . Виділимо у трубі циліндричний елемент рідини радіусом r і довжиною l (рис.8.7).

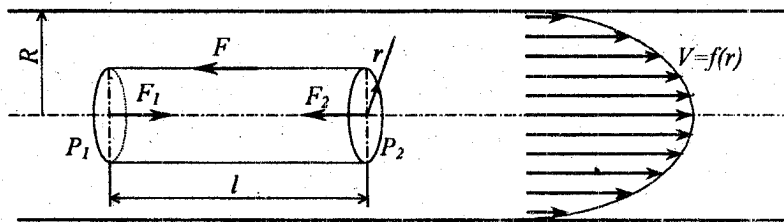


Рис.8.7

На бічну поверхню циліндра діє сила тертя

$$F = -\eta \frac{dV}{dr} S = -\eta 2\pi r l \frac{dV}{dr}, \quad (3.20)$$

де $S = 2\pi r l$ – площа бічної поверхні циліндра; знак "-" означає, що при зростанні радіуса швидкість рідини зменшується.

На основи циліндра діють сили тиску, рівнодійна яких N збігається з напрямком течії:

$$N = F_1 - F_2 = (p_1 - p_2) \pi r^2. \quad (3.21)$$

Для стаціонарного потоку $F = N$, тобто

$$-\eta 2\pi r l \frac{dV}{dr} = (p_1 - p_2) \pi r^2. \quad (8.22)$$

З (8.22) маємо

$$dV = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta l} r dr. \quad (8.23)$$

Після інтегрування виразу (8.23) дістанемо

$$V = -\frac{p_1 - p_2}{4\eta l} r^2 + C. \quad (8.24)$$

Сталу інтегрування визначимо з граничних умов. Для $r = R$, тобто біля стінок труби швидкість рідини $V=0$, тоді

$$C = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} R^2. \quad (8.25)$$

Підставивши (8.25) у (8.24), матимемо

$$V = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} (R^2 - r^2). \quad (8.26)$$

Рідина має максимальну швидкість на осі труби (при $r = 0$), тобто

$$V_0 = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} R^2. \quad (8.27)$$

Враховуючи формулу (8.27), вираз для швидкості (8.26) запишемо так:

$$V = V_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right), \quad (8.28)$$

тобто при віддаленні від осі труби швидкість змінюється за параболічним законом.

Визначимо об'єм рідини V , що витікає з труби за час t . Для цього уявно поділимо поперечний переріз труби на концентричні кільця, товщина яких dr (рис.8.8).

Площа кільця $dS = 2\pi r dr$. Через це кільце за час t протікає об'єм рідини

$$dV = V t dS = 2\pi r V t dr. \quad (8.29)$$

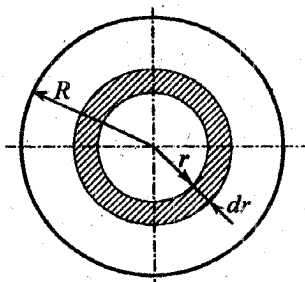


Рис. 8.8

Підставивши (8.26) у вираз (8.29), дістанемо

$$dV = \frac{(p_1 - p_2) \pi t}{2\eta l} (R^2 - r^2) r dr. \quad (8.30)$$

Проінтегрувавши вираз (8.30), дістанемо об'єм рідини, що витікає з труби за час t :

$$\begin{aligned} V &= \int_0^R dV = \frac{(p_1 - p_2) \pi t}{2\eta l} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr = \\ &= \frac{\pi(p_1 - p_2)t}{2\eta l} \left[\frac{r^2 R^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\pi R^4 (p_1 - p_2)t}{8\eta l} \end{aligned}$$

або

$$V = \frac{\pi R^4 t}{8\eta l} (p_1 - p_2). \quad (8.31)$$

З формули (8.31), яку називають **формулою Пуазейля**, випливає, що об'єм рідини, який витікає з труби, пропорційний четвертому степеню радіуса поперечного перерізу труби, спаду статичного тиску на кінцях труби довжиною l , часу і обернено пропорційний довжині труби та в'язкості рідини. Формула Пуазейля справедлива тільки для ламінарної течії рідини. Її

покладено в основу роботи установок для визначення в'язкості рідин і газів:

$$\eta = \frac{\pi R^4 t}{8 V l} (p_1 - p_2) . \quad (8.32)$$

Тепер звернемо увагу на те, що при вивченні руху рідин можна одержати такі результати, які характеризують не один якийсь випадок, а сукупність явищ. Це означає, що в межах знайдених результатів явища подібні.

Виявляється, що вплив окремих факторів, які описуються різними величинами, проявляється не розрізнено, а разом; що треба розглядати не окремі величини, а їхні групи. Отже, можна розробити метод, який дає змогу встановити зв'язок між окремими групами величин і об'єднати їх в комплекси певного вигляду.

Наприклад, рух рідини можна характеризувати такими величинами: $\vec{r}$ – радіус-вектором і $\vec{V}$ – швидкістю елементарного об'єму рідини; l – характерним розміром і $\vec{V}_0$ – характерною швидкістю потоку; ρ – густиною; η – в'язкістю; $\vec{V}_{\text{зв}}$ – швидкістю поширення звуку у рідині; g – прискоренням вільного падіння; τ – часом, протягом якого відбуваються зміни в потоці рідини. Між цими величинами повинен існувати функціональний зв'язок. З наведеної сукупності величин можна утворити шість комплексів:

$$\frac{V}{V_0}, \frac{r}{l}, R_* = \frac{\rho l V_0}{\eta} = \frac{l V_0}{\nu}; \quad (8.33)$$

$$Fr = \frac{V_0^2}{gl}; \quad (8.34)$$

$$M = \frac{V_0}{V_{\text{зв}}}; \quad (8.35)$$

$$S = \frac{V_0 \tau}{l}. \quad (8.36)$$

У формулі (8.33) η – динамічна в'язкість, а $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ – кінематична в'язкість.

Важливе те, що коли для двох потоків п'ять із шести комплексів збі-

гаються, то збігатимуться і шості комплекси. У цьому і полягає закон подібності потоків.

Величини R_e , F_r , M і S відповідно називають числами Рейнольдса, Фруда, Маха і Струхала.

Проаналізуємо вирази чисел Рейнольдса (8.33) і Фруда (8.34) та встановимо їх фізичний зміст. Число Рейнольдса має порядок величини, яка визначається відношенням кінетичної енергії до втрат енергії, зумовленої роботою сил в'язкості на шляху, що дорівнює характерній довжині. Воно визначає відносну роль інерції і в'язкості рідини під час її руху. При великих числах Рейнольдса основну роль відіграє інерція, а при малих – в'язкість.

Число Фруда за своїм порядком визначає відношення кінетичної енергії рідини до приросту енергії, зумовленої роботою сил тяжіння на шляху, що дорівнює характерній довжині.

Потоки рідин подібні, якщо їхні течії мають однакові числа Рейнольдса і Фруда. Як уже зазначалось, швидкість, при якій відбувається перехід ламінарної течії в турбулентну, називають критичною. Але дослідження свідчать, що найважливіша характеристика протікання рідини – число Рейнольдса.

Наприклад, якщо за характерний розмір циліндричної труби взяти її діаметр $l = d$, то критичне значення числа Рейнольдса, при якому ламінарний рух переходить у турбулентний, $R_{e_{кр}} \approx 2200$. При цьому не має значення, внаслідок чого число Рейнольдса має таку величину – чи в результаті зменшення в'язкості, чи збільшення швидкості або характерного розміру. Тому число Рейнольдса служить критерієм подібності різних потоків. Критичне значення числа Рейнольдса визначають тільки експериментально. Воно відіграє важливу роль у кількісних дослідження потоків рідин і газів та руху в них різних тіл при проектуванні трубопроводів для транспортування нафти й газу, каналів, літаків, кораблів тощо.

8.5. Деформації твердого тіла. Закон Гука

У природі немає абсолютно твердих тіл, оскільки всі реальні тіла під дією прикладених сил змінюють свою форму і об'єм, тобто деформуються. З курсу середньої школи відомо, що тверді тіла мають кристалічну будову,

тобто частинки (атоми, молекули), з яких складається тверде тіло, розміщені в певному порядку. Під час деформації тіла під впливом зовнішніх сил його частинки зміщуються з початкових положень рівноваги в інші положення. Цим переміщенням протидіють сили взаємодії (внутрішні сили) між частинками. Якщо зсув частинок був не дуже великий, то після припинення дії зовнішніх сил вони під впливом внутрішніх сил повертаються в початкові положення. Таку деформацію називають пружною. Пластичними називають деформації, які повністю або частково зберігаються в тілі після припинення дії зовнішніх сил. Вид деформації залежить не тільки від природи тіла, а й від величини прикладених сил. При тривалій дії навіть малих зовнішніх сил пружна деформація може перейти в пластичну (при тривалому навантаженні відбувається перебудова кристалічної ґратки твердого тіла). Зауважимо, що детально пружні властивості твердих тіл вивчаються у курсах опору матеріалів і теорії пружності.

В теорії пружності доводиться, що всі види деформацій (розтяг і стиск, зсув, згин, кручення) можуть бути зведені до деформацій розтягу (стиску) і зсуву.

Розглянемо однорідний стержень довжиною l_0 і площею поперечного перерізу S , до кінця якого прикладемо вздовж осі сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ ($F_1 = F_2 = F$), внаслідок чого довжина стержня зміниться на $\Delta l = l - l_0$ (рис.8.9).

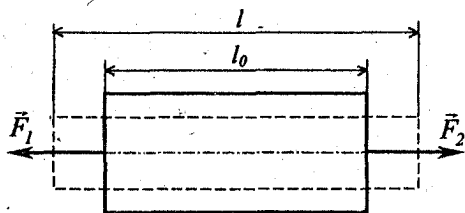


Рис.8.9

Величину Δl називають абсолютною деформацією розтягу (для стиску величина $\Delta l < 0$). Оскільки величина Δl не вказує, яку частину стано-

вить зміна довжини стержня від початкової довжини l_0 , то вона не може характеризувати його деформованість. Мірою деформації є відносна деформація, яка дорівнює відношенню абсолютної деформації до початкових розмірів тіла:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (8.37)$$

За допомогою дослідів англійський фізик Р.Гук встановив, що для малих деформацій

$$\sigma = k\varepsilon, \quad (8.38)$$

де k – коефіцієнт пружності, а σ – механічна напруга.

При пружній деформації величина зовнішніх сил F , що діють на тіло, зрівноважується результуючою внутрішніх пружних сил F_{np} , що виникають у тілі у будь-якому його перерізі. Напруга дорівнює відношенню результуючої пружних сил до площі перерізу тіла, тобто

$$\sigma = \frac{F_{np}}{S} \quad (8.39)$$

Для деформації розтягу (стиску) закон Гука (8.38) запишемо у такому вигляді:

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{\Delta l}{l_0}, \quad (8.40)$$

де коефіцієнт пропорційності E називається модулем Юнга. З (8.40) видно, що модуль Юнга визначається напругою, яка спричиняє відносне видовження, що дорівнює одиниці.

При деформаціях розтягу (стиску) відбувається зміна поперечних розмірів тіл, яка характеризується відносним поперечним стиском (розтягом)

$$\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d_0}, \quad (8.41)$$

де Δd – абсолютна зміна поперечних розмірів тіла, d_0 – поперечні розміри тіла до деформації.

Із дослідів випливає взаємозв'язок між ε та ε' :

$$\varepsilon' = \mu \varepsilon, \quad (8.42)$$

де μ – коефіцієнт Пуассона, який залежить тільки від властивостей матеріалу тіла. Для багатьох металів $\mu \approx 0,25$.

Розглянемо деформацію зсуву. Зсувом називають таку деформацію твердого тіла, при якій усі його плоскі шари, паралельні деякій площині, що називається площиною зсуву, зміщуються паралельно один одному, не змінюючись за розмірами і формою. Візьмемо куб з однорідної речовини,

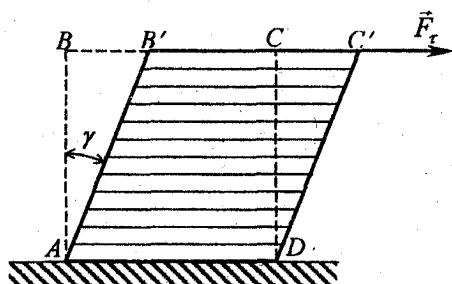


Рис.8.10

нижню грань якого закріплено нерухомо (рис.8.10). Під час дії дотичної сили $\vec{F}_\tau$ на верхню грань відбувається деформація зсуву і квадрат ABCD перетворюється в ромб AB'C'D. Для малого зсуву

$$\gamma \approx \operatorname{tg} \gamma = \frac{BB'}{BA}, \quad (8.43)$$

де γ – кут зсуву (відносний зсув), виміряний у радіанах. Якщо сила $\vec{F}_\tau$ рівномірно розподілена по площі верхньої грані, то у будь-якому перерізі, паралельному до цієї грані, виникають "сколюючі" напруги

$$\sigma_\tau = \frac{F_\tau}{S}, \quad (8.44)$$

де S – площа верхньої грані. За законом Гука, відносний зсув пропорційний дотичній напрузі, тобто

$$\sigma_{\tau} = G\gamma, \quad (8.45)$$

де G – коефіцієнт пропорційності, який називають модулем зсуву. Модуль зсуву дорівнює дотичній напрузі, яка виникла б у зразку при відносному зсуві, що дорівнює одиниці. Деформації розтягу і зсуву належать до однорідних деформацій (коли всі елементи тіла деформовані однаково).

Деформації твердих тіл описуються законом Гука до певної межі. Коли деформації перевищують деяку граничну величину, яка для різних речовин неоднакова, то властивості тіл значно відрізняються від властивостей абсолютно пружних тіл.

Пружні властивості тіл вивчають за так званою діаграмою напруг, або діаграмою розтягу (рис.8.11). З цієї діаграми для металічного стержня вид-

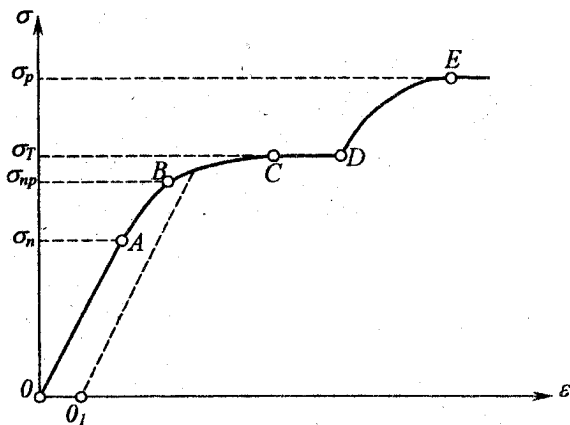


Рис.8.11

но, що закон Гука виконується у вузьких межах зміни напруг і деформацій. Верхню межу напруги, при якій ще виконується лінійна залежність між σ і ϵ називають межею пропорційності σ_n . При збільшенні напруги до σ_{np} (від точки A до точки B) деформація має ще пружний характер, але залеж-

ність між σ і ε нелінійна. Граничну напругу, при якій ще не виникає залишкова деформація, називають межею пружності $\sigma_{пр}$. За межею пружності в тілі виникають залишкові деформації, які зберігаються і після припинення дії зовнішніх сил. Напруга, при якій виявляється помітна залишкова деформація ($\approx 0,2\%$), називається межею текучості σ_T – точка С на кривій. В області CD деформація зростає без збільшення напруги, тобто тіло "тече". Дану область називають областю текучості або пластичних деформацій. Матеріали, для яких відсутня область текучості, називають крихкими (скло, фарфор, цегла та ін.), а матеріали з великою областю текучості – в'язкими. При дальшому розтягуванні тіла за точку D воно знову чинить опір деформації.

Максимальну напругу σ_p , що виникає в тілі перед руйнуванням, називають межею міцності – точка Е на кривій.

Якщо при першому деформуванні тіла напруга була більша за межу пружності, то після припинення дії зовнішніх сил тіло повернеться в стан O' . Якщо повторно деформувати тіло, то межа його пружності збільшиться. Таке явище називається наклепом. Явище наклепу застосовують в техніці для підвищення твердості тіл. Пружність і пластичність тіл залежать від різних факторів: тиску, температури, часу дії зовнішньої сили, способів обробки тощо. Знання властивостей матеріалів дає можливість правильно їх вибрати при конструюванні різних деталей машин.

Контрольні запитання

1. Які середовища називають суцільними?
2. Сформулюйте закон Паскаля.
3. Сформулюйте закон Архімеда.
4. Який тиск називається гідростатичним?
5. Який основний метод застосовується для опису руху рідин в гідроаеромеханіці і в чому він полягає?
6. Яку течію рідини називають стаціонарною, ламінарною, турбулентною?
7. Що називають лінією течії, трубкою течії, струминою?
8. Сформулюйте теорему нерозривності струмини.

9. Виведіть рівняння Бернуллі для ідеальної рідини.
10. Чим зумовлені сили в'язкості?
11. Виведіть формули для визначення коефіцієнта в'язкості методом Стокса.
12. Чим визначається перехід ламінарної течії рідини в турбулентну? В чому полягає закон подібності потоків?
13. Виведіть формулу Пуазейля.
14. Сформулюйте і запишіть закон Гука.
15. Опишіть деформації розтягу і зсуву та дайте означення величин, що їх характеризують.
16. Накресліть і поясніть діаграму розтягу металічного стержня.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. На рис.8.12 зображено схему водоміру. По горизонталь-

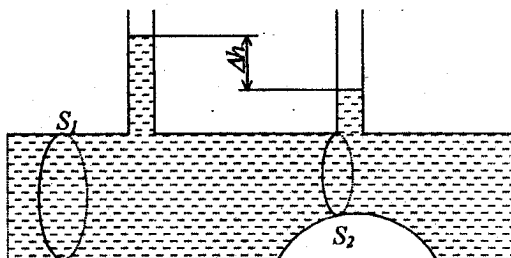


Рис.8.12

ній трубі змінного перерізу протікає вода. Визначити витрати води за одиницю часу, якщо різниця рівнів води у двох манометричних трубках Δh , а перерізи труби біля основ трубок відповідно S_1 і S_2 .

Розв'язання. Витрата води для кожного із перерізів

$$Q = \rho V_1 S_1 = \rho V_2 S_2 . \quad (1)$$

Оскільки водомірна трубка розміщується горизонтально, то рівняння

Бернуллі для даних двох перерізів має вигляд

$$p_1 + \frac{\rho V_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho V_2^2}{2} \quad (2)$$

З формул (1) і (2) маємо

$$V_1 = S_2 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho(S_1^2 - S_2^2)}}, \quad V_2 = S_1 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho(S_1^2 - S_2^2)}}$$

Оскільки $p_1 - p_2 = \rho g \Delta h$, то $Q = \rho S_1 S_2 \sqrt{\frac{2g\Delta h}{S_1^2 - S_2^2}}$

Отже, $Q = k\sqrt{\Delta h}$, де $k = \rho S_1 S_2 \sqrt{\frac{2g}{S_1^2 - S_2^2}}$ – стала водоміру.

Приклад 2. В циліндричну посудину з площею дна 100 см^2 налили рідину, густина якої $1,2 \text{ г/см}^3$. В ній плаває кусок льоду масою $0,3 \text{ кг}$ (рис.8.13). На скільки більший тиск на дно посудини завдяки плаваючому льоду? Як зміниться тиск на дно, коли лід розтане?

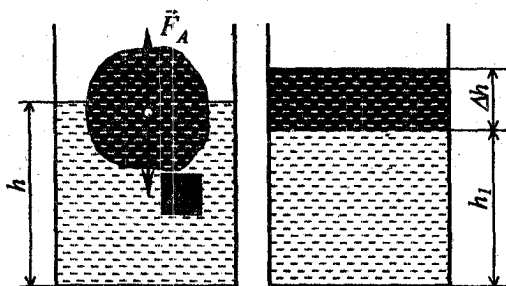


Рис.8.13

Розв'язання. Умова плавання льоду $F_A = m_A g$. Сила Архімеда $F_A = \rho g V'$, де V' – об'єм зануреної частини льоду. Коли б льоду в посудині не було, то рідина в посудині була б на рівні h_1 і $V' = S(h - h_1)$. Тоді тиск

на дно $p_1 = p_{\text{атм}} + \rho g h_1$. При наявності льоду тиск на дно $p_2 = p_{\text{атм}} + \rho g h$.

$$\text{Їх різниця } \Delta p_1 = p_2 - p_1 = \rho g (h - h_1) = \rho g \frac{V'}{S} = \frac{F_A}{S} = \frac{m_A g}{S} = \\ = \frac{0,3 \text{ кг} \cdot 9,81 \text{ м/с}^2}{100 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 249 \text{ Па}.$$

Після розплавлення льоду вода розтечеться по поверхні даної рідини (глибина якої стане h_1) плоским шаром товщиною Δh . Тепер тиск на дно буде

$$p' = p_{\text{атм}} + \rho g h_1 + \rho_e g \Delta h.$$

За визначенням густини

$$\rho_e = \frac{m_e}{V_e} = \frac{m_e}{S \Delta h}.$$

Звідси

$$\rho_e \Delta h = \frac{m_e}{S}.$$

Отже,

$$p' = p_{\text{атм}} + \rho g h_1 + \frac{m_A g}{S}.$$

Шукана різниця тисків

$$\Delta p_2 = p' - p_2 = p_{\text{атм}} + \rho g h_1 + \frac{m_A g}{S} - p_{\text{атм}} - \rho g h = \frac{m_A g}{S} - (p_2 - p_1) = 0$$

Після розплавлення льоду сумарний тиск на дно не змінився, не дивлячись на зменшення об'єму води.

Приклад 3. У посудину налито ртуть і зверху неї олію. Опущена в посудину куля плаває так, що наполовину занурена в ртуть. Визначити густину матеріалу кулі. Густина олії $\rho_2 = 900 \text{ кг/м}^3$.

Розв'язання. За умовою плавання сила тяжіння, що діє на тіло, дорівнює силі тяжіння, яка діє на витіснені тілом об'єми рідин:

$$\rho_k g V_k = \rho_1 g \frac{V_k}{2} + \rho_2 g \frac{V_k}{2},$$

звідки

$$\rho_k = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} = 7250 \text{ кг/м}^3.$$

Приклад 4. За допомогою гідравлічного преса з відношенням площ поршнів 1:100 потрібно підняти вантаж масою 100 т. Визначити число хс

дів малого поршня за 1 хв, якщо за один хід він опускається на 20 см. Потужність двигуна преса 5 кВт, ККД преса 80 %.

Розв'язання. Число ходів малого поршня преса $n = \frac{A}{A_1}$, де A – робота двигуна преса за час t . A_1 – робота двигуна за час одного ходу малого поршня.

Визначимо роботу A_1 . Для піднімання вантажу масою m , який лежить на великому поршні преса, потрібно прикласти силу $F_2 = mg$. Для цього до малого поршня прикладають силу $F_1 = F_2 \frac{S_1}{S_2}$, де S_1 і S_2 – площі малого і великого поршнів. Робота цієї сили за один хід малого поршня

$$A_1 = F_1 h = F_2 \frac{S_1}{S_2} h.$$

Робота двигуна преса за час піднімання вантажу $A = \eta A'$, де $A' = Pt$; P – потужність двигуна. Таким чином, число ходів малого поршня преса

$$n = \frac{\eta P t S_2}{mg S_1 h} = 120.$$

Приклад 5. Товстостінна стальна колона довжиною $l=3$ м і зовнішнім діаметром $D=300$ мм стискається силою $F=10$ МН.

Визначити товщину стінки і абсолютну зміну довжини колони, якщо допустима напруга $\sigma_d=50$ МПа.

Розв'язання. Згідно з умовою задачі $\frac{F}{S} \leq \sigma_d$, звідки

$$S \geq F / \sigma_d, \quad (1)$$

де S – площа поперечного перерізу колони:

$$S = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2), \quad (2)$$

d – внутрішній діаметр колони.

Підставивши (2) в (1), дістанемо

$$d = \sqrt{D^2 - \frac{4F}{\pi \sigma_0}} = 254 \text{ мм.}$$

Товщина стінки

$$h = \frac{D - d}{2} = 23 \text{ мм.}$$

Абсолютну зміну довжини колони визначимо із закону Гука:

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{1}{E} \sigma,$$

де E – модуль Юнга; $\sigma = \frac{F}{S}$ – напруга, що виникає в колоні.

Звідси

$$\Delta l = \frac{lF}{E \cdot S} = \frac{4lF}{\pi E (D^2 - d^2)} = 7 \text{ мм.}$$

Задачі для самостійних вправ

1. Підводний човен знаходиться на глибині 100 м. З якою швидкістю через отвір у корпусі човна вриватиметься в човен струмина води? Скільки води проникає за 1 год, якщо діаметр отвору 1 см? Тиск повітря в човні дорівнює атмосферному.

Відповідь: $\approx 44,3 \text{ м/с}$; $\approx 50 \text{ м}^3$.

2. Два тіла, об'єми яких V і $2V$, зрівноважені на терезах, потім більше тіло занурено в олію, густина якої $\rho = 900 \text{ кг/м}^3$. Якою повинна бути густина рідини, в яку слід одночасно опустити менше тіло, щоб рівновага терезів не порушилась?

Відповідь: 1800 кг/м^3 .

3. Гумовий м'яч масою m і радіусом R занурюють на глибину h і відпускають. На яку висоту від поверхні води підскочить м'яч? Опір води і повітря при русі не враховувати.

Відповідь: $y = \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \rho - m \right) \frac{h}{m}$.

4. У стінці посудини з водою зробили два отвори на відстані 0,2 м один над одним площею 2 см^2 кожний. Визначити координати точки пере-

тину струмин, що витікають з отворів, якщо в посудину кожної секунди вливається $1,4 \text{ дм}^3$ води.

Відповідь: $x=1,2 \text{ м}$; $y=1,3 \text{ м}$.

5. Площа поршня в шприці $1,2 \text{ см}^2$, а площа отвору 1 мм^2 . Скільки часу буде витікати вода з шприца, якщо хід поршня 4 см і на нього діють з силою 5 Н ?

Відповідь: $\approx 0,52 \text{ с}$.

6. На гідропресі, що має відношення діаметрів поршнів $1:5$ і ККД 80% , пресують тіло. При цьому малий поршень робить 50 ходів по 10 см . Знайти масу тіла, якщо сила тиску на верхню площадку гідропреса досягає 100 кН , а сила тиску на малий поршень – 7 кН . Визначити деформацію тіла.

Відповідь: $4 \cdot 10^3 \text{ кг}$; $0,2 \text{ м}$.

7. Цистерну діаметром 1 м і висотою 2 м наповнили до краю рідиною, а потім у дні цистерни відкрили отвір площею 2 см^2 . Визначити час витікання рідини. Впливом тертя знехтувати.

Відповідь: 2500 с .

8. В трубу А (рис.8.14) потужним насосом нагнітають воду. Течія ла-

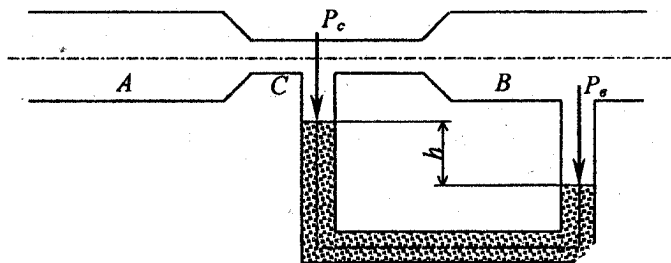


Рис.8.14

мінарна. В трубі В швидкість течії 20 см/с . Переріз труби становить 6 см^2 , а переріз трубки С – 1 см^2 . Визначити різницю рівнів h ртутного манометра.

Відповідь: $\approx 7 \text{ см}$.

9. Скільки води може протікати щосекунди через водопровідну трубу

з внутрішнім діаметром $3 \cdot 10^{-2}$ м при ламінарній течії, якщо критичне число Рейнольдса дорівнює 2300.

Відповідь: 0,054 кг/с.

10. Стальний стержень довжиною 1 м і перерізом $0,8 \text{ мм}^2$ закріплено одним кінцем у підвісному пристрої так, що він легко може приймати будь-яке положення у вертикальній площині. До протилежного кінця стержня прикріплено вантаж 49 Н. Розтягнутий стержень з вантажем відхиляють до висоти підвісу і відпускають. Визначити видовження стержня в нижній точці траєкторії руху вантажу. Власною вагою стержня знехтувати.

Відповідь: $9,36 \cdot 10^{-4}$ м.

11. Визначити значення коефіцієнта Пуассона, при якому об'єм стержня при розтягу не змінюється.

Відповідь: $\mu = 0,5$.

Розділ 9. КОЛИВАННЯ І ХВИЛІ

9.1. Гармонічні коливання

Коливаннями називаються процеси (рухи або зміни стану), що повторюються з часом.

Характерною особливістю коливань є їхня періодичність, тобто повторюваність через рівні проміжки часу, які називають періодом коливального руху.

В залежності від фізичної природи коливального процесу розрізняють: механічні коливання (коливання маятників, частин машин і механізмів, будинків, мостів і інших споруд, тиску повітря при поширенні в ньому звуку тощо); електромагнітні (коливання змінного струму в колі); електромеханічні (коливання мембрани телефона) і інші.

Періодичні коливання математично описуються за допомогою функцій, для яких виконується умова

$$f(t) = f(t + T), \quad (9.1)$$

де T – період коливань (час одного коливання).

Коливання називаються гармонічними, якщо фізична величина, яка їх

характеризує, змінюється з часом за законом синуса або косинуса.

Основні характеристики гармонічного коливання встановимо з допомогою моделі, яка являє собою матеріальну точку D , що рівномірно обертається по колу радіуса A з кутовою швидкістю ω (рис. 9.1).

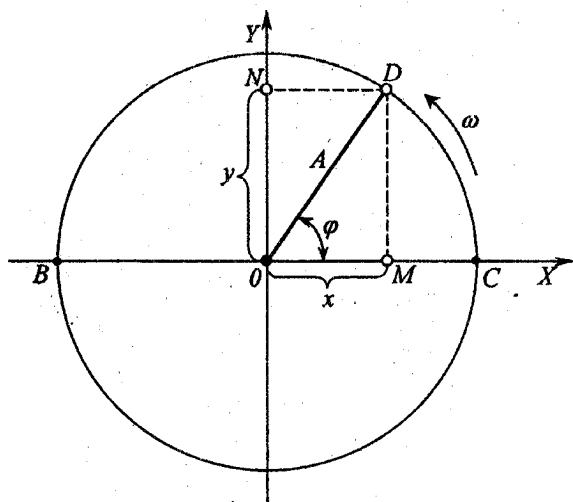


Рис.9.1

Проекція точки D (наприклад, на вісь OX) здійснюватиме гармонічні коливання між B і C . Запишемо залежність координати x точки M від часу t . З рисунка маємо

$$x = A \cos \varphi = A \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (9.2)$$

де x – зміщення коливної точки від положення рівноваги; A – максимальне зміщення коливної точки від положення рівноваги, яке називають амплітудою коливань; φ_0 – початкова фаза; $\varphi = \omega t + \varphi_0$ – фаза коливань, яка визначає зміщення коливної точки в будь-який момент часу t ; ω – циклічна, або колова частота коливань.

Період коливань точки

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (9.3)$$

Кількість коливань за секунду називають частотою. Згідно з означенням

$$\nu = \frac{1}{T}. \quad (9.4)$$

Період коливань вимірюють у секундах (с), а частоту – у герцах (Гц).

Неважко бачити, що проекція точки D на вісь OY , тобто точки N (рис.9.1), також здійснює гармонічні коливання за законом

$$y = A \sin \varphi = A \sin(\omega t + \varphi_0) = A \cos\left(\omega t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right), \quad (9.5)$$

Знайдемо швидкість точки, яка коливається, з рівняння (9.2) як похідну за часом

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi_0) = \omega A \cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right). \quad (9.6)$$

Прискорення коливальної точки знайдемо як похідну від швидкості за часом

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi_0) = \omega^2 A \cos(\omega t + \varphi_0 + \pi). \quad (9.7)$$

З рівнянь (9.6) і (9.7) видно, що швидкість і прискорення при гармонічних коливаннях змінюються з такою самою частотою як і зміщення, але зсунуті по фазі відповідно на $\frac{\pi}{2}$ і π , як це показано на рис.9.2.

Розглянемо прямолінійні гармонічні коливання матеріальної точки масою m вздовж осі координат OX під дією пружини (рис. 9.3). Тертям і масою пружини нехтуємо.

При зміщенні матеріальної точки від положення рівноваги на величину x на неї діятиме сила пружності

$$F = -kx, \quad (9.8)$$

де k – коефіцієнт пружності пружини.

На основі другого закону Ньютона запишемо

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad \text{або}$$

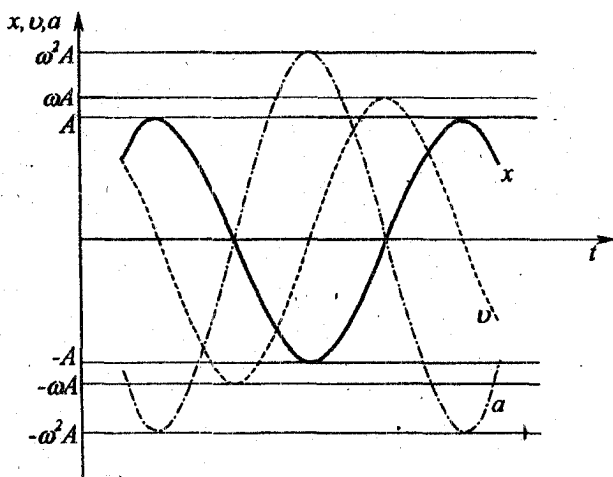


Рис.9.2

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad (9.9)$$

де $\omega^2 = \frac{k}{m}$.

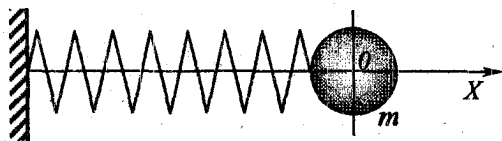


Рис.9.3

Так як коефіцієнт ω^2 додатний, то рівняння (9.9) – це диференціальне рівняння вільних коливань. Його розв'язком є функція (9.2).

Циклічна частота і період вільних або власних коливань дорівнюють

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (9.10)$$

Щоб тіло здійснювало гармонічні коливання, на нього не обов'язково повинна діяти пружна сила. Потрібно, щоб при зміщенні тіла від положення рівноваги сила, яка діє на нього, змінювалась за законом (9.8). Такі сили називають квазіпружними.

Повна енергія вільних коливань з часом залишається сталою і складається з кінетичної і потенціальної енергій

$$E = E_k + E_n, \quad (9.11)$$

де
$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0), \quad (9.12)$$

а
$$E_n = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0), \quad (9.13)$$

бо потенціальна енергія визначається за такою ж формулою, як і потенціальна енергія деформованої пружини, оскільки вільні коливання відбуваються під дією сил, які подібні до пружних сил.

Вирази (9.12) і (9.13) перепишемо у такому виді:

$$E_k = \frac{1}{4}m\omega^2 A^2 [1 - \cos(2\omega t + 2\varphi_0)], \quad (9.14)$$

$$E_n = \frac{1}{4}m\omega^2 A^2 [1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_0)]. \quad (9.15)$$

Кінетична і потенціальна енергії матеріальної точки періодично змінюються від 0 до $\frac{1}{2}m\omega^2 A^2$, виконуючи гармонічні коливання з циклічною частотою 2ω і амплітудою $\frac{1}{4}m\omega^2 A^2$ біля середнього значення $\frac{1}{4}m\omega^2 A^2$. Коливання кінетичної і потенціальної енергій зсунуті по фазі на π , тому повна механічна енергія матеріальної точки не змінюється при гармонічних коливаннях:

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2. \quad (9.16)$$

Графіки залежностей E_k, E_n і E від часу t для випадку $\varphi_0 = 0$ наведено на рис.9.4.

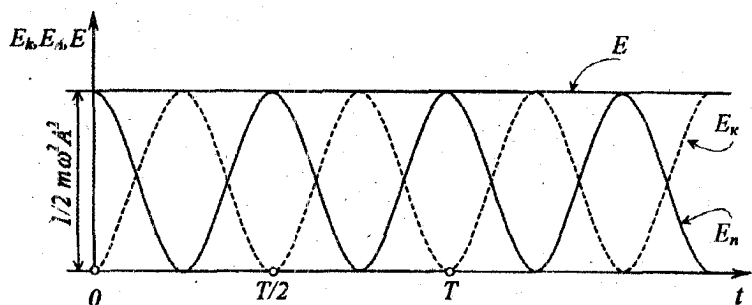


Рис.9.4

9.2. Коливання маятника

Розглянемо приклади систем, які здійснюють гармонічні коливання.

Приклад 1. Фізичний маятник – тверде тіло, здатне здійснювати коливання під дією своєї сили тяжіння mg навколо нерухомої горизонтальної

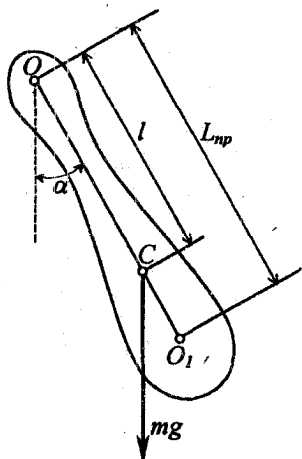


Рис.9.5

осі O , яка не проходить через його центр мас і називається віссю коливання маятника (рис.9.5).

Точка O перетину осі коливання маятника з вертикальною площиною, що проходить через центр мас маятника, називається точкою підвісу маятника.

Якщо знехтувати силами тертя в підвісі маятника, то момент відносно осі коливання маятника створює тільки його сила тяжіння. При відхиленні маятника на кут α виникає обертальний момент $mglsin\alpha$, який намагається повернути маятник у положення рівноваги.

З основного закону динаміки обертального руху (7.7) дістанемо рівняння руху фізичного маятника:

$$I \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mglsin\alpha, \quad (9.17)$$

де I – момент інерції маятника відносно осі O ; m – маса маятника; l – відстань від центра мас до осі коливання; g – прискорення вільного падіння; знак "мінус" вказує на те, що кут відхилення α відраховують від положення рівноваги, а повертаючий момент намагається повернути маятник до положення рівноваги. При малих коливаннях маятника $sin\alpha \approx \alpha$ і рівняння (9.17) має вигляд

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mgl}{I}\alpha = 0, \quad (9.18)$$

тобто кут α задовольняє диференціальне рівняння гармонічних коливань (9.9), якщо зробити позначення

$$\omega^2 = \frac{mgl}{I}. \quad (9.19)$$

Таким чином малі коливання фізичного маятника будуть гармонічними:

$$\alpha = \alpha_0 \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (9.20)$$

де α_0 – амплітуда коливань кута α , а

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}} \quad (9.21)$$

– відповідно циклічна частота і період коливань фізичного маятника.

Приклад 2. Математичний маятник – матеріальна точка, підвішена на невагомій і нерозтяжній нитці, що коливається у вертикальній площині під дією сили тяжіння (рис. 9.6).

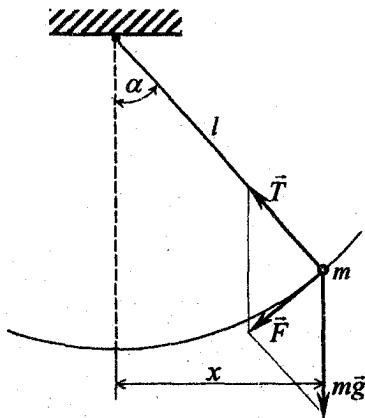


Рис.9.6

Коли маятник перебуває у положенні рівноваги, то сила тяжіння зрівноважується силою натягу нитки. Якщо матеріальну точку відхилити на деякий кут α , то рівнодійна $\vec{F}$ сил тяжіння $m\vec{g}$ і натягу $\vec{T}$ намагається повернути маятник в положення рівноваги. Вираз для повертаючої сили має такий вигляд:

$$F = mg \sin \alpha. \quad (9.22)$$

Для малих кутів α можна записати, що $\sin \alpha = \frac{x}{l} \approx \alpha$ і

$$F = mg \frac{x}{l}, \quad (9.21)$$

де l – довжина маятника.

При виконанні умови (9.21) повертаюча сила пропорційна зміщенню x матеріальної точки від положення рівноваги, тому коливання математичного маятника будуть гармонічними.

На основі другого закону Ньютона запишемо рівняння руху математичного маятника

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{mg}{l} x. \quad (9.22)$$

Порівнявши рівняння (9.22) з рівнянням (9.9), можна записати, що

$$k = \frac{mg}{l} \text{ і } \omega^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Тоді

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (9.23)$$

З (9.23) випливає, що період коливань математичного маятника визначається його довжиною і прискоренням земного тяжіння даного місця на Землі та не залежить від маси маятника і амплітуди коливань для малих кутів відхилення α .

Якщо вважати математичний маятник граничним випадком фізичного маятника, вся маса якого зосереджена в його центрі мас, а момент інерції $I = ml^2$, то формулу (9.23) для обчислення періоду коливань математичного маятника можна одержати з формули (9.21), тобто

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{ml^2}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (9.24)$$

Аналізуючи (9.24), приходимо до висновку, що I/ml відповідає довжині, а тому запишемо

$$\frac{I}{ml} = L, \quad (9.15)$$

де L – зведена довжина фізичного маятника.

Отже, математичний маятник матиме такий самий період коливань, що й фізичний маятник, за умови рівності його довжини зведеної довжині фізичного маятника.

Точку O' , що знаходиться на відстані L від точки O підвісу маятника (рис.9.5), називають центром коливань фізичного маятника. Якщо в цій точці підвісити фізичний маятник, то його період коливань не зміниться. Ця властивість використовується в оборотних маятниках, які застосовують для визначення прискорення g у різних місцях Землі.

Маятники широко застосовують для вивчення коливань земної кори; у годинниках; у приладах для дослідження механічних властивостей твердих тіл; у гіроскопічних приладах тощо.

9.3. Додавання гармонічних коливань

Під додаванням коливань розуміють знаходження закону результуючих коливань системи у тих випадках, коли ця система бере участь одночасно в декількох коливальних рухах.

Розрізняють два граничні випадки: 1) додавання коливань однакового напрямку; 2) додавання взаємно перпендикулярних коливань.

1) Знайдемо рівняння руху тіла, яке бере участь у двох однаково напрямлених гармонічних коливальних рухах з однаковими частотами, застосувавши метод векторних діаграм (рис.9.7):

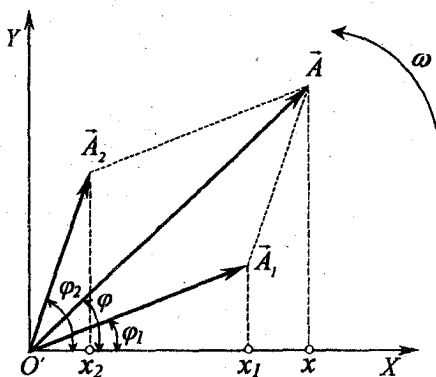


Рис.9.7

$$\begin{aligned}x_1 &= A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \\x_2 &= A_2 \cos(\omega t + \varphi_2).\end{aligned}\tag{9.26}$$

Оскільки вектори $\vec{A}_1$ і $\vec{A}_2$ обертаються з однаковою кутовою швидкістю ω , то зсув фаз між ними ($\varphi_2 - \varphi_1$) з часом не змінюється і результуючий вектор $\vec{A}$ також здійснюватиме обертання з кутовою швидкістю ω , а тому результуюче коливання також буде гармонічним і його рівняння матиме такий вигляд:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi), \tag{9.27}$$

де A – амплітуда результуючого коливання, φ – початкова фаза.

Знайдемо A і φ , скориставшись рис.9.7:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}; \tag{9.28}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \tag{9.29}$$

З (9.28) видно, що коли $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), то $A = A_1 + A_2$, а якщо $\varphi_2 - \varphi_1 = (2n + 1)\pi$, то $A = |A_2 - A_1|$.

Коливання можна додавати і аналітично. Розглянемо окремий випадок додавання однаково напрямлених коливань з різними частотами:

$$\begin{aligned}x_1 &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \\x_2 &= A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2).\end{aligned}\tag{9.30}$$

Для спрощення припустимо, що $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_0$ і $A_1 = A_2 = A_0$. Тоді результуюче зміщення

$$x = x_1 + x_2 = 2A_0 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t + \varphi_0\right), \tag{9.31}$$

тобто коливання буде негармонічним, тому що амплітуда результуючого коливання періодично змінюється з часом

$$A = 2A_0 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right). \tag{9.32}$$

Оскільки період модуля косинуса дорівнює $\frac{\pi}{\omega}$, то період зміни амплітуди

$$T = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}. \quad (9.33)$$

У випадку, коли частоти коливань ω_1 і ω_2 за величиною мало відрізняються, виникає явище биття і результуюче коливання буде періодичним коливанням з пульсуючою амплітудою і кутовою частотою, що дорівнює середньому арифметичному значенню частот складових коливань $\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)$. Характер залежності x від часу t при биттях показано на рис.9.8.

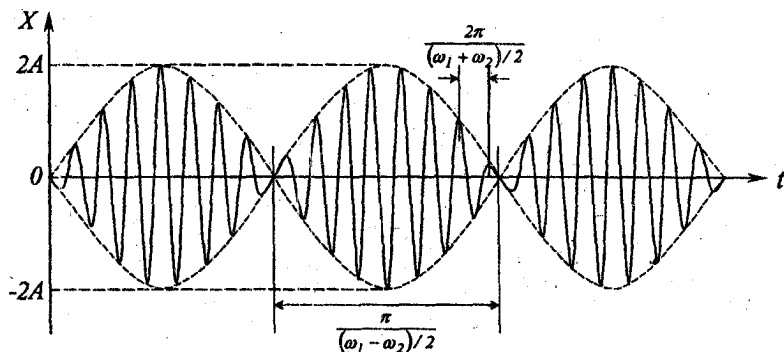


Рис.9.8

Явищем биття користуються настроювачі музичних інструментів, які судять про точне співпадання частоти струни з частотою еталонного джерела звуку (камертона) по зникненню биттів. Додавання коливань з близькими частотами застосовують також в радіоприймачах, які називаються тетеродинами.

2) Розглянемо випадок додавання двох взаємно перпендикулярних коливань, частоти яких однакові. Рівняння коливань відносно координатних осей OX і OY матимуть такий вигляд:

$$\begin{aligned} x &= A \cos(\omega t + \varphi_1), \\ y &= B \cos(\omega t + \varphi_2). \end{aligned} \quad (9.34)$$

Щоб знайти рівняння траєкторії результуючого коливального руху, треба з (9.34) виключити час t . Зробимо це для декількох найбільш простих значень початкових фаз.

а). Різниця фаз дорівнює нулю, тобто $\varphi_2 = \varphi_1$. Тоді

$$\frac{x}{y} = \frac{A}{B}; \quad y = \frac{B}{A}x, \quad (9.35)$$

тобто траєкторією результуючого руху є пряма лінія – діагональ прямокутника з сторонами $2A$ (по осі OX) і $2B$ (по осі OY) (рис.9.9,а).

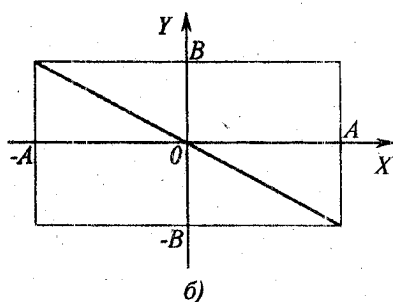
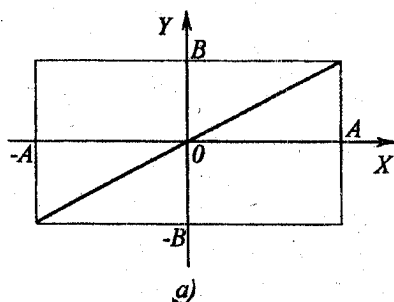


Рис.9.9

б). Нехай $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi$. В цьому випадку косинуси будуть відрізнятися знаком, і ми аналогічно отримаємо:

$$y = -\frac{B}{A}x, \quad (9.36)$$

тобто траєкторія буде другою діагоналлю прямокутника (рис.9.9,б).

в). Різниця фаз дорівнює $\pi/2$, тобто $\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$. Траєкторію знайдемо наступним способом:

$$\frac{x}{A} = \cos(\omega t + \varphi_1),$$

$$\frac{y}{B} = \cos\left(\omega t + \varphi_1 + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\omega t + \varphi_1).$$

Піднесемо до квадрату і додавши почленно, дістанемо

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = \cos^2(\omega t + \varphi_1) + \sin^2(\omega t + \varphi_1)$$

або

$$\frac{x_2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1, \quad (9.37)$$

тобто траєкторією буде еліпс (рис.9.9,в). При $A = B$ траєкторія перетворюється в коло.

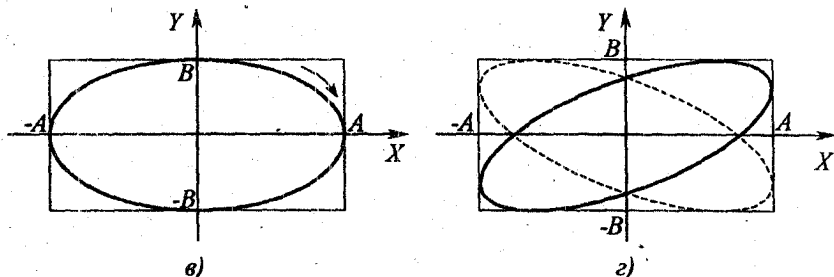


Рис.9.9

За період цей еліпс буде обходитися деякою точкою M в напрямі, показаному стрілкою.

г). Легко показати, що при $\varphi_2 = \varphi_1 - \pi/2$ траєкторія залишиться такою ж самою, але зміниться напрям обходу.

У випадку довільних значень φ_1 і φ_2 , а точніше, їх різниці, траєкторія буде також еліпсом (подібним одному із показаних на рис.9.9,г), вписаним в той же прямокутник, тому що x і y завжди змінюються у межах

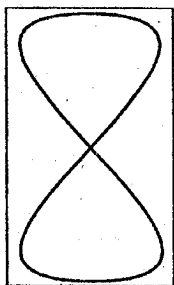
$$-A \leq x \leq A, \quad -B \leq y \leq B.$$

Прямі рис.9.9,а і б можна розглядати як вироджений еліпс.

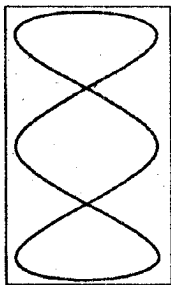
д). Більш складні криві отримують при додаванні коливань з кратними частотами ($\omega_1 = n\omega_2$, n – правильний дріб). В даному випадку результуючі коливання носять назву фігур Ліссажу. За формою замкненої кривої визначають, у скільки разів одна частота більша за другу (наприклад, рис.9.10 для $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi/2$), тому що відношення числа точок дотикання фігур до відповідних сторін прямокутника збігається з відношенням частот складових коливань.

е). При додаванні коливань довільної частоти, результуюче коливан-

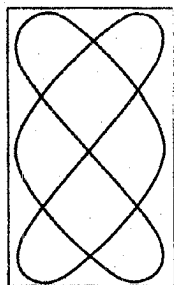
ня має складну траєкторію, яка є незамкнутою і з часом заповнить собою весь прямокутник.



$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{2}$$



$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{3}$$



$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2}{3}$$

Рис.9.10

9.4. Затухаючі і вимушені коливання. Резонанс

В ідеальному випадку, коли на тіло діє тільки одна пружна (квазіпружна) сила, коливання тіла будуть гармонічними і незатухаючими ($A = \text{const}$). В реальних умовах механічна енергія коливального руху тіла буде неперервно зменшуватись, витрачаючись на переборення опору середовища, на тертя в опорах, на створення хвиль, на виникнення непружних деформацій тощо. Внаслідок цього амплітуда коливань з часом зменшуватиметься і коливання стануть затухаючими.

Закон затухання коливань залежить від властивостей коливальної системи.

Система називається лінійною, якщо параметри, які характеризують фізичні властивості системи, не змінюються в процесі коливань.

Лінійні системи описуються лінійними диференціальними рівняннями. Знайдемо диференціальне рівняння, яке описує вільні затухаючі коливання тіла під дією квазіпружної сили ($F_{\text{кв-пр}}$) і сили опору (F_0).

При малих швидкостях руху сила опору прямо пропорційна першій степені швидкості і напрямлена проти руху, тобто

$$F_o = -r\dot{v} = -r \frac{dx}{dt}, \quad (9.38)$$

де r – коефіцієнт опору, який залежить від властивостей середовища, форми і розмірів рухомого тіла.

Другий закон Ньютона матиме вигляд

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt}$$

або
$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0 \quad (9.39)$$

– диференціальне рівняння затухаючих коливань.

Рівняння коливального руху тіла при цьому матиме вигляд

$$x = A_0 e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (9.40)$$

з довільними значеннями сталих A_0 , ω , φ_0 і α . Введенням початкової фази φ_0 ми об'єднуємо синус і косинус в одну функцію. Обчисливши першу і другу похідні від виразу (9.40) і підставивши їх значення в (9.39), дістанемо

$$A_0 e^{-\alpha t} \{ [m(\alpha^2 - \omega^2) - r\alpha + k] \cos(\omega t + \varphi_0) + [m2\alpha\omega - r\omega] \sin(\omega t + \varphi_0) \} = 0,$$

звідки отримаємо два рівняння для знаходження α і ω :

$$\left. \begin{aligned} m(\alpha^2 - \omega^2) - r\alpha + k &= 0, \\ m2\alpha\omega - r\omega &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Розв'язуючи ці рівняння, знайдемо:

$$\alpha = \frac{r}{2m} \quad (9.41)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}. \quad (9.42)$$

Вираз (9.40), в якому значення α і ω визначені із (9.41) і (9.42), є загальним розв'язком рівняння затухаючих коливань (9.39). Він відрізняється від чисто гармонічного коливання (9.2) тим, що амплітуда коливання

$$A_{(t)} = A_0 e^{-\alpha t} \quad (9.43)$$

є спадна функція часу.

Співвідношення (9.42) можна переписати так:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}, \quad (9.44)$$

де $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ – циклічна частота вільних коливань.

Відповідно період затухаючих коливань дорівнює

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}. \quad (9.45)$$

З формули (9.45) видно, що період затухаючих коливань завжди більший від періоду вільних коливань ($T = 2\pi/\omega_0$). При збільшенні опору середовища, тобто при зростанні коефіцієнта затухання α , період затухаючих коливань зростає і при $\alpha = \omega_0$ коливальний процес переходить в аперіодичний (рис.9.11).

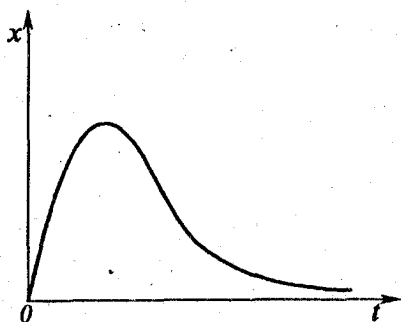


Рис.9.11

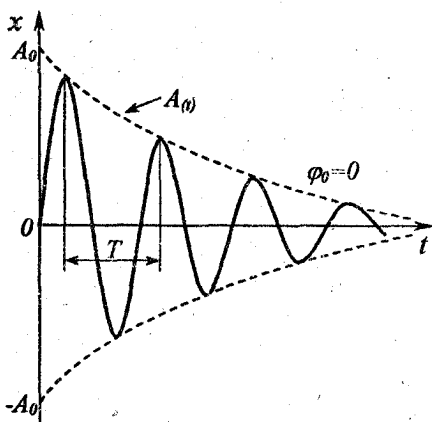


Рис.9.12

На рис.9.12 наведено графік затухаючих коливань (суцільна лінія). Закон зміни амплітуди з часом передають штрихові лінії.

При $\alpha < \omega_0$ знайдемо відношення двох амплітуд коливань в моменти часу, що відрізняються на один період:

$$\frac{A_{(t)}}{A_{(t+\tau)}} = \frac{A_0 e^{-\alpha t}}{A_0 e^{-\alpha(t+\tau)}} = e^{\alpha\tau} \quad (9.46)$$

З (9.46) випливає, що дане відношення є величина стала для всього процесу затухання коливань.

Затухаючі коливання часто характеризують часом релаксації, під яким розуміють проміжок часу τ , протягом якого амплітуда затухаючих коливань зменшується в e разів, тобто

$$\frac{A_{(t)}}{A_{(t+\tau)}} = e^{\alpha\tau} = e.$$

Звідси маємо

$$\alpha\tau = 1 \text{ і } \tau = \frac{1}{\alpha} = \frac{2m}{r} \quad (9.47)$$

Натуральний логарифм відношення (9.46) називається логарифмічним декрементом затухання і дорівнює

$$\delta = \ln \frac{A_{(t)}}{A_{(t+\tau)}} = \alpha\tau = \frac{r}{2m} T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N}, \quad (9.48)$$

де N – число коливань, протягом яких амплітуда зменшується в e разів.

У техніці часто замість логарифмічного декременту використовують величину, яку називають добротністю коливальної системи

$$\theta = \frac{\pi}{\delta} = \frac{\pi}{\alpha T} \quad (9.48)$$

Коливальна система, виведена з положення рівноваги і залишена сама на себе, здійснюватиме вільні затухаючі коливання, які залежать від опору середовища та параметрів системи. Для одержання незатухаючих коливань необхідно поповнювати втрати енергії системи на роботу проти сил опору. Одним із способів підтримання коливань системи є дія на неї зовнішньої сили, яка змінюється з часом за гармонічним законом

$$F = F_0 \cos \alpha t. \quad (9.50)$$

Коливання системи, які здійснюються внаслідок роботи зовнішньої сили (9.50), називаються вимушеними, а силу F – змушуючою. Коли зму-

шуюча сила діє протягом певного часу, то встановлюються гармонічні коливання такої самої частоти, як у змущуючої сили.

Рівняння динаміки вимушених коливань матиме вигляд

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega t. \quad (9.51)$$

Введемо такі позначення, поділивши рівняння (9.51) на масу тіла m :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad \frac{r}{m} = 2\alpha, \quad \frac{F_0}{m} = f_0. \quad (9.52)$$

З врахуванням (9.52) рівняння (9.51) перепишемо так:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t, \quad (9.53)$$

де α – коефіцієнт згущання, ω_0 – циклічна частота вільних коливань.

Як відомо із курсу вищої математики, загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння другого порядку складається із суми розв'язку однорідного рівняння (9.39) і частинного розв'язку неоднорідного рівняння (9.53). Розв'язок рівняння (9.39) характеризує згущаючі коливання, які через деякий час припиняються. Тому знайдемо частинний розв'язок рівняння (9.53). Будемо вважати, що під дією сили (9.50) коливання встановилися і тому розв'язок шукатимемо у вигляді

$$x = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (9.54)$$

де A – амплітуда вимушених коливань, φ – зсув фаз між змущуючою силою і зміщенням. Для визначення величин A і φ знайдемо з (9.54)

$$\frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi), \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi).$$

Підставимо значення x , $\frac{dx}{dt}$ і $\frac{d^2 x}{dt^2}$ в рівняння (9.53):

$$-A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) - 2\alpha A\omega \sin(\omega t + \varphi) + A\omega_0^2 \cos(\omega t + \varphi) = f_0 \cos \omega t. \quad (9.55)$$

Розкладемо косинус і синус за тригонометричними формулами і запишемо рівняння (9.55) так:

$$A[(\omega_0^2 - \omega^2)\cos\varphi - 2\alpha\omega\sin\varphi]\cos\omega t - \\ - A[(\omega_0^2 - \omega^2)\sin\varphi + 2\alpha\omega\cos\varphi]\sin\omega t = f_0\cos\omega t. \quad (9.56)$$

Прирівнюємо коефіцієнти біля $\sin\omega t$ і $\cos\omega t$ у лівій і правій частинах рівняння (9.56):

$$\left. \begin{aligned} A(\omega_0^2 - \omega^2)\cos\varphi - 2\alpha\omega A\sin\varphi &= f_0, \\ A(\omega_0^2 - \omega^2)\sin\varphi + 2\alpha\omega A\cos\varphi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.57)$$

Із рівнянь (9.57) знаходимо:

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}}, \quad (9.58)$$

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{2\alpha\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (9.59)$$

Тепер розв'язок рівняння (9.53) матиме вигляд

$$x = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}} \cos\left(\omega t + \operatorname{arctg}\left(-\frac{2\alpha\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)\right). \quad (9.60)$$

Отже, під дією періодичної змушуючої сили (9.50) виникають гармонічні вимушені коливання (9.60) з тією ж частотою ω . Амплітуда вимушених коливань (9.58) прямо пропорційна амплітуді змушуючої сили, залежить від характеристик коливальної системи m , k і α , а також є функцією частоти коливань змушуючої сили ω .

Графіки залежності A і зсуву фаз φ від ω для декількох значень α наведено на рис.9.13, а і б.

Явище, при якому амплітуда вимушених коливань досягає максимуму, називають резонансом. Частоту зміни змушуючої сили, при якій амплітуда вимушених коливань досягає максимального значення, називають резонансною частотою ω_p . Амплітуда буде максимальною при мінімальному значенні підкореневого виразу у формулі (9.58). Умовою мінімуму є рівність нулю похідної за частотою підкореневого виразу

$$-4(\omega_0^2 - \omega_p^2)\omega_p + 8\alpha^2\omega_p = 0.$$

Звідси маємо, що

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2}. \quad (9.61)$$

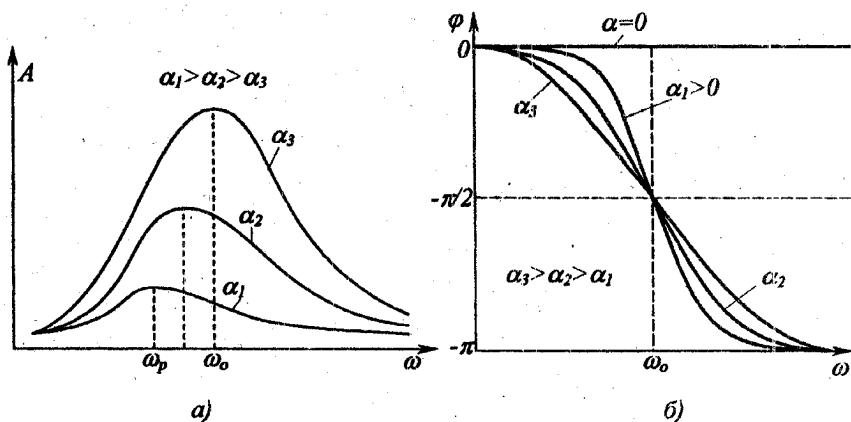


Рис.9.13

Значення амплітуди при резонансі матиме вигляд

$$A = \frac{f_0}{2\alpha\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}. \quad (9.62)$$

Явище резонансу необхідно враховувати під час конструювання різних споруд і машин. Їхня частота вільних коливань повинна суттєво відрізнятися від частоти змушуючих сил. В багатьох випадках явище резонансу відіграє позитивну роль, особливо в радіотехніці та акустиці.

9.5. Поширення хвиль. Рівняння хвилі

Процес поширення коливань у просторі називають хвилею. За своєю природою розрізняють хвилі механічні, електромагнітні тощо. Якщо в пружному середовищі поширюються механічні коливання, то такі хвилі називають пружними або механічними.

Пружна хвиля називається повздовжньою, якщо частинки середови-

ща коливаються в напрямі поширення хвилі.

Повздовжні хвилі зв'язані з об'ємною деформацією середовища і тому можуть поширюватися в будь-якому середовищі – твердому, рідкому і газоподібному. Прикладом таких хвиль є звукові хвилі у повітрі.

Поперечною називається пружна хвиля, якщо частинки середовища коливаються в напрямі, перпендикулярному до напрямку поширення хвилі.

Поперечні хвилі зв'язані з деформацією зсуву, а тому можуть поширюватися тільки в твердих тілах. Прикладом поперечних хвиль можуть служити хвилі, які поширюються вздовж струн музичних інструментів.

Розглянемо хвильовий процес з кількісного боку і дістанемо рівняння хвилі. Рівнянням пружної хвилі називається залежність від координат і часу величин зміщення коливальних частинок середовища при поширенні в ньому хвилі.

Напрямок поширення хвилі називають променем. Геометричне місце точок, в яких фаза коливань має одне і те ж значення, називається хвильовою поверхнею або фронтом хвилі. Хвиля називається плоскою, якщо її хвильові поверхні паралельні одна одній. У плоскій хвилі, що поширюється, наприклад, вздовж осі OX , зміщення коливальних точок хвильових поверхонь залежатимуть тільки від x і t .

Нехай зміщення частинок, що лежать у площині $x = 0$, визначаються рівнянням

$$S = A \sin \omega t. \quad (9.63)$$

Зміщення точок у площині, яка розташована на відстані x від початкової, визначатиметься рівнянням

$$S = A \sin \omega(t - \tau) = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right), \quad (9.64)$$

де $\tau = x/v$ (v – швидкість поширення хвиль).

Оскільки $\omega = 2\pi/T$, то рівняння (9.64) перепишемо так:

$$S = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{v \cdot T} \right) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right), \quad (9.65)$$

де $\lambda = v \cdot T$ – довжина хвилі, тобто відстань, на яку поширюється хвиля за час, рівний періоду коливань. Величину $2\pi/\lambda = \omega/v = k$ називають хви-

льовим числом, яке виражає кількість довжин хвиль, що вміщаються на відрізьку 2π . Якщо ввести хвильове число, то рівняння (9.65) набирає вигляду

$$S = A \sin(\omega t - kx). \quad (9.66)$$

Рівняння хвилі (9.66) ми дістали, вважаючи, що амплітуда коливань у всіх точках однакова, а це можливе при відсутності поглинання середовищем енергії хвилі.

Візьмемо будь-яке фіксоване значення фази рівняння (9.64), тобто

$$\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) = \text{const}$$

і продиференціювавши цей вираз за часом, знайдемо швидкість

$$\frac{dx}{dt} = v. \quad (9.67)$$

З (9.67) видно, що швидкість поширення хвилі у рівнянні (9.64) є швидкістю переміщення фази, а тому її називають фазовою швидкістю.

Хвиля називається сферичною, якщо її хвильові поверхні мають вид концентричних сфер. Такого роду хвилі збуджуються в однорідному ізо-тропному середовищі точковим джерелом. Рівняння сферичної хвилі

$$S = \frac{A}{r} \sin(\omega t - kr), \quad (9.68)$$

де A – амплітуда коливань, яка зменшується обернено пропорційно відстані r від джерела хвиль.

Знайдемо швидкість поширення хвиль у суцільному пружному середовищі. При поширенні повздовжніх хвиль ділянки середовища зазнають періодичного стиску і розтягу, тобто деформуються. При поперечних хвилях в середовищі поширюється періодично коливальна деформація зсуву. Для теоретичного обчислення величини швидкості розглянемо схематично найпростіший випадок передачі деформації через пружний стержень (рис.9.14).

Нехай за проміжок часу Δt ударом молотка надали стержню деякий імпульс. За цей час точки торця стержня змістяться на деяку відстань Δl .

По стержню побіжить хвиля стиску. До кінця проміжку часу Δt всі частин-

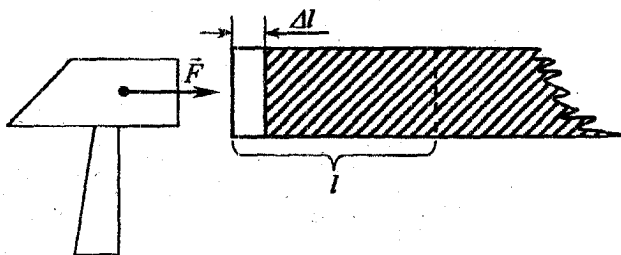


Рис.9.14

ки ділянки стержня довжиною l будуть рухатися зі швидкістю $u = \frac{\Delta l}{\Delta t}$. По-
значимо площу поперечного перерізу стержня через S , а густину матеріалу
– ρ . Приріст імпульсу стержня дорівнює $mu - 0$, де $m = \rho Sl$ – маса ділян-
ки стержня довжиною l . Зміна імпульсу дорівнює імпульсу сили, тобто

$$F \cdot \Delta t = \rho Sl u. \quad (9.69)$$

З іншого боку, сила, що стиснула стержень, зв'язана з деформацією
 Δl стиснутої ділянки l за законом Гука

$$F = E \cdot S \frac{\Delta l}{l}, \quad (9.70)$$

де E – модуль пружності.

