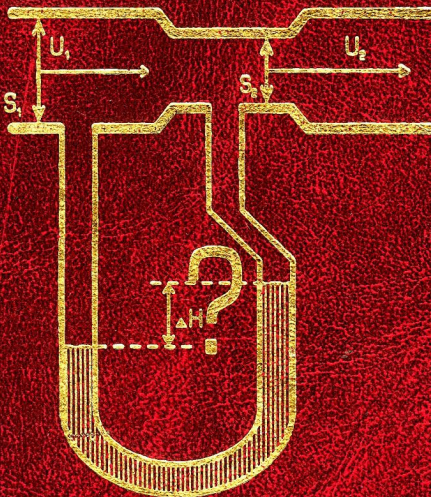


53
116

Галушак М. О.

Курс
загальної
фізики

ПРАКТИЧНІ
ЗАНЯТТЯ



1

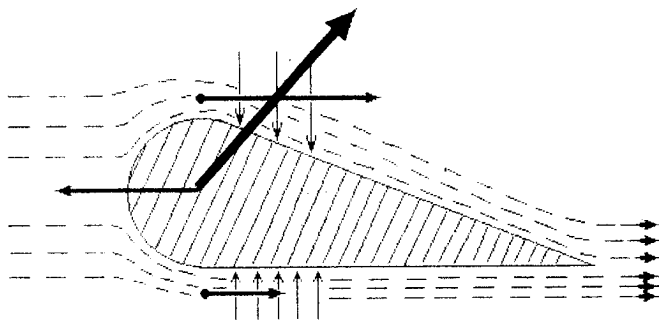
М. О. Галушан

Курс

загальної

фізики

Практичні заняття



1

596657

Курс загальної фізики. Практичні заняття: У трьох книгах.

Кн. 1. Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка.

Навч. посібник/ М. О. Галушак. — Івано-Франківськ: Місто НВ, 2003. — 156 с.

Посібник складений відповідно до діючої навчальної програми дисципліни «Фізика» для вищих технічних закладів освіти.

Матеріал курсу розділений по окремих заняттях. Для кожного практичного заняття подаються короткі теоретичні відомості, основні закони і формули, підібрано приклади розв'язування задач і рекомендовані задачі для розв'язання в аудиторії та вдома. У посібнику є методичні вказівки, в яких обговорюються особливості задач даної теми і даються загальні методи їх розв'язання, а також контрольні роботи та варіанти запитань до колоквиуму.

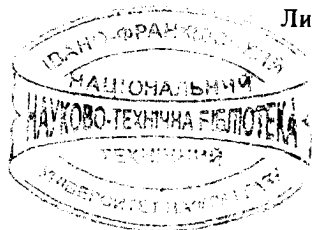
Для студентів технічних спеціальностей та викладачів фізики вищих закладів освіти.

Рецензенти: Б. К. Остафійчук, д-р фіз.-мат. наук, професор

М. А. Рувінський, д-р фіз.-мат. наук, професор

Гриф надано Міністерством освіти і науки України.

Лист № 14/18.2-2313 від 09.12.2002 року



Передмова

Посібник є складовою частиною пакету навчальних посібників з курсу загальної фізики для студентів технічних спеціальностей вузів України.

Пропонований посібник охоплює механіку, молекулярну фізику і термодинаміку, матеріал яких розподілений по окремих темах, що розглядаються на практичних заняттях у даному семестрі. На початку кожної теми подаються: основні закони і формули, які використовуються при розв'язуванні задач; методичні вказівки, в яких звертається увага на особливості задач даної теми; наведено приклади розв'язування задач; підібрано по декілька задач з таким розрахунком, щоб одну з них розв'язувати на практичному занятті, а інші використати для домашнього завдання. Зміст задач такий, що їх розв'язування сприяє студентам глибше освоїти теоретичний матеріал, виховує в них вміння самостійно опановувати знання, допомагає поєднувати теорію і практику. Крім того, у посібнику пропонуються варіанти трьох контрольних робіт і варіанти питань для колоквіуму, що дають змогу визначити ступінь засвоєння теоретичного матеріалу та вміння і навички практично застосовувати добуті знання.

Усі величини в задачах виражені в одиницях Міжнародної системи одиниць СІ.

Посібник розрахований на викладачів фізики для проведення практичних занять та організації самостійної роботи студентів вищих технічних закладів освіти, в яких фізика вивчається, в основному, протягом трьох семестрів.

При написанні книги автор використав багаторічний досвід проведення практичних занять викладачами кафедри фізики Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу та взяв частину задач з таких посібників: В. С. Волькенштейн, Сборник задач по общему курсу физики; Т. И. Трофимова, Сборник задач по курсу физики; А. Г. Чертов, А. О. Воробйов, Задачник по физике та ін. Ряд задач складено автором. За змістом посібник тісно пов'язано з матеріалом „Курсу загальної фізики” М. О. Галушца (І.-Ф.: Факел, 2000. – Т. I. – Укр.).

Автор висловлює щире вдячність рецензентам посібника докторам фіз.-мат. наук, професорам Б. К. Остафійчуку і М. А. Рувінському за цінні зауваження та А. Р. Корінцю за набір і комп'ютерну верстку.

Загальні методичні вказівки і вимоги до розв'язування задач

Розв'язування задач з фізики є однією з дійових форм навчання, що сприяє закріпленню теоретичного матеріалу і глибокому його розумінню, а також допомагає поєднати теорію з практикою.

Викладач повинен детально продумувати зміст та методи проведення практичних занять, а студент - ґрунтовно опрацьовувати відповідний лекційний матеріал, визначати незрозумілі питання для їх з'ясування під час занять та виконувати домашнє завдання. Заняття рекомендується починати із вияснення труднощів, які зустріли студенти під час виконання завдання, ставлячи запитання та аналізуючи і доповнюючи їхні відповіді. У залежності від складності задачі, яку студенти не змогли розв'язати, остання аналізується і розв'язується під час заняття. Далі потрібно ознайомити студентів із змістом заняття, зосередивши увагу на матеріалі, що є основою для розуміння питань, які вивчаються на даному занятті. Так як матеріал, винесений на дане заняття, студенти повинні були опрацювати вдома, то необхідно встановити, наскільки вони зрозуміли та засвоїли основні його положення. Ставлячи студентам контрольні запитання, викладач корегує і доповнює відповіді, таким чином домагаючись розуміння ними фізичних законів та явищ.

Підбираючи задачі до заняття, викладач повинен запланувати, які з них розв'язувати біля дошки з всією групою, які самостійно, а які для розв'язування вдома. Кількість задач для домашнього завдання визначається їх складністю. До складних задач викладач дає методичні вказівки.

Розв'язування задач за певними темами має свою специфіку, але є загальні правила, яких слід дотримуватися при розв'язуванні задач з будь-якого розділу курсу фізики. Ці правила такі:

1. Перш ніж приступити до розв'язування задач з будь-якої теми, треба добре засвоїти теоретичний матеріал. Без ґрунтового знання теорії не можна розраховувати на успішне розв'язування задачі.

2. Треба зрозуміти зміст і чітко уявити вимоги задачі.

3. Ознайомившись з умовою задачі, слід з'ясувати її фізичну суть: уявити фізичне явище, про яке йдеться в задачі; пригадати закони фізики, покладені в основу явища і поєднати їх з умовою задачі.

4. Записати скорочено умову задачі, позначивши символами відомі й невідомі фізичні величини. Якщо для розв'язування задачі потрібні фізичні сталі, то їх слід відшукати в таблицях і записати в скорочену умову.

5. Коли для розв'язування задачі потрібні деякі фізичні величини, яких немає в умові, але без яких розв'язати її неможливо, то їх слід ввести самим. Як правило такі величини при розрахунках скорочуються і в кінцевий результат не входять.

6. Звести всі дані задачі до Міжнародної системи одиниць (СІ), записавши праворуч від скороченої умови задачі.

7. Скласти план розв'язування задачі.

8. Зробити рисунок, якщо він допомагає краще уявити фізичний зміст задачі.

9. В залежності від характеру логічних операцій, які виконуються при розв'язуванні задач, вибрати метод розв'язування.

Задачі розв'язують синтетичним або аналітичним методом. Синтетичний метод полягає в тому, що розв'язування задачі починають з величин, відомих з умови задачі, а не з шуканої величини. Використовуючи відомі співвідношення між величинами, даними в умові задачі, знаходять функціональну залежність між ними та зупиняються на формулі, яка дає відповідь на запитання задачі, тобто дає шукану величину.

Аналітичний метод полягає в тому, що спочатку знаходять вираз, в який входить шукана величина та максимальна кількість відомих величин з умови задачі. Якщо в даній формулі є невідомі величини, то необхідно взяти додаткові формули, з яких їх можна визначити через відомі величини. Знайдені невідомі величини підставляють у вираз шуканої величини.

10. Розв'язування слід виконувати в загальному вигляді. Виконавши алгебраїчні перетворення, дістати робочу формулу. Підставити у формулу числові дані, виконати обчислення.

11. Числові дані фізичних величин слід підставляти разом з їх одиницями вимірювання і виконувати з ними такі самі математичні дії, як і з числами.

Коли маємо справу з громіздкими формулами, то зручніше виконувати дії над одиницями вимірювання окремо, а дії над числовими значеннями фізичних величин – окремо. Якщо найменування одиниць лівої та правої частин формули загального розв'язку не однакоє, то це свідчить про наявність помилки у розв'язку задачі.

12. Зробити аналіз одержаної величини з точки зору її реальності та відповідності умові задачі.

Розглянемо приклад, як потрібно розв'язувати задачі, як записувати їх умову та послідовність розв'язування.

Задача. Визначити внутрішню енергію гелію, що міститься в балоні об'ємом $2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3$, якщо його тиск становить $1 \cdot 10^5 \text{ Па}$. Гелій вважати ідеальним газом при даних умовах

Синтетичний метод розв'язування. В ідеальному газі молекули не взаємодіють одна з одною на відстані, тому його внутрішня енергія визначається тільки кінетичною енергією хаотичного руху його молекул ($U = E_k$).

Запис умови та розв'язку задачі у загальному вигляді можна зробити наступним чином:

Дано:

$$V = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3$$

$$p = 1 \cdot 10^5 \text{ Па} = 1 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2.$$

$$U = ?$$

Розв'язання:

Використаємо основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії, яке дає зв'язок між тиском газу і середньою кінетичною енергією молекул

$$p = \frac{2}{3} \cdot n \cdot \overline{\frac{mv^2}{2}}, \quad (1)$$

де n – концентрація молекул. Її можна знайти, коли загальне число молекул N , що перебувають в об'ємі V , поділити на об'єм V :

$$n = \frac{N}{V}. \quad (2)$$

Підставивши (2) в (1), дістанемо

$$p = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \cdot \frac{mv^2}{2},$$

звідки середня кінетична енергія всіх молекул

$$E_k = N \frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2} pV.$$

Отже, внутрішня енергія гелію

$$U = E_k = \frac{3}{2} pV.$$

Аналітичний метод розв'язування. Внутрішню енергію гелію (ідеального газу) можна розглядати як сумарну кінетичну енергію хаотичного руху всіх молекул:

$$U = N \frac{mv^2}{2}, \quad \frac{mv^2}{2}?$$

$$p = \frac{2}{3} n \cdot \frac{mv^2}{2}, \quad \frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2} \frac{p}{n}, \quad n?$$

$$n = \frac{N}{V}, \quad \frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2} \frac{pV}{N}, \quad U = N \frac{3}{2} \frac{pV}{N} = \frac{3}{2} pV.$$

Отже, ми одержали той самий результат, хоч хід міркувань був інший. Підставивши у формулу загального розв'язку числові значення величин з найменуваннями одиниць вимірювання, взятих у системі одиниць СІ, дістанемо

$$U = \frac{3 \cdot 1 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3}{2 \cdot \text{м}^3} = 30 \text{ Дж}.$$

Але обчислення можна провести і так виконуємо дії над одиницями вимірювання окремо, а дії над числовими значеннями фізичних величин - окремо.

$$[U] = \frac{\text{Н}}{\text{м}^3} \cdot \text{м}^3 = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж},$$

$$U = \frac{3 \cdot 1 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-4}}{2} = 30 \text{ Дж}.$$

Відповідь: Внутрішня енергія гелію становить 30 Дж.

I. Кінематика поступального та обертального руху

Основні закони і формули

Положення точки в просторі визначається радіус-вектором $\vec{r}$, тобто вектором, проведеним із початку координат в дану точку.

Переміщення $\Delta\vec{r}$ точки є вектор, проведений із її початкового положення в кінцеве і дорівнює приросту радіус-вектора даної точки.

Середня швидкість руху матеріальної точки

$$\vec{v}_s = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}, \quad (1)$$

де Δr – переміщення точки за проміжок часу Δt . Модуль середньої швидкості

$$v_s = \frac{\Delta S}{\Delta t}, \quad (2)$$

де ΔS – шлях, пройдений точкою за проміжок часу Δt .

Миттєва швидкість

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad (3)$$

або через проекції вектора швидкості на осі координат

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}. \quad (4)$$

Модуль миттєвої швидкості

$$v = \frac{dS}{dt} \quad (5)$$

або

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}, \quad (6)$$

оскільки

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Закон додавання швидкостей Галілея

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}^I, \quad (7)$$

де $\vec{v}$ – швидкість матеріальної точки відносно нерухомої системи координат; $\vec{v}_0$ – швидкість рухомої системи координат; $\vec{v}^1$ – швидкість матеріальної точки відносно рухомої системи координат.

Середнє прискорення матеріальної точки

$$\vec{a}_s = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}, \quad (8)$$

де $\Delta \vec{v}$ - приріст (зміна) швидкості за час Δt .

Миттєве прискорення

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}, \quad (9)$$

або через проекції вектора прискорення на осі координат

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad (10)$$

Модуль прискорення

$$a = \sqrt{\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right)^2}, \quad (11)$$

оскільки

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2}; \quad a_y = \frac{d^2 y}{dt^2}; \quad a_z = \frac{d^2 z}{dt^2}.$$

Повне прискорення при криволінійному русі

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau, \quad (12)$$

де $\vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \vec{n}$ – нормальна складова прискорення; $a_\tau = \frac{dv}{dt}$ – тангенціальна складова прискорення.

Модуль повного прискорення при криволінійному русі

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}, \quad (13)$$

де

$$a_n = \frac{v^2}{R} \quad \text{і} \quad a_\tau = \frac{dv}{dt}.$$

Формули руху з постійним прискоренням ($\vec{a} = const$)

$$\Delta \vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2}, \quad (15)$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} t. \quad (16)$$

Кутова швидкість і кутове прискорення при обертальному русі

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (17)$$

Кутова швидкість при рівномірному обертальному русі

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu, \quad (18)$$

де T - період обертання; ν - частота обертання ($\nu = \frac{N}{t}$, де N - число обертів, що здійснює тіло за час t).

Кут повороту і кутова швидкість при рівнозмінному обертальному русі ($\varepsilon = \text{const}$)

$$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}, \quad (19)$$

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t. \quad (20)$$

Зв'язок між кутовими і лінійними величинами:

$$S = R\varphi; \quad v = R\omega; \quad a_n = \omega^2 R; \quad a_\tau = \varepsilon R. \quad (21)$$

Методичні вказівки

Для розв'язування задач з кінематики треба знати закон (рівняння) руху точки, що визначає її положення в будь-який момент часу. У випадку рівномірного прямолінійного руху на основі (2) такий закон виражається формулою $S = ut$.

Якщо матеріальна точка перебуває в двох рухах, то її переміщення $\Delta \vec{r}$ дорівнює векторній сумі переміщень, здійснених в кожному русі:

$$\Delta \vec{r} = \Delta \vec{r}_1 + \Delta \vec{r}_2. \quad (22)$$

Розділивши обидві частини рівняння (22) на проміжок часу Δt і перейшовши до границі, згідно (3) отримаємо

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \quad (23)$$

тобто швидкість в складному русі дорівнює векторній сумі її швидкостей в окремих рухах.

Серед задач на змінний рух значну групу складають задачі на рух точки зі сталим прискоренням. Як в прямолінійному, так і в криволінійному рухах із постійним прискоренням швидкість $\vec{v}$ точки і її переміщення визначаються формулами (15), (16). Але основним методом розв'язування задач з кінематики є аналітичний (числовий) метод, при якому від векторної форми запису рівнянь переходять до скалярної. Для цього вибирають прямокутну систему координат з осями Ox , Oy , які лежать у площині, в якій рухається частинка. Проектуючи всі вектори, які входять у рівняння (15), (16) на осі координат, і враховуючи, що проекція суми векторів дорівнює сумі їх проекцій, одержимо чотири скалярні рівняння відповідно для осей Ox і Oy .

$$v_x = v_{ox} + a_x t, \quad (24)$$

$$\Delta x = v_{ox} t + \frac{a_x t^2}{2};$$

$$v_y = v_{oy} + a_y t, \quad (25)$$

$$\Delta y = v_{oy} t + \frac{a_y t^2}{2}.$$

Тут $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$ - проекції вектора переміщення $\vec{\Delta r}$ на осі Ox , Oy ; v_x , v_y , v_{ox} , v_{oy} , a_x , a_y - проекції векторів $\vec{v}$, $\vec{v}_0$ і $\vec{a}$ на ті ж осі. Тепер розв'язування задачі зводиться до розв'язування системи рівнянь. Наприклад, якщо невідомі вектори $\vec{v}$ і Δr , то, знайшовши із рівнянь їх проекції, легко обчислити модулі. Вибір осей визначається умовою конкретної задачі. Стараються, щоб частина проекцій виявилась рівною нулю і тоді рівняння (24), (25) спрощуються. Для цього початок координат прив'язують до положення матеріальної точки в початковий момент часу і тоді $x_0 = 0, y_0 = 0$, а одну із осей, наприклад Oy , направляють вздовж вектора $\vec{a}$. При цьому $a_x = 0, a_y = a$. Коли ж вектори $\vec{v}_0$, $\vec{a}$ лежать на одній прямій (осі Oy), то $v_{ox} = 0, v_{oy} = v_0, v_y = v$ і замість (24), (25) одержимо два рівняння рівнозміного руху:

$$v = v_0 + at, \quad (26),$$

$$y = v_0 t + \frac{at^2}{2}, \quad (27)$$

Хоча величини v , v_0 , a , y , які входять в (26), (27), називають швидкістю, прискоренням, переміщенням, вони насправді є проекціями відповідних векторів на вісь Оу, тобто величинами алгебраїчними. Ці проекції рівні за модулем самим векторам.

Знаки проекцій, що входять в рівняння (24), (25) визначаються правилом: якщо вектор утворює з напрямом осі гострий кут, його проекція додатна, якщо цей кут тупий - проекція від'ємна. Якщо напрям шуканого вектора невідомий, то поступають так. Вибирають довільно деякий напрям цього вектора і записують в рівняннях його проекції із знаками, які відповідають вибраному напрямку. Якщо у відповіді отримують додатний знак, то складова вектора вздовж відповідної осі напрямлена так, як було допущено, а від'ємний знак говорить про протилежне.

Задачі з кінематики обертового руху можна умовно розділити на три групи: задачі про рух точки по колу; задачі про обертання твердого тіла навколо нерухомої осі; задачі про рух тіл, кинутих під кутом до горизонту.

Розв'язування задач про рух точки по колу майже не відрізняються від розв'язування задач з кінематики прямолінійного руху. При цьому слід врахувати зв'язок між кутовими і лінійними величинами (21).

Задачі на обертовий рух твердого тіла розв'язують шляхом складання кінематичних рівнянь на основі використання формул кутового переміщення (19) і кутової швидкості (20). При цьому необхідно пам'ятати, що кутова швидкість і кутове прискорення є векторними величинами. При рівноприскореному обертанні твердого тіла напрям вектора кутового прискорення співпадає з напрямом вектора кутової швидкості, тому у формулах (19), (20) прискорення ε беруть із знаком плюс. При рівносповільненому обертанні ε беруть із знаком мінус, оскільки вектор кутового прискорення протилежний напрямку вектора кутової швидкості.

При розв'язуванні задач на рух тіл, кинутих під кутом до горизонту, потрібно мати на увазі, що цей рух можна розглядати як результат накладання двох одночасних прямолінійних рухів: по горизонталі (по осі Ox) і по вертикалі (по осі Oy). Тому розв'язування задач цієї групи зручно починати із розкладання векторів швидкості і прискорення по осях Ox і Oy , а після складати кінематичні рівняння для кожного із вказаних напрямів. В більшості задач нехтують опором повітря і тому траєкторією руху тіла є парабола. При цьому час тіла по горизонталі (Ox) дорівнює часу руху по вертикалі (Oy).