Підставивши (9.70) в (9.69), отримаємо:

$$ES \frac{\Delta l}{l} \Delta t = \rho Sl \frac{\Delta l}{\Delta t}$$

, після скорочень,

$$\frac{E}{\rho} = \left(\frac{l}{\Delta t} \right)^2 = v^2, \quad v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (9.71)$$

Швидкість поширення поперечних хвиль визначається через модуль зсуву
 G за формулою:

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (9.72)$$

Швидкість поперечних хвиль в струні, залежить від натягу струни, тобто

$$v = \sqrt{\frac{F}{\rho \cdot S}} \quad (9.73)$$

де F – сила натягу струни; ρ і S – густина матеріалу і площа поперечного перерізу струни.

Вивчаючи швидкість поширення повздовжніх і поперечних хвиль, можна зробити висновок про природу речовин, через які проходять пружні хвилі. На цьому базуються сейсмічні методи геологічної розвідки. Наприклад, від місця землетрусу по земній корі поширюються повздовжні і поперечні хвилі, але модуль зсуву G у твердих тілах приблизно в два рази менший за модуль пружності E . Тому прилади, розміщені на сейсмічній станції, фіксують поштовх на відстані L від станції до землетрусу двічі, через проміжок часу

$$t = \frac{L}{v_{\text{попер.}}} - \frac{L}{v_{\text{повздо.}}} \quad (9.74)$$

Знаючи проміжок часу t , оцінюють відстань L від станції до місця землетрусу або місця підземного атомного вибуху.

У рідинах і газах деформації зсуву непружні. Тому в них поширюються тільки повздовжні хвилі.

Швидкість цих хвиль у рідинах дорівнює

$$v_p = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad (9.75)$$

де K – об'ємний модуль пружності і ρ – густина рідини.

Інша картина спостерігається в газах. Модуль об'ємної пружності K газу залежить від виду термодинамічного процесу його об'ємної деформації:

$$K_{\text{ізом}} = p \text{ і } K_{\text{ад}} = \gamma p,$$

тому швидкість хвиль залежить від частоти. Це явище називається дисперсією хвиль. При малій частоті процес деформації близький до ізотермічного і швидкість хвиль

$$v = v_{\text{іsom}} = \sqrt{\frac{K_{\text{іsom}}}{\rho}} = \sqrt{\frac{RT}{\mu}}, \quad (9.76)$$

а при великій частоті він близький до адіабатичного і швидкість хвиль

$$v = v_{\text{ад}} = \sqrt{\frac{K_{\text{ад}}}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}. \quad (9.77)$$

Досліди показують, що швидкість поширення звуку в газах практично не залежить від частоти і відповідає формулі (9.77).

9.6. Енергія хвилі. Потік енергії

Пружне середовище, в якому поширюються механічні хвилі, має як кінетичну енергію коливального руху частинок, так і потенціальну енергію, зумовлену деформацією.

Виділимо в середовищі, в якому поширюється плоска хвиля, елементарний об'єм ΔV , в межах якого можна вважати сталими величини деформації і швидкості зміщення частинок.

Частинки, що знаходяться в об'ємі, мають кінетичну енергію

$$E_k = \frac{1}{2} \rho \Delta V \left(\frac{dS}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \rho \Delta V A^2 \cos^2(\omega t - kx). \quad (9.78)$$

Потенціальна енергія пружної деформації об'єму ΔV визначатиметься рівнянням

$$E_n = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 \Delta V = \frac{1}{2} E \Delta V k^2 A^2 \cos^2(\omega t - kx). \quad (9.79)$$

Оскільки модуль Юнга $E = \rho v^2$, а $k = \frac{\omega}{v}$, то (9.79) перепишемо так:

$$E_n = \frac{1}{2} \rho \Delta V \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t - kx). \quad (9.80)$$

Отже, кінетична і потенціальна енергія рівні і змінюються в однакових фазах.

Знайдемо повну енергію у виділеному об'ємі середовища ΔV і об'ємну густину енергії:

$$E = E_k + E_n = \rho \Delta V \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t - kx), \quad (9.81)$$

$$w = \frac{E}{\Delta V} = \rho \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t - kx). \quad (9.82)$$

Так як середнє значення квадрата косинуса за період дорівнює $1/2$, то середнє значення густини енергії

$$w_c = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2. \quad (9.83)$$

Енергію, що переноситься хвилею через деяку поверхню площею S у перпендикулярному до неї напрямі за одиницю часу називають потоком

$$\Phi = w_c S v, \quad (9.84)$$

де v – швидкість поширення хвилі.

Для характеристики перенесення енергії в різних точках середовища користуються поняттям густини потоку енергії, під яким розуміють енергію, що переноситься за одиницю часу через одиницю площі поверхні, тобто

$$J_c = w_c v = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 v \quad (9.85)$$

або у векторній формі

$$\vec{J}_c = w_c \vec{v}, \quad (9.86)$$

де $\vec{J}_c$ – вектор Умова (М.О. Умов вивчав питання перенесення енергії хвилями).

9.7. Інтерференція хвиль. Стоячі хвилі

Явище накладання хвиль, при якому відбувається їх взаємне підсилення в одних точках середовища і послаблення в інших в залежності від

співвідношення між фазами цих хвиль, називається інтерференцією хвиль.

Для виникнення інтерференційної картини необхідне виконання таких умов: коливання частинок середовища, що збуджуються інтерферуючими хвилями, повинні відбуватися в однакових напрямках; зсув фаз між коливаннями, зумовленими інтерферуючими хвилями, з часом не змінюється; частоти їхніх коливань повинні бути однаковими. Хвилі, що відповідають цим умовам, називаються когерентними.

Розглянемо інтерференційну картину в точці M , що виникає при накладанні двох хвиль, які поширюються від когерентних джерел O_1 і O_2 (рис.9.15). Зміщення точки середовища, зумовлені хвилями, описуються

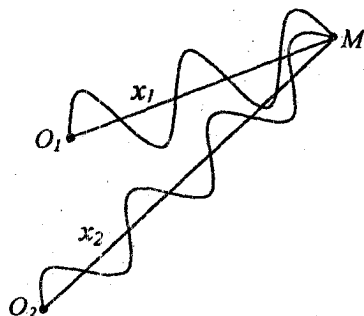


Рис.9.15

рівняннями

$$\begin{aligned} S_1 &= A_1 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi x_1}{\lambda}\right), \\ S_2 &= A_2 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi x_2}{\lambda}\right). \end{aligned} \quad (9.87)$$

При додаванні коливань однакового напрямку амплітуда результуючого коливання дорівнює

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}, \quad (9.88)$$

$$\text{де } \varphi_1 = \frac{2\pi x_1}{\lambda}, \quad \varphi_2 = \frac{2\pi x_2}{\lambda}.$$

Отже,

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = \frac{2\pi d}{\lambda}, \quad (9.89)$$

де величина $d = x_2 - x_1$ — різниця ходу хвиль.

З формули (9.88) випливає, що амплітуда буде максимальною у точці M хвильового поля тоді, коли різниця фаз $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi n$, тобто коли

$$\frac{2\pi d}{\lambda} = 2\pi n \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (9.90)$$

Звідси маємо, що

$$d = n\lambda, \quad (9.91)$$

тобто $A = A_1 + A_2$ тоді, коли різниця ходу хвиль дорівнює нулю або цілому числу довжини хвиль. З (9.88) також видно, що амплітуда коливань буде мінімальною у тих точках хвильового поля, для яких $\varphi_2 - \varphi_1 = (2n + 1)\pi$, тобто коли

$$\frac{2\pi d}{\lambda} = (2n + 1)\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9.92)$$

З (9.92) маємо, що

$$d = (2n + 1)\frac{\lambda}{2}, \quad (9.93)$$

тобто амплітуда результуючих коливань має мінімальне значення $A = |A_1 - A_2|$ тоді, коли різниця ходу хвиль дорівнює непарному числу довжин півхвиль.

В усіх інших точках середовища, для яких різниця ходів хвиль має проміжні значення між $n\lambda$ і $(2n + 1)\frac{\lambda}{2}$, амплітуда результуючих коливань A набуває проміжних значень між $A_1 + A_2$ і $|A_1 - A_2|$.

Враховуючи те, що енергія коливального руху прямо пропорційна квадрату амплітуди коливань, то енергія коливань частинок середовища, для яких виконується умова (9.91), дорівнює

$$E = E_1 + E_2 + 2\sqrt{E_1 E_2}. \quad (9.94)$$

Енергія коливального руху частинок середовища, для яких виконується умова (9.93), визначається співвідношенням

$$E = E_1 + E_2 - 2\sqrt{E_1 E_2}. \quad (9.95)$$

З формул (9.94) і (9.95) випливає, що при інтерференції хвиль відбувається тільки перерозподіл енергії і немає відхилень від закону збереження енергії.

Окремим випадком інтерференції є **стоячі хвилі**. Стоячою хвилею називається хвиля, що утворюється при накладанні двох зустрічних синусоїдальних хвиль з однаковими амплітудами і частотами. Розглянемо інтерференцію падаючої і відбитої хвиль, які поширюються у середовищі без затухання і визначаються рівняннями

$$S_1 = A_0 \sin(\omega t - kx), \quad S_2 = A_0 \sin(\omega t + kx). \quad (9.96)$$

При накладанні двох когерентних хвиль утворюється **стояча хвиля**

$$S = S_1 + S_2 = 2A_0 \cos kx \sin \omega t, \quad (9.97)$$

де амплітуда коливання точок стоячої хвилі

$$A = 2A_0 \cos kx = 2A_0 \cos \frac{2\pi x}{\lambda}, \quad (9.98)$$

яка є періодичною функцією координати x .

Точки, в яких амплітуда стоячої хвилі дорівнює нулю, називаються **вузлами**, а точки, в яких амплітуда максимальна ($A = 2A_0$), називаються **пучностями** стоячої хвилі.

Координати вузлів і пучностей визначаємо з умов:

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = (2n+1)\frac{\pi}{2}, \quad x_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}; \quad (9.99)$$

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \pi n, \quad x_n = n\frac{\lambda}{2}; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9.100)$$

Відстань між сусіднім вузлом і пучністю

$$x_n - x_{n-1} = \frac{\lambda}{4}. \quad (9.101)$$

У стоячій хвилі всі точки між двома вузлами коливаються з різними амплітудами, але з однаковими фазами, оскільки аргумент синуса у рівнянні (9.97) не залежить від координати x .

На відміну від біжучої хвилі у стоячій хвилі не відбувається перенесення енергії. Це зумовлюється тим, що падаюча і відбита хвилі мають однакові амплітуди, а тому переносять однакову енергію у протилежних напрямках. Повна енергія стоячої хвилі з часом не змінюється; відбувається тільки перехід кінетичної енергії в потенціальну і навпаки. Саме через це стоячі хвилі і одержали свою назву.

9.8. Елементи акустики

Розділ фізики, в якому вивчаються звукові хвилі, називають акустикою. До звукових хвиль належать пружні хвилі, частоти яких знаходяться у межах від 16 до 20000 Гц, тобто у межах сприймання органами слуху людини. Пружні хвилі, частота яких менша від 16 Гц, називають інфразвуковими, а пружні хвилі, частота яких знаходиться в інтервалі від 20000 до 10^9 Гц, – ультразвуком. Звук як фізичне явище характеризується об'єктивними характеристиками – частотою і інтенсивністю, та суб'єктивними характеристиками – чутністю, висотою звуку і тембром звуку. Інтенсивність або сила звуку – це енергія, що переноситься через одиницю площі поверхні у перпендикулярному до неї напрямі за одиницю часу. Отже, інтенсивність звуку (I) – це густина потоку енергії. Густина потоку енергії визначається формулою (9.85)

$$I = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 v$$

Перенесення енергії при поширенні звукових хвиль в середовищі супроводжується відповідними змінами тиску

$$\Delta p = \rho A \omega v \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right), \quad (9.102)$$

де величину $\Delta p_0 = \rho A \omega v$ називають амплітудою звукового тиску. З врахуванням Δp_0 вираз для обчислення інтенсивності звуку набирає вигляду

$$I = \frac{(\Delta p_0)^2}{2\rho v}, \quad (9.103)$$

тобто інтенсивність звуку прямо пропорційна квадрату амплітуди звукового тиску та обернено пропорційна добутку густини середовища і швидкості поширення хвиль.

Фізичному поняттю сили звуку відповідає фізіологічне поняття – гучність звуку. Людське вухо сприймає звуки, сила яких перевищує деяке мінімальне значення I_0 , різне для різних частот

$$I_0 = f(\nu). \quad (9.104)$$

Величина I_0 називається порогом чутності звуку і для середніх частот $\nu \approx 10^3$ Гц, що найкраще сприймаються вухом, дорівнює 10^{-12} Вт/м². Оскільки вухо сприймає приріст гучності при збільшенні сили звуку не менше, ніж на 10-20%, то для характеристики сили звуку беруть величину, яка називається рівнем сили звуку

$$\beta = \lg \frac{I}{I_0} \quad (9.105)$$

і вимірюється в белах (Б).

Із (9.105) випливає, що рівень сили звуку в 1 Б відповідає силі звуку $I = 10I_0$. Поряд з цією одиницею користуються в 10 раз меншою одиницею, яка називається децибелом (дБ):

$$\beta = 10 \lg \frac{I}{I_0} \text{ дБ}. \quad (9.106)$$

Висота звуку визначається його частотою. Висота звуку збільшується із збільшенням частоти. Органи слуху людини дуже чутливі до зміни частоти. В інтервалі частот від 1,5 кГц до 2,0 кГц людина здатна розрізняти два тони, частоти яких відрізняються на 3-7 Гц.

Тембр звуку – це відтінок складного звуку, яким відрізняються один від одного звуки однакової висоти і інтенсивності. Тембр звуку визначається спектром частот простих коливань, які входять до складу звуку. Для спектрального аналізу звуку його необхідно розкласти на гармонічні складові (користуються резонаторами Гельмгольца).

Швидкість поширення звуку в різних середовищах різна. Обчислення швидкості поширення звуку можна проводити за співвідношеннями, що їх дістали у параграфі (9.6).

Тіла, що коливаються у пружному середовищі із звуковою частотою, називаються джерелами звуку. Якщо розміри джерела малі в порівнянні з довжиною хвилі, то від нього поширюється в усі сторони сферична звукова хвиля. Якщо ж розміри джерела великі в порівнянні з довжиною хвилі, то внаслідок інтерференції і дифракції (огинання звуком перешкод) воно випромінює напрямлену звукову хвилю. В повітрі при $v = 331$ м/с і $\nu_{\min} = 16$ Гц довжина хвилі $\lambda_{\max} = 20,7$ м. При $\nu_{\max} = 20000$ Гц довжина звукової хвилі в повітрі дорівнює 16,5 мм. Тому для одержання напрямленого звукового пучка на звичайних мовних частотах (300–2000 Гц) використовуються рупори діаметром порядку 1 м. Для одержання напрямлених ультразвукових пучків ($\lambda_{\nu} < 0,0165$ м) використовуються випромінювальні пластинки діаметром в декілька сантиметрів.

При зустрічі звукових хвиль з перешкодами великих розмірів спостерігається їх відбивання і повернення назад (ехо). В гірській місцевості завдяки багатократному відбиванню звуку спостерігається довгочасне ехо (до 5–10 с).

В процесі поширення звукових хвиль у пружному середовищі відбувається їх затухання. При коливальних рухах частинок середовища між ними виникають сили внутрішнього тертя і за рахунок роботи останніх частина звукової енергії перетворюється у внутрішню. Крім цього, у звуковій хвилі в кожний даний момент по сусідству знаходяться розігріті області стиску і охолоджені області розрідження. Внаслідок теплопровідності середовища різниця температур між ними вирівнюється, що зменшує максимальний тиск і максимальне розрідження, тобто амплітуду звукової хвилі, а це пов'язано із зменшенням енергії коливань. Отже, внутрішнє тертя і теплопровідність середовища приводять до поглинання звукової енергії і зменшення інтенсивності звукової хвилі.

Зміна сили (інтенсивності) звуку з відстанню описується законом

$$I = I_0 e^{-\alpha x}, \quad (9.107)$$

де I_0 – початкова сила звуку, що входить в середовище; I – сила звуку, що

пройшов у середовищі шлях x . Величина коефіцієнта поглинання α приблизно прямо пропорційна квадрату частоти звуку, тому звуки малої частоти (низькі) поширюються далі, ніж високі. Наприклад, при частоті 1 МГц ультразвук поширюється в повітрі на 5 см. Коефіцієнт поглинання ультразвуку у воді приблизно в 1000 разів менший, ніж у повітрі. Ця обставина дозволяє здійснювати зв'язок і гідролокацію у воді на ультразвукових частотах. За допомогою імпульсних ультразвукових ехолотів визначають глибину моря під кораблем, виявляють косяки риб. Ультразвукові хвилі проникають у непрозорих твердих тілах на глибину понад 10 м. Таку властивість покладено в основу роботи ультразвукових дефектоскопів, дія яких ґрунтується на ехометоді і тіньовому методі. Методи ультразвукової дефектоскопії застосовуються для діагностики деяких захворювань. Ультразвуки великої амплітуди застосовують для механічної обробки твердих матеріалів. Останнім часом за допомогою ультразвукових методів вивчають особливості молекулярної структури речовини, визначають енергію взаємодії молекул, вивчають взаємодію звукових квантів з електронами і ядрами атомів.

Коливання з частотами нижче 16 Гц (інфразвуки) слабо поглинаються в різних середовищах, а тому поширюються у воді, повітрі та земній корі на великі відстані. Це явище застосовують для визначення місць сильних вибухів, епіцентрів землетрусів, передбачення цунамі. Приймають інфразвукові хвилі спеціальними гідрофонами, мікрофонами та вібраторами.

Досліди показують, що при русі джерела звуку у повітрі з швидкістю, яка менша від швидкості звуку, збуджені джерелом хвилі поширюються з швидкістю практично рівною швидкості звуку при атмосферному тиску. Зовсім іншим є характер поширення звуку у повітрі від джерела, що рухається з надзвуковою швидкістю. При такому русі джерела звуку відбувається його зіткнення з частинками повітря, які також починають рухатися і внаслідок цього поблизу джерела звуку виникають імпульси стиску, що поширюються в усіх напрямках із швидкістю звуку у вигляді сферичних хвиль. В своїй сукупності вони утворюють у просторі конічну поверхню, у вершині якої знаходиться джерело звуку. За конічною поверхнею збуджень середовища немає і така поверхня виступає як ударна хвиля. В ударній хвилі (рухомій разом з джерелом звуку поверхні) відбуваються стрибкоподібні зміни тиску, температури, густини і швидкості руху частинок середовища.

Ударні хвилі виникають при вибухах, сильній грозі, детонаціях тощо. При русі тіл у середовищах з надзвуковими швидкостями, на створення ударних хвиль витрачається частково їх кінетична енергія. Отже, швидкість руху тіла зменшується, тобто на тіло діє сила опору, яка залежить від його форми (ракети, реактивні літаки, снаряди та ін. виготовляють гостролобими з малим поперечним перерізом).

Цікавою з практичної сторони є картина, коли джерело звуку і приймач звуку перебувають у русі відносно середовища, в якому поширюються звукові хвилі. Наприклад, при наближенні до нерухомого спостерігача рухомого поїзда тон звукового сигналу вищий, а при віддаленні поїзда – нижчий тону сигналу, що подається тим же поїздом, коли він стоїть на станції. Зміна частоти звуку, що сприймається при відносному русі джерела і приймача звуку, називається ефектом Доплера. Розглянемо спочатку випадок, коли приймач Π звукових хвиль в повітрі нерухомий відносно нього, а джерело D віддаляється від приймача зі швидкістю $\vec{v}_1$ вздовж лінії, що їх з'єднує (рис.9.16,а). Джерело зміщується в середовищі за час T_0 його коливань, на відстань $v_1 T_0 = v_1 / v_0$, де v_0 – частота коливань джерела звуку. Тому

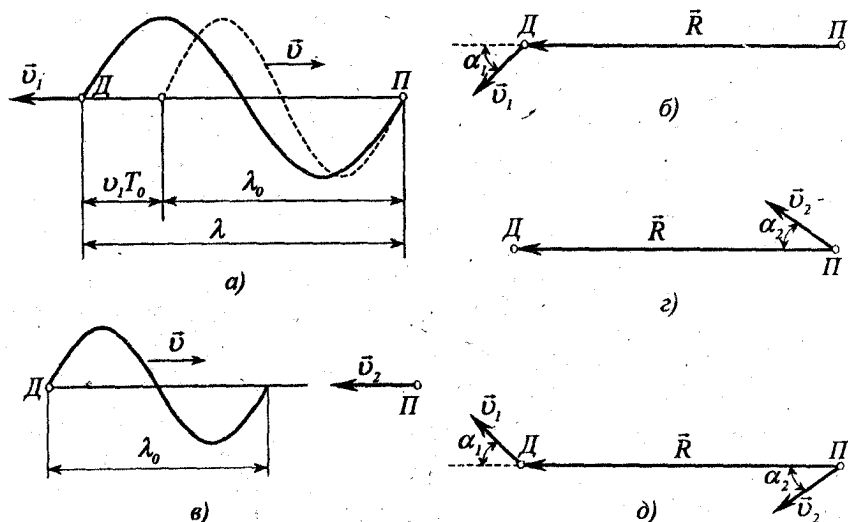


Рис.9.16

при русі джерела довжина хвилі в середовищі λ відрізняється від її значення λ_0 при нерухомому джерелі:

$$\lambda = \lambda_0 + v_1 T_0 = (v + v_1) T_0 = \frac{v + v_1}{v_0},$$

де v — фазова швидкість хвилі в середовищі. Частота хвилі, яку реєструє приймач,

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{v_0}{1 + \frac{v_1}{v}}. \quad (9.108)$$

Якщо вектор $\vec{v}_1$ швидкості джерела напрямлений під довільним кутом α_1 до радіуса-вектора $\vec{R}$, що з'єднує нерухомий приймач з джерелом звуку (рис.9.16,б), то

$$\nu = \frac{v_0}{1 + \frac{v_1}{v} \cos \alpha_1}. \quad (9.109)$$

Якщо джерело нерухоме, а приймач рухається до джерела зі швидкістю $\vec{v}_2$ вздовж прямої, що їх з'єднує (рис.9.16,в), то довжина хвилі в середовищі буде $\lambda = \lambda_0 = v/v_0$. Але швидкість поширення хвилі відносно приймача дорівнює $v + v_2$, тому частота хвилі, що реєструє приймач,

$$\nu = \frac{v + v_2}{\lambda_0} = \frac{v_0}{1 + \frac{v_2}{v}}. \quad (9.110)$$

У випадку, коли швидкість $\vec{v}_2$ напрямлена під довільним кутом α_2 до радіуса-вектора $\vec{R}$, що з'єднує рухомий приймач з нерухомим джерелом (рис.9.16,г),

$$\nu = \frac{v_0}{\left(1 + \frac{v_2}{v} \cos \alpha_2\right)}. \quad (9.111)$$

Якщо джерело і приймач рухатимуться одночасно, то довжина хвилі і швидкість поширення їх відносно приймача звуку змінюватимуться. При

цьому частота, яку реєструє приймач,

$$\nu = \nu_0 \frac{1 + \frac{v_2}{v} \cos \alpha_2}{1 + \frac{v_1}{v} \cos \alpha_1}.$$

Зауважимо, що ефект Доплера спостерігається і для електромагнітних хвиль.

Ряд спеціальних питань, пов'язаних з особливостями генерування і сприймання звуку, його технічним застосуванням зумовили в даний час розвиток прикладної акустики, яка поділяється на фізіологічну, архітектурну і гідроакустику.

Контрольні запитання

1. Які коливання називаються гармонічними? Запишіть рівняння гармонічних коливань.
2. Що називають математичним маятником?
3. Що називають фізичним маятником?
4. Запишіть формули для обчислення періодів коливань математичного і фізичного маятників.
5. Що називають зведеною довжиною фізичного маятника?
6. Дайте означення та запишіть рівняння затухаючих коливань.
7. Який зв'язок між добротністю коливальної системи і її логарифмічним декрементом затухання?
8. Дайте означення та запишіть рівняння вимушених коливань.
9. Яке явище називають резонансом?
10. Що називають хвилею? Запишіть рівняння плоскої хвилі.
11. Що називають вектором Умова? Запишіть формулу для його обчислення.
12. Яке явище називають інтерференцією хвиль?
13. В чому полягає відмінність між біжучою і стоячою хвилями?
14. Запишіть формули для обчислення координат вузлів і пучностей стоячої хвилі.
15. Яка природа звуку? Які пружні хвилі називають ультразвуком, а

які – інфразвуком?

16. Що називають силою звуку? Запишіть закон зміни сили звуку при поширенні в середовищі.

17. Назвіть приклади застосування ультразвуку та інфразвуку.

18. В чому полягає ефект Доплера в акустиці?

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Матеріальна точка здійснює гармонічні коливання з частотою $\nu = 500$ Гц і амплітудою $A = 2 \cdot 10^{-8}$ м. Визначити середні значення швидкості $\bar{v}$ і прискорення $\bar{a}$ точки на шляху від її крайнього положення до положення рівноваги, а також знайти максимальні значення цих величин: $v_{\text{макс}}$ і $a_{\text{макс}}$.

Розв'язання. За означенням середньої швидкості маємо

$$\bar{v} = \frac{\Delta S}{\Delta t}, \quad (1)$$

де ΔS – шлях, пройдений за час Δt . В даному випадку $\Delta S = A$; $\Delta t = T/4$, так як за період T коливальна точка проходить шлях, що дорівнює чотирьом амплітудам. Підставивши ці значення ΔS і Δt в (1) і врахувавши, що $T = \frac{1}{\nu}$, дістанемо

$$\bar{v} = \frac{4A}{T} = 4A\nu. \quad (2)$$

За формулою (9.6), при $\sin(\omega t + \phi_0) = 1$, знайдемо максимальну швидкість:

$$v_{\text{макс}} = \omega A = 2\pi\nu A. \quad (3)$$

Згідно означення середнього прискорення, запишемо

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad (4)$$

де $\Delta v = v - v_0$. В даному випадку $v_0 = 0$, а кінцева швидкість $v = v_{\text{макс}} = \omega A$.

Тоді

$$\bar{a} = \frac{4\omega A}{T} = 8\pi\nu^2 A. \quad (5)$$

За формулою (9.7), при $\cos(\omega t + \varphi_0) = 1$, знайдемо максимальне прискорення:

$$a_{\text{макс}} = \omega^2 A = 4\pi^2 \nu^2 A. \quad (6)$$

Підставивши у формули (2), (3), (5), (6) числові значення величин і виконавши обчислення, дістанемо:

$$\bar{U} = 0,4 \text{ м/с}, \quad v_{\text{макс}} = 0,63 \text{ м/с}, \quad \bar{a} = 1,2 \cdot 10^3 \text{ м/с}^2, \quad a_{\text{макс}} = 2 \cdot 10^3 \text{ м/с}^2.$$

Зауваження. У даній задачі для знаходження $\bar{U}$ і $\bar{a}$ не можна користуватися методом середнього арифметичного, оскільки швидкість і прискорення при гармонічному коливанні не являються лінійними функціями часу.

Приклад 2. Матеріальна точка бере участь у трьох коливаннях, що відбуваються по одній прямій і описуються рівняннями:

$$x_1 = 3 \cos t, \quad (1)$$

$$x_2 = 3 \cos \left(t + \frac{\pi}{3} \right), \quad (2)$$

$$x_3 = 3 \sin \left(t + \frac{7\pi}{6} \right) \quad (3)$$

(зміщення дані в сантиметрах). Знайти амплітуду і початкову фазу результуючого коливання. Записати його рівняння.

Розв'язання. Точка бере участь у трьох гармонічних коливаннях, оскільки зміщення x_1, x_2, x_3 являються косинусоїдальними (синусоїдальними) функціями часу. Результуюче коливання точки також буде гармонічним. Його амплітуду і початкову фазу можна знайти за формулами (9.28) і (9.29), але для цього рівняння (3) перепишемо так:

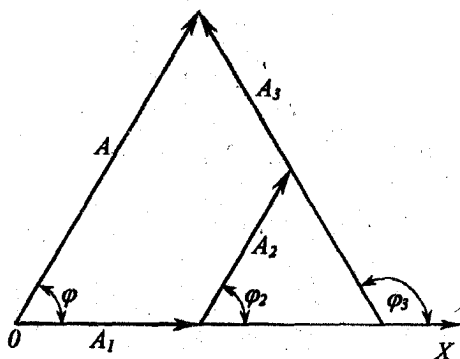
$$x_3 = 3 \cos \left(t + \frac{2\pi}{3} \right). \quad (4)$$

Порівнявши (1), (2), (4) із загальним рівнянням гармонічних коливань, бачимо, що дані коливання характеризуються такими величинами: амплітуди $A_1 = A_2 = A_3 = 3 \text{ см}$; циклічні частоти $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 1 \text{ рад/с}$; початкові фази $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \pi/3, \varphi_3 = 2\pi/3$.

З допомогою формул (9.28) і (9.29) можна спочатку додати будь-які два із трьох заданих коливань, а після, застосувавши ці ж формули, знайти амплітуду A і початкову фазу φ результуючого коливання.

До цього ж результату прийдемо швидше, застосувавши метод век-

торних діаграм. На рисунку побудована векторна діаграма за даними задачі.



Із рисунка отримуємо: $\varphi = \pi/3$, $A = 2A_1$, тобто $A = 6$ см. Тепер запишемо рівняння результуючого коливання:

$$A = 6 \cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right).$$

Приклад 3. До стелі ліфта підвішено математичний маятник, довжина якого l . З яким прискоренням опускається ліфт, якщо маятник за час t здійснює n повних коливань? З яким прискоренням і в якому напрямі повинен рухатись ліфт, щоб число коливань зросло в 1,41 разів в порівнянні з коливаннями маятника в нерухомому ліфті?

Розв'язання. Період коливань маятника в рухомому ліфті залежить не тільки від прискорення вільного падіння, а і від прискорення руху ліфта. Дійсно, коли ліфт рухається прискорено, то $\vec{F} = m(\vec{g} + \vec{a})$.

Гармонічні коливання маятника здійснюються під дією сили $F = -kx$, де $k = m\omega^2$ – коефіцієнт квазіпружності, x – зміщення. З другої сторони, $F = F_n \cdot \sin \alpha = F_n \frac{x}{l}$. Тому $m\omega^2 x = F_n \frac{x}{l}$, звідки $\omega^2 = \frac{g \pm a}{l}$, але $\omega = \frac{2\pi}{T}$, отже,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g \pm a}}.$$

Так як період коливань $T = t/n$, то спільним розв'язанням двох останніх рівнянь знайдемо a . Для руху ліфта з прискоренням, напрямленим проти g ,

$$a = \frac{t^2 g - 4\pi^2 l n^2}{t^2}.$$

Для руху ліфта з прискоренням, що співпадає за напрямом з прискоренням сили тяжіння,

$$a = \frac{4\pi^2 l n^2 - t^2 g}{t^2}.$$

Для того, щоб за один і той же час маятник виконав в 1,41 разів більше коливань, потрібно, щоб період зменшився в $\sqrt{2}$ разів:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{l}{g \pm a}}} = \frac{\sqrt{g \pm a}}{\sqrt{g}} = \sqrt{2}.$$

Це можливо тільки в тому випадку, якщо $a = g$ і напрямлене проти g , тобто при прискореному підніманні або сповільненому опусканні з прискоренням вільного падіння. Якщо ліфт опускається прискорено з прискоренням g , то $T = \infty$, тобто маятник в стані спокою, оскільки знаходиться в стані невагомості. Рух ліфта з постійною швидкістю не змінить періоду при будь-якій швидкості руху.

Приклад 4. Зміщення від положення рівноваги точки, яка знаходиться на відстані 4 см від джерела коливань, через проміжок часу $T/6$ дорівнює половині амплітуди. Знайти довжину хвилі.

Розв'язання. Перетворимо рівняння хвилі $y = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right)$, враховуючи, що $\omega = 2\pi/T$ і $\lambda = vT$:

$$y = A \sin \left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{2\pi x}{\lambda} \right).$$

Тоді

$$\frac{A}{2} = A \sin \left(\frac{2\pi T}{6T} - \frac{2\pi \cdot 0,04}{\lambda} \right)$$

або

$$\frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{0,08\pi}{\lambda}\right).$$

звідки видно, що аргумент синуса дорівнює $\pi/6$ рад, тобто

$$\frac{\pi}{3} - \frac{0,08\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{6}.$$

Отже, $\lambda = 0,48$ м.

Приклад 5. Хвилі поширюються із швидкістю 1450 м/с при частоті коливань 580 Гц. Визначити, в яких фазах перебувають точки, відстань між якими 10 м; 1,25 м; 3,125 м.

Розв'язання. Довжина хвилі $\lambda = \frac{v}{\nu}$; $\lambda = \frac{1450 \text{ м/с}}{580 \text{ с}^{-1}} = 2,5 \text{ м}$.

Обчислюємо, скільки разів довжина хвилі вміщується в 10 м:

$$\frac{10 \text{ м}}{\lambda} = 4; \text{ отже, точки перебувають в однакових фазах.}$$

Скільки разів довжина хвилі вміщується в 1,25 м?

$$\frac{1,25 \text{ м}}{\lambda} = \frac{1}{2}; \text{ точки перебувають у протилежних фазах.}$$

Скільки разів довжина хвилі вміщується в 3,125 м?

$$\frac{3,125 \text{ м}}{\lambda} = \frac{5}{4} \text{ (зсув фаз на } \frac{1}{4} \text{ періоду, тобто } \frac{\pi}{2} \text{).}$$

Приклад 6. Від джерела, розміщеного біля поверхні Землі, поширюються звукові хвилі. Через який проміжок часу вони досягнуть висоти $h = 10,0$ км, якщо температура повітря біля поверхні Землі $t_0 = 16^\circ\text{C}$, а градієнт температури в атмосфері $\Delta T/\Delta h = -7,0 \cdot 10^{-3} \text{ К/м}$?

Розв'язання. Щоб знайти час поширення хвилі, знаючи її переміщення h , вивчимо, яка швидкість звуку у вертикальному напрямі. Швидкість звуку в повітрі визначається за формулою (9.77) $v = \sqrt{\gamma p / \rho}$, де $\gamma = 1,4$. Покажемо, що швидкість звуку залежить від температури повітря. Дійсно, так як $\rho = m/V$, то, застосувавши рівняння стану газу, дістанемо

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}. \quad (1)$$

Згідно умови задачі температура повітря залежить від висоти. Дану залежність можна записати так:

$$T = T_0 + ah, \quad (2)$$

де T – температура на висоті h ; $a = \frac{\Delta T}{\Delta h}$ – градієнт температури. Тепер (1)

з врахуванням (2) перепишемо

$$v = \sqrt{\gamma R(T_0 + ah)/\mu}. \quad (3)$$

Отже, швидкість звуку залежить від висоти. Щоб знайти шуканий час, будемо розглядати поширення звукової хвилі як змінне, тобто швидкість звуку в будь-який момент часу дорівнює $v = dh/dt$, звідки з врахуванням формули (3)

$$dt = \frac{dh}{\sqrt{\gamma R(T_0 + ah)/\mu}}.$$

При зміні часу від 0 до t висота змінюється від 0 до h . Отже,

$$\int_0^t dt = \sqrt{\frac{\mu}{\gamma R}} \int_0^h \frac{dh}{\sqrt{T_0 + ah}},$$

звідки

$$t = \frac{2}{a} \sqrt{\frac{\mu}{\gamma R}} (\sqrt{T_0 + ah} - \sqrt{T_0}).$$

Підставимо у формулу числові значення величин:

$h = 10,0 \cdot 10^3$ м, $T_0 = 289$ К, $a = -7,0 \cdot 10^{-3}$ К/м, $\mu = 0,029$ кг/моль, $R = 8,3$ Дж/(моль · К), $\gamma = 1,4$. Виконавши обчислення, дістанемо

$$t = 30 \text{ с.}$$

Задачі для самостійних вправ

1. Рівняння гармонічного коливання: $x = 4 \sin 30\pi t$ (м), де час виражений у секундах. Знайти зміщення і фазу коливання через 0,01 с, рахуючи від початку періоду.

Відповідь: $3,2 \cdot 10^{-2}$ м; $0,3\pi$.

2. Рівняння руху матеріальної точки масою $5 \cdot 10^{-3}$ кг має вигляд $x = 4 \sin(2\pi t/8 + 2)$ см. Визначити амплітуду коливань, циклічну частоту, період коливань, початкову фазу, максимальну швидкість, максимальне прискорення і повну енергію коливної точки.

Відповідь: 4 см; $\pi/4$ с⁻¹; 8с; 2 рад; 3,14 см/с; -2,5 см/с²; 250 мДж.

3. Матеріальна точка масою 0,01 кг здійснює гармонічні коливання за

законом косинуса з періодом 2с і початковою фазою, яка дорівнює нулю. Повна енергія коливної точки становить $1,0 \cdot 10^{-4}$ Дж. Знайти: амплітуду коливань; максимальне значення сили, що діє на точку; написати рівняння даного гармонічного коливання точки.

Відповідь: $0,045 \text{ м}$; $-4,44 \cdot 10^{-3} \text{ Н}$; $x = 0,045 \cos \pi t$.

4. Визначити, на яку висоту підніметься куля, підвішена на нитці, якщо швидкість її руху в момент проходження стану стійкої рівноваги дорівнює $1,4 \text{ м/с}$.

Відповідь: $0,1 \text{ м}$.

5. Додаються два гармонічні коливання одного напрямку з однаковими періодами $T_1 = T_2 = 1,5\text{с}$ і амплітудами $A_1 = A_2 = 0,02 \text{ м}$. Початкові фази коливань $\varphi_1 = \pi/2$ і $\varphi_2 = \pi/3$. Визначити амплітуду і початкову фазу результуючого коливання і написати його рівняння. Побудувати векторну діаграму додавання амплітуд.

Відповідь: $3,86 \text{ см}$; $5\pi/12$; $x = 0,0386 \sin\left(\frac{4\pi}{3}t + \frac{5\pi}{12}\right) \text{ м}$.

6. Кулька масою $0,1 \text{ кг}$ коливається за рівнянням $x = 10 \sin 2\pi t$. Знайти максимальне значення повертаючої сили і повну енергію кульки.

Відповідь: $0,4 \text{ Н}$; $0,02 \text{ Дж}$.

7. Знайти масу вантажу, який на пружині з жорсткістю 250 Н/м робить 20 коливань за 16 секунд. Визначити також кінетичну і потенціальну енергію коливальної системи в момент $0,1 T$, якщо період коливань $T = 8\text{с}$.

Відповідь: 4 кг ; $0,51 \text{ Дж}$; $0,26 \text{ Дж}$.

8. Який буде результат інтерференції в точці, віддалі від якої до одного вібратора більша, ніж до другого, на 30 см , 120 см , 150 см ? Довжина хвилі $\lambda = 0,6 \text{ м}$.

Відповідь: $\min$; $\max$; $\min$.

9. В незатухаючій біжучій хвилі задана точка M знаходиться від джерела коливань на відстані $\lambda/12$ в напрямку поширення хвилі. Амплітуда коливань $A = 0,05 \text{ м}$. Вважаючи в початковий момент часу зміщення точки P , що знаходиться в джерелі, максимальним, визначити зміщення від положення рівноваги точки M для моменту $T/6$, а також різницю фаз точок M і P .

Відповідь: $\approx 0,044 \text{ м}$; $\approx -\pi/6$.

10. Визначити відстань між двома найближчими точками, що перебувають в однакових фазах, якщо хвилі поширюються з швидкістю 330 м/с, а частота коливань дорівнює 256 Гц.

Відповідь: $\approx 1,3$ м.

11. Яка відстань між вузлами стоячої хвилі, якщо швидкість звуку 342 м/с, а частота коливань 440 Гц?

Відповідь: 0,39 м.

12. Швидкість поширення хвилі вздовж струни визначається за формулою $v = \sqrt{F/\rho_l}$, де F – сила натягу струни, ρ_l – лінійна густина (маса одиниці довжини) струни. Визначити силу натягу, при якій основним тоном сталеної струни діаметром 0,5 мм і довжиною 0,5 м буде *ля* першої октави ($\nu = 440$ Гц). Густина сталі дорівнює 7800 кг/м^3 .

Відповідь: 300 Н.

13. В якому газі при однаковій температурі швидкість звуку більша – в азоті (N_2) чи у вуглекислому газі (CO_2)? В скільки разів? Коливальні ступені вільності молекул газів не збуджуються.

Відповідь: В азоті швидкість більша в 1,3 рази.

14. Вздовж осі X в повітрі поширюється плоска звукова хвиля. Коефіцієнт поглинання звуку $2,07 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1}$. У площині $x = 0$ рівень сили звуку 100 дБ. Знайти рівень сили звуку для x , рівних: 2 км; 4 км; 6 км; 8 км; 10 км.

Відповідь: 82 дБ; 64 дБ; 46 дБ; 28 дБ; 10 дБ.

15. По прямому шосе їде зі швидкістю 60 км/год легковий автомобіль. Його доганяє автомобіль швидкої допомоги, рухаючись зі швидкістю 90 км/год, із включеним звуковим сигналом, частота якого становить 1 кГц. Сигнал якої частоти будуть чути пасажери легкового автомобіля? Швидкість звуку в повітрі 340 м/с.

Відповідь: 1,03 кГц.

16. Довжина ультразвукової хвилі в повітрі при частоті 10^8 Гц становить $30 \cdot 10^{-5}$ м. Яка довжина ультразвукової хвилі відповідає найбільшій частоті ультразвуку – $2 \cdot 10^9$ Гц, якої тепер досягнуто?

Відповідь: $15 \cdot 10^{-6}$ м.

Молекулярна фізика і термодинаміка

ВСТУП

Молекулярна фізика вивчає фізичні властивості речовини, зумовлені її молекулярною будовою, характером руху молекул і силами, що діють між ними. Тому вона нерозривно пов'язана з теорією будови речовини. В основі молекулярної фізики лежить підтверджена дослідним шляхом молекулярно-кінетична теорія будови речовини. Згідно з цією теорією всі тіла складаються із величезної кількості найдрібніших частинок – молекул і атомів, які перебувають у безперервному хаотичному (тепловому) русі і які взаємодіють одна з одною.

Що всі тіла складаються з дрібненьких частинок – атомів, відомо давно. Ще знамениті мислителі Стародавньої Греції – Левкіпп і Демокріт (V ст. до н.е.) – були переконані, що всі речовини побудовані з атомів. Проте це були тільки здогади, які перетворились у справжню фізичну теорію у XVIII ст. До цього часу належать праці М.В. Ломоносова, якими він заклав основи сучасної молекулярно-кінетичної теорії. Розвинута Ломоносовим молекулярно-кінетична теорія міцно утвердилася в науці тільки в середині XIX ст. завдяки працям Р. Клаузіуса, Д. Джоуля, пізніше Д.Максвелла, Л. Больцмана та ін.

Безпосереднім дослідним підтвердженням справедливості молекулярно-кінетичної теорії є: броунівський рух, процес дифузії та багато інших явищ. Сучасна наука має в своєму арсеналі засоби, що підтверджують реальність атомів і молекул. Наприклад, американські фізики Рітц і Бартел з допомогою електронного мікроскопа дістали фотографії окремих атомів (неону, аргону) при збільшенні в 500 мільйонів разів.

В 1860 році на з'їзді хіміків було прийнято такі означення молекули і

атома: молекула – це найменша частинка речовини, яка зберігає її властивості. В природі зустрічається багато різних речовин, а значить і молекул. Молекули складаються із атомів. Наприклад, молекула води складається з одного атома кисню і двох атомів водню. Атом – це найменша частинка хімічного елемента, яка володіє його хімічними властивостями. В природі зустрічається всього 88 видів атомів, а 20 за останні роки були одержані штучним шляхом.

У механіці при вивченні рухів тіл не розглядаються питання будови та властивостей цих тіл. Знаючи їх координати і швидкості у деякий момент часу, можна знайти положення і швидкості тіл у наступні моменти часу. Такий динамічний метод зовсім непридатний для опису системи, що складається з величезної сукупності структурних одиниць. Це зумовлено не тільки технічною складністю, а й відсутністю теоретичного і практичного значення, оскільки величезне скупчення молекул має нові якості, які не має жодна молекула окремо. Ці якості можна описати, якщо при дослідженні фізичних властивостей речовини користуватися статистичним та термодинамічним методами дослідження.

Статистичний метод є мікроскопічний. У ньому безпосередньо розглядається молекулярна будова тіл і закономірності зумовлених нею мікроскопічних процесів. Він ґрунтується на широкому застосуванні законів математичної статистики і теорії імовірностей, оскільки розглядувані при цьому закономірності стосуються величезної кількості частинок (молекул, атомів). Статистика оперує з середніми значеннями тих фізичних величин, які характеризують поведінку і властивості кожної молекули.

Відзначимо також, що в молекулярній фізиці користуються середніми значеннями не тому, що ми не можемо стежити за рухом окремих молекул, а тому що у спільному русі величезного числа молекул проявляються нові властивості, які підлягають новим, а саме статистичним законам.

Наведемо деякі поняття, що широко застосовуються при використанні статистичного методу.

Середнє арифметичне вибірки. Ряд чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$, який дістали при n вимірюваннях (випробуваннях) фізичної величини x при сталих зовнішніх умовах, називають вибіркою. Середнім арифметичним вибірки незалежних дискретних випадкових величин називається частка від ділення

суми ряду величин на число цих величин: $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$.

Випадкові величини, які набувають будь-яких значень у певному інтервалі, називають неперервними, а випадкові величини, які набувають лише певних значень, називають дискретними.

Середнє квадратичне. Іноді з певних причин для оцінки дискретних випадкових величин значення $\bar{x}$ є недостатнім. В таких випадках користуються середнім квадратом цієї величини:

$$\bar{x}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

Добуваючи із цієї величини квадратний корінь, дістанемо середнє квадратичне вибірки дискретних випадкових величин

$$\bar{x}_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Імовірність. Розглянемо уявний дослід. Нехай об'єм, в якому знаходиться ідеальний газ, поділимо на дві однакові частини. Вважатимемо, що можна стежити за окремими молекулами газу і що зовнішні умови незмінні. Розглянемо події, які полягають у тому, що спостережувана молекула потрапляє в певну половину об'єму. Позначимо: N – загальне число випробувань (спостережень); N_x – число випробувань, коли подія відбулася (спостережувана молекула потрапила у задану половину об'єму); x – подія. Тоді ймовірність події x визначається за формулою

$$\omega_{(x)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_x}{N}$$

Імовірність неможливої події дорівнює нулю, а достовірної – одиниці.

Поряд із статистичним методом для вивчення фізичних явищ застосовується термодинамічний метод. Він є суто макроскопічним методом. Внутрішній механізм досліджуваних процесів він зовсім не розглядає, тому відпадає потреба в знанні мікроскопічної будови тіл. Термодинаміка вивчає умови перетворення енергії з одного виду в інший і характеризує їх з кількісного боку. В її основі лежать два експериментально встановлені закони (начала), а також принцип недосяжності абсолютного нуля (третє начало

термодинаміки). З допомогою цих законів можна дістати багато відомостей про властивості тіл в різних умовах.

Статистичний та термодинамічний методи дослідження доповнюють один одного. Сучасна фізика розвивається на основі тісного поєднання обох методів.

Розділ 10. ОСНОВНІ ГАЗОВІ ЗАКОНИ

10.1. Поняття про стан речовини. Ідеальний газ

Сукупність властивостей речовини визначає її стан. Є три стани речовини: твердий, рідкий і газоподібний, які називають агрегатними станами або відповідно твердою, рідкою і газоподібною фазою. Відомим прикладом цього є три стани води: лід, вода і водяна пара. Зауважимо, що поняття “фаза” є більш широке, ніж поняття “агрегатний стан”. У межах одного агрегатного стану речовина може перебувати у кількох фазах, що відрізняються за своїми властивостями, будовою і складом (наприклад, лід зустрічається у п'яти різних модифікаціях – фазах).

Сукупність розглядуваних тіл, що обмінюються енергією як між собою, так і з іншими (зовнішніми) тілами, називається термодинамічною системою. Стан системи визначається термодинамічними параметрами – сукупністю значень усіх фізичних величин, що характеризують її фізичні властивості. До них належать такі фізичні величини як об'єм, густина, тиск, температура, концентрація та ін.

Між найважливішими параметрами стану системи – тиском p , об'ємом V і температурою T – існує зв'язок, що називається рівнянням стану:

$$f(p, V, T) = 0 \quad (10.1)$$

Кожна система (газ, рідина чи тверде тіло) характеризується своїм рівнянням стану. В одних випадках (наприклад, з розрідженим газом) – рівняння стану просте, а в інших (наприклад, з водою) – дуже складне.

Знаючи рівняння стану речовини і використовуючи закони термодинаміки, можна вивчати властивості речовин у різних агрегатних станах.

Перехід системи з одного стану в інший через деяку послідовність

проміжних станів називають процесом.

Стан термодинамічної системи називається стаціонарним, якщо всі термодинамічні параметри з часом не змінюються. Стаціонарний стан системи називають рівноважним (стан термодинамічної рівноваги), якщо його незмінність у часі не зумовлена протіканням яких-небудь процесів у зовнішніх відносно системи тілах.

Нерівноважні стани – це стани системи, в яких відсутня рівновага. Нерівноважні стани виникають при різкій зміні зовнішніх умов (при цьому різні частини об'єму системи мають різні параметри).

У молекулярній фізиці, так як і в механіці, широко використовують модельні уявлення. Вони не можуть відтворити в усіх деталях внутрішню будову тіла, взаємозв'язок між його складовими частинками тощо. Але моделі повинні, хоч і наближено, відповідати реальним процесам.

Ми вже говорили, що всі тіла складаються з молекул і атомів. Отже, при вивченні багатьох явищ потрібно уявити, що таке атом чи молекула, яка їх форма, як вони між собою можуть взаємодіяти. За допомогою моделі це можна зобразити так. Ми приймаємо, що атоми (молекули) мають форму кулі (тобто їх моделлю є куля). Кулі з'єднані між собою пружиною. Сила розтягу і стиску пружини характеризує сили зв'язку між атомами (молекулами), моделює сили притягання і відштовхування.

Коли ми будемо вивчати тверді кристалічні тіла, то побачимо, що вони характерні різними кристалічними ґратками. Ці ґратки ми також уявимо собі за допомогою різних моделей. Наприклад, кубічну ґратку кристала зобразимо кубом, у вершинах якого розташовані атоми, що з'єднані між собою дрютинами, котрі моделюють сили зв'язку між ними.

Один з агрегатних станів речовини – газоподібний. Основні закономірності, які мають місце в реальному газі, вивчають на його моделі – ідеальному газі. Під ідеальним газом будемо розуміти такий газ, молекули якого мають форму куль певної маси, але розмірами їх можна нехтувати (молекули беруть як матеріальні точки). Також припускаємо, що молекули такого газу взаємодіють лише через абсолютно пружне зіткнення, а будь-яка інша взаємодія (на відстані) між ними відсутня. Вважається, що при відсутності зовнішніх сил молекули ідеального газу рівномірно розподілені по всьому об'ємі посудини, у якій міститься газ (такий розподіл зумовлений безперер-

вним хаотичним рухом молекул). Напрями швидкостей молекул газу в рівноважному стані розподілені хаотично, тобто всі напрями в газі рівномірні. По абсолютній величині швидкості молекул можуть змінюватися від величин нескінченно малих до величин нескінченно великих (детально питання про розподіл молекулярних швидкостей буде розглянуто пізніше). Зауважимо, що реальні гази при не дуже низьких температурах і досить малих тисках за своїми властивостями близькі до ідеальних газів. Досліди показали, що, наприклад, водень і гелій вже при атмосферному тиску і кімнатній температурі поводяться практично як ідеальні гази. Крім цього, висніски поправки, що враховують власний об'єм молекул і діючі молекулярні сили, можна перейти до теорії реальних газів.

10.2. Дослідні закони ідеального газу. Абсолютна температура

Головна властивість газів полягає в їх здатності до необмеженого розширення. Яким би великим не був об'єм посудини, газ завжди тиснутиме на всі її стінки.

Газові закони було відкрито дослідним шляхом задовго до створення молекулярно-кінетичної теорії. Нагадаємо відомі з курсу середньої школи закони ідеального газу.

Закон Бойля-Маріотта: для даної маси газу при незмінній температурі добуток тиску газу на його об'єм є величина стала:

$$pV = \text{const при } T = \text{const, } m = \text{const.} \quad (10.2)$$

Процес зміни стану системи при сталій температурі називають **ізотермічним**.

Графічно залежність тиску газу від об'єму при незмінній температурі зображають кривими лініями, які називають **ізотермами** (рис.10.1). Різним температурам відповідають різні ізотерми. Згідно з законом Бойля-Маріотта, ізотерма газу виражає обернено пропорційну залежність між тиском і об'ємом. У математиці криву такого виду називають **гіперболою**.

Досліди показали, що реальні гази підлягають цьому закону тим точніше, чим менша їх густина.

Закони Гей-Люссака:

а) об'єм даної маси газу при сталому тиску змінюється лінійно із

температурою:

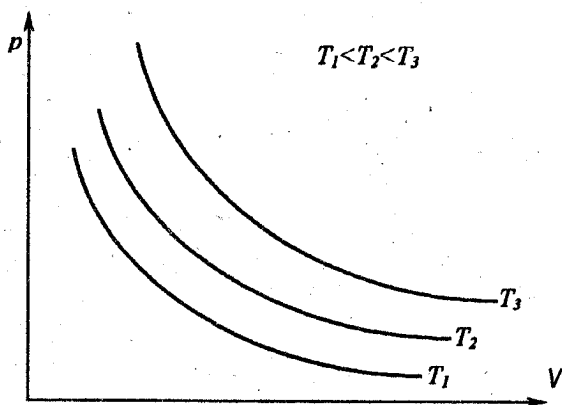


Рис.10.1

$$V = V_0(1 + \alpha_v t) \text{ при } p = \text{const}, \quad m = \text{const}; \quad (10.3)$$

б) тиск даної маси газу при сталому об'ємі змінюється лінійно із температурою:

$$p = p_0(1 + \alpha_p t) \text{ при } V = \text{const}, \quad m = \text{const}. \quad (10.4)$$

В рівняннях (10.3) і (10.4) t – температура по шкалі Цельсія; V_0 і p_0 – об'єм і тиск при 0°C ; α_v і α_p – термічні коефіцієнти об'ємного розширення і тиску газу. Досліди показали, що для газів значення термічних коефіцієнтів α_v і α_p дуже близькі між собою. Для розрідженого газу, який можна розглядати як ідеальний, $\alpha_v = \alpha_p = \alpha = \frac{1}{273,15\text{K}} = 0,00367\text{K}^{-1}$.

Процес зміни стану газу при сталому тиску називають **ізобаричним**. Графічно залежність об'єму газу від температури при сталому тиску зображують прямими лініями – **ізобарами** (рис.10.2).

Процес зміни стану газу при сталому об'ємі називають **ізохоричним**. Графічно залежність тиску газу від температури при сталому об'ємі

зображують прямими лініями, які називаються ізохорами (рис.10.3).

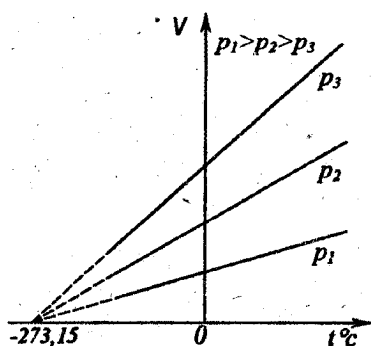


Рис.10.2

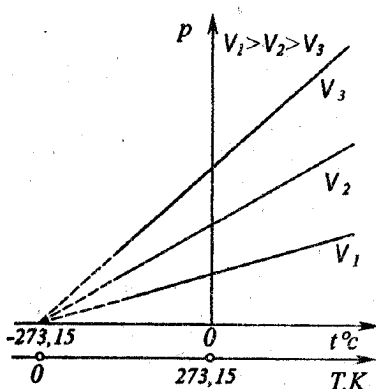


Рис.10.3

Усі ізобари та ізохори перетинають вісь температури в точці, яка має значення $t = -273,15^{\circ}\text{C}$ (визначають із умови $1 + \alpha t = 0$). Якщо змістити початок відліку в цю точку, то відбувається перехід до шкали Кельвіна (Міжнародна практична температурна шкала) (див. рис.10.3).

Одиницею вимірювання температури в цій шкалі є Кельвін (K), який дорівнює градусу Цельсія:

$$1 \text{ K} = 1^{\circ}\text{C}.$$

Температура, виміряна за шкалою Кельвіна, дуже близька до термодинамічної температури (різниця між ними перебуває у межах сучасної точності вимірювань).

Нуль температури за шкалою Кельвіна називається абсолютним нулем температури, а температуру, відраховану по цій шкалі, називають абсолютною температурою. Між абсолютною температурою і температурою за Цельсієм справедливе співвідношення

$$T = t + 273,15 \text{ або } T = t + \frac{1}{\alpha}. \quad (10.5)$$

Замінивши у рівняннях (10.3) і (10.4) температуру абсолютною, зако-

ни Гей-Люссака можна записати у зручнішому вигляді:

$$V = V_0 \left[1 + \alpha \left(T - \frac{1}{\alpha} \right) \right] = V_0 \alpha T, \quad (10.6)$$

$$p = p_0 \left[1 + \alpha \left(T - \frac{1}{\alpha} \right) \right] = p_0 \alpha T \quad (10.7)$$

або для двох довільних станів газу

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2} \text{ при } p = \text{const}, m = \text{const}, \quad (10.8)$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2} \text{ при } V = \text{const}, m = \text{const}. \quad (10.9)$$

Зауважимо, що закони Гей-Люссака досить точні при не дуже низьких температурах і для досить розріджених газів, коли між молекулами відстані в середньому набагато більші від лінійних розмірів молекул.

Закон Дальтона: тиск суміші газів p дорівнює сумі парціальних тисків газів $p_1, p_2, \dots, p_n$, які утворюють суміш:

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_n = \sum_{i=1}^n p_i. \quad (10.10)$$

Парціальним тиском називається тиск, який мав би газ, коли б він один заповнював весь об'єм.

Закон Дальтона (10.10) добре справджується для досить розріджених газів (досліди показують, що для тисків порядку десятків атмосфер відбуваються значні відхилення від закону Дальтона).

Закон Авогадро: молі різних газів за однакових умов (однакові тиски і температури) займають однакові об'єми. При нормальних умовах цей об'єм дорівнює $22,41 \cdot 10^3 \text{ м}^3/\text{моль}$.

Нагадаємо, що маси молекул дуже малі. Тому зручно користуватися не абсолютними їхніми значеннями, а відносними. За означенням молекулярною масою речовини називають відношення маси молекули даної речовини (m_0) до $1/12$ маси атома вуглецю (m).

Як відомо з курсу хімії, кількість грамів (або кілограмів) речовини,

яка чисельно дорівнює її молекулярній масі, називають грам-молекулою або молем (відповідно кіломолем), і позначають літерою μ :

$$\mu = \frac{m_0}{\frac{1}{12}m} \quad (10.11)$$

З означення моля випливає, що число молекул у молі будь-якої речовини таке саме. Це число називають числом Авогадро N_A .

Справді, число молекул у молі

$$N_A = \frac{\mu}{m_0}$$

Використовуючи означення μ (10.11), дістанемо

$$N_A = \frac{m_0}{\frac{1}{12}mm_0} = \frac{12}{m} \quad (10.12)$$

Вимірювання дають для маси атома вуглецю $m = 1,995 \cdot 10^{-23}$ г. Звідси згідно з (10.12)

$$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}.$$

Число молекул у кіломолі дорівнює $6,02 \cdot 10^{26}$ кмоль $^{-1}$. Є й інші методи визначення числа Авогадро, але всі вони дають такий самий результат.

10.3. Рівняння стану ідеального газу Клапейрона – Менделєєва

Закони Бойля-Маріотта і Гей-Люссака добре відображають властивості одного й того самого газу, а саме – ідеального.

Використовуючи газові закони, можна дістати рівняння стану ідеального газу, тобто рівняння, яке зв'яже всі три параметри p , V і T , що характеризують стан даної маси m газу.

Нехай у початковому стані 1 якась маса газу m має тиск p_1 , об'єм V_1 і температуру T_1 . Потім газ переходить у кінцевий стан 2, коли тиск, об'єм і температура матимуть значення p_2 , V_2 , T_2 . Який зв'язок між цими трьома параметрами у початковому і кінцевому станах?

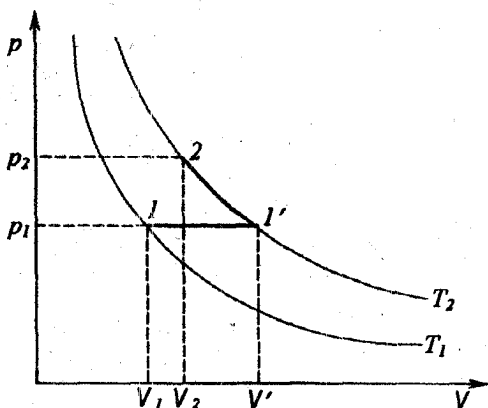


Рис.10.4

Переведемо газ із стану 1 у стан 2 за два прийоми. Спочатку при сталому тиску p_1 змінимо температуру газу до температури T_2 . Об'єм його при цьому дорівнюватиме якійсь величині V' . Графічно цей ізобаричний перехід зобразиться прямою 1-1' на рис.10.4.

Потім ізотермічно при температурі T_2 переведемо газ у кінцевий стан з тиском p_2 і об'ємом V_2 . Графічно це зобразиться частиною гіперболи 1'-2 на рис.10.4. Згідно з законом Гей-Люссака (10.8)

$$\frac{V_1}{V'} = \frac{T_1}{T_2} \quad (10.13)$$

Застосовуючи закон Бойля-Маріотта (10.2) для ізотермічного процесу, матимемо

$$p_1 V' = p_2 V_2 \quad (10.14)$$

Знайдемо з рівняння (10.13) V' :

$$V' = V_1 \frac{T_2}{T_1} \quad (10.15)$$

і, підставивши (10.15) в рівняння (10.14), дістанемо

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \text{ при } m = \text{const.} \quad (10.16)$$

Оскільки початковий 1 і кінцевий 2 стани газу взято довільно, то добуток тиску даної маси газу на об'єм, поділений на абсолютну температуру, є величина стала, що не залежить від стану, в якому перебуває газ:

$$\frac{pV}{T} = B = \text{const.} \quad (10.17)$$

Рівняння (10.17) називається рівнянням Клапейрона і є однією з форм запису рівняння стану ідеального газу. В цьому рівнянні B – газова стала, різна для різних газів.

Використовуючи закон Авогадро, можна подати залежність сталої B в рівнянні (10.17) від кількості газу.

Візьмемо спочатку один моль газу і позначимо його об'єм V_μ . За нормальних умов об'єм моля будь-якого газу $V_\mu = 22,41 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{моль}$.

Отже, для моля газу згідно з (10.17) дістанемо

$$\frac{pV_\mu}{T} = \frac{p_0 V_{0\mu}}{T_0} = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \quad (10.18)$$

Таким чином, для одного моля газу добуток тиску на об'єм, поділений на абсолютну температуру, для всіх газів є величина стала, яку називають універсальною газовою сталою і позначають буквою R .

Як впливає з рівняння (10.18), для одного моля газу

$$pV_\mu = RT. \quad (10.19)$$

Така форма рівняння Клапейрона була вперше записана Д.І. Менделєєвим.

Якщо маса газу дорівнює не одному моллю, а якомусь числу молей $\nu = \frac{m}{\mu}$, то при тих самих тиску і температурі, що й для одного моля, об'єм

$$V = \nu V_\mu = \frac{m}{\mu} V_\mu.$$

Помноживши рівняння (10.18) на $\frac{m}{\mu}$, дістанемо найзагальнішу форму рівняння стану ідеального газу:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT \quad (10.20)$$

Рівняння (10.20) називають **рівнянням Клапейрона – Менделєєва**.

Часто користуються іншою формулою рівняння стану ідеального газу, вводячи сталу Больцмана:

$$k = \frac{R}{N_A} = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$$

Згідно з рівнянням (10.19)

$$p = \frac{RT}{V_\mu} = \frac{kN_A T}{V_\mu} = nkT, \quad (10.21)$$

де $\frac{N_A}{V_\mu} = n$ – концентрація (число молекул в одиниці об'єму).

Таким чином, із рівняння (10.21) виходить, що тиск ідеального газу при даній температурі прямо пропорційний концентрації його молекул.

Зауважимо, що рівняння стану ідеального газу Клапейрона – Менделєєва можна використовувати і для реальних газів, які за своїми властивостями наближаються до ідеального газу (досить малий тиск і не дуже низька температура).

Контрольні запитання

1. Що є предметом молекулярної фізики?
2. Які ви знаєте методи дослідження фізичних властивостей речовини, у чому їх суть і відмінність?
3. Що називається термодинамічною системою?
4. Чим визначається стан термодинамічної системи? Які термодинамічні параметри вам відомі?
5. Що називається рівнянням стану системи?
6. Який газ називають ідеальним?

7. Сформулюйте закон Бойля-Маріотта.
8. Якими законами описуються ізобарні та ізохорні процеси?
9. Як читається закон Дальтона?
10. Сформулюйте закон Авогадро.
11. Який фізичний зміст сталої Авогадро?
12. Сформулюйте рівняння стану Клапейрона.
13. Запишіть рівняння стану ідеального газу Клапейрона – Менделєєва.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Балон, що містить $V_1=0,02 \text{ м}^3$ повітря під тиском $p_1=4 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$, сполучають з балоном місткістю $V_2=0,06 \text{ м}^3$, з якого викачано повітря. Знайти тиск p , який установився в посудинах. Температура стала.

Розв'язання. Повітря з першого балона займе весь наданий йому об'єм $V_1 + V_2$. За законом Бойля-Маріотта $\frac{p'}{p_1} = \frac{V_1}{V_1 + V_2}$. Звідси шуканий

$$\text{тиск } p = \frac{p_1 V_1}{V_1 + V_2}; \quad p = 10^5 \text{ Н/м}^2.$$

Приклад 2. Яку кількість кисню випустили з балону місткістю $V=10 \text{ л}$, якщо при цьому покази манометра на балоні змінились від 14 до 6 ат, а температура понизилась від $t_1=27^\circ \text{C}$ до $t_2=7^\circ \text{C}$?

Розв'язання. Маса випущеного із балону газу Δm дорівнює різниці між початковою масою m_1 кисню в балоні та його кінцевою масою m_2 :

$$\Delta m = m_1 - m_2. \quad (1)$$

Оскільки умови, при яких кисень перебуває в балоні, не дуже відрізняються від нормальних, то газ можна вважати ідеальним. Тому запишемо для початкового і кінцевого стану кисню в балоні рівняння стану ідеального газу Клапейрона – Менделєєва:

$$p_1 V = \frac{m_1}{\mu} R T_1, \quad p_2 V = \frac{m_2}{\mu} R T_2. \quad (2)$$

Із рівнянь (1) і (2) дістанемо

$$\Delta m = \frac{\mu V}{R} \left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2} \right). \quad (3)$$

Тиски газу в балоні p_1 і p_2 знайдемо, додаючи до показів манометра величину атмосферного тиску, яка дорівнює 1 ат ($p_1=15$ ат, $p_2=7$ ат).

Виразимо в одиницях СІ числові значення величин, що входять у формулу (3): $p_1=15 \cdot 9,8 \cdot 10^4$ Па, $p_2=7 \cdot 9,8 \cdot 10^4$ Па, $T_1=300$ К, $T_2=280$ К, $V=1 \cdot 10^{-2}$ м³, $\mu=0,032$ кг/моль, $R=8,3$ Дж/(моль·К). Підставивши ці значення в (3), матимемо

$$\Delta m = 9,5 \cdot 10^{-2} \text{ кг.}$$

Співвідношення між деякими одиницями тиску:

1 атм (фізична атмосфера) = 760 мм. рт. ст. = $1,01 \cdot 10^5$ Па;

1 ат (технічна атмосфера) = 1 кгс/см² = $9,8 \cdot 10^4$ Па.

При розв'язуванні задач невеликою відмінністю між 1 атм і 1 ат часто нехтують.

Приклад 3. Знайти молярну масу повітря, вважаючи, що воно складається по масі з однієї частини кисню і трьох частин азоту ($m_1 : m_2 = 1:3$).

Розв'язання. Перш за все уточнимо поняття молярної маси суміші газів. Щоб застосувати рівняння стану для газової суміші, їй необхідно приписати деяку (без хімічного змісту) відносну молярну масу. Маса суміші газів у грамах, чисельно рівна їй, являє собою молярну масу $\mu_{\text{см}}$ суміші. Отже, величину $\mu_{\text{см}}$ вибирають такою, щоб вона задовольняла рівняння стану газу

$$pV = \frac{m}{\mu_{\text{см}}} RT. \quad (1)$$

Щоб розв'язати задачу, розглянемо кожен із газів (кисень і азот), що містяться в об'ємі суміші (повітря), і запишемо для них рівняння Клапейрона – Менделєєва

$$p_1 V = \frac{m_1}{\mu_1} RT \quad (2)$$

$$p_2 V = \frac{m_2}{\mu_2} RT, \quad (3)$$

де p_1 і p_2 – парціальні тиски кисню і азоту.

За законом Дальтона тиск p суміші газів дорівнює сумі парціальних тисків, що входять до складу суміші:

$$p = p_1 + p_2. \quad (4)$$

Додавши почленно рівняння (2) і (3), дістанемо з урахуванням (4):

$$pV = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} \right) RT. \quad (5)$$

Порівнюючи (1) і (5) і враховуючи, що маса суміші $m = m_1 + m_2$, одержимо

$$\frac{m_1 + m_2}{\mu_{\text{см}}} = \frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}, \quad (6)$$

звідки

$$\mu_{\text{см}} = \frac{\mu_1 \mu_2 (m_1 + m_2)}{\mu_1 m_2 + \mu_2 m_1}.$$

Підставивши числові значення величин в одиницях СІ:

$\mu_1 = 0,032$ кг/моль, $\mu_2 = 0,028$ кг/моль – і, враховуючи співвідношення $m_2 = 3m_1$, дістанемо

$$\mu_{\text{см}} = \frac{4\mu_1\mu_2}{3\mu_1 + \mu_2} = 0,029 \text{ кг/моль}.$$

Задачі для самостійних вправ

1. У балоні місткістю 400 л міститься газ під тиском $20 \cdot 10^5$ Па. Скільки кілограмів газу було випущено з балону, якщо тиск понизився до $10 \cdot 10^5$ Па? Процес ізотермічний. Густина газу за нормальних умов $0,6$ кг/м

Відповідь: 2,4 кг.

2. У приміщенні, об'єм якого 20 м^3 , температура повітря знизилася від 20 до 0 °С. Атмосферний тиск нормальний. Чому і наскільки збільши-

лася маса повітря в приміщенні?

Відповідь: $\approx 1,7$ кг.

3. Манометр на балоні із стисненим повітрям при температурі 291 К показує тиск $8232 \cdot 10^3$ Па. Який тиск він показуватиме, якщо температура знизиться до 250 К? Процес ізохоричний.

Відповідь: $\approx 70 \cdot 10^5$ Па.

4. Визначити масу кисню, що міститься в балоні місткістю $0,01 \text{ м}^3$, якщо при температурі 260 К манометр показує тиск $8,8 \cdot 10^6$ Па.

Відповідь: 1,3 кг.

5. Визначити густину водню при 0°C і тиску $9,8 \cdot 10^4$ Па.

Відповідь: $0,08 \text{ кг/м}^3$.

6. Визначити об'єм кіломоля газу при тиску $98 \cdot 10^3$ Па і температурі 290 К.

Відповідь: $24,6 \text{ м}^3$.

7. У балон компресором нагнітають повітря. Температура всередині балона 320 К. До якої густини можна довести повітря в балоні, якщо запобіжний клапан, який закриває отвір у $1,2 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2$, утримується силою 60 Н. Атмосферний тиск $1,01 \cdot 10^5$ Па. Розглядати стиснене в балоні повітря як ідеальний газ з молекулярною масою $0,029 \text{ кг/моль}$.

Відповідь: $55,7 \text{ кг/м}^3$.

8. У балоні місткістю $40 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ є $1,98$ кг вуглекислого газу. Балон може витримати тиск не більш як $30 \cdot 10^5$ Па. При якій температурі виникає небезпека вибуху.

Відповідь: $\approx 49^\circ\text{C}$.

9. У двигуні внутрішнього згоряння об'єм циліндра 930 см^3 . Перед відкриттям випускного клапану температура газу в циліндрі 1000°C , а тиск $5 \cdot 10^5$ Па. Який об'єм займає вихлопний газ, викинутий з циліндра в атмосферу з температурою повітря 0°C і тиском $1 \cdot 10^5$ Па, після того, як він охолodиться до температури атмосферного повітря?

Відповідь: $\approx 1 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$.

10. Визначити густину суміші $4 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$ водню і $32 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$ кисню при тиску $0,933 \cdot 10^5$ Па і температурі 7°C , вважаючи ці гази ідеальними.

Відповідь: $0,5 \text{ кг/м}^3$.

11. Визначити число молекул азоту, що перебувають у посудині

об'ємом 1 л при температурі 27 °С, якщо тиск азоту $133,3 \cdot 10^{-6}$ Па.

Відповідь: $3,22 \cdot 10^{13}$.

Розділ 11. КІНЕТИЧНА ТЕОРІЯ ГАЗІВ

11.1. Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії

Молекулярно-кінетична теорія дає змогу дістати всі закони ідеального газу теоретично, як висновки з так званого основного рівняння кінетичної теорії. Його можна вивести різними способами, які відрізняються більшою або меншою строгістю роздумів. Оскільки кінцевий результат в усіх випадках виявляється однаковим, нижче наводиться можливо більш простий вивід основного рівняння кінетичної теорії газів. Це рівняння пов'яже параметри стану газу з характеристиками руху його молекул. Для виведення основного рівняння кінетичної теорії підрахуємо тиск газу на стінки посудини, в якій він міститься. Тиск є результатом ударів молекул газу при численних зіткненнях їх із стінками посудини. Вважатимемо, що молекули газу, який міститься в посудині, однакові. Їхні швидкості різні як за величиною, так і за напрямком. Поділимо всі молекули на групи так, щоб в кожній групі молекули в даний момент часу рухалися вздовж однієї прямої і мали однакові швидкості за величиною. Нехай в одиниці об'єму є n_i молекул i -ї групи з швидкістю v_i . Виділимо на стінці посудини елементарну площадку ΔS , у напрямі до якої рухаються молекули i -ї групи (рис.11.1).

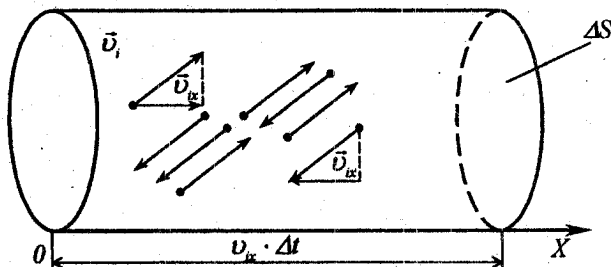


Рис.11.1

Знайдемо число z_i молекул цієї групи, що зазнали зіткнень з площадкою ΔS за час Δt :

$$z_i = \frac{1}{2} n_i \Delta V, \quad (11.1)$$

де $\Delta V = \Delta S v_{ix} \Delta t$ – об'єм циліндра, в якому перебувають молекули i -ї групи, а v_{ix} – складова швидкості v_i у напрямі осі OX . Вважаємо, що $\frac{1}{2} n_i$ молекул i -ї групи рухаються до площадки ΔS , а $\frac{1}{2} n_i$ – у протилежному напрямі.

Кожна молекула під час зіткнення змінює свій імпульс від початкового значення $m v_{ix}$ до кінцевого – $m v_{ix}$ на величину $(-m v_{ix}) - m v_{ix} = -2m v_{ix} = -2p_{ix}$. За законом збереження імпульсу це означає, що стінка посудини дістане імпульс, рівний за величиною і обернений за знаком зміні імпульсу молекули, тобто $2p_{ix}$. За час, що дорівнює Δt , z_i молекул змінять імпульс стінки на $2p_{ix} z_i = n_i \Delta S v_{ix} p_{ix} \Delta t$. Згідно з другим законом Ньютона на площадку ΔS при відбиванні i -ї групи молекул діятиме імпульс середньої сили $F_{ix} \Delta t$, який дорівнює зміні її імпульсу:

$$F_{ix} \Delta t = n_i \Delta S v_{ix} p_{ix} \Delta t, \quad (11.2)$$

звідки

$$F_{ix} = n_i \Delta S v_{ix} p_{ix}. \quad (11.3)$$

При відбиванні всіх груп молекул нормально до площадки ΔS діятиме сила

$$F_x = \sum_i F_{ix} = \Delta S \sum_i n_i v_{ix} p_{ix}. \quad (11.4)$$

Поділивши рівняння (11.4) на ΔS , знайдемо тиск газу:

$$p = \frac{F_x}{\Delta S} = \sum_i n_i v_{ix} p_{ix}. \quad (11.5)$$

Цей вираз можна подати в іншому вигляді, якщо ввести середнє значення добутку $(\overline{v_x p_x})$, яке визначаємо так:

$$(\overline{v_x p_x}) = \frac{1}{n} \sum_i n_i v_{ix} p_{ix}, \quad (11.6)$$

де n – кількість молекул всіх груп в одиниці об'єму (концентрація молекул). Тоді рівняння (11.5) з врахуванням (11.6) можна подати у вигляді

$$p = n(\overline{v_x p_x}). \quad (11.7)$$

Відомо, що скалярний добуток

$$(\vec{v}, \vec{p}) = v_x p_x + v_y p_y + v_z p_z.$$

Усереднивши це співвідношення, маємо

$$(\overline{v}, \overline{p}) = \overline{v_x p_x} + \overline{v_y p_y} + \overline{v_z p_z}.$$

Оскільки при хаотичному русі молекул газу всі напрями швидкостей рівноймовірні, то

$$\overline{v_x p_x} = \overline{v_y p_y} = \overline{v_z p_z} = \frac{1}{3}(\overline{v}, \overline{p}). \quad (11.8)$$

Підставивши (11.8) в (11.7), дістанемо

$$p = \frac{1}{3} n(\overline{v}, \overline{p}). \quad (11.9)$$

Тому, що імпульс молекули $\vec{p} = m\vec{v}$, вираз (11.9) перепишемо так:

$$p = \frac{1}{3} nm(\overline{v^2}) \quad (11.10)$$

або

$$p = \frac{2}{3} n \frac{\overline{mv^2}}{2}. \quad (11.11)$$

Величина $\frac{\overline{mv^2}}{2}$ являє собою середню кінетичну енергію однієї молекули газу. Рівняння (11.11) – основне рівняння кінетичної теорії газів і читається так: тиск газу чисельно дорівнює двом третинам середньої кінетичної енергії молекул одиниці об'єму газу. Формула (11.11) пов'язує макроскопічну величину – тиск, який можна виміряти на досліді манометром, з мікроскопічними величинами (маса і швидкість молекули) і є ніби мостом між двома світами: макроскопічним і мікроскопічним.

11.2. Молекулярно-кінетичне тлумачення абсолютної температури. Наслідки з основного рівняння кінетичної теорії газів

Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії газів дає статистичне тлумачення температури. Перетворимо (11.11), підставивши замість n у нього $\frac{N}{V}$, де N – загальне число молекул в об'ємі V . Тоді дістанемо

$$pV = \frac{2}{3} N \frac{\overline{mv^2}}{2}. \quad (11.12)$$

Подане у вигляді (11.12) основне рівняння кінетичної теорії газів можна прочитати так: добуток тиску газу на об'єм чисельно дорівнює двом третинам суми середньої кінетичної енергії молекул, замкнених у даному об'ємі.

Порівняємо рівняння (11.12), записавши його для моля газу, з рівнянням Менделєєва (10.19). Дістанемо:

$$\frac{2}{3} N_A \frac{\overline{mv^2}}{2} = RT.$$

Розв'яжемо це рівняння відносно середньої кінетичної енергії молекули $\frac{\overline{mv^2}}{2}$:

$$\frac{\overline{mv^2}}{2} = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T. \quad (11.13)$$

Оскільки відношення універсальної газової сталої R до числа Авогадро N_A є сталою Больцмана k , то рівняння (11.13) можна переписати так:

$$E_k = \frac{\overline{mv^2}}{2} = \frac{3}{2} kT. \quad (11.14)$$

З (11.14) випливає, що температура є статистичною величиною. Її молекулярно-кінетичне тлумачення таке: абсолютна температура – це міра середньої кінетичної енергії хаотичного поступального руху молекули. З (11.14) також випливає, що при однаковій температурі молекули різних газів мають однакову середню енергію поступального руху. Поняття темпе-

ратури, виходячи із його статистичного характеру, має зміст лише для колективу молекул. Не можна говорити про температуру однієї або кількох молекул. Поняття температури втрачає зміст, наприклад, для газу в космосі, де концентрація молекул настільки мала, що вони не утворюють газу в звичайному розумінні цього слова.

Як видно з (11.14), при $T=0$ кінетична енергія хаотичного руху молекул повинна дорівнювати нулю. При цьому і тиск також повинен дорівнювати нулю. Якщо користуватися такими висновками, то це означає, що всякий рух молекул (атомів) повинен припинитись. Однак це суперечить основним положенням квантової механіки (енергія ніколи не може бути меншою, ніж деяке мінімальне значення). Отже, молекулярно-кінетичне тлумачення температури в інтервалі температур, близьких до абсолютного нуля, стає неправильним, тобто при $T \rightarrow 0$ модель ідеального газу незастосовна (користуватися формулами, що їх дістали для ідеального газу в цьому інтервалі температур, не можна).

Температура $T = 0$ є початком відліку абсолютної термодинамічної шкали температури. Зазначимо, що температура абсолютного нуля не є реперною точкою, а вона є на 273,16 К нижчою від температури трітійної точки води. Аналіз різних фізичних процесів показує, що абсолютний нуль є недосяжним. Це твердження у термодинаміці називають третім началом термодинаміки.

Підставивши (11.14) в (11.11), дістанемо $p = nkT$, або

$$\frac{p}{n} = kT. \quad (11.15)$$

Це є ще одна форма основного рівняння кінетичної теорії газів. З (11.15) випливають як наслідок усі дослідні газові закони.

1. З (11.15) видно, що при сталій температурі тиск газу прямо пропорційний числу молекул в одиниці об'єму. Отже, ми прийшли до закону Бойля-Маріотта. Доведемо це. Для цього виразимо об'єм через масу і густину $V = \frac{m}{\rho}$ і підставимо його значення в експериментальний закон

Бойля-Маріотта (10.2) : $p \frac{m}{\rho} = \text{const}$. Але m є також сталою величиною,

тому

$$\frac{p}{\rho} = \text{const.}$$

Густина ρ прямо пропорціональна до кількості молекул в одиниці об'єму ($\rho \sim n$).

Отже, $\frac{p}{n} = \text{const.}$

Порівнюючи цей вираз з (11.15), бачимо, що одним із наслідків основного рівняння молекулярно-кінетичної теорії є закон Бойля-Маріотта.

2. Рівняння (11.15) показує також, що тиск даної маси газу прямо пропорціональний абсолютній температурі газу при сталому об'ємі. Справді, $n \sim \frac{1}{V}$, а $V = \text{const}$, тому

$$p = \text{const} \cdot T,$$

тобто з основного рівняння кінетичної теорії газів ми дістали закон Гей-Люссака.

3. Оскільки $n = \frac{N}{V}$, то (11.15) можна переписати так:

$$pV = NkT \text{ або } V = \frac{Nk}{p}T = \text{const} \cdot T. \quad (11.16)$$

Отже, при сталому тиску об'єм даної маси газу прямо пропорціональний абсолютній температурі (закон Гей-Люссака).

4. З рівняння (11.16) видно, що кількість молекул N при даних p , V і T однакова в різних газах, а це є закон Авогадро.

5. З рівняння (11.16) випливає також і закон Дальтона для суміші газів. Якщо в посудині об'ємом V міститься N_1 молекул першої компоненти суміші газів при температурі T , то її тиск дорівнює

$$p_1 = \frac{N_1}{V} kT. \quad (11.17)$$

Якби в тій самій посудині містилося тільки N_2 молекул другої компоненти суміші газів при тій самій температурі, то тиск дорівнював би

$$p_2 = \frac{N_2}{V} kT. \quad (11.18)$$

Якби всі $N_1 + N_2$ молекул обох компонент суміші газів одночасно містилися б у цій посудині, то тиск газу дорівнював би

$$p = \frac{N_1 + N_2}{V} kT$$

або
$$p = \frac{N_1}{V} kT + \frac{N_2}{V} kT. \quad (11.19)$$

Тоді рівняння (11.19) на підставі (11.17) і (11.18) запишемо так:

$$p = p_1 + p_2$$

або
$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_n = \sum_{i=1}^n p_i, \quad (11.20)$$

якщо суміш газів складається не з двох, а з n компонент. Отже, ми прийшли до закону Дальтона, а також підтвердили, що рівняння (11.11) є основним, тому що з нього випливають усі так звані експериментальні газові закони. Але це основне рівняння (11.11) було виведено для моделі газу, молекули якого не взаємодіють одна з одною і об'ємом яких можна знехтувати. Звідси випливає важливий висновок, що газові закони, хоч і одержані експериментально, але правильні тільки для ідеального газу. Це сталося внаслідок того, що згадані закони були встановлені недостатньо досконалими експериментами, якими не можна було виявити впливу об'єму молекул та сил взаємодії між ними на властивості газів.

11.3. Розподіл швидкостей молекул за Максвеллом

Молекулярний рух має хаотичний характер. Це означає, що всі напрями руху рівноймовірні та що швидкості молекул можуть бути довільними: від дуже малих до досить великих. Але хоч як би змінювались швидкості молекул, середня квадратична швидкість залишається сталою, якщо не змінюється температура (рівноважний стан). Це означає, що в результаті зіткнень встановлюється деякий стаціонарний розподіл молекул за швидкостями. Цей розподіл стосується не до кожної даної молекули, а до всієї су-

купності молекул, тобто він є статистичним.

Питання про розподіл молекул можна поставити так: яка частина молекул dn з усіх молекул n в одиниці об'єму має швидкості, що лежать у деякому інтервалі від v до $v + dv$. Величина $\frac{dn}{n}$ повинна залежати не тільки від величини швидкості v .

Математично дану задачу можна записати так:

$$\frac{dn}{n} = f(v)dv. \quad (11.21)$$

Функція $f(v)$ називається функцією розподілу. Вона визначає відносне число молекул $\frac{dn}{n}$, швидкості яких перебувають в одиничному інтервалі швидкостей поблизу значення швидкості v . Очевидно, що $f(v)$ являє собою імовірність того, що довільна молекула в одиниці об'єму має швидкість в одиничному інтервалі швидкостей поблизу v .

Такий розподіл вперше теоретично дістав Д.К. Максвелл у 1859 році, тому його називають максвеллівським розподілом молекул за швидкостями або законом Максвелла і він має такий вигляд:

$$\frac{dn}{n} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv, \quad (11.22)$$

де m – маса молекули; k – стала Больцмана; T – абсолютна температура.

Закон Максвелла – це перший приклад статистичного закону в науці. Максвелл усвідомив, що випадковий рух окремих молекул підпорядкований певному статистичному закономірності.

Проаналізуємо закон Максвелла на графіку (рис.11.2).

Функція розподілу $f(v) = 0$ при $v = 0$ і прямує до нуля при $v \rightarrow \infty$.

Отже, в газі немає молекул, які б не рухались, а також імовірність наявності молекул з дуже великими швидкостями близька до нуля.

Крива розподілу швидкостей асиметрична – круто піднімається з боку малих значень v , досягає максимуму при $v = v_m$ і повільно спадає в бік більших значень v . З формули (11.22) можна визначити найбільш імовірну швидкість v_m , використавши для цього умову для максимуму вираз $\frac{dn}{dv}$:

$$\left[\frac{d}{dv} \left(e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 \right) \right]_{v=v_{lm}} = 0,$$

звідки

$$v_{lm} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}. \quad (11.23)$$

Таким чином, найбільш імовірна швидкість молекул залежить тільки від температури газу та його молекулярної маси.

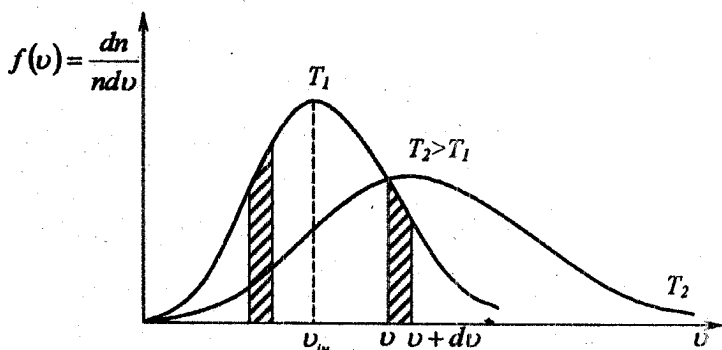


Рис. 11.2

Щоб мати більш конкретне уявлення про закон розподілу Максвелла, як приклад розглянемо розподіл швидкостей молекул азоту ($\mu = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль). Найбільш імовірна швидкість молекул азоту при 148°C згідно з (11.23) дорівнює 500 м/с.

При цьому розподіл молекул азоту по інтервалах швидкостей буде таким:

Інтервал швидкостей, м/с	Частка молекул, %
Менше від 100	0,6
100-300	12
300-500	30
500-700	29
700-1000	23
Понад 1000	5,4

Як видно, 59% загального числа молекул мають швидкості, що лежать в інтервалі від 300 до 700 м/с, тобто в інтервалі, до якого відноситься найбільш імовірна швидкість (500 м/с). Відносне число повільних молекул (менше 100 м/с) і дуже швидких (більше 1000 м/с) мале.

Користуючись кривою Максвелла, можна графічно визначити відносне число молекул $\frac{dn}{n}$, швидкості яких перебувають у певному інтервалі dv (від v до $v + dv$). На рис.11.2 ці числа зображені площами заштрихованих криволінійних трапецій. Вся площа, обмежена кривою розподілу і віссю абсцис, чисельно дорівнює тій частині молекул, швидкості яких мають різні значення від 0 до ∞ . Оскільки ця умова задовольняють всі n молекул, дістанемо сумарне відносне число молекул, тобто одиницю. Для різних температур T_1 і T_2 криві розподілу молекул за швидкостями мають вигляд, який зображено на рис.11.2. Із підвищенням температури газу максимум кривої зміщується в бік більших швидкостей, а крива розподілу стає більш поло-гою. Все це вказує на те, що при нагріванні газу розподіл стає більш рівно-мірним, а також збільшується число молекул, швидкості яких перевищують v_{in} , і зменшується число молекул з малими швидкостями.

Закон Максвелла дає змогу обчислити середню швидкість молекули (середня арифметична швидкість) $\bar{v}$. Згідно з означенням

$$\bar{v} = \frac{1}{n} \sum_i v_i \text{ або } \bar{v} = \int_0^\infty v dn = \int_0^\infty v f(v) dv. \quad (11.24)$$

Підставивши вираз для dn або $f(v)$ з (11.22) в (11.24) і інтегруючи його, дістанемо

$$v = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}. \quad (11.25)$$

Аналогічно обчислюємо і середню квадратичну швидкість $\bar{v}_{\text{кв}}$:

$$\bar{v}_{\text{кв}}^2 = \frac{1}{n} \int_0^\infty v^2 dn, \quad \bar{v}_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}. \quad (11.26)$$

Порівнюючи (11.26), (11.25) і (11.23), маємо

$$\bar{v}_{\text{кв}} : \bar{v} : v_{in} \approx 1,2 : 1,1 : 1. \quad (11.27)$$

У законі Максвелла (11.22) функція розподілу залежить від температури та природи газу. Через те для кожного газу і кожної температури треба побудувати окрему криву Максвелла. Проте закон Максвелла можна звести до такого вигляду, що одна крива буде придатна для будь-яких температур і різних газів. Для цього випадку формула Максвелла така:

$$\frac{dn}{n du} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2, \quad (11.28)$$

де $u = \frac{v}{v_{\text{м}}}$ – відносна швидкість (v – задана швидкість молекули).

Така (11.28) форма запису закону розподілу Максвелла є досить зручною для розв'язання різних практичних задач.

Правильність закону Максвелла була підтверджена експериментально різними методами (Штерном – 1920 р., Елдріджом – 1927 р., Ламмертом – 1929 р.). Таким чином, дістали підтвердження оригінальні статистичні концепції Максвелла про фізичні закономірності особливого виду, в яких зв'язки між величинами, що входять в теорію, мають імовірнісний характер, а це набагато розширило можливості молекулярно-кінетичної теорії.

11.4. Барометрична формула. Розподіл Больцмана

При виведенні основного рівняння молекулярно-кінетичної теорії газів і закону Максвелла ми вважали, що на молекули газу не діють зовнішні сили. Тому молекули рівномірно розподілені в певному об'ємі. Подивимося тепер, як розподіляються молекули в полі земного тяжіння, обмежуючись випадком газу поблизу Землі, коли можна вважати поле тяжіння однорідним.

У газі, який міститься у полі земного тяжіння, також існує молекулярний хаос, але області, що перебувають на різних висотах, нерівноправні. Це проявляється в тому, що молекули мають потенціальну енергію

$$U = mgh, \quad (11.29)$$

яка залежить від висоти h над рівнем землі, який ми беремо за початковий і на якому $U = 0$.

Виділимо вертикальний стовп повітря з площею основи, що дорівнює

одиниці (рис.11.3).

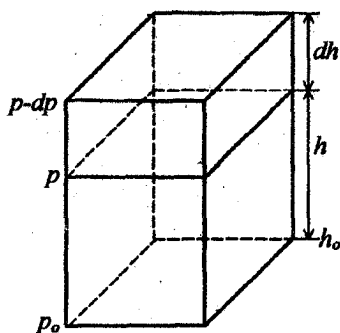


Рис.11.3

Нехай на деякій висоті h тиск газу дорівнює p . З підняттям на висоту dh тиск відповідно зменшиться на dp . Оскільки в тонкому шарі dh густину повітря можна вважати сталою, то

$$dp = -\rho g dh. \quad (11.30)$$

Відомо, що $\rho = mn$, де m – маса молекул, а n – число молекул в одиниці об'єму (концентрація). З основного рівняння кінетичної теорії газів $n = \frac{p}{kT}$.

Тоді

$$dp = -\frac{mg}{kT} p dh. \quad (11.31)$$

Розділивши в (11.31) змінні, дістанемо

$$\frac{dp}{p} = -\frac{mg}{kT} dh. \quad (11.32)$$

Вважаючи $T = \text{const}$ та інтегруючи (11.32) в межах від h_0 до h і від p_0 до p , маємо

$$p = p_0 e^{-\frac{mg(h-h_0)}{kT}} \quad (11.33)$$

Врахувавши, що $m = \frac{\mu}{N_A}$, дістанемо

$$p = p_0 e^{\frac{-\mu g}{RT}(h-h_0)} \quad (11.34)$$

Формула (11.34) дає змогу визначити висоту $(h - h_0)$ за допомогою барометра, тому її називають **барометричною формулою**. Барометр, спеціально проградуваний для безпосереднього відліку висоти над рівнем моря, називають **альтиметром**. Його широко використовують при сходженні на гори, в авіації тощо.

Барометрична формула показує, що з висотою тиск експоненціально спадає і тим швидше, чим більша молекулярна маса газу або нижча температура. З формули (11.34) також видно, що зменшення тиску залежить від прискорення вільного падіння. Отже, на різних планетах молекули атмосфери повинні по-різному розподілятися з висотою.

Зазначимо також, що при наявності в газі кількох видів молекул з різними масами число більш важких молекул з висотою повинно спадати швидше (в земній атмосфері на допустимих висотах цього не відбувається внаслідок перемішування газів при різних збуреннях).

З барометричної формули легко вивести закон розподілу молекул за висотою в полі тяжіння. Оскільки $p = nkT$, то з (11.33) маємо:

$$n = n_0 e^{\frac{mg(h-h_0)}{kT}}, \quad (11.35)$$

$$n = n_0 e^{\frac{\Delta U}{kT}} \quad (11.36)$$

Л. Больцман показав, що закон розподілу (11.36) є універсальним. Він справедливий для будь-яких частинок, що перебувають у довільному потенціальному полі зовнішніх сил. Цей статистичний закон називається розподілом Больцмана і є одним з основних законів молекулярно-кінетичної теорії. Він показує, що для рівноважного стану при даній температурі T концентрація частинок n зростає при зменшенні потенціальної енергії U , що відповідає тенденції стійкої рівноваги системи.

З формули (11.36) також випливає, що $n \rightarrow n_0$ при $T \rightarrow \infty$, тобто підвищення температури викликає вирівнювання концентрації газу в усьому наданому йому об'ємі. Якщо $T \rightarrow 0$, $n \rightarrow 0$, тобто всі молекули під дією сили тяжіння опускатимуться до поверхні Землі. Наша атмосфера існує внаслідок дії двох протилежних факторів: хаотичного руху молекул повітря

і сил тяжіння (якби не було сил земного тяжіння, то повітря розсіялося б по всьому Всесвіту; якби не було хаотичного руху молекул повітря, то всі вони впали б на Землю).

Зауважимо, що закон Больцмана дає також відповідь на практичне запитання: яке число молекул Δn з усіх n міститься в шарі, розміщеному між рівнями h і $h + dh$? Для цього випадку формулу (11.35) можна подати у вигляді

$$dn = ne^{-\frac{mgh}{kT}} dh. \quad (11.37)$$

Зазначимо також, що максвеллівський розподіл молекул за швидкостями не залежить від дії зовнішніх потенціальних сил (в тому числі і від сил тяжіння), а розподіл Больцмана по значеннях потенціальної енергії в зовнішньому потенціальному полі не залежить від розподілу швидкостей молекул. Обидва ці розподіли можна об'єднати в один закон Максвелла - Больцмана. Для цього у формулу розподілу Максвелла (11.22) підставимо значення n з формули (11.36), що описує закон розподілу Больцмана:

$$dn = \frac{4}{\sqrt{\pi}} n_0 \left(\frac{m}{2kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\Delta U}{kT}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv. \quad (11.38)$$

За формулою розподілу Максвелла - Больцмана (11.38) можна визначити число молекул ідеального газу, швидкості яких лежать в інтервалі від v до $v + dv$ і мають потенціальну енергію U в полі зовнішніх сил.

Закон Максвелла - Больцмана можна застосовувати не тільки до молекул, а й до будь-яких частинок, поведінка яких подібна молекулам ідеального газу.

Для реальних газів цей закон можна застосовувати доти, поки можна нехтувати взаємодією їх молекул на відстані, тобто для розріджених газів. Крім цього, при температурі близькій до абсолютного нуля, рух молекул газу відбувається уже не за законами класичної механіки, а підпорядкований законам квантової механіки (в даному випадку використовують квантові розподіли Бозе - Ейнштейна і Фермі - Дірака).

11.5. Середнє число зіткнень і середня довжина вільного пробігу молекул

Теорія і експерименти показують, що швидкості молекул дуже великі. При звичайних температурах вони становлять сотні метрів за секунду. Проте макроскопічні відстані, які проходять окремі молекули, дуже малі. Річ у тому, що в реальних умовах молекули газу рухаються не прямолінійно, а зигзагоподібно внаслідок численних зіткнень між собою. Через велике число молекул їх "ламаний" шлях складається з прямолінійних відрізків різної довжини. Тому слід говорити про середню довжину вільного пробігу молекул $\bar{l}$ і середнє число зіткнень за одиницю часу $\bar{z}$.

Середня відстань, яку проходить молекула між двома послідовними зіткненнями, називається середньою довжиною вільного пробігу молекул.

За одиницю часу молекула в середньому проходить відстань, яка чисельно дорівнює середній швидкості $\bar{v}$. Якщо за цей час вона в середньому зазнає $\bar{z}$ зіткнень з іншими молекулами, то її середня довжина вільного пробігу, очевидно, буде

$$\bar{l} = \frac{\bar{v}}{\bar{z}}. \quad (11.39)$$

Припустимо, що всі молекули перебувають у спокої, крім однієї, яка рухається із швидкістю $\bar{v}$. Нехай молекула буде у вигляді кулі з діаметром, який дорівнює ефективному діаметру σ молекули (σ – мінімальна відстань, на яку можуть зблизитися центри двох молекул). Дана молекула зазнає зіткнень з усіма нерухомими молекулами, центри яких лежать у межах ламаного циліндра діаметром 2σ (центр рухомої молекули внаслідок зіткнень рухається по ламаній лінії – рис.11.4; пунктир).

За одиницю часу молекула пройде шлях, що дорівнює $\bar{v}$. Отже, за цей час відбудеться число зіткнень, яке дорівнює числу молекул, що містяться в ламаному циліндрі з площею основи $\pi\sigma^2$ і висотою $\bar{v}$ (рис.11.4). Об'єм такого "випрямленого" циліндра $\pi\sigma^2\bar{v}$.

Помноживши об'єм циліндра на число молекул в одиниці об'єму n , дістанемо середнє число зіткнень за одиницю часу рухомої молекули з нерухомими:

$$\bar{z} = \pi \sigma^2 \bar{v} n. \quad (11.40)$$

Насправді всі інші молекули також рухаються. Тому число зіткнень визначається не середньою швидкістю молекул, а середньою відносною швидкістю.

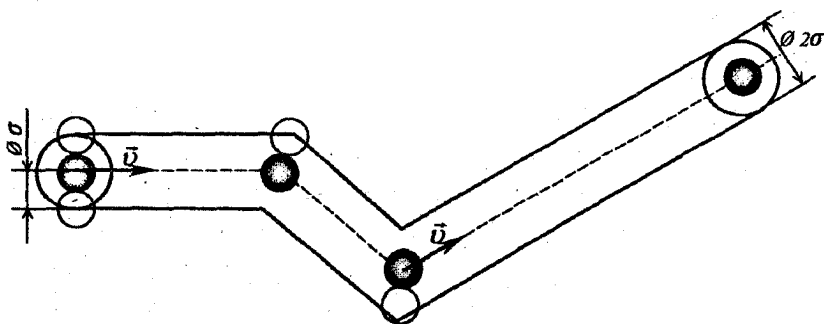


Рис. 11.4

Щоб знайти цю швидкість, припустимо, що до зіткнення молекули мали швидкості $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$. Тоді відносна швидкість руху першої молекули відносно другої $\vec{v}_B = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$.

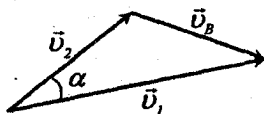


Рис. 11.5

З трикутника швидкостей (рис. 11.5) маємо

$$v_B^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos \alpha.$$

Оскільки середнє значення суми декількох величин повинно дорівнювати сумі середніх значень цих величин, то

$$\bar{v}_B^2 = \bar{v}_1^2 + \bar{v}_2^2 - 2\bar{v}_1\bar{v}_2 \cos \alpha. \quad (11.41)$$

Середнє значення квадратів величин швидкостей всіх молекул однакове: $\overline{v_1^2} = \overline{v_2^2} = \overline{v^2}$. Оскільки всі напрями руху молекул рівноймовірні, то кут α між векторами $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$ після кожного зіткнення молекул може набувати значень як менших, так і більших за $\frac{\pi}{2}$. Отже, середнє значення $\cos \alpha$ буде дорівнювати нулю, тобто $\overline{\cos \alpha} = 0$. Тепер рівняння (11.41) можна подати у вигляді

$$\overline{v_B} = \sqrt{2} \overline{v}, \quad (11.42)$$

тобто середня відносна швидкість руху молекул в $\sqrt{2}$ разів більша від середньої абсолютної швидкості $\overline{v}$ молекул. Тому при врахуванні руху всіх молекул середнє число зіткнень, що зазнає молекула за одиницю часу,

$$\bar{z} = \sqrt{2} \pi \sigma^2 n \overline{v}. \quad (11.43)$$

Підставивши $\bar{z}$ з рівняння (11.43) в (11.39), дістанемо вираз для середньої довжини вільного пробігу молекули:

$$\bar{\ell} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi \sigma^2 n}, \quad (11.44)$$

де σ – стала величина. В дійсності ефективний діаметр σ молекули залежить від кінетичної енергії взаємодіючих молекул, а значить і від температури. Тому за Сазерлендом ця залежність виражається формулою

$$\sigma = \sigma_0 \sqrt{\frac{T+C}{T}}, \quad (11.45)$$

де σ_0 – величина, яку можна розглядати як істинний діаметр молекули; C – стала Сазерленда, яка визначається дослідним шляхом (наприклад, для повітря $C = 119^\circ \text{C}$). Тому від температури залежить і середня довжина вільного пробігу молекули $\bar{\ell}_T$:

$$\bar{\ell}_T = \bar{\ell} \frac{T}{T+C}, \quad (11.46)$$

де $\bar{\ell}$ обчислюють за формулою (11.44).

Отже, з підвищенням температури σ зменшується, а величина $\bar{\ell}$ зростає.

З формули (11.44) $\bar{\ell} \sim \frac{1}{p}$ (при $T = \text{const}$ $p \sim n$), тобто середня довжина вільного пробігу $\bar{\ell}$ обернено пропорційна тиску p газу.

При досить малих тисках $\bar{\ell}$ може перевищувати лінійні розміри посудини (L), в якій перебуває газ. Таке розрідження газу називається вакуумом. Так, для повітря в пористих речовинах при розмірах пор порядку 10^{-7} м уже атмосферний тиск є вакуумом, оскільки середня довжина вільного пробігу молекул повітря за нормальних умов $\bar{\ell} \approx 0,6 \cdot 10^{-7}$ м. Отже, поняття вакууму є відносне.

Виберемо характерний лінійний розмір посудини $L = 10$ см. При цьому розрізняють такі ступені вакууму:

- а) надвисокий вакуум $\bar{\ell} \gg L$ – діапазон тисків $133 \cdot 10^{-8} - 133 \cdot 10^{-13}$ Па;
- б) високий вакуум $\bar{\ell} \geq L$ – $133 \cdot 10^{-4}$ до $133 \cdot 10^{-7}$ Па;
- в) середній вакуум $\bar{\ell} \geq L$ – $133 \cdot 10^{-2}$ до $133 \cdot 10^{-4}$ Па;
- г) низький вакуум $\bar{\ell} \leq L$ – діапазон тисків $1,01325 - 133 \cdot 10^{-2}$ Па.

При інших геометричних розмірах посудини L різні ступені вакууму будуть припадати на інші діапазони тисків. Сучасна вакуумна техніка дозволяє дістати тиск $133 \cdot 10^{-12}$ Па і нижче. Високий вакуум застосовують у різних електронних приладах (кінескопах, радіолампах), напівпровідниковій технології тощо.

11.6. Явища переносу в газах

У молекулярно-кінетичній теорії рівноважний стан газу розглядається як стан повної хаотичності руху молекул, розподіл яких по швидкостях описується законом Максвелла.

Будь-який нерівноважний стан газу завжди пов'язаний з порушенням повної хаотичності руху і максвеллівського розподілу молекул за швидкостями. Основною особливістю нерівноважних станів є намагання газу самовільно перейти в рівноважний стан. Цей перехід зумовлений хаотичним тепловим рухом молекул з неперервними зіткненнями їх одна з одною, які приводять до постійного перемішування молекул, змін їх швидкостей та енергій. У встановленні рівноважного стану (термодинамічної рівноваги) в газах важливу роль відіграють явища (процеси) дифузії, внутрішнього тер-

тя, теплопровідності. Такі явища називаються **явищами переносу**, оскільки вони пов'язані з перенесенням маси (дифузія), кінетичної енергії (теплопровідність) і імпульсу (внутрішнє тертя або в'язкість).

Спочатку всі ці явища досліджувалися експериментальним шляхом. При цьому вдалося, не заглиблюючись в молекулярний механізм явищ переносу, встановити ряд експериментальних законів, яким вони підпорядковані.

Розглянемо послідовно явища в'язкості (внутрішнього тертя), теплопровідності і дифузії в газах.

1. **В'язкість.** Явище внутрішнього тертя полягає у виникненні сил тертя між шарами газу, що переміщуються паралельно один одному з різними за величиною швидкостями. Припустимо, що потік газу рухається паралельно нерухомій площині XOY в напрямі осі OX (рис.11.6). При ламінарному русі швидкість течії v газу змінюватиметься від одного шару до

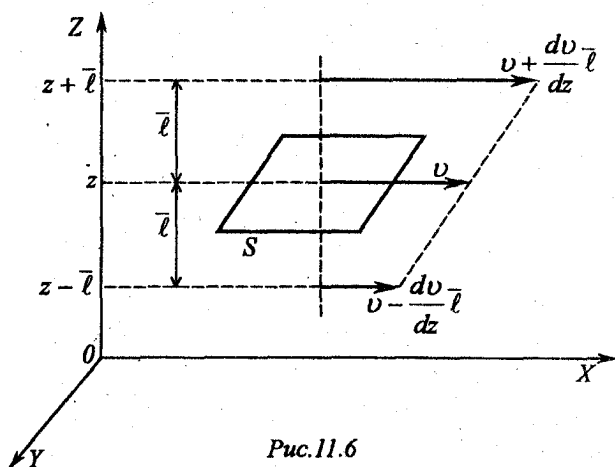


Рис.11.6

другого. Як відомо з механіки, на межі між сусідніми шарами виникає сила внутрішнього тертя, яка визначається за законом Ньютона

$$F = \eta \left| \frac{dv}{dz} \right| S, \quad (11.47)$$

де η – коефіцієнт внутрішнього тертя (динамічна в'язкість, або просто в'яз-

кість); $\left| \frac{dv}{dz} \right|$ – модуль градієнта швидкості руху газу в напрямі осі OZ ; S – площа між суміжними шарами, на яку по дотичній діє сила F .

З формули (11.47) випливає, що коефіцієнт внутрішнього тертя чисельно дорівнює силі внутрішнього тертя, яка діє по дотичній на одиницю площі, взятої на межі між шарами, які рухаються один відносно одного при градієнті швидкості, що дорівнює одиниці. В Міжнародній системі одиниць коефіцієнт в'язкості вимірюють в $\text{кг}/(\text{м} \cdot \text{с})$ або $\text{Н} \cdot \text{с}/\text{м}^2$.

Виконаємо розрахунок коефіцієнта внутрішнього тертя. З погляду кінетичної теорії причиною внутрішнього тертя є накладання впорядкованого руху шарів з різними швидкостями U на хаотичний тепловий рух молекул із швидкістю $\bar{U}$, тобто взаємодія сусідніх шарів здійснюється перенесенням імпульсу з одного шару до іншого. Імпульс кожної молекули можна розкласти на дві складові, одна з яких зумовлена участю молекули в хаотичному, а друга – в поступальному русі шару. Якщо температура газу скрізь однакова, то при переході молекул з одного шару в інший складова імпульсу, яка зумовлена участю в хаотичному русі, в середньому не змінюється. По-іншому себе веде друга складова імпульсу. Виділимо в газі на межі двох шарів площадку S , що має координату z (рис.11.6). Молекули, які проходять крізь S з верхнього шару з більшою швидкістю в нижній шар з меншою швидкістю, приносять з собою більший імпульс, ніж в середньому припадає на молекулу нижнього шару, і прискорюють таким способом його рух. Навпаки, молекули, які рухаються крізь S знизу вгору, будуть збільшувати у верхньому шарі свій імпульс за рахунок зіткнень з молекулами цього шару і таким способом спричинюють його гальмування.

Складова імпульсу, яка переноситься через площадку, визначається значенням швидкості руху газу в тому місці, де відбулося її останнє зіткнення з іншою молекулою. В середньому воно відбувається на відстані від площадки S , що дорівнює середній довжині вільного пробігу молекул $\bar{\ell}$. Тому молекулам, які рухаються через площадку S знизу вгору, слід приписати одне значення швидкості руху газу в перерізі з координатою $z - \bar{\ell}$, а молекулам, які рухаються згори вниз в перерізі з координатою $z + \bar{\ell}$, – друге (рис.11.6).

Отже, з нижнього шару однією молекулою через площадку S в се-

редньому переноситься складова імпульсу $m\left(v - \frac{dv}{dz} \bar{\ell}\right)$, а з верхнього шару вниз – $m\left(v + \frac{dv}{dz} \bar{\ell}\right)$. Різниця цих величин дорівнює $2m \frac{dv}{dz} \bar{\ell}$ і являє собою зміну імпульсу шару, розраховану на одну молекулу. Щоб знайти повну зміну імпульсу шару, потрібно дану величину помножити на число молекул, які пролітають через площадку S за час t .

Це число можна спрощено підрахувати наступним чином. Розглянемо прямокутний паралелепіпед з основою S і висотою, що дорівнює середній швидкості $\bar{v}$ теплового руху молекул. Із усіх молекул, що в ньому перебувають, за одиницю часу пролетять через площадку S тільки ті, швидкість яких напрямлена до площадки S . Оскільки всі напрямки руху молекул рівномірні, то можна вважати, що у вертикальному напрямку рухається $1/3$ всіх молекул, половина яких рухається згори вниз і половина знизу вгору. Якщо густина газу скрізь однакова і в одиниці об'єму газу міститься n молекул, то їх число в об'ємі паралелепіпеда дорівнює $nS\bar{v}$. Отже, через площадку S за одиницю часу пролетить $\frac{1}{6}nS\bar{v}$ молекул, а за час Δt – $\frac{1}{6}nS\bar{v}\Delta t$. Таким чином, повна зміна імпульсу

$$\Delta p = 2m \frac{dv}{dz} \bar{\ell} \cdot \frac{1}{6} n S \bar{v} \Delta t. \quad (11.48)$$

Оскільки зміна імпульсу за одиницю часу дорівнює силі, то

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{1}{3} m n \bar{v} \bar{\ell} S \frac{dv}{dz}. \quad (11.49)$$

Порівнюючи (11.49) з законом Ньютона (11.47), дістаємо*

$$\eta = \frac{1}{3} m n \bar{v} \bar{\ell} = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\ell}, \quad (11.50)$$

де $\rho = mn$ – густина газу.

Звідси видно, що коефіцієнт в'язкості η газів не залежить від тиску і густини газу ρ , оскільки $\rho \sim p$, а $\bar{\ell} \sim \frac{1}{p}$. Цей, здавалося б, парадоксальний ре-

зультат має таке пояснення. При зниженні тиску концентрація газу n зменшується, тобто зменшується число молекул, які беруть участь у перенесенні імпульсу між шарами. Одночасно з цим зростає середня довжина вільного пробігу молекул $\bar{\ell}$, а значить, збільшується різниця в імпульсі, який переноситься в протилежних напрямках. Обидва ефекти взаємно компенсуються і в результаті імпульс, що переноситься молекулами з одного шару в інший, не залежить від тиску.

Оскільки $\bar{v} \sim \sqrt{T}$, то можна вважати, що і $\eta \sim \sqrt{T}$. Проте цей висновок справедливий тільки для випадку, коли ефективний діаметр σ є величина стала. Величина σ дещо зменшується при зростанні температури. Відповідно до цього η зменшується зі зменшенням температури швидше, ніж $\sqrt{T}$.

2. Теплопровідність. Якщо шари газу мають різну температуру, то в газі виникає перенесення енергії у формі теплоти від більш нагрітого шару до шару з нижчою температурою, тобто виникає явище теплопровідності. Процес передачі внутрішньої енергії відбувається так, що кількість теплоти Q , яка переноситься через площадку S , перпендикулярну до напрямку потоку теплоти, прямо пропорційна градієнту температури $\frac{dT}{dz}$, площі S і часу t , протягом якого відбувається процес:

$$Q = -\kappa \frac{dT}{dz} St, \quad (11.51)$$

де знак „мінус” показує, що енергія переноситься в сторону нижчої температури.

Формулу (11.51) встановив експериментально Ж. Фур'є і її називають законом теплопровідності Фур'є. З виразу (11.51) випливає, що коефіцієнт теплопровідності κ чисельно дорівнює кількості теплоти, що переноситься через одиницю площі за одиницю часу при градієнті температури, що дорівнює одиниці. В системі одиниць СІ коефіцієнт теплопровідності вимірюється у Вт/(м·К).

Механізм теплопровідності пов'язаний з хаотичним тепловим рухом молекул. Молекули з більш нагрітого шару газу, під час свого руху при зіткненні з молекулами сусіднього, менш нагрітого шару, передають їм части-

ну своєї кінетичної енергії.

Отже, процес теплопровідності приводить до вирівнювання температур шарів газу.

Виконаємо розрахунок коефіцієнта теплопровідності газів на основі молекулярно-кінетичних уявлень. Розглянемо потік теплоти Q через площадку S , перпендикулярну до осі OZ , вздовж якої підтримується стала різниця температур ($\frac{dT}{dz} = \text{const}$). Температури газу в перерізах з координатами $z + \bar{\ell}$ і $z - \bar{\ell}$, що знаходяться на відстанях $\bar{\ell}$ від S (рис.11.7), відповідно дорівнюють $T \pm \frac{dT}{dz} \bar{\ell}$.

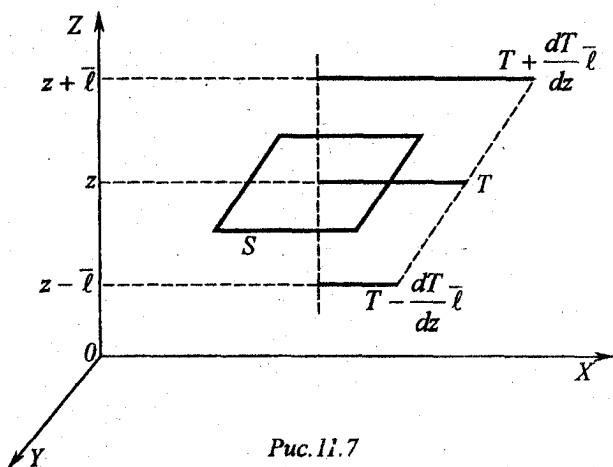


Рис.11.7

При невеликій різниці в температурі шарів газу можна вважати, що добуток числа n молекул в одиниці об'єму газу на середню швидкість $\bar{v}$ молекул для обох шарів приблизно однаковий. Внаслідок рівномірності напрямків у газі через площадку S за одиницю часу вздовж осі OZ рухається $1/3$ загальної кількості молекул; з них половина рухається знизу вгору, а половина – згори вниз.

Оскільки для середньої кінетичної енергії молекули маємо $\frac{3}{2}kT$ (11.14), то для кількості теплоти Q , перенесеної через площадку S за час t

молекулами газу згори вниз, дістанемо

$$Q_1 = \frac{I^*}{6} n S \bar{v} t \cdot \frac{3}{2} k \left(T + \frac{dT}{dz} \bar{\ell} \right). \quad (11.52)$$

Аналогічно для кількості теплоти, перенесеної молекулами газу через площадку S за час t знизу вгору,

$$Q_2 = \frac{1}{6} n S \bar{v} t \cdot \frac{3}{2} k \left(T - \frac{dT}{dz} \bar{\ell} \right). \quad (11.53)$$

Результуюча кількість теплоти через площадку S за час t буде

$$Q = Q_1 - Q_2 = \frac{1}{6} n S \bar{v} t \cdot \frac{3}{2} k \frac{dT}{dz} 2 \bar{\ell} \quad (11.54)$$

або

$$Q = \frac{1}{2} n k \bar{v} \bar{\ell} \frac{dT}{dz} S t \quad (11.55)$$

Прирівнюючи праві частини в (11.51) і (11.55), дістанемо

$$\kappa = \frac{1}{2} k n \bar{v} \bar{\ell}. \quad (11.56)$$

Цей вираз можна перетворити, ввівши питому теплоємність C_v . Оскільки $\frac{3}{2} k T n$ є середня енергія молекул в одиниці об'єму газу, то кількість теплоти, що потрібна для нагрівання одиниці об'єму газу на один градус при постійному об'ємі (C_v), дорівнює $\frac{3}{2} k n$. Оскільки маса одиниці об'єму газу дорівнює його густині ρ , то $C_v = \frac{3}{2} \frac{k n}{\rho}$, звідки $k n = \frac{2}{3} C_v \rho$. Підставивши цей вираз у формулу (11.56), дістанемо

$$\kappa = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\ell} C_v. \quad (11.57)$$

Теплопровідність κ не залежить від тиску газу з тієї самої причини, з якої не залежить від тиску в'язкість η . Крім цього, її залежність від температури така ж, як і η , тобто κ зростає з температурою дещо швидше, ніж $\sqrt{T}$.

Зазначимо, що розглядувана нами кінетична теорія враховує тільки парні зіткнення молекул, тому її результати не можна застосовувати для газів з великою густиною, коли важливу роль починають відігравати потрійні зіткнення.

3. Дифузія. Процес дифузії газів полягає у самовільному вирівнюванні густин (концентрацій) у суміші, зумовленому тепловим рухом мікрочастинок. Якщо середовище однокомпонентне, то мова йде про самодифузію. Вирівнювання густини в газі у процесі дифузії здійснюється внаслідок перенесення маси в напрямі зменшення густини. Дифузія – процес необоротний.

Експериментально доведено, що маса газу M , яка переноситься молекулами в процесі дифузії за час t з областей, де концентрація (густина) молекул більша, в області, де вона менша, може бути обчислена за законом А. Фіка:

$$M = -D \frac{d\rho}{dz} S t, \quad (11.58)$$

де D – коефіцієнт дифузії (самодифузії); S – площа, перпендикулярна до напрямку дифузії; $\frac{d\rho}{dz}$ – градієнт густини газу. Знак мінус поставлений тому, що напрям перенесення маси протилежний напрямові градієнта густини.

З формули (11.58) випливає, що коефіцієнт дифузії чисельно дорівнює масі речовини, яка переноситься через одиницю площі за одиницю часу при градієнті густини, що дорівнює одиниці. Його одиниця вимірювання в СІ – $1 \text{ м}^2/\text{с}$.

Явище дифузії в газі є, з погляду кінетичної теорії, процес, цілком аналогічний процесам внутрішнього тертя і теплопровідності. Різниця полягає тільки в тому, що тут переноситься молекулами не імпульс, як в явищі внутрішнього тертя, не енергія, як в явищі теплопровідності, а маса.

Обчислимо коефіцієнт самодифузії на основі молекулярно-кінетичної теорії газів. Нехай в посудині міститься тільки один газ, концентрація (густина) якого в об'ємі неоднакова і яка змінюється тільки в напрямі осі OZ (рис.11.8). Позначимо через n_1 , n і n_2 – середнє число молекул, що міститься в одиниці об'єму газу відповідно в перерізах $z - \bar{\ell}$, z і $z + \bar{\ell}$

(концентрації газу з обох сторін площадки підтримуються сталими).

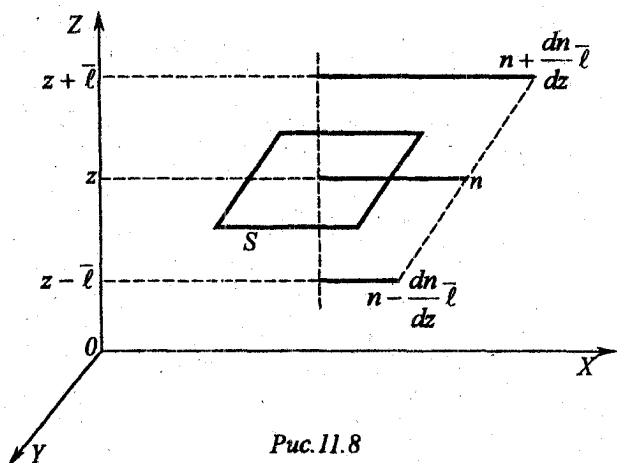


Рис. 11.8

Очевидно, що $n_1 = n - \frac{dn}{dz} \bar{l}$, а $n_2 = n + \frac{dn}{dz} \bar{l}$. Тоді кількості молекул, що переносяться через площадку S за час t знизу вгору (N_1) і згори вниз (N_2), відповідно дорівнюють:

$$N_1 = \frac{1}{6} n_1 \bar{v} S t = \frac{1}{6} \left(n - \frac{dn}{dz} \bar{l} \right) \bar{v} S t, \quad (11.59)$$

$$N_2 = \frac{1}{6} n_2 \bar{v} S t = \frac{1}{6} \left(n + \frac{dn}{dz} \bar{l} \right) \bar{v} S t. \quad (11.60)$$

Різниця цих величин $\Delta N = N_2 - N_1$ дає число молекул, що пролітають через цю площадку в напрямі від шару $z + \bar{l}$ до шару $z - \bar{l}$ (рис. 11.8):

$$\Delta N = \frac{1}{3} \bar{v} S t \bar{l} \frac{dn}{dz}. \quad (11.61)$$

Помноживши ΔN на масу m однієї молекули, знайдемо результуючий перенос маси газу M через площадку S за час t :

$$M = m \Delta N = \frac{1}{3} \bar{v} S m \frac{dn}{dz} \bar{\ell} t. \quad (11.62)$$

Оскільки $m \frac{dn}{dz} = \frac{d(mn)}{dz}$, а $mn = \rho$, то

$$M = \frac{1}{3} \bar{v} \frac{d\rho}{dz} \bar{\ell} S t. \quad (11.63)$$

Порівнюючи (11.63) і (11.58), маємо

$$D = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\ell}. \quad (11.64)$$

З (11.64) випливає, що коефіцієнт самодифузії газу D обернено пропорційний тиску, тому що $\bar{\ell} \sim \frac{1}{n}$, а $n \sim p$, і прямо пропорційний $\sqrt{T}$ ($\bar{v} \sim \sqrt{T}$).

Для суміші газів характерна взаємна дифузія. Такі суміші широко використовують у багатьох технологічних процесах, а також для дихання під водою, під землею, у космічних польотах тощо. Коефіцієнт взаємної дифузії D_{12} одного компонента газової суміші в інший визначається за формулою

$$D_{12} = \frac{1}{3} \left(\frac{\rho_2}{\rho} \bar{\ell}_1 \bar{v}_1 + \frac{\rho_1}{\rho} \bar{\ell}_2 \bar{v}_2 \right), \quad (11.65)$$

де індекси 1 і 2 стосуються першого та другого компонентів суміші; $\frac{\rho_i}{\rho}$

$\frac{\rho_2}{\rho}$ – відносні густини компонентів; ρ – густина суміші.

Зауважимо, що закони Ньютона, Фур'є і Фіка, строго кажучи, є диференціальними законами, застосованими для малої площі dS і малого проміжку часу dt . Тому їх можна записати так:

$$dF = \eta \left| \frac{dv}{dz} \right| dS, \quad (11.66)$$

$$dQ = -\mathcal{K} \frac{dT}{dz} dS dt, \quad (11.67)$$

$$dM = -D \frac{d\rho}{dz} dS dt. \quad (11.68)$$

Між коефіцієнтами переносу існують прості залежності, що випливають із формул (11.50), (11.57) і (11.64):

$$\eta = \rho D, \quad \mathcal{K} = C_v \eta. \quad (11.69)$$

Ці формули показують, що за знайденими з досліду значеннями коефіцієнта внутрішнього тертя η , дифузії D або теплопровідності $\mathcal{K}$ можна визначити інші коефіцієнти переносу, а також обчислити довжину вільного пробігу $\bar{\ell}$ і ефективний діаметр σ молекул.

Контрольні запитання

1. Виведіть основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії газів. У чому полягає його фізичний зміст?
2. Яке молекулярно-кінетичне тлумачення абсолютної температури?
3. У чому полягає максвеллівський розподіл молекул за швидкостями?
4. Виведіть барометричну формулу. Що вона характеризує?
5. У чому полягає розподіл Больцмана?
6. Що називається середньою довжиною вільного пробігу молекули? Як і чому вона залежить від температури?
7. У чому суть явищ переносу і чим вони зумовлені?
8. Поясніть фізичну суть законів Ньютона, Фур'є і Фіка?
9. Що називається вакуумом? Які розрізняють ступені вакууму?

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Суміш кисню і азоту при температурі $T = 290 \text{ K}$ і тиску $p = 5,8 \text{ кПа}$ має густину $\rho = 0,4 \text{ кг/м}^3$. Визначити концентрацію молекул кисню в суміші.

Розв'язання. Тиск суміші газів, згідно з законом Дальтона, дорівнює

сумі парціальних тисків

$$p = p_1 + p_2,$$

які знайдемо з рівняння Клапейрона – Менделєєва:

$$p_1 = \frac{\rho_1}{\mu_1} RT, \quad p_2 = \frac{\rho_2}{\mu_2} RT, \quad (1)$$

де ρ_1 і ρ_2 – парціальні густини кисню і азоту, тобто густини, які мали б гази, коли б кожний з них займав весь цей об'єм окремо. Очевидно, що

$$\rho = \rho_1 + \rho_2. \quad (2)$$

Оскільки з основного рівняння кінетичної теорії випливає, що $p = nkT$, рівняння (1) можна записати у вигляді:

$$n_1 = \frac{\rho_1}{\mu_1} N_A; \quad n_2 = \frac{\rho_2}{\mu_2} N_A,$$

де n_1 і n_2 – концентрації молекул кисню і азоту.

Визначивши із останніх двох рівнянь ρ_1 і ρ_2 –

$$\rho_1 = \frac{n_1 \mu_1}{N_A}, \quad \rho_2 = \frac{n_2 \mu_2}{N_A}$$

і підставивши їх в рівняння (2), дістанемо

$$\rho = \frac{n_1 \mu_1}{N_A} + \frac{n_2 \mu_2}{N_A}. \quad (3)$$

Концентрація молекул суміші газів дорівнює сумі концентрацій компонентів

$$n = n_1 + n_2 = \frac{p}{kT}. \quad (4)$$

Розв'язуючи разом рівняння (3) і (4), визначимо концентрацію молекул кисню:

$$n_1 = \frac{p N_A - p \mu_2 / (kT)}{\mu_1 - \mu_2} = 5 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}.$$

Приклад 2. Визначити, яка частина молекул водню $\left(\frac{\Delta n}{n}\right)$ при температурі $T = 300$ К має значення швидкостей, що перебуває в інтервалі від $v = 1900$ м/с до $v_1 \approx 1905$ м/с.

Розв'язання. При малому інтервалі швидкостей Δv можна скористатися формулою (11.28):

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2 \Delta u.$$

Найбільш імовірну (v_{im}) і відносну швидкість (u) знаходимо із формул:

$$v_{im} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = 1580 \text{ м/с (молярна маса водню } \mu = 2 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль);}$$

$$u = \frac{v}{v_{im}} \approx 1,2, \text{ а } \Delta u = \frac{\Delta v}{v_{im}} = 3,16 \cdot 10^{-3} (\Delta v = v_1 - v).$$

Підставляючи значення величин u і Δu у вираз для $\frac{\Delta n}{n}$, дістанемо

$$\frac{\Delta n}{n} = 2,46 \cdot 10^{-3},$$

тобто 0,246 % всіх молекул водню мають швидкості, що знаходяться в указаному інтервалі.

Приклад 3. Вважаючи температуру повітря і прискорення вільного падіння незалежними від висоти, знайти, на якій висоті h над рівнем моря густина повітря в два рази менша від свого значення на рівні моря. Температуру повітря T вважати рівною 273 К.

Розв'язання. При сталій температурі густина ідеального газу прямо пропорційна тиску. Тому згідно з барометричною формулою

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0} = e^{-\frac{\rho_0 g h}{p_0}},$$

звідки

$$h = \frac{RT}{\mu g} \ln \frac{\rho_0}{\rho} = 5,5 \cdot 10^3 \text{ м}$$

(для повітря $\mu = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль).

Приклад 4. Визначити середню довжину вільного пробігу молекул повітря при температурі $T = 290$ К і нормальному тиску ($p = 1,013 \cdot 10^5$ Па). Ефективний діаметр σ молекул повітря вважати рівним $3 \cdot 10^{-10}$ м.

Розв'язання. Середня довжина вільного пробігу молекул згідно з (11.44)

$$\bar{\ell} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi \sigma^2 n}$$

З основного рівняння молекулярно-кінетичної теорії газів концентрація молекул повітря

$$n = \frac{p}{kT}$$

Отже,

$$\bar{\ell} = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi \sigma^2 p} \approx 10^{-7} \text{ м}$$

(стала Больцмана $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К).

Приклад 5. Знаючи, що в'язкість водню при нормальних умовах ($p = 1,01 \cdot 10^5$ Па, $T = 273$ К) $\eta = 8,6 \cdot 10^{-6}$ Па · с, обчислити середню довжину вільного пробігу його молекул та їх ефективний діаметр σ .

Розв'язання. В'язкість знаходимо за формулою (11.50)

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\ell},$$

звідки

$$\bar{\ell} = \frac{3\eta}{\rho \bar{v}}$$

Густину ρ газу визначимо, розділивши масу одного моля газу на його об'єм V_μ при нормальних умовах:

$$\rho = \frac{\mu}{V_\mu}$$

Середня швидкість молекул з формули (11.25)

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$$

Тоді

$$\bar{\ell} = \frac{3\eta V_{\mu}}{\mu} \sqrt{\frac{\pi\mu}{8RT}} \approx 1,7 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

Згідно з (11.44)

$$\bar{\ell} = \frac{l}{\sqrt{2} \pi \sigma^2 n},$$

звідки

$$\sigma = \frac{l}{\sqrt{\sqrt{2} \pi n \bar{\ell}}} \approx 2,2 \cdot 10^{-10} \text{ м.}$$

Взято з таблиць: $\mu = 2 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ – молекулярна маса водню;

$R = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$ – молярна газова стала;

$V_{\mu} = 22,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{моль}$ – молярний об'єм газу при нормальних умовах,

$n = 2,7 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$ – число молекул в 1 м^3 (концентрація) газу при нормальних умовах.

Задачі для самостійних вправ

1. Знайти середню кінетичну енергію поступального руху всіх молекул гелію, що міститься в балоні об'ємом $2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3$, якщо його тиск становить $1 \cdot 10^5 \text{ Па}$. Гелій вважати ідеальним газом при даних умовах.

Відповідь: 30 Дж.

2. Середня кінетична енергія поступального руху молекул азоту $1,2 \cdot 10^{-20} \text{ Дж}$. Азот масою 2,8 кг займає об'єм 2 м^3 . Знайти тиск, який створюють молекули на стінки посудини.

Відповідь: 240800 Па.

3. Середня кінетична енергія поступального руху молекул газу становить $6,21 \cdot 10^{-23} \text{ Дж}$. Знайти, яку температуру має цей газ.

Відповідь: 3 К.

4. Яка частина молекул водню $\left(\frac{\Delta n}{n}\right)$, що перебувають при температурі 400 К, володіє швидкостями, які відрізняються від найбільш імовірної

швидкості не більше ніж на 5 м/с?

Відповідь: 0,46 %.

5. Яка частина молекул кисню при 273 К має швидкості від 100 до 110 м/с?

Відповідь: 0,4 %.

6. Яка частина молекул азоту, що перебувають при температурі 400 К, має швидкості, які лежать в інтервалі $v_{\text{мс}} + \Delta v$, де $\Delta v = 20$ м/с?

Відповідь: 3,4 %.

7. Знайти середню довжину вільного пробігу молекул повітря при нормальних умовах, якщо ефективний діаметр молекул $\sigma = 3 \cdot 10^{-10}$ м.

Відповідь: $9,1 \cdot 10^{-8}$ м.

8. Визначити середню довжину вільного пробігу атомів гелію в умовах, коли його густина дорівнює $2,1 \cdot 10^{-2}$ кг/м³, а ефективний діаметр – $1,9 \cdot 10^{-10}$ м.

Відповідь: $1,8 \cdot 10^{-6}$ м.

9. На якій висоті тиск повітря становить 75 % від тиску на рівні моря? Температуру вважати сталою і рівною 273 К.

Відповідь: 2300 м.

10. Знайти тиск повітря на висоті 3250 м над рівнем моря, якщо його температура на цій висоті постійна і дорівнює 278 К. Тиск повітря на рівні моря становить $1,013 \cdot 10^5$ Па, а маса одного моля повітря – $29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Відповідь: $0,68 \cdot 10^5$ Па.

11. Визначити коефіцієнти дифузії і внутрішнього тертя повітря при тиску $1,013 \cdot 10^5$ Па і температурі 283 К. Діаметр молекули повітря дорівнює $3 \cdot 10^{-10}$ м.

Відповідь: $1,48 \cdot 10^{-5}$ м²/с; $1,85 \cdot 10^{-5}$ Па·с.

12. Знайти коефіцієнт теплопровідності водню, якщо відомо, що коефіцієнт в'язкості для нього за цих умов дорівнює $8,6 \cdot 10^{-6}$ Па·с.

Відповідь: 0,09 Вт/(м·К).

13. Відстань між стінками термоса дорівнює $8 \cdot 10^{-3}$ м. При якому тиску теплопровідність повітря, що перебуває між його стінками, почне зменшуватися при відкачуванні? Температура повітря 290 К, а ефективний діаметр молекули повітря вважати рівним $3 \cdot 10^{-10}$ м.

Відповідь: 1,26 Па.

Розділ 12. ПЕРШИЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМІКИ

12.1. Внутрішня енергія. Розподіл енергії за ступенями вільності

Повна енергія тіла складається із кінетичної енергії руху тіла як цілого E_k , з його потенціальної енергії в зовнішньому полі сил E_n і внутрішньої енергії тіла U :

$$E = E_k + E_n + U. \quad (12.1)$$

Під внутрішньою енергією тіла розуміють кінетичну енергію хаотичного (теплого) руху його частинок та їх взаємну потенціальну енергію. Залежно від характеру руху і взаємодії частинок, з яких складається тіло, внутрішня енергія визначається: кінетичною енергією поступального та обертального руху молекул як цілого; потенціальною енергією взаємодії молекул; кінетичною та потенціальною енергією коливального руху атомів у молекулах; внутрішньоатомною та внутрішньоядерною енергіями. У багатьох фізичних явищах, які розглядаються в молекулярній фізиці, внутрішньоатомна і внутрішньоядерна енергії не змінюються і тому їх часто не враховують. Поняття внутрішньої енергії вперше ввів Клаузіус.