Рух тіл, кинутих горизонтально, можна розглядати як окремий випадок руху тіл, кинутих під кутом $\alpha = 0$.

Приклади розв'язування задач

1. Першу половину часу тіло рухається із швидкістю $v = 20$ м/с під кутом $\alpha = 60^\circ$ до заданого напрямку, а другу половину часу - під кутом $\alpha = 120^\circ$ до того ж напрямку із швидкістю $v = 40$ м/с. Знайти середню швидкість руху v_c (рис. 1).

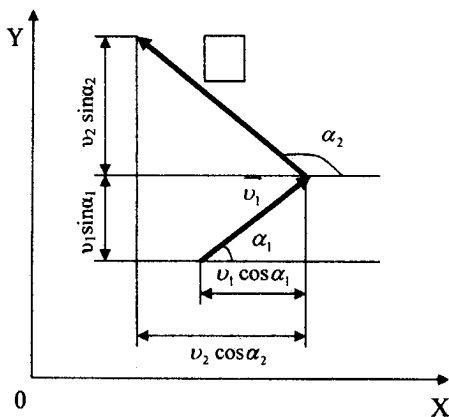


Рис. 1

Розв'язання. Так як тіло здійснило два переміщення Δr_1 і Δr_2 , то повне переміщення $\Delta \vec{r} = \Delta \vec{r}_1 + \Delta \vec{r}_2$. Звідси

$$\vec{v}_x = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}_1 + \Delta \vec{r}_2}{2 \Delta t} = \frac{1}{2}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2).$$

Проектуємо це векторне рівняння на координатні осі Ox та Oy і отримаємо такі скалярні рівняння:

$$v_{cx} = \frac{1}{2}(v_1 \cos \alpha_1 + v_2 \cos \alpha_2) = -5 \frac{M}{c};$$

$$v_{cy} = \frac{1}{2}(v_1 \sin \alpha_1 + v_2 \sin \alpha_2) = 15\sqrt{3} \frac{M}{c};$$

$$v_c = \sqrt{v_{cx}^2 + v_{cy}^2} = 26,46 \frac{M}{c}.$$

2. Із точки з координатами x_0 , y_0 кинути тіло під кутом α_0 до горизонту з початковою швидкістю v_0 (рис. 2). Знайти: положення і швидкість тіла через час t ; рівняння траєкторії руху тіла; нормальне і тангенціальне прискорення тіла та радіус кривизни траєкторії в момент часу t ; повний час польоту; найбільшу висоту підйому; кут, під яким треба кинути тіло, щоб висота його підйому була рівна дальності польоту (при умові, що $x_0 = y_0 = 0$); швидкість тіла в момент приземлення.

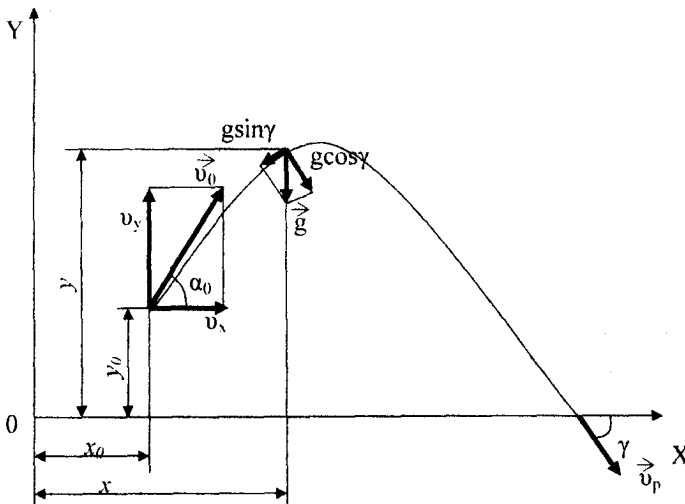


Рис. 2

Розв'язання. Запишемо векторні рівняння руху тіла:

$$\Delta \vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g} t^2}{2};$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t.$$

Проектуючи перше рівняння на осі координат, одержимо два рівняння проєкцій, які визначають положення тіла в момент часу t :

$$x - x_0 = v_0 t \cos \alpha_0;$$

$$y - y_0 = v_0 t \sin \alpha_0 - \frac{gt^2}{2}$$

Проектуючи друге рівняння на осі координат, знаходимо складові швидкості:

$$v_x = v_0 \cos \alpha_0; v_y = v_0 \sin \alpha_0 - gt,$$

а також результуючу швидкість

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{2v_0^2 - 2v_0 gt \sin \alpha_0 + g^2 t^2}.$$

Тангенс кута між напрямом результуючої швидкості і віссю Ox дорівнює

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{v_y}{v_x} = \operatorname{tg} \alpha_0 - \frac{gt}{v_0 \cos \alpha_0},$$

тобто він змінюється з часом. Це і зрозуміло, так як швидкість геометрично характеризується нахилом дотичної до траєкторії польоту. Виключивши час t із рівнянь, що визначають положення тіла в момент t , одержимо рівняння траєкторії польоту

$$y = y_0 + (x - x_0) \operatorname{tg} \alpha_0 - \frac{g(x - x_0)^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_0};$$

Щоб визначити нормальне і тангенціальне прискорення тіла в точці з координатами x, y , зауважимо, що повне прискорення тіла весь час напрямлено вниз і являє собою прискорення сили тяжіння. Тангенціальне прискорення дорівнює проєкції вектора $\vec{g}$ на дотичну до траєкторії, тобто $-g \sin \gamma$ (рис. 2), а нормальне прискорення дорівнює проєкції $-g \cos \gamma$ на нормаль.

Оскільки

$$\sin \gamma = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma}}; \quad \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma}},$$

то

$$a_n = -\frac{g v_x}{v}; a_z = -\frac{g v_z}{v}.$$

Знайдемо приблизне значення радіуса кривизни R траєкторії в момент часу t .

Приймаючи, що тіло рухається по дузі, скористаємося формулою

$$a_n = \frac{v^2}{R},$$

звідки

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v^3}{g v_x}.$$

Максимальну дальність польоту $x_{\max}$ знайдемо із рівняння траєкторії польоту при умові, що $y=0$:

$$\frac{g(x_{\max} - x_0)^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_0} - tg \alpha_0 (x_{\max} - x_0) - y_0 = 0.$$

Якщо тіло кинути із точки на поверхні, де і $y_0 = 0$, то задача суттєво спрощується:

$$x_{\max} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{g} + x_0.$$

Повний час польоту можна визначити із формули

$$y - y_0 = v_0 t \sin \alpha_0 - \frac{gt^2}{2} \text{ при } y = 0,$$

звідки

$$t_{\max} = \frac{v_0 \sin \alpha_0}{g} + \frac{\sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha_0 + 2gy_0}}{g}.$$

Найбільша висота підйому тіла досягається в момент часу t , коли $v_y = 0$.

Так як складова швидкості вздовж осі Оу дорівнює $v_y = v_0 \sin \alpha_0 - gt$, то при $v_y = 0$

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha_0}{g}.$$

Тепер використаємо рівняння проекції положення тіла на вісь Оу при умові,

що $y = y_{\max}$:

$$y_{\max} - y_0 = v_0 t \sin \alpha_0 - \frac{gt^2}{2}.$$

Виключивши t із обох рівнянь, дістанемо

$$y_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{2g} + y_0.$$

Очевидно, що найбільша висота підйому буде при $\alpha = 90^\circ$, тобто коли тіло кинуте вертикально вгору.

Прирівнявши $x_{\max}$ і $y_{\max}$ (при умові, що $x_0 = 0$, $y_0 = 0$), отримаємо

$$\frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{2g},$$

звідки $\operatorname{tg} \alpha_0 = 4$; $\alpha_0 \approx 76^\circ$.

Знайдемо швидкість тіла в момент приземлення v_p (при умові $x_0 = 0$; $y_0 = 0$). Для цього підставимо значення $t = t_{\max} = \frac{2v_0 \sin \alpha_0}{g}$ у вирази для швидкостей v_x , v_y і v , а також у формулу для тангенса кута між віссю Ox і швидкістю $\bar{v}$. При цьому отримаємо

$$v_x = v_0 \cos \alpha_0; v_y = -v_0 \sin \alpha_0; v_p = v_0; \operatorname{tg} \gamma = -\operatorname{tg} \alpha_0.$$

3. Автомобіль рухається по шосе, яке має радіус кривизни $R = 50$ м. Закон руху автомобіля описується рівнянням $S = 10 + 10t - 0.5t^2$ (шлях вимірюється в метрах, час - у секундах). Знайти швидкість автомобіля v , його нормальне прискорення a_n , тангенціальне a_t і повне прискорення в момент часу $t = 5$ с.

Розв'язання. Взявши похідну від шляху за часом, отримаємо вираз для швидкості:

$$v = \frac{dS}{dt} = 10 - t.$$

Значення швидкості в даний момент часу знайдемо, якщо у формулу швидкості підставимо значення часу t :

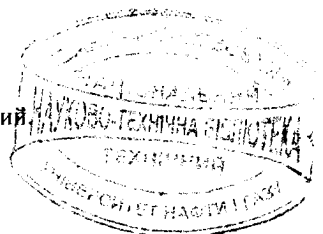
$$v = 10 - 5 = 5 \text{ м/с}.$$

Тангенціальне прискорення знайдемо, взявши похідну від швидкості за часом:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = -1 \text{ м/с}^2.$$

Знак "-" вказує на те, що рух автомобіля рівносповільнений.

Нормальне прискорення



$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{5^2}{50} = 0.5 \text{ м/с}^2.$$

Повне прискорення знаходимо як геометричну суму нормального і тангенціального прискорень (рис. 3):

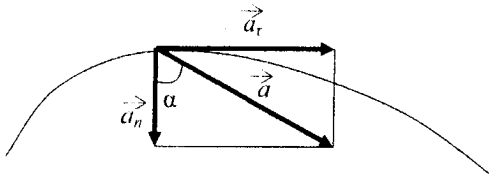


Рис. 3

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{1 + 0.25} = 1.12 \text{ м/с}^2.$$

Напрямок повного прискорення визначимо, якщо знайдемо кут між повним прискоренням і напрямом нормального прискорення:

$$\cos \alpha = \frac{a_n}{a} = \frac{0.5}{1.12} = 0.446, \quad \alpha = 63^\circ 30'.$$

4. Частота обертання шпінделя токарного верстака досягає робочого значення $\nu = 250 \text{ с}^{-1}$ через $t = 30 \text{ с}$ після пуску. Діаметр шпінделя $d = 0.04 \text{ м}$. Знайти швидкість, нормальне і тангенціальне прискорення точки на поверхні шпінделя і число обертів шпінделя після досягнення робочої швидкості.

Розв'язання. За формулами $\omega = \varepsilon$ і $\omega = 2\pi\nu$ знаходимо кутове прискорення

$$\varepsilon = \frac{2\pi\nu}{t} = \frac{50}{3} \pi \text{ рад/с}^2.$$

Число обертів шпінделя за час t

$$n = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2 \cdot 2\pi} = \frac{50\pi \cdot 900}{2 \cdot 3 \cdot 2\pi} = 3750 \text{ об.}$$

Швидкість точки на поверхні шпінделя

$$v = \omega R = \omega \frac{d}{2} = 2\pi\nu \frac{d}{2} = \pi 250 \cdot 0.04 = 10\pi \text{ м/с.}$$

Нормальне прискорення

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = \omega^2 \frac{d}{2} = 4\pi^2 \nu^2 \frac{d}{2} = 2\pi^2 (250)^2 \cdot 0.04 = 5000\pi^2 \text{ рад/с}^2.$$

Тангенціальне прискорення

$$a_t = \varepsilon \cdot R = \varepsilon \frac{d}{2} = \frac{50\pi \cdot 0.04}{3 \cdot 2} = \frac{\pi}{3} \text{ м/с}^2.$$

Задачі до теми 1

5. Поїзд метро проходить шлях між двома станціями $S = 2\text{ км}$ за $t = 2\text{ хв}20\text{ с}$. Максимальна швидкість поїзда $v = 60\text{ км/год}$. На початку і в кінці шляху поїзд рухався з постійними прискореннями; однаковими за модулем. Знайти ці прискорення.

Відповідь: $0,83 \text{ м/с}^2$; $-0,83 \text{ м/с}^2$.

6. Знайти швидкість та прискорення тіла наприкінці третьої секунди після початку руху, якщо залежність шляху, пройденого тілом, від часу описується рівнянням $S = (10 + 2t + 0.5t^2) \text{ м}$.

Відповідь: 5 м/с ; 1 м/с^2 .

7. Рух тіла задано рівняннями: $x = (8t^2 + 4) \text{ м}$; $y = (6t^2 - 3) \text{ м}$; $z = 0$. Визначити абсолютні значення швидкості і прискорення тіла в момент часу $t = 8 \text{ с}$.

Відповідь: 160 м/с ; 20 м/с^2 .

8. Радіус-вектор матеріальної точки задається рівнянням $r = 3t^2 \vec{i} + 4t^2 \vec{j} + 7\vec{k}$. Вияснити характер руху. Знайти шлях S , пройдений точкою за перші 10 с руху і модуль переміщення за той же час.

Відповідь: рух рівноприскорений; 500 м ; 500 м .

9. Залежність пройденого тілом шляху S від часу t задана рівнянням $S = (0.14t^2 + 0.01t^3) \text{ м}$. Через який час після початку руху прискорення тіла дорівнює 1 м/с^2 ? Чому дорівнює середнє прискорення тіла за цей же час?

Відповідь: 12 с ; $0,64 \text{ м/с}^2$.

10. Тіло кинули з вежі у горизонтальному напрямі з швидкістю 30 м/с . Визначити швидкість, тангенціальне і нормальне прискорення тіла в кінці другої секунди після початку руху.

Відповідь: $35,8 \text{ м/с}$; $5,38 \text{ м/с}^2$; $8,22 \text{ м/с}^2$.

11. З висоти 2 м над поверхнею Землі в горизонтальному напрямі кинули тіло з деякою початковою швидкістю v_0 . Через деякий час тіло упало на Землю на відстані 7 м від місця кидання. Обчислити початкову швидкість тіла та його швидкість у момент приземлення.

Відповідь: 11 м/с; 12,6 м/с.

12. З яким проміжком часу відірвалися від даху будинку дві краплі води, якщо через 2 с після початку падіння другої краплі відстань між ними була 25 м?

Відповідь: ≈ 1 с.

13. Тіло кинули з швидкістю 15 м/с під кутом 30° до горизонту. Нехтуючи опором повітря, визначити: висоту підйому тіла; дальність польоту тіла; час його руху.

Відповідь: 2,87 м; 19,9 м; 1,53 с.

14. З вежі висотою 40 м кинули тіло з швидкістю 20 м/с під кутом 45° до горизонту. Нехтуючи опором повітря, знайти: час руху тіла; на якій відстані від основи вежі тіло впаде на Землю; швидкість тіла в момент приземлення; кут, який утворює траєкторія тіла з горизонтом в точці його падіння.

Відповідь: 4,64 с; 65,7 м; 34,4 м/с; $65,7^\circ$.

15. Тіло кинули з швидкістю 20 м/с під кутом 30° до горизонту. Нехтуючи опором повітря, визначити для моменту часу 1,5 с після початку руху: нормальне прискорення; тангенціальне прискорення.

Відповідь: $9,47 \text{ м/с}^2$; 258 м/с^2 .

16. Рівняння руху двох матеріальних точок мають вид $x_1 = (t + 4t^2 - 3t^3)$ м і $x_2 = (t - 2t^2 + t^3)$ м. Визначити момент часу, для якого прискорення цих точок будуть рівні.

Відповідь: 0,5 с.

17. Колесо обертається із сталим кутовим прискоренням 2 с^{-2} . Через 0,5 с після початку руху повне прискорення колеса $0,136 \text{ м/с}^2$. Чому дорівнює радіус колеса?

Відповідь: 0,061 м.

18. Диск радіуса $0,1\text{ м}$ почав обертатися із сталим кутовим прискоренням $0,5\text{ с}^{-2}$. Знайти нормальне, тангенціальне і повне прискорення точок на ободі диска в кінці другої секунди після початку руху.

Відповідь: $0,1\text{ м/с}^2$; $0,05\text{ м/с}^2$; $0,11\text{ м/с}^2$.

19. Обертання колеса описується рівнянням $\varphi = (6t - 2t^3)$ рад. Визначити: середнє значення кутової швидкості і кутового прискорення за проміжок часу від початку руху до зупинки; кутове прискорення в момент зупинки.

Відповідь: 3 с^{-1} ; -6 с^{-2} ; -12 с^{-2} .

20. Вентилятор обертається зі швидкістю 900 обертів за хвилину. Після вимикання вентилятор зробив до зупинки 75 обертів. Скільки часу пройшло з моменту вимикання вентилятора до його зупинки?

Відповідь: 10с.

21. Вал робить 180 обертів за хвилину. З певного моменту вал починає гальмувати, через що він обертається рівносповільнено з кутовим прискоренням 3 с^{-2} . Через який час вал зупиниться? Скільки обертів зробить вал до зупинки?

Відповідь: 6,3с; 9,4.

22. Автомобіль, що рухався зі швидкістю 14 м/с був зупинений гальмуванням. За час гальмування до зупинки він пройшов шлях 35 м . Визначити кутове прискорення коліс під час гальмування, кутовий шлях коліс за час гальмування та час гальмування, якщо діаметр колеса автомобіля дорівнює $0,7\text{ м}$.

Відповідь: 8 с^{-2} ; 100 рад; 5с.

23. Місяць обертається навколо Землі з періодом 27 діб. Середній радіус орбіти Місяця $4 \cdot 10^5\text{ км}$. Знайти лінійну швидкість руху Місяця навколо Землі та його нормальне прискорення.

Відповідь: $\approx 1,08 \cdot 10^3\text{ м/с}$; $2,9 \cdot 10^{-3}\text{ м/с}^2$.

24. Нормальне прискорення точки, яка рухається по колу радіуса 4 м , описується рівнянням $a_n = (1 + 6t + 9t^2)\text{ м/с}^2$. Визначити: шлях, пройдений точкою за 5с після початку руху, тангенціальне прискорення точки.

Відповідь: 85 м; 6 м/с^2 .

25. Матеріальна точка починає рух по колу радіуса $0,125\text{ м}$ з сталим тангенціальним прискоренням $0,005\text{ м/с}^2$. Визначити: момент часу, при якому

вектор прискорення $\vec{a}$ утворює з вектором швидкості $\vec{v}$ кут 45° ; шлях, пройдений точкою за цей час.

Відповідь: 5с; 0,0625 м.

26. Канатний шків станка-качалки нафти радіуса 0,2 м обертається згідно з рівнянням $\varphi = (-t + 0,1t^2)$ рад. Знайти тангенціальне, нормальне і повне прискорення точок на ободі шківа для моменту часу $t = 10$ с.

Відповідь: 0,04 м/с²; 0,2м/с²; 0,204 м/с².

27. Колесо обертається з постійним кутовим прискоренням 2с⁻². Через 0,5с після початку руху повне прискорення колеса 0,136м/с². Чому дорівнює радіус колеса?

Відповідь: 0,061 м.

28. Вал радіуса 0,1 м обертається навколо нерухомої осі так, що залежність кута повороту радіуса від часу описується рівнянням $\varphi = a + bt + ct^2 + dt^3$ ($b = 1$ с⁻¹, $c = 1$ с⁻², $d = 1$ с⁻³). Визначити для точок на ободі диска в кінці другої секунди після початку руху: тангенціальне прискорення; нормальне прискорення; повне прискорення.

Відповідь: 1,4м/с²; 28,9м/с²; 28,9м/с².

2. Динаміка поступального руху

Основні закони і формули

Основний закон динаміки - другий закон Ньютона для матеріальної точки сталої маси або для твердого тіла, що рухається поступально

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \quad (1)$$

де $\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$ - головний вектор всіх сил, що діють на точку або тіло (рівнодійна сила).