В ідеальному газі молекули не взаємодіють одна з одною на відстані, і його внутрішня енергія визначається тільки кінетичною енергією хаотичного руху його молекул.

Середня кінетична енергія поступального руху молекули за формулою (11.14) дорівнює $\frac{3}{2}kT$. Помноживши дану величину на сталу Авогадро, дістанемо значення внутрішньої енергії одного моля ідеального газу:

$$U_\mu = E_k N_A = \frac{3}{2}kTN_A = \frac{3}{2}RT. \quad (12.2)$$

Внутрішня енергії довільної маси m ідеального газу буде рівна внутрішній енергії одного моля, помноженій на число молів газу, що міститься в масі m :

$$U = \frac{m}{\mu} U_\mu = \frac{m}{\mu} \frac{3}{2} RT. \quad (12.3)$$

Отже, внутрішня енергія даної маси ідеального газу залежить тільки від його температури. Нагадаємо, що числом ступенів вільності i тіла називається найменше число незалежних координат, що визначають положення тіла в просторі. Це число збігається з числом можливих переміщень. Для вільної матеріальної точки число ступенів вільності дорівнює трьом (три ступеня вільності поступального руху), для вільного твердого тіла $i=6$ (по три ступеня вільності поступального та обертального рухів).

В ідеальному газі молекули беруть за матеріальні точки. Тому кінетичну енергію молекули ідеального газу можна подати сумою енергій $\frac{mv_x^2}{2} + \frac{mv_y^2}{2} + \frac{mv_z^2}{2}$, які відповідають трьом складовим швидкості її руху відносно трьох координатних осей. Звичайно, в різні моменти молекули мають різні значення складових енергій відносно координатних осей. Але через хаотичність руху молекул усі напрями руху однаково ймовірні, тому середні значення кінетичної енергії по всіх трьох напрямках однакові:

$$\frac{\overline{mv_x^2}}{2} = \frac{\overline{mv_y^2}}{2} = \frac{\overline{mv_z^2}}{2}$$

Оскільки середня кінетична енергія поступального руху молекули $\frac{\overline{mv^2}}{2} = \frac{3}{2}kT$, то на долю кожної із складових руху на один ступінь вільності припадає однакова середня кінетична енергія $\frac{1}{2}kT$.

Дж. Максвелл і Л. Больцман на основі законів статистики і припущення про застосовність законів механіки Ньютона до молекул узагальнили цю закономірність у законі рівномірного розподілу енергії за ступенями вільності: у рівноважній системі, що складається з великої кількості частинок (молекул), кінетична енергія розподіляється в середньому порівну між різними ступенями вільності руху частинок; на кожен ступінь вільності при температурі T у середньому припадає енергія, що дорівнює $\frac{1}{2}kT$.

У випадку “нежорстких” молекул змінюється відстань між атомами, тобто наявні коливальні рухи. На основі закону про рівномірний розподіл енергії за ступенями вільності знайдемо, що на один ступінь вільності ко-

ливального руху припадає енергія, що дорівнює kT , а не $\frac{1}{2}kT$, бо в середньому на потенціальну енергію гармонічних коливань припадає стільки ($\frac{1}{2}kT$), скільки й на кінетичну енергію ($\frac{1}{2}kT$), тобто kT .

Молекула двохатомного газу в першому наближенні являє собою два жорстко зв'язаних атоми, які розміщені на певній відстані один від одного (своєрідна гімнастична гантель). Для неї $i = 5$ (три ступені вільності поступального та два ступені обертального рухів). Отже, її середня кінетична енергія

$$\overline{E_k} = 3 \cdot \frac{1}{2}kT + 2 \cdot \frac{1}{2}kT = \frac{5}{2}kT. \quad (12.4)$$

Система із трьох жорстко зв'язаних між собою матеріальних точок, що не лежать на одній прямій, має шість ступенів вільності: три поступальні і три обертальні. Шість ступенів вільності мають і молекули, що складаються з більш як трьох атомів. Їхня кінетична енергія

$$\overline{E_k} = 3 \cdot \frac{1}{2}kT + 3 \cdot \frac{1}{2}kT = 3kT. \quad (12.5)$$

Модель молекули, що являє собою систему жорстко зв'язаних матеріальних точок, годиться тільки тоді, коли не враховувати енергію коливань атомів у молекулі. Для врахування цієї енергії необхідно перейти до іншої моделі молекули, в якій атоми зв'язані пружним зв'язком, наприклад, пружиною.

Заміна жорсткого зв'язку на пружний у системі з двох матеріальних точок породжує в такій системі шостий ступінь вільності, який відповідає їх коливальному руху.

Враховуючи все це, вираз для середньої енергії молекули можна записати

$$\overline{E} = \frac{i}{2}kT,$$

де i – сума числа поступальних, числа обертальних і подвоєного числа коливальних ступенів вільності молекули, тобто

$$i = i_{\text{пост}} + i_{\text{оберт}} + 2i_{\text{коле}}. \quad (12.6)$$

Тепер внутрішня енергія для довільної маси газу

$$U = \frac{m \cdot i}{\mu \cdot 2} RT. \quad (12.7)$$

При обчисленні внутрішньої енергії реальних газів необхідно ще враховувати і взаємну потенціальну енергію молекул, зумовлену силами міжмолекулярної взаємодії.

У термодинаміці, на відміну від молекулярно-кінетичної теорії, не розглядають питання про те, з яких видів енергії складається внутрішня енергія тіла або системи тіл. Під внутрішньою енергією тіла (системи) в термодинаміці розуміють енергію даного тіла, яка залежить тільки від його внутрішнього стану, тобто енергію, що однозначно визначається його параметрами стану. Отже, в термодинаміці внутрішня енергія тіла (системи) є однозначною функцією стану тіла (системи). З цього випливає, що її зміна при переході системи з стану 1 у стан 2

$$\Delta U = \int_1^2 dU = U_2 - U_1, \quad (12.8)$$

тобто дорівнює різниці значень внутрішньої енергії в цих станах незалежно від способу, яким здійснюється цей перехід.

Якщо відбувається процес, при якому система повертається у початковий стан (круговий процес), то зміна внутрішньої енергії системи в цьому випадку дорівнюватиме нулю:

$$\Delta U = \oint dU = 0, \quad (12.9)$$

тобто підінтегральний вираз dU у цьому випадку є повним диференціалом.

12.2. Робота і теплота. Перший закон термодинаміки

Обмін енергією між будь-якими матеріальними об'єктами може відбуватися у два способи: через виконану роботу і шляхом нагрівання тобто у формі роботи і у формі передачі теплоти. Розглянемо газ, що міститься у циліндрі з поршнем (рис.12.1). При розширенні газу елементарн

робота, яку він здійснює при переміщенні поршня на нескінченно малу відстань dl , становить

$$dA = Fdl, \quad (12.10)$$

де F – сила, з якою газ діє на поршень.

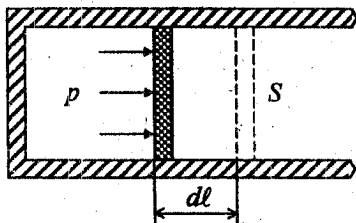


Рис. 12.1

Якщо p – тиск газу, а S – площа поршня, то $F = pS$ і тоді

$$dA = pSdl. \quad (12.11)$$

Добуток Sdl – це зміна об'єму під час розширення газу, тому

$$dA = pdV. \quad (12.12)$$

Тиск, який входить у (12.12), кількісно визначає основну причину процесу. Зміна об'єму – міра процесу, який відбувається.

Коли газ виконує роботу, то $dV > 0$ і робота dA позитивна. При стиску газу $dV < 0$ і робота dA від'ємна. У цьому випадку роботу виконують оточуючі тіла, зокрема поршень. При ізохоричному процесі зміна об'єму $dV = 0$ і виконувана газом робота dA дорівнює нулю.

Зобразимо процес зміни об'єму газу графічно з допомогою кривої 1-2 в координатах p і V (рис. 12.2). При збільшенні об'єму газу на dV виконувана ним робота $dA = pdV$ відповідає площі нескінченно вузької заштрихованої на графіку смуги. Зрозуміло, що робота, виконувана газом при розширенні його об'єму від V_1 до V_2 , складається із елементарних робіт dA . Графічно вона вимірюється площею заштрихованої криволінійної трапеції.

Величина цієї площі залежить не тільки від початкового V_1 і кінцевого V_2 об'ємів, а й від форми кривої $p = f(V)$. Це свідчить про те, що на

відміну від внутрішньої енергії газу виконувана ним робота суттєво залежить від шляху переходу із початкового стану в кінцевий.

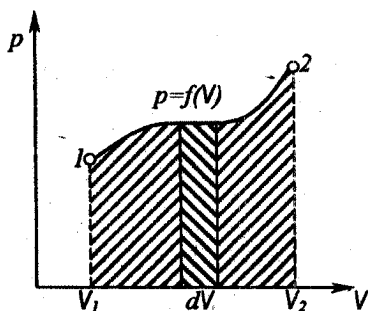


Рис.12.2

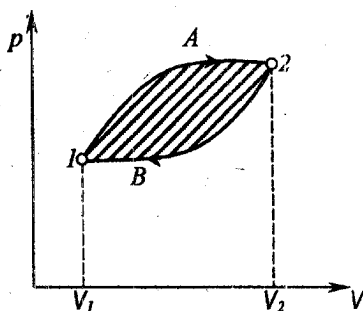


Рис.12.3

Інтегруючи рівняння (12.12), обчислимо роботу, виконувану газом при розширенні його об'єму від V_1 до V_2 :

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV. \quad (12.13)$$

Зокрема, при $P = \text{const}$ (ізобаричний процес) ця робота дорівнює

$$A_{12} = p(V_2 - V_1). \quad (12.14)$$

При круговому процесі (рис.12.3) робота, виконувана системою при розширенні, додатна і графічно зображається площею під кривою 1A2. Ділянка 2B1 відповідає стиску. Робота, виконувана при стиску, від'ємна і графічно зображається площею під кривою 2B1. Результуюча робота, виконувана системою, дорівнює різниці цих двох площ, тобто відповідає заштрихованій площі, обмеженій кривою 1A2B1, яка зображає круговий процес.

Отже, хоча система і повертається в початковий стан, робота, виконувана нею в круговому процесі, не дорівнює нулю:

$$A = \oint dA \neq 0. \quad (12.15)$$

Оскільки робота, виконувана системою, суттєво залежить від шляху переходу її з одного стану в інший, то елементарна робота не є повним ди-

ференціалом. Цю особливість відмічають штрихом у виразі для елементарної роботи $d'A$, тобто $d'A$ означає не приріст, а деяку елементарну роботу, виконувану системою. Робота є характеристикою процесу зміни форми руху, а не стану системи.

Друга форма передавання енергії здійснюється при безпосередньому обміні енергією між частинками взаємодіючих тіл, що рухаються хаотично. Таку форму передавання енергії в термодинаміці називають теплою. Вияснимо, який фізичний зміст має саме поняття тепло.

Ми вже знаємо, що в молекулярно-кінетичній теорії тепло характеризує собою хаотичний рух частинок, які утворюють тіло (систему). Їх енергія входить складовою частиною у внутрішню енергію тіла (системи). Прикладом передавання енергії у формі теплоти може служити теплообмін між гарячим і холодним тілами, що дотикаються. Механізм обміну енергії в цьому випадку полягає в тому, що молекули гарячого тіла, які швидко рухаються, стикаються з молекулами холодного тіла, які рухаються повільніше, і передають їм частину своєї кінетичної енергії. Внаслідок цього внутрішня енергія першого тіла зменшується, другого – збільшується, а їх температури вирівнюються. Такий же обмін енергії може відбуватися і без безпосереднього контакту між тілами, коли вони розділені яким-небудь середовищем (навіть вакуумом). У першому випадку обмін енергії між тілами здійснюється теплопровідністю, в другому – випромінюванням.

Мірою зміни тієї частини внутрішньої енергії тіла (системи), яка зумовлена хаотичним рухом частинок, з яких складається тіло, є кількість теплоти Q . В СІ кількість теплоти вимірюється в джоулях (Дж). Кількість теплоти, що віддає або одержує система, залежить від шляху переходу системи із одного стану в інший.

Як відомо, функцією стану системи є внутрішня енергія системи. Кількість теплоти тільки одна із складових повної зміни внутрішньої енергії системи, тому, як і робота виконувана системою, кількість теплоти не є диференціалом функції параметрів системи. Цю особливість відмічають знаком штриху для елементарної кількості теплоти $d'Q$.

Отже, процес виконання системою роботи і процес передавання їй теплоти – це дві якісно різні форми передавання енергії. Робота проявляється в передаванні енергії упорядкованого руху, а тепло – в передаванні

енергії хаотичного руху частинок, що утворюють систему.

Робота і теплота – взаємоперетворювані форми передавання енергії і в реальних умовах супроводять одна одну. Наприклад, при нагріванні металевого стержня не тільки збільшується його внутрішня енергія, а відбувається також розширення стержня і, отже, виконується робота розширення. Досліди показали, що теплота перетворюється в роботу або робота в теплоту завжди в точно відповідних кількостях. Якщо для вимірювання кількості теплоти скористатися калорією, то виявиться, що 1 кал еквівалентна 4,18 Дж. Це число, яке показує відношення одиниці механічної роботи до одиниці кількості теплоти, називають **механічним еквівалентом теплоти**:

$$J = 4,18 \frac{\text{Дж}}{\text{кал}}$$

Величину, обернену механічному еквіваленту теплоти $\frac{1}{J} = 0,239 \frac{\text{кал}}{\text{Дж}}$, називають **тепловим еквівалентом роботи**.

В СІ роботу і теплоту виражають в одних і тих самих одиницях – джоулях, тому механічний еквівалент теплоти дорівнює одиниці.

Перший закон термодинаміки є виразом одного з основних законів природи – закону збереження і перетворення енергії. Його встановили після того, як була доведена експериментально взаємоперетворюваність роботи і теплоти в еквівалентних кількостях.

Перший закон термодинаміки стверджує, що кількість теплоти Q , одержана системою, витрачається на збільшення її внутрішньої енергії ΔU і на виконання системою роботи A проти зовнішніх сил:

$$Q = \Delta U + A. \quad (12.16)$$

Рівняння (12.16) відображає перший закон термодинаміки в інтегральній формі.

При нескінченно малій зміні стану системи рівняння (12.16) набирає вигляду

$$d'Q = dU + d'A, \quad (12.17)$$

де $d'Q$ – нескінченно мала кількість теплоти, що надається системі; $d'A$ – елементарна робота, що виконує система проти зовнішніх сил; dU – зміна

внутрішньої енергії системи.

Слід відзначити, що $d'Q$ вважається додатною, якщо теплота передається системі, і від'ємною, якщо система віддає теплоту навколишньому середовищу. Навпаки, $d'A$ вважається додатною, якщо система виконує роботу проти зовнішніх сил, і від'ємною, якщо робота виконується над системою (заграна робота). Зауважимо також, що під роботою, яку виконує система, розуміють не тільки роботу сил, що розглядаються в механіці, а й роботу сил будь-якої природи (наприклад, це може бути робота сил поверхневого натягу, електричних, магнітних сил тощо).

Коли стан системи змінюється тільки за рахунок зміни її об'єму, як, наприклад, при розширенні ідеального газу, елементарну роботу можна визначити за формулою (12.12). Для цього випадку рівняння першого закону термодинаміки доцільно записувати у такому вигляді:

$$d'Q = dU + PdV. \quad (12.18)$$

Ця форма ефективна, наприклад, для задач теплотехніки.

Дуже важливим є випадок, коли система являє собою періодично діючу машину, в якій газ (пара або інше "робоче тіло") внаслідок деякого процесу повертається до початкового стану. Такий круговий процес прийнято називати циклом. У цьому випадку внутрішня енергія системи набуває початкового значення і тому $\oint dU = 0$. Тоді за першим законом термодинаміки

$$\oint d'A = \oint d'Q. \quad (12.19)$$

Проінтегрувавши це рівняння по всьому процесу, дістанемо

$$A = Q, \quad (12.20)$$

тобто робота, що виконується машиною за один цикл, дорівнює підведеній ззовні кількості теплоти Q . Цей висновок дає змогу сформулювати перший закон термодинаміки так: вічний двигун першого роду неможливий, тобто неможлива машина, що діє періодично, яка виконувала б роботу без одержання енергії ззовні або виконувала б більшу роботу, ніж одержана ззовні енергія.

Доти, поки не було з'ясовано зміст першого закону термодинаміки,

багато людей у різних країнах світу намагалися створити вічний двигун.

12.3. Теплоємність речовини

Важливе значення у вивченні теплових властивостей речовини має поняття теплоємності.

Теплоємністю тіла (речовини) називають кількість теплоти, яку слід надати тілу для підвищення його температури на один кельвін.

Якщо тілу надано нескінченно малу кількість теплоти $d'Q$, яка викличе нескінченно мале підвищення температури dT , то його теплоємність

$$c_0 = \frac{d'Q}{dT}. \quad (12.21)$$

Теплоємність одиниці маси речовини називають питомою теплоємністю:

$$c = \frac{c_0}{m} = \frac{d'Q}{mdT}. \quad (12.22)$$

Теплоємність одного моля речовини називають молярною теплоємністю:

$$C = \frac{c_0}{\nu} = \frac{d'Q}{\nu dT}, \quad (12.23)$$

де ν – число моль речовини.

Між молярною C і питомою c теплоємностями справедливе співвідношення

$$C = \mu c, \quad (12.24)$$

де μ – молярна маса.

В одиницях СІ питома теплоємність вимірюється в Дж/(кг · К), а молярна теплоємність – Дж/(моль · К).

Оскільки кількість теплоти залежить від характеру процесу переходу речовини із одного стану в інший, то і теплоємність визначається цим процесом. Отже, теплоємність речовини в різних процесах різна, тому її не можна вважати характеристикою тільки самої речовини. В термодинаміці найчастіше доводиться мати справу з ізопроцесами в газах. Будемо відпові-

дно позначати теплоємності при ізобаричному процесі – C_p , при ізохоричному – C_v , при ізотермічному – C_T , при адіабатичному – C_{ad} .

Найважливішу роль у фізиці відіграють дві теплоємності: C_v і C_p .

Запишемо вираз першого закону термодинаміки (12.17) для 1 моля газу з врахуванням формул (12.12) і (12.23):

$$CdT = dU_\mu + pdV_\mu. \quad (12.25)$$

Якщо газ нагрівається при сталому об'ємі, то $pdV_\mu = 0$ і надана газу ззовні теплота йде тільки на збільшення його внутрішньої енергії:

$$CdT = dU_\mu, \quad (12.26)$$

звідки
$$C_v = \frac{dU_\mu}{dT}, \quad (12.27)$$

тобто молярна теплоємність газу при постійному об'ємі V дорівнює зміні внутрішньої енергії 1 моля газу при підвищенні його температури на один кельвін. За формулою (12.7) для одного моля газу

$$dU_\mu = \frac{i}{2} R dT, \quad (12.28)$$

тоді
$$C_v = \frac{i}{2} R. \quad (12.29)$$

Якщо газ нагрівати при сталому тиску, то вираз (12.25) можемо записати у вигляді

$$C_p = \frac{dU_\mu}{dT} + \frac{pdV_\mu}{dT}. \quad (12.30)$$

Враховуючи, що $\frac{dU_\mu}{dT}$ не залежить від виду процесу (внутрішня енергія ідеального газу не залежить ні від тиску p , ні від об'єму V , а визначається тільки температурою T) і дорівнює згідно з (12.27) C_v , а також продиференціювавши рівняння Клапейрона – Менделєєва $pV_\mu = RT$ по T при $p = \text{const}$ $\left(p \frac{dV_\mu}{dT} = R \right)$, з (12.30) дістанемо

$$C_p = C_v + R. \quad (12.31)$$

Вираз (12.31) називається формулою Майєра.

Таким чином, молярна газова стала R чисельно дорівнює роботі, яку виконує один моль ідеального газу, розширюючись при сталому тиску при нагріванні його на один кельвін.

Для реальних газів різниця теплоємностей $C_p - C_v$ може значно відрізнятися від R . Це зумовлене тим, що внутрішня енергія реальних газів залежить не тільки від температури, а й від об'єму, який займає дана маса газу.

Використавши (12.29), формулу (12.31) можна записати у такому вигляді:

$$C_p = \frac{i+2}{2} R. \quad (12.32)$$

Термодинаміка не дозволяє побудувати теорію теплоємності речовини. Приблизну теорію теплоємності вдалося створити на основі молекулярно-кінетичної теорії. В основу цієї теорії, що дістала назву класичної, покладено закон рівномірного розподілу енергії за ступенями вільності.

Для одноатомного ідеального газу внутрішня енергія моль згідно (12.2)

$$U_\mu = \frac{3}{2} RT.$$

Отже,
$$C_v = \frac{dU_\mu}{dT} = \frac{3}{2} R = 12,5 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}, \quad (12.33)$$

$$C_p = C_v + R = \frac{3}{2} R + R = \frac{5}{2} R = 20,8 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}. \quad (12.34)$$

Тоді їх відношення
$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{5}{3} \approx 1,67.$$

Відношення C_p до C_v для будь-яких газів можна визначити з врахуванням формул (12.29) і (12.32):

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i+2}{i}. \quad (12.35)$$

Зокрема, для двоатомного газу з жорстким зв'язком між атомами $i = 5$ і згідно з (12.35)

$$\gamma = \frac{7}{5} = 1,4,$$

а для багатоатомних газів $i = 6$ і

$$\gamma = \frac{8}{6} = 1,33.$$

Отже, молярні теплоємності C_p і C_v та їх відношення визначаються тільки числом ступенів вільності, якими володіє молекула газу, і не залежать від температури. Це твердження молекулярно-кінетичної теорії правильне в широкому інтервалі температур тільки для одноатомних газів. Уже в двоатомних газів число ступенів вільності залежить від температури. Молекула двоатомного газу має три поступальні, два обертальні і один коливальний ступені вільності. На рис.12.4 схематично зображена крива залежності теплоємності двоатомного газу від температури. Пунктирна час-

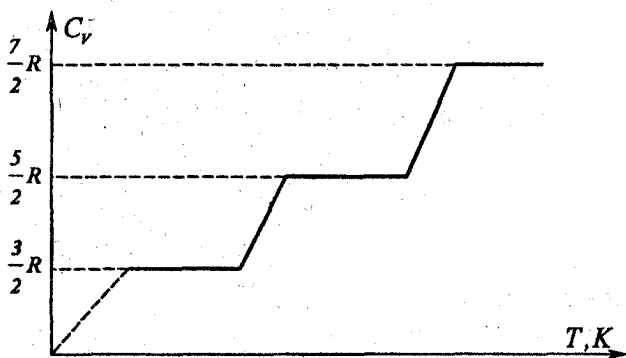


Рис.12.4

тина кривої, що прямує до нуля, показує хід теплоємності після переходу газу в твердий стан.

Наприклад, при 20 К теплоємність C_v водню приблизно дорівнює R , а потім із підвищенням температури до 30 К вона зростає до $\frac{3}{2}R$ і залишається сталою до 60 К. Отже, в межах інтервалу температур від 30 до 60 К теплоємність водню не залежить від температури і рівна теплоємності одноатомного газу ($i=3$). При дальшому підвищенні температури теплоємність водню зростає і при 350 К дорівнює $\frac{5}{2}R$, тобто рівна теоретичній теплоємності двохатомного газу ($i=5$). При температурі 5000 К теплоємність повинна досягати значення $\frac{7}{2}R$, тобто має відбуватися коливальний рух атомів в молекулах ($i=7$). У дійсності, ще до досягнення цієї температури відбувається дисоціація молекул водню на атоми, що приводить до його перетворення в суміш двох одноатомних газів, результуюча молярна теплоємність яких $\frac{6}{2}R$.

Отже, тільки в межах деяких температурних інтервалів теплоємність газу не залежить від температури, а в проміжках між ними вона монотонно зростає. Це дає підставу припустити, що з підвищенням температури в газі відбувається послідовне збудження спочатку обертальних, а потім і коливальних ступенів вільності молекул.

Але навіть з врахуванням додаткових припущень класична теорія не в змозі задовільно пояснити залежність теплоємностей газів від температури. Зокрема, вона, наприклад, не може пояснити, чому саме одна частина молекул газу володіє обертальним або коливальним рухом, а друга частина ні.

Задовільне пояснення всіх дослідних даних змогла дати тільки квантова теорія теплоємності. Справа в тому, що при обчисленні теплоємності потрібно враховувати квантування енергії обертального і коливального рухів молекул (можливі не будь-які обертальні і коливальні енергії, а тільки певний дискретний ряд значень енергій). Якщо енергія теплового руху не достатня для збудження коливань, то ці коливання не вносять свого вкладу в теплоємність (відповідна ступінь вільності "заморожується"). Відповідно можна пояснити зменшення теплоємності при низькій температурі ("заморожуються" обертальні ступені вільності) і її збільшення при високій температурі ("збуджуються" коливальні ступені вільності).

12.4. Політропний процес. Адіабатичний процес. Рівняння Пуассона

Нехай термодинамічною системою буде один моль ідеального газу. Якщо кількість теплоти, надана системі для протікання процесу, буде пропорційна підвищенню температури системи, то такий процес називається політропним. Отже, політропний процес протікає при сталій теплоємності ($C = \text{const}$). У цьому випадку за рахунок кількості теплоти $d'Q$ температура системи зростає на dT , тобто

$$d'Q = CdT. \quad (12.36)$$

На основі першого закону термодинаміки (12.17) та (12.36), а також враховуючи те, що

$$dU = C_v dT; \quad d'A = pdV,$$

запишемо

$$CdT = C_v dT + pdV$$

або

$$(C - C_v)dT = pdV. \quad (12.37)$$

Рівняння (12.37) почленно поділимо на рівняння стану Клапейрона – Менделєєва $RT = pV$:

$$\frac{C - C_v}{R} \frac{dT}{T} = \frac{dV}{V}. \quad (12.38)$$

Після інтегрування (12.38) маємо

$$\frac{C - C_v}{R} \ln \frac{T_2}{T_1} = \ln \frac{V_2}{V_1}$$

або

$$\left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{C - C_v}{R}} = \frac{V_2}{V_1}. \quad (12.39)$$

Вираз (12.39) можна переписати у вигляді

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\frac{R}{C - C_v}} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{-\frac{R}{C - C_v}}$$

$$\text{або} \quad TV^{\frac{R}{C-C_v}} = \text{const}. \quad (12.40)$$

З (12.40) виключимо температуру $\left(T = \frac{pV}{R}\right)$ і врахуємо, що $R = C_p - C_v$.

$$\text{Тоді} \quad pV \cdot V^{\frac{R}{C-C_p}} = \text{const}$$

$$\text{або} \quad pV^{\frac{C-C_p}{C-C_v}} = \text{const}. \quad (12.41)$$

$$\text{Позначивши} \quad \frac{C - C_p}{C - C_v} = n, \quad -\infty \leq n \leq \infty, \quad (12.42)$$

$$\text{у кінцевому вигляді маємо} \quad pV^n = \text{const}. \quad (12.43)$$

Або на основі рівняння Клапейрона – Менделєєва:

$$TV^{n-1} = \text{const}; \quad T^n p^{1-n} = \text{const}.$$

Ці рівняння є рівняннями політропи для ідеального газу, де n – показник політропи.

Політропний процес, який описується рівнянням (12.43), можна вважати узагальнюючим, бо він характеризується фізичними властивостями, які є спільними для інших процесів зміни стану ідеального газу.

Справді, з формул (12.42) і (12.43) при $C = C_p$ і $n = 0$ маємо $p = \text{const}$ (ізобаричний процес), $\frac{V}{T} = \text{const}$ (закон Гей-Люссака). Якщо $C = \pm\infty$ і $n = 1$, то маємо $T = \text{const}$ (ізотермічний процес), $pV = \text{const}$ (закон Бойля-Маріотта). При $C = 0$ і $n = \gamma = \frac{C_p}{C_v}$ дістанемо, що $pV^\gamma = \text{const}$ (рівняння Пуассона для адіабатичного процесу). Коли $C = C_v$ і $n \rightarrow \infty$, то підносячи (12.43) до степеня $\frac{1}{\gamma}$ і переходячи до змінних p і T , дістанемо $\frac{p}{T} = \text{const}$ (ізохоричний процес).

Політропні процеси використовуються в техніці для пояснення енергетичних циклів компресорних машин, мають важливе значення для теорії будови зірок.

Крім розглянутих уже процесів у газах, великий практичний інтерес

становить адиабатичний процес.

Адиабатичний – це такий процес, який протікає без обміну теплотою між термодинамічною системою і зовнішнім середовищем. Оскільки процес теплообміну вимагає деякого часу, то адиабатичними можна вважати процеси, що протікають дуже швидко, тобто такі, при яких система не встигає обмінятися теплотою з навколишнім середовищем. Прикладом можуть служити процеси стиску і розширення газу, зумовлені проходженням в ньому звукових хвиль.

Оскільки при адиабатичному процесі $d'Q = 0$, то рівняння першого закону термодинаміки набуває вигляду

$$d'A = -dU, \quad (12.44)$$

тобто робота, здійснювана системою при адиабатичному процесі, виконується за рахунок зміни її внутрішньої енергії.

Для ідеального газу маємо

$$pdV = -C_v dT. \quad (12.45)$$

З (12.45) видно, що при адиабатичному розширенні ідеального газу його температура знижується, а при стисканні відповідно підвищується.

Використовуючи рівняння стану ідеального газу, виключимо тиск з рівняння (12.45):

$$C_v dT + \frac{RT}{V} dV = 0; \quad \frac{dT}{T} + \frac{R}{C_v} \frac{dV}{V} = 0. \quad (12.46)$$

Проінтегрувавши (12.46), дістанемо

$$\ln T - \frac{R}{C_v} \ln V = \text{const.}$$

Потенціюючи цей вираз, маємо

$$TV^{\frac{R}{C_v}} = \text{const.}$$

Враховуючи, що $R = C_p - C_v$ і $\frac{C_p}{C_v} = \gamma$, після нескладних перетворень знайдемо

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}. \quad (12.47)$$

Це рівняння показує, що адіабатична зміна об'єму ідеального газу впливає на зміну його температури.

Скориставшись рівнянням стану ідеального газу, замінимо в рівнянні (12.47) T через p , V і запишемо його у вигляді

$$pV^{\gamma} = \text{const}. \quad (12.48)$$

Рівняння (12.48) адіабати ідеального газу в змінних p і V називається рівнянням Пуассона, а γ – коефіцієнтом Пуассона або показником адіабати.

Зауважимо, що у виразах (12.47) і (12.48) значення сталої відрізняється на множник R .

При ізотермічному розширенні газу його тиск зменшується обернено пропорційно об'єму в першому степені. При адіабатичному розширенні тиск зменшується обернено пропорційно V^{γ} . Отже, хід адіабати більш крутий порівняно з ізотермою (рис.12.5). Це пояснюється тим, що при адіаба-

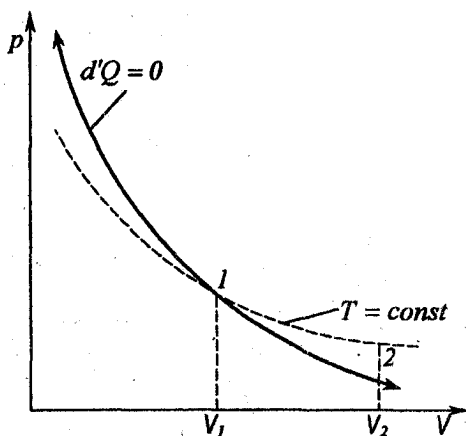


Рис.12.5

тичному розширенні зменшення тиску зумовлене не тільки збільшенням

його об'єму, а й зменшенням температури, і навпаки.

Зазначимо, що адіабатичні процеси відбуваються у двигунах внутрішнього згоряння. Адіабатичний стиск робочої суміші відбувається у двигуні Дизеля. Адіабатичне розширення використовують для одержання низьких температур. На основі адіабатичного розширення газів можна пояснити зміну температури з висотою. Коли повітря піднімається у верхні шари з низьким тиском, то воно розширяється і охолоджується. Це розширення можна вважати адіабатичним через те, що повітря поганий провідник теплоти і теплота від навколишнього повітря досить погано передається повітрю, яке піднімається. Аналогічно повітря, що опускається в нижні шари, адіабатично стискується і нагрівається.

12.5. Робота газу при ізопроцесах

У термодинаміці серед багатьох практичних застосувань (розрахунки теплових двигунів, холодильних машин і т.п.) найчастіше мають справу з ізопроцесами в газах. Розглянемо роботу, виконувану газом в різних ізопроцесах.

Ізохоричний процес ($V = \text{const}$, $dV = 0$). Ізохоричний процес можна здійснити простим нагріванням газу в герметичному товстостінному циліндрі, якщо поршень в ньому жорстко закріплений.

Робота газу при ізохоричному процесі A_V дорівнює нулю:

$$A_V = \int_{V_1}^{V_2} p dV = 0, \quad (12.49)$$

тобто газ не виконує роботи над зовнішніми тілами.

Згідно з формулою (12.27)

$$dU_\mu = C_V dT, \quad (12.50)$$

а для довільної маси газу

$$dU = \frac{m}{\mu} C_V dT. \quad (12.51)$$

Тоді з першого закону термодинаміки (12.17) випливає, що вся теплота, підведена до газу в ізохоричному процесі, йде на збільшення його внут-

рішньої енергії:

$$d'Q = dU = \frac{m}{\mu} C_v dT. \quad (12.52)$$

Якщо теплоємність газу C_v не залежить від температури, то (12.52) можна переписати так:

$$Q = \Delta U = U_2 - U_1 = \frac{m}{\mu} C_v \int_{T_1}^{T_2} dT = \frac{m}{\mu} C_v (T_2 - T_1). \quad (12.53)$$

Ізобаричний процес відбувається при сталому тиску ($p = \text{const}$). Газ, поміщений в циліндр з вільно рухомим поршнем, при нагріванні здійснює ізобаричний процес. Прикладом такого процесу може бути нагрівання води у відкритій посудині (при цьому тиск залишається сталим і дорівнює атмосферному тиску).

При ізобаричному процесі робота газу A_p при зміні об'єму від V_1 до V_2 дорівнює

$$A_p = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p(V_2 - V_1). \quad (12.54)$$

Якщо використати рівняння Клапейрона – Менделєєва для вибраних нами двох станів

$$pV_1 = \frac{m}{\mu} RT_1, \quad pV_2 = \frac{m}{\mu} RT_2, \quad (12.55)$$

то

$$V_2 - V_1 = \frac{m}{\mu} \frac{R}{p} (T_2 - T_1). \quad (12.56)$$

Тепер вираз (12.54) для роботи ізобарного розширення з врахуванням (12.56) можна записати у такому вигляді:

$$A_p = \frac{m}{\mu} R (T_2 - T_1). \quad (12.57)$$

Кількість теплоти Q_p , що одержує газ в ізобаричному процесі при незалежності C_p від температури,

$$Q_p = \frac{m}{\mu} C_p (T_2 - T_1). \quad (12.58)$$

Величина Q_p , згідно з першим законом термодинаміки, йде не тільки на збільшення внутрішньої енергії (визначається за формулою (12.53), а й на виконання роботи по розширенню газу, що визначається виразом (12.57).

Ізотермічний процес ($T = \text{const}$). Для його здійснення треба забезпечити добрий тепловий контакт між газом та термостатом (тілом, що має сталу температуру). Всі фазові перетворення 1 роду (наприклад, кипіння чистої води у відкритій посудині) – ізотермічні процеси.

Оскільки $dU = 0$, то рівняння першого закону термодинаміки набуває вигляду

$$d'Q = d'A, \quad (12.59)$$

тобто вся кількість теплоти, що одержує газ, йде на виконання ним роботи проти зовнішніх сил.

Роботу A_T можна визначити, скориставшись рівнянням Клапейрона – Менделєєва:

$$A_T = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \frac{m}{\mu} RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (12.60)$$

Цей вираз перепишемо так:

$$Q_T = A_T = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{p_1}{p_2} = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = p_2 V_2 \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (12.61)$$

Теплоємність речовини в ізотермічному процесі C_T нескінченно велика, бо $d'Q \neq 0$, а $dT = 0$.

Адiabатичний процес підлягає умові $d'Q = 0$. Виведемо формули для обчислення роботи A_2 при адіабатичному процесі. З першого закону термодинаміки для адіабатичного процесу випливає, що

$$d'A = -dU, \quad (12.62)$$

тобто робота проти зовнішніх сил виконується за рахунок зменшення внутрішньої енергії системи.

Використовуючи вирази (12.12), (12.51) для довільної маси газу, рів-

няння (12.62) перепишемо у такому вигляді:

$$d'A = p dV = -\frac{m}{\mu} C_v dT. \quad (12.63)$$

Якщо газ адіабатично розширюється від об'єму V_1 до V_2 , то його температура зменшується від T_1 до T_2 , і робота розширення ідеального газу

$$A_Q = -\frac{m}{\mu} C_v \int_{T_1}^{T_2} dT = \frac{m}{\mu} C_v (T_1 - T_2). \quad (12.64)$$

Оскільки $C_p = \gamma C_v$; $R = C_p - C_v = C_v(\gamma - 1)$; $C_v = \frac{R}{\gamma - 1}$, то

$$A_Q = \frac{m}{\mu} \frac{R}{\gamma - 1} (T_1 - T_2) = \frac{m}{\mu} \frac{RT_1}{\gamma - 1} \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) = \frac{m}{\mu} \frac{RT_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right]. \quad (12.65)$$

Геплоємність при адіабатичному процесі дорівнює нулю, тому що $d'Q = 0$.

Політропний процес ($C = const$). Відзначимо, що формула для обчислення роботи, яку виконує газ при політропному процесі, має подібний вигляд до формули роботи газу при адіабатичному процесі, тільки в цьому випадку треба замінити в ній показник адіабати γ на показник політропності n :

$$A_c = \frac{m}{\mu} \frac{RT_1}{n - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{n-1}\right]. \quad (12.66)$$

Зокрема, при $n = 0$ з (12.66) легко одержати формулу для обчислення роботи, що виконує моль газу при ізобаричному процесі. При $n = \pm\infty$, як і слід було чекати, формула (12.66) дає значення роботи, що дорівнює нулю (ізохоричний процес). Отже, ми ще раз переконалися, що всі розглянуті вище процеси – окремі випадки політропного процесу.

Контрольні запитання

1. Що називається внутрішньою енергією системи? Якими складовими частинами вона визначається?
2. Що таке внутрішня енергія ідеального газу? Якими параметрами

вона визначається?

3. У чому суть закону Больцмана про рівномірний розподіл енергії за ступенями вільності молекул? Чому на коливний ступінь вільності припадає у два рази більша енергія, ніж на поступальний і обертальний?

4. У чому подібність і відмінність між поняттями “робота” і “теплота”?

5. Сформулюйте перший закон термодинаміки.

6. Що називається: теплоємністю речовини?; питомою теплоємністю?; молярною теплоємністю? Яка із теплоємностей – C_p чи C_v – більша і чому? Як пояснити температурну залежність молекулярної теплоємності водню?

7. Який процес називається адіабатичним? Виведіть рівняння Пуассона. Як змінюється температура газу при його адіабатичному стиску і розширенні?

8. Як обчислити роботу газу в ході різних процесів: а) ізохоричного; б) ізобаричного; в) ізотермічного; г) адіабатичного; д) політропного.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Обчислити внутрішню енергію кисню (U) при $T=973$ К, маса якого $m=12 \cdot 10^{-3}$ кг, якщо одна третина його молекул дисоціювала на атоми ($\alpha = 1/3$).

Розв'язання. Внутрішня енергія довільної маси m газу

$$U = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} RT.$$

На долю молекулярного кисню припадає маса $(1 - \alpha)m$, а атомарного – маса αm .

Враховуючи, що для молекулярного кисню при даній температурі число ступенів вільності $i_1=5$, а атомарного – $i_2=3$, внутрішня енергія відповідно дорівнює

$$U_1 = \frac{m}{\mu_1} (1 - \alpha) \frac{i_1}{2} RT; \quad U_2 = \frac{m}{\mu_2} \alpha \frac{i_2}{2} RT.$$

Отже, внутрішня енергія всієї маси кисню

$$U = U_1 + U_2 = \frac{m}{2} \left(\frac{1 - \alpha}{\mu_1} i_1 + \frac{\alpha}{\mu_2} i_2 \right) RT.$$

Підставляючи у даний вираз числові значення відомих величин і взятих із таблиць (молярна маса кисню $\mu_1 = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, атомарна маса кисню $\mu_2 = 16 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, універсальна газова стала $R = 8,31$ Дж/(моль $\cdot$ К)) дістанемо в одиницях СІ:

$$U = 8090 \text{ Дж.}$$

Приклад 2. Балон місткістю $V = 20$ л з киснем при тиску $p_1 = 9,8 \cdot 10^6$ Па і температурі $T_1 = 280$ К нагрівається до $T_2 = 300$ К. Яку кількість теплоти Q поглинає при цьому газ?

Розв'язання. Оскільки коефіцієнти теплового розширення для твердих тіл значно менші (приблизно в 100 раз), ніж для газу, то в умовах даної задачі розширенням балона можна знехтувати і вважати процес нагрівання газу ізохоричним.

Із формули (12.23) для молярної теплоємності випливає, що

$$d'Q = \nu C_d T. \quad (1)$$

Число молів ν знайдемо із рівняння стану газу:

$$\nu = \frac{m}{\mu} = \frac{p_1 V}{RT_1}. \quad (2)$$

Оскільки газ нагрівається при сталому об'ємі, то $C = C_v$, де C_v вираховується із формули (12.29). Підставивши значення ν і C_v в (1), дістанемо

$$d'Q = \frac{i}{2} \frac{p_1 V}{T_1} dT, \quad (3)$$

де число ступенів вільності для кисню $i = 5$. Звідси, інтегруючи і враховуючи при цьому, що всі величини i , p_1 , V , T_1 – сталі, знайдемо повну кількість теплоти, що поглинається газом при нагріванні від T_1 до T_2 :

$$\lambda = \frac{i}{2} \frac{p_1 V}{T_1} (T_2 - T_1). \quad (4)$$

Підставивши значення величин у формулу (4) і виконавши обчислення, дістанемо

$$Q = 35 \text{ кДж.}$$

Приклад 3. Яку кількість теплоти потрібно для нагрівання $m = 0,007$ кг азоту, що міститься в циліндрі під важким поршнем, від $T_1 = 283$ К до $T_2 = 298$ К? Теплоємність одного моля азоту $C_V = 20,9$ Дж/(моль · К).

Розв'язання. Оскільки в умові задачі дано теплоємність газу при сталому об'ємі, шукана кількість теплоти Q буде сумою двох членів: кількості теплоти Q_1 , що йде на нагрівання газу, і кількості теплоти Q_2 , що витрачається на піднімання поршня, тобто

$$Q = Q_1 + Q_2.$$

Оскільки C_V – молярна теплоємність, то для довільної маси газу

$$Q_1 = \frac{m}{\mu} C_V (T_2 - T_1).$$

Кількість теплоти, що витрачається на виконання роботи,

$$Q_2 = \frac{m}{\mu} (T_2 - T_1) R.$$

Визначаємо шукану кількість теплоти:

$$Q = \frac{m}{\mu} (T_2 - T_1) (C_V + R)$$

Величина $C_V + R$ за формулою (12.31) дорівнює C_p . Отже, якщо в подібних задачах дано теплоємність газу, коли тиск сталий, то шукану кількість теплоти виражають одним членом, який автоматично враховує і кількість теплоти, що йде на нагрівання газу, і кількість теплоти, що витрачається на виконання роботи.

Провівши обчислення, дістанемо

$$Q \approx 109 \text{ Дж.}$$

Приклад 4. Які були початковий об'єм V_1 і температура T_1 в $m=0,005$ кг гелію ($\mu=4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль) під невагомим поршнем у циліндрі, якщо внаслідок охолодження гелію до $T_2=248$ К вантаж в $F=157$ Н, що лежав на поршні, виконав роботу A_1 , яка дорівнює 39 Дж? Площа поршня $S=0,02$ м², атмосферний тиск вважати нормальним ($p=1,013 \cdot 10^5$ Па).

Розв'язання. Треба знайти початковий об'єм і температуру газу. В умові задачі дано роботу, що її виконує вантаж, який лежить на поршні. Природно, що розв'язання треба почати із загальної формули (12.57), що пов'язує роботу і початкову температуру газу при ізобаричному процесі,

$$A = \frac{m}{\mu} R(T_1 - T_2).$$

Тут A – робота, виконувана зовнішніми силами, що стискають охолоджуванний газ. Зменшення внутрішньої енергії газу дорівнює A . Повна робота становить $A = A_1 + A_2$, де $A_1=39$ Дж, A_2 – робота, яку виконує сила атмосферного тиску.

Таким чином, щоб обчислити початкову температуру газу

$$T_1 = \frac{m}{\mu} \frac{A}{R} + T_2,$$

треба в кінцевому підсумку визначити роботу A_2 .

Роботу A_2 знаходимо за формулою

$$A_2 = pSh,$$

де pS – сила, яка зумовлена атмосферним тиском p ; h – висота, на яку опуститься поршень.

Роботу A_1 виконує вантаж F теж на шляху h , тому

$$A_1 = Fh,$$

звідки

$$h = \frac{A_1}{F}.$$

Таким чином,

$$A_2 = \frac{A_1}{F} pS \approx 490 \text{ Дж}, \quad A=529 \text{ Дж}.$$

Обчислюємо шукану температуру:

$$T_1 = \frac{A}{R} \frac{\mu}{m} + T_2 \approx 299 \text{ K.}$$

Початковий об'єм V_1 газу знаходимо з рівняння Клапейрона - Менделєєва:

$$V_1 = \frac{1}{p_1} \frac{m}{\mu} RT_1,$$

де

$$p_1 = \frac{F}{S} + p = \frac{F + pS}{S},$$

тобто

$$V_1 = \frac{S}{F + pS} \frac{m}{\mu} RT_1.$$

Підставляючи числові значення величин та їх розмірності в СІ, знаходимо, що

$$V_1 \approx 29,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

Приклад 5. Ідеальний газ розширюється ізотермічно від об'єму $V_1 \approx 0,1 \text{ м}^3$ до об'єму $V_2 = 0,3 \text{ м}^3$. Кінцевий тиск газу $p_2 = 2 \cdot 10^5 \text{ Па}$. Визначити:

а) приріст внутрішньої енергії газу ΔU ; б) виконану газом роботу A ; в) кількість одержаної газом теплоти Q .

Розв'язання. а). Внутрішня енергія ідеального газу пропорційна термодинамічній температурі. Температура газу не змінюється, тому $\Delta U = 0$.

б). Робота, виконувана ідеальним газом при ізотермічному процесі, визначається формулою (12.60)

$$A = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

З рівняння стану множник перед логарифмом дорівнює добутку тиску на об'єм. Тому

$$A = p_2 V_2 \ln \frac{V_2}{V_1} = 66 \text{ кДж.}$$

в). Відповідно до першого закону термодинаміки

$$Q = \Delta U + A.$$

Отже,

$$Q = A = 66 \text{ кДж.}$$

Приклад 6. Один моль азоту, що перебуває під тиском $p_1 = 1,013 \cdot 10^5$ Па і займає об'єм $V_1 = 0,01 \text{ м}^3$, розширюється до об'єму $V_2 = 2V_1 = 0,02 \text{ м}^3$. Визначити виконану газом роботу і кінцевий тиск газу у випадках: а) ізобаричного; б) ізотермічного і в) адіабатичного процесів. (Для двоатомного газу $\gamma = 1,4$. Універсальна газова стала $R = 8,3 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$.)

Розв'язання. а). При ізобаричному процесі ($p_1 = p_2$) робота, виконувана газом, за (12.14) дорівнює

$$A = p_1(V_2 - V_1) = 1013 \text{ Дж.}$$

б). При ізотермічному процесі ($T_1 = T_2$)

$$p_1 V_1 = p_2 V_2,$$

звідки

$$p_2 = \frac{p_1 V_1}{V_2} = 0,506 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

Робота газу при цьому процесі за (12.60) дорівнює

$$A = RT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Оскільки $RT = p_1 V_1$, то

$$A = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = 702,1 \text{ Дж.}$$

в). При адіабатичному процесі ($Q_1 = Q_2$)

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma, \text{ звідки}$$

$$p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma = 0,385 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

Робота газу при адіабатичному процесі за (12.65)

$$A = \frac{RT_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right].$$

Оскільки $RT_1 = p_1 V_1$, то

$$A = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right] = 607,8 \text{ Дж.}$$

Таким чином, тиск газу найбільше змінюється при адіабатичному процесі, а найбільшу роботу газ виконує при ізобаричному збільшенні свого об'єму.

Задачі для самостійних вправ

1. При ізобаричному нагріванні аргон виконав роботу 8 Дж. Яку кількість теплоти було надано газу?

Відповідь: 20 Дж.

2. 10 літрів азоту, що перебуває під тиском $1 \cdot 10^5$ Па, стискають до тиску $100 \cdot 10^5$ Па. Визначити роботу стиску для двох випадків: 1) стиск проводять ізотермічно; 2) стиск проводять адіабатично.

Відповідь: 1) – $4,6 \cdot 10^3$ Дж; 2) – $6,8 \cdot 10^3$ Дж.

3. У циліндрі під важким поршнем міститься 0,01 кг азоту. Яку роботу виконає азот, коли його нагріти від температури 25 до 625°C ?

Відповідь: 1780 Дж.

4. Деяку кількість азоту, що перебуває при температурі 300 К і тиску $1 \cdot 10^5$ Па, адіабатично стискають до об'єму в 5 разів меншого, ніж початковий. Чому будуть дорівнювати після стискування тиск і температура азоту?

Відповідь: $9,5 \cdot 10^5$ Па; 571 К.

5. Знайти відношення $\frac{C_p}{C_v}$ для суміші газів, що складається з 0,02 кг гелію і 0,008 кг водню.

Відповідь: 1,51.

6. Різниця питомих теплоємностей деякого двоатомного газу $C_p - C_v = 260 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$. Знайти молярну масу газу і його питомі теплоємності C_p і C_v .

Відповідь: $\approx 32 \cdot 10^{-3}$ кГ/моль; $C_p = 909$ Дж/(кг · К); $C_v \approx 649$ Дж/(кг · К).

7. Тіло з незалежною від температури теплоємністю $C = 20$ Дж/К охолоджується від 100°C до 0°C . Визначити кількість теплоти, яку одержало тіло.

Відповідь: -2 кДж.

8. Ідеальний газ ($\gamma = 1,4$), що знаходиться при температурі 0°C , стискують, в результаті чого об'єм газу зменшується в 10 разів. Вважаючи процес стискування адіабатичним, визначити, до якої температури нагрівається газ внаслідок стиску.

Відповідь: 686 К.

9. У скільки разів зміниться число ударів молекул двохатомного газу до 1 см^2 стінки посудини за 1 с, якщо об'єм газу збільшиться в 2 рази: а) ізобарично; б) ізотермічно; в) адіабатично.

Відповідь: а) $0,7$; б) $0,5$; в) $0,43$.

10. Водень масою $0,02$ кг нагріли на 100 К при постійному тиску. Визначити: 1) кількість теплоти, надану газу; 2) приріст внутрішньої енергії газу; 3) роботу розширення газу.

Відповідь: 1) $29,3$ кДж; 2) $20,9$ кДж; 3) $8,4$ кДж.

11. Кисень об'ємом $2 \cdot 10^{-3}\text{ м}^3$ перебуває під тиском $1 \cdot 10^6$ Па. Визначити, яку кількість теплоти потрібно надати газу, щоб збільшити його тиск в 2 рази в результаті ізохоричного процесу.

Відповідь: 5 кДж.

12. У циліндрі з рухомих поршнем міститься азот ($\mu = 28 \cdot 10^{-3}$ кГ/моль). Азоту дають можливість розширюватися спочатку адіабатично від об'єму $1 \cdot 10^{-3}\text{ м}^3$ до об'єму $3 \cdot 10^{-3}\text{ м}^3$, потім ізобарично до об'єму $5 \cdot 10^{-3}\text{ м}^3$, нарешті, ізотермічно до об'єму $7 \cdot 10^{-3}\text{ м}^3$. Початкова температура газу 290 К, початковий тиск $6,58 \cdot 10^5$ Па. Визначити роботу, виконану газом у кожному з цих процесів, зміну його внутрішньої енергії та кількість теплоти, підведеної до газу. Питома теплоємність азоту $C_v = 740$ Дж/(кг · К), коефіцієнт Пуассона $\gamma = 1,4$.

Відповідь: адіабатичне розширення -584 Дж; -584 Дж; 0 ;
ізобаричне розширення -284 Дж; 707 Дж; 991 Дж;
ізотермічне розширення -238 Дж; 0 ; 238 Дж.

13.1. Оборотні і необоротні процеси. Цикл Карно та його коефіцієнт корисної дії

Оборотним називається такий термодинамічний процес, при якому система, проведена в зворотному напрямі, повертається в початковий стан через ті самі проміжні стани, що і в прямому процесі, а стан тіл поза системою залишається незмінним. Всякий процес, що не відповідає цим умовам, є необоротним.

У термодинаміці доводиться, що необхідною і достатньою умовою оборотності процесу є його рівноважність. Це впливає безпосередньо з того, що при рівноважному процесі кожний проміжний стан є станом термодинамічної рівноваги незалежно від того, йде процес в прямому чи в зворотному напрямі.

Прикладом оборотного процесу може служити процес адіабатичного розширення або стискування газу. При адіабатичному процесі умова теплоізоляваності системи виключає теплообмін між системою і середовищем. Тому, проводячи адіабатичне розширення газу, після стискування можна повернути газ у початковий стан так, що в навколишньому середовищі ніяких змін не відбудеться. Звичайно, в реальних умовах і в цьому випадку завжди існує деяка необоротність процесу, зумовлена, наприклад, неякісною теплоізоляцією, тертям при русі поршня тощо.

Прикладом необоротного процесу може бути гальмування тіла внаслідок тертя. Якщо на тіло не діють інші сили, крім сил тертя, то швидкість тіла поступово зменшується і воно з часом зупиняється. При цьому кінетична енергія механічного руху тіла витрачається на збільшення внутрішньої енергії тіла і середовища, які нагріваються внаслідок тертя. Для повернення системи в попередній стан необхідно, щоб тіло, яке зупинилося, знову прийшло в рух за рахунок охолодження самого тіла і середовища. Досліди показують, що хаотичний (тепловий) рух частинок тіла не може привести до виникнення впорядкованого руху цих частинок як цілого. Зауважимо, що систему тіло – середовище можна повернути в попередній стан, але стани зовнішніх тіл змінюються. Отже, всі процеси, які супроводжуються тертям, є необоротними.

Відсутність змін в середовищі, що оточує систему при повертанні її в початковий стан, є важливою властивістю оборотності процесу. Якщо в ході оборотного процесу система виконує роботу за рахунок одержаної ззовні теплоти, то при повертанні у початковий стан вона повинна віддати таку ж кількість теплоти і над нею повинна бути виконана робота, рівна роботі, виконаній самою системою.

Розглянемо оборотний круговий процес. Такий процес був досліджений у 1824 році французьким інженером Карно і тому дістав назву циклу Карно.

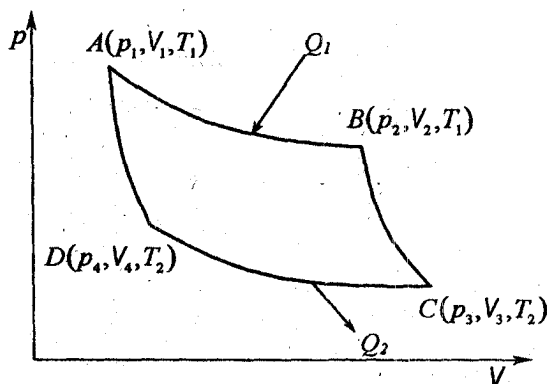


Рис. 13.1

Цикл Карно складається із двох ізотермічних і двох адіабатичних процесів, які чергуються між собою (рис. 13.1). Нехай система (один моль ідеального газу) виходить з початкового стану A , проходить через проміжні стани B, C, D і знову повертається у початковий стан. Зі стану A в стан B і зі стану C у стан D система переходить ізотермічно. А зі стану B у C і з D в A – адіабатично. Будемо вважати, що за таким циклом працює теплова машина. Знайдемо її роботу. При переході газу із стану A , який визначається значеннями параметрів p_1, V_1 і T_1 , в стан B внаслідок ізотермічного ($T_1 = \text{const}$) розширення до об'єму V_2 газ виконає роботу

$$A_{AB} = RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (13.1)$$

При цьому для підтримування постійної температури газу до нього повинна бути підведена кількість теплоти Q_1 , еквівалентна виконаній роботі: $Q_1 = A_{AB}$.

Далі розширення газу від об'єму V_2 до об'єму V_3 відбувається адіабатично. Тиск газу зменшується від значення p_2 до p_3 , і газ переходить із стану B в стан C . При адіабатичному розширенні температура газу знизиться до деякого значення T_2 , а виконана газом робота буде еквівалентна зменшенню його внутрішньої енергії:

$$A_{BC} = C_V(T_1 - T_2). \quad (13.2)$$

Перехід газу зі стану C в стан D відбувається за рахунок роботи зовнішніх сил, які ізотермічно ($T_2 = \text{const}$) стискають газ від об'єму V_3 до об'єму V_4 . Тиск газу при цьому зростає до p_4 . Щоб у процесі ізотермічного стискування температура газу не змінювалася, від нього потрібно відвести кількість теплоти, еквівалентну виконаній роботі:

$$Q_2 = A_{CD} = RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}. \quad (13.3)$$

Цикл завершується адіабатичним стискуванням газу від об'єму V_4 до об'єму V_1 за рахунок роботи зовнішніх сил. Ця робота йде на збільшення внутрішньої енергії газу:

$$A_{DA} = C_V(T_2 - T_1). \quad (13.4)$$

В результаті циклу газ повертається у початковий стан і тому ніякої зміни його внутрішньої енергії не відбувається.

Згідно з першим законом термодинаміки виконувана газом за цикл робота

$$A = Q_1 - Q_2, \quad (13.5)$$

де $Q_1 - Q_2$ — загальна кількість теплоти, надана газу за один цикл.

Оскільки $Q_1 - Q_2 = A_{AB} - A_{CD}$, то

$$A = RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}. \quad (13.6)$$

Оскільки передача теплоти відбувається сама собою тільки від більш нагрітого тіла до менш нагрітого, то для здійснення циклу газу було передано від нагрівника кількість теплоти Q_1 , а сам газ віддав холодильнику при стискуванні кількість теплоти Q_2 , меншу ніж Q_1 . За рахунок цієї різниці $Q_1 - Q_2$ і виконується газом робота A проти зовнішніх сил. Такі цикли, в яких теплота перетворюється в роботу, називаються **прямими**. Прямі цикли виконують всі теплові машини. Ефективність циклу характеризують коефіцієнтом корисної дії циклу η (ККД).

Відношення кількості теплоти $Q_1 - Q_2$, перетвореної у роботу за один цикл, до загальної кількості теплоти Q_1 , взятої від нагрівника, називається **термодинамічним коефіцієнтом корисної дії**.

Для циклу Карно

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \quad (13.7)$$

або, враховуючи еквівалентність між теплотою і роботою,

$$\eta = \frac{A_{AB} - A_{CD}}{A_{AB}} = 1 - \frac{A_{CD}}{A_{AB}}. \quad (13.8)$$

Використавши співвідношення (13.1) і (13.3), вираз (13.8) можемо переписати так:

$$\eta = 1 - \frac{RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}. \quad (13.9)$$

Спростимо вираз (13.9). Для адіабатичних процесів можемо записати:

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1}; \quad T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}.$$

Ділимо друге рівняння на перше і дістаємо

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}.$$

Використавши це співвідношення, можемо переписати (13.9) так:

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}, \quad (13.10)$$

де T_1 – абсолютна температура газу, при якій відбувається його ізотермічне розширення від об'єму V_1 до об'єму V_2 ; T_2 – абсолютна температура газу, при якій здійснюється його ізотермічне стискування від об'єму V_3 до об'єму V_4 .

Щоб при проведенні циклу виконувалася умова оборотності процесів ізотермічного розширення і стискування газу, температура нагрівника також повинна бути T_1 , а температура холодильника T_2 . Тому можна вважати, що ККД циклу Карно визначається тільки абсолютними температурами нагрівника і холодильника і не залежить від речовини (робочого тіла), здійснюючої цикл.

З формули (13.10) випливає, що для підвищення ККД необхідно збільшувати різницю температур нагрівника і холодильника, а коли нагрівник і холодильник мають однакову температуру, то ККД циклу Карно дорівнює нулю.

Оскільки цикл Карно складається з оборотних процесів, його можна провести в зворотному напрямі, тобто по шляху $ADCBA$. При зворотному циклі Карно від холодильника відбирається кількість теплоти Q_2 , середовище виконує над системою роботу $A = Q_1 - Q_2$, і нагрівнику передається кількість теплоти Q_1 , що дорівнює сумі кількості теплоти, одержаної від холодильника, і роботи, виконаної середовищем над системою. Машина, яка працює за оберненим циклом Карно, є холодильна машина. З її допомогою теплота відбирається від холодного тіла і передається більш нагрітому через роботу, виконувану зовнішніми силами, наслідком чого є ще більше охолодження холодного тіла.

Очевидно, якщо провести послідовно прямий і зворотний цикли Карно, то не тільки робоче тіло повернеться до вихідного стану, але і у навколишньому середовищі не відбудеться ніяких змін.

13.2. Теорема Карно. Другий закон термодинаміки

У попередньому параграфі було відмічено, що ККД циклу Карно не залежить від робочої речовини (тіла), яка виконує цикл. Це твердження складає суть теореми Карно, яка складається з двох частин.

1. Усі оборотні машини, які виконують цикл Карно, мають, незалежно від використовуваного робочого тіла, однаковий коефіцієнт корисної дії, якщо вони працюють із спільним нагрівником і спільним холодильником.

2. Коли дві машини виконують цикл Карно, причому одна машина оборотна, а друга необоротна, то коефіцієнт корисної дії необоротної машини менший, ніж коефіцієнт корисної дії оборотної, якщо ці дві машини мають спільний нагрівник і спільний холодильник.

Доведемо теорему Карно. Розглянемо дві теплові машини, які працюють за циклом Карно і мають спільні нагрівник і холодильник з температурами T_1 і T_2 (рис.13.2). Припустимо, що в машині 1 за робочу речовину

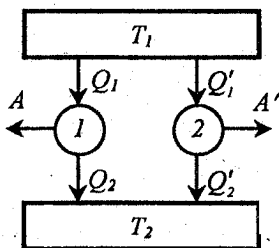


Рис.13.2

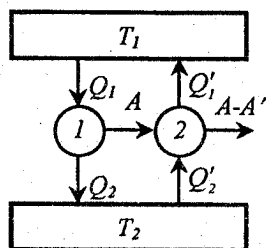


Рис.13.3

править ідеальний газ, а в 2 – будь-яка реальна речовина. Перша машина одержує за цикл від нагрівника кількість теплоти Q_1 , виконує роботу A і віддає холодильнику кількість теплоти Q_2 . Друга машина за цикл одержує від нагрівника кількість теплоти Q'_1 , виконує роботу A' і віддає холодильнику кількість теплоти Q'_2 . Для спрощення доведення теореми припустимо, що обидві машини за цикл одержують від нагрівника однакову кількість теплоти:

$$Q_1 = Q'_1. \quad (13.11)$$

Зауважимо, що це припущення необов'язкове. Якщо $Q_1 \neq Q'_1$, то треба зіставити n циклів однієї машини з m циклами другої, добираючи n і m так, щоб $nQ_1 = mQ'_1$.

За першим законом термодинаміки, якщо обидві машини виконують за цикл однакову роботу ($A = A'$), то вони повинні віддавати холодильнику однакову кількість теплоти $Q_2 = Q'_2$ і тоді ККД у обох машин буде однаковим ($\eta = \eta'$).

Припустимо, наприклад, що ККД першої машини більший, ніж другої, тобто

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} > \frac{Q'_1 - Q'_2}{Q'_1}.$$

Тоді при виконанні умови (13.11) і враховуючи, що $\eta > \eta'$, дістанемо $A > A'$ і $Q'_2 > Q_2$, тобто друга машина віддає холодильнику більшу кількість теплоти, ніж перша.

З'єднаємо обидві машини так, щоб за рахунок роботи першої машини друга здійснювала обернений цикл, тобто працювала як холодильна машина (рис. 13.3). Якщо при цьому холодильна машина 2 віддає за цикл нагрівнику кількість теплоти Q'_1 , що дорівнює Q_1 , яку одержує за цикл від нагрівника машина 1, то в результаті їх спільної роботи ніяких змін в стані нагрівника не відбудеться. В цьому випадку перша з машин виконає додатну роботу A , а друга – від'ємну A' , меншу за A . Тому спільна робота машин дозволить одержати за цикл надлишок додатної роботи, що дорівнює $A - A'$. Друга машина одержить при цьому за цикл кількість теплоти Q'_2 , більшу за Q_2 , яку віддає холодильнику перша машина. Різниця цих значень $Q'_2 - Q_2$ і дає можливість виконати роботу $A - A'$.

Отже, результатом спільної роботи обох машин було б перетворення кількості теплоти $Q'_2 - Q_2$, забраної в холодильника, у роботу $A - A'$ без передавання нагрівнику якої-небудь кількості теплоти. Тому, якщо вихідне припущення про те, що $\eta > \eta'$ було б правильне, то вдалось би здійснити вічний двигун другого роду: двигун, робота якого не суперечить першому закону термодинаміки і перетворює всю підведену до нього теплоту в роботу. Спроби його створення завжди закінчувалися невдачею і зіграли важливу роль у встановленні другого закону (начала) термодинаміки, який іноді

формулюють так: неможливо побудувати вічний двигун другого роду.

М. Планк дав інше формулювання другого закону термодинаміки: неможливий такий періодичний процес, єдиним результатом якого було б перетворення теплоти в роботу.

Заслуговує на увагу формулювання другого закону термодинаміки, яке подав Р. Клаузіус: неможливо побудувати такий двигун, коефіцієнт корисної дії якого дорівнював би одиниці, тобто вічний двигун другого роду неможливий.

В циклі Карно тільки частина одержаної від нагрівника кількості теплоти Q_1 перетворюється в роботу, а частина її Q_2 не використовується і передається холодильнику. Природно, що було б добре створити такий двигун, який би всю теплоту, одержану ззовні, перетворював у роботу. Такий двигун був би дуже вигідним, оскільки за (12.7) його ККД – $\eta=1$ і він не вимагав би наявності двох тіл з різною температурою: нагрівника і холодильника. Крім того, такий двигун був би практично вічним. Наприклад, його створення дозволило б виконувати роботу за рахунок такого практично невичерпного джерела теплоти, як океан. Розрахунки показують, що за рахунок внутрішньої енергії води світового океану можна було б забезпечити енергопостачання всієї земної кулі і при цьому за 1700 років температура його води знизилась би всього на 0,01 К.

Тому припущення, що $\eta > \eta'$ неправильне. Отже, залишається припустити, що $\eta < \eta'$. Змінімо порядок роботи машин, змусивши першу машину працювати як холодильну за рахунок роботи, яку виконує друга машина. Тоді неважко прийти до висновку, що η' не може бути більшим від η .

Таким чином, тільки вважаючи що $\eta = \eta'$, ми не вступаємо в протиріччя з другим законом термодинаміки. Це означає, що ККД всіх оборотних машин, працюючих з одним і тим самим нагрівником і холодильником, однаковий і не залежить ні від природи робочої речовини, ні від конструкції машин.

Оборотною машиною є теплова машина, що працює за циклом Карно з ідеальним газом як робочою речовиною. Скориставшись цим, можна записати, що для всіх оборотних машин, у яких нагрівник має температуру T_1 , а холодильник температуру T_2 , ККД повинен мати значення

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad (13.12)$$

Оборотний процес – процес ідеальний. В усіх реальних теплових машин завжди мають місце втрати теплоти на теплообмін з навколишнім середовищем і на переборення сил тертя. Тому в реальних машинах процеси є необоротні.

Очевидно, що в необоротній машини за цикл відводиться від робочої речовини більша кількість теплоти Q'_2 , ніж в оборотній, тобто $Q'_2 > Q_2$. Звідси випливає, що

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_2} > \frac{Q'_1 - Q'_2}{Q'_1} \quad (13.13)$$

або $\eta > \eta'$ (η' – ККД необоротної машини).

Отже, ККД необоротної машини не може бути більшим за ККД оборотної машини, яка працює з тими самими нагрівником і холодильником.