Рівняння (1) в скалярній формі (рівняння руху матеріальної точки):

$$F_x = ma_x = m \frac{dv_x}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2};$$

$$F_x = ma_x = m \frac{dv_x}{dt} = m \frac{d^2 x}{dt^2}; \quad (2)$$

$$F_z = ma_z = m \frac{dv_z}{dt} = m \frac{d^2 z}{dt^2}.$$

Враховуючи, що маса матеріальної точки в класичній механіці є величина стала, вираз другого закону Ньютона (1) можна записати в такому вигляді:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad (3)$$

де векторна величина $\vec{p} = m\vec{v}$ називається імпульсом (кількістю руху) матеріальної точки.

Третій закон Ньютона

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad (4)$$

Закон всесвітнього тяжіння для двох матеріальних точок

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (5)$$

де m_1 і m_2 - маси матеріальних точок; r - відстань між ними; G - гравітаційна стала ($G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$).

Третій закон Кеплера

$$\frac{b_1^3}{b_2^3} = \frac{T_1^2}{T_2^2}, \quad (6)$$

де b_1 і b_2 - великі півосі еліптичних орбіт планет навколо Сонця; T_1 і T_2 - періоди обертання цих планет.

Сила тертя ковзання

$$F_{tp} = kN, \quad (7)$$

де k - коефіцієнт тертя ковзання; N - сила нормального тиску.

Сила тертя кочення

$$F_{tp} = \mu \frac{N}{r}, \quad (8)$$

де μ - коефіцієнт тертя кочення; r - радіус тіла.

При розв'язуванні задач на динаміку перш за все вивчають, які сили діють на рухоме тіло і зображають їх на рисунку. Після цього вибирають систему координат. Координатні осі направляють так, щоб проекції сил на них виражалися найпростішим чином. Вісь Ox часто направляють вздовж вектора швидкості, Oy - перпендикулярно до вектора швидкості. Додатній напрям осей зручно вказувати так, щоб він співпадав з напрямом прискорення тіла

Після вибору системи координат для кожного тіла окремо на основі другого закону Ньютона складають рівняння руху, які зв'язують проекції сил і прискорень.

Другий закон Ньютона дає можливість знайти тільки прискорення тіл. Швидкість і координати тіл визначають на основі використання інших даних умови задачі.

Зауважимо, що в більшості випадків розмірами тіл нехтують, тобто тіла вважають матеріальними точками. Також часто розглядають рух тіл відносно поверхні Землі, тобто систему відліку, зв'язану із Землею, вважають інерціальною.

Для тіл, розмішених поблизу поверхні Землі, слід враховувати тільки силу тяжіння і сили, які виникають в місцях безпосереднього дотику тіл. Якщо в задачі розглядають рух системи зв'язаних між собою тіл, то рівняння руху записують окремо для кожного тіла. Якщо тіла зв'язані ниткою, масою якої можна знехтувати, силу натягу нитки вважають однаковою по всій довжині нитки. При наявності блока рівність сил натягу ($T_1 = T_2$) виконується тільки в тому випадку, коли можна знехтувати масами нитки і блока, а також силами тертя, що виникають при обертанні блока.

У всіх реальних випадках при безпосередній взаємодії тіл виникають сили тертя, які потрібно враховувати при складанні рівнянь руху (сила тертя ковзання завжди напрямлена в сторону, протилежну напрямку відносної швидкості тіла).

29. Маса ліфта з пасажирами дорівнює 800 кг. Визначити, з яким прискоренням і в якому напрямку рухається ліфт, коли відомо, що натяг троса, підтримуючого ліфт, дорівнює: 1) 12000 Н, 2) 6000 Н.

Розв'язання. На ліфт з пасажирами діє сила тяжіння $\vec{F}_T$ і сила натягу троса $\vec{T}$. Вісь Оу напрямлена вертикально вгору. Тоді рівняння руху в проекціях на дану вісь запишеться так:

$$T_y + F_{Ty} = ma_y.$$

Але $T_y = T$; $F_{Ty} = -mg$; $a_y = a$. Тепер $T - mg = ma$, звідки

$$a = \frac{T - mg}{m}.$$

Підставивши числові значення, одержимо: 1) $a = 5,2 \text{ м/с}^2$, ліфт піднімається; 2) $a = -2,3 \text{ м/с}^2$, ліфт опускається.

30. Через блок перекинута нитка, до кінців якої підвішені вантажі $m_1 = 2 \text{ кг}$ і $m_2 = 2,1 \text{ кг}$. Початкові швидкості вантажів рівні нулю. Яке переміщення вантажів за час $t = 2 \text{ с}$? Яка сила натягу нитки? Масою нитки і тертям в блоці знехтувати.

Розв'язання. Спрямуємо координатну вісь Оу вертикально вгору, як показано на рис. 4.

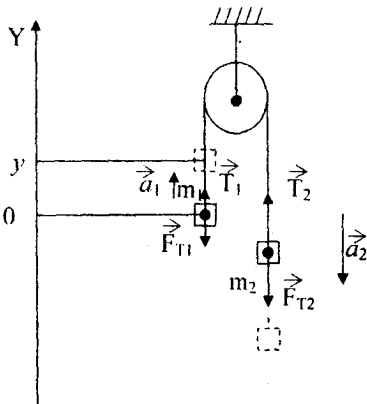


Рис. 4

Рівняння для координати першого вантажу запишеться так:

$$y = v_0 t + \frac{at^2}{2}, \text{ але } v_0 = 0, \text{ тоді } y = \frac{at^2}{2}.$$

В момент часу t $y = S$. Отже, величина переміщення $S = \frac{at^2}{2}$.

Прискорення руху a знайдемо, склавши рівняння руху вантажів у проекціях на вісь Oy (при цьому врахуємо, що $T_1 = T_2 = T$, $a_1 = a_2 = a$):

$$T - m_1 g = m_1 a; \quad T - m_2 g = -m_2 a.$$

З цих двох рівнянь знайдемо прискорення

$$a = \frac{g(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}.$$

Величина переміщення

$$S = \frac{g(m_2 - m_1)^2}{2(m_1 + m_2)} \approx 0,48 \text{ м.}$$

Силу натягу нитки визначимо із рівняння руху першого вантажу

$$T = m_1(g + a) = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} \approx 20,1 \text{ Н.}$$

31. На похилій площині, що утворює з горизонтом кут $\alpha = 30^\circ$, знаходиться тіло масою $m_1 = 2 \text{ кг}$ (рис. 5). Тіло рухається вгору по похилій площині під дією зв'язаного з ним невагомою і нерозтяжною ниткою, перекинutoю через блок, вантажу масою $m_2 = 20 \text{ кг}$. Початкові швидкості тіла і вантажу рівні нулю, коефіцієнт тертя тіла $k = 0,1$. Визначити прискорення, з яким рухається тіло і силу натягу нитки. Блок вважати невагомим та таким, що обертається без тертя.

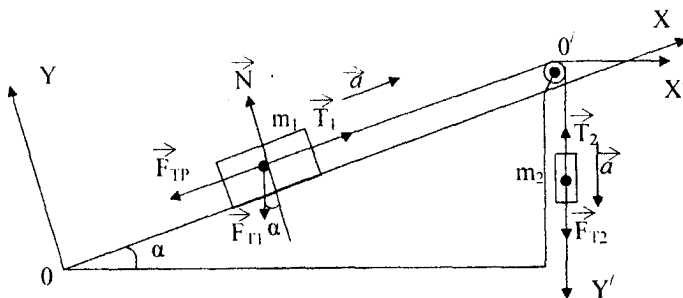


Рис. 5

Розв'язання. На тіло, яке рухається по похилій площині, діє сила тяжіння $\vec{F}_{I1} = m_1 \vec{g}$, сила натягу нитки $\vec{T}_1$, сила тертя $\vec{F}_{I\pi}$ і сила реакції площини $\vec{N}$. На вантаж m_2 діє сила тяжіння $\vec{F}_{I2} = m_2 \vec{g}$ і сила натягу нитки $\vec{T}_2$. Із умови невагомості і нерозтяжності нитки випливає, що $a_1 = a_2 = a$ і $T_1 = T_2 = T$. Виберемо для тіла m_1 систему відліку xOy так, як показано на рисунку. Тоді рівняння руху тіла в проєкціях на осі Ox і Oy запишеться так:

$$T_{1x} + N_x + F_{I1x} + F_{I\pi x} = m_1 a_x;$$

$$N_y + F_{I1y} = m_1 a_y.$$

Враховуючи, що $T_{1x} = T$, $N_x = 0$, $F_{I1x} = -m_1 g \sin \alpha$, $a_x = 0$, $F_{I\pi x} = -F_{I\pi} = -kN$, $a_y = a$, $N_y = N$, $F_{I1y} = -m_1 g \cos \alpha$, отримаємо:

$$T - m_1 g \sin \alpha - kN = m_1 a;$$

$$N - m_1 g \cos \alpha = 0.$$

Для вантажу виберемо систему відліку $x^1 O^1 y^1$. Рівняння руху вантажу m_2 буде мати вигляд

$$m_2 g - T = m_2 a.$$

Розв'язавши систему рівнянь відносно a , отримаємо

$$a = \frac{g[m_2 - m_1(\sin \alpha + k \cos \alpha)]}{m_1 + m_2} \approx 8,4 \text{ м/с}^2.$$

Знаючи a , знайдемо силу натягу:

$$T = \frac{m_1 m_2 g(1 + \sin \alpha + k \cos \alpha)}{m_1 + m_2} \approx 28,2 \text{ Н}.$$

32. Штучний супутник Землі, рухаючись по коловій орбіті на висоті h від поверхні Землі, в результаті короткочасної дії гальмівної установки зменшив свою швидкість і почав знижуватись. Рухаючись ввесь час під дією сили тяжіння, супутник досягає Землі, причому його швидкість в цей момент спрямована по дотичній до земної поверхні. Знайти час спускання супутника (рис. 6).

Розв'язання. Рух супутника в полі тяжіння Землі, як і рух в будь-якому центральному полі, описується законами Кеплера. З другого закону Кеплера випливає, що супутник рухався по еліпсу, в одному з фокусів якого знаходиться центр Землі. Використавши третій закон Кеплера, знайдемо час спускання

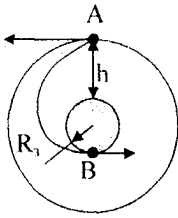


Рис. 6

супутника. Для цього співставимо рух двох тіл в полі тяжіння Землі: супутника і Місяця. Для Місяця період обертання T_M і радіус орбіти R_M , - табличні величини.

За третім законом Кеплера маємо

$$\frac{h^3}{R_M^3} = \frac{T_s^3}{T_M^3},$$

де h — велика піввісь орбіти супутника; T_s - період його обертання по еліпсу. Як видно з рисунка

$$h = R_s + \frac{h}{2}.$$

Враховуючи, що час t спускання супутника дорівнює половині періоду T_s його обертання, дістанемо

$$t = \frac{T_M \left(R_s + \frac{h}{2} \right)^2}{2 R_M^2}.$$

Задачі до теми 1.2

33. Тіло масою 2 кг здійснює прямолінійний рух, що описується рівнянням $S = A - Bt + Ct^2 - Dt^3$. Враховуючи, що $C=2 \text{ м/с}^2$, $D=0,4 \text{ м/с}^3$, визначити силу, яка діє на тіло через 1 с після початку руху.

Відповідь: 3,2Н.

34. До стелі рухомого ліфта на нитці підвішено тіло масою 0,5кг. Визначити силу натягу нитки під час руху ліфта вгору з прискоренням 2 м/с^2 ; вниз з прискоренням 2 м/с^2 .

Відповідь: 5,9 Н; 3,9Н.

35. Два тіла масою $m_1 = 0.5$ кг і $m_2 = 0.7$ кг зв'язані невагомою і нерозтяжною ниткою лежать на горизонтальній площині (рис. 7). До першого тіла прикладена горизонтально напрямлена сила $F = 6$ Н. Нехтуючи тертям, знайти: прискорення тіл; силу натягу нитки.

Відповідь: 5 м/с^2 ; 3,5Н.

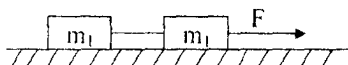


Рис. 7

36. На вершині похилої площини, що утворює кут $\alpha = 20^\circ$ з горизонтом, закріплено невагомий блок (рис. 8), через який перекинута невагома і нерозтяжна нитка, до кінців якої прикріплено тіла масою $m_1 = 0.2$ кг і $m_2 = 0.15$ кг. Нехтуючи тертям, визначити прискорення, з якими будуть рухатися тіла, якщо друге тіло рухатиметься вниз.

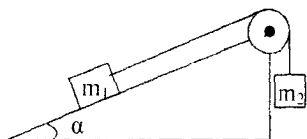


Рис. 8

Відповідь: 2.29 м/с^2 .

37. Невагомий блок закріплено на вершині двох похилих площин, які утворюють кут $\alpha = 30^\circ$ і $\beta = 45^\circ$ з горизонтом (рис. 9). Через блок перекинута нитка, до кінців якої прикріплено тіла масою $m_1 = 0.45$ кг і $m_2 = 0.5$ кг. Нехтуючи тертям, знайти: прискорення, з яким рухаються тіла; силу натягу нитки.

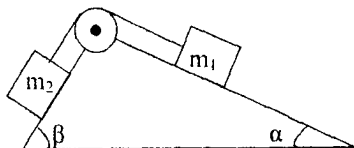


Рис. 9

Відповідь: 1.33 м/с^2 ; 2,8 Н.

38. Куля масою $m = 45$ кг обертається на нерозтяжній дротині довжиною $l = 5$ м в горизонтальній площині, здійснюючи $n = 16$ об/хв. Який кут α з вертикаллю утворює дротина і яка сила його натягу?

Відповідь: $\alpha = 45^\circ$; $T = 630$ Н.

39. Тіло масою $10 \cdot 10^3$ кг тягнуть по похилій площині довжиною 6 м на висоту 1,5 м. Знайти найменшу силу тяги, якщо коефіцієнт тертя між тілом та площиною дорівнює 0,35.

Відповідь: ≈ 58 кН.

40. На тіло масою 10 кг, яке лежить на похилій площині, що утворює кут 20° з горизонтом, діє горизонтально напрямлена від неї сила 8 Н. Нехтуючи тертям, знайти: прискорення тіла; силу тиску тіла на площину.

Відповідь: $4,11$ м/с²; 89,4 Н.

41. Вагон масою $m = 1000$ кг спускається по канатній залізничній дорозі з нахилом $\alpha = 15^\circ$ до горизонту (рис. 10). Визначити силу натягу T каната при гальмуванні вагона в кінці спуску, якщо швидкість вагона перед гальмуванням $v_0 = 2,5$ м/с, час гальмування $t = 6$ с, а коефіцієнт тертя $k = 0,05$.

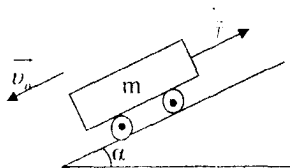


Рис. 10

Відповідь: 2480 Н.

42. До кронштейна, закріпленого на візку, підвішена на нитці куля масою 5 кг. На який кут відхилиться куля з ниткою від вертикалі при русі візка з прискоренням $0,5$ м/с²?

Відповідь: $2^\circ 54'$.

43. Куля масою 0,01 кг вилітає з ствола рушниці зі швидкістю 875 м/с. Визначити середню силу тиску порохових газів та час руху кулі у стволі, якщо його довжина дорівнює 1,2 м.

Відповідь: 3,19 кН; 0,0028 с.

44. Визначити прискорення вільного падіння на поверхні Сонця, якщо відомі радіуси земної орбіти – $1,5 \cdot 10^8$ км, Сонця – $7 \cdot 10^5$ км і період обертання Землі навколо Сонця – один рік.

Відповідь: $\approx 28 g$.

45. Найбільше віддалення від поверхні Землі першого штучного супутника становило 947 км. Яку швидкість повинен мати супутник на цій висоті, щоб рухатися по коловій орбіті?

Відповідь: 7,3 км/с.

46. Яку швидкість дістане контейнер, знижуючись з висоти 800 км до 100 км над поверхнею Землі, якщо припустити, що опір атмосфери до цієї висоти можна не враховувати?

Відповідь: 3,46 км/с.

47. Знайти першу космічну швидкість на поверхні Місяця, якщо його радіус 1760 км, а прискорення вільного падіння на Місяці в 6 разів менше, ніж на Землі.

Відповідь: 1,7 км/с.

48. Якими повинні бути радіус колової орбіти штучного супутника Землі та його лінійна швидкість, щоб період обертання супутника був таким самим, як у Землі? Яким буде рух такого супутника відносно нерухомого спостерігача, що знаходиться на Землі?

Відповідь: $\approx 42 \cdot 10^3$ км; $\approx 3,1$ км/с.

49. В якій точці прямої, що сполучає центри Місяця та Землі тіло буде притягуватися Землею та Місяцем з однаковою силою? Відстань від Землі до Місяця вважати рівною 60 земним радіусам, масу Місяця – у 81 раз меншою від маси Землі.

Відповідь: 6 земних радіусів від центра Місяця.

50. Радіус планети Марс становить 0,53 радіуса Землі. Маса Марса становить 0,11 від маси Землі. Знайти, у скільки разів сила притягання на Марсі менша від сили притягання на Землі.

Відповідь: $\approx 2,55$.

51. Період обертання Юпітера в 12 разів більший від періоду обертання Землі навколо Сонця. Яка відстань між Юпітером і Сонцем, якщо від Землі до Сонця $150 \cdot 10^9$ м? Орбіти вважати коловими.

Відповідь: $\approx 7,86 \cdot 10^{11}$ м.

52. Період обертання комети Галлея навколо Сонця 76 років. Мінімальна відстань, на яку вона наближається до Сонця – $180 \cdot 10^3$ км. Визначити максимальну відстань, на яку комета віддаляється від Сонця. Радіус орбіти Землі – $150 \cdot 10^6$ км.

Відповідь: $5,2 \cdot 10^9$ км.

53. Вважаючи орбіту Землі коловою, знайти лінійну швидкість руху Землі навколо Сонця.

Відповідь: 29,8 км/с.

54. Визначити середню густину Землі, якщо відома гравітаційна стала.

Відповідь: 5510 кг/м^3 .

55. Вважаючи, що радіус Землі дорівнює $6,37 \cdot 10^6$ м, визначити, на якій висоті над поверхнею Землі напруженість поля тяжіння становить 4,9 Н/кг.

Відповідь: 2640 км.

56. Літак летить зі швидкістю 100 м/с і описує вертикальну петлю Нестерова радіуса 360 м. Знайти силу, яка притискує льотчика масою 80 кг до сидіння: у нижній точці петлі; у верхній точці цієї петлі.

Відповідь: 3 кН; 1,44 кН.

57. Визначити числове значення другої космічної швидкості, тобто найменшої швидкості, яку необхідно надати тілу, щоб його орбіта в полі тяжіння Землі стала параболічною.

Відповідь: 11,2 км/с.

58. Знайти період обертання навколо Сонця планети, якщо відомо, що велика піввісь її еліптичної орбіти більша на 10^7 км від великої півосі земної орбіти, яка дорівнює $150 \cdot 10^6$ км.

Відповідь: 13,2 міс.

3. Робота, потужність, енергія. Закони збереження в механіці

Основні закони і формули

Робота A сталої сили ($\vec{F} = \text{const}$)

$$A = \vec{F} \cdot \vec{r} \text{ або } A = Fr \cos \alpha, \quad (1)$$

де $\vec{r}$ – вектор переміщення; α – кут між напрямками дії сили і переміщення.

Робота змінної сили при переміщенні тіла з положення 1 в положення 2

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r}, \quad (2)$$

де $\vec{F} d\vec{r} = dA$ – елементарна робота сили на елементарному переміщенні $d\vec{r}$, в межах якого силу можна вважати сталою. Для обчислення (2) треба знати залежність $\vec{F}$ від $\vec{r}$.

Швидкість виконання роботи (середня потужність)

$$N_c = \frac{\Delta A}{\Delta t}. \quad (3)$$

Миттєва потужність

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = Fv \cos \alpha. \quad (4)$$

Кінетична енергія рухомого тіла

$$T = \frac{mv^2}{2}. \quad (5)$$

Приріст кінетичної енергії тіла

$$T_2 - T_1 = A, \quad (6)$$

де A – робота результуючої всіх сил, що діють на тіло.

Потенціальна енергія тіла масою m , піднятого над поверхнею Землі на висоту h

$$U = mgh. \quad (7)$$

Зменшення потенціальної енергії тіла дорівнює роботі сил поля в якому воно знаходиться

$$U_1 - U_2 = A \quad (8)$$

Закон збереження механічної енергії для консервативної системи

$$T + U = E = \text{const}. \quad (9)$$

Сила пружності

$$F = -kx, \quad (10)$$

де x – деформація; k – коефіцієнт пружності.