Узагальнюючи вирази (13.12) і (13.13), дістанемо

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \leq \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \quad (13.14)$$

де знак рівності відноситься до оборотних машин, а знак нерівності до необоротних.

Співвідношення (13.14) виражає з кількісної сторони другий закон термодинаміки і справедливе для будь-якої системи тіл, що здійснює оборотний і необоротний цикл. Зокрема, якщо система ніякої механічної роботи не виконує, а має місце перехід теплоти від одного тіла до другого, то $Q_1 = Q_2$ і тоді (13.14) набуває вигляду $0 \leq \frac{T_1 - T_2}{T_1}$.

Враховуючи, що передавання теплоти – процес необоротний, знак рівності потрібно виключити і записати $T_1 - T_2 > 0$, звідки

$$T_1 > T_2, \quad (13.15)$$

тобто при будь-якому необоротному процесі температура тіла, яке віддає теплоту, повинна бути вища температури тіла, яке теплоту приймає. Або, самовільно, тобто без виконання роботи теплота передається тільки від

тіла більш нагрітого до тіла менш нагрітого. Це твердження також є одним із формулювань другого начала термодинаміки.

Користуючись співвідношенням (13.14), легко довести неможливість побудови вічного двигуна другого роду. Справді, якщо б такий двигун можна було створити, то він працював би без віддачі теплоти холодильнику ($Q_2 = 0$) і тоді (13.14) можна записати

$$1 \leq \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Оскільки абсолютні температури T_1 і T_2 завжди більші від нуля, то відношення $\frac{T_1 - T_2}{T_1}$ не може бути більшим від одиниці. Воно також не може дорівнювати одиниці (це можливе тільки при нездійснюваних умовах, а саме, коли $T_1 \rightarrow \infty$ або $T_2 = 0$). Отже, вічний двигун другого роду неможливий.

Зауважимо, що в реальних двигунах завжди відбуваються необоротні процеси і тому вони не працюють за циклом Карно.

Отже, ККД реальних двигунів завжди менший за ККД циклу Карно. Природно, що в техніці стараються використовувати такі цикли, ККД яких був би близьким до ККД циклу Карно.

У сучасних двигунах внутрішнього згорання використовують наступні три види циклів з підведенням теплоти: 1) при сталому об'ємі ($V = \text{const}$) – цикл Отто; 2) при сталому тиску ($p = \text{const}$) – цикл Дизеля; 3) частково при сталому об'ємі, частково при сталому тиску – цикл Трінклера.

13.3. Ентропія. Характеристичні функції

Вираз (13.14) – це найпростіший вираз другого начала термодинаміки. Надамо йому іншого вигляду, виконавши деякі перетворення:

$$1 - \frac{Q_2}{Q_1} \leq 1 - \frac{T_2}{T_1}; \quad -\frac{Q_2}{Q_1} \leq -\frac{T_2}{T_1};$$

$$\frac{Q_2}{T_2} \geq \frac{Q_1}{T_1}; \quad \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} \leq 0. \quad (13.16)$$

Оскільки ми раніше умовились вважати кількість теплоти, одержаної системою від нагрівника, додатною, а кількість теплоти, відданою системою холодильнику, від'ємною, то $Q_2 < 0$ і вираз (13.16) можна розглядати як суму двох величин і для стислості записати так:

$$\sum \frac{Q}{T} \leq 0. \quad (13.17)$$

У (13.17) відношення кількості теплоти, якою обмінюється система (робоче тіло) з резервуаром теплоти, до абсолютної температури цього резервуара називають **приведеною теплотою**.

Отже, нерівність (13.17) Клаузіуса можна сформулювати так: сума приведених теплот в оборотному циклі Карно дорівнює нулю, а в необоротному – менша за нуль.

Вирази (13.14) і (13.17) мають обмежений характер, оскільки вони стосуються лише циклів Карно. Тому нерівність Клаузіуса узагальнюють, поширюючи на довільні цикли. Це досягається тим, що довільний цикл можна подати у вигляді сукупності елементарних циклів Карно.

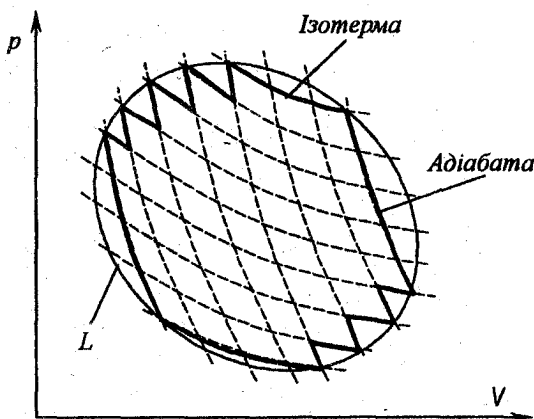


Рис.13.4

Довільний оборотний цикл, який зображено на pV – діаграмі замкнутим контуром L , сіткою ізотерм і адіабат, розіб'ємо на систему елементарних циклів Карно (рис.13.4). Для циклу, обмеженого ламаною лінією, вписаною в даний цикл, справджується нерівність

$$\sum \frac{\Delta Q}{T} \leq 0 \quad (13.18)$$

Якщо відрізки ізотерм та адіабат нескінченно зменшуватимуться, наближаючись до нуля, то, переходячи до границі, дістанемо цикл, зображений плавною кривою L .

Нескінченно малим відрізкам ізотерм відповідають нескінченно малі кількості теплоти $d'Q$. У такому разі рівність (13.18) замінюється рівністю

$$\oint \frac{d'Q}{T} \leq 0. \quad (13.19)$$

Формулу (13.19) ми вважаємо за кількісний вираз другого закону термодинаміки. Зазначимо, що в (13.19) для необоротних процесів температура означає не температуру робочого тіла, а температуру того резервуара, з яким воно обмінюється теплотою в даний момент.

З рівності нулю інтеграла (13.19) і незалежності його від контуру інтегрування L випливає (на основі теореми математичного аналізу), що підінтегральна функція у виразі (13.19) є повним диференціалом деякої однозначної функції стану системи, як, наприклад, для виразу $\oint dU = 0$. Познаючи цю функцію через S , матимемо

$$dS = \frac{d'Q}{T}. \quad (13.20)$$

Функцію S вперше ввів Клаузіус і назвав її ентропією (що по-грецьки означає перетворення або зміна).

Формула (13.20) не зводиться до простого означення ентропії. Вона встановлює принцип існування ентропії, яку можна включити до параметрів, що визначають стан системи.

Розглянемо властивості ентропії системи. Застосуємо друге начало термодинаміки (13.19) до циклу, зображеного на рис. 13.5:

$$(C) \int_1^2 \frac{d'Q}{T} + (D) \int_2^1 \frac{d'Q}{T} \leq 0. \quad (13.21)$$

Букви перед інтегралами показують, до якої частини кривої стосується інтеграл.

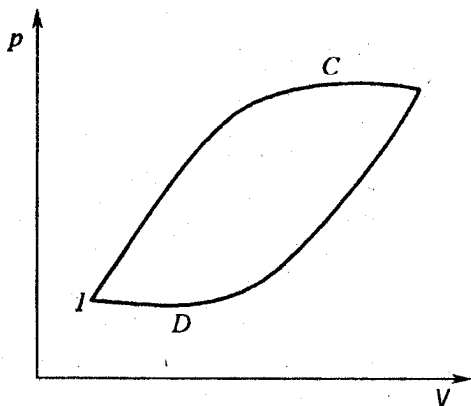


Рис. 13.5

Перенесемо другий інтеграл виразу (13.21) у праву частину:

$$(C) \int_1^2 \frac{d'Q}{T} \leq -(D) \int_2^1 \frac{d'Q}{T}. \quad (13.22)$$

Змінивши напрям процесу, до якого стосується другий інтеграл в (13.22), на зворотний, здобудемо

$$(C) \int_1^2 \frac{d'Q}{T} \leq (D) \int_1^2 \frac{d'Q}{T}. \quad (13.23)$$

Знак рівності стосується для випадку, коли обидва шляхи переходу від стану 1 до стану 2 оборотні, тобто $\int \frac{d'Q}{T}$ не залежить від шляху переходу. Звідси робимо висновок, що ентропія є така функція стану системи, зміна якої дорівнює $\int \frac{d'Q}{T}$ при переході системи з одного стану в інший оборотним способом. Ентропія системи, що перебуває у певному стані, має, от-

же, цілком визначену величину.

Якщо перехід від стану 1 до стану 2 через D є оборотним, то можна записати:

$$(D) \int_1^2 \frac{d'Q}{T} = S_2 - S_1, \quad (13.24)$$

де S_1 – ентропія в стані 1, а S_2 – ентропія в стані 2.

Скориставшись з цього, вираз (13.23) можна переписати:

$$\int_1^2 \frac{d'Q}{T} \leq S_2 - S_1. \quad (13.25)$$

Знак рівності відповідає переходові системи з стану 1 до стану 2 оборотним способом, а знак нерівності – необоротним способом.

Якщо процес нескінченно малий, то для нього замість (13.25) маємо:

$$dS \geq \frac{d'Q}{T}. \quad (13.26)$$

Вираз (13.26) – один з найбільш загальних кількісних виразів другого закону термодинаміки.

В конкретних випадках зміна ентропії обчислюється за формулою

$$\Delta S = \int \frac{d'Q}{T}. \quad (13.27)$$

З формули (13.20) випливає, що ентропія системи визначається тільки з точністю до довільної сталої величини S_0 :

$$S = S_0 + \int \frac{d'Q}{T}. \quad (13.28)$$

Цю сталу можна взяти за початок відліку значень ентропії, але абсолютне значення ентропії не має фізичного змісту.

Наведемо деякі приклади обчислення ентропії.

1. **Нагрівання тіла.** Нехай у початковому стані температура тіла дорівнює T_1 . Під час нагрівання його температура зростає до T_2 . Але на нагрівання витрачається певна кількість теплоти, а саме $d'Q = cm dT$. Тоді, на основі (13.27),

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{d'Q}{T} = cm \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} ; \quad \Delta S = cm \ln \frac{T_2}{T_1} . \quad (13.29)$$

2. **Плавлення, пароутворення.** Теплота плавлення і пароутворення відповідно дорівнюють

$$Q_{пл} = \lambda m ; \quad Q_{пар} = rm .$$

Оскільки ці процеси ізотермічні, то у формулі (13.27) можна винести T за знак інтеграла, а інтеграл $\int d'Q$ – просто теплота плавлення λ або, відповідно, теплота пароутворення r , помножена на масу тіла m . Отже, для цих випадків

$$\Delta S_{пл} = \frac{\lambda m}{T} ; \quad \Delta S_{пар} = \frac{rm}{T} . \quad (13.30)$$

3. **Адіабатичний процес.** При цьому процесі $d'Q = 0$. Через те формула (13.27) дає нам у цьому випадку

$$\Delta S \geq 0 . \quad (13.31)$$

З (13.31) випливає ще одна ознака оборотності процесів, а саме, при адіабатичному процесі ентропія тіла не змінюється, якщо процес оборотний, і збільшується, якщо процес необоротний.

Відзначимо, що у відкритих системах ентропія може і зменшуватися. Але в цьому випадку в навколишніх тілах завжди будуть відбуватися такі зміни, що сумарна ентропія системи і навколишніх тіл зростатиме.

Поеднавши аналітичні вирази для першого та другого законів термодинаміки, дістанемо зручну формулу для розв'язання багатьох практичних задач термодинаміки. Для однорідної термодинамічної системи вона має вигляд

$$TdS = dU + pdV . \quad (13.32)$$

Для нерівноважних процесів рівняння (13.32) таке:

$$TdS \geq dU + pdV \quad (13.33)$$

$$\text{або} \quad dS \geq \frac{dU + pdV}{T} . \quad (13.34)$$

Застосування другого закону термодинаміки для розв'язання конкретних задач здійснюється з допомогою розгляду особливих функцій стану, які називають характеристичними. Функція стану називається характеристичною, якщо на її основі та на основі її похідних можна явно виразити термодинамічні властивості системи. Характеристичними функціями є внутрішня енергія U , ентальпія H , вільна енергія F та термодинамічний потенціал Гіббса Z . Для однорідної системи вони відповідно визначаються такими параметрами: $U = U(S, V)$, $H = H(S, p)$, $F = F(T, V)$, $Z = Z(T, p)$. Наведемо їхні формули.

Запишемо вираз для першого закону термодинаміки

$$d'Q = dU + pdV.$$

Для ізобаричного процесу буде справедливим запис цього рівняння у вигляді

$$d'Q = d(U + pV) \quad (13.35)$$

Введемо значення

$$H = U + pV. \quad (13.36)$$

Величина, що визначається виразом (13.36), називається ентальпією.

Врахуємо (13.36) і перепишемо (13.35):

$$d'Q = dH. \quad (13.37)$$

З (13.37) випливає, що різниця (зміна) ентальпії в двох станах дорівнює кількості теплоти, яку дістає система при ізобаричному процесі.

Рівняння (13.32) запишемо для ізотермічного процесу:

$$TdS = dU + d'A$$

або, враховуючи, що $T = \text{const}$,

$$d'A \leq -d(U - TS). \quad (13.38)$$

Знак $<$ показує необоротність, оскільки в цьому випадку $TdS > d'Q$.

Величина $F = U - TS$ називається вільною енергією термодинамічної системи.

Вираз (13.38) перепишемо у вигляді

$$d'A \leq -dF \quad (13.39)$$

З (13.39) випливає фізичний зміст вільної енергії: під час оборотного ізотермічного процесу зміна вільної енергії дорівнює роботі, яка виконується системою при цьому процесі.

Величина $G = TS$ у виразі (13.38) називається зв'язаною енергією.

Отже,

$$F = U - G$$

або

$$U = F + G \quad (13.40)$$

З (13.40) бачимо, що внутрішня енергія системи складається з суми вільної та зв'язаної енергії.

Якщо $V = \text{const}$, то $d'A = 0$. Тоді вираз (13.39) можна записати так:

$$dF \leq 0 \quad (13.41)$$

Це означає, що умовою рівноваги системи, яка перебуває при сталій температурі та сталому об'ємі, є мінімум вільної енергії.

Якщо процес буде ізобарно-ізотермічним, то (13.32) можна переписати так:

$$d(U - TS + pV) \leq 0 \quad (13.42)$$

Величина

$$Z = U - TS + PV \quad (13.43)$$

називається термодинамічним потенціалом.

Перепишемо (13.42):

$$dZ \leq 0 \quad (13.44)$$

З (13.44) видно, що Z при оборотному ізобарно-ізотермічному процесі – стала величина, а при необоротному процесі зменшується. Це означає, що при сталій температурі і сталому тиску умовою рівноваги системи є мінімум термодинамічного потенціалу.

13.4. Статистичний характер другого закону термодинаміки

Другий закон термодинаміки для необоротних процесів для замкнених систем дає змогу зробити важливі висновки про напрям проходження нерівноважних процесів. До таких процесів належать, наприклад, теплообмін, дифузія тощо. Закон зростання ентропії в замкнутій системі для необо-

ротних процесів забороняє процеси, пов'язані зі зменшенням ентропії. Кінцевим результатом необоротних процесів (явищ переносу) є рівноважний стан, при якому ентропія досягає максимуму.

Нагадаємо, що стан речовини, який характеризується термодинамічними параметрами (температура, тиск, об'єм та ін.), називають макростаном. Стан системи, який характеризується станами кожної з її молекул, називають мікростаном. Оскільки молекули (наприклад, газу) рухаються хаотично, то існує безліч можливих мікростанів, які відповідають конкретному макростану. Якщо вважати, що всі ці мікростани рівноймовірні, то можна знайти і ймовірність даного макростану. Проте такий спосіб оцінки ймовірності того чи іншого макростану дуже складний. Тому в статистичній фізиці користуються термодинамічною ймовірністю. Термодинамічна ймовірність W макростану системи – це число мікростанів, які реалізують даний макростан. На відміну від математичної ймовірності, яка завжди менша від одиниці, термодинамічна ймовірність виражається великими числами (в крайньому випадку дорівнює одиниці).

В теоретичній фізиці доводиться, що величина W виражається формулою

$$W = \frac{N!}{N_1! N_2! \dots N_n!}, \quad (13.45)$$

де N – числ частинок, що розподіляються за n станами; N_1 – число частинок у першому стані; N_2 – у другому стані і т.д. Пояснимо це таким прикладом.

Нехай певному об'ємі є дві молекули, які мають номери 1 і 2. Уявно розділимо об'єм на дві рівні комірки. Можливі варіанти розподілу молекул такі: а) в першій комірці – дві; б) в другій комірці – дві; в) в першій комірці – молекула номер 1, а в другій – молекула номер 2; г) в першій – молекула номер 2, а в другій – молекула номер 1. З цього випливає, що рівномірний розподіл молекул по комірках (варіант розподілу в) і г) може здійснюватися найбільшим числом способів. Отже, рівномірний розподіл – найбільш ймовірний. Цей стан і є рівноважним.

Тому між ентропією системи S та ймовірністю її стану W є характерний функціональний зв'язок:

$$S = f(W). \quad (13.46)$$

Л.Больцман вперше у 1886 році встановив, що дана функція повинна мати логарифмічний характер, а саме:

$$S = k \ln W + const, \quad (13.47)$$

де k – стала Больцмана. Цей вираз виражає принцип Больцмана, який показує, що ентропія термодинамічної системи в даному її стані пропорційна натуральному логарифму імовірності цього стану. Принцип Больцмана розкриває фізичний зміст ентропії як характеристики імовірності стану і міри неупорядкованості системи, як міри наближення замкнутої системи до рівноважного стану. Чим більша неупорядкованість системи, тим більшим числом можливих мікростанів вона характеризується і тим більша її ентропія. Наприклад, при конденсації водяної пари ентропія зменшується, оскільки при цьому молекули розміщуються більш упорядковано. Ще більше зменшення ентропії відбувається при кристалізації рідини тому, що зростає ступінь впорядкованості молекул. У випадку абсолютного нуля тепловий рух припиняється і будь-яка неупорядкованість зникає, – число можливих мікростанів зменшується до одиниці і ентропія буде дорівнювати нулю.

Принцип Больцмана є одним з формулювань другого закону термодинаміки, яке він сформулював так: **природа прямує від станів менш імовірних до станів більш імовірних**. При такому статистичному характері другого закону термодинаміки твердження, які містяться в наведених раніше формулюваннях цього закону, втрачають свою категоричність. Перехід системи у рівноважний стан із статистичної точки зору є тільки більш імовірний, ніж, наприклад, самовільний перехід від рівноважного до нерівноважного стану. Але це не означає, що такий перехід в принципі неможливий. Розрахунки, виконані М. Смолюковським для 1 см^3 газу при нормальних умовах, показують, що тільки один раз протягом 10^{24} років буде мати місце відхилення в розподілі молекул на 1 % від середнього значення. Прикладом відхилень від другого закону термодинаміки є також флуктуації густини, енергії та інших фізичних величин. Одним з широко відомих прикладів, які ілюструють роль флуктуацій густини, наприклад, в земній атмосфері, є “блакитний колір неба” (найбільш сильно розсіюються сині промені).

Отже, між термодинамікою і статистичною фізикою існує принципі-

альна різниця в тлумаченні другого закону термодинаміки. У термодинаміці він розглядається як абсолютно строгий закон, згідно з яким ентропія в ізольованій системі тільки зростає і при досягненні максимуму вона залишається незмінною необмежений час. Насправді, як показує статистична фізика, другий закон термодинаміки не є абсолютно строгим. В ізольованій системі, поряд з процесами переходу системи до стану з максимумом ентропії, можливі, хоча і дуже рідко, процеси зменшення ентропії. У термодинаміці точне виконання другого закону зумовлене тим, що в ній розглядаються макросистеми, які складаються з величезної кількості мікрочастинок.

Другий закон термодинаміки – дослідний закон, встановлений для замкнутих земних систем і, природно, що його не можна застосовувати за межами тієї області явищ, для описання яких він призначений. Проте некритичне перенесення закономірностей земного макроскопічного досвіду на Всесвіт привело до антинаукових висновків про так звану "теплову смерть Всесвіту". Р. Клаузіус, який вперше сформулював концепцію "теплової смерті Всесвіту", вважав, що Всесвіт повинен у майбутньому перейти в стан термодинамічної рівноваги, який відповідатиме максимумові ентропії, при якому припиняться всі можливі макроскопічні процеси, отже, стане неможливим життя. При цьому у всіх місцях Всесвіту вирівнюються температури, зникнуть всі причини, які б сприяли виникненню і проходженню будь-яких процесів. Помилка Клаузіуса полягає в тому, що Всесвіт не є замкнутою системою (він нескінченний у просторі і часі), отже, до нього не можна застосовувати другий закон термодинаміки. Крім цього, врахування особливостей Всесвіту як гравітаційної системи в теорії тяжіння Ейнштейна приводить до результату, згідно з яким для Всесвіту не існує стану з максимальною ентропією.

13.5. Третій закон термодинаміки. Поняття про "від'ємну" абсолютну температуру

У 1906 році в результаті досліджень властивостей твердих тіл при низьких температурах В. Нернстом було встановлено третій закон термодинаміки (теорема Нернста): при абсолютному нулі ентропія усіх тіл в стані рівноваги дорівнює нулю. Тобто

$$\lim_{T \rightarrow 0} S = 0. \quad (13.48)$$

Як наслідок з нього маємо $\lim_{T \rightarrow 0} C_V = 0$, $\lim_{T \rightarrow 0} C_P = 0$.

Третій закон термодинаміки заперечує можливість досягнення абсолютного нуля. Справді, всі процеси, які протікають з теплопередачею, супроводжуються зміною ентропії. Це означає, що при $S = \text{const}$ процес з теплопередачею неможливий, тобто при $T = 0$ система не віддає теплоти, бо не охолоджується. Отже, сформулюємо таке положення: не можна створити машину, яка здатна взяти всю теплоту від тіла, тобто охолодити його до абсолютного нуля. Досліди підтверджують третій закон термодинаміки.

Згідно з молекулярно-кінетичним означенням температури вона прямо пропорційна середній кінетичній енергії частинок. Оскільки кінетична енергія завжди додатна, то і абсолютна температура не може бути від'ємною. Але раніше було показано роль температури як величини, що визначає розподіл частинок за енергіями. Виходячи з цього, ми дістаємо принципіальну можливість існування від'ємних абсолютних температур. Це впливає з розподілу Больцмана

$$\frac{n_2}{n_1} = e^{\frac{E_2 - E_1}{kT}}, \quad (13.49)$$

де n_1 – число частинок з енергією E_1 ; n_2 – число частинок з енергією E_2 .

Прологарифмувавши (13.49), дістанемо

$$T = - \frac{E_2 - E_1}{k \ln \frac{n_2}{n_1}}. \quad (13.50)$$

При рівноважному стані системи n_2 завжди менше від n_1 , якщо $E_2 > E_1$. Це означає, що число частинок з більшим значенням енергії менше від числа частинок, що мають енергію E_1 . В цьому випадку завжди $T > 0$.

Станам системи з $T < 0$ відповідатимуть такі розподіли частинок по енергіях, при яких енергетичні рівні з більш високими значеннями енергії при підвищенні температури були заповнені повніше порівняно з нижніми, тобто коли спостерігається інверсна заповненість енергетичних рівнів (коли

$n_2 > n_1$ при $E_2 > E_1$). Зрозуміло, що такий розподіл частинок по енергіях є нерівноважним, а від'ємна абсолютна температура є величиною, що характеризує нерівноважність системи.

Від'ємна абсолютна температура досягається тільки в системах, що володіють кінцевим максимальним значенням енергії, або в системах, які мають скінченне число дискретних значень енергії (енергетичних рівнів). Оскільки існування таких систем пов'язано з квантованістю енергетичних станів, то можливість існування систем з від'ємною температурою є квантовим ефектом. Для таких систем характерним є те, що при $T \rightarrow \infty$ внутрішня енергія не зростає необмежено, а поступово наближається до певного граничного значення. При $T \rightarrow \infty$ ентропія системи є максимальною. Якщо тепер квантовій системі продовжувати надавати енергію, то її частинки будуть переходити на більш високі енергетичні рівні, тобто зникне однаковий розподіл частинок по енергіях, досягнутий при $T \rightarrow \infty$; створиться інверсна заповненість енергетичних рівнів і ентропія системи зменшиться. Зрозуміло, що зменшенню ентропії повинні відповідати від'ємні абсолютні температури.

Рівноважну термодинамічну систему з від'ємною температурою вперше здійснили на практиці у 1951 році Е.М. Парселл та Р.В. Паунд в результаті дослідження властивостей системи спінів у кристалах LiF .

Слід відзначити, що оскільки системи з від'ємною температурою нестійкі, то при проходженні через них випромінювання певної частоти в результаті переходу частинок на нижні енергетичні рівні будуть виникати додаткові випромінювання і інтенсивність випромінювання, що проходить через них, зростає, тобто вони володіють від'ємним поглинанням. Цей ефект широко використовується в роботі квантових генераторів і квантових підсилювачів (у мазерах і лазерах).

Контрольні запитання

1. У чому полягає відмінність між оборотними і необоротними процесами? Чому всі реальні процеси необоротні?
2. З яких процесів складається цикл Карно?
3. Виведіть вираз для термічного коефіцієнта корисної дії циклу Карно.

4. Дайте поняття ентропії та розкрийте її фізичний зміст.
5. У чому полягає другий закон термодинаміки?
6. Яке статистичне тлумачення другого начала термодинаміки та які границі його застосування?
7. Які характеристичні функції описують стан системи?
8. У чому полягає третій закон термодинаміки?
9. Який фізичний зміст поняття “від’ємної” абсолютної температури?

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Замкнутий цикл, виконуваний 0,3 кг азоту, зображений на рис.13.6. Визначити: кількість теплоти, одержану від нагрівника за один цикл; роботу, виконану газом за один цикл; ККД циклу; який ККД мав би ідеальний тепловий цикл, ізотерми якого відповідали би найбільшій і найменшій температурам розглядуваного циклу?

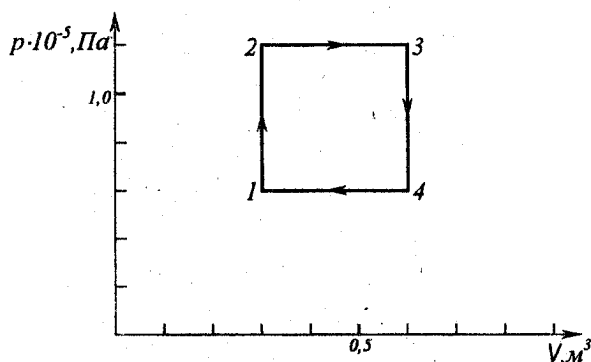


Рис.13.6

Розв’язання. Нагрівання газу в розглядуваному циклі відбувається на ділянках 1-2 і 2-3, а на ділянках 3-4 і 4-1 газ охолоджується. Тому кількість теплоти, одержана азотом від нагрівника за один цикл

$$Q = Q_{1,2} + Q_{2,3} ,$$

де $Q_{1,2} = C_V m(T_2 - T_1)$ – кількість теплоти, одержана азотом при ізохоричному нагріванні; а $Q_{2,3} = C_p m(T_3 - T_2)$ – при ізобаричному нагріванні; C_V і C_p – питомі теплоємності азоту при постійному об'ємі і постійному тиску; T_1 – його температура в початковому стані 1, T_2 – в стані 2, T_3 – в стані 3.

Із графіка визначаємо параметри газу:

$$p_1 = 60 \text{ кПа}; V_1 = 0,3 \text{ м}^3; p_2 = 120 \text{ кПа}; V_2 = 0,6 \text{ м}^3.$$

Тепер запишемо рівняння Клапейрона – Менделєєва для станів 1, 2 і 3:

$$p_1 V_1 = \frac{m}{\mu} R T_1; \quad p_2 V_1 = \frac{m}{\mu} R T_2; \quad p_2 V_2 = \frac{m}{\mu} R T_3.$$

Знаходимо різниці температур $T_2 - T_1$ і $T_3 - T_2$, віднявши від другого рівняння перше, а від третього – друге:

$$T_2 - T_1 = \frac{\mu V_1 (p_2 - p_1)}{mR}; \quad T_3 - T_2 = \frac{\mu p_2 (V_2 - V_1)}{mR}.$$

Отже,
$$Q = \frac{\mu}{R} [C_V V_1 (p_2 - p_1) + C_p p_2 (V_2 - V_1)] = 171 \text{ кДж}.$$

При замкнутому циклі робота чисельно дорівнює площі фігури 1-2-3-4, тобто

$$A = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1) = 18 \text{ кДж}.$$

ККД циклу є відношенням роботи, виконуваної газом за цикл, до кількості теплоти, одержаної від нагрівника

$$\eta = \frac{A}{Q} = 0,1 \quad \text{або} \quad \eta = 10 \%.$$

ККД ідеального теплового циклу

$$\eta' = \frac{T_1 - T_2}{T_1};$$

де T_1 – найбільша температура циклу; T_2 – найменша його температура. Температуру T_1 газу визначимо із рівняння Клапейрона – Менделєєва для стану 1:

$$T_1 = \frac{p_1 V_1 \mu}{mR} = 202 \text{ К.}$$

Використавши рівняння стану газу для станів 1 і 3, знайдемо його максимальну температуру T_3 :

$$T_3 = T_1 \frac{p_3 V_3}{p_1 V_1} = 808 \text{ К.}$$

Отже, $\eta = 0,75$ або 75 %.

Приклад 2. Температура пари, що поступає в парову машину $T_1 = 400 \text{ К}$, а температура в конденсаторі $T_2 = 300 \text{ К}$. Визначити теоретично максимальну роботу A , якщо робоче тіло одержало від нагрівника кількість теплоти $Q = 4,2 \text{ кДж}$.

Розв'язання. Для того, щоб теплова машина (тепловий двигун) виконала максимальну роботу, потрібно, щоб цикл, по якому працює двигун, був оборотним. При наявності тільки двох термостатів – нагрівника з температурою T_1 і холодильника з температурою T_2 – можливий тільки один оборотний цикл – цикл Карно. Коефіцієнт корисної дії цього циклу

$$\eta_k = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \quad (1)$$

а ККД будь-якого теплового двигуна

$$\eta = \frac{A}{Q_1}. \quad (2)$$

Прирівнявши праві частини рівняння (1) і (2), знайдемо шукану роботу:

$$\frac{A}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

звідки
$$A = \frac{Q_1 (T_1 - T_2)}{T_1} = 1,05 \text{ кДж.}$$

Приклад 3. Холодильна машина працює по оборотному циклу Карно в інтервалі температур $T_1 = 300 \text{ К}$ і $T_2 = 270 \text{ К}$. Робоче тіло – азот, маса

якого $m = 0,2$ кг. Визначити кількість теплоти, яку забирають від охолоджуваного тіла, і роботу зовнішніх сил за цикл, якщо відношення максимального об'єму до мінімального $\epsilon = 5$.

Розв'язання. Холодильна машина – це машина, яка за рахунок роботи зовнішніх сил віднімає теплоту від охолоджуваного тіла і передає її більш нагрітому оточуючому середовищу. Якщо холодильна машина працює по циклу Карно, то ізотермічне стискування робочого тіла відбувається при більш високій температурі T_1 (рис.13.7; ділянка 1-2). При цьому робоче тіло віддає у навколишнє середовище, що відіграє роль термостата, кількість теплоти Q_1 (очевидно, $Q_1 = |Q_{1,2}|$).

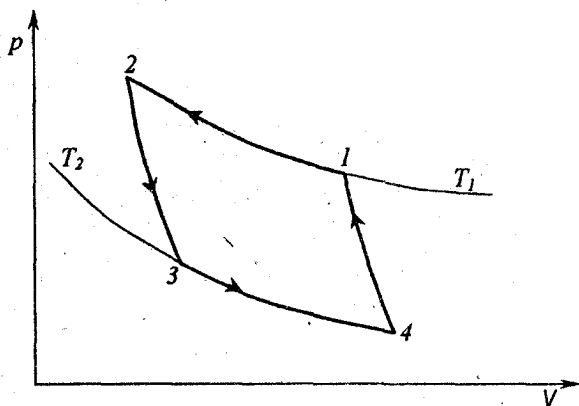


Рис.13.7

На ділянці 3-4 при більш низькій температурі T_2 відбувається ізотермічне розширення робочого тіла, при якому від охолоджуваного тіла (термостат при температурі T_2) відбирається кількість теплоти $Q_2 = Q_{3,4}$. Оскільки мова йде про оборотний цикл Карно, то для нього, як завжди, справедливе співвідношення

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

або
$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1} \quad (1)$$

Згідно з першим законом термодинаміки, робота за цикл дорівнює повній кількості теплоти, одержаній і відданий за цикл:

$$A' = -A = Q_1 - Q_2 \quad (2)$$

Шукана кількість теплоти $Q_2 = Q_{3,4}$. При ізотермічному розширенні ідеального газу

$$Q_{3,4} = A_{3,4} = \frac{m}{\mu} RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3} \quad (3)$$

Як видно з рис.13.7, мінімальний об'єм за цикл V_2 , а максимальний – V_4 , отже,

$$\frac{V_4}{V_2} = \epsilon \quad (4)$$

Другий і третій стан лежать на одній адиабаті, тому

$$\left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_2}{T_1}$$

або
$$\frac{V_2}{V_3} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (5)$$

Перемноживши почленно рівняння (4) і (5), дістанемо

$$\frac{V_4}{V_3} = \epsilon \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

Підставимо цей вираз у (3):

$$Q_{3,4} = Q_2 = \frac{m}{\mu} RT_2 \left(\ln \epsilon + \frac{1}{\gamma-1} \ln \frac{T_2}{T_1} \right)$$

Оскільки азот – газ двохатомний, то коефіцієнт Пуассона $\gamma = 1,4$ і $Q_2 = 21,6$ кДж.

Щоб знайти роботу зовнішніх сил за цикл, виразимо Q_1 з рівняння (1) і підставимо здобуте значення в рівняння (2):

$$A' = Q_2 \left(\frac{T_1}{T_2} - 1 \right) = Q_2 \frac{T_1 - T_2}{T_2} = 2,4 \text{ кДж.} \quad (6)$$

Для характеристики холодильних машин вводять холодильний коефіцієнт $\varepsilon = \frac{Q_2}{A}$. Із виразу (6) випливає, що для холодильної машини, робочий

цикл якої – оборотний цикл Карно, $\varepsilon = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$.

Приклад 4. Дитячий гумовий м'ячик масою $m = 0,3$ кг впав з висоти $h_1 = 2$ м і підскочив від підлоги на $h_2 = 1$ м. Визначити зміну ентропії системи м'яч – підлога, якщо температура в кімнаті $T = 294$ К.

Розв'язання. В даному випадку процес можна вважати ізотермічним. Знайдемо енергію, яка необоротно переходить в теплоту:

$$\Delta E = E_1 - E_2 = mg(h_1 - h_2).$$

Оскільки $\Delta E = \Delta'Q$, то згідно з (13.20) маємо

$$\Delta S = \frac{\Delta'Q}{T} = \frac{mg(h_1 - h_2)}{T} = 10^{-2} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

Приклад 5. Знайти зміну ентропії при ізотермічному, ізохоричному та ізобаричному процесах.

Розв'язання. Зміна ентропії системи для різних процесів визначається через величини, які безпосередньо вимірюються на досліді.

Ізотермічний процес ($T = \text{const}$). Для оборотного ізотермічного процесу між двома станами 1 і 2 маємо

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \frac{1}{T} \int_1^2 d'Q = \frac{Q}{T}. \quad (1)$$

Дана формула, зокрема, описує фазові перетворення, які можна вважати рівноважними та ізотермічними при нормальних умовах.

Ізохоричний процес ($V = \text{const}$). При цьому $d'Q = C_V dT$. Тоді для приросту молярної ентропії при $C_V = \text{const}$ дістаємо

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_v dT}{T} = C_v \ln \frac{T_2}{T_1} \quad (2)$$

Ізобаричний процес ($p = \text{const}$). При цьому $d'Q = C_p dT$. Тоді для приросту молярної ентропії при $C_p = \text{const}$ маємо

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_p dT}{T} = C_p \ln \frac{T_2}{T_1} \quad (3)$$

Формули (1) – (3), виходячи з адитивності ентропії, можна поширити з одного моля на всю систему, помноживши відповідні значення ΔS на число молів $\frac{m}{\mu}$ у системі.

Задачі для самостійних вправ

1. На скільки кілометрів шляху вистачить автомобілю $0,04 \text{ м}^3$ (40 л) бензину, якщо сила ваги автомобіля $35,5 \text{ кН}$, загальний опір руху становить $0,05$ цієї сили, ККД двигуна 18% . Рух вважати рівномірним. Питома теплота згоряння бензину $4,6 \cdot 10^7 \text{ Дж/кг}$, густина бензину – 700 кг/м^3 .

Відповідь: $\approx 130 \text{ км}$.

2. Яку роботу виконують зовнішні сили в ідеальній холодильній машині для того, щоб забрати з холодильної камери 10^5 Дж теплоти, якщо температура в камері 263 К , а температура охолоджуючої води 285 К ?

Відповідь: $8,35 \text{ кДж}$.

3. Нагрівник теплової машини, що працює по оборотному циклу Карно, має температуру 473 К . Визначити температуру холодильника, якщо при одержанні від нагрівника кількості теплоти 1 Дж машина виконує роботу $0,4 \text{ Дж}$. Втрати на тертя і тепловіддачу не враховувати.

Відповідь: 284 К .

4. В результаті кругового процесу газ виконав роботу в 1 Дж і передав холодильнику кількість теплоти $4,2 \text{ Дж}$. Визначити термічний ККД циклу.

Відповідь: $0,193$.

5. Ідеальний газ, здійснюючи цикл Карно, $2/3$ кількості теплоти, одержаної від нагрівника, віддає холодильнику. Температура холодильника

дорівнює 280 К. Визначити температуру нагрівника.

Відповідь: 420 К.

6. Визначити зміну ентропії 0,056 кг азоту, якщо він у початковому стані займає об'єм $15 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ і має температуру 333 К, а в кінцевому стані при температурі 723 К його об'єм становить $75 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$.

Відповідь: 59 Дж/К.

7. Змішали воду масою 5 кг при температурі 280 К з водою масою 8 кг при температурі 350 К. Знайти: 1) температуру суміші; 2) зміну ентропії.

Відповідь: 1) 323 К; 2) 0,3 кДж/К.

8. В результаті ізохоричного нагрівання водню масою 1 г тиск газу збільшився в 2 рази. Визначити зміну ентропії газу.

Відповідь: 7,2 Дж/К.

9. Визначити зміну ентропії при ізобаричному розширенні азоту масою 0,004 кг від об'єму 5 л до об'єму 9 л.

Відповідь: 2,43 Дж/К.

10. Кисень масою 2 кг збільшив свій об'єм в 5 разів один раз ізотермічно, а другий раз – адіабатично. Знайти зміну ентропії в кожному з вказаних процесів.

Відповідь: 836 Дж/К; 0.

11. Лід масою 0,2 кг, взятий при температурі 263 К, був нагрітий до температури 273 К і розплавлений, після чого утворена вода була нагріта до температури 283 К. Визначити зміну ентропії в ході вказаних процесів.

Відповідь: 291 Дж/К.

12. Теплоізольована посудина розділена на дві рівні частини перегородкою. В одній половині посудини міститься 0,01 кг водню. Друга половина посудини відкачана до високого вакууму. Перегородку забирають і газ заповнює весь об'єм. Вважаючи газ ідеальним, знайти приріст його ентропії.

Відповідь: 29 Дж/К.

Розділ 14. РЕАЛЬНІ ГАЗИ

14.1. Загальна характеристика реальних газів

Поведінка реальних газів описується рівнянням Менделєєва – Клапейрона тільки при низьких тисках і високих температурах. При високих тисках і низьких температурах спостерігається значне відхилення властивостей реальних газів від ідеальних.

Проте в сучасній техніці широко використовуються високі тиски. Так, чисті гази зберігаються і перевозяться в балонах під тиском 150 – 200 атм. В прямооточних парових котлах пара перебуває під тиском до 200 атм. При синтезі аміаку застосовуються азот і водень, стиснуті до декілька сотень атмосфер. При пострілі в стволі гармати розвиваються тиски в кілька тисяч атмосфер, а при вибухах атомних і водневих бомб – порядку мільярдів атмосфер. При таких високих тисках реальний газ не можна вважати ідеальним.

В сучасній техніці також широко використовуються процеси зрідження газів і одержання низьких температур. Холод необхідний для зберігання продуктів, для спеціального загартування металів, для розділення газових сумішей, які попередньо охолоджують і перетворюють у рідину, а потім дають можливість википіти легким компонентам.

Експериментальне вивчення поведінки газів при високих та надвисоких тисках, низьких температурах дало можливість встановити рівняння стану для реальних газів. Знання рівняння стану реального стану дає можливість передбачити і розрахувати технічні процеси, які відбуваються при високих тисках і низьких температурах.

Залежно від способу одержання і фізико-хімічних властивостей реальні гази поділяються на природні і штучні. Природний газ в даний час є основним паливом у системі міст і сіл. Розрізняють три групи природних газів:

- 1) гази, одержані із чисто газових родовищ (сухі гази), – складаються з 98 % метану CH_4 ;
- 2) гази, одержані із газоконденсатних родовищ, – складаються із сухого газу та домішок конденсату (бензину, лігроїну, гасу);
- 3) попутні гази одержують із свердловин нафтових родовищ разом з

нафтою. Вони складаються із суміші газів з газовим бензином і пропан-бутанової фракції.

Природні гази часто мають домішки (вуглекислоту, сірководень, азот, вологу), які погіршують їх якість. Штучний газ одержують в результаті термічної обробки твердого або рідкого палива, а також шляхом підземної газифікації вугілля. Основний склад цих газів – оксид вуглецю, водню і азоту.

Природні гази складаються із суміші газів. Для характеристики вводяться масові (вагові), мольні, об'ємні частки.

Масова частка компоненти X_i визначається відношенням маси компоненти m_i до маси всієї суміші m :

$$X_i = \frac{m_i}{m}, \quad m = \sum_{i=1}^n m_i; \quad \sum_{i=1}^n X_i = 1. \quad (14.1)$$

Мольна частка y_i – компоненти визначається відношенням кількості молів v_i даної компоненти до кількості молів суміші v :

$$y_i = \frac{v_i}{v}, \quad v = \sum_{i=1}^n v_i; \quad \sum_{i=1}^n y_i = 1. \quad (14.2)$$

Об'ємна частка φ_i – компоненти в суміші рівна відношенню об'єму V_i даної компоненти до об'єму всієї суміші V :

$$\varphi_i = \frac{V_i}{V}, \quad \sum_{i=1}^n V_i = V; \quad \sum_{i=1}^n \varphi_i = 1. \quad (14.3)$$

Для обчислення параметрів стану суміші газів користуються середніми значеннями густини, молярної маси, питомої теплоємності, середньої газової постійної. Ці величини залежать від мас компонентів суміші. Густина газової суміші ρ_{cm} визначається за правилом адитивності (змішування):

$$\rho_{cm} = X_1 \rho_1 + X_2 \rho_2 + \dots + X_n \rho_n = \sum_{i=1}^n X_i \rho_i; \quad (14.4)$$

$$\rho_{cm} = \sum_{i=1}^n y_i \rho_i; \quad \rho_{cm} = \sum_{i=1}^n \varphi_i \rho_i, \quad (14.5)$$

а середня густина суміші

$$\bar{\rho}_{cm} = \frac{\rho_1 m_1 + \rho_2 m_2 + \dots + \rho_n m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n \rho_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (14.6)$$

За правилом адитивності визначаються:

а) молярна маса суміші μ_{cm}

$$\mu_{cm} = \sum_{i=1}^n \varphi_i \mu_i, \quad \mu_{cm} = \sum_{i=1}^n X_i \mu_i; \quad (14.7)$$

б) середня молярна маса суміші

$$\bar{\mu}_{cm} = \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_n}{\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} + \dots + \frac{m_n}{\mu_n}} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i}{\sum_{i=1}^n \frac{m_i}{\mu_i}} \quad (14.8)$$

або

$$\bar{\mu}_{cm} = \frac{100}{\frac{X_1}{\mu_1} + \frac{X_2}{\mu_2} + \dots + \frac{X_n}{\mu_n}}, \quad \bar{\mu}_{cm} = \frac{100}{\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{\mu_i}} \quad (14.9)$$

(X_i визначені в процентному відношенні);

в) середня газова постійна суміші газів

$$\bar{R}_{cm} = \frac{R_1 m_1 + R_2 m_2 + \dots + R_n m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n R_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad (14.10)$$

де $R_i = \frac{R_y}{\mu_i}$, $R_y = 8,314 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ – універсальна газова стала, μ_i – молярна маса i -ої компоненти.

Тиск суміші газів визначається за законом Дальтона, згідно з яким

$$p_{cm} = p_1 + p_2 + \dots + p_n \quad (14.11)$$

або

$$p_{cm} = \sum_{i=1}^n p_i, \quad (14.12)$$

де p_i – парціальні тиски, тобто тиски, створені кожним газом окрема.

14.2. Відхилення поведінки реальних газів від законів ідеального газу

Більше століття після досліджень Бойля (1662) вважали, що встановлений ним закон завжди виконується. Тільки в кінці XVIII ст. М.Ван-Марум, вивчаючи аміак, встановив, що цей газ не підпорядковується закону Бойля-Маріотта. Систематичні дослідження по перевірці даного закону почалися в 20-х роках XIX ст. Такі дослідження проводилися Реньо, Д.І. Менделєєвим і Амага. Вони прийшли до висновку, що закон Бойля-Маріотта має наближений характер.

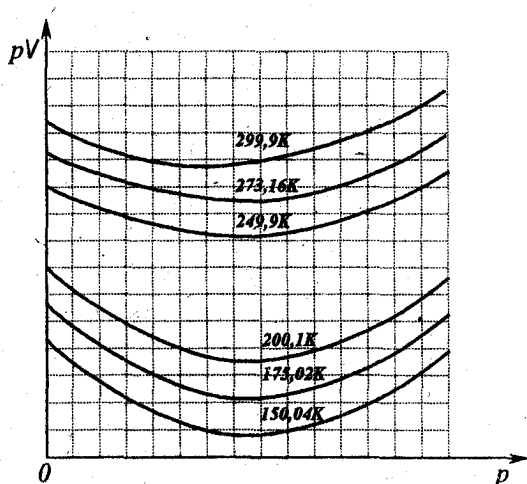


Рис.14.1

На рис.14.1 зображені експериментальні ізоТЕРМИ (p, pV) для азоту, які називаються ізоТЕРмами Амага. Якби азот можна було описати законами ідеального газу, то ці ізоТЕРми зображались би графічно прямими лініями, паралельними осі тиску. Експериментальні ізоТЕРми азоту не збігаються з ізоТЕРмами ідеального газу. Як видно з рис.14.1, при певній температурі добуток pV з підвищенням тиску спочатку зменшується, досягає якогось мінімуму, а при дальшому збільшенні тиску починає різко зростати. Таке зро-

стання добутку pV при збільшенні тиску свідчить про те, що об'єм при цьому зменшується не в стільки разів, у скільки разів підвищується тиск, а в менше число разів. З цього випливає, що з підвищенням тиску стисливість газу тим менша, чим більший тиск. Зменшення стисливості газу при підвищенні тиску можна пояснити, якщо вважати, що самі молекули мають певний об'єм.

Зменшення pV із збільшенням p , що спостерігається на початку ізотерми (рис.14.1), можливе в тому випадку, якщо об'єм V зменшується більшою мірою, ніж підвищується p . Це можна пояснити, якщо вважати, що об'єм газу зменшується не тільки під дією зовнішнього тиску, а також під дією внутрішнього тиску, який зумовлений силами взаємного притягання між молекулами.

Таким чином, на хід ізотерми Амага одночасно впливають сили міжмолекулярного притягання і власний об'єм молекул. Мінімум на ізотермі Амага відповідає тій густині, коли вплив власного об'єму молекул і вплив міжмолекулярного притягання зрівноважують один одного. З того, що при малих тисках ізотерми розміщуються нижче прямої $pV = \text{const}$, а при великих – вище цієї прямої, можна зробити висновок, що при малих густинах газу більший вплив на хід ізотерм мають сили міжмолекулярного притягання, а при великих густинах – власний об'єм молекул.

14.3. Рівняння стану реального газу

Для пояснення поведінки газів у широкому інтервалі густин було запропоновано багато різних рівнянь. Найпростішим з них і разом з тим таким, що дає добрі результати, виявилось рівняння Ван-дер-Ваальса. Це рівняння одержане шляхом внесення в рівняння стану ідеального газу Менделєєва – Клапейрона поправок на додатковий тиск і розмір газових молекул.

Для зручності беремо рівняння Менделєєва – Клапейрона для 1 моля ідеального газу

$$pV_{\mu} = RT, \quad (14.13)$$

де V_{μ} – об'єм моля газу.

Для врахування власного об'єму молекул потрібно із об'єму V_{μ} , зай-

нятого газом, відняти величину b , що становить власний об'єм молекул і для вільного руху молекул залишиться об'єм $(V_\mu - b)$.

Друга поправка, яка вводиться в рівняння стану, — це поправка на взаємне притягання молекул, в результаті чого створюється додатковий тиск на газ p' , а тому у виразі (14.13) зовнішній тиск p необхідно замінити величиною $(p + p')$. Тоді рівняння стану (14.13) набуває вигляду

$$(p + p')(V_\mu - b) = RT \quad (14.14)$$

Це рівняння (14.14) носить назву рівняння Ван-дер-Ваальса.

З'ясуємо фізичний зміст поправок.

а) Залежність між поправкою b і об'ємом самої молекули V_0 можна

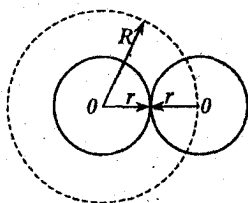


Рис. 14.2

одержати, якщо вважати, що центри двох молекул можуть підійти на відстань, не меншу ніж сума їх радіусів (рис. 14.2).

Сфера, описана подвоєним радіусом молекули навколо центра молекули, є сферою молекулярної дії. Центри всіх інших молекул не можуть попасти всередину цієї сфери. Весь об'єм сфери радіусом $R = 2r$ буде забороненим для центрів інших молекул, крім молекули, центр якої збігається з центром сфери радіусом R . Об'єм цієї “забороненої сфери” рівний восьми об'ємам молекули:

нової сфери” рівний восьми об'ємам молекули:

$$V_{\text{заб}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi (2r)^3 = 8 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = 8V_0 \quad (14.15)$$

Оскільки молекули стикаються парно, то в перерахунку на одну молекулу заборонений об'єм рівний $4V_0$. Поправка b враховує заборонений об'єм всіх молекул. Для одного моля газу цей об'єм

$$b = 4V_0 N_A, \quad (14.16)$$

де N_A — число Авогадро.

Таким чином, поправка, яка враховує власний об'єм молекул, в 4 рази більша від сумарного об'єму молекул.

Слід зауважити, що в сильно стиснутому газі поряд з подвійними зіт-

кненнями молекул можуть бути потрібні і більш складні зіткнення. При цьому заборонені сфери двох даних молекул можуть взаємно перекриватися і тоді об'єм, заборонений для деякої третьої молекули, буде менший, ніж у випадку, коли відсутнє перекриття сфер. Тому по мірі збільшення стиснутості газу повний об'єм, заборонений для його молекул, буде зменшуватися. Тобто постійна b залежить від ступеня стиснутості газу. Крім того, діаметр молекули залежить від температури газу, а тому від температури газу залежить і значення постійної b .

б) Для знаходження значення поправки p' – додаткового молекулярного тиску, розглянемо деякий об'єм газу V , який міститься в посудині. Сила тиску газу на стінки посудини є результатом багаточисленних зіткнень молекул з поверхнею посудини. Взаємне притягання молекул зменшує тиск, який вони спричиняють на стінки посудини, в якій перебуває газ. Обумовлено це тим, що на кожну молекулу, яка наближується до стінки посудини, діє сила притягання, напрямлена всередину посудини, а тому зіткнення молекул зі стінками відбувається слабкіше, ніж при відсутності сил притягання,

в результаті чого тиск на стінку посудини менший, ніж для ідеального газу.

Розіб'ємо умовно газ у посудині на шари I, II і т.д. (рис.14.3). Тиск ідеального газу прямо пропорційний концентрації молекул $n = \frac{N}{V}$ у шарі I, що безпосередньо

прилягає до стінки посудини. В реальному газі за рахунок взаємодії цих молекул з іншими молекулами газу з шару II, III і т.д. цей тиск на стінку зменшиться порівняно з ідеальним газом на деяку величину p' . В зв'язку з тим, що сили взаємодії молекул швидко зменшуються із збільшенням відстані між ними, то практично необхідно врахувати притягання I шару тільки одним

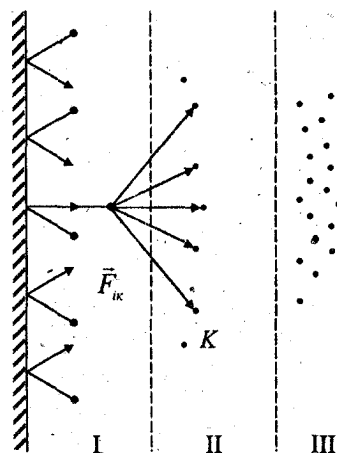


Рис.14.3

сусіднім шаром II. А тому тиск буде пропорційний концентрації молекул в двох шарах, тобто

$$p' \sim \frac{N}{V} \frac{N}{V} \quad (14.17)$$

Нехай α – коефіцієнт пропорційності, тоді

$$p' = \alpha \frac{N^2}{V^2} = \alpha \frac{\rho^2}{m_0^2} = \alpha \frac{\mu^2}{m_0^2 V_\mu^2} = \frac{a}{V_\mu^2}, \quad (14.18)$$

де $a = \frac{\alpha \mu^2}{m_0^2}$; α і a залежать від природи газу.

Підставивши (14.18) в рівняння (14.14), здобудемо

$$\left(p + \frac{a}{V_\mu^2} \right) (V_\mu - b) = RT \quad (14.19)$$

Це і є рівняння Ван-дер-Ваальса для 1 моля газу, в якому a і b – поправки Ван-дер-Ваальса.

Щоб перейти до рівняння стану реального газу для довільної маси газу m , необхідно врахувати, що $v = \frac{m}{\mu}$ молей газу за тих самих умов займають об'єм в v разів більший, а додатковий тиск зміниться в v^2 разів. Ввівши ці поправки, дістанемо рівняння Ван-дер-Ваальса для v молей газу:

$$\left(p + v^2 \frac{a}{V^2} \right) (V - vb) = vRT \quad (14.20)$$

або

$$\left(p + \frac{m^2}{\mu^2} \frac{a}{V^2} \right) \left(V - \frac{m}{\mu} b \right) = \frac{m}{\mu} RT \quad (14.21)$$

Реальний газ, який описується рівнянням Ван-дер-Ваальса, називається ван-дер-ваальсовим. Рівняння Ван-дер-Ваальса дає збіг з дослідом при малих тисках. При високих тисках такий збіг спостерігається тільки для деяких речовин, як вуглекислота і етилен. Для більшості речовин величини a і b є змінними, залежними від температури. А тому практична цінність рівняння Ван-дер-Ваальса невелика. Але воно важливе в тому відношенні, що дає можливість якісно встановити ряд важливих закономірностей.

Тепер є близько 150 рівнянь стану, але всі вони наближені, як і рівняння Ван-дер-Ваальса. Найбільш поширеними є:

1. Рівняння Дітерічі

$$\left(p + \frac{a}{V_\mu^2}\right)(V_\mu - b) = RT.$$

2. Рівняння Клаузіуса

$$\left[p + \frac{a}{T(V_\mu + C)^2}\right](V_\mu - b) = RT.$$

3. Рівняння Вукаловича-Новікова

$$\left(p + \frac{a}{V_\mu^2}\right)(V_\mu - b) = RT \left(1 - \frac{A}{V_\mu} - \frac{B}{V_\mu^2}\right).$$

4. Рівняння Бітті-Бріджмена

$$pV_\mu^2 = RT \left(1 - \frac{c}{V_\mu T^3}\right) \left(V_\mu + B_0 - \frac{bB_0}{V_\mu}\right) - A_0 \left(1 - \frac{a}{V_\mu}\right).$$

Таких наближених рівнянь можна навести дуже багато. Тому ще й тепер ведуться пошуки більш точного рівняння стану реального газу.

14.4. Ізотерми Ван-дер-Ваальса та їх аналіз

Для дослідження поведінки реального газу, що описується рівнянням Ван-дер-Ваальса, розглянемо ізотерми Ван-дер-Ваальса – це криві залежності p від V при заданих значеннях T .

Типова сім'я ізотерм Ван-дер-Ваальса наведена на рис.14.4. Як видно з рис.14.4, ізотерми реального газу відрізняються від ізотерм ідеального газу тільки деяким викривленням їх форми, але залишаються монотонно спадними кривими. Кожна із кривих, що зображає цю залежність, розрахована для певної температури. Чим вище температура, тим правіше і вище на рисунку ізотерми. Тільки при високих температурах вони не мають хвилеподібної ділянки і нагадують ізотерми, що відповідають рівнянню стану ідеального газу.

Для пояснення ізотерм реального газу перетворимо рівняння Ван-дер-Ваальса для моля газу (14.19) і внаслідок цього збудуємо

$$V_{\mu}^3 - \left(b + \frac{RT}{p}\right)V_{\mu}^2 + \frac{a}{p}V_{\mu} - \frac{ab}{p} = 0. \quad (14.22)$$

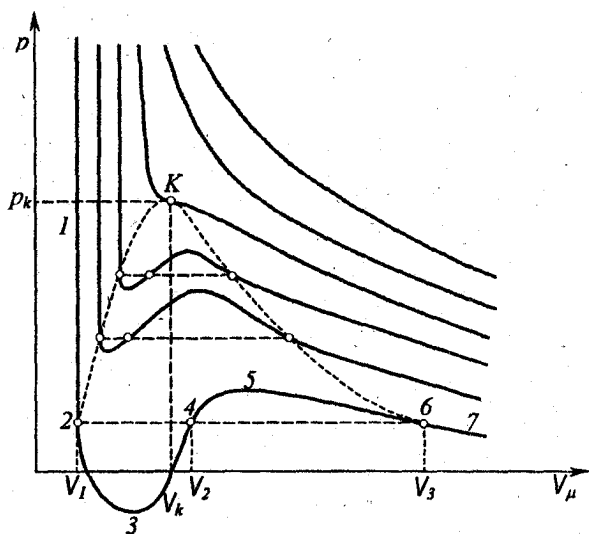


Рис. 14.4

Це алгебраїчне рівняння третього степеня відносно об'єму. При даних значеннях температури і тиску воно має три корені, з яких дійсними коренями можуть бути всі три або один дійсний і два комплексноспряжені. Оскільки об'єм може бути тільки дійсним, то комплексні рішення не мають фізичного змісту. Одне значення об'єму має місце при досить високих температурах. При більш низьких температурах ізоТЕРМИ мають максимум і мінімум. Кожному значенню тиску відповідають три різні значення об'єму V_1, V_2, V_3 (три точки перетину ізоТЕРМИ з горизонтальною прямою).

Менший з цих коренів V_1 відповідає стану з більшою густиною і малим тиском – стан рідини. Ділянка 1-2-3 ізоТЕРМИ різко зростає, і для невеликого зменшення об'єму необхідний дуже високий тиск. Більший із цих коренів V_3 відповідає стану з низькою густиною і легким стискуванням – стан газу. Ділянка 5-6-7 ізоТЕРМИ плавно спадає, об'єм і тиск майже оберне-

но пропорційні, що і відповідає стану газу. Проміжний корінь V_2 лежить на ділянці 3-4-5 і відповідає абсолютно нестійкому стану, оскільки тут маємо пряму залежність між тиском та об'ємом. Отже, із збільшенням тиску в певне число разів об'єм збільшується у таке саме число разів, а такий стан не-реальний. При постійному об'ємі одна частина стискується до стану рідини, а інша перейде в пару, що займає об'єм, який залишився. Отже, ця ділянка характеризує стан рідини і пари – двофазна область. Таким чином ізотерми Ван-дер-Ваальса зображують безперервний перехід від газу до рідини.

Ще за сім років до появи рівняння Ван-дер-Ваальса у 1886 р. англійський фізик Ендрюс експериментально побудував низку ізотерм для різних газів. Типові ізотерми Ендрюса показані на рис.14.5. Як бачимо, вони не

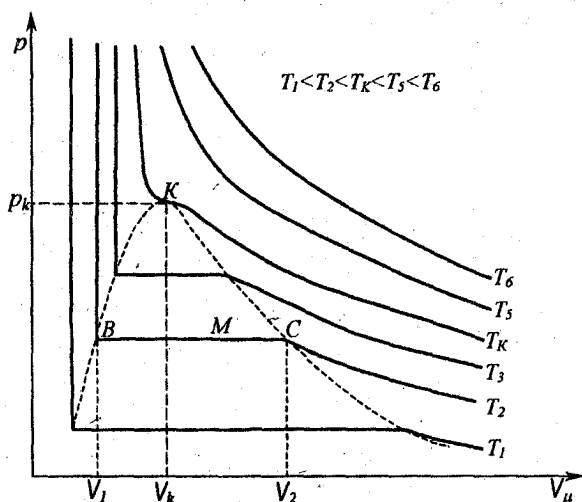


Рис.14.5

зовсім збігаються з розрахунковими ізотермами Ван-дер-Ваальса (див. рис.14.4). Відрізняються вони тільки тим, що перетворенню газу в рідину на ізотермах Ендрюса відповідають горизонтальні ділянки, а не хвилеподібні (рис.14.4). Ці розходження зумовлені тим, що сталі Ван-дер-Ваальса a і b , які входять в рівняння стану, залежать від сили взаємодії між молекулами і власних розмірів молекул, тобто є функціями T і V . Але залежність a

і b від температури і об'єму є надто складною і не врахована в рівнянні Ван-дер-Ваальса. Тому давно намагаються знайти рівняння стану, яке б краще збігалось з експериментом.

14.5. Критичний стан речовини

Аналізуючи ізоТЕРМИ реального газу (рис.14.4), бачимо, що з підвищенням температури і тиску область існування суміші двох фаз зменшується. Точки, що відповідають розв'язкам рівняння V_1 , V_2 , V_3 , зближуються між собою і, починаючи з деякої певної температури, своєї для кожної речовини, зливаються в одну, тобто всі три дійсні розв'язки рівняння збігаються між собою. Така точка на рис. 14.4 позначена буквою K і називається критичною точкою. Відповідна їй температура називається критичною температурою. Для критичної ізоТЕРМИ t_K є точкою перегину. Стан речовини, в якому зникає різниця між рідиною та її парою, називається критичним.

Відповідні критичній точці значення тиску p_K і об'єму V_K називаються критичним тиском і критичним об'ємом речовини. Поряд з критичною температурою вони для різних речовин мають різні значення.

Першу роботу щодо експериментального визначення критичної температури виконав Каньяр де ля Тур у 1822 р. Найбільш широкі і системні дослідження критичних параметрів цілого ряду речовин виконав професор Київського університету М.П. Авенаріус зі своїми учнями в 1873-1895 рр.

Критичні значення тиску, об'єму і температури можна пов'язати з постійними a і b , що входять в рівняння Ван-дер-Ваальса. Скористаємося при цьому тим, що при критичній температурі всі три корені рівняння Ван-дер-Ваальса однакові і рівні критичному об'єму ($V_1 = V_2 = V_3 = V_K$). Перетворюючи рівняння Ван-дер-Ваальса

$$\left(p + \frac{a}{V_\mu^2}\right)(V_\mu - b) = RT$$

(помножимо праву і ліву частину рівняння на $\frac{V_\mu^2}{p}$ і згрупуємо члени, які мають V_μ в однакових степенях), дістанемо

$$V_{\mu}^2 - \left(\frac{RT}{p} + b \right) V_{\mu}^2 + \frac{a}{p} V_{\mu} - \frac{ab}{p} = 0. \quad (14.23)$$

Рівняння Ван-дер-Ваальса для критичної температури $T = T_K$

$$V_{\mu}^2 - \left(\frac{RT_K}{p_K} + b \right) V_{\mu}^2 + \frac{a}{p_K} V_{\mu} - \frac{ab}{p_K} = 0 \quad (14.24)$$

має в критичній точці K перегин (рис. 14.4). Тому в цій точці воно має один корінь V_K і його можна подати у вигляді

$$(V_{\mu} - V_K)^3 = 0$$

або, якщо піднести до степеня*,

$$V_{\mu}^2 - 3V_K V_{\mu}^2 + 3V_K^2 V_{\mu} - V_K^3 = 0. \quad (14.24a)$$

Рівняння (14.24) і (14.24a) збігаються тотожно у тому разі, якщо рівні коефіцієнти при однакових степенях V_{μ} , звідки маємо

$$\frac{RT_K}{p_K} + b = 3V_K, \quad \frac{a}{p_K} = 3V_K^2, \quad \frac{ab}{p_K} = V_K^3.$$

Розв'язуючи ці рівняння відносно трьох невідомих p_K , V_K , T_K , дістанемо

$$T_K = \frac{8a}{27Rb}, \quad V_K = 3b, \quad p_K = \frac{a}{27b^2}. \quad (14.25)$$

Таким чином, критичні параметри p_K , V_K , T_K безпосередньо визначаються через ван-дер-ваальсові поправки a і b .

Обчислені в такий спосіб параметри не зовсім збігаються з експериментальними. Зокрема, експеримент показує, що значно краще виконується різниця $V_K = 2b$.

* В алгебрі доводиться, що всяке рівняння третього степеня з дійсними коефіцієнтами C_1 , C_2 і вільним членом C_3

$$X^3 + C_1 X^2 + C_2 X + C_3 = 0 \quad (1)$$

має три корені X_1 , X_2 , X_3 . Якщо всі три корені рівняння збігаються між собою ($X_1 = X_2 = X_3 = X_K$), то тоді рівняння (1) набирає вигляду $(X - X_K)^3 = 0$.

Якщо через крайні точки сім'ї ван-дер-ваальсових ізотерм провести лінію, то одержимо криву (рис.14.6) – пунктирна лінія), яка обмежує область двофазних станів речовини. Ця крива і критична ізотерма поділяють діаграму p, V під ізотермою на три області: під пунктирною кривою область двофазних станів (рідина + насичена пара), зліва від неї – область рідкого стану, а справа – область пари. Пара відрізняється від інших газоподібних станів тим, що при ізотермічному стиску зріджується. Газ при температурі вище критичної не може бути перетвореним у рідину ні при якому тиску. Речовини у критичному стані характеризуються такими властивостями:

p_k – це максимальний тиск насичуючої пари.

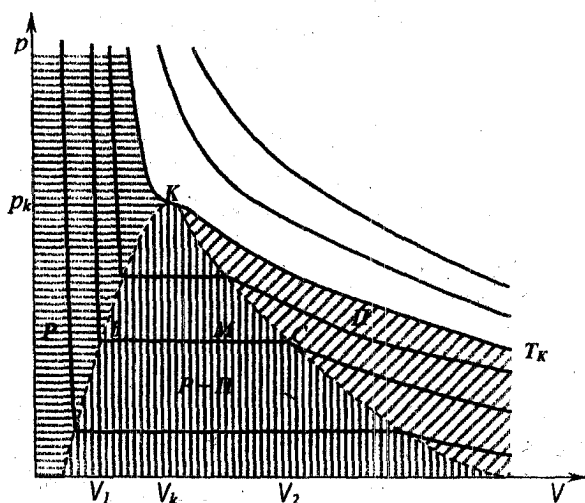


Рис.14.6

Питома теплота випаровування рідини та коефіцієнт поверхневого натягу рідини дорівнюють нулеві.

Питомий об'єм рідини не дорівнює питомому об'ємові пари.

Рідина має максимальний питомий об'єм, а газ – мінімальний.

Поблизу критичної точки в усьому об'ємі газу утворюються і знову розпа-

існують місцеві центри згущення; тому речовина поблизу критичної точки дає помутніння, яке відоме під назвою опалесценції. Назва опалесценція походить від подібності цього явища до розсіяння світла мінералом опалом.

14.6. Зведене рівняння Ван-дер-Ваальса

До рівняння Ван-дер-Ваальса входять параметри a і b , які залежать від природи речовини. Але a і b можна виокремити з рівняння стану, виразивши їх через критичні параметри.