Потенціальна енергія пружнодеформованого тіла

$$U = \frac{kx^2}{2}. \quad (11)$$

Закон зміни імпульсу системи матеріальних точок

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_p, \quad (12)$$

де $\vec{p}$ – імпульс системи; $\vec{F}_p$ – рівнодійна всіх зовнішніх сил.

Закон збереження імпульсу для замкнутої системи ($\vec{F}_p = 0$)

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \text{const}. \quad (13)$$

Швидкість руху двох тіл з масами m_1 і m_2 після абсолютно непружного центрального удару

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \quad (14)$$

Швидкості руху двох тіл після абсолютно пружного центрального удару:

$$\begin{aligned} v_1' &= \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}; \\ v_2' &= \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}, \end{aligned} \quad (15)$$

де v_1 і v_2 – швидкості тіл до удару.

Рівняння руху тіла змінної маси (рівняння Мещерського)

$$m\vec{a} = \vec{F} - \vec{V} \frac{dm}{dt}, \quad (16)$$

де $\vec{V}$ – швидкість відокремлення частинок тіла відносно самого тіла (відносна швидкість); $\vec{F}$ – рівнодійна зовнішніх сил, що діють на тіло змінної маси m ;

$$-\vec{V} \frac{dm}{dt} = \vec{F}_p - \text{реактивна сила.}$$

Швидкість $\vec{v}$ руху тіла (ракети) вертикально вгору, коли дії зовнішніх сил немає ($\vec{F} = 0$) (формула Ціолковського)

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{F} \ln \frac{m_0}{m}, \quad (17)$$

де $\vec{v}_0$ – швидкість тіла в початковий момент часу ($t = 0$); m_0 – стартова (початкова) маса тіла; m – маса тіла в даний момент часу (для ракети m_0 – це маса конструкції ракети і маса палива).

У випадку багатоступінчастої ракети з однаковим відношенням $\frac{m_0}{m}$ (число Ціолковського) для всіх n ступенів швидкість руху ракети при $\vec{v}_0 = 0$

$$\vec{v} = \vec{F} n \ln \frac{m_0}{m}. \quad (18)$$

Методичні вказівки

При розв'язуванні задач на роботу постійної сили необхідно вияснити, які сили прикладені до тіла і роботу якої сили треба визначити. Для обчислення величини роботи треба знати напрям дії сили, а також напрям переміщення. Якщо в умові задачі не задані сила і переміщення, то силу знаходять із рівнянь другого закону Ньютона, а величину переміщення – за формулами кінематики.

В задачах на роботу змінної сили необхідно вияснити характер зміни діючої сили на переміщенні. Якщо величина сили змінюється пропорційно переміщенню, то знаходять середнє значення сили як півсуму значень сил на початку і в кінці цього переміщення і тоді для визначення роботи використовують формулу (1). В іншому випадку користуються формулою (2).

Розв'язуючи задачі на розрахунок енергії тіла або системи тіл, користуються формулами для визначення кінетичної, потенціальної і повної енергії. При обчисленні потенціальної енергії необхідно спочатку вияснити характер діючих сил. Визначаючи потенціальну енергію тіла, піднятого над Землею, необхідно вибрати нульовий рівень відліку висоти (найчастіше таким рівнем є земна поверхня). Якщо в умовах задачі необхідні для обчислення енергії

величини швидкості і висоти не задані, то їх можна визначити на основі кінематичних формул.

При розв'язуванні задач на закони збереження в механіці слід пам'ятати, що як імпульс, так і енергія тіла залежать від вибору системи відліку. Тому при складанні рівнянь, які виражають закони збереження імпульсу і енергії розглядають рух усіх тіл в одній і тій же інерціальній системі відліку (часто використовують систему, зв'язану з Землею).

Закон збереження імпульсу зв'язує початкове і кінцеве значення імпульсу замкнутої системи і дозволяє виключити із розгляду внутрішні сили, тому його використовують при розв'язуванні задач, в яких сили взаємодії між окремими тілами системи є змінними величинами, причому характер їх зміни в часі складний і взагалі невідомий. До таких задач можна віднести задачі на розрив одного тіла на частини або об'єднання декількох тіл в одне, задачі на удар і задачі на рух одних тіл по поверхні інших.

Рівняння (13), яке виражає закон збереження імпульсу, є векторним. Для знаходження вектора $\vec{p} = \sum \vec{p}_i$ керуються правилом додавання векторів або, вибравши осі Ox і Oy , записують закон збереження імпульсу в скалярній формі двома рівняннями: $p_x = const$, $p_y = const$. Ці рівняння використовують для знаходження шуканих величин. Якщо число невідомих більше числа складених рівнянь, то необхідно до них додати рівняння, які зв'язують кінематичні величини.

Закон збереження імпульсу справедливий для замкнутих систем, але його можна застосовувати і для систем, на які діють зовнішні сили при умові, що їх сума дорівнює нулю. Якщо ж $\sum \vec{F}_{\text{зовн}} \neq 0$, але виявляється, що сума проекцій всіх зовнішніх сил на деяку вісь (Ox) дорівнює нулю, то $p_x = const$, тобто проекція імпульсу системи на напрям, в якому зовнішні сили не діють (або зрівноважуються), є величина стала.

Застосування закону збереження енергії спрощує розв'язання задач, в яких розглядаються два стани системи взаємодіючих тіл, і дозволяє не розглядати діючі між тілами сили. Перед використанням закону збереження енергії необхідно

виділити два стани системи, а після вибрати рівень відліку потенціальної енергії. Визначивши повну енергію системи в обох станах, записують закон збереження енергії: $E_1 = E_2$. Якщо при переході системи тіл із початкового стану в кінцевий діяли зовнішні сили, то складають рівняння $E_2 - E_1 = A$, де A – робота зовнішніх сил.

Спільне застосування законів збереження практикують при розв'язуванні задач на пружний удар або іншу взаємодію тіл, що входять до замкнутої системи, коли відсутні сили тертя і сили непружних деформацій та коли у тіл в результаті взаємодії змінюються швидкості. В цьому випадку зберігаються як імпульс, так і енергія системи, які дають два рівняння, що дозволяють, наприклад, знайти швидкості обох тіл після взаємодії, якщо відомі швидкості до взаємодії.

У випадку непружного удару залишкові деформації тіл завжди супроводжуються частковим або повним переходом механічної енергії у внутрішню (тіла нагріваються). Тому механічна енергія системи не зберігається. Енергію, затрачену на деформацію, визначають як різницю між початковим і кінцевим значеннями механічної енергії системи.

Приклади розв'язування задач

59. Знайти роботу, яку необхідно виконати, щоб стиснути пружину на $x = 0,2$ м, коли відомо, що сила пружності пропорційна деформації і під дією сили $F = 29,4$ Н пружина стискується на $0,01$ м.

Розв'язання. В даному випадку сила, що діє з боку пружної пружини на тіла, які її розтягують, $F = kx$, де k – коефіцієнт пружності, x – величина деформації. Величина сили змінюється в залежності від величини x пропорційно. Тому робота такої сили може бути визначена за формулою

$A = F_{\text{ср}} x$, де $F_{\text{ср}} = \frac{F_1 + F_2}{2}$. В нашому випадку початкова величина деформації $x_0 = 0$,

тому $F_1 = kx_0 = 0$, $F_2 = kx$, отже, $A = \frac{kx^2}{2}$. З умови задачі випливає, що $k = 29,4 \cdot 10^2$

Н/м. Знаючи k і x , знайдемо роботу: $A = 5,58 \cdot 10^3$ Дж.

60. Поїзд за $t = 5$ хв від початку руху розвинув швидкість $v = 18$ м/с. Маса поїзда $m = 6 \cdot 10^5$ кг, коефіцієнт тертя $k = 0,004$. Визначити середню потужність локомотива за час рівноприскореного руху.

Розв'язання. Середню потужність локомотиву можна знайти за формулою $N_c = F_t v_c$.

Силу тяги визначимо за другим законом Ньютона. На поїзд діє сила тяги F_t і сила тертя F_{tp} :

$$\vec{F}_t + \vec{F}_{tp} = m\vec{a} \text{ або } F_t - F_{tp} = ma,$$

де $F_{tp} = kmg$ і тоді $F_t = m(a + kg)$.

Середня швидкість

$$v_c = \frac{S}{t} = \frac{at^2}{2t} = \frac{at}{2} = \frac{v}{2}.$$

Прискорення $a = \frac{v}{t}$. Тоді

$$N_c = \frac{mv}{2} \left(\frac{v}{t} + kg \right) = 5,36 \cdot 10^3 \text{ Вт}.$$

61. Тіло масою m повільно витягнули на гору, діючи силою $\vec{F}$, яка в кожній точці шляху напрямлена по дотичній до траєкторії (рис. 11). Знайти роботу цієї сили, якщо висота гори H , довжина основи L і коефіцієнт тертя k .

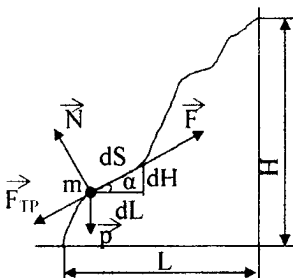


Рис. 11

Розв'язання. Розглянемо довільну точку траєкторії. В цій точці на тіло діють сили: сила тяги $\vec{F}$; сила тертя $\vec{F}_{tp}$; сила тяжіння $\vec{P}$; сила реакції $\vec{N}$. Запишемо другий закон Ньютона:

$$\vec{F} + \vec{F}_{ip} + \vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}.$$

Так як тіло тягнули повільно, то $\vec{a} \approx 0$ і

$$\vec{F} + \vec{F}_{ip} + \vec{P} + \vec{N} = 0.$$

Спроектувавши дане векторне рівняння на нормаль і дотичну до траєкторії, дістанемо

$$P = mg \cos \alpha; F_{ip} = kN = kmg \cos \alpha; F = F_{ip} + mg \sin \alpha = mg(\sin \alpha + k \cos \alpha).$$

Тепер запишемо роботу сили F на малому шляху dS

$$dA = F \cdot dS = mg \left(\frac{dH}{dS} + k \frac{dL}{dS} \right) dS = mg(dH + k dL).$$

Проінтегрувавши дану рівність по всьому шляху, дістанемо формулу для обчислення роботи:

$$A = mg \int_0^H dH + kmg \int_0^L dL = mg(H + kL).$$

62. Мідні кульки масами $m_1 = 0,1$ кг та $m_2 = 0,2$ кг підвішені на нитках довжиною по $l = 0,5$ м так, що нитки паралельні, а кульки дотикаються одна до одної. Менша кулька відхилена на кут $\alpha = 90^\circ$, після чого відпущена. Знайти швидкість більшої кульки після удару.

Розв'язання. Менша кулька, після її відхилення на кут α , перед ударом матиме імпульс $m_1 v$, а друга кулька, яка до удару була нерухома, мала імпульс рівний нулю. Отже, імпульс даної замкненої системи до удару становив $m_1 v$. Імпульс кульок після удару дорівнює $m_1 v'_1 + m_2 v'_2$, де v'_1 і v'_2 – швидкості кульок після удару.

Для визначення швидкості v'_2 скористаємось законом збереження імпульсу.

$$m_1 v = m_1 v'_1 + m_2 v'_2.$$

Так як до даного рівняння входять двоє невідомих – v'_1 та v'_2 , для їх визначення запишемо рівняння закону збереження кінетичної енергії для абсолютно пружного удару:

$$\frac{m_1 v^2}{2} = \frac{m_1 v'^2_1}{2} + \frac{m_2 v'^2_2}{2}.$$

Швидкість меншої кульки знаходимо за формулою $v = \sqrt{2lg}$, де l – висота падіння кульки, що дорівнює довжині нитки.

Розв'язавши систему рівнянь, що виражають закон збереження імпульсу і закон збереження кінетичної енергії та підставивши числові значення величин дістанемо

$$v_2 = 0 \text{ і } v_1 = 2 \text{ м/с.}$$

Перше значення швидкості більшої кульки після удару не відповідає умові задачі. Отже, швидкість більшої кульки після удару дорівнює 2 м/с.

63. Модель ракети з початковою масою $m_0 = 0.5$ кг викидає неперервний струмінь газів зі сталою відносною швидкістю $V = 400$ м/с. Розхід газу $\mu = 0.15$ кг/с. Нехтуючи опором повітря і полем тяжіння, визначити, яку швидкість відносно Землі матиме ракета через $t = 2$ с після старту, якщо її початкова швидкість дорівнює нулю?

Розв'язання. Із умови задачі випливає, що зовнішні сили відсутні, тому імпульс замкнутої системи тіл ракета-газ залишається сталим. Початкова швидкість ракети рівна нулю, тому її рух буде прямолінійним. Направивши вісь Ox в напрямку швидкості ракети $\vec{v}$, в проекціях на дану вісь запишемо

$$(m_0 - \mu t)dv - \mu V dt = 0,$$

де dv – зміна швидкості ракети (за рахунок викидання газів) за проміжок часу dt , а V – швидкість газів відносно ракети. З даного рівняння

$$dv = \frac{\mu V}{m_0 - \mu t} dt.$$

Швидкість v як функцію часу знайдемо інтегруючи цей вираз в межах від 0 до t . При $t = 0$, $v = 0$, отже

$$v = V \int_0^t \frac{\mu dt}{m_0 - \mu t},$$

звідки

$$v = V \ln \frac{m_0}{m_0 - \mu t}.$$

Підставивши числові значення, дістанемо $v = 366$ м/с.

Задачі до теми 3

64. Визначити роботу, виконувану при підніманні вантажу масою 50 кг по похилій площині з кутом нахилу 30° до горизонту на відстань 4 м, якщо час підйому 2 с, а коефіцієнт тертя дорівнює 0,06.

Відповідь: $1,48 \cdot 10^3$ Дж.

65. Під дією сталої сили тіло почало рухатись у горизонтальному напрямі і пройшло шлях 5 м, набувши швидкості 2 м/с. Маса тіла 400 кг. Коефіцієнт тертя 0,01. Знайти роботу сили.

Відповідь: 996 Дж.

66. Тіло масою 0,5 кг спускається з гірки довжина основи якої 2 м, а висота 1 м. Після того, як тіло з'їхало до підніжжя гірки, виявилося, що воно виконало роботу 4,4 Дж. Знайти коефіцієнт тертя між тілом і поверхнею гірки.

Відповідь: 0,05.

67. Автомобіль масою 1800 кг спускається з гори при виключеному двигуні зі сталою швидкістю 15 м/с. Кут нахилу гори до горизонту 3° . Визначити, яка повинна бути потужність двигуна автомобіля, щоб він зміг підніматися на ту саму гору з такою самою швидкістю.

Відповідь: $27,7 \cdot 10^3$ Вт.

68. Дерев'яний кубік зі стороною 0,1 м плаває у воді так, що його центр знаходиться на 0,04 м вище поверхні води. Яку роботу потрібно виконати, щоб занурити кубік у воду наполовину?

Відповідь: 0,08 Дж.

69. Літак масою $3 \cdot 10^3$ кг для злету повинен мати швидкість 100 м/с і довжину розбігу 600 м. Яка повинна бути мінімальна потужність двигуна для злету літака? Силу опору рухові вважати пропорційною силі нормального тиску, середній коефіцієнт опору дорівнює 0,2. При розгоні літак рухається рівноприскорено.

Відповідь: $3 \cdot 10^6$ Вт.

70. Камінь масою 2 кг, вільно падаючи з висоти 5 м, вдавлюється в м'який ґрунт на глибину 0,05 м. Визначити середню силу удару та роботу сили опору.

Відповідь: 2020 Н; 101 Дж.

71. 3 гармати, маса ствола якої 45 кг, стріляють у горизонтальному напрямі. Маса снаряду 5 кг, його початкова швидкість 450 м/с. Під час пострілу ствол відкочується на відстань 0,45 м. Визначити середню силу гальмування, що виникає в протилежному пристрої гармати.

Відповідь: $12,5 \cdot 10^3$ Н.

72. Вертоліт масою 3000 кг витрачає на піднімання 30 % потужності двигуна. Визначити потужність двигуна вертольота, якщо він може піднятися на висоту 1500 м за 120 с. Рух вертольота вважати рівномірним.

Відповідь: $12,25 \cdot 10^5$ Вт.

73. Тіло масою 0,2 кг, яке кинули під кутом 60° до горизонту, впало на землю через 2 с на відстані 10 м від місця кидання. Визначити роботу кидання, потенціальну і кінетичну енергію в найвищій точці траєкторії. Опором повітря знехтувати.

Відповідь: 10 Дж; 7,5 Дж; 2,5 Дж.

74. Куля масою 10 г летить горизонтально зі швидкістю 300 м/с і вдаряється в підвішений на нитках дерев'яний брусок масою 6 кг і застряє в ньому. Визначити, на яку висоту підніметься брусок.

Відповідь: 0,0128 м.

75. Тіло масою 1 кг рухалось під дією деякої сили так, що залежність пройденого шляху від часу описується рівнянням $S = A - Bt + Ct^2 - Dt^3$ ($B = 3$ м/с, $C = 5$ м/с², $D = 1$ м/с³). Визначити потужність затрачену на рух тіла в момент часу 1 с.

Відповідь: 16 Вт.

76. Тіло, падаючи з деякої висоти, в момент падіння на землю мало імпульс 100 кгм/с і кінетичну енергію 500 Дж. Визначити з якої висоти падало тіло і його масу.

Відповідь: 5,1 м; 10 кг.

77. Тіло масою 0,4 кг спускається з похилої площини висотою 0,1 м і довжиною 1 м. Коефіцієнт тертя тіла на всьому шляху 0,04. Визначити: кінетичну енергію тіла біля основи площини; шлях, пройдений тілом на горизонтальній ділянці до зупинки.

Відповідь: 0,24 Дж; 1,53 м.

78. Гиря, покладена на верхній кінець спіральної пружини, стискає її на 1 мм. На скільки стисне пружину гиря, якщо її кинути вертикально вниз на пружину з висоти 0,2 м зі швидкістю 1 м/с?

Відповідь: 0,08 м.

79. Визначити найменшу висоту, з якої повинен скочуватись візок з людиною по жолобу, що переходить в петлю радіуса 6 м, і не відірватися від нього у верхній точці петлі. Тертям знехтувати.

Відповідь: 15 м.

80. На візок стрибає людина масою 70 кг і при цьому візок відкочується на деяку відстань у протилежному напрямі. Коефіцієнт тертя візка дорівнює 0,1. Кінетична енергія людини під час стрибка 90 Дж. Визначити відстань, на яку відкотиться візок.

Відповідь: 2 м.

81. Тіло масою 3 кг рухається зі швидкістю 2 м/с і вдаряється в нерухоме тіло такої ж маси. Вважаючи удар центральним і непружним, визначити кількість теплоти, яка виділяється при ударі.

Відповідь: 3 Дж.

82. При центральному пружному ударі рухоме тіло масою m_1 вдаряється в нерухоме тіло масою m_2 , внаслідок чого швидкість першого тіла зменшується у 2 рази. Визначити: в скільки разів маса першого тіла більша за масу другого тіла; кінетичну енергію другого тіла після удару, якщо кінетична енергія першого тіла до удару дорівнювала 800 Дж.

Відповідь: в 3 рази; 450 Дж.

83. У стоячій воді знаходиться нерухомий човен масою 140 кг. Людина масою 60 кг стоїть у човні і переходить з носа на корму. При цьому човен перемістився на відстань 1,2 м. Знехтувавши опором води, визначити довжину човна.

Відповідь: 4 м.

84. Під кутом 30° до горизонту запущена ракета масою 1,5 кг. Через 2 с польоту маса ракети зменшилась на 0,5 кг. Швидкість витікання газів відносно

ракети із її сопла 12 м/с. На ракету під час її руху крім сили тяжіння діє сила опору 2 Н. Знайти прискорення руху ракети.

Відповідь: 4,33 м/с².

85. На човні масою 4500 кг встановлено горизонтальний брандспойт, викидаючий зі швидкістю 6 м/с відносно човна назад 25 кг/с води. Знехтувавши опором рухові човна, визначити: швидкість човна через 180 с після початку руху; гранично можливу швидкість човна.

Відповідь: 3,8 м/с; 6 м/с.

86. Ракета, маса якої в момент запуску 2 кг, запущена вертикально вгору. Швидкість витікання продуктів згорання відносно ракети 150 м/с. Витрата палива 0,2 кг/с. Нехтуючи тертям повітря, визначити прискорення ракети через 3 с після старту. Поле сили тяжіння вважати однорідним.

Відповідь: 11,6 м/с².

87. При маневруванні орбітальної станції розвивається реактивна сила 160 Н при витраті двигуном палива 0,2 кг/с. Визначити відносну швидкість витікання газів із сопла реактивного двигуна та прискорення, яке отримає станція.

Відповідь: 800 м/с; 0,05 м/с².

89. Ракета з стартовою масою 1000 кг запущена з поверхні Землі вертикально вгору і піднімається з прискоренням $2g$. Відносна швидкість витікання продуктів згорання 1200 м/с. Паливо повністю згорає протягом 8 с. Знайти витрату палива та його масу.

Відповідь: 24,5 кг/с; 188 кг.

4. Динаміка обертального руху

Основні закони і формули

Момент інерції матеріальної точки

$$I = mr^2, \quad (1)$$

де m – маса точки; r – відстань до осі обертання.

Момент інерції тіла

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2. \quad (2)$$

Момент інерції деяких тіл правильної геометричної форми:

1) однорідного диска (циліндра) радіуса R і масою m відносно осі, що збігається з віссю диска (циліндра)

$$I = \frac{1}{2} m R^2; \quad (3)$$

2) тонкостінного кільця (обруча, труби) радіуса R відносно осі, що збігається з віссю кільця (обруча, труби)

$$I = m R^2; \quad (4)$$

3) пустотілого циліндра масою m відносно осі симетрії

$$I = \frac{1}{2} m (R_2^2 - R_1^2), \quad (5)$$

де R_1 і R_2 – відповідно внутрішній і зовнішній радіуси циліндра;

4) однорідної кулі масою m і радіуса R відносно осі, що збігається з діаметром

$$I = \frac{2}{5} m R^2; \quad (6)$$

5) однорідного стержня довжиною l і масою m відносно осі, що проходить через центр його мас перпендикулярно до осі стержня

$$I = \frac{1}{12} m l^2. \quad (7)$$

Момент інерції тіла I відносно будь-якої осі, що не проходить через центр мас тіла, визначається за теоремою Штейнера:

$$I = I_0 + m d^2, \quad (8)$$

де I_0 – момент інерції тіла відносно осі, яка паралельна даній і проведена через центр мас тіла; d – відстань між осями.

Момент сили відносно нерухомої точки

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] \text{ або } M = r \cdot F \sin \alpha = Fl, \quad (9)$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор проведений із даної точки до точки прикладання сили $\vec{F}$; r і F – модуль радіус-вектора і модуль сили; $l = r \sin \alpha$ – плече сили (найкоротша відстань між лінією дії сили і віссю обертання).

Основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла

$$\vec{M} = I \vec{\epsilon}, \quad (10)$$

де $\vec{M}$ – геометрична сума моментів зовнішніх сил; I – момент інерції тіла; ε – кутове прискорення.

Робота зовнішніх сил при повороті тіла на кут φ

$$A = M\varphi. \quad (11)$$

У випадку змінного моменту зовнішніх сил

$$A = \int_0^{\varphi} M d\varphi. \quad (12)$$

Кінетична енергія тіла, що обертається навколо нерухомої осі Oz з кутовою швидкістю ω ,

$$T_{\omega} = \frac{I_z \omega^2}{2}, \quad (13)$$

де I_z – момент інерції тіла відносно розглядуваної осі обертання.

Кінетична енергія тіла, що котиться по площині без ковзання,

$$T = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_c \omega^2}{2}, \quad (14)$$

де m – маса тіла; v_c – швидкість центра мас тіла; I_c – момент інерції тіла відносно осі, яка проходить через його центр мас; ω – кутова швидкість тіла.

Момент імпульсу твердого тіла відносно деякої осі обертання

$$L_z = \sum_{i=1}^n m_i v_i r_i = I_z \omega, \quad (15)$$

де r_i – відстань від осі Oz до окремої частинки тіла масою m_i ; $m_i v_i$ – імпульс цієї частинки; I_z – момент інерції тіла відносно осі Oz ; ω – кутова швидкість обертання тіла навколо осі Oz .

Закон динаміки обертального руху твердого тіла (10) відносно нерухомої осі з врахуванням (15) матиме вигляд

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}; M_z = \frac{dL_z}{dt} = \frac{d(I_z \omega)}{dt} = I_z \varepsilon. \quad (16)$$

Закон збереження імпульсу для замкнутої системи

$$\vec{L} = I\vec{\omega} = \text{const}. \quad (17)$$

Умови рівноваги твердого тіла

Умова 1. Векторна сума всіх зовнішніх сил, що прикладені до тіла, дорівнює нулю:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0. \quad (18)$$

Умова 2. Векторна сума всіх моментів зовнішніх сил відносно будь-якої осі дорівнює нулю:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = 0. \quad (19)$$

Методичні вказівки

Задачі на динаміку обертального руху можна розділити на три основні групи: задачі на динаміку рівномірного руху точки по колу; задачі на динаміку обертального руху твердого тіла; задачі на рух супутників і планет.

1. Задачі на динаміку рівномірного руху точки по колу розв'язують на основі законів Ньютона і рівнянь кінематики. Другий закон Ньютона застосовують у вигляді $F = ma_o = \frac{mv^2}{R} = m\omega^2 R$,

де v і ω – лінійна і кутова швидкості тіла масою m ; R – радіус кола. Щоб записати цей закон, перш за все необхідно знайти результуючу всіх сил, що діють на точку. При цьому слід пам'ятати, що вектор результуючої сили напрямлений вздовж радіуса до центра кола.

2. В курсі фізики часто розглядають обертання твердого тіла навколо нерухомої осі або осі, яка переміщається в просторі паралельно сама собі. В цьому випадку вектори величин $\vec{\omega}$, $\vec{\varepsilon}$, $\vec{M}$ будуть напрямлені вздовж осі обертання, що дозволяє спростити запис рівнянь обертального руху тіла. При цьому вісь проєкцій зручно направляти по осі обертання. Найчастіше за позитивний напрям вибирають напрям обертання, який співпадає з напрямом руху годинникової стрілки.

3 групи задач на динаміку обертального руху слід виділити задачі на рівновагу тіл, так як статика є окремим випадком динамічних процесів, при яких відсутні лінійні і кутові прискорення ($a=0$, $\varepsilon=0$). Тому розв'язування таких задач має багато спільного з розв'язуванням задач на динаміку обертального руху

і тут замість динамічних рівнянь застосовують умови рівноваги тіла. Розв'язування задач на статику проводять за такою схемою: роблять рисунок, на якому вказують усі сили, діючі на тверде тіло або матеріальну точку; вибирають осі координат Ox і Oy і проєктують на ці осі всі сили; записують рівняння рівноваги у проєкціях на осі $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$. У випадку твердого тіла також складають рівняння моментів: $\sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \vec{0}$. При цьому необхідно вибрати точку O , відносно якої будуть розглядатись моменти прикладених сил. Дану точку зручно вибрати так, щоб через неї проходило найбільше число ліній дії сил. Якщо в умові задачі сказано, що тіло обертається навколо однієї нерухомої осі, то достатньо записати тільки рівняння моментів.

3. В задачах на рух планет і супутників вважають, що рухи тіл відбуваються під дією сили тяжіння (силою опору середовища нехтують) і взаємодіючі тіла розглядають як матеріальні точки. Задачі цієї групи розв'язують методами, що базуються на використанні другого закону Ньютона, в якому роль сили відіграє сила тяжіння.

Задачі даної теми можна розв'язувати і з допомогою законів збереження. *Закон збереження енергії* часто застосовується при нерівномірному обертанні твердого тіла, яке відбувається під дією змінного моменту сил. При цьому слід пам'ятати, що повна кінетична енергія твердого тіла складається з кінетичної енергії його поступального руху зі швидкістю центра мас і кінетичної енергії обертання навколо осі, яка проходить через центр мас.

Закон збереження моменту імпульсу при обертальному русі, так як і закон збереження імпульсу при поступальному русі, дозволяє виключити із розгляду будь-які сили, діючі всередині системи, в тому числі і сили тертя. Тому закон застосовують в тих задачах на обертальний рух твердого тіла або системи тіл, де характер зміни з часом сил взаємодії між частинами системи складний або невідомий. Закон збереження моменту імпульсу можна застосовувати до будь-якої системи при умові, що результуючий момент всіх зовнішніх сил, прикладених до системи, дорівнює нулю (сили при цьому можуть і не зрівноважуватися).

Приклади розв'язування задач

90. Дві маленькі кульки з масами $m_1 = 0.04$ і $m_2 = 0.01$ кг можуть вільно ковзати по горизонтальному стержню, який проходить через їх центр мас (рис. 12), з'єднані ниткою довжиною $l = 0.02$ м. Визначити силу натягу нитки при обертанні стержня з кутовою швидкістю $\omega = 10$ рад/с, якщо кульки не зміщуються відносно осі обертання.

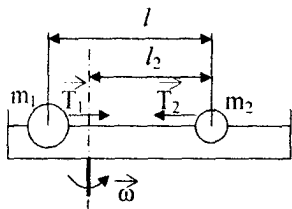


Рис. 12

Розв'язання. В даному випадку доцентрові прискорення кульок зумовлені дією сил натягу $\vec{T}_1$ і $\vec{T}_2$. Так як кульки не зміщуються відносно осі обертання, то $T_1 = T_2$. Згідно другого закону Ньютона, можна записати:

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{r_1} = m_1 \omega^2 r_1 = m_1 \omega^2 (l - l_2);$$

$$T_2 = \frac{m_2 v_2^2}{r_2} = m_2 \omega^2 r_2 = m_2 \omega^2 l_2.$$

Тоді

$$m_1 \omega^2 (l - l_2) = m_2 \omega^2 l_2,$$

звідки

$$l_2 = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2}.$$

Тепер силу натягу визначимо так:

$$T = T_1 = T_2 = \frac{m_2 m_1 l \omega^2}{m_1 + m_2} = 0.16 \text{ Н}.$$

91. На нитці висить кулька масою m , яка рухається в горизонтальній площині по колу зі сталою швидкістю. Відстань від точки підвісу до горизонтальної площини $h = 0.25$ м. Скільки обертів робить кулька за $t = 10$ с?

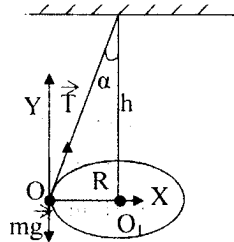


Рис. 13

Розв'язання. На кульку діють дві сили (рис. 13): сила натягу нитки $\vec{T}$ і сила тяжіння $m\vec{g}$. Координатні осі Ox і Oy направимо так, як показано на рисунку. Запишемо другий закон Ньютона в проекціях на осі:

$$T \sin \alpha = \frac{mv^2}{R}; \quad T \cos \alpha - mg = 0.$$

З цих рівнянь дістанемо

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v^2}{gR}.$$

З іншого боку, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{h}$.

Отже, $\frac{R}{h} = \frac{v^2}{gR}$, але $v = \omega R = \frac{2\pi R}{T}$,

де T – період обертання. Тоді $\frac{R}{h} = \frac{4\pi^2 R}{gT^2}$, звідки знаходимо період обертання:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}}.$$

Число обертів N за час t

$$N = \frac{t}{T} = \frac{t}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{h}} = 10 \text{ об.}$$

92. Маховик, масу якого $m = 5$ кг можна вважати розподіленою по ободу радіуса $r = 0.2$ м, вільно обертається навколо горизонтальної осі, яка проходить через його центр, з частотою $\nu = 12$ с⁻¹. При гальмуванні маховик зупиняється через проміжок часу $\Delta t = 20$ с. Знайти гальмівний момент і число обертів, які робить маховик до повної зупинки.

Розв'язання. Якщо гальмівний момент постійний, то рух маховика рівносповільнений і основне рівняння динаміки обертального руху можна записати у вигляді

$$\vec{M} = -I\vec{\varepsilon} = -I \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t},$$

де $\Delta\vec{\omega}$ – зміна кутової швидкості за час Δt , $\vec{M}$ – гальмівний момент. Очевидно, що вектори $\vec{M}$ і $\Delta\vec{\omega}$ напрямлені в сторону, протилежну вектору початкової кутової швидкості $\vec{\omega}_0$.

Векторному рівнянню, записаному вище, відповідає скалярне рівняння

$$M = I \frac{\Delta\omega}{\Delta t},$$

де $\Delta\omega$ і M – модулі відповідних векторів. Із умови задачі витікає, що

$$\Delta\omega = |\omega_t - \omega_0| = \omega_0 = 2\pi\nu, \quad I = mr^2.$$

Підставивши дані вирази в рівняння основного закону динаміки обертального руху, отримаємо

$$M = \frac{2\pi\nu mr^2}{\Delta t} = 0,75 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Знайдемо кутове переміщення, яке пройшов маховик до зупинки

$$\Delta\varphi = \omega_0\Delta t - \frac{\varepsilon(\Delta t)^2}{2},$$

Враховуючи, що $\omega_t = \omega_0 - \varepsilon\Delta t = 0$, дістанемо

$$\Delta\varphi = \frac{\omega_0\Delta t}{2}.$$

Але $\Delta\varphi = 2\pi N$, а $\omega_0 = 2\pi\nu$. Тому шукане число обертів маховика до повної зупинки знаходимо за формулою

$$N = \frac{\nu\Delta t}{2} = 120 \text{ об.}$$

93. Людина знаходиться у центрі горизонтальної круглї платформи, що обертається навколо осі, яка проходить через центр маси людини та центр маси платформи. Людина тримає в руках горизонтально штангу довжиною $l = 2 \text{ м}$ та масою 18 кг . Платформа при цьому обертається з частотою $\nu = 0.5 \text{ с}^{-1}$. Людина повертає штангу в вертикальній площині на кут $\varphi = 60^\circ$. Визначити кутову

швидкість платформи після повороту штанги та роботу, яку виконала при цьому людина. Момент інерції людини вважати еквівалентним масі $m_0 = 50$ кг, що знаходиться на відстані $r_0 = 0.04$ м від осі обертання. Момент інерції платформи не враховувати.

Розв'язання. Розглядаючи платформу, що обертається з людиною, як замкнену систему, можемо вважати, що момент імпульсу системи лишається сталим.

Закон збереження моменту імпульсу для даної системи запишеться у вигляді

$$(I_0 + I_1)\omega_1 = (I_0 + I_2)\omega_2,$$

де момент інерції людини $I_0 = m_0 r_0^2 = 0.08$ кг·м²; момент інерції горизонтальної штанги $I_1 = \frac{ml^2}{12} = 6$ кг·м²; момент інерції штанги, нахиленої на кут $\varphi = 60^\circ$,

$$I_2 = \frac{1}{12} m(l \cos \varphi)^2 = 1.5 \text{ кг·м}^2.$$

Кутову швидкість після нахилу штанги ω_2 , визначаємо із закону збереження моменту імпульсу,

$$\omega_2 = \frac{I_0 + I_1}{I_0 + I_2} \omega_1 = \frac{I_0 + I_1}{I_0 + I_2} 2\pi\nu = 12.1 \text{ с}^{-1}.$$

Робота, виконана людиною при нахилі штанги, дорівнює зміні кінетичної енергії системи, що змінила число обертів,

$$A = \frac{(I_0 + I_2)\omega_2^2}{2} - \frac{(I_0 + I_1)\omega_1^2}{2} = 85.7 \text{ Дж}.$$

94. На яку відстань по дорозі під гору може вкочитись обруч за рахунок своєї кінетичної енергії, якщо перед цим він мав швидкість $v = 2$ м/с, а нахил дороги становить $h = 10$ м на кожні $S = 100$ м шляху? Тертя не враховувати.

Розв'язання. Відстань S , яку проходить обруч, рухаючись по дорозі, можна визначити, якщо буде відома висота h , на яку піднімається обруч, оскільки

$$S = \frac{h}{\sin \alpha}, \text{ де } \alpha - \text{кут нахилу дороги до горизонту.}$$

Висота, на яку піднімається обруч, буде залежати від його повної кінетичної енергії перед початком підйому T , яка дорівнює сумі його кінетичної енергії поступального та обертового рухів, тобто

$$T = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2},$$

але $I = mR^2$, а $v = \omega R$; тому

$$T = \frac{mv^2}{2} + \frac{mR^2\omega^2}{2} = mv^2.$$

Дана кінетична енергія обруча при його підйомі перетвориться в потенціальну енергію

$$U = mgh = mgS \sin \alpha.$$

Так як $T = U$, то $mv^2 = mgS \sin \alpha$, звідки

$$S = \frac{v^2}{g \sin \alpha} = 4.08.$$

95. Маятник у вигляді однорідної кулі жорстко з'єднаний з тонким стержнем, довжина якого рівна радіусу кулі, може коливатись навколо горизонтальної осі, що проходить через кінець стержня (рис. 14). В кулю нормально до поверхні вдарилась кулька масою $m = 0.01$ кг, яка летіла горизонтально зі швидкістю $v = 800$ м/с, і застрягла в кулі. Маса кулі $M = 10$ кг, її радіус $R = 0.15$ м. На який кут α відхилиться маятник в результаті удару. Масою стержня знехтувати.

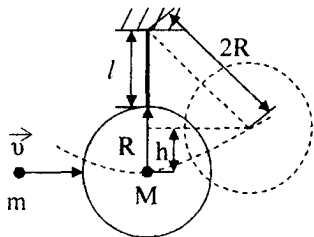


Рис. 14

Розв'язання. Як видно з рисунка, шуканий кут α зв'язаний з висотою h підйому центра кулі:

$$\cos \alpha = \frac{(2R - h)}{2R} = 1 - \frac{h}{2R}.$$

Так як величина h визначає потенціальну енергію, одержану кулею внаслідок удару кульки, то скористаємося законом збереження енергії. Згідно умови задачі удар кульки в нерухому кулю вважається непружним. Отже, при підйомі кулі разом з кулькою кінетична енергія обертального руху системи маятник-кулька буде перетворюватися в потенціальну енергію піднятих тіл. За законом збереження енергії:

$$\frac{I\omega^2}{2} = Mgh + mgh',$$

де I – момент інерції маятника разом з кулькою, h' – висота підйому кульки. Ми не можемо обчислити величини I і h , так як не знаємо в якому місці застрягла кулька. Але $M \gg m$, тому величину mgh' можна відкинути і тоді $h = \frac{I\omega^2}{2Mg}$. Момент інерції маятника обчислимо на основі теореми Штейнера і формули для моменту інерції кулі:

$$I = \frac{2}{3}MR^2 + M(2R)^2 = 4.4MR^2.$$

$$\text{Тепер } h = \frac{4.4MR^2\omega^2}{2Mg} = \frac{2.2R^2\omega^2}{g}.$$

Для обчислення кутової швидкості ω , яку отримає система в результаті удару кульки, використаємо закон збереження моменту імпульсу. Можливість застосування цього закону базується на наступному. В момент удару на систему маятник-кулька діють сила тяжіння і реакція опори. Друга сила проходить через вісь обертання, тому її момент дорівнює нулю. Враховуючи, що за час удару маятник не встигає помітно відхилитись від вертикалі та умову $M \gg m$, можна вважати, що і сила тяжіння під час удару проходить через вісь, а, отже, і її момент також дорівнює нулю. Тому момент імпульсу системи буде зберігатися. Позначивши через L_1 і L_2 моменти імпульсу системи відповідно на початку і в кінці процесу удару, можна записати

$$L_1 = L_2.$$

Величина L_1 є момент імпульсу рухомої кульки відносно осі обертання маятника (сам маятник до удару ще нерухомий). На основі означення маємо

$$L_1 = mv2R.$$

Момент імпульсу L_2 маятника разом з кулькою після удару дорівнює

$$L_2 = I\omega = 4.4MR^2\omega.$$

Тепер

$$mv2R = 4.4MR^2\omega,$$

звідки

$$\omega = \frac{mv}{2.2MR}.$$

Цей вираз підставимо у формулу для обчислення висоти підйому кулі, яка дорівнюватиме

$$h = \frac{2.2R^2m^2v^2}{g2.2^2M^2R^2} = \frac{m^2v^2}{2.2gM^2}.$$

Підставляючи h у формулу для $\cos\alpha$, одержимо

$$\cos\alpha = 1 - \frac{m^2v^2}{4.4M^2gR}.$$

Підставивши в цю формулу числові значення величин, дістанемо

$$\cos\alpha = 0.9; \alpha = 26^\circ.$$

Задачі до теми 4

96. Дві маленькі кульки з однаковою масою $m = 0.02$ кг сполучені тонким стержнем довжиною $l = 0.2$ м та масою $m_1 = 0.06$ кг. Визначити момент інерції системи відносно осі, що перпендикулярна до стержня та проходить через його середину.

$$\text{Відповідь: } 6 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

97. Момент інерції маховика $I = 0.1$ кг $\cdot$ м². Через який час маховик матиме частоту обертання $\nu = 30$ с⁻¹, якщо корисна потужність двигуна $N = 100$ Вт?

$$\text{Відповідь: } 17.7 \text{ с.}$$

98. Тягарець масою $m = 0,1$ кг прив'язано до кінця нитки, намотаної на барабан радіуса $R = 0,04$ м. Знайти момент інерції барабана, якщо тягарець опускається з прискоренням $0,78$ м/с².