З (14.25) здобудемо:

$$b = \frac{1}{3}V_K; \quad a = 3p_K V_K^2, \quad R = \frac{8}{3} \frac{p_K V_K}{T_K}. \quad (14.25a)$$

Підставимо a , b , R у рівняння Ван-дер-Ваальса для 1 моля газу (14.19) і зробимо відповідні перетворення:

$$\left(p + \frac{a}{V_\mu^2}\right)(V_\mu - b) = RT;$$

$$p = \frac{RT}{V_\mu - b} - \frac{a}{V_\mu^2};$$

$$p = \frac{8p_K V_K T}{3T_K \left(V_\mu - \frac{1}{3}V_K\right)} - \frac{3p_K V_K^2}{V_\mu^2}$$

або

$$\frac{p}{p_K} = \frac{8T}{T_K} \frac{V_K}{(3V_\mu - V_K)} - \frac{3V_K^2}{V_\mu^2}.$$

Звідси

$$\left[\frac{p}{p_K} + 3\left(\frac{V_K}{V_\mu}\right)^2\right]\left(\frac{3V_\mu}{V_K} - 1\right) = 8\frac{T}{T_K}. \quad (14.26)$$

Зведемо зведені параметри, під якими розуміємо відношення змінної величини даного параметра до його критичного значення, а саме:

$$T_n = \frac{T}{T_K}, \quad p_n = \frac{p}{p_K}, \quad V_n = \frac{V_\mu}{V_K}.$$

Тепер рівняння (14.26) можна записати так:

$$\left(p_n + \frac{3}{V_n^2}\right)(3V_n - 1) = 8T_n. \quad (14.27)$$

Рівняння (14.27) називається зведеним рівнянням Ван-дер-Ваальса.

Використовуючи рівняння у зведених величинах (14.27), можна точніше вказати критерії, при яких рівняння стану ідеального газу є добрим наближенням до реального. Нехай об'єм V_μ великий, порівняно з його критичним об'ємом V_K , тобто $V_\mu \gg V_K$, тоді $\frac{V_\mu}{V_K} \gg 1$. Отже, рівняння (14.27)

можна записати у вигляді:

$$p_n V_n = \frac{8}{3} T_n. \quad (14.27a)$$

Підставивши в (14.27a) значення T_n , p_n , V_n , дістанемо

$$p V_\mu = \frac{8}{3} \frac{p_K V_K}{T_K} T, \quad (14.28)$$

але з (14.25a) видно, що $\frac{8}{3} \frac{p_K V_K}{T_K} = R$, – універсальна газова стала. З врахуванням цього рівняння (14.28) набирає вигляду

$$p V_\mu = RT,$$

що являє собою рівняння Менделєєва – Клапейрона для 1 моля газу. Таким чином, рівняння Ван-дер-Ваальса переходить у рівняння Менделєєва – Клапейрона в тому випадку, коли об'єм газу великий порівняно з його критичним об'ємом.

14.7. Внутрішня енергія реального газу

Внутрішня енергія ідеального газу визначається тільки кінетичною енергією руху молекул. У реальних газах взаємодія між молекулами зумовлює потенціальну енергію. Тому внутрішня енергія реального газу склада-

ється з кінетичної енергії теплового руху його молекул ($U_k = C_v T$ – для моля газу) і з потенціальної енергії міжмолекулярної взаємодії:

$$U = U_k + U_n. \quad (14.29)$$

Мірою зміни потенціальної енергії є виконана робота:

$$dU_n = dA = p' dV_\mu = \frac{a}{V_\mu^2} dV_\mu,$$

де V_μ – об'єм моля газу.

Звідси
$$U_n = \int dU_n = \int \frac{a}{V_\mu^2} dV_\mu = -\frac{a}{V_\mu} + \text{const}. \quad (14.29a)$$

При $V_\mu \rightarrow \infty$ сталу інтегрування можна взяти як таку, що дорівнює нулеві. Знак “мінус” означає, що потенціальна енергія реального газу зумовлена силами притягання.

Враховуючи (14.29a) і (14.29), одержимо внутрішню енергію для моля реального газу:

$$U_\mu = C_v T - \frac{a}{V_\mu}. \quad (14.30)$$

З рівняння (14.30) видно, що з підвищенням температури реального газу та зростанням об'єму його внутрішня енергія зростає.

Для ν молей реального газу його внутрішня енергія буде в ν разів більша, тобто

$$U = \nu \left(C_v T - \frac{a}{V_\mu} \right), \quad (14.31)$$

де $V_\mu = \frac{V}{\nu}$, а $\nu = \frac{m}{\mu}$.

Отже,

$$U = \frac{m}{\mu} C_v T - \frac{m^2}{\mu^2} \frac{a}{V}.$$

14.8. Теплоємність реальних газів

Для розрахунків теплоємності реальних газів скористаємося першим

законом термодинаміки, згідно з яким

$$dQ = dU + pdV. \quad (14.32)$$

Застосуємо його до різних процесів.

1. Нехай процес протікає при сталому об'ємі ($V = \text{const}$), тоді $pdV = 0$. З (13.32) випливає, що $dQ = dU$. Тоді молярна теплоємність реального газу при сталому об'ємі

$$C_V^p = \frac{dQ}{\nu dT} = \frac{dU}{\nu dT} = \frac{dU_\mu}{dT}, \quad (14.33)$$

де dU_μ – внутрішня енергія одного моля реального газу.

Згідно з (14.30) внутрішня енергія 1 моля реального газу

$$U_\mu = C_V T - \frac{a}{V_\mu}.$$

Звідси

$$dU_\mu = d\left(C_V T - \frac{a}{V_\mu}\right) = C_V dT. \quad (14.34)$$

Підставивши (14.34) в (14.33), маємо $C_V^p = \frac{C_V dT}{dT} = C_V$.

Таким чином, при сталому об'ємі молярна теплоємність реального газу дорівнює молярній теплоємності ідеального газу, тобто

$$C_V^p = C_V = \frac{i}{2} R.$$

2. Нехай процес протікає при сталому тиску ($p = \text{const}$). Молярна теплоємність реального газу при сталому тиску

$$C_p^p = \frac{dQ_\mu}{dT}, \quad (14.35)$$

де dQ_μ – кількість теплоти, яка надана 1 молю газу. Для реального газу

$$p_p = p + \frac{a}{V_\mu^2}. \quad (14.36)$$

Підставивши (14.36) в (14.32), дістанемо

$$dQ_\mu = C_v dT + \left(p + \frac{a}{V_\mu^2} \right) dV_\mu. \quad (14.37)$$

рівняння Ван-дер-Ваальса для реального газу знайдемо

$$p + \frac{a}{V_\mu^2} = \frac{RT}{V_\mu - b} \quad (14.37a)$$

підставивши в (14.37), матимемо

$$dQ_\mu = C_v dT + \frac{RT}{V_\mu - b} dV_\mu. \quad (14.38)$$

(14.37a) дістанемо

$$RT = pV_\mu + \frac{a}{V_\mu} - pb - \frac{ab}{V_\mu^2} dV_\mu$$

бо

$$RdT = p dV_\mu - \frac{a}{V_\mu^2} dV_\mu + \frac{2ab}{V_\mu^2} dV_\mu. \quad (14.39)$$

(14.39) визначимо dV_μ :

$$dV_\mu = \frac{R}{p - \frac{a}{V_\mu^2} + \frac{2ab}{V_\mu^2}} dT. \quad (14.40)$$

Підставивши вираз (14.40) в (14.38), здобудемо

$$dQ_\mu = C_v dT + \frac{RT}{V_\mu - b} \frac{R}{p - \frac{a}{V_\mu^2} + \frac{2ab}{V_\mu^2}} dT.$$

Підставивши dQ_μ в (14.35), дістанемо

$$C_p^p = C_v + \frac{R^2 T}{(V_\mu - b) \left(p - \frac{a}{V_\mu^2} + \frac{2ab}{V_\mu^2} \right)}. \quad (14.41)$$

(14.41) бачимо, що при сталому тиску теплоємність реального газу відрізняється від теплоємності ідеального газу. Для реального газу $C_v^p + C_p^p \neq R$.

Крім того, теплоємність реальних газів при сталому тиску не є сталою величиною, а функцією параметрів стану.

14. 9. Адіабата реального газу

Як відомо, ентропія системи

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{dU + pdV}{T} \quad (14.42)$$

Для 1 моля реального газу зміна внутрішньої енергії

$$dU_\mu = C_v dT + \frac{a}{V_\mu^2} dV_\mu, \quad (14.43)$$

а тиск

$$p = \frac{RT}{V_\mu - b} - \frac{a}{V_\mu^2} \quad (14.44)$$

Підставимо (14.43) і (14.44) в рівняння (14.42):

$$dS = \frac{C_v dT + \frac{a}{V_\mu^2} dV_\mu + \left[\frac{RT}{V_\mu - b} - \frac{a}{V_\mu^2} \right] dV_\mu}{T} = \frac{C_v}{T} dT + \frac{R}{V_\mu - b} dV_\mu. \quad (14.45)$$

Проінтегруємо вираз (14.45):

$$S = \int dS = C_v \ln T + R \ln(V_\mu - b). \quad (14.46)$$

Адіабатний процес є ізоентропійним, а тому рівняння (14.46) можна переписати:

$$C_v \ln T + R \ln(V_\mu - b) = \text{const}$$

або

$$T(V_\mu - b)^{\frac{R}{C_v}} = \text{const} \quad (14.47)$$

Вираз (14.47) – це рівняння адіабати реального газу в координатах T, V .

З рівняння Ван-дер-Ваальса визначимо температуру

$$T = \frac{\left(p + \frac{a}{V_\mu^2} \right) (V_\mu - b)}{R} \quad (14.48)$$

та підставимо її в рівняння (14.47):

$$\left(p + \frac{a}{V_\mu^2}\right)(V_\mu - b)^{\frac{R}{C_v}} = \text{const}.$$

Звідси

$$\left(p + \frac{a}{V_\mu^2}\right)(V_\mu - b)^{\frac{R}{C_v} + 1} = \text{const}$$

або

$$\left(p + \frac{a}{V_\mu^2}\right)(V_\mu - b)^{\frac{R+C_v}{C_v}} = \text{const}. \quad (14.49)$$

Вираз (14.49) – це також рівняння адиабати реального газу в координатах p, V , яке називають рівнянням Пуассона для І моля реального газу.

14.10. Явище Джоуля – Томсона

У реальному газі істотну роль відіграють сили взаємодії між молекулами. Тому внутрішня енергія реального газу складається з кінетичної енергії руху молекул та їх взаємної потенціальної енергії (14.29):

$$U = U_k + U_n.$$

Взаємна потенціальна енергія молекул залежить від середньої відстані між ними, а тому U_n залежить від об'єму газу. При зміні об'єму газу без обміну енергією з оточуючими тілами (адіабатний процес) повний запас внутрішньої енергії U залишається постійним ($\Delta U = 0$), а тому з рівняння (14.29) випливає, що

$$\Delta U_k = -\Delta U_n, \quad (14.50)$$

тобто за рахунок зміни потенціальної енергії при зміні об'єму реального газу повинна змінюватись і кінетична енергія руху його молекул. Відомо, що для реального і ідеального газу молярні теплоємності при постійному об'ємі C_v рівні, то вираз $U_k = C_v T$ (для моля газу) залишається в силі і для реального газу. Тоді із виразу (14.50) випливає, що

$$\Delta U_n = -C_v \Delta T. \quad (14.51)$$

Таким чином, при зміні об'єму без виконання зовнішньої роботи і без обміну теплотою з оточуючими тілами температура реального газу змінюється. Таке явище експериментально досліджували англійські фізики

Д. Джоуль і В. Томсон в 1852-1862 рр. З цією метою вони виконали ряд дослідів по вивченню проходження газу через пористу перегородку в адіабатних умовах. Схема однієї з установок наведена на рис.14.7. Дослід полягав в

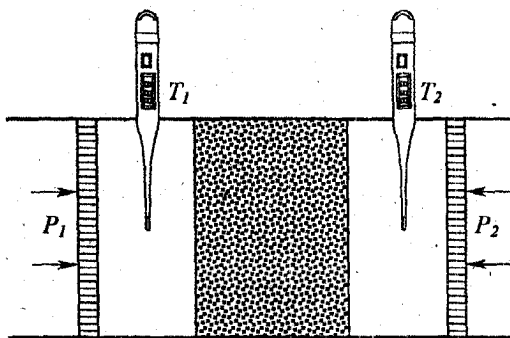


Рис.14.7

тому, що у добре термоізолюваній трубці, заповненій газом, розміщували корок з вати. З однієї сторони корка газ був під тиском p_1 , з другої – під тиском p_2 , причому $p_1 > p_2$. Для вимірювання температур до і після розширення газу з обох сторін корка ставили термометри. Внаслідок різниці тисків газ проникав через пористу перегородку, розширюючись адіабатично. В результаті цього температура газу змінювалася – підвищувалася або знижувалася залежно від природи газу. Явище зміни температури газу при проходженні його через пористу перегородку без теплообміну з оточуючим середовищем і без виконання зовнішньої роботи називається ефектом Джоуля – Томсона, або дросельним ефектом. Ефект Джоуля – Томсона, при якому температура газу, що пройшов через перепону, знижується, називається додатним, а якщо температура підвищується – від'ємним. Знак ефекту Джоуля – Томсона залежить від того, яка з поправок a або b у рівнянні Ван-дер-Ваальса відіграє більшу роль. Зв'язок між ефектом Джоуля – Томсона і поправками a і b у рівнянні Ван-дер-Ваальса можна встановити графічно, якщо розглянути залежність потенціальної енергії взаємодії молекул від відстані між ними (рис.14.8). На рис.14.8,а зображено залежність потенціальної енергії взаємодії молекул при наявності сил відштовхування,

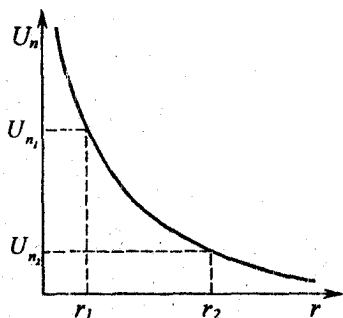
на рис 14.8,б – при наявності сил притягання.

Розглянемо зокрема два випадки:

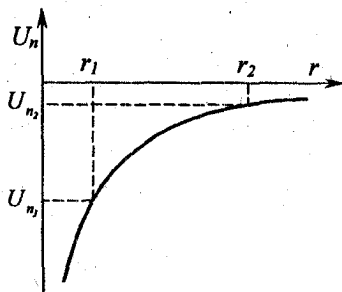
1) газ, для якого поправкою a в рівнянні Ван-дер-Ваальса можна нехтувати, тобто враховуємо розмір молекули;

2) газ, для якого можна знехтувати поправкою b , тобто враховуємо тільки сили притягання між молекулами.

Поправка a в рівняння Ван-дер-Ваальса вводиться для врахування сил притягання між молекулами. А тому в першому випадку нехтуємо силами притягання між молекулами і враховуємо тільки сили відштовхування (рис.14.8,а).



а



б

Рис.14.8

Як видно з рис.14.8,а, більшому тиску p_1 відповідає менша середня відстань між молекулами r_1 ; меншому тиску p_2 відповідає більша середня відстань r_2 . Тобто зі зменшенням тиску внутрішня потенціальна енергія меншується:

$$\Delta U_n = U_{n_2} - U_{n_1} < 0 \quad (14.52)$$

Порівнюючи (14.52) з виразом (14.51), дістанемо $\Delta T > 0$.

У цьому випадку можна зробити висновок, що температура газу під час адиабатного розширення буде підвищуватися, якщо основну роль відіграють розміри молекул.

У другому випадку нехтуємо розмірами молекул, а це означає, що між

молекулами не існує значних сил відштовхування. Тому необхідно врахувати тільки сили притягання, залежність яких від відстані зображено на рис.14.8,б. Як видно з рисунку, числове значення потенціальної енергії із збільшенням r зменшується, а тому

$$\Delta U_n = U_n - U_{n_i} > 0. \quad (14.53)$$

Звідси, враховуючи (14.51), маємо, що $\Delta T < 0$. Таким чином, якщо взаємодія молекул відіграє більшу роль, ніж їх об'єм, то при розширенні газу температура його понижується.

Реальний газ дає від'ємний ефект Джоуля – Томсона, якщо для нього головну роль відіграє поправка b на власний розмір молекул; реальний газ дає додатний ефект Джоуля – Томсона, якщо для нього основну роль відіграє поправка a на сили притягання між молекулами.

При деяких значеннях тиску і температури роль обох поправок a і b однакова; в такому стані реальний газ дає нульовий ефект Джоуля – Томсона, тобто він не нагрівається і не охолоджується при розширенні. Стан, в якому ефект Джоуля – Томсона дорівнює нулю, називається точкою інверсії. Сукупність точок інверсії утворює криву інверсії, зображену на рис.14.9. Ця

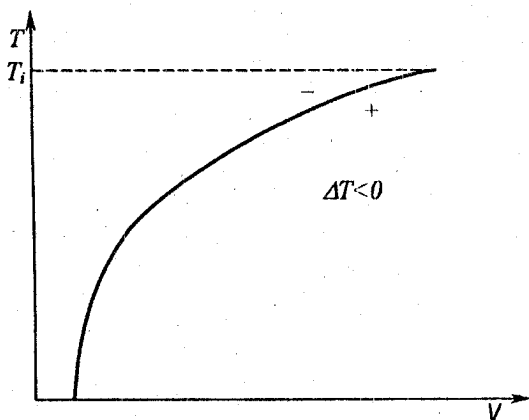


Рис.14.9

крива поділяє на площині V, T області додатного і від'ємного явищ Джоу-

ля – Томсона. Область над кривою відповідає від'ємному явищу Джоуля – Томсона ($\Delta T > 0$), область під кривою відповідає додатному явищу Джоуля – Томсона ($\Delta T < 0$). Точки самої кривої відповідають температурі, при переході через яку знак ефекту Джоуля – Томсона змінюється і називається кривою інверсії. Крива при великих значеннях V асимптотично наближається до значення $\frac{2a}{Rb}$. Це найбільше значення температури, при якому можлива зміна знаку явища, називається температурою інверсії:

$$T_i = \frac{2a}{Rb}$$

Вище цієї температури явище завжди від'ємне, нижче – додатне.

Явище Джоуля – Томсона має широке практичне застосування. Зокрема, додатне явище використовується у техніці зрідження газів.

14.11. Зрідження газів

Аналіз рівняння Ван-дер-Ваальса приводить до висновку, що гази можна переводити в рідкий стан (зрідження газу), але цей перехід можливий лише при температурі, нижчій від критичної температури для даного газу.

Зрідженням газів вчені займалися давно. Деякі гази (Cl_2, CO_2, NH_3) легко зріджувалися ізотермічним стиском. Не вдалося перевести лише водень, кисень, гелій, метан, закис азоту і вуглецю. Ці гази не переходили в рідину, і тому їх назвали перманентними, тобто вічними газами. Д.І. Менделєєв пояснив це явище тим, що для зрідження газів недостатньо простого підвищення тиску, а необхідно знижувати ще й температуру нижче критичної температури. Але те, що температура переходу повинна бути нижчою від критичної, вимагає додаткового охолодження газу. Для багатьох газів це охолодження є досить значним. У такий спосіб вдалося одержати рідкий кисень, азот, водень і гелій (їх критичні температури рівні відповідно 154,4; 126,1; 33 і 5,3 К).

Для зрідження газів застосовуються, в основному, два промислових методи, в основі яких використовується абс ефект Джоуля – Томсона, або адіабатне розширення газів з виконанням зовнішньої роботи.

Схема однієї з установок, в якій використовується ефект Джоуля – Томсона – машина Лінде – зображена на рис.14.10. Газ потужними компре-

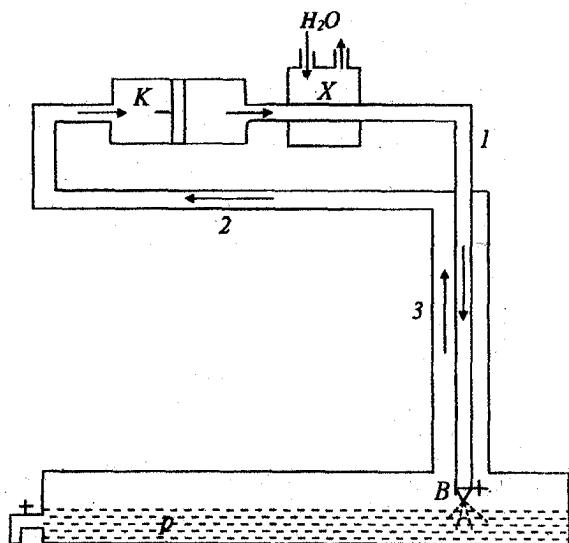


Рис.14.10

сорами К доводиться до тиску близько 100 ат і надходить у змійовик, який складається з кількох труб, встановлених одна в одну. Стиснутий газ рухається по внутрішній трубі 1 і, досягнувши вентиля В з вузьким отвором (дросель В), раптово розширюється. Оскільки газ має за цих умов додатний ефект Джоуля – Томсона, то під час розширення його температура знижується. Охолоджений газ піднімається по зовнішній трубі змійовика і охолоджує газ, який рухається по внутрішній трубі, тобто цей газ охолоджується частково ще до того, як досягне вентиля В. Після певного числа циклів газ можна охолодити до температури, нижчої від критичної і перевести в рідкий стан. Газ з від'ємним ефектом Джоуля – Томсона необхідно попередньо охолоджувати нижче температури інверсії і тільки після цього можна застосовувати метод Лінде.

Цикл Лінде малоекономічний, бо в ньому витрачається велика робота

на попередній стиск газу. Тому в сучасних холодильних машинах – детандерах – газ охолоджується адіабатичним розширенням газів з виконанням зовнішньої роботи. Академік П.Л. Капіца запропонував замість детандера застосувати турбодетандер, в якому газ, стиснутий до 500-600 кПа, охолоджується, виконуючи роботу по обертанню турбіни.

Тепер зроблено багато типів зріджувальних машин, які дозволяють одержувати рідкі гази у великих кількостях.

Зріджені гази мають широке практичне застосування, зокрема для одержання низьких температур. А низькі температури використовують під час досліджень різних фізико-хімічних властивостей речовини. Речовини при низьких температурах суттєво змінюють свої механічні, електричні, оптичні та інші властивості.

Контрольні запитання

1. Чим відрізняються реальні гази від ідеальних?
2. Які величини вводяться для характеристики реальних газів?
3. Виведіть рівняння стану реального газу.
4. Який фізичний зміст поправок a і b в рівнянні Ван-дер-Ваальса?
5. Поясніть ізотерми Ван-дер-Ваальса та порівняйте їх з ізотермами Ендрюса.
6. Що таке критичний стан речовини? Виведіть вирази для визначення критичних параметрів реального газу.
7. Виведіть зведене рівняння Ван-дер-Ваальса.
8. Чому дорівнює внутрішня енергія реального газу?
9. Як визначити теплоємність реального газу при сталому об'ємі та сталому тиску?
10. Виведіть рівняння адіабати реального газу.
11. У чому полягає суть ефекту Джоуля – Томсона? Наведіть приклади застосування цього явища.
12. Які знаєте методи зрідження газів?

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. В балоні місткістю 10л перебуває азот масою 0,25 кг при температурі 280 К. Визначити, яку частину об'єму балона становить власний об'єм молекул газу. Визначити відношення внутрішнього тиску p' до тиску p газу на стінки балона.

Розв'язання. За умовою задачі необхідно визначити відношення

$$k = \frac{V'}{V}, \quad (1)$$

де V' – власний об'єм молекул; V – об'єм балона.

Власний об'єм молекул знайдемо, скориставшись рівнянням Ван-дер-Ваальса:

$$\left(p + \frac{m^2}{\mu^2} \frac{a}{V^2} \right) \left(V - \frac{m}{\mu} b \right) = \frac{m}{\mu} RT. \quad (2)$$

Поправка в рівнянні $\frac{m}{\mu} b$ дає власний об'єм молекул всього газу, тобто

$$\frac{m}{\mu} b = 4V',$$

звідси

$$V' = \frac{m}{\mu} \frac{b}{4}. \quad (3)$$

Підставивши (3) в (1), дістанемо

$$k = \frac{m}{\mu} \frac{b}{4V}. \quad (4)$$

Підставимо в (4) числові значення величин, враховуючи, що $\mu = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, $b = 3,80 \cdot 10^{-5}$ м³/моль;

$$k = \frac{0,25 \cdot 3,86 \cdot 10^{-5}}{4 \cdot 28 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^{-3}} \cdot 100\% = 0,86\%.$$

Отже, власний об'єм молекул становить 0,86% об'єму балона. Потрібно ще знайти відношення

$$k_1 = \frac{p'}{p}. \quad (5)$$

З рівняння (2) витікає, що

$$p' = \left(\frac{m}{\mu}\right)^2 \frac{a}{V^2}, \quad (6)$$

де a — постійна Ван-дер-Ваальса для одного моля газу ($a=0,135 \text{ Н}\cdot\text{м}^4/\text{моль}^2$).

Обчислимо за формулою (6) p' :

$$p' = \left(\frac{0,25}{28 \cdot 10^{-3}}\right)^2 \frac{0,135}{(10 \cdot 10^{-3})^2} \approx 108 \text{ кПа}.$$

Тиск p , який чинить газ на стінки посудини, знайдемо з рівняння (2):

$$p = \frac{\frac{m}{\mu} RT}{V - \frac{m}{\mu} b} - \frac{m^2 a}{\mu^2 V^2}. \quad (7)$$

Після обчислення за формулою (7) маємо, що $p=2,14 \text{ МПа}$. Підставимо у вираз (5) значення p' і p і, провівши обчислення, знайдемо, що

$$k_1 = \frac{108 \cdot 10^3}{2,14 \cdot 10^6} \cdot 100\% = 5,05\%.$$

Таким чином, тиск газу, зумовлений силами притягання молекул, становить 5,05% тиску газу на стінки посудини.

Приклад 2. Один моль газу перебуває при критичній температурі і займає об'єм V_μ , який в $n=3$ рази більший від критичного об'єму. В скільки разів тиск p газу в цьому стані менший від критичного тиску $p_{кр}$?

Розв'язання. Для розв'язку задачі зручно скористатися рівнянням Ван-дер-Ваальса у зведених формі:

$$\left(p_n + \frac{3}{V_n^2}\right)(3V_n - 1) = 8T_n, \quad (1)$$

де $p_n = \frac{p}{p_k}$, $V_n = 3$.

За умовою задачі об'єм в 3 рази більший від критичного об'єму, тобто

$V_\mu = 3V_k$, $V_n = 3$, а температура $T = T_k$, тобто $T_n = 1$.

З рівняння (1) визначимо p_n :

$$p_n = \frac{8T_n}{3V_n - 1} - \frac{3}{V_n^2}. \quad (2)$$

Підставимо у вираз (2) числові значення:

$$p_n = \frac{8 \cdot 1}{9 - 1} - \frac{3}{9} = \frac{2}{3}$$

або

$$\frac{p_k}{p} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

Отже, в цьому стані тиск газу p менший від критичного тиску в 1,5 рази.

Приклад 3. Визначити зміну внутрішньої енергії 20 г хлору при ізотермічному розширенні його від $V_1 = 20 \text{ см}^3$ до $V_2 = 500 \text{ см}^3$.

Розв'язання. Внутрішня енергія реального газу визначається за формулою

$$U = \frac{m}{\mu} C_v T - \frac{m^2 a}{\mu^2 V}. \quad (1)$$

Зміну внутрішньої енергії ΔU в результаті ізотермічного розширення знайдемо як різницю двох значень внутрішньої енергії при об'ємах V_1 і V_2 , тобто

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{m^2 a (V_2 - V_1)}{\mu^2 V_2 V_1}. \quad (2)$$

Підставимо числові значення величин у формулу (2). Врахувавши, що $a = 0,650 \text{ Н} \cdot \text{м/моль}^2$, $\mu = 0,071 \text{ кг/моль}$, дістанемо $\Delta U = 154 \text{ Дж}$.

Приклад 4. Потік газу пройшов через пористу перегородку. До перегородки газ характеризувався молярним об'ємом V_1 і температурою T_1 . За перегородкою температура газу T_2 . Вважати процес адіабатичним. Визначити приріст температури ΔT водню внаслідок ефекту Джоуля – Томсона, якщо $p_1 = 10^6 \text{ Па}$, $T_1 = 273 \text{ К}$. До розширення газ вважати ван-дер-ваальсовим, після розширення – ідеальним. Значення V_2 обчислити за рівнянням стану ідеального газу.

Розв'язання. Згідно з першим законом термодинаміки маємо:

$$Q_1 = U_1 + p_1 V_1,$$

$$Q_2 = U_2 + p_2 V_2. \quad (1)$$

За умовою задачі процес адіабатичний, а тому

$$Q_1 = Q_2 = 0.$$

Отже, з (1) дістанемо

$$U_1 + p_1 V_1 = U_2 + p_2 V_2. \quad (2)$$

Відомо, що $U_1 = C_v T_1$, а добуток $p_1 V_1$ визначимо з рівняння Ван-дер-Ваальса

$$p_1 V_1 = RT_1 \frac{V_1}{V_1 - b} - \frac{a}{V_1}.$$

З рівняння Менделєєва – Клапейрона знайдемо добуток

$$p_2 V_2 = RT_2,$$

а U_2 визначимо за формулою $U_2 = C_v T_2$.

Підставивши $U_1, U_2, p_1 V_1$ і $p_2 V_2$ в рівняння (2), дістанемо:

$$C_v T_1 + RT_1 \frac{V_1}{V_1 - b} - \frac{a}{V_1} = C_v T_2 + RT_2.$$

Зробимо перетворення:

$$(C_v + R)T_1 - 2\frac{a}{V_1} + RT_1 \frac{b}{V_1 - b} = (C_v + R)T_2.$$

Звідси

$$\Delta T = \frac{1}{C_v + R} \left(RT_1 \frac{b}{V_1 - b} - 2\frac{a}{V_1} \right). \quad (3)$$

Взявши a і b з таблиці, підставимо їх числові значення в (3) і одержимо, що $\Delta T = +0,21$ К.

Задачі для самостійних вправ

1. Суміш складається із двох компонентів масою $m_1=500$ кг і $m_2=1500$ кг. Визначити масову частку кожного компонента в суміші.

Відповідь: $X_1=0,25$; $X_2=0,75$.

2. Суміш складається з 1600 кг метану (CH_4) і 2400 кг етану (C_2H_6).

Визначити середню молярну масу суміші.

Відповідь: 22,2 кг/кмоль.

3. Знайти густину газової суміші водню і кисню, якщо їх масові частки дорівнюють відповідно 1/9 і 8/9. Тиск суміші 100 кПа, температура 300 К.

Відповідь: 0,402 кг/м³.

4. Газова суміш, яка складається з кисню і азоту, перебуває в балоні під тиском 1 МПа. Визначити парціальні тиски кисню і азоту, якщо масова частка кисню в суміші дорівнює 0,2.

Відповідь: 0,18 МПа, 0,82 МПа.

5. Яку температуру мають 2 г азоту, що займають об'єм 820 см³ при тиску в 2 атм? Газ розглядати як реальний.

Відповідь: 280 К.

6. В посудині місткістю 20 л перебуває 0,5 кг азоту. Визначити внутрішній тиск p' газу та власний об'єм молекул.

Відповідь: 108 кПа; 86,2 см³.

7. Газ перебуває в критичному стані. У скільки разів збільшиться тиск газу, якщо його температуру ізохорно збільшити в 2 рази.

Відповідь: 5.

8. Знайти внутрішню енергію вуглекислого газу масою $132 \cdot 10^{-3}$ кг при нормальному тиску і температурі 300 К. Розглянути 2 випадки: 1) газ ідеальний; 2) газ реальний.

Відповідь: 1) 22,4 кДж; 2) 9,2 кДж.

9. Знайти ефективний діаметр молекули кисню, вважаючи відомими для кисню критичні значення T_k і p_k .

Відповідь: 294 пм.

10. Знайти густину ρ_k гелія в критичному стані, вважаючи відомими для гелію критичні значення T_k і p_k .

Відповідь: $\rho_k = \frac{8\mu p_k}{3T_k R}$; $\rho_k = 57 \text{ кг/м}^3$.

11. Визначити зміну внутрішньої енергії 1 моля неону при ізотермічному розширенні його об'єму від $V_1 = 1 \text{ л}$ до $V_2 = 2 \text{ л}$.

Відповідь: 104 Дж.

12. У посудині об'ємом 20 см^3 перебуває 8 г кисню при температурі 300 К. Визначити внутрішню енергію кисню. Газ вважати реальним.

Відповідь: 1,13 кДж.

13. Потік газу пройшов через пористу діафрагму. Перед діафрагмою стан газу характеризувався молярним об'ємом V_1 і температурою T_1 . За діафрагмою температура газу рівна T_2 . До розширення газ вважати ван-дер-ваальсовим, після розширення – ідеальним. Вважати процес адиабатним. Знайти приріст температури $\Delta T = T_2 - T_1$.

Відповідь: $\Delta T = \frac{1}{C_v + R} \left(\frac{RT_1 b}{V_1 - b} - \frac{2a}{V_1} \right)$.

14. Визначити приріст температури ΔT азоту внаслідок ефекту Джоуля – Томсона (див. задачу 11), якщо $p_1 = 10 \cdot 10^5 \text{ Па}$, $t = 100 \text{ }^\circ\text{С}$. Значення ΔT можна визначати за рівнянням стану ідеального газу.

Відповідь: $\Delta T = -1,6 \text{ К}$.

15. Знайти вираз для ентропії моля ван-дер-ваальсового газу (залежно від T і V). Порівняти здобутий вираз з аналогічною формулою для ідеального газу.

Відповідь: $S = C_v \ln T + R \ln(V - b) + \text{const}$.

16. Вивести вираз для роботи A , яка виконується молям ван-дер-ваальсового газу при ізотермічному розширенні від об'єму V_1 до об'єму V_2 . Температура газу T . Порівняти здобутий вираз з аналогічним виразом для ідеального газу.

Відповідь: $A = RT \ln[(V_2 - b)/(V_1 - b)] + a \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right)$.

17. Знайти коефіцієнт дифузії D гелію при температурі $17 \text{ }^\circ\text{С}$ і тиску 150 кПа. Ефективний діаметр σ атома обчислити, вважаючи відомими для гелію критичні значення T_k і p_k .

Відповідь: $D = 3,5 \cdot 10^5 \text{ м}^2/\text{с}$.

15.1. Будова рідин. Загальна характеристика рідкого стану речовини

Рідина займає деяке проміжне положення між твердим тілом і газом. Як і тверде тіло, рідина має об'єм, а подібно газу набуває форму посудини. Область існування рідини є обмеженою. При низьких температурах рідина кристалізується, тобто переходить у твердий стан, а при високих температурах – у газоподібний стан. При високих тисках і високих температурах рідина зближується з газами: в критичному стані зникає різниця між рідиною і газом. При температурах, близьких до температури кристалізації, рідина за своїми властивостями подібна до кристалів.

До 30-х років ХХ століття вважали, що структура рідини повністю не впорядкована і за своєю будовою аналогічна сильно стиснутому газу. Поширення цієї точки зору дало підстави для застосування в ряді випадків однакових законів в гідродинаміці.

Проте ця аналогія виявилася поверхневою, подібність ґрунтується на одній властивості – текучості.

Рентгеноструктурний аналіз рідин показав, що є певний порядок у розміщенні частинок у рідині. Але цей порядок спостерігається тільки на невеликих відстанях, порядку 2-3 молекулярних шарів. Це дає можливість говорити про ближній порядок у рідинній упаковці частинок.

Велику роль у розвитку питання про будову рідин зіграли роботи Дж. Бернала і Я.І. Френкеля. В 60-і роки Д. Бернал висунув ідею про те, що в рідинах ми зустрічаємося із симетрією 5-го порядку. Це означає, що в плоскій моделі кожна частинка має в середньому біля п'яти близьких сусідів, а в просторовій упаковці – біля одинадцяти. З цього витікає ряд наслідків. Зокрема, в такому роді упаковці може реалізуватися тільки ближній порядок. Дальній порядок тут неможливий, бо площину можна покрити сіткою, яка складається з правильних трикутників, квадратів і шестикутників, але не п'ятикутників. Простір також не можна заповнити багатокутниками, у яких грані були б правильними п'ятикутниками.

Багатокутники при щільній упаковці групуються в компактні просторові утворення. Бернал назвав їх псевдоядрами, тобто не правдивими яд-

рами. Між цими ядрами повинні виникнути великі отвори або, як їх назвав Я. Френкель, дірки. Наявність дірок зменшує густину рідин порівняно з твердим тілом. Псевдоядра не є стабільними утвореннями. Оскільки є велике число "дірок", частинки можуть переходити від одного ядра до іншого, утворюючи багатогранники різної форми. В результаті цього рідина має не одну певну структуру, а велику кількість еквівалентних структур, які відповідають одному й тому ж самому значенню енергії системи. Частинка рідини коливається біля деякого положення рівноваги протягом деякого часу, який Френкель назвав часом осілого життя. Потім вона перескакує на місце дірки і приєднується до другого псевдоядра. Ці процеси відбуваються випадково. Оскільки число частинок велике, то можна ввести середній час осілого життя τ – це проміжок часу, протягом якого не змінюється структурна конфігурація псевдоядер, що характеризує ближній порядок. Щоб частинка відірвалася від псевдоядра, вона повинна мати кінетичну енергію, за рахунок якої виконає роботу по подоланню молекулярних сил притягання. Називається ця енергія енергією активації. З підвищенням температури рідини імовірність переселення частинок зростає за експоненціальним законом:

$$\omega = e^{\frac{-\varepsilon_0}{kT}}, \quad (15.1)$$

де ω – імовірність переселення частинки; ε_0 – енергія активації; k – стала Больцмана.

При низьких температурах $\omega \rightarrow 0$, при високих $\omega \rightarrow 1$ (рис.15.1). Середній час осілого життя τ також змінюється за експоненціальним законом:

$$\tau = \tau_0 e^{\frac{\varepsilon_0}{kT}}, \quad (15.2)$$

де τ_0 – постійна величина для даної рідини.

Графічно залежності (15.1) та (15.2) зображені на рис.15.1. Із збільшенням температури час осілого життя τ зменшується, а імовірність переселення на місце "дірки" зростає (рис.15.1).

Наявність "дірок" між псевдоядрами дає можливість якісно пояснити механізм явищ дифузії і внутрішнього тертя в рідині і з'ясувати характер залежності коефіцієнта дифузії і в'язкості від температури.

Структура і фізичні властивості рідини залежать від хімічної індивідуальності частинок, з яких вона складається, а також від характеру сил

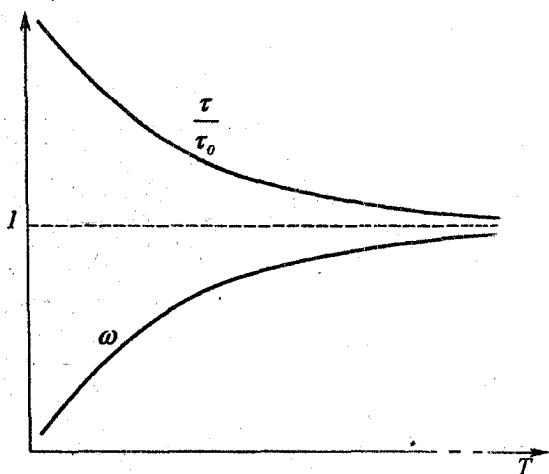


Рис.15.1

міжмолекулярного зв'язку. Розрізняють рідини прості та складні. До простих рідин належать зріджені інертні гази, розплавлені метали, деякі багатомірні рідини, які складаються з неполярних молекул.

До складних рідин відносяться ті, які характеризуються напрямленими міжмолекулярними силами. Типова складна рідина – це вода, у якій сили зчеплення реалізуються в основному водневими зв'язками між молекулами. До складних рідин належать також розплавлені багатоконпонентні напівпровідникові сполуки, які зберігають напівпровідникові властивості і є в рідкому стані.

Деякі властивості рідин якісно можна пояснити на основі рівняння Ван-дер-Ваальса. До таких властивостей належать теплове розширення рідин та їх стисливість. Коефіцієнтом ізотермічної стисливості Z тіла називається відносна зміна об'єму при зміні тиску на одиницю, тобто

$$Z = \frac{dV}{Vdp} \quad (15.3)$$

У рідин, на відміну від газів, стисливість дуже мала. Це видно з ізотерми Ван-дер-Ваальса (рис.15.2), на якій рідкому стану відповідає ділянка 1-2.

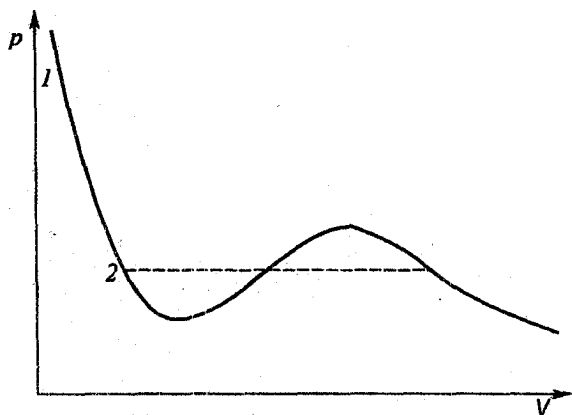


Рис.15.2

Хід кривої на цій ділянці свідчить про дуже малу стисливість рідин. Це обумовлено тим, що в рідинах має місце сильна міжмолекулярна взаємодія. Тому в рідинах при невеликому зменшенні відстані між молекулами виникають великі сили відштовхування, які перешкоджають дальшому стискуванню. Із зростанням температури коефіцієнт стисливості зростає тому, що при нагріванні об'єм рідини, а значить і відстань між молекулами, збільшуються. При цьому сили відштовхування зменшуються і стисливість рідини збільшується. Коефіцієнт стисливості залежить також від тиску, – зменшується з ростом останнього. При дуже високих тисках коефіцієнти стисливості для всіх рідин майже однакові, хоча при невеликих тисках значно відрізняються один від одного.

Теплове розширення рідин характеризується коефіцієнтом теплового розширення

$$\beta = \frac{dV}{VdT}, \quad (15.4)$$

тобто відносною зміною об'єму при зміні температури на 1 градус.

Числові значення коефіцієнта β залежать від температури і тиску. Так, при збільшенні температури β зростає, а при збільшенні тиску – зменшується.

Аномальним тепловим розширенням характеризується вода. В інтервалі температур від 0 до 4 °С коефіцієнт β від'ємний: при нагріванні об'єм води зменшується і найбільшої густини вода досягає при 4 °С. При цій температурі $\beta = 0$. Причина аномального розширення води полягає в тому, що молекули води мають різний склад, не тільки H_2O , але і $2\text{H}_2\text{O}$ і $3\text{H}_2\text{O}$. Відносна кількість цих молекул змінюється із зміною температури і тиску.

Теплоємність рідин, як і газів та твердих тіл, визначається кількістю теплоти ΔQ , яку слід надати рідині для зміни її температури на 1 градус:

$$C = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{dQ}{dT}. \quad (15.5)$$

Теорія, яка описує теплоємність газів і твердих тіл, не може бути застосована до рідин, бо внутрішня енергія рідин визначається не тільки кінетичною енергією теплового руху частинок, але також і їх потенціальною енергією взаємодії. Як і в газах, у рідинах необхідно розрізняти теплоємність при постійному об'ємі C_v і при постійному тиску C_p . Але у випадку рідин $C_p - C_v \neq R$: це значення може бути більшим і меншим залежно від значення β і величини внутрішніх сил взаємодії частинок рідини. У рідинах різниця молярних теплоємностей $C_p - C_v$ також визначається роботою розширення одного моля речовини при його нагріванні на 1 градус. Отже, для рідин при визначенні $C_p - C_v$ необхідно враховувати значення коефіцієнта теплового розширення:

$$C_p - C_v = p_i \beta V, \quad (15.6)$$

де $p_i = \rho r$ – внутрішній тиск; r – питома теплота випаровування; ρ – густина; β – коефіцієнт теплового розширення. Якщо значення p_i підставити в (15.6), то дістанемо

$$C_p - C_v = \beta r. \quad (15.7)$$

Теплоємність рідин залежить від кількості атомів, які входять у молекулу. Чим більше атомів входить у молекулу рідини, тим більша її теплоємність.

Дослід показує, що теплоємність рідин залежить від температури по-

зному. У одних рідин теплоємність із зростанням температури збільшується, у інших, навпаки, зменшується (наприклад, ртуть). У деяких рідин (наприклад, води) теплоємність із підвищенням температури спочатку зменшується, а пройшовши через мінімум починає збільшуватися.

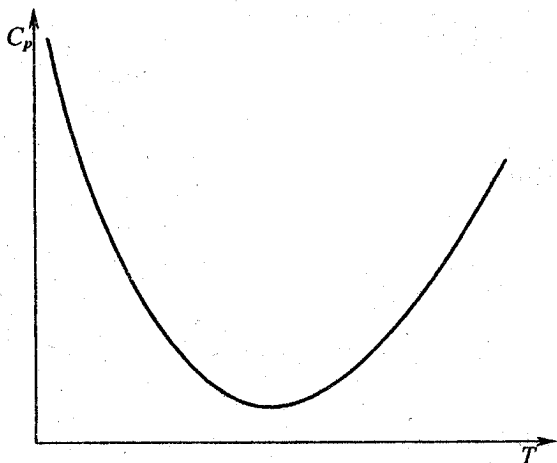


Рис.15.3

рис.15.3). При збільшенні тиску теплоємність рідин зменшується і при тисках 200-3000 атм досягає мінімуму, а при дальшому підвищенні тиску – зростає, але навіть при тисках 12000 атм не досягає початкового значення.

Отже, теплоємність рідин не може бути описана такими простими формулами, як теплоємність ідеального газу.

15.2. Явища переносу в рідинах

В рідинах, як і в газах, спостерігаються явища переносу – дифузії, теплопровідності і в'язкості. Але механізм цих процесів в рідинах інший, ніж в газах. Явища переносу в газах визначаються довжиною вільного пробігу молекул. В рідинах поняття довжини вільного пробігу не має сенсу тому, що довжина вільного пробігу і розмір молекул тут є співрозмірними вели-

чинами. Молекули рідини здійснюють коливання навколо положень рівноваги, одночасно переміщуючись час від часу серед інших молекул. Таким є характер теплового руху молекул рідини. В зв'язку з великою густиною молекул у рідинах їх поступальний рух значно обмежений. Саме тому процес дифузії, тобто перенос маси, в рідинах відбувається повільніше, ніж в газах.

Для рідин є також справедливим закон дифузії Фіка: $M = -D \frac{\Delta \rho}{\Delta x} S \Delta t$. Як і

в газах, коефіцієнт дифузії рідин D з підвищенням температури зростає, але зменшується із зростанням тиску. Експериментально встановлено, що коефіцієнт дифузії в рідинах із збільшенням температури змінюється за експоненціальним законом

$$D = A e^{\frac{-\varepsilon_a}{kT}}, \quad (15.8)$$

де A – деяка постійна, характерна для даної рідини; k – стала Больцмана; T – абсолютна температура; ε_a – енергія активації; e – експонента (основа натурального логарифма).

Механізм дифузії в рідинах, виходячи з теорії Френкеля, можна пояснити таким чином. Позначимо середню довжину вільного пробігу частинки в рідині через $\bar{\ell}$ (це по суті віддаль між псевдодрамами). Тоді середня швидкість переміщення частинки всередині рідини $\bar{u} \approx \frac{\bar{\ell}}{\tau}$, де τ – середній час

осілого життя. За аналогією $D = \frac{1}{3} \bar{\lambda} \bar{u}$ для газів, знайдемо для рідин:

$$D = \frac{1}{3} \bar{\ell} \bar{u} = \frac{1}{3} \frac{\bar{\ell}^2}{\tau};$$

$$D = \frac{1}{3} \frac{\bar{\ell}^2}{\tau_0} e^{\frac{-\varepsilon_a}{kT}}. \quad (15.9)$$

Вираз (15.9) узгоджується з експериментальними даними (15.8).

Теоретичні і експериментальні дослідження привели до висновку, що дифузія у рідинах тісно пов'язана з в'язкістю. Так, на основі гідродинамічних уявлень дістали співвідношення

$$D = \frac{kT}{6\pi\eta r}, \quad (15.10)$$

де k – стала Больцмана; η – коефіцієнт в'язкості рідини; r – радіус частинки. Формула (15.10) називається співвідношенням Стокса – Ейнштейна. Це співвідношення для багатьох рідин дає значення коефіцієнтів дифузії, які добре збігаються з експериментом.

В'язкість рідин, як і внутрішнє тертя в газах, зумовлена передачею імпульсу від одного шару рідини до іншого. Але механізм в'язкості рідин відмінний від механізму внутрішнього тертя в газах. В'язкість рідини зумовлена, в основному, молекулами, які здійснюють стрибкоподібні поступальні рухи. При не дуже високих температурах такі перескоки частинок відбуваються рідко. Тому в'язкість рідин дуже велика порівняно з газами.

Коефіцієнт в'язкості рідин $\eta = \frac{F}{\frac{dV}{dx}S}$, як і газів, визначається за законом

Ньютона. Характерним для рідини є значна залежність коефіцієнта в'язкості від температури. Ця залежність в'язкості рідини від температури визначається формулою Френкеля

$$\eta = Ae^{\frac{c_0}{KT}}, \quad (15.11)$$

де A – коефіцієнт, який залежить від природи рідини. Вираз (15.11) має зміст в інтервалі температур плавлення $T_{пл}$ і кристалізації $T_{кр}$ (рис.15.4),

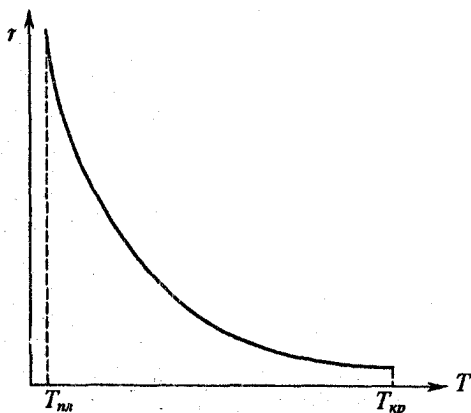


Рис.15.4

вище якої рідина існувати не може. Формула вперше виведена Я.І. Френкелем і показує, що коефіцієнт в'язкості η рідини при збільшенні температури зменшується (рис.15.4), в той час як для газів зростає пропорційно $\sqrt{T}$. Пояснюється це тим, що для газів в'язкість, в основному, визначається швидкістю хаотичного теплового руху молекул. На противагу цьому в рідинах в'язкість визначається рухомістю молекул, яка залежить від дії молекулярних сил. При виникненні в рідині градієнта швидкостей псевдодра (за Френкелем) ковзають одні відносно інших. Взаємодія зводиться до опору тертя, яке зазнає "дірка", переходячи від одного псевдодра до іншого. При зниженні температури в'язкість деяких рідин настільки зростає, що вони перетворюються в аморфні тіла. В'язкість рідини залежить також від тиску. При малих тисках коефіцієнт в'язкості майже не залежить від тиску, але при тисках в тисячі і десятки тисяч атмосфер дуже зростає. Це зумовлено тим, що в сильно стиснутих рідинах з ростом тиску поступальний рух молекул сповільнюється, молекули не можуть перейти на нове місце, а тому обмін імпульсами між частинками зменшується. Наприклад, в'язкість води при тиску 20000 атм збільшується в декілька мільйонів разів.

В'язкість залежить також від складу рідини. Дослідами доведено, що в'язкість розчинів залежить від концентрації. Наближено цю залежність описує формула Ареніуса

$$\ln \eta = X \lg \eta_1 + (1 - X) \lg \eta_2, \quad (15.12)$$

де X – молярна частка однієї з компонент; η_1 і η_2 – відповідно в'язкість складових суміші.

Теплопровідність у рідинах, як і в газах, має місце при наявності градієнта температур. Коефіцієнт теплопровідності рідин, як і твердих тіл та газів, визначається законом Фур'є

$$j_q = \frac{Q}{St} = -K \operatorname{grad} T, \quad (15.13)$$

який пов'язує тепловий потік $j_q = \frac{Q}{St}$ з градієнтом температур:

$\operatorname{grad} T = \frac{dT}{dx}$; K – коефіцієнт теплопровідності. Проте механізм теплопровідності у рідинах відрізняється від механізму передачі теплоти в газах і є

ближчим до механізму теплопровідності в твердих тілах. Якщо в газах передача енергії здійснюється при зіткненні частинок, які перебувають у поступальному русі, то в рідинах енергія передається в процесі зіткнення частинок, які коливаються навколо положення рівноваги. Частинки, які мають більш високу енергію, коливаються з більшою амплітудою і при зіткненні з іншими частинками передають їм енергію, в результаті чого амплітуда коливань зростає. Такий механізм передачі не забезпечує швидкого переносу енергії і тому теплопровідність рідин дуже мала, хоча в декілька разів перевищує теплопровідність газів. Теоретично здобуто вираз для коефіцієнта теплопровідності

$$K = \frac{2\nu C_v}{a}, \quad (15.14)$$

де ν – частота коливання; a – відстань між молекулами; C_v – теплосмність при сталому об'ємі.

Експериментальні значення теплопровідності не завжди описуються цим співвідношенням. Трохи кращий збіг теорії з експериментом дають співвідношення, одержані на підставі припущення, що теплота в рідинах, як і в твердих тілах, передається фононами. У цьому разі коефіцієнт теплопровідності визначиться із співвідношення

$$K = \frac{1}{3} u C_v \rho \bar{\lambda}, \quad (15.15)$$

де u – швидкість звуку в рідині; ρ – густина рідини; $\bar{\lambda}$ – середня довжина вільного пробігу.

15.3. Поверхневий натяг

Наявність у рідини вільної поверхні зумовлює існування особливих явищ, які називаються поверхневими. Вони виникають тому, що молекули всередині рідини і на її поверхні перебувають у неоднакових умовах. Розглянемо молекулу B , яка міститься на поверхні розділу двох середовищ (наприклад, рідина – повітря), і молекулу A всередині рідини (рис.15.5). Як відомо, сили притягання із збільшенням відстані швидко зменшуються і, починаючи з деякої відстані r , силами притягання між молекулами можна

знехтувати. Ця відстань r називається радіусом молекулярної дії, а сфера

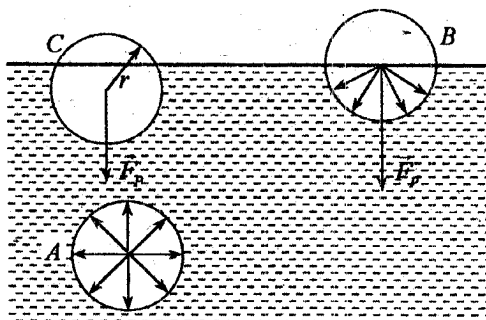


Рис. 15.5

радіуса r називається сферою молекулярної дії. Кожна молекула взаємодіє з тими молекулами, які перебувають у межах сфери молекулярної дії, центр якої збігається з даною молекулою. Розглянемо молекулу A , що перебуває всередині рідини. З усіх сторін її оточує в середньому однакове число молекул, тому результуюча сил притягання, які діють на молекулу, в середньому рівна нулю. В інших умовах перебувають молекули, які знаходяться на поверхні рідин (наприклад, молекули B , C). В таких молекул сфера молекулярної дії тільки частково поширюється всередині рідини. Оскільки густина пари або газу, з яким межує рідина, в багато разів менша, ніж густина рідини, то в тій частині сфери молекулярної дії, яка виступає з рідини, буде значно менше молекул, ніж в іншій частині. В цьому разі сили притягання зі сторони сусідніх молекул не будуть взаємно скомпенсовані: їх рівнодія не дорівнює нулю і напрямлена всередину рідини перпендикулярно до її поверхні.

Таким чином, поверхневий мономолекулярний шар рідини спричинює на всю рідину тиск, рівний сумі результуючих сил, що діють на одиницю площі поверхні. Цей тиск називається внутрішнім або молекулярним тиском. Сума сил притягання, що діють на контур, який обмежує поверхню рідини, називається силою поверхневого натягу. Напрявлена сила поверхневого натягу по дотичній до поверхні рідини і перпендикулярно до контура, який її обмежує. Ця сила пропорційна числу молекул, що прилягають до

контура, яке в свою чергу пропорційне довжині контуру ℓ . Тому

$$F = \alpha \ell, \quad (15.16)$$

де α – коефіцієнт пропорційності, який називається коефіцієнтом поверхневого натягу. З (15.16)

$$\alpha = \frac{F}{\ell}. \quad (15.17)$$

Коефіцієнт поверхневого натягу рідини чисельно рівний силі поверхневого натягу, яка діє на одиницю довжини контура, що обмежує поверхню рідини. В системі СІ α вимірюється в Н/м².

Аналіз показує, що молекули поверхневого шару перебувають в особливому енергетичному стані порівняно з молекулами об'єму рідини. Щоб перемістити молекули з глибини рідини в поверхневий шар, необхідно виконати роботу по подоланню молекулярних сил. Ця робота виконується молекулою за рахунок запасу її кінетичної енергії теплового руху і йде на збільшення потенціальної енергії молекули. Отже, молекули в поверхневому шарі мають додаткову потенціальну енергію. Цей надлишок енергії молекул рідини, що містяться в поверхневому шарі, порівняно з їх енергією всередині об'єму рідини, називається поверхневою енергією. Оскільки положення рівноваги відповідає мінімуму потенціальної енергії, то рідина, залишена сама на себе, буде набувати форми з мінімальною поверхнею, тобто форму кулі. В земних умовах форма краплин відрізняється від сферичної тому, що діють сили земного тяжіння.

Очевидно, що поверхнева енергія пропорційна площі поверхні

$$dU = \alpha dS,$$

де α – коефіцієнт поверхневого натягу, який залежить від природи і стану як рідини, так і середовища, з яким стикається дана поверхня рідини.

Для збільшення площі поверхні рідини необхідно перевести молекули із глибинних шарів рідини на поверхню. Це приводить до зменшення середньої кінетичної енергії рідини в цілому, тобто рідина охолоджується. Навпаки, при зменшенні поверхні рідини поверхнева енергія зменшується і рідина нагрівається. Зміна температури викличе зміну коефіцієнта поверхневого натягу. Щоб внутрішня енергія рідини змінювалася тільки за раху-

нок збільшення поверхневої енергії, процес повинен відбуватися ізотермічно. Та частина поверхневої потенціальної енергії рідини, яка може перейти в роботу по ізотермічному скороченню поверхні рідини, називається вільною енергією.

Визначимо роботу, яка виконується при ізотермічному скороченні поверхні рідини. З цією метою візьмемо дрютяну рамку з перемичкою CD , яка може переміщатися по паралельних сторонах рамки (рис. 15.6). Після

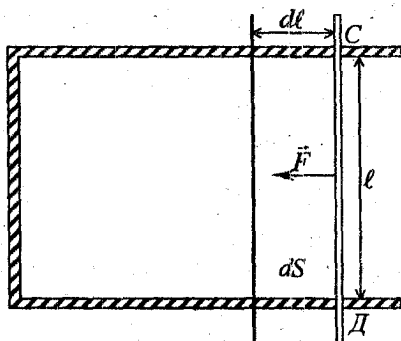


Рис.15.6

опускання рамки в мильний розчин вона затягнеться мильною плівкою. Якщо перемичка досить легка, то сили поверхневого натягу намагатимуться скоротити поверхню рідини і перемичка переміститься на відстань $d\ell$, при цьому виконується робота

$$dA = Fd\ell. \quad (15.18)$$

Оскільки плівка має 2 поверхні, то сила поверхневого натягу

$$F = 2\alpha l. \quad (15.19)$$

Підставивши (15.19) в (15.18), дістанемо

$$dA = 2\alpha l d\ell = \alpha dS, \quad (15.20)$$

звідки

$$\alpha = \frac{dA}{dS}. \quad (15.21)$$

Отже, коефіцієнт поверхневого натягу можна визначити як роботу, що йде на ізотермічну зміну площі рідини на 1 м^2 або він чисельно дорівнює вільній енергії, яку має одиниця площі поверхневого шару. Відповідно до цього α можна вимірювати не тільки в Н/м^2 , але і в Дж/м^2 .

Коефіцієнт поверхневого натягу залежить від природи рідини і температури. Залежність $\alpha(T)$ вперше дослідив Д. Менделєєв (1860 р.). Він встановив, що для кожної рідини існує критична температура $T_{кр}$, при якій поверхневий натяг дорівнює нулю, тобто зникають будь-які відмінності між рідиною та її насиченою парою. Для рідин (вода, спирт, ефір і багатьох рідкісних металів) коефіцієнт α з підвищенням температури зменшується за лінійним законом. Відомо багато емпіричних формул для визначення залежності $\alpha(T)$. Зокрема, за формулою Бачинського

$$\alpha = C(\rho_p - \rho_n)^4, \quad (15.22)$$

де C – стала для даної речовини; ρ_p і ρ_n – відповідно густина рідини і пари, які залежать від температури.

Характер залежності коефіцієнта α від природи рідини наближено описується формулою Стефана

$$\alpha = \frac{r}{N_A} \left(\rho \frac{N_A}{\mu} \right)^{\frac{2}{3}},$$

де ρ – густина; μ – молярна маса; r – питома теплота випаровування рідини; N_A – число Авогадро.

На поверхневий натяг рідини великий вплив мають домішки. Наприклад, мило, розчиняє у воді, зменшує коефіцієнт поверхневого натягу з 0,075 до 0,045 Н/м. Речовини, які зменшують поверхневий натяг рідини, називаються поверхнево-активними речовинами (ПАР). Щодо води ПАР є нафта, спирти, ефіри, мило тощо.

З молекулярної точки зору вплив ПАР обумовлений тим, що сили притягання між молекулами самої рідини більші, ніж сили притягання між молекулами рідини і поверхнево-активними домішками. А тому розміщені в поверхневому шарі молекули рідини притягуються всередину рідини сильніше, ніж молекули домішки. В результаті цього молекули рідини пере-

міщуються з поверхневого шару всередину рідини, а молекули ПАР витісняються на поверхню.

Деякі речовини збільшують поверхневий натяг рідин тому, що молекули домішок взаємодіють з молекулами рідини сильніше, ніж молекули рідини між собою. Очевидно, молекули таких домішок будуть перемішуватися всередину рідини, а в поверхневому шарі залишаться, в основному, молекули рідини. Відносно води такими домішками є цукор і сіль.

Поверхня мильної води складатиметься переважно з молекул мила, поверхня водневого розчину спирту – з молекул спирту, а поверхня розчину цукру у воді – переважно з молекул води.

Таким чином, зменшення вільної енергії поверхні рідини можна здійснити двома способами:

- 1) скороченням поверхні рідини;
- 2) введенням в рідину ПАР.

Поверхнево-активні речовини набули широкого застосування при бурінні гірських порід, різанні металів, флотаційних процесах тощо. Адсорбуючись на поверхні гірської породи або металу, молекули ПАР проникають в середину мікротріщин і сприяють їх збільшенню в глибину тіла, а тому руйнування твердих тіл відбувається при менших зовнішніх зусиллях.

15.4. Взаємодія рідини з твердим тілом

Розглянемо деякі молекулярні явища, які спостерігаються на межі зіткнення рідини з твердим тілом. У цьому випадку потрібно враховувати як сили взаємодії між молекулами рідини, так і сили взаємодії між молекулами рідини і твердого тіла. Якщо сили притягання між молекулами рідини більші, ніж між молекулами рідини і твердого тіла, то рідина намагається зменшити границю зіткнення з твердим тілом. Краплина такої рідини на горизонтальній поверхні твердого тіла набуває форми сплюснутої кулі (рис.15.7,а). В цьому випадку рідина називається незмочуючою тверде тіло. Якщо сили притягання між молекулами рідини менші, ніж між молекулами рідини і твердого тіла, то рідина намагається збільшити межу зіткнення з твердим тілом. Крапля такої рідини набуває форми, зображеної на рис. 15.7,б. У цьому випадку рідина називається змочуючою тверде тіло. Харак-

теристикою змочування є крайовий кут Θ між дотичною до поверхні рідини і поверхнею твердого тіла.

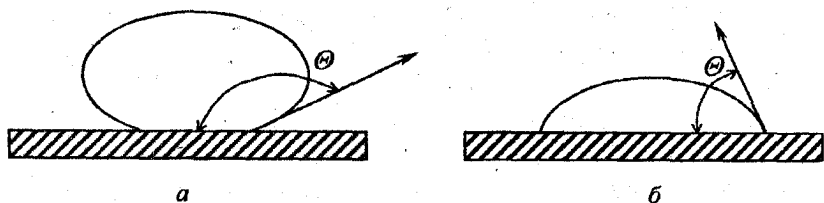


Рис.15.7

Нехай рідина 2 (рис.15.8) межує з плоскою поверхнею твердого тіла 1 і газу 3. До лінії зіткнення всіх трьох середовищ прикладені три сили поверхневого натягу, кожна з яких напрямлена по дотичній всередину поверхні зіткнення відповідних двох середовищ, як показано на рис.15.8. Позна-

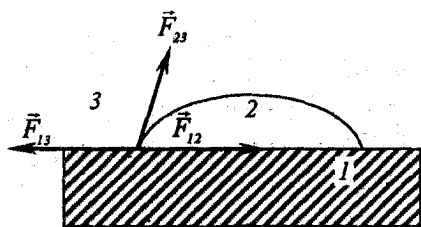


Рис.15.8

чимо: $\vec{F}_{13}$ – силу взаємодії твердого тіла і газу; $\vec{F}_{12}$ – твердого тіла і рідини; $\vec{F}_{23}$ – рідини і газу. Поверхня рідини встановлюється так, щоб сума діючих сил дорівнювала нулю, тобто

$$F_{13} = F_{23} \cos \Theta + F_{12}, \quad (15.23)$$

звідки

$$\cos \Theta = \frac{F_{13} - F_{12}}{F_{23}} = \frac{\alpha_{13} - \alpha_{12}}{\alpha_{23}}. \quad (15.24)$$

Як видно з (15.24), крайовий кут залежить тільки від природи трьох середовищ, які стикаються; він не залежить від форми посудини і діючої на рідину сили тяжіння. Крайовий кут визначається виразом (15.24) тільки за умови, що

$$\frac{\alpha_{13} - \alpha_{12}}{\alpha_{23}} \leq 1. \quad (15.25)$$

Проаналізуємо вираз (15.25). Якщо $\Theta = 0$, то рідина розпливається тонким шаром по поверхні твердого тіла. Це явище називається повним змочуванням.

Коли $\Theta = \pi$, то дістаємо повне незмочування твердого тіла рідиною. Воно спостерігається, наприклад, для води на парафіні.

Частіше спостерігаються проміжні випадки часткового змочування ($\Theta < \frac{\pi}{2}$), як показано на рис.15.7,б, або часткового незмочування, коли $\Theta > \frac{\pi}{2}$ (рис.15.7,а).

Взаємодія частинок рідини з частинками твердого тіла впливає на форму поверхні рідини, наливої в посудину. Якщо багато рідини наливо в широку посудину, то форма її поверхні визначається силою тяжіння, тобто плоска і горизонтальна. Проте біля самих стінок посудини поверхня рідини викривляється. Викривлену вільну поверхню рідини називають меніском. Меніск є вгнутим для змочуючої рідини (рис.15.9,а) і опуклий для незмочуючої (рис.15.9,б). У вузькій посудині крайові викривлення охоплюють

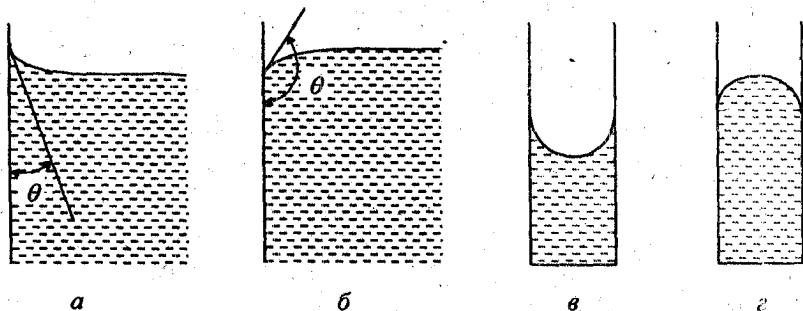


Рис.15.9

всю поверхню рідини, вона стає цілком угнутою (рис. 15.9,в) для змочуючої рідини і опуклою – для незмочуючої (рис. 15.9,г). Тонкі посудини (трубки, щілини тощо) називаються капілярами.

На явищі змочування рідиною одних твердих тіл і не змочуванні інших базується флотаційний метод збагачення корисних копалин. Для виготовлення одягу, який не промокає, використовують тканини, що не змочуються водою. При фарбуванні важливо, навпаки, щоб поверхня добре змочувалася фарбою. Для захисту металевих виробів від корозії на їх поверхні наносять масляні плівки, які не змочуються водою.

15.5. Додатковий тиск під викривленою поверхнею рідини

Під викривленою поверхнею рідини, крім зовнішнього тиску p , створюється ще додатковий тиск Δp , який зумовлений кривиною поверхні. Тут існує аналогія з пружною плівкою: опукла плівка, намагаючись стати плоскою, тисне на нижні шари рідини (рис. 15.10,а), а вгнута – їх розтягує

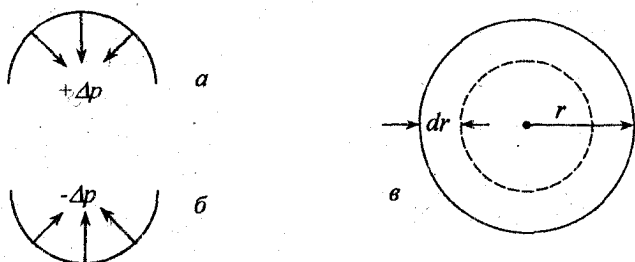


Рис. 15.10

(рис. 15.10,б). Отже, у випадку опуклого меніска додатковий тиск додатний ($\Delta p > 0$), у випадку вгнутого – від'ємний ($\Delta p < 0$).

Визначимо величину цього додаткового тиску у випадку маленької краплі, коли поверхня рідини являє собою сферу радіуса r (рис. 15.10,в). При збільшенні радіуса сфери збільшується площа його поверхні, а разом з тим і поверхнева енергія; при цьому виконується робота. Навпаки, при зменшенні радіуса краплі поверхнева енергія зменшується. Робота, оче-

видно, виконується силами, які діють у самій краплині. Звідси витікає, що об'єм рідини під сферичною поверхнею дещо стиснутий, тобто виникає додатковий тиск, напрямлений перпендикулярно до поверхні.

Нехай під дією цього тиску крапля зменшила свій об'єм на dV , як показано на рис. 15.10, в. Робота стиску

$$dA = p dV, \quad (15.26)$$

де p – тиск.

Робота стиску рідини виконується за рахунок зменшення поверхневої енергії, тобто

$$dU = \alpha dS, \quad (15.27)$$

де dS – зменшення площі поверхні сфери, що відповідає зменшенню радіуса на dr .

Враховуючи, що $dA = dU$, дістанемо

$$p dV = \alpha dS. \quad (15.28)$$

Із відомих формул для площі поверхні і об'єму сфери

$$S = 4\pi r^2, \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\begin{aligned} dS &= 8\pi r dr, \\ dV &= 4\pi r^2 dr. \end{aligned} \quad (15.29)$$

Після підстановки значень для dS і dV в (15.28) дістанемо

$$p \cdot 4\pi r^2 dr = \alpha \cdot 8\pi r dr.$$

Звідси тиск, що чинить викривлена поверхня рідини,

$$p = \frac{2\alpha}{r}. \quad (15.30)$$

Якщо поверхня рідини циліндрична, то додатковий тиск, викликаний кривиною поверхні рідини,

$$p = \frac{\alpha}{r}. \quad (15.31)$$

В загальному випадку для поверхні будь-якої форми тиск, зумовлений

кривиною поверхні, визначається рівнянням Лапласа

$$p = \alpha \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right), \quad (15.32)$$

де r_1 і r_2 – головні радіуси кривини для даного елемента поверхні.

Очевидно, що формули (15.30) та (15.31) є частинними випадками рівняння (15.32). Так, для сфери $r_1 = r_2 = r$ і (15.32) переходить у (15.30). У циліндра один із радіусів кривини рівний ∞ , а другий – збігається з радіусом циліндра; підстановка в (15.32) приводить до (15.31).

Додатковий тиск, що визначається формулою Лапласа, направлений до центру кривини поверхні, тому у випадку опуклої поверхні він направлений всередину рідини і додається до зовнішнього тиску. У випадку вгнутої поверхні рідина перебуватиме під меншим тиском, ніж та сама рідина під плоскою поверхнею.

15.6. Капілярні явища

Якщо тонку трубку – капіляр опустити в рідину, яка його змочує, то рідина всередині трубки підніметься вище поверхні рідини в широкій посудині (рис. 15.11, а). Незмочуюча рідина, навпаки, опуститься нижче її рівня в

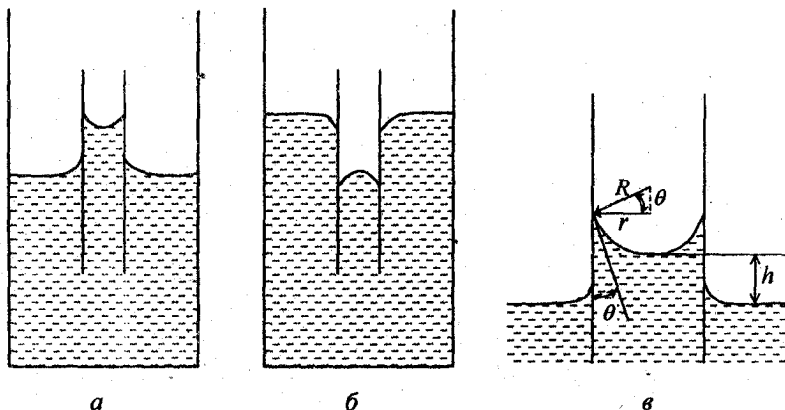


Рис. 15.11

ня в посудині (рис.15.11,б). Визначимо висоту капілярного піднімання (опускання) рідини. Нехай кінець циліндричного капіляра радіуса r поміщений в змочуючу рідину (рис.15.11,в). Поверхня рідини в капілярі набуде вгнутої сферичної форми – вгнутий меніск. Під вгнутою поверхнею рідини появиться додатковий від'ємний тиск (тиск Лапласа), який визначиться за формулою (15.30)

$$p = \frac{2\alpha}{R},$$

де R – радіус кривини меніска; α – коефіцієнт поверхневого натягу. Рідина в капілярі підніметься на таку висоту h , при якій тиск стовпа рідини зрівноважиться тиском Лапласа, тобто

$$\rho gh = \frac{2\alpha}{R}, \quad (15.33)$$

де ρ – густина рідини. З рис.15.11,в видно, що

$$R = \frac{r}{\cos \Theta}, \quad (15.34)$$

де Θ – крайовий кут. Підставивши це значення R в (15.33), дістанемо

$$\frac{2\alpha \cos \Theta}{r} = \rho gh,$$

звідки висота підняття рідини

$$h = \frac{2\alpha \cos \Theta}{\rho gr}. \quad (15.35)$$

З формули (15.35) видно, що висота підняття рідини тим вища, чим менший радіус r , тобто чим вужча трубка. Явище зміни висоти рівня рідини у вузьких трубках називається капілярністю. При даному радіусі r капіляра висота підняття рідини тим більша, чим більший коефіцієнт поверхневого натягу, чим сильніше відбувається змочування і чим менша густина рідини ρ . При повному змочуванні ($\Theta = 0$) формулу (15.35) можна записати так:

$$h = \frac{2\alpha}{\rho gr}. \quad (15.36)$$

Якщо рідина незмочуюча, то величина пониження рівня h виражається тією самою формулою (15.35), що й висота підняття змочуючої рідини.

Капілярні явища часто зустрічаються в природі. Ними пояснюється вологообмін у ґрунті, гігроскопічність тіл, тобто їх властивість вбирати вологу, тощо. Така ж причина гігроскопічності вати, тканин, ґрунту, бетону. Останнє враховується в будівельній практиці: між фундаментом будинку і стінами прокладається шар толі, смоли або іншої речовини, яка перешкоджає проникненню вологи по стінах в приміщення.

15.7. Поняття про квантові рідини

При самих низьких температурах тільки дві речовини – водень і гелій – можуть перебувати у газоподібному стані. Всі інші гази при значно вищих температурах твердіють, а пружності їх парів стають дуже малими. В обох "низькотемпературних" газах проявляються помітні квантові ефекти, якими і пояснюються низькі критичні температури водню і гелію.

При самих низьких температурах спостерігаються специфічні квантові явища. Явища ці виникають стрибком при певній температурі і не мають аналогів при високих температурах. Це явища надпровідності і надтекучості. Перше з них полягає в стрибкоподібній зміні електричного опору в металах. Друге відноситься до єдиної в природі речовини – рідкого гелію, який і належить до квантових рідин.

Розглянемо незвичайні властивості рідкого гелію та пов'язані з ним явища. Звичайний гелій (He_2^4) має критичну температуру 5,25 К, а тому в рідкому стані може існувати тільки нижче цієї температури. Під тиском в 1 атм він кипить при 4,21 К. Ще більш низьку критичну температуру має ізотоп гелію He_2^3 , вона рівна 3,35 К, а температура кипіння при тиску в 1 атм становить 3,195 К. Усі інші речовини при значно більш високих температурах переходять у твердий стан. Гелій можна перевести в твердий стан тільки при високому тиску. Навіть при абсолютному нулю для кристалізації гелію потрібний був би тиск в 25,27 атмосфери (рис.15.12).

Найважливішою особливістю рідкого гелію є існування двох його модифікацій ($He I$ і $He II$), які переходять одна в одну при 2,186 К (рис.15.12). Точка переходу $He I$ в $He II$ називається λ -точкою. Назву цю

прийнято за видом кривої температурної залежності теплоємності рідкого

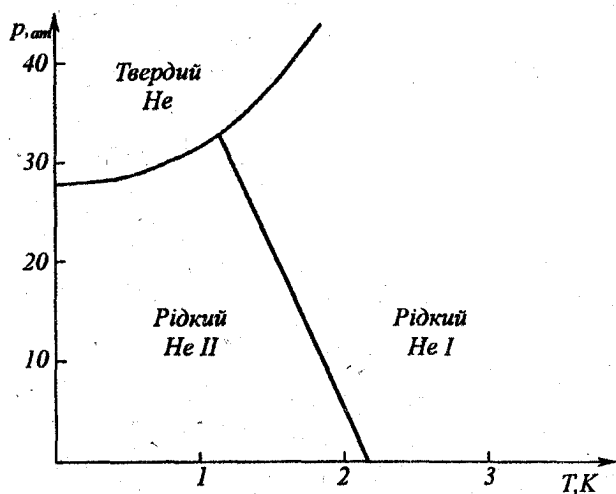


Рис.15.12

гелію, яка нагадує букву λ (рис.15.13). Як видно з рис.15.13, характерною рисою фазового переходу другого роду $He I$ в $He II$ є стрибок теплоємнос-

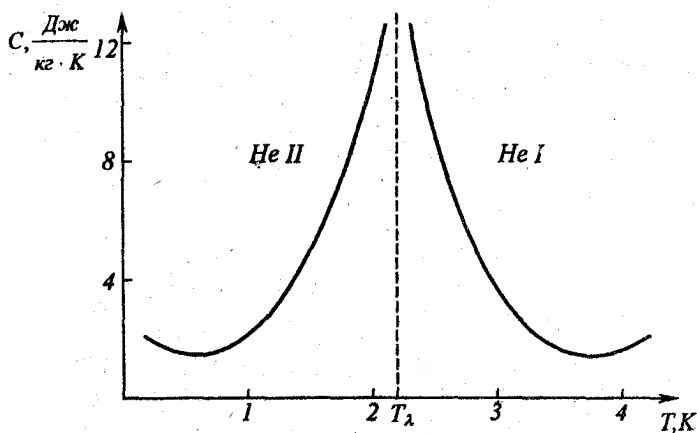


Рис.15.13

ті в точці переходу. За зовнішнім виглядом *He II* різко відрізняється від *He I*. Якщо *He I* кипить у всьому об'ємі, виділяючи при цьому пухирці, то в *He II* цього не спостерігається.

Досліджуючи властивості рідкого гелію *He₂* при низьких температурах, П.Л. Капіца 1937р. зробив фундаментальне відкриття у фізиці, – він встановив надтекучість *He₂*. Надтекучістю називають властивість *He II* протікати без тертя через вузькі капіляри (10^{-4} – 10^{-5} см). Як відомо, в'язкість пов'язана з переносом імпульсу від одного шару рухомої рідини до іншого. Рідкий *He I*, як і всяка інша рідина, має в'язкість, хоча і дуже малу. Проте при переході через λ – точку в'язкість гелію раптово зменшується в мільйон разів, тобто практично рівна нулеві. Це означає, що рідкий *He II* може вільно проникати через найтонші капіляри, щілини, отвори, через які не може пройти навіть газ. І саме в тонких капілярах протікання рідкого *He II* характеризується закономірностями, які істотним чином відрізняються від законів протікання звичайних рідин. У звичайних рідин швидкість течії визначається рівнянням Пуазейля (8.31)

$$Q_v = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8 \eta \ell},$$

де Q_v – об'ємна витрата рідини; r – радіус капіляра; η – коефіцієнт в'язкості. Згідно з формулою Пуазейля, швидкість протікання рідини через капіляр пропорційна різниці тисків Δp на кінцях капіляра і обернено пропорційна його довжині ℓ . Для *He II* швидкість протікання у вузькому капілярі не залежить ні від Δp , ні від ℓ , і зі збільшенням радіуса капіляра не зростає, а зменшується. Проте існує для *He II* певна критична швидкість течії, вище якої проявляється дія сил тертя. В широких капілярах (10^{-3} см) течія рідкого *He II* стає в'язкісною.

Такі властивості надтекучості *He II* не можна пояснити законами класичної фізики, а можна пояснити тільки квантовою механікою. Таке пояснення дав 1941р. Л.Д. Ландау. Суть теорії Л.Д. Ландау полягає в наступному. При абсолютному нулі рідкий гелій перебуває в такому стані, в якому енергія (і імпульс) його атомів не може змінюватися, а тому рідина не може збільшити свій імпульс або енергію, якщо швидкість цього відносного руху менша від критичної. Рідина, частинки якої не можуть обмінюватися

імпульсом з іншими атомами, не має в'язкості, тобто є надтекучою.

При температурах, відмінних від абсолютного нуля, рідкий гелій збуджується, але відбувається це так, ніби збуджується тільки частина рідини. Інша частина залишається незбудженою, тобто такою, як при абсолютному нулі. Таким чином, при температурах вище абсолютного нуля і нижче λ -точки рідкий гелій є сумішшю двох компонентів – збудженого, який має в'язкість, і незбудженого, який не має в'язкості (надтекучого). Кожний компонент має свою густину. Загальна густина ρ дорівнює сумі густин нормальної компоненти ρ_H і надтекучої ρ_{HT} :

$$\rho = \rho_H + \rho_{HT}.$$

При зміні температури від 0 К до λ -точки значення ρ_H змінюється від нуля до ρ , а ρ_{HT} – від ρ до нуля; при абсолютному нулі вся рідина надтекуча, а вище від λ -точки – вся нормальна, тобто в'язка. На підставі цього можна пояснити особливості протікання цієї рідини через капіляри. Течія рідкого гелію через капіляри здійснюється двома компонентами рідини. Чим вузьчий капіляр, тим менша участь нормальної компоненти, яка зазнає в таких капілярах найбільшого тертя. По суті нормальна компонента в дуже вузьких капілярах в течії участь не бере, а тому вона виявляється безв'язкісною. В широких капілярах роль нормальної компоненти більш помітна і безв'язкісна течія не спостерігається.

Для *He II* характерним є ще ряд цікавих і незвичайних властивостей. Наприклад, для нього є характерні два термодинамічні обернені явища, як механокалоричний і термомеханічний ефекти. Перший полягає в тому, що при швидкому витіканні рідкого *He II* з посудини змінюється його температура, зокрема всередині посудини температура підвищується, а температура самого гелію знижується.

Термомеханічний або “фонтан - ефект” полягає в тому, що при підведенні теплоти до посудини, заповненої дрібним порошком і поміщену в іншу посудину з рідким гелієм, через пори порошку протікає гелій і з верхнього вільного кінця першої посудини б'є фонтан.

Контрольні запитання

1. Поясніть будову рідин на основі робіт Д. Бернала і Я. Френкеля.

2. Поясніть теплове розширення рідин. Який фізичний зміст коефіцієнта теплового розширення і від чого він залежить?
3. Поясніть об'ємні властивості рідин. Що таке коефіцієнт стисливості рідин і від чого він залежить?
4. Що таке теплоємність рідин?
5. Поясніть явища переносу в рідинах. Чим відрізняються вони від явищ переносу в газах?
6. Що таке поверхневий натяг і чим він зумовлений? Наведіть приклади прояву сил поверхневого натягу.
7. Який фізичний зміст коефіцієнта поверхневого натягу?
8. Що таке поверхнева енергія?
9. Яка рідина вважається змочуючою тверде тіло? Незмочуючою? Що таке крайовий кут? Що таке мениск?
10. Виведіть формулу Лапласа для визначення додаткового тиску під викривленою поверхнею.
11. Поясніть явище капілярності. Наведіть приклади застосування цього явища.
12. Виведіть формулу для визначення висоти піднімання (опускання) рідини в капілярах.
13. Що таке квантові рідини? Які речовини належать до квантових рідин?
14. Поясніть властивості квантових рідин. В чому полягає явище надтекучості?

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Коефіцієнт об'ємного розширення ртуті $\beta = 1,82 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$. Щоб при нагріванні ртуті на $\Delta T = 1 \text{ K}$ її об'єм не змінився, необхідно збільшити зовнішній тиск на $\Delta p = 4,7 \text{ МПа}$. Визначити стисливість ртуті.

Розв'язання. За умовою задачі необхідно визначити коефіцієнт Z стисливості ртуті, який показує відносну зміну об'єму при зміні тиску на одиницю, тобто

$$Z = \frac{\Delta V}{V \Delta p} \quad (1)$$

Коефіцієнт об'ємного розширення визначимо за формулою

$$\beta = \frac{\Delta V}{V \Delta T}. \quad (2)$$

З рівнянь (1) і (2) знайдемо коефіцієнт Z :

$$Z = \beta \frac{\Delta T}{\Delta p}. \quad (3)$$

Підставимо числові значення величин у формулу (3) і, провівши обчислення, знайдемо, що

$$Z = 1,82 \cdot 10^{-4} \frac{1}{4,7 \cdot 10^6} = 3,96 \cdot 10^{-11} \text{ Па}^{-1}.$$

Зробимо перевірку одиниць вимірювання в системі СІ:

$$[Z] = K^{-1} \frac{K}{\text{Па}} = \frac{1}{\text{Па}} = \text{Па}^{-1}.$$

Таким чином, коефіцієнт стисливості ртуті становить $3,96 \cdot 10^{-11} \text{ Па}^{-1}$.

Приклад 2. Визначити, яка кількість енергії звільняється при злитті маленьких водяних крапель радіусом $r = 2 \cdot 10^{-3} \text{ мм}$ в одну велику краплину радіусом $R = 2 \text{ мм}$.

Розв'язання. Позначимо число маленьких краплин, які, зливаючись, утворюють велику краплину, через n . Тоді загальна площа поверхні S всіх n маленьких краплин

$$S = 4\pi r^2 n. \quad (1)$$

Площа поверхні великої краплини

$$S_0 = 4\pi R^2. \quad (2)$$

Кількість енергії, яка виділиться за рахунок зменшення площі поверхні при злитті краплин, визначиться за формулою

$$\Delta E = \alpha(S - S_0) = \alpha 4\pi(r^2 n - R^2). \quad (3)$$

Кількість малих краплин визначимо виходячи з того, що сума їх об'ємів рівна об'єму великої краплини. Тобто

$$\frac{4}{3}\pi r^3 n = \frac{4}{3}\pi R^3. \quad (4)$$

Звідси

$$n = \frac{R^3}{r^3}. \quad (5)$$

Підставивши (5) в (3), знайдемо

$$\Delta E = 4\pi R^2 \alpha \left(\frac{R}{r} - 1 \right). \quad (6)$$

Підставивши в (6) числові значення величин $R = 2 \cdot 10^{-3}$ м, $r = 2 \cdot 10^{-6}$ м, $\alpha = 0,073$ Н/м, дістанемо

$$\Delta E = 4 \cdot 3,14 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 0,073 \left(\frac{2 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-6}} - 1 \right) \approx 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ Дж.}$$

Таким чином, за рахунок зменшення площі поверхні води при злитті малих краплин в одну велику звільняється енергія $3,5 \cdot 10^{-3}$ Дж. Ця енергія піде на нагрівання краплин.

Приклад 3. Визначити, під яким тиском перебуває повітря всередині бульбашки радіусом $R = 5 \cdot 10^{-3}$ мм, розміщеної під поверхнею води на глибині 20 см. Атмосферний тиск $p_a = 101,7$ кПа.

Розв'язання. Тиск повітря в бульбашці складається із атмосферного тиску p_a , додаткового тиску p' , який створюється плівкою води, що обмежує бульбашку, та тиску, зумовленого рідиною на глибині h :

$$p = p_a + p' + p_n. \quad (1)$$

За формулою Лапласа визначимо величину додаткового тиску

$$p' = \frac{2\alpha}{R}. \quad (2)$$

Величина гідростатичного тиску на глибині h рівна

$$p_n = \rho g h, \quad (3)$$

де ρ – густина води.

Підставивши (2) і (3) в (1), дістанемо

$$p = p_a + \frac{2\alpha}{R} + \rho gh. \quad (4)$$

Підставимо в (4) числові значення величин, проведемо обчислення і знайдемо тиск:

$$p = 101,7 \cdot 10^3 + \frac{2 \cdot 0,073}{5 \cdot 10^{-6}} + 10^3 9,8 \cdot 20 \cdot 10^{-2} = 132,9 \text{ кПа.}$$

Приклад 4. Барометрична трубка (рис.15.14) заповнена ртуттю і поміщена нижнім кінцем у широку посудину. Діаметр внутрішнього перерізу трубки рівний 0,4 см. Різниця рівнів ртуті $h = 753$ мм. Визначити атмосферний тиск.

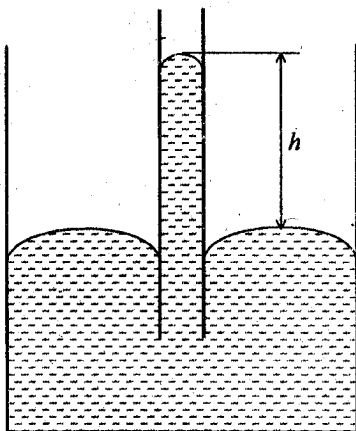


Рис.15.14

Розв'язання. Атмосферний тиск не можна визначити за висотою стовпа ртуті h , а необхідно врахувати ще тиск, створений випуклим меніском ртуті в трубці. Таким чином, атмосферний тиск p_a рівний сумі тиску ртутного стовпа h і додаткового тиску p' :

$$p_a = \rho gh + p', \quad (1)$$

де ρ – густина ртуті.

Додатковий тиск

$$p' = \frac{4\alpha |\cos \Theta|}{d}, \quad (2)$$

де d – діаметр трубки; Θ – крайовий кут. Вважаючи, що для межі ртуть – скло кут $\Theta = \pi$ (повне незмочування), дістанемо

$$p_a = \rho gh + \frac{4\alpha}{d}. \quad (3)$$

Підставимо числові значення величин у формулу (3), вважаючи, що $\alpha = 0,5 \text{ Н/м}$, $\rho = 13,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, проведемо обчислення і визначимо p_a :

$$p_a = 13,6 \cdot 10^3 \cdot 9,8 \cdot 0,758 + \frac{4 \cdot 0,5}{0,4 \cdot 10^{-2}} \approx 103,6 \text{ кПа}.$$

Задачі для самостійних вправ

1. При нормальних умовах стисливість бензолу $Z = 9 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$; коефіцієнт об'ємного розширення $\beta = 1,24 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}$. На скільки необхідно збільшити зовнішній тиск, щоб при нагріванні на $\Delta T = 1 \text{ К}$ об'єм бензолу не змінився.

Відповідь: 1,4 МПа.

2. Скляна посудина по вінця наповнена рідким маслом при температурі 0°C . При нагріванні посудини з маслом до температури 100°C витекло 6 % налитого масла. Визначити коефіцієнт об'ємного розширення масла, якщо коефіцієнт об'ємного розширення скла становить $3 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}$.

Відповідь: $7 \cdot 10^{-4} \text{ К}^{-1}$.

3. При температурі 0°C густина ртуті $13,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$. Знайти її густину при температурі 300°C . Коефіцієнт об'ємного розширення ртуті $1,85 \cdot 10^{-4} \text{ К}^{-1}$.

Відповідь: $12,9 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

4. На скільки нагріється крапля ртуті, що утворилася від злиття двох краплин радіусом 1 мм кожна.

Відповідь: $1,65 \cdot 10^{-4} \text{ К}$.

5. Яку роботу проти сил поверхневого натягу необхідно виконати, щоб розділити сферичну краплину ртуті радіусом 3 мм на дві однакові краплини?

Відповідь: 14,7 мк Дж.

6. Яку роботу проти сил поверхневого натягу необхідно виконати, щоб надуту мильну бульбашку радіусом 4 см? Коефіцієнт поверхневого натягу мильного розчину дорівнює 43 мН/м.

Відповідь: 432 мк Дж.

7. На якій глибині під водою перебуває бульбашка повітря, якщо відомо, що густина повітря в ньому 2 кг/м^3 ? Діаметр бульбашки 15 мкм, температура 20°C , атмосферний тиск $101,3 \text{ кПа}$.

Відповідь: 4,9 м.

8. У посудину з ртуттю занурено відкритий капіляр, внутрішній діаметр якого 3 мм. Різниця рівнів ртуті в посудині і в капілярі 3,7 мм. Знайти радіус кривизни меніска в капілярі.

Відповідь: 2 мм.

9. Знайти різницю рівнів ртуті в двох сполучених капілярах, внутрішні діаметри яких відповідно рівні 1 мм і 2 мм. Незмочування вважати повним.

Відповідь: 7,5 мм.

10. У капілярній трубці, радіус якої 0,5 мм, рідина піднялася на висоту 11 мм. Визначити густину цієї рідини, якщо її коефіцієнт поверхневого натягу становить $0,022 \text{ Н/м}$.

Відповідь: $0,8 \text{ кг/м}^3$.

11. У двох капілярних трубках різного діаметра, занурених у воду, встановилася різниця рівнів 2,6 см. Коли ці самі трубки занурили в спирт, то різниця рівнів спирту становила 1 см. Знаючи коефіцієнт поверхневого натягу води, визначити коефіцієнт поверхневого натягу спирту.

Відповідь: $0,023 \text{ мН/м}$.

12. Визначити масу води, що піднялася в капілярній трубці діаметром 0,5 мм.

Відповідь: 11,55 мг.

13. Чому дорівнює різниця рівнів рідини в двох сполучених капілярах діаметром d_1 і d_2 ($d_1 > d_2$)? Коефіцієнт поверхневого натягу рідини дорівнює α , крайовий кут менісків дорівнює θ . Густина рідини ρ .

$$\text{Відповідь: } h_2 - h_1 = \frac{4\alpha}{\rho g} \frac{d_1 - d_2}{d_1 d_2} \cos \theta.$$

14. Крапля води масою $m = 10^{-4}$ кг введена між двома плоскими і паралельними між собою скляними пластинками. Чому дорівнює сила притягання F між пластинками, якщо відстань між ними дорівнює $d = 10^{-6}$ м? Коефіцієнт поверхневого натягу води $\alpha = 73 \cdot 10^{-3}$ Н/м, крайовий кут $\Theta = 0$.

Відповідь: $F = \frac{2\alpha m}{d \rho g}$; $F \approx 14,6$ кН.

Розділ 16. ТВЕРДІ ТІЛА

16.1. Будова твердих тіл

Тверді тіла – найбільш поширені на Землі та за її межами. Наука, яка займається вивченням природи твердих тіл, їх внутрішньої будови та властивостей, а також різних їх перетворень, називається фізикою твердого тіла, яка є складовою частиною молекулярної фізики.

Тверді тіла можна поділити на дві групи, які суттєво відрізняються за своїми властивостями і будовою. До однієї групи належать кристалічні тіла, іншої – аморфні. В природі аморфні тіла зустрічаються значно рідше, ніж кристалічні.

Головною особливістю внутрішньої будови кристалічних тіл є так званий далекий порядок, під яким розуміють періодичність у будові кристала, яка повторюється у трьох вимірах і приводить до того, що кристали описуються тривимірною періодичною ґраткою, проте відстані між елементами структури (атомами, іонами, молекулами) можуть бути різними.

Серед кристалічних тіл розрізняють монокристали і полікристали. Розподіл твердих тіл на монокристали і полікристали зумовлюється внутрішньою будовою. Монокристали твердих тіл можуть утворюватися в умовах вільного росту, тобто тоді, коли немає близького сусідства інших тіл (умови росту кристала однакові на всіх його поверхнях). Вирощені таким чином кристали завжди набирають форми багатогранника, обмеженого певним числом плоских граней, які перетинаються вздовж прямих ребер, що в свою чергу перетинаються у точках – вершинах. Наприклад, кристали кухонної солі (NaCl) мають кубічну форму (рис.16.1), а кристали кварцу являють собою шестигранні призми, що завершуються шестиграними піра-

мідами (рис.16.2). Істотними особливостями зовнішньої форми кристалів, підкреслимо, є: наявність плоских граней, прямолінійність ребер і сталість кутів між відповідними гранями та ребрами для кристалів певної речовини. У кристалів кухонної солі кути між гранями завжди дорівнюють 90° (закон сталості кутів вперше сформулював датський лікар Стенон – 1638-1687). Вдаривши молотком по кубу кухонної солі, ми розіб'ємо його на дрібні кушечки, які мають вигляд кубиків.

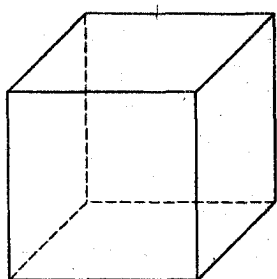


Рис.16.1

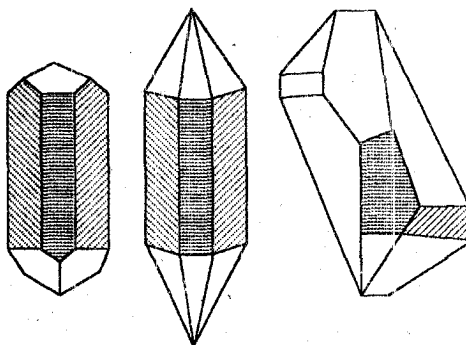


Рис.16.2

Наведемо ще приклад. На рис.16.2 показано кілька многогранників кварцу, які утворилися в різних умовах, і через те форма їх різна і навіть число граней не однакове. Проте кути між відповідними гранями однакові. Наприклад, у всіх кристалів однакові кути між двома заштрихованими гранями. Також рівні один одному кути між заштрихованою і незаштрихованою гранню або між двома незаштрихованими. Також вкажемо, що кут між гранню піраміди і гранню призми у кристалів кварцу завжди дорівнює $38^\circ 13'$. Але природа не завжди може створювати належні умови для вільного росту кристалів, тому в природних умовах монокристали трапляються рідко.

Більшість твердих тіл – це полікристали, тобто такі кристали, які складаються з великої кількості монокристалів-маленького розміру (до них належать, зокрема, метали). Ці монокристали в полікристалічному тілі характеризуються різними орієнтацією і величиною. Саме тому полікриста-

лічні тіла є **ізотропними**, тобто їх фізичні властивості не залежать від напрямку вимірювання. На відміну від полікристалів, монокристали характеризуються різко вираженою **анізотропією**, яка є одним з важливих наслідків правильного порядку в розміщенні структурних частин. При анізотропії та чи інша властивість (наприклад, теплопровідність), яка виміряна в монокристалі в різних напрямках, є різною за абсолютними значеннями.

Характерною особливістю аморфних тіл є **ближній порядок** розміщення елементів структури, тобто певне узгодження розміщення в просторі сусідніх, близько розміщених частинок.

Аморфні тіла – ізотропні. Їх природна ізотропність зумовлена відсутністю самовільної орієнтації структурних частинок. Аморфні тіла бувають природні (смоли, янтар) і штучні (скло, рідкі полімери).

Зауважимо, що поділ твердих тіл тільки на дві групи (кристалічні та аморфні) є недостатнім. Про це свідчить, наприклад, факт існування рідких кристалів.

Всі тверді тіла єднає те, що вони складаються з величезного числа атомів, властивості і взаємодія яких між собою та із зовнішніми полями зумовлюють величезну різноманітність твердих тіл.

Зупинимося детальніше на будові кристалічних тіл. Характерною особливістю кристалів є те, що атоми в них розміщені дуже щільно. Щільність упаковки визначається відношенням об'єму, який займає речовина, до об'єму кристала, тобто

$$Z = \frac{V_a n}{V_{кр}}, \quad (16.1)$$

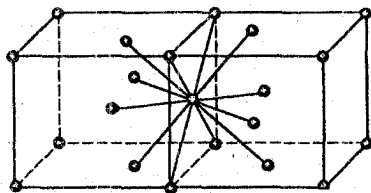


Рис.16.3

де V_a – об'єм атома; n – кількість атомів; $V_{\text{кр}}$ – об'єм елементарної комірки (див. нижче).

При найщільнішій упаковці атомів максимальне число найближчих сусідів дорівнює 12 (рис.16.3), а мінімальне – 2 (наприклад, у селена). Це число найближчих сусідів залежить від структури кристала (таблиця I) і називається координаційним числом n .

У кристалі частинки, з яких він складається, розміщені рядами. В

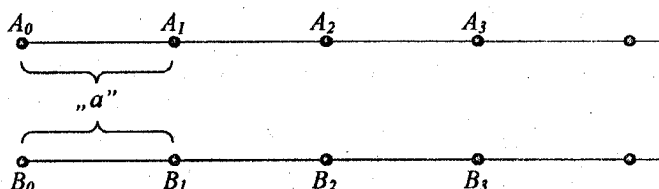


Рис.16.4

кожному ряді відстань між цими частинками однакова (рис.16.4)

$a = A_0A_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = B_0B_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = \dots$ і називається періодом (періодом ідентичності).

Величезна множина паралельних рядів утворює плоску сітку (рис.16.5), а величезна множина паралельних плоских сіток, рівновіддале-

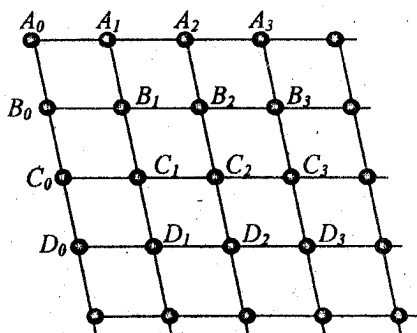


Рис.16.5

них одна від одної, утворює просторову ґратку (рис.16.6), у вузлах якої розміщені структурні частинки (атоми, іони, молекули).

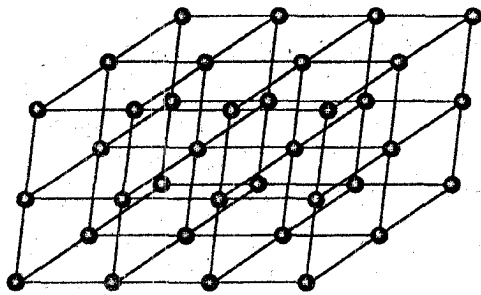


Рис.16.6

Кожну просторову кристалічну ґратку можна побудувати з множини паралелепіпедів, які називають **елементарними комірками**. Елементарну комірку вибирають так, щоб сума площ паралелограмів, які її обмежують, була найменшою. Ребра комірки повинні дорівнювати мінімальній відстані між ідентичними вузлами в напрямках, вибраних для осей координат. Такі

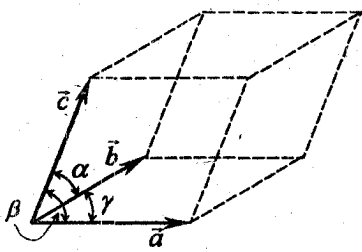


Рис.16.7

елементарні комірки називають ґратками Браве. Кожна з них у свою чергу означається трьома основними векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, і $\vec{c}$, довжини яких називаються періодами ідентичності. Взаємне положення цих векторів задається кутами α , β і γ (рис.16.7).

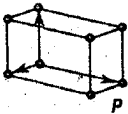
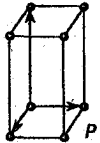
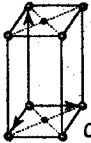
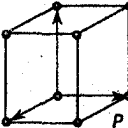
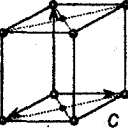
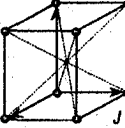
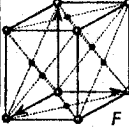
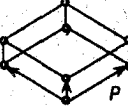
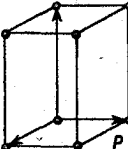
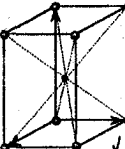
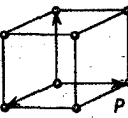
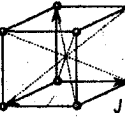
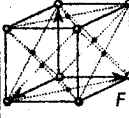
Отже, основною складовою частиною просторової кристалічної ґратки є паралелепіпед (елементарна комірка), побудований на ребрах a, b, c з кутами між ребрами α, β і γ , які називаються параметрами елементарної комірки.

Однією з найбільш характерних ознак кристалів є симетрія, яка виявляється в їхній формі, структурі та властивостях. Під симетрією кристалічної ґратки розуміють її властивість суміщатися з собою при деяких просторових переміщеннях, наприклад паралельних переносах, поворотах, відбиттях або їх комбінаціях. Кристалічній ґратці, як довів математично видатний кристалограф Є.С. Федоров, відповідають 230 просторових груп (комбінацій елементів симетрії). У симетричних фігур можливі такі елементи симетрії: площина симетрії, вісь симетрії, вісь інверсії. Просторові групи розділені по 32 видах (класах) симетрії. Вид симетрії – це сукупність елементів симетрії кристалічного багатогранника як скінченної фігури, що визначають його симетрію. Ці 32 види симетрії можна об'єднати в окремі системи або сингонії. Сингонією називається група видів симетрії, в яку входять кристали з подібними елементарними комірками (ґратки Браве). Число ґраток Браве, виходячи з можливих видів симетрії, строго обмежене і дорівнює 14. Вони поділяються на 7 кристалічних сингоній. Їхні назви та основні ознаки наведено в табл. 1.

Другою найбільш важливою ознакою кристалів, покладеною в основу їх класифікації, є фізична ознака (природа частинок, розміщених у вузлах кристалічної ґратки, і характер сил взаємодії між ними). Залежно від неї кристали поділяються на чотири типи: іонні, атомні, металічні і молекулярні.

В іонних кристалах правильно чергуються в розміщенні позитивні і негативні іони. Сили взаємодії між іонами – електростатичні (кулонівські). Зв'язок, зумовлений кулонівськими силами притягання між різнойменно зарядженими іонами, називається іонним (гетерополярним). Він досить сильний і становить величину порядку 10^8 Дж/кмоль. Міцність іонного зв'язку проявляється в тому, що іонні кристали мають високу температуру плавлення, малий коефіцієнт теплового розширення, незначну теплопровідність. Для них характерним є сильне поглинання в інфрачервоній області спектра. Типовими кристалами з іонним зв'язком є більшість галогідних

Таблиця 1

Кристалічні системи	Співвідношення між сторонами та кутами	Примітивна	Базоцентрирована	Об'ємноцентрована	Гранецентрирована
Триклінна	$a \neq b \neq c$ $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90^\circ$				
Моноклінна	$a \neq b \neq c$ $\alpha = \gamma = 90^\circ \neq \beta$				
Ромбічна	$a \neq b \neq c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$				
Ромбоїдрична	$a = b = c$ $\alpha = \beta = \gamma \neq 90^\circ$				
Тетрагональна	$a = b \neq c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$				
Гексагональна	$a = b \neq c$ $\alpha = \beta = 90^\circ$ $\gamma = 120^\circ$				
Кубічна	$a = b = c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$				

сполук лужних металів (NaCl , KBr та інші), а також оксиди різних елементів (MgO , CaO та ін.).

Атомні кристали. У вузлах кристалічної ґратки таких кристалів розміщені нейтральні атоми, які утримуються у вузлах ковалентними зв'язками квантово-механічного походження (у сусідніх атомів колективізовані валентні електрони). Типовими представниками кристалів з ковалентним зв'язком є алмаз, графіт, йод, сірка, карбонід, сульфід цинку тощо. До них належать і напівпровідники. Характерною рисою ковалентного зв'язку є його напрямленість, а розподіл густини заряду навколо кожного з ядер атомів відрізняється від сферично-симетричного розподілу, який мають іонні кристали. Ковалентний зв'язок суттєво відрізняється від іонного тим, що число електронів, які беруть участь в ковалентному зв'язку, у кожного атома обмежене, а тому цей зв'язок є насиченим. Для типового ковалентного кристала алмазу кожен атом утворює чотири ковалентні зв'язки, віддаючи для усупільнення кожному з них один із своїх валентних електронів і одержуючи другий електрон від сусіднього атома. Структура алмазу – тетраедрична. Основу ковалентного зв'язку становить обмінний ефект, зумовлений обміном електронів між атомами, який має квантову природу. Він може здійснюватися однією, двома або трьома парами електронів. Ковалентний зв'язок дуже сильний (енергія зв'язку 3-5 еВ на один атом), завдяки чому ковалентні кристали мають високу міцність і твердість, високу температуру плавлення, погану електропровідність у широкому інтервалі температур.

Металічні кристали. У вузлах кристалічної ґратки розміщуються позитивні іони металу. В просторі між ними рухаються колективізовані валентні електрони, які відокремлюються від атомів внаслідок слабкого зв'язку з ними при утворенні кристалічної ґратки. Металічний зв'язок являє собою взаємодію позитивних іонів з усупільненими валентними електронами. Притягаючись до позитивних іонів, вільні електрони відіграють роль “цементу”, що фіксує позитивні іони на певних відстанях відповідно до рівноваги і мінімуму потенціальної енергії системи. Енергія металічного зв'язку значно менша, ніж у іонних і ковалентних кристалів. Тому порівняно з ними вони мають більш низьку температуру плавлення. Метали, внаслідок високої концентрації вільних електронів, характеризуються доброк

електро- та теплопровідністю. Оскільки металічний зв'язок не має напрямленої дії і позитивні іони ґратки однакові за своїми властивостями, то метали мають симетрію високого порядку. Справді, більшість металів мають кубічну ґранецентровану (мідь, срібло, золото) і кубічну об'ємно центровану (натрій, калій, цезій, літій) ґратки.

Молекулярні кристали. У вузлах молекулярних кристалів розміщуються нейтральні молекули, сили взаємодії між якими зумовлені незначним зміщенням електронів в електронних оболонках атомів. Силами зв'язку в цьому випадку є сили Ван-дер-Ваальса. Переважна більшість молекулярних кристалів – це органічні кристали, які за фізичними властивостями є ізоляторами, прозорі для широкого інтервалу електромагнітних хвиль, мають низьку температуру плавлення. До них належать, наприклад, парафін, спирт, гума, інертні гази, а також вуглекислий газ, кисень і азот у твердому стані та ін.

Зауважимо, що в деяких твердих тілах одночасно можуть існувати різні типи зв'язку. Наприклад, у графіті одночасно діють три типи зв'язку: ковалентний і металевий в межах одного шару, а між шарами діють сили Ван-дер-Ваальса.

На сьогоднішній день одержано багато відомостей про кристалографічну будову речовин за допомогою різних науково-технічних методів (рентгеноструктурного аналізу, електронної мікроскопії та ін.), які розкривають широкі можливості для раціонального використання, розробки і освоєння нових матеріалів з наперед заданими властивостями.

16.2. Дефекти в кристалах

Розглянуті вище ідеальні кристалічні структури спостерігаються тільки в порівняно невеликих об'ємах. У реальних кристалах завжди мають місце відхилення від впорядкованого розміщення частинок у вузлах ґратки, які називають **дефектами кристалічної ґратки**. Ці дефекти значною мірою визначають фізичні властивості кристалів – електро- і теплопровідність, міцність, твердість та ін.

Дефекти поділяють на **макроскопічні**, які виникають в процесі росту кристалів (наприклад, пори, тріщини, інородні макроскопічні включення), і

мікроскопічні, зумовлені мікроскопічними відхиленнями від періодичності в розміщенні структурних частинок.

Мікроефекти поділяють на точкові і лінійні. Точкові дефекти – це порушення кристалічної структури, при яких розміри в усіх трьох вимірах мають порядок однієї або кількох міжатомних відстаней. Найпростіші точкові дефекти кристала поділяють на атомні, електронні та енергетичні. До атомних належать дефекти за Шотткі (відсутні атоми або іони у вузлах ґратки), дефекти за Френкелем (являють собою сукупність порожнього вузла і близько розміщеного міжвузлового атома), домішкові атоми (розміщуються як у міжвузлах, так і заміщають атоми основної речовини у вузлах кристалічної ґратки).

Електронні дефекти являють собою електрони, що вільно рухаються по кристалу (електричне поле електрона діє на решітку, певним чином деформуючи її; вони є також центрами розсіювання). Зауважимо, що незайняті електронами енергетичні рівні приводять до появи дірок, а сукупність електрона і дірки, зв'язаних між собою кулонівськими силами (екситона), є також електронним дефектом.

Прикладом енергетичних дефектів є фонони – порції (кванти) теплових коливань решітки. На фононах відбуваються розсіювання електронів та дірок, а також взаємні розсіювання фононів.

Для утворення дефекту за Шотткі потрібна дещо більша енергія, ніж для дефекту за Френкелем (значення цих енергій – в межах від 2 до 4 еВ). Дефекти за Френкелем є найбільш характерними для кристалічних тіл. Їх утворення зумовлено нерівномірним розподілом енергії між структурними частинками кристала. Ці два типи точкових дефектів створюються в результаті теплової активації кристала. Певній температурі відповідає певна рівноважна концентрація цих дефектів

$$n = n_0 e^{-\frac{E_B}{kT}}, \quad (16.2)$$

де n – концентрація дефектів; n_0 – число вузлів; E_B – енергія утворення одного точкового дефекту. Як випливає з формули (16.2), з підвищенням температури n швидко зростає. При кімнатній температурі число n у рівноважній кристалічній ґратці є незначним. Для збільшення концентрації точкових дефектів при низьких температурах вводять домішки, гартують

при високих температурах, опромінюють елементарними частинками високих енергій. Досліджують точкові дефекти за впливом на різні фізичні властивості кристалів, оскільки їх важко спостерігати безпосередньо.

Лінійний дефект – це порушення дальнього порядку вздовж деяких ліній. Лінійні дефекти, які порушують правильне чергування атомних площин, називаються дислокаціями. Вони значною мірою визначають механічні властивості кристалів.

Дислокації є крайові і гвинтові. Крайова дислокація виникає в кристалічній ґратці за наявності в ній додаткової неповної атомної площини (рис. 16.8,а) і поширюється вздовж лінії, яка перпендикулярна до площини

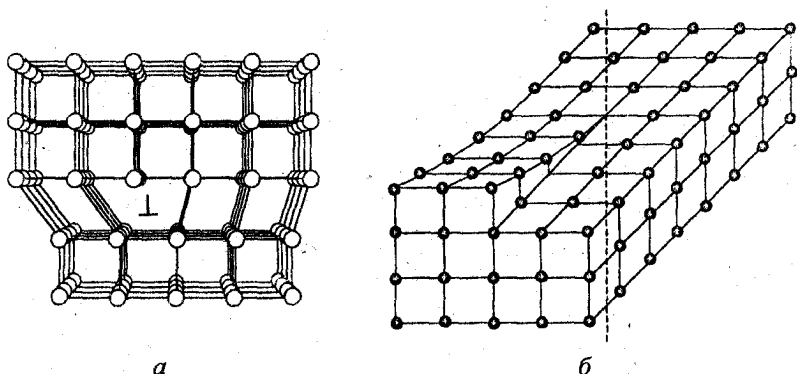


Рис. 16.8

рисунка (хрестик). Гвинтова дислокація виникає внаслідок зміщення атомів в одній частині кристалу відносно іншої. При такій дислокації навколо лінії дислокації утворюється гвинтова похила площина (рис. 16.8,б).

Кількісними характеристиками дислокацій є густина і вектор Бюргерса.

Під густиною дислокацій розуміють число дислокаційних ліній, які припадають на одиницю площі поверхні кристала. Введемо поняття вектора Бюргерса. Для цього розглянемо плоску область кристала, яка перебуває на значній відстані від лінії дислокації (рис. 16.9, справа). Виконаємо від початкової точки *a* обхід по контуру *abcd*, взявши за кроки обходу дві

міжатомні відстані. Для правильної структури контур обходу є чотирикут-

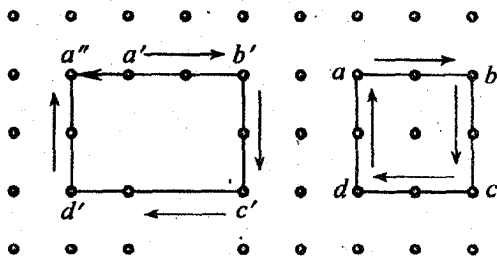


Рис.16.9

ник. Після обходу кінцева точка обходу збігається з початковою. Якщо обхід виконати так, що всередині контура обходу міститиметься лінія дислокації (обхід $a'b'c'd'a''$), то початкова точка обходу a' і кінцева a'' не збігаються, і вектор $\overline{a'a''}$ називають вектором Бюргерса. Він є сталим вздовж всієї лінії дислокації і не змінюється при її переміщенні. Вектор Бюргерса – найважливіша характеристика дислокації, яка виражає міру спотворення ґратки, зумовленої наявністю дислокацій.

Аналіз дефектів реальних кристалів показує, що в них досить складна структура. Їх дослідження та встановлення закономірностей між фізичними властивостями кристалів та їхньою реальною структурою – одне з найважливіших завдань сучасного матеріалознавства.

16.3. Теплове розширення твердих тіл

Тепловий рух частинок твердого тіла, як конденсованого середовища, суттєво відрізняється від теплового руху в газі. Структурні частинки, з яких складається кристал (атоми, молекули або іони), зв'язані між собою силами взаємодії, що залежать від відстаней, здійснюють коливання навколо положень рівноваги, які збігаються з вузлами кристалічної ґратки. У речовин в твердому стані енергія теплового руху kT набагато менша, ніж потенціальна енергія взаємодії частинок між собою. З підвищенням температури зростають амплітуда і енергія теплових коливань частинок, а також відбу-

вається теплове розширення – збільшення об'єму тіла.

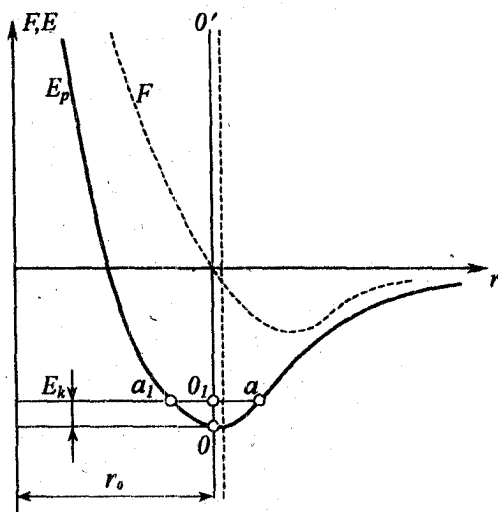


Рис.16.10

Щоб пояснити теплове розширення твердих тіл, розглянемо криву залежності потенціальної енергії взаємодії частинок від відстані між ними (рис.16.10). Для порівняння на цьому рисунку пунктирною лінією зображена залежність від відстані результуючої сили взаємодії частинок. Якщо частинка крім потенціальної енергії має ще й деяку кінетичну енергію E_k , яка відповідає температурі T , то вона перебуватиме не в точці O , а дещо вище в точці O_1 на рівні a, a . Точки дотику прямої a, a з кривою енергії визначають крайні положення, які займає частинка при коливаннях. Причому в положенні a_1 кінетична енергія частинки дорівнює потенціальній енергії відштовхування, а в положенні a – потенціальній енергії притягання. Внаслідок різної залежності сил притягання і відштовхування між частинками від відстані між ними крива потенціальної енергії не симетрична. Тому при русі вправо частинка зміщується на більшу відстань, ніж при русі вліво і, отже, коливання частинки є ангармонічними. Очевидно, що положення рівноваги частинки при даній температурі відповідає середині відрізка a, a . Чим

більша температура, тим вище піднесена на графіку частинка порівняно зі своїм найнижчим енергетичним положенням 0 і тим більше зміщене її середнє положення вправо від лінії $00'$ (лінія, що відповідає середнім положенням частинки, зображена на рис.16.10 пунктиром). Це значить, що з ростом температури зростає середня відстань між частинками тіла і його об'єм збільшується. Якщо б частинки твердого тіла виконували гармонічні коливання або, іншими словами, якщо б крива енергії була симетрична, то тверді тіла не повинні були б розширятися при нагріванні.

Кількісно теплове розширення характеризують відповідно коефіцієнтами лінійного α та об'ємного β розширення:

$$\alpha = \frac{1}{\ell_0} \left(\frac{d\ell}{dT} \right)_p, \quad \beta = \frac{1}{V_0} \left(\frac{dV}{dT} \right)_p, \quad (16.3)$$

де ℓ_0 , V_0 – початкові довжина та об'єм тіла при 293 К.

Для конструкційних твердих тіл у першому наближенні $\beta = 3\alpha$. Для твердих тіл β – величина порядку 10^{-5} K^{-1} , а для газів – 10^{-3} K^{-1} . Досить мале значення β для інвару (сплав 64% заліза і 36% нікелю) – $\beta = 3 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$. Його широко використовують в точному приладобудуванні, коли потрібно уникнути зміни розмірів деталей при коливаннях температури.

Для різних кристалографічних напрямів відстані між структурними частинками і сили взаємодії між ними не однакові, а тому теплове розширення в кристали має анізотропний характер.

Зазначимо, що між тепловим розширенням твердих тіл і модулями пружної деформації є зв'язок (теплове розширення формально також є деформацією, але механізм зовсім інший) і його можна записати у вигляді:

$$C_p - C_v = TE\beta^2 V \quad (16.4)$$

або для ізотропного тіла

$$C_p - C_v = 9\alpha^2 TE V. \quad (16.5)$$

Тут α і β – відповідно коефіцієнти лінійного і об'ємного розширення; E – модуль Юнга. Вирази (16.4) і (16.5) цінні ще й тим, що вони дозволяють визначити C_v при відомому значенні C_p , яке виводиться дослідним шляхом.

Якщо розглядати тверде тіло як термодинамічну систему, то його стан повністю визначається параметрами p , V_0 , T (V_0 – питомий об'єм) при відсутності механічних напружень. Рівнянням стану твердого тіла є рівняння Мі-Грюнайзена

$$p = \frac{E_n}{V_0} + \gamma \frac{E_{\text{кол}}}{V_0}, \quad (16.6)$$

де E_n – потенціальна енергія взаємодії частинок, коли вони всі займають положення рівноваги; $E_{\text{кол}}$ – частина внутрішньої енергії, зумовлена коливаннями частинок; γ – параметр Грюнайзена.

16.4. Теплосмність твердих тіл

Основним рухом частинок, з яких складаються тверді тіла, є коливний рух. Це означає, що тверде тіло можна уявити як набір осциляторів, енергія яких з підвищенням температури зростатиме. Згідно з законом розподілу енергії теплового руху можна записати, що на один ступінь вільності коливного руху припадає енергія, яка дорівнює

$$E = E_k + E_n = \frac{1}{2}kT + \frac{1}{2}kT = kT. \quad (16.7)$$

Таким чином, повне значення середньої енергії одної коливної частинки дорівнює $3kT$ (частинка має 3 ступеня вільності).

Внутрішню енергію моля твердого тіла можна знайти, помноживши енергію однієї частинки на число частинок в одному молі, які коливаються незалежно. Для хімічно простих речовин, що утворюють у твердому стані атомні або металічні кристали, число частинок в одному молі збігається зі сталою Авогадро і тоді енергія моля

$$U_\mu = 3kTN_A = 3RT. \quad (16.8)$$

Тверді тіла мають невеликий коефіцієнт теплового розширення і тому вони мало збільшуються в об'ємі при нагріванні. Тому для твердих тіл значення теплоємностей при сталому об'ємі і сталому тиску практично не відрізняються, і через це часто говорять просто про теплоємність твердого тіла, яка чисельно дорівнює похідній від внутрішньої енергії тіла по температурі:

$$C = C_V = \left(\frac{dU}{dT} \right)_V = 3R = 25 \cdot 10^3 \text{ Дж/(К} \cdot \text{моль)}. \quad (16.9)$$

Отже, при досить високій температурі молярна теплоємність усіх хімічно простих твердих тіл не залежить від температури і дорівнює $3R$. Це твердження складає зміст закону Дюлонга і Пті, відкритого ними ще в 1819 р.

Поширення закону Дюлонга і Пті на сполуки приводить до закону Неймана-Коппа: молярна теплоємність сполук приблизно дорівнює сумі атомних теплоємностей компонент сполук. Наприклад, у кристалі NaCl число таких частинок дорівнює $2N_A$ (N_A іонів натрію і N_A іонів хлору) і тому молярна теплоємність такого кристала буде вдвоє більша і рівна $6R$. Згідно з цим законом теплоємність триатомних сполук $9R$, а теплоємність чотириатомних – $12R$.

Закон Дюлонга і Пті приблизно виконується для багатьох твердих тіл при температурах, близьких до кімнатної та вищих, але цей закон зовсім не пояснює зменшення C при зниженні температури. Це є наслідком того, що в рамках класичної теорії здійснюється тільки загальний підрахунок числа ступенів вільності частинок, без диференціації їх відносно частоти коливань.

Залежність теплоємності від температури при низьких температурах була пояснена Дебаєм на основі квантової теорії теплоємності твердих тіл, в розвиток якої великий внесок зробив Ейнштейн.

За теорією Дебая, при температурах, близьких до абсолютного нуля, внутрішня енергія кристалічного твердого тіла пропорційна четвертому степеню температури

$$U = aT^4, \quad (16.10)$$

де $a = \frac{3\pi^4 R}{5\Theta_D^3}$ – стала величина; $\Theta_D = \frac{h\nu_{\max}}{k}$ – характеристична температура Дебая, тобто температура, при якій можливе збудження теплових коливань найвищих частот.

Відповідно теплоємність кристалічного тіла для низькотемпературної області

$$C = \frac{dU}{dT} = 4aT^3 = \alpha \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3, \quad (16.11)$$

де $\alpha = 1,94 \cdot 10^6$ Дж/(кмоль $\cdot$ К).

Вираз (16.11) дістав назву **закону кубів Дебая**. Таким чином, Дебай довів кубічну залежність теплоємності від температури, яка дуже близька до експериментальної. Температура Дебая для різних твердих тіл неоднакова, але залежність C від $\frac{T}{\Theta_D}$, як це випливає з (16.11), є універсальною, тобто спільною для всіх кристалів.

Значення теорії Дебая не тільки в тому, що вона правильно якісно і кількісно в багатьох випадках передає хід залежності C від температури кристалів, а також і в тому, що вона встановлює зв'язок між тепловими і пружними властивостями твердих тіл.

Необхідно пам'ятати, що теорія Дебая враховує лише коливання атомів у вузлах кристалічної ґратки, тобто дає лише ґраткову теплоємність. Але в реальних випадках, наприклад, для металів, необхідно враховувати наявність вільних електронів, які також вносять відповідну долю в теплоємність. Враховуючи це, вираз для теплоємності твердого тіла можна подати у вигляді

$$C = aT + bT^3, \quad (16.12)$$

де aT – член, який відповідає за електронну складову теплоємності; bT^3 – за ґраткову; a і b – сталі.

16.5. Теплопровідність твердих тіл

Якщо в твердому тілі є градієнт температури, то для нього буде характерним процес передачі теплоти, кінцевий результат якого – вирівнювання температури. Процес передачі теплоти в твердому тілі здійснюється завдяки теплопровідності. В основу теплопровідності твердих тіл покладено вже відомий нам закон Фур'є, згідно з яким

$$Q = -\kappa \frac{dT}{dz} St.$$

Механізм теплопровідності твердих тіл, на відміну від рідин і газів, є своєрідним і визначається характером теплового руху атомів чи молекул, які складають дане тіло. Ми знаємо, що у випадку твердих тіл основним є коливний рух. Кожний атом або інша структурна частинка твердого тіла коливається і завдяки зв'язку між ними ці коливання передаються від одних частинок до інших, тобто утворюється хвиля, яка і переносить енергію коливання. Швидкість поширення цієї хвилі дорівнює звуковій швидкості. Ці звукові або акустичні хвилі і є відповідальними за перенос теплоти.

У квантовій теорії хвилі, які поширюються зі швидкістю звуку, пов'язують з деякими фіктивними частинками, котрі називають **фононами**. Отже, можна говорити, що в твердому тілі теплота переноситься фононами.

Поняття фонона – історично першої квазічастинки в квантовій теорії твердого тіла, вперше ввів І.Є. Тамм. Фонон, на відміну від звичайних частинок, може існувати тільки в певному середовищі, яке перебуває в стані теплового збудження. Не можна уявити фонон, який поширювався б у вакуумі, оскільки він описує квантовий характер теплових коливань ґратки і завжди замкнутий в кристалі. Фонон, як і будь-яка частинка, переносить енергію та імпульс ($\varepsilon_\phi = h\nu$, $p_\phi = \frac{h\nu}{v_\phi}$) і взаємодіє із звичайними частинками. Коефіцієнт теплопровідності твердого тіла, за аналогією з газом, можна підрахувати за формулою

$$\kappa_\phi = \frac{1}{3} C_v \rho \bar{v}_\phi \bar{l}_\phi, \quad (16.13)$$

де $\bar{v}_\phi$ – середня швидкість поширення фононів, а $\bar{l}_\phi$ – їх довжина вільного пробігу.

Вираз (16.13) дає уявлення про теплопровідність тільки для тих речовин, у яких немає вільних носіїв заряду, наприклад для діелектриків.

Для речовин, що мають вільні заряджені частинки (наприклад, метали мають вільні електрони), необхідно враховувати електронну складову теплопровідності

$$\kappa_e = \frac{1}{3} C_v \rho \bar{v}_e \bar{l}_e, \quad (16.14)$$

де $\bar{v}_e$ — середня швидкість теплового руху електронів, а $\bar{\ell}_e$ — середня довжина вільного пробігу електронів.

Вважаючи, що вільні електрони в металі поводять себе подібно до одноатомного газу, дістанемо

$$C_V \rho = \frac{3}{2} k n, \quad (16.15)$$

де k — стала Больцмана, а n — число вільних електронів в одиниці об'єму.

З врахуванням (16.15) вираз (16.14) можна записати так:

$$\mathcal{K}_e = \frac{1}{3} k n \bar{v}_e \bar{\ell}_e. \quad (16.16)$$

Отже, у загальному випадку вираз для коефіцієнта теплопровідності твердих тіл можна записати у вигляді

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_\phi + \mathcal{K}_e. \quad (16.17)$$

З (16.13) та (16.14) можна оцінити залежність $\mathcal{K}_\phi$ і $\mathcal{K}_e$ від температури. Ця залежність, в основному, визначається довжиною вільного пробігу і теплоємністю, оскільки інші величини у виразах для $\mathcal{K}_\phi$ і $\mathcal{K}_e$ з температурою змінюються слабо.

При високих температурах $C_V = \text{const}$ (закон Дюлонга і Пті), а $\bar{\ell}_\phi \sim \frac{1}{T}$ (завдяки збільшенню розсіювання на фононах), тому

$$\mathcal{K}_\phi \simeq \frac{a}{T}. \quad (16.18)$$

Отже, в області високих температур $\mathcal{K}_\phi$ зменшується з підвищенням температури. Вираз (16.18) для діелектриків називають законом Ейкена.

Для електронної складової теплопровідності

$$\bar{\ell}_e = \frac{1}{T},$$

а тому $\mathcal{K}_e = \text{const}$.

Відмітимо, що теплопровідності кристалічних і аморфних тіл значно відрізняються між собою. Це пов'язане з відсутністю в аморфних тілах "дальнього порядку" в розміщенні структурних частинок. Для них харак-

терне збільшення $\mathcal{H}$ при підвищенні температури T . При високих температурах $\bar{\ell}_\phi = \text{const}$ і дорівнює приблизно відстані між структурними частинками аморфного тіла, а тому значення $\mathcal{H}$ прямує до сталої границі.

Важливою теплофізичною характеристикою твердих тіл, крім величин C_v і $\mathcal{H}$, є коефіцієнт температуропровідності a ($a = \mathcal{H}/C\rho$). Він є теплоінерційною характеристикою тіла і визначає швидкість вирівнювання в тілі різниць температур.

Зауважимо, що теплопровідність твердих кристалічних тіл визначається і рядом інших факторів. Наприклад, для напівпровідників

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_\phi + \mathcal{H}_e + \mathcal{H}_m + \mathcal{H}_b + \mathcal{H}_{\text{exc}}, \quad (16.19)$$

де $\mathcal{H}_\phi$, $\mathcal{H}_e$, $\mathcal{H}_m$, $\mathcal{H}_b$, $\mathcal{H}_{\text{exc}}$ – відповідно теплопровідності, зумовлені тепловим рухом фононів, електронів, магнонів (спінових хвиль – перенесення орієнтації атомів при підвищенні температури), біополярна теплопровідність (дифузія електронно-діркових пар від гарячого до холодного місць тіла) та екситонна теплопровідність внаслідок дифузії екситонів від гарячої частини тіла до холодної.

16.6. Дифузія в твердих тілах

Процес дифузії в твердих тілах протікає повільніше, ніж у рідинах і газах. Це пояснюється особливостями теплового руху структурних частинок у твердому тілі, який полягає, в основному, в коливаннях частинок навколо положень рівноваги.

У твердих тілах розрізняють дифузію і самодифузію. Під дифузією розуміють проникнення у кристалічну ґратку даної речовини, а самодифузія полягає в переміщенні у твердому тілі частинок, з яких воно складається.

Суть процесу дифузії полягає у тому, що, наприклад, атом, який коливається навколо положення рівноваги, може вийти з цього положення і з часом може зайняти "пустий" вузол, залишений іншим атомом. Але для того, щоб атом міг рухатися між вузлами, він повинен перемагати опір сусідніх атомів, тобто повинен затратити певну енергію (енергію активації). Швидкість процесу дифузії залежить від температури, і цю залежність можна виразити у такому вигляді:

$$D = Ae^{-\frac{E_a}{kT}}, \quad (16.20)$$

де E_a – енергія активації; A – стала (не залежить від температури); k – стала Больцмана.

На процес дифузії впливають ще й інші причини. Наприклад, механічна деформація прискорює дифузію. Швидкість протікання процесу дифузії підвищують дислокації у монокристалах і границі зерен у полікристалах. Пояснимо це.

На границях зерен і дислокацій атоми розміщені більш хаотично, ніж всередині зерна чи на певній відстані від дислокації. Ця хаотичність (нерегулярність) приводить до того, що частота виходу атомів з вузлів в цих місцях висока (тут значно менша величина енергії активації). Саме з цієї причини при введенні в тіло домішок їх концентрація біля границі зерен у полікристалі і біля дислокації у монокристалі буде вищою, ніж на значних відстанях від них.

Зауважимо, що енергія активації дифузії E_a у металів прямо пропорційна до температури плавлення. Звідси випливає, що під час дифузії одного металу в інший коефіцієнт дифузії D буде більший у металів з вищою температурою плавлення. Наприклад, коефіцієнт дифузії Au в Pb у 26000 раз більший, ніж Pb в Au .

16.7. Аморфні тіла. Полімери

За своєю молекулярною будовою аморфні тіла займають проміжне місце між рідинами і кристалами.

Тверді аморфні тіла мають будову, яка характеризується наявністю ближнього порядку в розміщенні частинок, з яких вони складаються. Цим вони подібні до рідин і відмінні від кристалів, в яких крім ближнього порядку є також і дальній порядок.

Щоб з'ясувати різницю між ближнім і дальнім порядком, порівняємо схематичні зображення в двох вимірах будови кристалічного (рис.16.11,а) і аморфного (рис.16.11,б) кварцу.

Як у кристалічній, так і в аморфній модифікаціях кварц побудований з тетраедрів, в центрі яких містяться атоми кремнію, а в кутах – атоми водню. Але в кристалах кварцу всі тетраедри розміщені один відносно одного

під одним і тим самим кутом і зберігають площинну симетрію. В аморфному кварці просторові кути між тетраедрами такі самі, як і в кристалічному

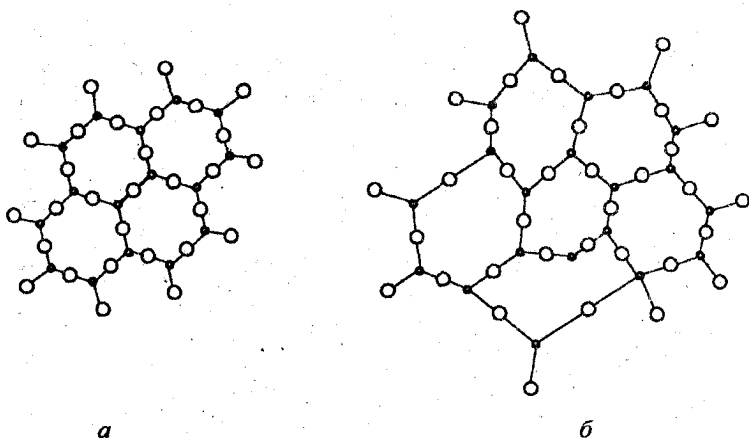


Рис.16.11

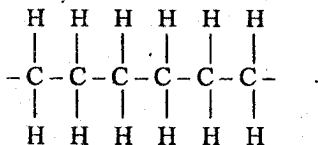
кварці, але симетрії в розміщенні тетраедрів нема: відносно довільної площини вони розміщені хаотично. Саме нерегулярність у будові аморфних тіл приводить до того, що розрив зв'язків у них відбувається не при одній температурі, як це спостерігається у кристалах. Тому аморфні тіла не мають певної температури плавлення, а поступово при нагріванні переходять у рідкий стан. Крім того, аморфні тіла є ізотропними, тобто їх фізичні властивості в усіх напрямках однакові.