Відповідь: $18,3 \cdot 10^{-4}$ кг·м².

99. Куля масою $m = 0,01$ кг і радіусом $R = 0,2$ м обертається навколо нерухомої осі, що проходить через її центр мас. Обертальний рух кулі описується рівнянням $\varphi = At^3 + Bt^2 + C$ ($A = 1$ рад/с³, $B = 4$ рад/с², $C = 5$ рад). Знайти закон зміни моменту сили, що діє на поверхню кулі і приводить її в рух. Визначити момент сили в момент часу $t = 2$ с.

Відповідь: $M = 1,28 - 0,96t$; $-0,64$ Н·м.

100. На шків маятника Обербека (рис. 15) намотана нитка, до якої підвішений тягарець масою $m = 1$ кг. Тягарець опускається з висоти $h = 1$ м. Радіус шківів $r = 0,03$ м. На хрестовині закріплено чотири тягарці масою $m = 0,25$ кг кожний на відстанях від осі $R = 0,3$ м. Маса кожного стержня $m_1 = 0,12$ кг, а довжина — $l = 0,04$ м. Визначити кутове прискорення обертання маятника та прискорення, з яким обертається тягарець.

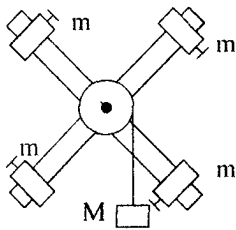


Рис. 15

Відповідь: $0,26$ с⁻²; $2,2$ м/с².

101. Маховик масою $m = 1$ кг закріплений на шківі радіуса $r = 0,05$ м і масою $m_2 = 0,2$ кг. Ця система приводиться у рух за допомогою тягарця масою $m_3 = 0,5$ кг, що прив'язаний до одного з кінців нитки, яка намотана на шків. Знайти частоту обертання маховика через $t = 21$ с. Вважати, що вся маса маховика розподілена по його ободу на відстані $R = 0,4$ м від осі обертання.

Відповідь: 5 с^{-1} .

102. На лаві Жуковського сидить людина і тримає у витягнутих руках два тягарі масою по 10 кг кожний. Відстань тягарів від осі обертання 0,5 м. Частота обертання лави з людиною 1 с^{-1} . Як зміниться частота обертання лави і яку роботу виконає людина, якщо вона перемістить руки так, що відстань від кожного тягаря до осі зменшиться до 0,2 м? Момент інерції лави з людиною відносно осі обертання $2,5\text{ кг}\cdot\text{м}^2$. Вісь обертання проходить через центр мас лави і людини.

Відповідь: $2,3\text{ с}^{-1}$; 190 Дж.

103. Шків, насаджений на вісь електродвигуна, обертається з кутовою швидкістю 93 с^{-1} . Після вимкнення двигуна шків, зробивши 20 обертів, зупинився. Момент інерції шківa $0,01\text{ кг}\cdot\text{м}^2$. Знайти момент сил гальмування та роботу.

Відповідь: $9,4\cdot 10^{-2}\text{ Н}\cdot\text{м}$; -44,4 Дж.

104. Платформа у вигляді суцільного диска радіуса 1 м і масою 240 кг обертається за інерцією навколо вертикальної осі з кутовою частотою $0,1\text{ с}^{-1}$. На краю платформи стоїть людина масою 80 кг. З якою кутовою частотою обертатиметься платформа, якщо людина перейде в її центр? Людину вважати матеріальною точкою.

Відповідь: $0,166\text{ с}^{-1}$.

105. Диск масою 2 кг котиться без ковзання по горизонтальній поверхні зі швидкістю 2 м/с. На якій відстані можна його зупинити, приклавши до обода силу 9,8 Н?

Відповідь: 0,82 м.

106. Куля масою 1 кг, що котиться без ковзання зі швидкістю 10 м/с, вдарається об стінку та відскакує від неї зі швидкістю 8 м/с. Знайти кількість теплоти, що виділяється під час удару.

Відповідь: 25,2 Дж.

107. Платформа у вигляді суцільного диска радіуса 1,5 м і масою 180 кг обертається за інерцією навколо вертикальної осі з частотою 10 хв^{-1} . В центрі платформи стоїть людина масою 60 кг. Яку лінійну швидкість відносно підлоги приміщення буде мати людина, якщо вона перейде на край платформи? Момент інерції людини розраховувати як для матеріальної точки.

Відповідь: 1 м/с.

108. Куля і суцільний циліндр, виготовлені з одного і того ж матеріалу, однакової маси котяться без ковзання з однаковою швидкістю. Визначити, в скільки разів кінетична енергія кулі менша за кінетичну енергію циліндра.

Відповідь: в 1,07.

109. Повна кінетична енергія диска, що котиться по горизонтальній поверхні, дорівнює 24 Дж. Знайти кінетичну енергію поступального і обертального рухів диска.

Відповідь: 16 Дж; 8 Дж.

110. До ободу однорідного диска масою 10 кг, насадженого на вісь, прикладена постійна дотична сила 30 Н. Визначити кінетичну енергію диска через 4 с після початку дії сили.

Відповідь: 1,44 кДж.

111. З похилої площини скочується без ковзання однорідний диск. Лінійне прискорення центра мас диска $3,9 \text{ м/с}^2$. Сила тертя кочення 1 Н. Знайти кут нахилу похилої площини до горизонту.

Відповідь: 36° .

112. Колесо радіуса 0,3 м і масою 3 кг скочується по похилій площині довжиною 5 м і кутом нахилу до горизонту 25° . Визначити момент інерції колеса, якщо його швидкість в кінці руху 4,6 м/с.

Відповідь: $0,259 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$.

113. Однорідний диск котиться без ковзання вгору по похилій площині і досягає висоти 0,94 м. Знайти початкову швидкість центра мас диска.

Відповідь: 3,5 м/с.

114. Маховик у вигляді суцільного диска, момент інерції якого $1,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, обертаючись при гальмуванні рівносповільнено, за 60 с зменшив частоту свого обертання від 4 с^{-1} до 2 с^{-1} . Знайти: кутове прискорення маховика; момент сили гальмування; роботу гальмування.

Відповідь: $0,21 \text{ рад/с}^2$; 0,047 Н·м; 355 Дж.

115. З похилої площини, кут нахилу якої до горизонту 30° , скочується без ковзання кулька. Нехтуючи тертям, знайти час руху кульки по похилій площині, якщо відомо, що її центр мас опустився при скочуванні на 0,3 м.

Відповідь: 0,585 с.

116. На суцільний циліндричний вал радіуса 0,5 м намотана легка нитка, до кінця якої прикріплено вантаж масою 6,4 кг. Вантаж, розмотуючи нитку, опускається з прискоренням 2 м/с^2 . Визначити момент інерції вала і його масу.

Відповідь: $6,25 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$; 50 кг.

117. На суцільний циліндричний барабан радіуса 0,2 м, момент інерції якого $0,15 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, намотана легка нитка, до кінця якої прикріплений тягарець масою 0,5 кг. До початку обертання барабана висота тягарця над підлогою становила 2,3 м. Знайти: час опускання тягарця до підлоги; силу натягу нитки; кінетичну енергію тягарця в момент зіткнення з підлогою.

Відповідь: 2с; 4,31 Н; 1,32 Дж.

118. Маховик у вигляді суцільного диска, момент інерції якого $150 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, обертається з частотою 4 с^{-1} . На маховик почав діяти момент сил гальмування, який зупинив його через 60 с. Знайти: момент сил гальмування; число обертів маховика від початку гальмування до повної зупинки.

Відповідь: $62,8 \text{ Н}\cdot\text{м}$; 120.

119. Частота обертання маховика, момент інерції якого $120 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, становить 4 с^{-1} . Після припинення дії на нього обертового моменту маховик під дією сил тертя зупинився через π хв.. Вважаючи тертя в підшипниках сталим, визначити момент сил тертя.

Відповідь: $16 \text{ Н}\cdot\text{м}$.

120. Маховик починає обертатись зі стану спокою із сталим прискоренням $0,4 \text{ рад/с}^2$. Визначити кінетичну енергію маховика через 25 с після початку руху, якщо через 10 с після початку руху момент імпульсу маховика становив $60 \text{ кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}$.

Відповідь: 750 Дж.

121. Яку роботу треба виконати, щоб збільшити частоту обертів маховика, масу якого 500 кг можна вважати розподіленою по ободу діаметром 1,5 м, від 0 до 2 с^{-1} ?

Відповідь: 22,2 кДж.

122. Вертикальний стовп висотою 5 м підпилюють у основі і він падає на Землю. Визначити лінійну швидкість його верхнього кінця в момент падіння.

Відповідь: 12,2 м/с.

123. Дерев'яний стержень масою 1 кг і довжиною 0,4 м може обертатись навколо осі, що проходить перпендикулярно через його середину. В кінець стержня попадає куля масою 0,01 кг, яка летить перпендикулярно до осі і до стержня зі швидкістю 200 м/с. Визначити кутову швидкість стержня, якщо куля застряє в ньому.

Відповідь: 29 рад/с.

124. Колесо, обертаючись рівносповільнено при гальмуванні, зменшило за 60 с частоту обертання від 5 с^{-1} до 3 с^{-1} . Момент інерції колеса $2 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$. Знайти: кутове прискорення колеса; гальмівний момент; роботу сили гальмування; число обертів за 1 хв.

Відповідь: $-0,21 \text{ рад/с}^2$; $0,42 \text{ Н}\cdot\text{м}$; 630 Дж ; 240 .

125. З якої найменшої висоти повинен з'їхати мотоцикліст, щоб за інерцією без тертя проїхати доріжку, яка має форму „мертвої петлі” радіуса 3 м, і не відірватись від доріжки у верхній точці петлі. Маса мотоцикліста разом з мотоциклом 75 кг, з яких на масу коліс припадає 3 кг. Колеса мотоцикла вважати обручами.

Відповідь: 7,56 м.

5. Механіка рідин і газів

Основні закони і формули

Гідростатичний тиск стовпа рідини на глибині h

$$p = \rho gh, \quad (1)$$

де ρ - густина рідини.

Для рідин і газів (рідин), які перебувають у рівновазі, виконується закон Паскаля: тиск у будь-якій точці рідини, яка перебуває у спокої, однаковий у всіх напрямках і передається однаково по всьому об'єму рідини. Із закону Паскаля витікає:

- 1) повний тиск у будь-якій точці всередині нерухомої рідини на глибині h від відкритої горизонтальної поверхні, на яку діє тиск p_0 ,

$$p = p_0 + \rho gh; \quad (2)$$

- 2) у сполучених посудинах однорідні рідини встановлюються на одному рівні;

- 3) при рівновазі різнорідних рідин у сполучених посудинах висоти стовпів цих рідин обернено пропорційні їх густинам

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}. \quad (3)$$

Згідно із законом Архімеда на будь-яке тіло, занурене в рідину (газ), діє з боку рідини сила, яка напрямлена вертикально вгору і дорівнює вазі витісненої тілом рідини в об'ємі зануреної частини тіла

$$F = \rho_r g V, \quad (4)$$

де ρ_r – густина рідини; а V – об'єм витісненої рідини.

Рівняння нерозривності течії стаціонарного потоку ідеальної рідини

$$vs = const, \quad (5)$$

де v – швидкість рідини; s – площа поперечного перерізу трубки течії.

Рівняння Бернуллі для стаціонарного потоку ідеальної рідини

$$p + \rho gh + \frac{\rho v^2}{2} = const, \quad (6)$$

де p – зовнішній тиск; ρ – густина рідини; h – висота перерізу трубки течії під певним рівнем; v – швидкість течії рідини.

Для трубки течії, розміщеної горизонтально,

$$p + \frac{\rho v^2}{2} = const. \quad (7)$$

Швидкість витікання ідеальної рідини через малий отвір в широкій посудині (формула Торрічеллі)

$$v = \sqrt{2gh}, \quad (8)$$

де h – висота стовпа рідини над отвором.

Закон Стокса для руху тіла кулеподібної форми у в'язкій рідині або при обтіканні нерухомого тіла:

$$F = 6\pi\eta r v, \quad (9)$$

де F – сила опору; η – динамічна в'язкість; r – радіус кулі; v – швидкість тіла (течії).

При ламінарній течії через трубку довжиною l і радіуса R за час t протікає об'єм рідини V , який визначається за формулою Пуазейля:

$$V = \frac{\pi^4 \Delta p l}{8 \eta l}, \quad (10)$$

де Δp – різниця тисків на кінцях трубки.

Число Рейнольдса, яке визначає характер руху рідини,

$$R_e = \frac{\rho \bar{v} l}{\eta}, \quad (11)$$

де ρ – густина рідини; l – характеристичний розмір (наприклад, діаметр труби); $\bar{v}$ – середня в перерізі труби швидкість рідини; η – динамічна в'язкість.

Лобовий опір у випадку турбулентного потоку при невеликих швидкостях течії

$$F_x = C_x \rho S v^2, \quad (12)$$

де C_x – коефіцієнт лобового опору, який залежить від форми тіла і числа Рейнольдса; S – площа проекції тіла на площину, перпендикулярну до швидкості v потоку; ρ – густина рідини (газу).

Підймальна сила

$$F_y = C_y \rho S v^2$$

(13)

де C_y – аеродинамічний коефіцієнт підймальної сили.

Методичні вказівки

В гідроаеростатиці розглядаються умови і закономірності рівноваги рідин і газів під дією прикладених до них сил, а також умови рівноваги твердих тіл, що знаходяться в рідинах і газах. Задачі гідроаеростатики можна розділити на дві основні групи: задачі на розрахунок тиску і сил тиску; задачі, в яких обчислюють або враховують архімедову силу.

1. Розв'язування задач першої групи базується на використанні закону Паскаля і його наслідків. Основними розрахунковими при цьому є

співвідношення (1)-(3). Формула (1) носить загальний характер: тиск не залежить від того, яку форму має посудина, що містить рідину (гідростатичний парадокс).

Задачі на застосування закону сполучених посудин розв'язують у такій послідовності. Спочатку виконують рисунок, на якому відмічають початковий рівень рідини і вибирають поверхню одного рівня на границі розділу середовищ (якщо наливо декілька шарів рідини, то цю поверхню необхідно вибрати на самій нижній границі). Після записують рівняння рівноваги рідин. Якщо до моменту рівноваги рідина перелилась із однієї частини посудини в іншу, то до записаного рівняння додається умова нестисливості рідини $\Delta V_1 = \Delta V_2$. Одержану систему рівнянь розв'язують відносно шуканої величини.

2. Розв'язування задач другої групи оснований на законах динаміки поступального руху твердого тіла з врахуванням архімедової сили. Для розв'язування цих задач необхідно зробити рисунок і, вказавши на ньому діючі на тіло сили, записати основне рівняння динаміки поступального руху (другий закон Ньютона), якщо тіло рухається або записати умову рівноваги у випадку, якщо воно в стані спокою. Після цього виражають сили, що входять в основне рівняння в розгорнутому виді. При необхідності складають додаткові співвідношення і розв'язують одержану систему рівнянь відносно шуканої величини.

Гідроаеродинаміка вивчає закони руху рідин і газів, а також їх взаємодію з твердими тілами при їх відносному русі. При розв'язуванні задач даної теми визначають швидкість течії і витрату рідини в потоці; розраховують потужність потоку, динамічний, статичний і повний тиск; пояснюють дію ряду приладів і вияснюють роль тертя при русі рідини в трубах і обтіканні рухомих тіл. В більшості випадків ці задачі розв'язують з допомогою формули (5). При розв'язуванні невеликої кількості задач використовують закони збереження імпульсу і енергії. Для розв'язування задач на застосування рівняння Бернуллі необхідно знати його математичний вираз (6) і його наслідки.

Приклади розв'язування задач

126. З допомогою гідравлічного преса з відношенням площ поршнів 1:100 потрібно підняти вантаж масою 100 т. Визначити число ходів малого поршня за 1

хв, якщо за один хід він опускається на 0,2 м. Потужність двигуна преса 5 кВт, а коефіцієнт корисної дії преса 80%.

Розв'язання. Число ходів малого поршня преса $n = \frac{A}{A_1}$, де A – робота двигуна преса за час t , A_1 – робота двигуна за час одного ходу малого поршня.

Визначимо роботу A_1 . Для піднімання вантажу масою m , що лежить на великому поршні гідравлічного преса, треба прикласти силу $F_2 = mg$. При цьому до малого поршня повинна бути прикладена сила $F_1 = F_2 \frac{S_1}{S_2}$, де S_1 , S_2 – площі малого і великого поршнів. Робота цієї сили за один хід малого поршня

$$A = F_1 h = F_2 \frac{S_1}{S_2} h.$$

Робота двигуна преса за час піднімання вантажу $A = \eta A_2$, де $A_2 = Pt$, P – потужність двигуна.

Отже, число ходів малого поршня преса

$$n = \frac{\eta Pt S_2}{mg S_1 h} = 120.$$

127. У посудину призматичної форми, в основі якої лежить прямокутник зі сторонами $a=0,1$ м, $b=0,15$ м, налито шар води висотою $h=0,1$ м. Знайти силу тиску шару води на дно і стінки посудини. Яка повинна бути висота H шару води у посудині, щоб сили тиску води на дно і стінки посудини були рівні між собою?

Розв'язання. Так як поверхня дна посудини плоска і $p = \text{const}$, то сила тиску на дно $F_1 = p_1 S_1$ або з врахуванням формули (1) $F_1 = \rho g h a b$, де $S_1 = ab$ – площа дна посудини.

Тиск на бокову стінку посудини буде змінюватися від $P_1 = \rho g h$ до $P_2 = 0$ при зміні висоти стовпа води від h до 0. Тому середнє значення тиску на стінку $P_c = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)$, а сила тиску $F_2 = P_c S_2$, де $S_2 = 2(a+b)h$ – площа стінок посудини.

Отже,

$$F_2 = \frac{1}{2} \rho g h \cdot 2(a+b)h = \rho g h^2 (a+b).$$

Рівень води H у посудині, при якому сили тиску на бокові стінки і дно однакові, знаходимо із рівності сил тиску на дно і стінки посудини:

$$\rho g H a b = \rho g H^2 (a + b).$$

Звідси

$$H = \frac{ab}{a + b}.$$

Підставивши числові значення, отримаємо:

$$F_1 = 14,7 \text{ Н}; F_2 = 24,5 \text{ Н}; H = 0,06 \text{ м}.$$

128. З вишки, розміщеної на висоті $h = 1,5 \text{ м}$ над водою, вертикально падає тонкий алюмінієвий стержень довжиною $l = 0,5 \text{ м}$. Яка швидкість стержня в момент удару об дно водойму, якщо його глибина біля вишки $H = 3 \text{ м}$? Опором повітря і води руху стержня знехтувати.

Розв'язання. Згідно закону збереження і перетворення енергії, зміна кінетичної енергії стержня дорівнює роботі рівнодійної сил, що діють на стержень:

$$\Delta E = A.$$

Знайдемо роботу A . До того моменту, коли стержень почав занурюватися у воду, на нього діє тільки сила тяжіння $mg = \rho_a l S g$ (S – площа поперечного перерізу стержня, ρ_a – густина алюмінію). Робота цієї сили на ділянці шляху до поверхні води

$$A_1 = mgh = \rho_a l S g h.$$

Коли стержень досягне поверхні води, на нього будуть діяти дві сили: сила тяжіння $\rho_a l S g$ і виштовхувальна сила $\rho_v l S g$, величина якої змінюється в міру занурення стержня у воду за лінійним законом від нуля до $\rho_v l S g$. Отже, і рівнодійна сила на цій ділянці шляху змінюється за лінійним законом від $\rho_a l S g$ до $(\rho_a - \rho_v) l S g$, а робота цієї сили

$$A_2 = F_{cp} l = \left(\rho_a - \frac{\rho_v}{2} \right) g l^2 S.$$

При подальшому русі стержня у воді рівнодійна сила постійна і дорівнює $(\rho_a - \rho_v) l S g$. Робота цієї сили

$$A_3 = F(H-l) = (\rho_a - \rho_v)gl(H-l)S.$$

Повна робота $A = A_1 + A_2 + A_3$, а зміна кінетичної енергії стержня $\Delta E = \frac{\rho_a l S v^2}{2}$.

Отже,

$$\rho_a l S g h + \left(\rho_a - \frac{\rho_v}{2} \right) g l^2 S + (\rho_a - \rho_v) g l (H-l) S = \left(\frac{\rho_a l S v^2}{2} \right)$$

звідки

$$v = \sqrt{2g \left[H - \frac{\rho_v}{\rho_a} (H - 0.5l) \right]} = 8.4 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

129. У стінці циліндричної посудини з водою зроблено на відстані 0,2м один над одним два однакові отвори площею $S = 2 \text{ см}^2$. Знайти координати точки перетину потоків води, які витікають із отворів, якщо в посудину щосекунди вливають $Q = 1.4 \text{ дм}^3$ води (рис. 16).

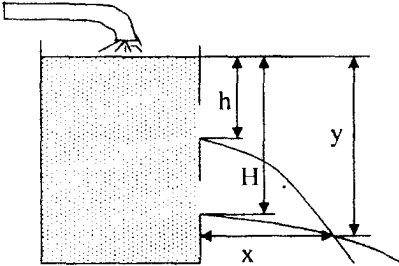


Рис. 16

Розв'язання. Точка перетину потоків залишається на місці, якщо рівень води у посудині не змінюється. Для цього необхідно, щоб об'ємний розхід води був рівний $Q = S v_1 + S v_2$, де $v_1 = \sqrt{2gh}$ і $v_2 = \sqrt{2g(H+h)}$ - швидкості витікання потоків із отворів.

На основі законів кінематики запишемо:

$$x = v_1 t_1 = v_2 t_2; \quad y = h + \frac{g t_1^2}{2} = h + H + \frac{g t_2^2}{2},$$

де t_1 і t_2 - час, протягом якого вода "падає" із отворів до точки перетину потоків.

Звідси

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{Q^2}{2gS_1^3} - H^2 \frac{2gS_1^2}{Q^2} \right); \text{ а } y = \frac{1}{2} \left(\frac{Q^2}{2gS_2^3} + H^2 \frac{2gS_2^2}{Q^2} \right).$$

Підставивши числові значення величин дістанемо $x = 1,2 \text{ м}$, $y = 1,3 \text{ м}$.

130. Площа поршня шприца $S_1 = 1,2 \text{ см}^2$, а площа отвору голки шприца $S_2 = 1 \text{ мм}^2$. Скільки часу буде витікати вода із шприца, якщо хід поршня $l \cong 4 \text{ см}$ і на нього діють силою $F = 5 \text{ Н}$?

Розв'язання. Об'єм води, що витікає із шприца, рівний об'єму шприца: $S_1 l = S_2 v_2 t$, де v_2 - швидкість витікання води. Звідси

$$t = \frac{S_1 l}{S_2 v_2}. \quad (1)$$

Для визначення v_2 запишемо рівняння Бернуллі:

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \rho g h_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} \quad (2)$$

Якщо шприц розміщений горизонтально, то $h_1 = h_2$, $p_1 = \frac{F}{S_1} + p_{\text{ат}}$ де $p_{\text{ат}}$ атмосферний тиск, тому рівняння Бернуллі перепишемо так:

$$\frac{F}{S_1} + \frac{\rho v_1^2}{2} = \frac{\rho v_2^2}{2}. \quad (3)$$

У відповідності з умовою нерозривності потоку рідини

$$S_1 v_1 = S_2 v_2. \quad (4)$$

Із рівнянь (3) і (4) маємо

$$\frac{F}{S_1} + \frac{1}{2} \rho \frac{S_2^2}{S_1^2} v_2^2 = \frac{1}{2} \rho v_2^2. \quad (5)$$

З рівняння (5) знайдемо

$$v_2 = \sqrt{\frac{2FS_1}{\rho(S_1^2 - S_2^2)}}.$$

Підставивши значення у формулу (1), дістанемо

$$t = \frac{S_1 l}{S_2} \sqrt{\frac{\rho(S_1^2 - S_2^2)}{2FS_1}} = \frac{S_1 l}{S_2} \sqrt{\frac{\rho S_1}{2F} \left[1 - \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2 \right]}.$$

Так як $S_2 \ll S_1$, то дробом $\left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2$ можна знехтувати і тоді

$$t \approx \frac{S_1 l}{S_2} \sqrt{\frac{\rho S_1}{2F}} = 0,52 \text{ с.}$$

Задачі до теми 5

131. У посудину налито ртуть і зверху неї олію. Опушена в посудину куля плаває так, що наполовину занурена в ртуть. Визначити густину матеріалу кулі. Густина олії 900 кг/м^3 .

Відповідь: 7250 кг/м^3 .

132. Два тіла, об'єми яких V і $2V$, зрівноважені на терезах. Потім більше тіло занурили в олію, густина якої 900 кг/м^3 . Якою повинна бути густина рідини, в яку слід одночасно опустити менше тіло, щоб рівновага терезів не порушилась?

Відповідь: 1800 кг/м^3 .

133. У стінці посудини з водою зробили два отвори на відстані $0,2 \text{ м}$ один над одним площею 2 см^2 кожний. Визначити координати точки перетину потоків, що витікають з отворів, якщо у посудину кожної секунди вливається $1,4 \text{ дм}^3$ води.

Відповідь: $x=1,2\text{м}; y=1,3\text{м}$.

134. На гідропресі, що має відношення діаметрів поршнів $1:5$ і ККД 80% , пресують тіло. При цьому малий поршень робить 50 ходів по $0,1\text{м}$. Знайти масу тіла, якщо сила тиску на верхню площадку гідропреса досягає 100кН , а сила тиску на малий поршень 7кН .

Відповідь: $4 \cdot 10^3 \text{ кг}$.

135. Водомір являє собою горизонтальну трубу змінного перерізу, в яку впає дві вертикальні манометричні трубки однакового перерізу (рис. 17). По трубці тече вода. Нехтуючи в'язкістю води, визначити її масовий розхід, якщо різниця рівнів у манометричних трубках $\Delta h = 0,08 \text{ м}$, а перерізи труби у основ манометричних трубок відповідно дорівнюють $S_1 = 6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ і $S_2 = 12 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$. Густина води – 1000 кг/м^3 .

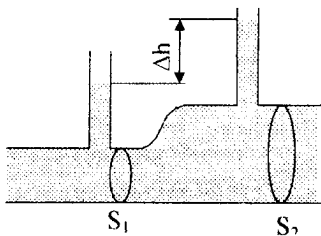


Рис. 17

Відповідь: $868 \cdot 10^{-3}$ кг/с.

136. У посудину за кожну 1 с наливають 0,2 л води. Який повинен бути діаметр отвору в дні посудини, щоб вода в ній знаходилась на сталому рівні $83 \cdot 10^{-3}$ м?

Відповідь: $14 \cdot 10^{-3}$ м.

137. Водою і мазутом заповнений вертикально розміщений циліндричний бак. Висота води у баку 1 м, густина мазуту 900 кг/м^3 . У дні баку зроблено отвір, через який витікає вода з швидкістю 9,5 м/с. Знайти висоту шару мазуту в баку.

Відповідь: 4 м.

138. У посудині, заповненій касторовим маслом, падає стальна кулька зі сталою швидкістю 0,2 м/с. Динамічна в'язкість касторового масла $2 \text{ Н} \cdot \text{с/м}^2$. Визначити радіус кульки.

Відповідь: $0,5 \cdot 10^{-3}$ м.

139. Бак циліндричної форми з площею основи 10 м^2 і об'ємом 100 м^3 заповнений водою. Нехтуючи в'язкістю води, визначити час, протягом якого вода повністю витече з бака, якщо у дні бака зробили круглий отвір площею $8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$.

Відповідь: $17,8 \cdot 10^3$ с.

140. Площа поршня вставленого у горизонтально розміщений заповнений водою шприц $1,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$, а площа отвору його голки $0,8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$. Нехтуючи тертям і в'язкістю, визначити час, за який витече вода з шприца, якщо на поршень діяти із постійною силою 5 Н, а хід поршня $5 \cdot 10^{-2}$ м. Густина води 1000 кг/м^3 .

Відповідь: 1,15 с.

141. Стальна порожниста куля плаває у воді, занурившись наполовину. Знайти об'єм внутрішньої порожнини кулі, якщо її маса 6 кг, а густина сталі $7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

Відповідь: $11,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$.

142. Рідина виштовхується поршнем шприца площею $2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ через отвір голки площею $1,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$. Хід поршня становить $8 \cdot 10^{-2} \text{ м}$. Знайти тиск на поршень, якщо рідина витікає з нього протягом 3 с. Шприц розміщений горизонтально, а рідина, густина якої 840 кг/м^3 , перебуває під атмосферним тиском.

Відповідь: 40 Па.

143. Нехтуючи в'язкістю рідини, визначити швидкість витікання рідини з малого отвору в стінці посудини, якщо висота рівня рідини над отвором 1,5 м.

Відповідь: 5,42 м/с.

144. Кулька спливає з постійною швидкістю в рідині, густина якої в три рази більша від густини матеріалу кульки. Знайти відношення сили тертя, що діє на кульку, до її ваги.

Відповідь: 2.

145. Обчислити максимальне значення швидкості потоку води у трубі діаметром 0,02 м, при якому рух рідини залишається ламінарним. Прийняти, що $R_{кр} = 3000$.

Відповідь: 0,15 м/с.

146. У широкій посудині, наповненій гліцерином, падає свинцева кулька. Вважаючи, що при числі Рейнольда $R_e \leq 0,5$ виконується закон Стокса (при обчисленні R_e в якості характерного розміру береться діаметр кульки), визначити граничний діаметр кульки. Густина гліцерину 1260 кг/м^3 , а динамічна в'язкість $1,48 \text{ Па}\cdot\text{с}$. Густина свинцю 11300 кг/м^3 .

Відповідь: $5,41 \cdot 10^{-3} \text{ м}$.

147. Потужність двигуна автомобіля 62,5 кВт. 20 % цієї потужності йде на виконання роботи для подолання опору повітря при турбулентному русі з швидкістю 16 м/с. Густина повітря $1,2 \text{ кг/м}^3$, коефіцієнт опору взяти таким, що

дорівнює 0,6. Визначити площу моделі автомобіля (найбільша площа перерізу в напрямку, перпендикулярному швидкості).

Відповідь: $3,75 \text{ м}^2$.

148. У бокову поверхню циліндричного бака радіуса $0,02 \text{ м}$ вставили горизонтальний капіляр довжиною $0,02 \text{ м}$ та радіуса $0,001 \text{ м}$. В бак налито касторове масло, динамічна в'язкість якого $1,2 \text{ Па}\cdot\text{с}$. Знайти залежність швидкості опускання рівня касторового масла в баку від висоти цього рівня над капіляром та обчислити її значення для висоти рівня $0,26 \text{ м}$.

Відповідь: $3 \cdot 10^{-5} \text{ м/с}$.

149. У бокову поверхню посудини вставили горизонтальний капіляр довжиною $0,012 \text{ м}$ та діаметром $0,002 \text{ м}$. Через капіляр витікає касторове масло, густина якого 960 кг/м^3 і динамічна в'язкість $0,99 \text{ Па}\cdot\text{с}$. Рівень масла у посудині підтримується на сталій висоті $0,3 \text{ м}$ вище капіляра. Визначити час, протягом якого через капіляр витече $10 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$ масла.

Відповідь: 107 с .

150. Визначити найбільшу швидкість, яку може розвинути вільно падаюча у повітрі (густина $1,29 \text{ кг/м}^3$) свинцева кулька (густина 11300 кг/м^3) масою $0,012 \text{ кг}$. Коефіцієнт лобового опору дорівнює $0,5$.

Відповідь: $77,6 \text{ м/с}$.

151. Парашут масою 32 кг у розкритому стані має форму півсфери діаметра 12 м і володіє коефіцієнтом опору $1,3$. Знайти максимальну швидкість руху парашутиста масою 65 кг при густині повітря $1,29 \text{ кг/м}^3$.

Відповідь: $3,17 \text{ м/с}$.

6. Механічні коливання і хвилі

Основні закони і формули

Зміщення, швидкість і прискорення при гармонічних коливаннях змінюються за законом синуса або косинуса:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0); \quad (1)$$

$$v = \dot{x} = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0); \quad (2)$$

$$a = \ddot{x} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x, \quad (3)$$

де A – амплітуда коливань; ω – циклічна частота; $\omega t + \varphi_0$ – фаза коливань; φ_0 – початкова фаза; t – час.

Циклічна частота ω , період коливань T і частота ν зв'язані співвідношенням

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu. \quad (4)$$

При додаванні двох однаконо напрямлених гармонічних коливань однакового періоду, одержується гармонічне коливання того ж періоду, амплітуда якого A і початкова фаза φ_0 визначаються за такими формулами:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}; \quad (5)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}; \quad (6)$$

де A_1 і A_2 – амплітуди коливань, а φ_1 і φ_2 – їх початкові фази.

Сила, що діє на тіло при вільних гармонічних коливаннях (квазіпружна сила), завжди пропорційна зміщенню і напрямлена в сторону, протилежну зміщенню:

$$F = ma = -m\omega^2 x = -kx, \quad (7)$$

де $k = m\omega_0^2$ – коефіцієнт квазіпружної сили, яка спричинює зміщення x , що дорівнює одиниці.

При відсутності опору середовища, власна циклічна частота ω_0 і період T дорівнюють:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (8)$$

Період коливань математичного маятника довжиною l

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (9)$$

Період коливань фізичного маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}, \quad (10)$$

де I – момент інерції маятника, а l – відстань від осі до його центра тяжіння.

Повна енергія тіла, що здійснює гармонічні коливання, стала і дорівнює

$$W = \frac{m\omega^2 A^2}{2}. \quad (11)$$

Рівняння затухаючих коливань при наявності сили опору F_0 , пропорційної швидкості v ($F_0 = -rv$, де r – коефіцієнт опору), має вигляд

$$x = A_0 e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (12)$$

В (12) $A_0 e^{-\alpha t}$ – амплітуда затухаючих коливань (спадна функція часу); α – коефіцієнт затухання; ω – циклічна частота; A_0 і φ_0 – початкові амплітуда і фаза (визначаються із початкових умов). Величини α і φ визначаються через параметри коливальної системи r , m і k за формулами:

$$\alpha = \frac{r}{2m}; \quad (13)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \alpha^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}. \quad (14)$$

Логарифмічний декремент затухання

$$\delta = \ln \frac{A_{(t)}}{A_{(t+T)}} = \alpha T = \frac{r}{2m} T. \quad (15)$$

Добротність коливальної системи

$$\theta = \frac{\pi}{\delta} = \frac{\pi}{\alpha T}. \quad (16)$$

Рівняння вимушених коливань

$$x = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (17)$$

$$\text{в якому } A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}}, \quad (18)$$

а зсув фаз між вимушуючою силою і зміщенням

$$\varphi = \arctg\left(\frac{2\alpha\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right). \quad (19)$$

Резонансна циклічна частота

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2}. \quad (20)$$

Значення амплітуди коливань при резонансі

$$A = \frac{F_0}{2m\alpha\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}. \quad (21)$$

Рівняння біжучої плоскої хвилі описується рівнянням

$$y = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right), \quad (22)$$

де y – зміщення від положення рівноваги точки, яка знаходиться на відстані x від джерела коливань, що характеризується амплітудою A , циклічною частотою ω і початковою фазою φ_0 .

Довжина хвилі (відстань між точками середовища, які коливаються із різницею фаз 2π)

$$\lambda = vT \text{ або } \lambda = \frac{v}{\nu}, \quad (23)$$

де $\nu = \frac{1}{T}$ – частота коливань.

Хвильове число

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}. \quad (24)$$

З врахуванням (24) рівняння (22) набуває вигляду

$$y = A \sin(\omega t - kx). \quad (25)$$

Рівняння сферичної хвилі

$$y = \frac{A}{r} \sin(\omega t - kr), \quad (26)$$

де r – відстань від джерела коливань.

Зв'язок між різницею фаз $\Delta\varphi$ двох точок біжучої хвилі і різницею ходу $\Delta x = x_2 - x_1$, тобто різницею відстаней цих точок до джерела коливань:

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta}{\lambda}. \quad (27)$$

Умови максимуму і мінімуму амплітуди коливань при інтерференції хвиль:

$$\Delta_{\max} = 2m \frac{\lambda}{2}; \quad \Delta_{\min} = (2m+1) \frac{\lambda}{2}, \quad (28)$$

де $m=0, 1, 2 \dots$.

Фазова v і групова u швидкості та зв'язок між ними:

$$v = \frac{\omega}{k}; \quad u = \frac{d\omega}{dk}; \quad u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}. \quad (29)$$

Рівняння стоячої хвилі

$$y = 2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \cos \omega t = 2A \cos kx \cos \omega t. \quad (30)$$

Координати пучностей і вузлів

$$x_n = m \frac{\lambda}{2}; \quad x_s = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2}, \quad (31)$$

де $m=0, 1, 2 \dots$.

Швидкість поширення повздовжніх хвиль у пружному середовищі

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (32)$$

де E – модуль Юнга; ρ – густина середовища.

Швидкість поширення повздовжніх хвиль

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (33)$$

де G – модуль зсуву.

Швидкість звуку в газах

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}, \quad (34)$$

де p і ρ – тиск і густина газу перед поширенням в ньому хвилі; γ – відношення молярних теплоємностей газу при сталому тиску і об'ємі.

Кінетична енергія хвильового руху в об'ємі ΔV

$$W_k = \frac{1}{2} \rho \Delta V \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t - kx). \quad (35)$$

Потенціальна енергія хвильового руху в об'ємі ΔV

$$W_n = \frac{1}{2} \rho \Delta V \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t - kx). \quad (36)$$

Повна енергія хвильового руху в об'ємі ΔV

$$W = W_k + W_n = \rho \Delta V \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t - kx). \quad (37)$$

Середнє значення об'ємної густини енергії за часом

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2. \quad (38)$$

Потік енергії хвилі

$$\Phi = \bar{w} S v,$$

де S – площа поверхні, через яку переноситься енергія хвилі; v – швидкість поширення хвилі.

Середнє значення густини енергії хвилі (вектор Умова)

$$\bar{J} = \bar{w} v. \quad (40)$$

Інтенсивність або сила звуку

$$I = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 v = \frac{(\Delta p_0)^2}{2 \rho v}, \quad (41)$$

де $\Delta p_0 = \rho A \omega v$ – амплітуда звукового тиску.

Рівень гучності звуку в децибелах

$$\beta = 10 \lg \frac{I}{I_0}, \quad (42)$$

де I – інтенсивність звуку певної частоти; I_0 – інтенсивність звуку на порозі чутності ($I_0 = 1 \text{ пВт/м}^2$).

Зміна інтенсивності звуку з відстанню

$$I = I_0 e^{-\alpha x}, \quad (43)$$

де I_0 – початкова сила звуку; I – сила звуку, що пройшов шлях x в середовищі; α – коефіцієнт поглинання.

Ефект Доплера в акустиці

$$\nu = \nu_0 \frac{\nu \pm \nu_{np}}{\nu \mp \nu_{джер}}, \quad (44)$$

де ν – частота звуку, який реєструє приймач; ν_0 – частота звуку, який посилає джерело; ν – швидкість поширення звуку; $\nu_{джер}$ – швидкість руху джерела; ν_{np} – швидкість руху приймача. Верхні знаки беруться при зближенні джерела і приймача, а нижні – при їх віддаленні.

Методичні вказівки

1. Кінематика коливального руху.

Рівняння гармонічного коливання можна записати двома способами, які базуються на простому зв'язку між синусом і косинусом:

$$\cos \alpha = \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right); \quad \sin \alpha = \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right).$$

Тому зміщення, швидкість і прискорення того ж самого коливання, що описується рівняннями (1) – (3) завжди можна записати у вигляді таких рівнянь:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi'); \quad$$

$$v = \dot{x} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi'); \quad$$

$$a = \ddot{x} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi') = -\omega^2 x,$$

де $\varphi' = \varphi_0 - \frac{\pi}{2}$. Початкові фази φ_0 і φ' при розв'язуванні задач знаходять із початкових умов.