Прикладами твердих аморфних тіл є янтар, скло, різноманітні пластмаси. Аморфні тіла використовуються людиною з давніх давен. Але найбільше аморфні тіла застосовуються за наших часів після того, як були відкриті способи штучного утворення високомолекулярних речовин або так званих полімерів.

Полімери – це аморфні тіла, які складаються з дуже великих лінійних або розгалужених молекул (макромолекул). Кожний елемент макромолеку-

ли, що повторюється, називають **мономером**. Він являє собою групу атомів, що може існувати як самостійна молекула. Наприклад, група $\text{CH}_2-\text{C} \begin{smallmatrix} \nearrow \text{CH}_3 \\ \searrow \text{CH}_3 \end{smallmatrix}$ утворює молекулу ізобутилену. Через сполучення мономерів одного з одним утворюються полімери, а процес утворення полімерів з мономерів називається **полімеризацією** молекул.

Спосіб полімеризації, тобто утворення синтетичних молекул-гігантів, вперше був розроблений російським хіміком Бутлеровим в 70-х роках минулого століття. Число мономерних молекул, що входять до макромолекули, називається **ступенем полімеризації** полімера. Так, наприклад, макромолекула поліетилену складається з 5000 окремих молекул етилену $\text{CH}_2 \equiv \text{CH}_2$, з'єднаних одна з одною за рахунок розкритих подвійних зв'язків. Її структурна формула має вигляд



Відзначимо, що макромолекула не є найменшою частинкою – носієм хімічних властивостей речовини як звичайна молекула, тому що при розриві макромолекули на більш короткі ділянки ці властивості зберігаються. Але специфічні властивості полімерів сконцентровані в макромолекулі полімера. В загальному випадку макромолекули являють собою лінійні, розгалужені, східчасті і сітчасті малі системи (відповідно випадки а, б, в і г на рис.16.12).

Полімери залежно від їхнього походження поділяють на:

- а) природні, які добувають з природних матеріалів (целюлоза, крохмаль, білки, пектинові речовини, нуклеїнові кислоти тощо);
- б) штучні, які добувають за допомогою хімічної модифікації природних полімерів (з целюлози ацетатне та віскозне волокно);
- в) синтетичні, які добувають синтезом мономерів.

Розрізняють полімери аморфні та кристалічні. Якщо макромолекули аморфних полімерів достатньо гнучкі, то вони можуть згортатись у кулясті клубки – глобули, втрачаючи при цьому властивості довгих ланцюгів. Глобули мають розмір $10 \div 30 \text{ нм}$ і тому їх можна спостерігати з допомогою

електронного мікроскопа. В склоподібному стані такі полімери при деформаціях дуже крихкі (руйнуються по межах розділу глобул).

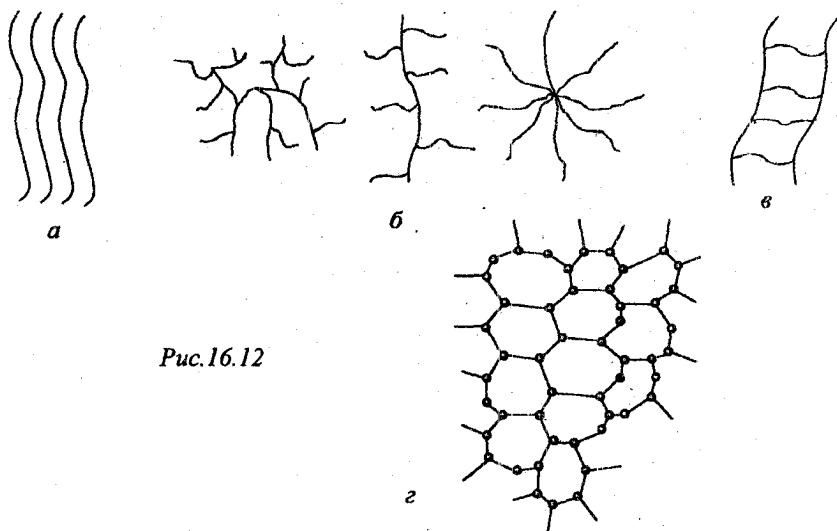


Рис.16.12

Другим найпростішим структурним елементом полімерів є утворення лінійних аморфних структур – пачок. Між розгорнутими макромолекулами при цьому виявляються сильні ван-дер-ваальсові взаємодії. Довжина пачки може значно перевищувати довжину однієї розгорнутої молекули. В кожен пачку входять десятки або сотні окремих макромолекул у вигляді багатьох рядів ланцюгів, в яких вони розташовані одна за одною послідовно. За товщиною пачка відповідає товщині декількох макромолекул. Структурування в аморфних полімерах не закінчується з утворенням пачок і глобул. Можливі процеси дальшого з'єднання глобул між собою та укрупнення пачок, тобто можуть утворюватися фібрили та смугасті структури, які, наприклад, типові для каучуків.

У кристалічних полімерів мають місце ще складніші типи молекулярних структур. За певних термодинамічних умов пачка може закристалізуватися. Закристалізовані пачки мають тенденцію до самовільного складання в стрічки завдяки повороту пачки на 180° . Стрічки, в свою чергу, накладаються, утворюють енергетично вигідніші структури (цей процес супрово-

диться зменшенням поверхні і потенціальної енергії) – мікрокристали пластоскоподібної форми – **сфероліти**. Сфероліти досягають великих розмірів і їх можна побачити у звичайний мікроскоп.

Полімери мають здатність до утворення волокон і плівок, які визначають високу анізотропію їх властивостей.

Залежно від теплового руху макромолекул полімери характеризуються трьома істотно відмінними станами, яким відповідають різні фізичні властивості. Ці стани – склоподібний, високоеластичний і в'язкотекучий – найпростіше визначити за механічними властивостями полімерів залежно від температури (будують температурну залежність деформації полімера при сталому малому за величиною навантаженні). До механічних властивостей полімерів належать деформаційні властивості (пружність, еластичність, пластичність та повзучість), їхня міцність та фрикційні властивості.

Деформація до руйнування супроводжується перебудовою структури полімеру. Руйнування – це процес розриву зв'язків. Відомі різні способи опису процесу руйнування. Один з них ґрунтується на понятті довговічності. Довговічність – це час від початку прикладання напруги до розриву матеріалу:

$$t = t_0 e^{\frac{U_0 - V\beta\sigma_p}{kT}}, \quad (16.21)$$

де t_0 – час, чисельно близький до періоду теплових коливань атомів; U_0 – енергія активації процесу руйнування; V – об'єм, в якому здійснюється акт розриву; β – коефіцієнт перенапруження на існуючих дефектах; σ_p – напруга руйнування. Значення U_0 для полімерів приблизно дорівнює енергії хімічних зв'язків. Рівняння (16.21) справджується для багатьох твердих тіл (включаючи і полімери) при однорідному розтягу матеріалу.

Важливою механічною властивістю полімерів є ударна в'язкість. Ударна в'язкість – це властивість полімера чинити опір короткочасним ударним навантаженням. За характеристику при цьому беруть питому роботу деформації до руйнування

$$A_p = \int_0^{\epsilon_p} \sigma(\epsilon) d\epsilon. \quad (16.22)$$

Для характеристики фрикційних властивостей полімерів використо-

вують коефіцієнт тертя та стійкість проти зношування, яка характеризує швидкість руйнування матеріалу при терті.

Залежно від технології переробки з окремих полімерів можна утворити пластмаси і волокна, фарби і лаки, плівки і шкіри, клеї і герметики тощо. Сучасне машинобудування, космічна техніка, авіація, електро- і радіотехніка немислимі без використання полімерів.

Контрольні запитання

1. Які особливості будови твердих кристалічних тіл? Чим відрізняються монокристали від полікристалів?
2. Як класифікують кристали?
3. Які дефекти існують у кристалах?
4. Чим пояснюється теплове розширення твердих тіл?
5. Сформулюйте закон Дюлонга і Пті. В чому полягає суть теорії теплоємності Дебая?
6. Поясніть механізм процесу теплопровідності у твердих тілах.
7. Як протікає процес дифузії у твердих тілах?
8. Які особливості будови твердих аморфних тіл?
9. Що таке полімери та які їх основні властивості?

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Обчислити період ідентичності ґраток кухонної солі (NaCl).

Розв'язання. В елементарну комірку NaCl входить разом 4 іони Na і 4 іони Cl , тобто 4 молекули NaCl .

Число молекул в одному молі дорівнює числу Авогадро N_A . На один елементарний куб солі припадає 4 молекули NaCl . Отже, число елементарних кубів в одному молі в 4 рази менше від N_A , тобто дорівнює $\frac{N_A}{4}$.

Об'єм одного елементарного кубика з ребром a (період ідентичності) дорівнює a^3 . Тому об'єм одного моля, який складається з $\frac{N_A}{4}$ кубиків,

$$V_{\mu} = a^3 \frac{N_A}{4}. \quad (1)$$

З іншого боку, об'єм одного моля можна знайти через густину і молярну масу:

$$V_{\mu} = \frac{\mu}{\rho}. \quad (2)$$

Порівнюючи (1) і (2), дістаємо

$$a^3 \frac{N_A}{4} = \frac{\mu}{\rho},$$

звідки

$$a = \sqrt[3]{\frac{4\mu}{\rho N_A}} = 5,64 \cdot 10^{-10} \text{ м.}$$

Приклад 2. Латунна шкала ртутного барометра градуйована при температурі 0 °С. Який істинний тиск, якщо при температурі $t_1 = 20$ °С барометр показує тиск $p_1 = 1010$ гПа? Розширенням скла знехтувати.

Розв'язання. Якщо барометр градуйований при 0 °С, то при всякій іншій температурі його покази будуть відрізнятися від істинного тиску. Виникнення похибки в показах барометра зумовлено наступними причинами:

1) з підвищенням температури густина ртуті зменшується і при незмінному атмосферному тиску довжина стовпчика ртуті в трубці зростає; 2) внаслідок теплового розширення шкали, по якій відлічується висота стовпчика, ціна її поділки збільшується. Неоднакова зміна лінійних розмірів шкали і ртутного стовпчика при зміні температури і викликає похибку в показах барометра.

Щоб визначити істинний тиск, потрібно врахувати температурну поправку, тобто звести покази барометра до тієї температури, при якій градуйована його шкала (в нашому випадку до 0 °С).

Використовуючи покази барометра при 20 °С, знайдемо висоту ртутного стовпчика:

$$h_1 = p_1 C_1, \quad (1)$$

де p_1 – покази барометра; C_1 – ціна поділки шкали барометра при 20°C , мм/гПа. Ціна поділки – відстань між двома сусідніми рисками на шкалі, яка відповідає тиску в 1 гПа.

Висота, на яку піднявся б стовп ртуті при незмінному атмосферному тиску і температурі 0°C ,

$$h_0 = p_0 C_0. \quad (2)$$

Ціна поділки C_1 буде більшою від C_0 . Якщо коефіцієнт лінійного розширення латуні α_1 , то $C_1 = C_0(1 + \alpha_1)$ і висота

$$h_1 = p_1 C_0(1 + \alpha_1). \quad (3)$$

Оскільки згідно з умовою задачі атмосферний тиск не змінюється, то

$$\rho_0 h_0 = \rho_1 h_1, \quad (4)$$

де ρ_0 і ρ_1 – густина ртуті відповідно при 0°C і при температурі t_1 .

З врахуванням залежності густини від температури

$$\rho_1 = \frac{\rho_0}{1 + \beta t_1}, \quad (5)$$

де β – коефіцієнт об'ємного розширення ртуті, з рівняння (4) дістанемо

$$h_1 = h_0(1 + \beta t_1)$$

або з врахуванням рівняння (2)

$$h_1 = p_0 C_0(1 + \beta t_1). \quad (6)$$

Підставляючи значення (6) в рівняння (3), дістанемо

$$p_0 = p_1 \frac{1 + \alpha_1}{1 + \beta t_1} = 1007 \text{ гПа.}$$

Приклад 3. Користуючись законом Дюлонга і Пті, знайти, з якої речовини виготовлена металічна кулька масою 0,02 кг, якщо відомо, що для її нагрівання від 10 до 30°C потрібно затратити 117 Дж теплоти.

Розв'язання. Для того щоб знайти, з якої речовини виготовлена металічна кулька, потрібно визначити її молярну масу. Для цього використаємо зв'язок між молярною C і питомою c теплоємностями

$$C = \mu c,$$

звідки

$$\mu = \frac{C}{c}. \quad (1)$$

Згідно з законом Дюлонга і Пті молярна теплоємність всіх хімічно простих твердих тіл

$$C = 3R = 25 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}. \quad (2)$$

Питому теплоємність c визначимо з рівняння для кількості теплоти, затраченої на нагрівання кульки

$$Q = cm(t_2 - t_1),$$

звідки

$$c = \frac{Q}{m(t_2 - t_1)}. \quad (3)$$

Підставивши значення (2) і (3) в рівняння (1), дістанемо

$$\mu = \frac{3Rm(t_2 - t_1)}{Q} = 107 \frac{\text{кг}}{\text{моль}}.$$

Маса одного моля матеріалу кульки дорівнює 107 кг/моль, отже, кулька виготовлена із срібла.

Приклад 4. Яка кількість теплоти проходить за 1 с через мідний стержень, площа поперечного перерізу якого дорівнює 10^{-3} м^2 , довжина 0,5 м, якщо різниця температур на кінцях стержня 15 К? Тепловими втратами знехтувати ($\kappa = 390 \text{ Дж}/(\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{К})$).

Розв'язання. Кількість теплоти, що переноситься внаслідок теплопровідності за час t , визначається за формулою (закон Фур'є)

$$Q = -\kappa \frac{dT}{dz} St.$$

Підставивши в даний вираз числові значення величин, дістанемо

$$Q = 11,7 \text{ Дж}.$$

Приклад 5. Пластинки із міді товщиною $d_1 = 9 \cdot 10^{-3}$ м і заліза товщиною $d_2 = 3 \cdot 10^{-3}$ м складені разом. Зовнішня поверхня мідної пластинки підтримується при сталій температурі $t_1 = 50$ °C, а зовнішня поверхня залізної – при температурі $t_2 = 0$ °C. Знайти температуру t поверхні їх дотику. Площа пластинок велика порівняно з їх товщиною.

Розв'язання. Кількість теплоти, яка проходить через складені разом мідну і залізну пластинки, визначаємо за законом Фур'є

$$Q = \kappa_1 \frac{t_1 - t}{d_1} St = \kappa_2 \frac{t - t_2}{d_2} St,$$

звідки

$$t = \frac{\kappa_1 t_1 d_2 + \kappa_2 t_2 d_1}{\kappa_1 d_2 + \kappa_2 d_1}.$$

Підставивши числові значення, дістанемо

$$t = 34,5 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Приклад 5. Вискоеластичні деформації є характерною ознакою полімерів (відбуваються внаслідок перегрупування елементів гнучких ланцюгових макромолекул). Показати, що для них деформуючі сили мають ентропійний характер. Вважати вискоеластичну деформацію рівноважним процесом.

Розв'язання. При деформації полімера зовнішні сили виконують роботу

$$d'A = \mathcal{F} dl, \quad (1)$$

де $\mathcal{F}$ – зовнішня сила, яка зумовлює деформацію dl .

Згідно з об'єднаними першим і другим законами термодинаміки, запишемо

$$\mathcal{F} dl = dU - T dS. \quad (2)$$

З іншого боку, коли $T = \text{const}$,

$$dF = dU - T dS, \quad (3)$$

де F – вільна енергія системи.

У рівняннях (2) і (3) праві частини рівні, тоді

$$dF = \mathcal{F} d\ell. \quad (4)$$

З рівнянь (1) і (4), якщо деформація відбувається при сталих температурах і об'ємі, дістанемо

$$\mathcal{F} = \left(\frac{\partial A}{\partial \ell} \right)_{T, V} \quad \text{або} \quad \mathcal{F} = \left(\frac{\partial F}{\partial \ell} \right)_{T, V}. \quad (5)$$

Тепер

$$\mathcal{F} = \left(\frac{\partial U}{\partial \ell} \right)_{T, V} - T \left(\frac{\partial S}{\partial \ell} \right)_{T, V}. \quad (6)$$

Вираз (6) розкриває характер деформуючої сили. Оскільки середні відстані між ланцюгами макромолекули не змінюються, то зміна внутрішньої енергії полімера при високоеластичній деформації $\left(\frac{\partial U}{\partial \ell} \right)_{T, V} = 0$.

Тоді

$$\mathcal{F} = -T \left(\frac{\partial S}{\partial \ell} \right)_{T, V}$$

Отже, деформуючі сили мають ентропійний характер, тобто розтяг полімерів приводить до впорядкування структури, а значить, і зменшення ентропії.

Задачі для самостійних вправ

1. Кристали CsCl мають кубічну об'ємноцентровану ґратку. У вершинах кристалічної комірки з ребром, рівним 0,41 нм, перебувають іони хлору, а в центрі комірки – іон цезію. Знайти молярний об'єм і густину кристалів.

Відповідь: $42 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$; $4,1 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

2. Визначити період ідентичності ґратки кристалів кальцію (ґратка гранецентрована кубічної сингонії). Густина кристалів кальцію дорівнює $1,55 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

Відповідь: $5,56 \cdot 10^{-10} \text{ м}$.

3. Знайти густину кристала неону при 20 К, якщо відомо, що ґратка гранецентрована кубічної сингонії. Період ідентичності ґратки при тій же температурі дорівнює $4,52 \cdot 10^{-10} \text{ м}$.

Відповідь: $1,46 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

4. Знайти величину сили, яку потрібно прикласти до мідної дrottини перерізом 10 мм^2 , щоб розтягнути її настільки ж, наскільки вона видовжується при нагріванні на 20 К . Модуль Юнга для міді дорівнює $1,2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$, а коефіцієнт лінійного розширення – $1,7 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}$.

Відповідь: $\approx 410 \text{ Н}$.

5. Наскільки збільшиться об'єм суцільного залізного куба, якщо йому надати $296,4 \text{ кДж}$ теплоти? Питома теплоємність заліза дорівнює $460 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$, густина заліза – 7800 кг/м^3 , а коефіцієнт лінійного розширення заліза – $12 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}$.

Відповідь: $3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$.

6. Паропровідна стальна труба завдовжки 10 м нагрівається від 0 до $100 \text{ }^\circ\text{C}$. Наскільки зміниться довжина труби? Коефіцієнт лінійного розширення сталі 10^{-5} К^{-1} .

Відповідь: $0,011 \text{ м}$.

7. Площа цегляної стіни 12 м^2 , а товщина 1 м . Температура повітря надворі дорівнює $-15 \text{ }^\circ\text{C}$, а температура повітря в кімнаті $+15 \text{ }^\circ\text{C}$. Чому дорівнює кількість теплоти, що виходить з кімнати протягом 24 годин? Коефіцієнт теплопровідності цегли $1,3 \text{ Дж/(м} \cdot \text{с} \cdot \text{К)}$.

Відповідь: $\approx 4 \cdot 10^7 \text{ Дж}$.

8. Зовнішня поверхня стіни має температуру $-20 \text{ }^\circ\text{C}$, а внутрішня $+20 \text{ }^\circ\text{C}$. Товщина стіни $0,4 \text{ м}$. Знайти коефіцієнт теплопровідності матеріалу стіни, якщо через кожний 1 м^2 її поверхні за 1 годину проходить 461 кДж теплоти.

Відповідь: $1,28 \text{ Дж/(м} \cdot \text{с} \cdot \text{К)}$.

9. Користуючись законом Дюлонга і Пті, визначити питому теплоємність: а) міді, б) алюмінію.

Відповідь: а) $390 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$; б) $920 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$.

10. Свинцева куля, яка летить із швидкістю 400 м/с , вдаряється об стінку і входить в неї. Вважаючи, що 10% кінетичної енергії кулі йде на її нагрівання, знайти, наскільки нагрілася куля. Питому теплоємність свинцю знайти за законом Дюлонга і Пті.

Відповідь: 66 К .

11. Антикато́д рентгенівської трубки являє собою мідний стержень.

довжиною $0,25 \text{ м}$ і діаметром $1,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$. Холодний кінець стержня омивається проточною водою, яка нагрівається на $3 \text{ }^{\circ}\text{C}$ при витраті води 1 кг/хв . Визначити різницю температур між гарячим і холодним кінцями стержня, якщо втрати теплоти через бічну стінку нескінченно малі. Коефіцієнт теплопровідності міді дорівнює $390 \text{ Дж/(м}\cdot\text{с}\cdot\text{К)}$.

Відповідь: $\approx 800 \text{ К}$.

Розділ 17. ФАЗОВІ ПЕРЕХОДИ І РІВНОВАГА ФАЗ

17.1. Типи фазових переходів

Фазою називається сукупність однорідних частин термодинамічної системи, які мають однакові фізичні та хімічні властивості. Якщо система однофазна, то вона фізично однорідна або гомогенна. Багатофазна система – фізично неоднорідна або гетерогенна. Пояснимо це на наступних прикладах. У закритій посудині міститься вода і над нею суміш повітря і водяної пари. В цьому випадку ми маємо справу з системою, яка складається із двох фаз: одну фазу утворює вода, другу – суміш повітря і водяної пари. Якщо у воду кинути грудки льоду, то вони утворюють третю фазу. Проте не слід вважати, що дві або три фази тієї самої речовини обов'язково характеризуються різними агрегатними станами. Можуть бути різні фази у твердому, рідкому і газоподібному станах. Наприклад, у твердому стані по дві фази мають вуглець (графіт, алмаз), олово (сіре і блискуче), сірка (ромбічна і моноклінна) тощо. Дві фази має у рідкому стані гелій (He I і He II). Фазові відмінності при досить високих тисках у газоподібному стані мають кисень O_2 і озон O_3 . Розпад речовини на фази – ефект суто фізичний, а не хімічний. Фази всередині системи відокремлені одна від одної фізичними макроскопічними поверхнями і можуть перебувати у рівновазі.

Фазова рівновага зумовлена однаковими умовами існування кожної з фаз. Це означає, що тиск і температура у всіх фазах повинні бути однаковими, крім того, необхідно, щоб хімічні потенціали всіх компонентів у кожній із фаз були також однаковими.

Число фаз, які одночасно можуть перебувати у фазовій рівновазі, визначають за правилом Гіббса. За цим правилом, число ступенів вільності

гетерогенної системи i , яка перебуває в стані термодинамічної рівноваги, на дві одиниці більше від різниці між числом компонент n і числом фаз k , тобто

$$i = n - k + 2. \quad (17.1)$$

Число ступенів вільності системи визначає кількість взаємозалежних параметрів, що однозначно описують стан системи. Оскільки $i > 0$, то згідно з (17.1) маємо

$$n - k + 2 \geq 0,$$

звідки

$$k \leq n + 2, \quad (17.2)$$

тобто число фаз, які перебувають у рівновазі між собою, не перевищує число компонент n більш ніж на дві одиниці. Розглянемо такий приклад. Для однокомпонентної системи $n = 1$. Якщо вона перебуває в одній фазі ($k=1$) то, згідно з (17.1), $i=2$, тобто при цьому обидва термодинамічні параметри є незалежними один від одного. Якщо в цій системі є дві фази, то $k=1$, $i=1$, тобто тепер лише один з параметрів p або T буде незалежним (кожному значенню p у стані рівноваги відповідатиме тільки одне значення T і навпаки). Якщо ця система складається з трьох фаз, то для її фазової рівноваги $i=0$, тобто три фази будуть перебувати у рівновазі лише при певних фіксованих значеннях обох параметрів (такий певний стан системи має назву потрійної точки). У термодинаміці доводиться, що рівновага більш ніж трьох фаз неможлива. Речовина може переходити з однієї фази в іншу. Фазовим переходом називається процес, в результаті якого властивості тіла змінюються стрибком. З точки зору термодинаміки причиною фазових переходів є різниця хімічних потенціалів у різних фазах. Фазові переходи поділяють на переходи першого та другого роду. Типовим прикладом фазових переходів першого роду є агрегатні перетворення. Вони характеризуються стрибкоподібними змінами вільної та внутрішньої енергій, ентропії та об'єму системи і завжди супроводжуються виділенням або поглинанням системою теплоти:

$$dQ = Ldm, \quad (17.3)$$

де L – питома прихована теплота фазового перетворення, а dm – маса пере-

творюваної речовини. Температура і тиск системи при цьому залишаються сталими. Ці переходи можуть відбуватися у двох напрямках: в одному з них відбувається перехід до фази, яка існує при вищих температурах (плавлення, сублімація, випаровування); у другому – навпаки (кристалізація, конденсація).

Як показують досліди, існують також такі фазові переходи, при яких внутрішня енергія та об'єм системи залишаються сталими, немає теплоти фазового переходу, але змінюються стрибком теплоємність і термічні коефіцієнти. Їх назвали **фазовими переходами другого роду**. Прикладом є перехід заліза при підвищенні температури з феромагнітного стану в парамагнітний, перехід рідкого гелію I у рідкий гелій II та ін. Особливістю цього виду переходів є те, що процес створення нової фази в цьому разі відбувається одночасно у всьому об'ємі системи, а це приводить до того, що в точці переходу немає рівноваги двох різних фаз. Взагалі слід відзначити, що проблема фазових перетворень другого роду належить до фундаментальних проблем фізики.

17.2. Випаровування і конденсація. Рівняння Клапейрона – Клаузіуса. Кипіння

У рідинах при будь-якій температурі є деяка кількість молекул, енергія яких достатня для того, щоб перебороти притягання до інших молекул, покинути поверхню рідини і перейти в газоподібну фазу. Перехід рідини в газоподібний стан називається пароутворенням. Випаровування є пароутворенням, яке відбувається тільки на вільній поверхні рідини або твердого тіла.

Швидкість випаровування пропорційна площі вільної поверхні рідини та її температурі. Для різних рідин швидкість випаровування різна. Внутрішня енергія рідин при випаровуванні зменшується. Пара, яка перебуває у динамічній рівновазі зі своєю рідиною, називається насиченою, а пара, густина якої менша від густини насиченої пари, називається ненасиченою.

Кількість теплоти, яку необхідно надати одиниці маси речовини, що має температуру T , для перетворення її в пару при тій самій температурі, називають питомою теплотою випаровування L .

Одночасно з переходом молекул з рідини в пару відбувається і зворот-

ний процес, який називається конденсацією. Конденсація пари супроводиться виділенням енергії. Інакше кажучи, питома теплота конденсації дорівнює питомій теплоті випаровування.

Крім величини L , яка характеризує випаровування, є швидкість випаровування N , що чисельно дорівнює кількості молекул, які покидають одиницю площі вільної поверхні рідини за одиницю часу. Величину N визначають за формулою Герца – Кнудсена:

$$N = \alpha \frac{p N_A}{\sqrt{2\pi \mu RT}}, \quad (17.4)$$

де N_A – число Авогадро; μ – молекулярна маса; p – тиск насиченої пари; T – абсолютна температура; α – стала величина, яка залежить від природи рідини.

Швидкість випаровування рідини, як видно з рівняння (17.4), залежить для даної рідини тільки від температури. Справді, величина p у формулі (17.4) не є незалежна змінна; тиск насиченої пари швидко зростає з температурою ($p = n_0 kT$, де n_0 – об'ємна концентрація молекул пари). Таким чином, за формулою (17.4) швидкість випаровування зростає з підвищенням температури. Зауважимо, що досліди дають значення α , яке лежить у межах від 0,25 до 0,33, але для ртуті $\alpha = 1$.

Для кількісного описання фазових переходів першого роду потрібно встановити співвідношення між фізичними параметрами, які характеризують ці переходи. З цієї метою здійснимо “вузький” цикл Карно з двофазною системою (що, наприклад, складається з рідини і її насиченої пари), фази якої перебувають у рівновазі (рис. 17.1).

Переведемо систему із стану A в стан B ізотермічним розширенням ($T = \text{const}$) так, щоб одиниця маси рідини перейшла з рідкої фази в газоподібну (пару) при сталому тиску ($p = \text{const}$). Отже, цей процес – ізотермічний – ізобаричний. В процесі AB система одержала кількість теплоти $Q_{AB} = L$. При цьому об'єм речовини дістає приріст ($V_B - V_A$), де V_B – питомий об'єм пари, а V_A – питомий об'єм рідини і, як наслідок, виконується робота $A_1 = p(V_B - V_A)$. Процес BC – адиабатичний з дуже малим зростанням об'єму (при цьому тиск зменшується на dp , а температура – на dT). Процес CD проходить при тиску $p - dp$ і температурі $T - dT$, причому

частина пари конденсується. Роботу при ізотермічному стисканні системи

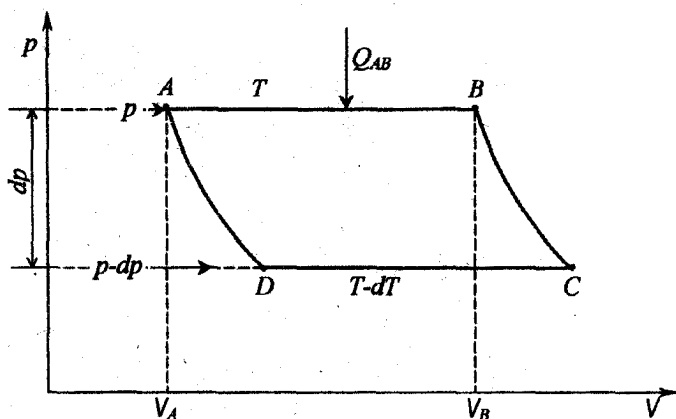


Рис. 17.1

запишемо так: $A_2 = -(p - dp)(V_B - V_A)$.

Процес DA – адіабатичний. Робота всього циклу

$$A = A_1 + A_2 = p(V_B - V_A) - (p - dp)(V_B - V_A) = dp \Delta V_0,$$

де $\Delta V_0 = V_B - V_A$ – різниця питомих об'ємів другої та першої фаз.

За теоремою Карно, ККД циклу Карно не залежить від природи робочої речовини і виражається так:

$$\eta = \frac{A}{Q_{AB}} = \frac{T - (T - dT)}{T} = \frac{dT}{T}; \quad \eta = \frac{dp \cdot \Delta V_0}{L} = \frac{dT}{T},$$

звідки

$$\frac{dp}{dT} = \frac{1}{T} \cdot \frac{L}{\Delta V_0}. \quad (17.5)$$

Вираз (17.5) називають рівнянням Клапейрона – Клаузіуса. Воно зв'язує похідну від рівноважного тиску по температурі з питомою теплотою переходу, температурою і різницею питомих об'ємів фаз, які перебувають у рівновазі. Дане рівняння справедливе для різних фазових переходів першого роду, таких як випаровування (конденсація), плавлення (кристалізація),

сублімація.

Рівняння Клапейрона – Клаузіуса розриває функціональний зв'язок $p = f(T)$ для насиченої пари далеко від значення критичної температури. При невисоких температурах густина насичуючої пари мала і вона за своїми властивостями близька до ідеального газу, тому $V_n = \frac{RT}{p}$ (зауважимо, що $V_n \gg V_p$). Якщо L мало залежить від температури, то з (17.5) дістанемо

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T(V_n - V_p)} = \frac{L}{TV_n} = \frac{pL}{RT^2},$$
$$\frac{1}{p} \cdot \frac{dp}{dT} = \frac{L}{RT^2}, \quad \frac{d \ln p}{dT} = -\frac{d}{dT} \left(\frac{L}{RT} \right),$$
$$\ln p = \text{const} - \frac{L}{RT},$$

$$p = C \cdot e^{-\frac{L}{RT}}, \quad (17.6)$$

де C – стала інтегрування, яку можна визначити якщо відомий тиск насиченої пари p_0 при температурі T_0 .

Кипінням називають процес інтенсивного пароутворення рідини не тільки з її вільної поверхні, а й по всьому об'єму рідини всередину бульбашок пари, які при цьому утворюються. Бульбашки у киплячій рідині швидко збільшуються у розмірах, спливають на поверхню і лопаються. Отже, кипіння – не просте утворення двофазної системи, а перехід двофазної системи від спокійного існування до бурхливого, внаслідок чого виникає характерне бурління киплячої рідини. Необхідною умовою кипіння є наявність у рідині під меніском газової фази у вигляді бульбашок, які відіграють таку саму роль, як порошинки в процесі конденсації, тобто роль зародків. Гази можуть бути адсорбовані на стінках посудини або розчинені в рідині. Бульбашки газу в процесі нагрівання рідини наповнюються парою при випаровуванні рідини всередину бульбашки. Кипіння рідини починається при такій температурі, коли рівноважний тиск насичуючої пари в бульбашці стає рівним зовнішньому тиску, під яким розуміють суму атмосферного і гідростатичного тиску та тиску, обумовленого кривизною поверхні буль-

башки. Оскільки питомий об'єм пари більший від питомого об'єму рідини, то з рівняння Клапейрона – Клаузіуса випливає, що з підвищенням тиску температура кипіння підвищується, і навпаки. Якщо кипіння рідини відбувається при сталому тиску, то її температура також залишається незмінною. Теплота, що підводиться до рідини, яка кипить, повністю витрачається на відривання молекул від рідини і перехід їх у пару. Теплоту L_k , необхідну для випаровування одиниці маси рідини, нагрітої до температури кипіння, називають **питомою теплотою пароутворення**. Питома теплота пароутворення зменшується з підвищенням температури кипіння і перетворюється в нуль при критичній температурі (див. таблицю).

t, °C	100	150	200	250	300	350	374
L_k , Дж/кг	$2,26 \cdot 10^6$	$2,11 \cdot 10^6$	$1,94 \cdot 10^6$	$1,71 \cdot 10^6$	$1,40 \cdot 10^6$	$8,92 \cdot 10^5$	$1,15 \cdot 10^5$

В результаті тривалого кипіння утворення бульбашок в рідині зменшується, а потім взагалі припиняється і рідина перестає кипіти, оскільки вона втрачає центри кипіння. Отже, можна одержати **перегріту рідину**, температура якої вища від температури кипіння при даному зовнішньому тиску і при цьому вона не кипить. При високих температурах навіть при відсутності центрів (зародків) кипіння внаслідок імовірного виникнення флуктуацій густини можуть утворюватись бульбашки пари і перегріта рідина закипає з вибухом (вибухове кипіння є загрозливим для посудини, в якій міститься рідина). Ця обставина повинна враховуватися при експлуатації котельних установок.

Відзначимо, що характерною особливістю всіх фазових переходів першого роду є те, що у цих процесах одночасно сталі тиск і температура, але змінюється співвідношення між масами двох фаз. Друга особливість цих процесів полягає в тому, що для їх здійснення необхідно підводити до системи або відводити від неї деяку кількість теплоти, яку називають **теплотою фазового переходу L** .

17.3. Сублімація, плавлення та кристалізація твердих тіл

При будь-якій температурі в твердих тілах, так само як і в рідинах, існує деяка кількість атомів або молекул, кінетичної енергії яких досить для того, щоб вони могли покинути поверхню тіла і перейти в газоподібну фазу.

Перехід речовини із твердої фази в газоподібну, минаючи рідку, називають **сублімацією**. Прикладом сублімації є зникнення снігу без його танення під дією холодного сухого вітру. Широко відомі також приклади сублімації при кімнатних температурах йоду, нафталіну, нашатирю, камфори тощо. Цим і пояснюється різкий запах, властивий багатьом твердим тілам.

При певних тисках і температурі пара і тверде тіло можуть перебувати у рівновазі і пару в цьому випадку також називають **насиченою**. Температура, при якій тиск насиченої пари твердого тіла дорівнює зовнішньому тиску, називається **точкою сублімації**.

Обернений процес до сублімації називають **десублімацією** або **аблімацією** (безпосередній перехід речовини з газоподібної фази в тверду).

Молекулярно-кінетична теорія дозволяє при деяких спрощеннях визначити масу речовини твердого тіла, яка сублімує за одиницю часу:

$$m = \alpha (p_{\text{н.л.}} - p_t) \sqrt{2\pi \frac{R}{\mu} T}, \quad (17.7)$$

де α – коефіцієнт сублімації; $p_{\text{н.л.}}$ – тиск насиченої пари; p_t – тиск в хмарі пари на відстані середньої довжини вільного пробігу від поверхні тіла; R – універсальна газова стала; μ – молярна маса пари; T – температура поверхні тіла. При цьому вважається, що залежність m від T залишається незмінною для будь-яких значень парціальних тисків і α не залежить від парціального тиску випаровуваних компонентів і від присутності інородних газів.

Якщо сублімація речовини відбувається у вакуумі, то $p_t = 0$ і рівняння (17.7) спрощується. Це використовують у багатьох експериментальних методах визначення коефіцієнта сублімації α .

Можливість відриву атомів або молекул поверхневого шару твердого тіла від своїх сусідів впливає з максвеллівського закону розподілу швидкостей, який застосовний при високих температурах не тільки для газів, а й

до твердих тіл.

Згідно з уявленнями Я.І. Френкеля, число атомів або молекул, які сублимують за одиницю часу, дорівнює

$$N = n \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} e^{-\frac{U_c}{kT}}, \quad (17.8)$$

де n – середнє число атомів або молекул в одиниці об'єму тіла; m – маса атома або молекули; U_c – енергія сублимації.

З рівняння (17.8) випливає, що доти, поки $kT \ll U_c$, швидкість сублимації дуже мала, а при наближенні kT до U_c вона швидко зростає.

Кількість теплоти, потрібної одиниці маси твердого тіла, що має температуру T , для перетворення його в пару з такою самою температурою, називають питомою теплотою сублимації L_c .

Оскільки сублимація відбувається при низьких тисках, то питомий об'єм пари на кілька порядків більший, ніж питомий об'єм твердої фази. Тому в рівнянні Клапейрона – Клаузіуса $\frac{dp}{dT} = \frac{L_c}{T(V_n - V_{me})}$ похідна $\frac{dp}{dT}$ більша від нуля.

Відзначимо, що явище сублимації широко застосовується в техніці для очищення твердих тіл (сублимація з наступним охолодженням пари безпосередньо в формі кристалів), для сублимаційної сушки медичних препаратів (при високому вакуумі) і багатьох харчових продуктів тощо. Крім того, в останні роки вивчення сублимації набуло великого практичного значення у зв'язку з вибором і керуванням теплозахистом космічних кораблів.

Перехід речовини з твердої фази в рідку називають плавленням. У кристалічних тіл при постійному зовнішньому тиску плавлення відбувається при певній температурі, яку називають температурою плавлення. Зворотний процес переходу речовини з рідкого стану в твердий кристалічний стан (кристалізація) відбувається при тій самій температурі що й плавлення.

Аморфне тіло плавиться не при певній фіксованій температурі, а в певному інтервалі температур. Тому аморфний твердий стан не є особливою фазою речовини. Наприклад, тверде і рідке скло – не різні фази.

Припустимо, що до кристалічного тіла кожної секунди підводиться

однакова кількість теплоти. Тоді його температура поступово зростатиме доти, поки не досягне значення температури плавлення (рис.17.2, точка *B*).

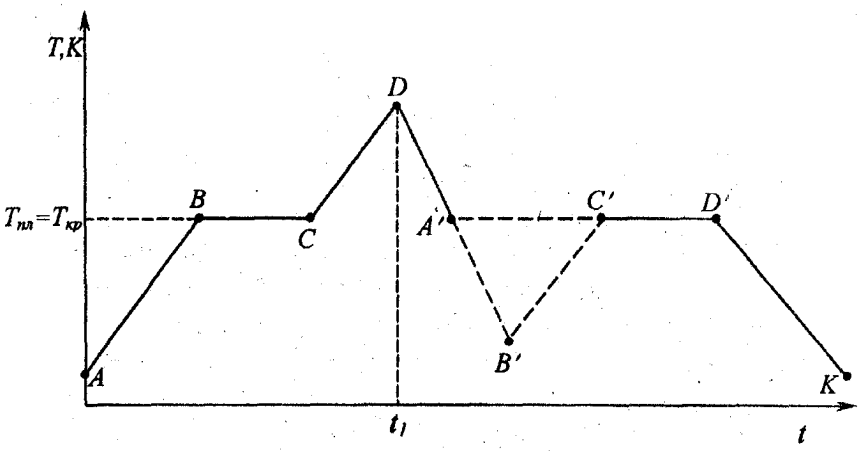


Рис.17.2

При плавленні або кристалізації тверда і рідка фази існують одночасно. Відрізок *AB* на рис. 17.2 відповідає нагріванню твердого тіла до температури плавлення T_m . Кількість теплоти, яка підводиться ззовні, йде на збільшення енергії коливань атомів або молекул, і тому температура тіла підвищується. При цьому поступово порушується дальній порядок і відбувається утворення вакантних вузлів ("дірок") кристалічної ґратки відповідно до рівняння $\frac{n}{N} = e^{-\frac{Q_a}{kT}}$, де $\frac{n}{N}$ – відносне число вакантних вузлів; Q_a – енергія активації утворення вакантних вузлів. При досягненні тілом температури плавлення концентрація вакансій стає критичною і ґратка руйнується. При цьому теплота йде на послаблення міжатомних зв'язків, що спричинює ізотермічність процесу плавлення (відрізок *BC*). Дальше нагрівання розплавленого тіла знову веде до підвищення енергії теплових коливань атомів або молекул (структурних частинок), тобто до зростання температури (відрізок *CD*).

Зауважимо, що питомі об'єми речовини в твердій і рідкій фазах V_m і

V_p близькі між собою. При $V_p > V_{ms}$, згідно з рівнянням (17.5), $\frac{dp}{dT} > 0$, тобто температура плавлення $T_{пл}$ збільшується з підвищенням тиску (це характерне для більшості твердих тіл). При переході твердого тіла в рідкий стан і підвищенні густини упаковки структурних частинок коли $V_p < V_{ms}$, $\frac{dp}{dT} < 0$. Цей випадок є характерним для льоду, вісмуту, деяких сортів чавуну, германію та ін.

Кількість теплоти, яка потрібна для розплавлення одиниці маси кристалічної речовини, взятої при температурі плавлення, називають **питомою теплотою плавлення** ($L_{пл}$). Її значення різне для різних речовин: так, наприклад, для заліза воно дорівнює 0,293 Дж/кг, а для ртуті – 0,0117 Дж/кг.

Позначимо через U_{ms} і U_p внутрішню енергію в точках B і C (рис.17.2), що відповідає твердій і рідкій фазам речовини. Тоді питома теплота плавлення згідно з першим законом термодинаміки

$$L_{пл} = (U_p - U_{ms}) + p(V_p - V_{ms}), \quad (17.9)$$

де p – сталий тиск, при якому відбувається плавлення. За другим законом термодинаміки процес плавлення пов'язаний з ростом ентропії, оскільки при цьому речовина переходить із більш впорядкованого стану в менш впорядкований – рідкий.

Якщо з деякого моменту часу t_1 припинити нагрівання рідкої фази речовини і почати її охолоджувати (рис.17.2), то це приведе до зниження температури (відрізок DA'). При досягненні температури кристалізації $T_{кр}$ ($T_{кр} = T_{пл}$) і при наявності центрів кристалізації в системі почне проходити процес кристалізації (відрізок $A'C'D'$). В процесі кристалізації зменшується вільна енергія системи і сам процес супроводиться виділенням теплоти кристалізації. Отже, для реалізації процесу кристалізації треба створити такі умови, за яких вона була б термодинамічно обгрунтованим процесом і супроводилась би зменшенням вільної енергії системи (це можливе тільки при переохолодженні рідини). Якщо в рідині немає центрів кристалізації, то її можна переохолодити до температур, менших T_k (ділянка $A'B'$). Переохолоджений стан рідини – нестійкий, метастабільний. При сильному переохолодженні можливе самовільне утворення центрів кристалізації внаслідок

док флуктуації густини рідини (відрізок $B'C'$).

Якщо в рідині є багато центрів кристалізації, то в ній утворюється багато кристаликів, які зростаються і тверде тіло стає полікристалічним. Під час кристалізації з одного зародка (центра) тверде тіло стає монокристалом. Вирощування монокристалів є надзвичайно важливим завданням для напівпровідникової і лазерної техніки.

Зауважимо, що деякі рідини (як правило, з великою в'язкістю) можуть переохолоджуватися настільки, що встигають затверднути і перетворитися в аморфне тіло. Перехід рідини в твердий аморфний стан називають скловуванням, а саму речовину в такому стані – скло. В аморфних тіл немає певної температури переходу в рідкий стан, як і немає певної температури скловування. Це пояснюється тим, що рідина і аморфне тіло відрізняються тільки ступенем рухливості молекул.

17.4. Фазова діаграма. Потрійна точка

На прикладах фазових переходів ми спостерігали, що під час переходу речовини з однієї фази в іншу між ними може бути динамічна рівновага. Її найзручніше подавати в координатах тиск – температура. При зміні тиску змінюється і температура фазового переходу. На pT – діаграмі ця залежність зображається кривою фазового переходу $p = p(T)$. За назвою переходів говорять про криві випаровування – конденсації, плавлення – кристалізації і ін. Крива фазового переходу поділяє площину pT на дві області. Точки всередині кожної області відповідають однофазним станам. Точки, які лежать на кривій фазового переходу, відповідають станам, в яких обидві фази присутні одночасно і перебувають у рівновазі. Тому криву фазового переходу називають також **кривою рівноваги фаз**.

Фазові переходи можна зображати не тільки на pT – діаграмі, а також і на pV – і TV – діаграмах стану. Графічне зображення фазового переходу на одній із діаграм стану називають **фазовою діаграмою**. Фазові діаграми на площинах pT і pV суттєво відрізняються одна від одної. Ця відмінність зумовлена тим, що в процесі самого переходу постійні і температура, і тиск, в той час як питомий об'єм змінюється.

Розглянемо однокомпонентну трифазну систему. Для неї, згідно з

правилом фаз Гіббса, число ступенів вільності дорівнює нулю. Це означає, що в однокомпонентній системі три фази можуть перебувати в термодинамічній рівновазі лише при певних значеннях температури і тиску. На кривій фазового переходу в pT – діаграмі такий стан, в якому співіснують у рівновазі три фази даної речовини, зображується точкою, яку називають *потрійною*. Потрійну точку, в якій речовина співіснує в трьох агрегатних станах, називають *головною потрійною точкою*.

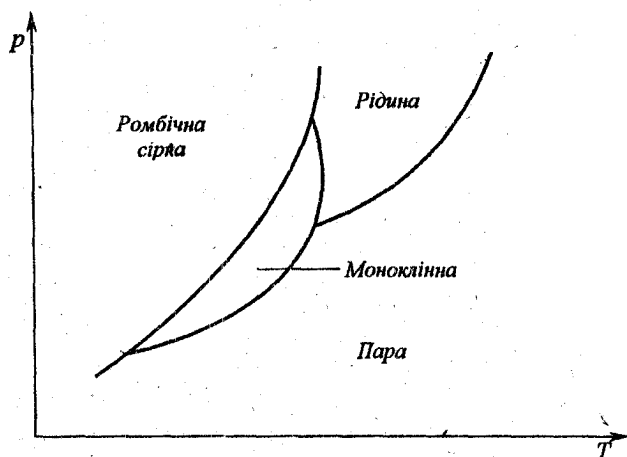


Рис. 17.3

Для хімічно однорідних речовин, які не мають модифікації, на діаграмах стану існує одна потрійна точка, а для речовин з алотропічними модифікаціями число потрійних точок відповідно збільшується. Так, для сірки (рис.17.3) можливі чотири фази: ромбічна (тверда), моноклінна (тверда), рідка та газоподібна сірка. При цьому рівновага всіх чотирьох фаз для сірки не може бути реалізована ні за яких умов.

На рис.17.4,а,б зображено характерні pT – діаграми речовин з кривими фазових переходів (фазових рівноваг). На діаграмах лінії OA – криві плавлення, лінії OK – криві кипіння, лінії OB – криві сублімації. Точка O – це потрійна точка, в якій перебувають у рівновазі три агрегатні стани речовини (твердий, рідкий і газоподібний).

З рис.17.4 видно, що крива плавлення OA для різних речовин може мати як від'ємний (рис.17.4,а), так і додатний (рис.17.4,б) нахил. Криві

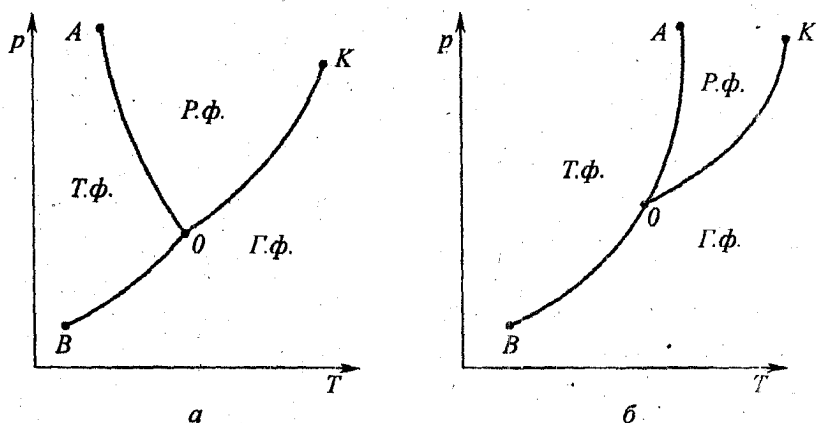


Рис.17.4

плавлення не закінчуються навіть при надвисоких тисках (порядку сотень тисяч атмосфер). Криві кипіння OK мають додатний нахил ($V_{np} \gg V_p$ і

$\frac{dp}{dT} > 0$) і закінчуються в критичній точці K . Криві сублимації OB , як і

криві кипіння, мають додатний нахил, а це означає, що з підвищенням тиску температура фазового переходу зростає. Розглянуті pT -діаграми виражають залежність стану системи і фазових рівноваг в ній від зовнішніх умов. Їх будують на основі експериментальних даних і широко використовують для характеристики різних речовин. Зліва від кривої AOB розміщена область твердої фази речовини, справа від кривої KOB – область газоподібної фази, а між кривими OA і OK – область рідкої фази. Отже, на основі діаграми стану завжди можна визначити вид стану речовини при певних фіксованих значеннях тиску і температури.

Відзначимо, що при збільшенні числа компонентів системи (розчин або розплав) збільшується і число незалежних параметрів, які характеризують цю систему. Наприклад, для двокомпонентної системи до параметрів p і T додається третій параметр – концентрація X . У цьому разі плоска

pT – діаграма замінюється просторовою pTX – діаграмою.

17.5. Метастабільні стани

Якщо рідину охолоджувати, то при певній температурі, що залежить від тиску, повинна початися кристалізація. Але нерідкі випадки, коли рідину можна охолодити без кристалізації до температури нижчої, ніж нормальна температура кристалізації. Наприклад, воду іноді вдається охолодити на $70\text{ }^{\circ}\text{C}$ нижче від нуля, тобто нижче тієї температури, при якій вода під нормальним тиском повинна кристалізуватися. Якщо в переохолоджену рідину кинути кристалик цієї самої рідини або іншої ізоморфної з нею речовини, тобто такої, що має однакові з першою гратки, зараз же почнеться кристалізація. Отже, переохолоджена рідина є стійкою фазою тільки тоді, коли немає контакту з кристалічною фазою.

Є ще й інші стани, стійкість яких зумовлена відсутністю контакту з тією фазою, в якій речовина повинна перебувати під даним тиском і при даній температурі: наприклад, пара може лишатися пересиченою, тобто може мати густину в кілька разів більшу, ніж густина насиченої пари при даній температурі, за умови, що вона відокремлена від рідини.

Рівноважний стан системи з обмеженою стійкістю називається метастабільним. При відхиленні від цього стану речовина не повертається до нього назад, а легко переходить в інший, стійкий стан. Метастабільні стани існують обмежений час.

Постають питання: а) як довго, наприклад, пара може лишатися пересиченою при даному пересиченні? б) де лежить межа метастабільності або, інакше, якого пересичення можна досягти? в) що може бути мірою стійкості стану пересиченої пари і взагалі всякого метастабільного стану?

Відповіді на запитання дістанемо взявши до уваги, що краплі рідини в насиченій парі, які є центрами конденсації, повинні виникнути самовільно в результаті флуктуації густини пари. Хоч би яке мале було пересичення, флуктуації густини пари приведуть до утворення крапель рідини критичного розміру (зародків). Тоді пересичена пара розподілиться на дві фази – рідину і газоподібну. Питання тільки в тому, яка швидкість утворення зародків.

Швидкість I утворення зародків, тобто число зародків нової фази,

що виникають в 1 см^3 за 1 с ; згідно з теорією можна виразити такою формулою:

$$I = Be^{\frac{A}{kT}}, \quad (17.10)$$

де B – стала; e – основа натуральних логарифмів; A – робота утворення зародка; k – стала Больцмана; T – абсолютна температура.

Легко довести, що для краплі робота ізотермічного утворення зародка дорівнює $1/3$ його вільної поверхневої енергії: $A = \frac{1}{3} \alpha S$, де α – коефіцієнт поверхневого натягу, а S – площа поверхні краплі. Цей вираз роботи справедливий для зародків будь-якої форми, і не тільки для зародків рідини в парі, а й для зародків кристалів у рідині.

Як відомо, чим менше пересичення пари, тим більший розмір зародка, тим більша робота його утворення ($A = \frac{1}{3} \alpha S$).

Згідно з формулою (17.10), чим більша A , тим менша I , тобто тим менше зародків виникає і, значить, тим більша стійкість метастабільного стану. Отже, мірою стійкості метастабільного стану можна вважати швидкість I утворення зародків або роботу A утворення зародка.

Зауважимо, що механізм утворення перегрітої рідини подібний до механізму утворення пересиченої пари. Перегрітою може бути тільки дуже чиста рідина, в якій немає зародків газової фази. Тому для одержання стану перегрітої рідини потрібно провести старанну очистку рідини і стінок посудини, на яких завжди є маленькі бульбашки газу.

Зазначимо, що для аналізу умов стійкості рівноваги в термодинаміці використовують залежність термодинамічного потенціалу Гіббса Z як функції стану від певного параметра стану системи: $Z = F + pV$, де F – вільна енергія; p і V – тиск і об'єм. Потенціал Гіббса визначає напрям самовільного пробігу процесів для систем, які перебувають при сталих температурах і тиску. В системах при $T = \text{const}$ і $p = \text{const}$ самовільно можуть відбуватися процеси тільки при зменшенні Z . Умовою рівноваги системи буде досягнення нею певного мінімального для даних умов значення потенціалу Гіббса.

Речовини в метастабільному стані можуть перебувати в динамічній

рівновазі між різними частинами системи. Наприклад, переохолоджена вода перебуває в динамічній рівновазі зі своєю насиченою парою при температурі $-15\text{ }^{\circ}\text{C}$ і тиску 190 Па. Але, як і сама вода, ця пара перебуває в метастабільному стані, будучи пересиченою відносно льоду. Такі рівноваги також називаються метастабільними.

Метастабільні стани широко використовуються в різних цілях. Так, переохолоджена пара є робочою речовиною в камері Вільсона, яка служить для реєстрації заряджених частинок. Явище перегрівання рідини використовують у так званій бульбашковій камері, приладі, аналогічному за призначенням камері Вільсона. При русі елементарної частинки крізь перегріту рідину бульбашкової камери частинка гальмується і частина її енергії перетворюється в теплоту, яка є достатньою для інтенсивного утворення бульбашок на шляху частинки.

Контрольні запитання

1. Що називається фазою? Розкажіть про фазові переходи речовини. Чим відрізняється фазовий перехід I роду від фазового переходу II роду?
2. Виведіть рівняння Клапейрона – Клаузіуса для кількісного описання фазових переходів першого роду.
3. Поясніть процес кипіння рідини.
4. Опишіть процеси сублімації, плавлення та кристалізації твердих тіл.
5. Що можна “вчитати” з діаграми стану, яку використовують для зображення фазових переходів?
6. Який стан системи називається метастабільним? У яких цілях використовуються метастабільні стани речовини?

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. У калориметр з $m_1 = 0,2\text{ кг}$ води, температура якої $8\text{ }^{\circ}\text{C}$ опускають $m_2 = 0,1\text{ кг}$ льоду, температура якого $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$. Яка температура встановиться у калориметрі? Який буде вміст калориметра після встановлення в ньому рівноваги?

Розв’язання. Маємо на увазі, що в калориметрі відбуваються різні

процеси. А саме, вода охолоджується, а лід нагрівається, але при $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ дальший приплив теплоти до грудки льоду викликає процес його плавлення, а втрата теплоти водою за тієї самої температури супроводжується заморожуванням води. На підставі сказаного міркуємо так.

1. Кількість теплоти, яка може виділитися внаслідок охолодження води від 8 до $0\text{ }^{\circ}\text{C}$,

$$Q_1 = C_w m_w \Delta t = 6,7 \text{ кДж},$$

де $C_w = 4,19 \text{ кДж/кг}\cdot\text{K}$ – питома теплоємність води.

2. Щоб нагріти лід від $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$ до $0\text{ }^{\circ}\text{C}$, потрібна кількість теплоти

$$Q_2 = C_l m_l \Delta t = 4,2 \text{ кДж},$$

де $C_l = 2,1 \text{ кДж/кг}\cdot\text{K}$ – питома теплоємність льоду.

Тепер зрозуміло, як відбуватиметься теплообмін між заданими масами льоду і води. В калориметрі встановиться температура $0\text{ }^{\circ}\text{C}$, а кількість теплоти в розмірі $Q = Q_1 - Q_2$, передана льоду водою під час її охолодження до $0\text{ }^{\circ}\text{C}$, витратиться на розтоплення деякої маси льоду m_x . Для визначення m_x складаємо рівняння

$$Q = L_f m_x,$$

де $L_f = 334,4 \text{ кДж/кг}\cdot\text{K}$ – прихована теплота плавлення льоду, звідки

$$m_x = 0,0075 \text{ кг}.$$

Відповідь. У калориметрі встановиться температура $0\text{ }^{\circ}\text{C}$. Після настання теплової рівноваги в калориметрі залишиться $m_w + m_x = 0,2075 \text{ кг}$ води і $m_w - m_x = 0,0925 \text{ кг}$ льоду.

Приклад 2. Що станеться, коли в перенасичену водяну пару, температура якої $t = 96\text{ }^{\circ}\text{C}$ і тиск $p = 0,98 \cdot 10^5 \text{ Па}$, попаде краплинка води радіуса r ? Розглянемо два випадки:

$$1) r = 0,5 \cdot 10^{-8} \text{ м}; \quad 2) r = 1,0 \cdot 10^{-8} \text{ м}.$$

Розв'язання. За таблицею залежності тиску насичуючої пари від температури знаходимо, що при $t = 96\text{ }^{\circ}\text{C}$ тиск насичуючої пари

$$p_n = 0,88 \cdot 10^5 \text{ Па}. \quad (1)$$

Оскільки тиск даної в умові задачі пари перевищує значення p_n , то вона дійсно є перенасиченою. Цей стан нестійкий. Коли така пара стикається зі своєю рідиною, то вона починає конденсуватися. Цей процес продов-

жується доти, поки маса пари не зменшиться настільки, що вона перестане бути перенасиченою.

Але конденсація пари на дуже маленьких краплинках утруднена в зв'язку з тим, що тиск насичуючої пари біля сферичної поверхні краплі більший, ніж біля плоскої поверхні рідини при тій же температурі. Отже, (1) дає занижене значення p_n біля краплі. Правильне значення p'_n біля краплі дістанемо, врахувавши величину тиску Δp , на яку збільшується тиск насичуючої пари над опуклою поверхнею рідини:

$$p'_n = p_n + \Delta p = p_n + \frac{2\sigma}{r} \cdot \frac{\rho_n}{\rho_p}, \quad (2)$$

де r – радіус краплини (кулі); ρ_n і ρ_p – густини насичуючої пари і рідини.

Залежно від величини r можуть бути два випадки:

1) $p'_n > p$, p – дійсний тиск пари. Це означає, що пара, перенасичена відносно рідини з плоскою поверхнею, є в той же час ненасиченою відносно краплинки. Отже, вона випаровується;

2) $p'_n < p$. Це означає, що пара перенасичена як відносно рідини з плоскою поверхнею так і відносно краплинки. Отже, вона буде конденсуватися доти, поки її тиск не зменшиться до значення p'_n .

Щоб за формулою (2) знайти величину p'_n , потрібно визначити густину пари ρ_n . Оскільки пара перебуває при атмосферному тиску, то її можна розглядати як ідеальний газ. Тоді з рівняння Менделєєва – Клапейрона

$$\rho_n = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}. \quad (3)$$

Підставивши (3) в (2), дістанемо

$$p'_n = p_n + \frac{2\sigma p \mu}{rRT\rho_p}. \quad (4)$$

Виразимо в одиницях СІ величини, які входять у формулу (4):

$$p_n = 0,88 \cdot 10^5 \text{ Па}; \sigma = 0,057 \text{ Н/м}; p = 0,98 \cdot 10^5 \text{ Па}; \mu = 0,018 \text{ кг/моль}; \\ R = 8,3 \text{ Дж/(моль}\cdot\text{К)}; T = 369 \text{ К}; \rho_p = 1,0 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

Виконавши обчислення, дістанемо:

1) $p'_n = 1,1 \cdot 10^5$ Па при $r = 0,5 \cdot 10^{-8}$ м. Порівнявши значення p'_n і p , бачимо, що $p'_n > p$. Отже, має місце перший із розглянутих вище випадків і крапля випаровується;

2) $p'_n = 0,96 \cdot 10^5$ Па при $r = 1,0 \cdot 10^{-8}$ м.

Тепер $p'_n < p$, що відповідає другому випадку: перенасичена пара конденсується до тих пір, поки не стане насичуючою.

Приклад 3. Із посудини, в якій міститься маса $m = 0,1$ кг води при температурі $t = 0$ °С швидко викачують повітря; при цьому за рахунок інтенсивного випаровування відбувається заморожування невипаруваної води. Яка маса води може бути перетворена таким способом у лід? Питома теплота пароутворення води при 0 °С $L_k = 2,49$ МДж/кг; питома теплота плавлення льоду $L_{nn} = 0,336$ МДж/кг. Посудину вважати теплоізолюваною.

Розв'язання. При замерзанні маси m_1 води виділиться кількість теплоти

$$Q_1 = m_1 L_{nn}.$$

При випаровуванні маси $m_2 = (m - m_1)$ води поглинається кількість теплоти

$$Q_2 = L_k m_2.$$

Оскільки $Q_1 = Q_2$, то

$$L_{nn} m_1 = L_k m - L_k m_1,$$

звідки

$$m_1 = \frac{L_k m}{L_k + L_{nn}} = 0,088 \text{ кг.}$$

Задачі для самостійних вправ

1. В 0,1 кг води при температурі 10 °С опущено 0,04 кг льоду, який має температуру -10 °С. При якому співвідношенні води і льоду наступить стан теплової рівноваги в цій системі, якщо вона теплоізолювана? Питома теплоємність льоду 2,5 кДж/кг.

Відповідь: Суміш 0,1095 кг води і 0,0305 кг льоду при 0 °С.

2. У чайник налили холодної води при температурі 10 °С і поставили на плиту. Через 10 хв вода закипіла. Через який час вона повністю випарує-

ться?

Відповідь: ≈ 1 год.

3. Свинцева куля, яка летить зі швидкістю 100 м/с, пробиває дошку і вилітає з неї зі швидкістю 60 м/с. Наскільки нагрівається куля, якщо вважати, що на збільшення її внутрішньої енергії йде 0,4 втраченої кінетичної енергії? Питома теплоємність свинцю 125 Дж/(кг·К).

Відповідь: 10,2 К.

4. На електроплитці потужністю 500 Вт, яка має ККД 40%, нагрілося до кипіння 0,8 кг води, взятої при температурі 15 °С, і 10% її перетворилося в пару. Як довго продовжувалось нагрівання?

Відповідь: 2340 с.

5. У посудину, що містить 3 кг води і 1 кг льоду при температурі 0 °С, випускають 0,5 кг пари при температурі 150 °С. Яка встановилася температура в посудині після того, як увесь лід розтопився? Питома теплоємність пари дорівнює 1,96 кДж/(кг·К), води – 4,19 кДж/(кг·К), посудини – 0,82 кДж/(кг·К); питома теплота пароутворення води дорівнює 2,26 МДж/кг; питома теплота плавлення льоду – 0,33 МДж/кг.

Відповідь: 67,3 К.

6. Визначити, яку кількість води при температурі 12 °С можна перетворити в пару при 100 °С за рахунок теплоти, одержаної при згорянні 1 кг нафти, якщо ККД кип'ятильника 80%. Питома теплота згоряння нафти дорівнює 46 МДж/кг; питома теплота пароутворення води – 2,26 МДж/кг.

Відповідь: ≈ 14 кг.

7. Яку кількість теплоти потрібно затратити, щоб 8 кг льоду при -30 °С довести до точки плавлення, розплавити і утворену воду нагріти до 60 °С?

Відповідь: 5,2 МДж.

8. Домашній холодильник за 20 хв охолоджує 1,5 кг води від 16 до 4 °С. Скільки льоду утвориться в холодильнику, якщо процес відбуватиметься у тому самому режимі ще одну годину?

Відповідь: 0,6 кг.

9. З якою швидкістю повинні летіти назустріч одна одній дві льодинки, щоб при ударі перетворитись у пару? Початкова температура льоду – 100 °С, маси льодинок однакові, передачу теплоти навколишньому сере-

довищу не враховувати.

Відповідь: 2,54 км/с.

10. Стальну деталь масою 1,5 кг, нагріту до 805 °С, занурили в 1,2 кг води при температурі 30 °С. При цьому вода нагрілася до температури кипіння і частина її випарувалася. Визначити масу води, що випарувалася.

Відповідь: 0,06 кг.

11. Скільки потрібно спалити нафти в плавильній печі з ККД 30%, щоб нагріти до температури плавлення і розплавити 10 т міді? Початкова температура міді 25 °С. Питома теплота згоряння нафти дорівнює 46 МДж/кг; питома теплоємність міді 380 Дж/(кг·К); питома теплота плавлення міді $1,8 \cdot 10^5$ Дж/кг.

Відповідь: 420 кг.

12. Температура плавлення заліза змінюється на 0,012 °С при зміні тиску на 1 ат. Знайти, на скільки змінюється при цьому об'єм одного кіломоля заліза при плавленні. Температура плавлення заліза 1530 °С; питома теплота плавлення – 0,272 МДж/кг.

Відповідь: На $1,03 \cdot 10^{-3}$ м³.

13. У закритій посудині міститься вода в рівновазі з насиченою парою при температурі 100 °С. Відношення мас пари і води дорівнює 0,1. Питома теплоємність води 4,2 кДж/(кг·К). Знайти питому теплоємність такої системи. Пару вважати ідеальним газом. Питома теплота пароутворення 2,26 МДж/кг.

Відповідь: $\approx 10^4$ Дж/(кг·К).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Галушак М.О. Курс фізики. Фізичні основи механіки. – К.: НМК ВО, 1991.
2. Галушак М.О., Антошук А.Г., Подвальних Г.С., Фреїк Д.М. Курс фізики. Основи молекулярної фізики і термодинаміки. – К.: ІСДОУ, 1993.
3. Савельєв І.В. Курс фізики. – М.: Вища шк., 1977. – Т.1. – Рос.
4. Детлаф А.А., Яворський Б.М., Мілковська Л.Б. Курс фізики. – М.: Вища шк., 1973. – Рос.
5. Геворкян Р.Г. Курс фізики. – М.: Вища шк., 1979. – Рос.
6. Зісман Г.А., Тодес О.М. Курс загальної фізики. – М.: Наука, 1974. – Т.1. – Рос.
7. Дущенко В.П., Кучерук І.М. Загальна фізика. – К.: Вища шк., 1987.
8. Богдан В.Й., Боднар В.О., Кульбіцький Д.І., Яковенко В.А. Практикум по методиці розв'язування фізичних задач. – М.: Вища шк., 1983. – Рос.
9. Дутчак Я.Й. Молекулярна фізика. – Л.: Вища шк., 1973.
10. Надворська Є.М., Дмитріїв Е.М. Методика проведення вправ з фізики у вузі. – М.: Вища шк., 1981. – Рос.
11. Гончаренко С.У. Конкурсні задачі з фізики. – К.: Вища шк., 1979.
12. Волькенштейн В.С. Збірник задач з загального курсу фізики. – М.: Наука, 1979. – Рос.
13. Чертов О.Г., Воробйов А.О. Задачник з фізики. – М.: Вища шк., 1981. – Рос.