Із системи рівнянь (1) – (3) також витікає, що максимальному зміщенню при гармонічних коливаннях відповідає нульова швидкість і максимальне прискорення, напрямлене протилежно зміщенню в сторону рівноваги. Навпаки, в положенні рівноваги ($x=0$) швидкість максимальна, а прискорення дорівнює нулю.

При додаванні n ($n > 2$) однаково напрямлених гармонічних коливань з рівними періодами амплітуду і початкову фазу результуючого коливання можна знаходити за формулами (5) і (6), послідовно використовуючи їх $n-1$ разів. Але більш ефективним в цьому випадку є метод векторних діаграм (див. задачу 153).

В задачах на знаходження траєкторії точки, що бере участь в двох взаємно перпендикулярних коливаннях, потрібно виключити час t із рівнянь коливань:

$$x = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1);$$

$$y = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Якщо при цьому $\omega_1 = \omega_2$, то результуючою траєкторією рухомої точки буде еліпс.

Спосіб знаходження швидкості і прискорення точки в будь-який момент її руху розглянуто в задачі 154.

2. Динаміка коливального руху.

Якщо тіло виконує коливання під дією квазіпружної сили, то незалежно від природи цієї сили циклічна частота і період коливань, які будуть гармонічними, завжди визначаються за формулами (8). В окремому випадку, коли коливання зумовлені пружною силою пружини, то коефіцієнт k називається коефіцієнтом жорсткості пружини, а формули (8) виражають циклічну частоту і період коливань пружинного маятника.

Циклічна частота ω затухаючих коливань, як це витікає із (14), завжди менша за циклічну частоту ω_0 вільних коливань при відсутності опору. Отже, опір середовища приводить до зменшення частоти і до збільшення періоду коливань. Але в багатьох задачах, коли опір середовища незначний, його впливом можна знехтувати і тоді частоту та період обчислюють за формулами (8). Це можна робити при виконанні наступних нерівностей:

$$\alpha^2 \ll \omega_0^2 \text{ і } \delta^2 \ll 4\pi^2.$$

Перша умова витікає із виразу (14), а другу виведено при розв'язуванні задачі 157.

3. Механічні хвилі. Звук.

Задачі цієї теми можна розділити на три основні групи: задачі, в яких визначають або враховують швидкість поширення пружних хвиль в різних середовищах; задачі на використання рівняння плоскої хвилі і обчислення фаз коливань точок середовища, в якому поширюється пружна хвиля; задачі, в яких розглядається інтерференція пружних хвиль.

Для розв'язування задач першої групи застосовують формули (23), (32) – (34). Тут важливо звернути увагу на відмінність понять фазова швидкість поширення пружної хвилі і швидкість гармонічного коливання точок середовища, в якому поширюється хвиля. Швидкість гармонічного коливального руху, яка обчислюється за формулою (2) – це миттєва швидкість коливання точки в момент часу t . Швидкість поширення хвилі в даному середовищі – величина стала.

При розв'язуванні задач другої групи основним є рівняння (22) із якого видно, що зміщення точки y є функцією двох змінних – часу t і відстані x . При $x=0$ отримуємо рівняння коливань вібратора $y=A\sin\alpha t$, а при $t=0$ – рівняння хвилі в даний момент часу $y=-A\sin 2\pi \frac{x}{\lambda}$. Графічно ці рівняння зображаються однаково – з допомогою нескінченної синусоїди. Але в першому випадку це графік коливання однієї точки з часом, а в другому – графік зміщення різних точок хвилі.

Загальне рішення при $t \neq 0$, $x \neq 0$ визначає зміщення однієї точки в хвилі через час t від початку коливань першої точки і на відстані x від досліджуваної точки до початкової.

Потрібно відмітити, що рівняння (22) є універсальним для хвиль різної фізичної природи.

Для розв'язування задач на інтерференцію хвиль користуються формулами (22), (27) і (28). Особливе місце займають задачі, в яких розглядаються стоячі хвилі. При розв'язуванні таких задач слід відмітити, що стоячі хвилі виникають при додаванні двох коливань, утворених біжучою і відбитою хвилями. Рівняння біжучої і відбитої хвиль можна записати так:

$$y_1 = A_0 \sin(\omega t - kx); \quad y_2 = A_0 \sin(\omega t + kx).$$

При їх накладанні утворюється стояча хвиля

$$y = y_1 + y_2 = 2A_0 \cos kx \sin \omega t,$$

де амплітуда коливання точок стоячої хвилі

$$A = 2A_0 \cos kx = 2A_0 \cos \frac{2\pi x}{\lambda},$$

яка є періодичною функцією координати x .

Точки, в яких амплітуда стоячої хвилі дорівнює нулю, називаються вузлами, а точки, в яких амплітуда максимальна ($A = 2A_0$), називаються пучностями стоячої хвилі.

Координати вузлів і пучностей визначають із таких умов:

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = (2n+1)\frac{\pi}{2}, \quad x_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2};$$

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \pi, \quad x_n = n\frac{\lambda}{2}; \quad n=0, 1, 2, \dots$$

Відстань між сусіднім вузлом і пучністю

$$x_n - x_{n-1} = \frac{\lambda}{2},$$

а між двома сусідніми вузлами або пучностями становить половину довжини хвилі, тобто $\frac{\lambda}{2}$.

Важливо звернути увагу на відмінність біжучої і стоячої хвилі, підкресливши при цьому, що коливання окремих точок в цих хвилях описуються синусоїдальним законом, а тому в цьому відношенні біжуча і стояча хвилі не відрізняються. Відмінність проявляється при порівнянні коливань сусідніх точок. У біжучій хвилі сусідні точки за напрямом поширення коливань коливаються з однаковою амплітудою, але мають різні координати x і, отже, різні фази. У стоячій хвилі всі точки між двома вузлами коливаються з різними амплітудами, але з однаковими фазами, оскільки аргумент синуса у рівнянні стоячої хвилі не залежить від координати x .

Приклади розв'язування задач

152. Матеріальна точка здійснює гармонічні коливання вздовж осі Ox . Через $t_1 = 0.1$ с від початку руху зміщення точки від положення рівноваги $x_1 = 0.05$ м, швидкість $v_{1x} = 0.62$ м/с, прискорення $a_{1x} = 5.4$ м/с². Визначити: 1) амплітуду, циклічну частоту і початкову фазу коливань; 2) зміщення, швидкість і прискорення в початковий момент ($t = 0$).

Розв'язання. Закон руху матеріальної точки в загальному вигляді та закони зміни швидкості і прискорення описуються рівняннями (1) – (3) (див. методичні вказівки).

Підставивши в дані рівняння значення t_1 , x_1 , v_{1x} і a_{1x} , отримаємо:

$$x_1 = A \sin(\omega t_1 + \varphi_0); \quad v_{1x} = A \omega \cos(\omega t_1 + \varphi_0); \quad a_{1x} = -A \omega^2 \sin(\omega t_1 + \varphi_0). \quad (1)$$

Розглянемо перше і третє із рівнянь (1). Легко бачити, що $a_{1x} = -x_1 \omega^2$, звідки

$$\omega = \sqrt{-\frac{a_{1x}}{x_1}} = 10.4 \text{ с}^{-1}.$$

Піднісши до квадрату перші два рівняння системи (I) (попередньо друге рівняння розділимо на ω) і почленно їх додавши, отримаємо $x_1^2 + \frac{v_{1x}^2}{\omega^2} = A^2$. Звідси амплітуда коливань

$$A = \sqrt{x_1^2 + \frac{v_{1x}^2}{\omega^2}} = 0.078 \text{ м.}$$

Щоб знайти початкову фазу, підставимо знайдене значення A і ω , наприклад, в перше із рівнянь (I). Так як початкову фазу прийнято виражати в долях π , то запишемо рівняння (1), ввівши період коливань $T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,6 \text{ с}$.

$$\text{Тоді } \omega t_1 = \frac{2\pi t_1}{T} = \frac{2\pi}{6} \text{ і}$$

$$x_1 = A \sin\left(\frac{2\pi}{6} + \varphi_0\right),$$

$$\frac{2\pi}{6} + \varphi_0 = \arcsin\left(\frac{x_1}{A}\right) = \arcsin 0.64,$$

звідки

$$\frac{2\pi}{6} + \varphi_0 = 40^\circ = \frac{2\pi}{9}, \quad \varphi_0 = -\frac{\pi}{9}.$$

За знайденими значеннями A і φ_0 визначимо $x(0)$, $v_x(0)$ і $a_x(0)$ – координату, швидкість і прискорення точки в початковий момент часу. Для цього підставимо у рівняння (1) – (3) значення $t = 0$: $x(0) = -0.027 \text{ м}$; $v_x = 0.76 \text{ м/с}$; $a_x(0) = 2.89 \text{ м/с}^2$.

153. Матеріальна точка приймає участь у трьох коливаннях, що відбуваються по одній прямій і описуються рівняннями:

$$x_1 = 3 \cos t; \tag{1}$$

$$x_2 = 3 \cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right); \tag{2}$$

$$x_3 = 3 \sin\left(t + \frac{7\pi}{6}\right) \tag{3}$$

(зміщення дані в сантиметрах). Знайти амплітуду і початкову фазу результуючого коливання. Записати його рівняння.

Розв'язання. Точка бере участь у трьох гармонічних коливаннях, так як її зміщення x_1 , x_2 і x_3 являються косинусоїдальними (синусоїдальними) функціями часу. Результируюче коливання точки також буде гармонічним. Його амплітуду і початкову фазу можна знайти за формулами (5) і (6) методичних вказівок, але для цього рівняння (3) перепишемо так:

$$x_3 = 3 \cos\left(t + \frac{2\pi}{3}\right). \quad (4)$$

Порівнявши (1), (2), (4) із загальним рівнянням гармонічних коливань, бачимо, що дані коливання характеризуються такими властивостями: амплітуди $A_1 = A_2 = A_3 = 3$ см; циклічні частоти $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 1$ рад/с; початкові фази $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{3}$, $\varphi_3 = \frac{2\pi}{3}$.

З допомогою формул (5) і (6) можна спочатку додати будь-які два з трьох заданих коливань, а після, застосувавши ці ж формули, знайти амплітуду A і початкову фазу φ результируючого коливання.

До цього ж результату прийдемо швидше, застосувавши метод векторних діаграм. На рис. 18 побудована векторна діаграма за даними задачі.

Із рисунка отримуємо: $\varphi = \frac{\pi}{3}$; $A = 2A_1$, тобто $A = 6$ см. Тепер запишемо рівняння результируючого коливання:

$$x = 6 \cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right).$$

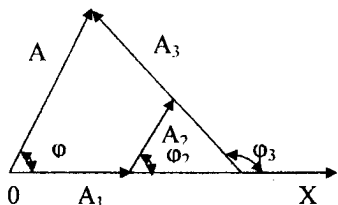


Рис. 18

154. Точка бере участь одночасно у двох взаємно перпендикулярних коливаннях, які описуються рівняннями $x = 2 \sin \pi t$ та $y = -\cos \pi t$ (зміщення дані в сантиметрах). Знайти рівняння траєкторії точки. Визначити швидкість і прискорення точки в момент $t = 0,5 \text{ с}$.

Розв'язання. Так як циклічні частоти коливань однакові, траєкторією точки буде еліпс. Виключивши час t із двох заданих рівнянь, отримаємо

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1.$$

Це канонічне рівняння еліпса з півсями 2 см і 1 см.

Швидкість точки $\vec{v}$ при її русі по еліпсу дорівнює векторній сумі швидкостей $\vec{v}_x$ і $\vec{v}_y$ в коливаннях, які додаються. Так як ці коливання взаємно перпендикулярні, то

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

Аналогічно знайдемо прискорення:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2},$$

де a_x , a_y – прискорення точки в заданих коливаннях.

За формулами (2) і (3) маємо:

$$v_x = 2\pi \cos \pi t; \quad v_y = \pi \sin \pi t;$$

$$a_x = -2\pi^2 \sin \pi t; \quad a_y = \pi^2 \cos \pi t.$$

Тоді

$$v = \sqrt{4\pi^2 \cos^2 \pi t + \pi^2 \sin^2 \pi t},$$

$$a = \sqrt{4\pi^4 \sin^2 \pi t + \pi^4 \cos^2 \pi t}.$$

Підставивши у дані формули $t = 0,5 \text{ с}$ і виконавши обчислення, дістанемо $v = 3,14 \text{ см/с}$; $a = 19,7 \text{ см/с}^2$.

155. Куля масою $m = 0.5$ кг підвішена на пружині, жорсткість якої $k = 32$ Н/м, і здійснює затухаючі коливання. Визначити їх період у двох випадках: 1) за час, протягом якого відбулося $n_1 = 88$ коливань і амплітуда зменшилася в $N_1 = 2$ рази; 2) за час двох коливань ($n_2 = 2$) амплітуда зменшилася в $N_2 = 20$ разів.

Розв'язання. Опір середовища зменшує частоту вільних коливань. Циклічна частота затухаючих коливань визначається за формулою (14) (див. методичні

вказівки), звідки період $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}$.

Власну циклічну частоту ω_0 виразимо за формулою (8):

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 8 \text{ рад/с.}$$

Коефіцієнт затухання α не можна знайти на основі умови задачі. Згідно (15) він дорівнює

$$\alpha = \frac{\delta}{T}.$$

Щоб знайти величину δ , звернемося до рівняння затухаючих коливань (12), на основі якого

$$A = A_0 e^{-\alpha t} = A_0 e^{-\frac{\delta}{T} t}.$$

Користуючись введеними в умові позначеннями, можна записати: $\frac{A_0}{A} = N$;

$\frac{t}{T} = n$. Тоді із попередньої формули витікає, що $e^{nt} = N$, звідки, логарифмуючи, маємо

$$\delta = \frac{\ln N}{n}.$$

Підставивши числові значення N і n для двох випадків, дістанемо

$$\delta_1 = 0.0079; \delta_2 = 1.5.$$

Тепер перепишемо формулу для визначення періоду, підставивши в неї коефіцієнт затухання $\alpha = \frac{\delta}{T}$:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\delta^2}{T^2}}}.$$

Розв'язавши дане квадратне рівняння відносно періоду T , дістанемо

$$T = \frac{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}{\omega_0}.$$

Приступаючи до обчислень періоду, замітимо, що у першому випадку $\delta^2 \ll 4\pi^2$. Тому у формулі для періоду членом δ^2 можна знехтувати і тоді

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 0,78 \text{ с}.$$

У другому випадку неможливо відкинути величину δ^2 , тому $T_2 = 0,81 \text{ с}$.

156. В незатухаючій біжучій хвилі задана точка М на відстані $x = \frac{\lambda}{12}$ від джерела коливань у напрямку поширення хвилі. Амплітуда коливань $A = 0,05 \text{ м}$. Вважаючи в початковий момент часу зміщення точки Р, що знаходиться в джерелі, максимальним, визначити зміщення від положення рівноваги точки М для моменту $t = \frac{T}{6}$, а також різницю фаз коливань точок М і Р.

Розв'язання. Зміщення точки М можна знайти з допомогою рівняння біжучої хвилі (22). Перетворимо це рівняння так, щоб в нього увійшли довжина хвилі λ і період коливань T . Враховуючи, що $\omega = \frac{2\pi}{T}$ і $\lambda = vT$, дістанемо

$$y = A \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \varphi_0 \right].$$

Щоб знайти початкову фазу φ_0 , скористаємося початковими умовами задачі: якщо $t = 0$, $x = 0$, то $y = A$. При цих значеннях t , x , y із даного рівняння маємо, що $\sin \varphi_0 = 1$, звідки $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$.

Тепер, підставивши числові значення величин A , $\frac{t}{T}$, $\frac{x}{\lambda}$, φ_0 дістанемо

$$y = 0,05 \sin \left[2\pi \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{12} \right) + \frac{\pi}{2} \right] = 0,044 \text{ м.}$$

Для обчислення різниці фаз $\varphi_M - \varphi_P$ коливань точок М і Р врахуємо, що для точки Р координата $x = 0$. Отже, в будь-який момент t фаза точки Р дорівнює $\frac{2\pi}{T} + \varphi_0$.

Тоді

$$\varphi_M - \varphi_P = \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \varphi_0 \right] - \left[2\pi \frac{t}{T} + \varphi_0 \right] = -2\pi \frac{x}{\lambda}.$$

Цей же результат можна отримати безпосередньо із формули (27), якщо підставити в неї $\Delta = x_1 - x_2 = -x$.

Виконавши обчислення, знайдемо

$$\varphi_M - \varphi_P = -2\pi \cdot \frac{1}{12} = -\frac{\pi}{6}.$$

Таким чином, коливання точки М відстають по фазі від коливань джерела на $\frac{\pi}{6}$.

157. Джерело звуку невеликих розмірів має потужність $N = 1$ Вт при частоті $\nu = 400$ Гц. Вважаючи, що звук в повітрі поширюється від джерела однаково в усі сторони, і нехтуючи поглинанням звуку, визначити амплітуду звукового тиску, а також амплітуди швидкості і зміщення частинок повітря на відстані $r = 100$ м від джерела звуку.

Розв'язання. Амплітуда звукового тиску Δp_0 (тобто амплітуда коливань тиску повітря в кожній точці, через яку проходить звукова хвиля) зв'язана з інтенсивністю звуку I виразом (41), яка в свою чергу зв'язана з потужністю N джерела:

$$I = \frac{N}{4\pi r^2}, \quad (1)$$

де r – відстань від джерела до точки, в якій визначається величина I . Формула (1) витікає із визначення інтенсивності звуку. Згідно умови задачі (це важливо) від джерела поширюються сферичні хвилі. Тому у знаменнику формули (1) стоїть

площа поверхні сфери, через яку проходить вся звукова енергія, що випромінюється джерелом.

Прирівнюючи праві частини формул (41) (див. методичні вказівки) і (1), маємо

$$\Delta p_0 = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{N \nu \rho}{2\pi}}. \quad (2)$$

У загальному випадку величини ν , ρ обчислюють за формулами (34) і $\rho \nu = \frac{m}{\mu} RT$. Так як згідно умови задачі повітря знаходиться при нормальних умовах, то значення ν і ρ беремо із таблиць і за формулою (2) обчислюємо величину Δp_0 .

Тепер, використовуючи співвідношення між амплітудою звукового тиску Δp_0 і амплітудою швидкості ν_0 частинок повітря у звуковій хвилі

$$\Delta p_0 = \nu \rho \nu_0$$

і формулу (2), дістанемо

$$\nu_0 = \frac{\Delta p_0}{\nu \rho} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{N}{2\pi \nu \rho}}. \quad (3)$$

Враховуючи зв'язок між величинами A , ν_0 в гармонічному коливанні ($\nu = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0)$), можна записати, що

$$\nu_0 = \omega A = 2\pi \nu A,$$

звідки знайдемо амплітуду зміщення частинок повітря у звуковій хвилі A :

$$A = \frac{\nu_0}{2\pi \nu} = \frac{1}{2\pi \nu} \sqrt{\frac{N}{2\pi \nu \rho}}. \quad (4)$$

Підставимо у формули (2) – (4) числові значення величин: $N = 1$ Вт, $\nu = 400$ Гц, $r = 100$ м, $\nu = 332$ м/с, $\rho = 1,29$ кг/м³.

Виконавши обчислення, дістанемо:

$$\Delta p_0 = 8,3 \cdot 10^{-3} \text{ Па}; \quad \nu_0 = 1,9 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}; \quad A = 7,6 \cdot 10^{-8} \text{ м}.$$

Задачі до теми 6

158. Рівняння руху матеріальної точки масою $5 \cdot 10^{-3}$ кг має вигляд $x = 4 \sin\left(\frac{2\pi}{8}t + 2\right)$ см. Визначити амплітуду коливань, циклічну частоту, період коливань, початкову фазу, максимальну швидкість, максимальне прискорення і повну енергію коливної точки.

Відповідь: 0,04 м; $\frac{\pi}{4}$ с⁻¹; 8 с; 2 рад; $3,14 \cdot 10^{-2}$ м/с; $-2,5 \cdot 10^{-2}$ м/с²; 250 мДж.

159. Кулька масою $10 \cdot 10^{-3}$ кг здійснює гармонічні коливання з частотою 0,2 Гц. Амплітуда коливань $5 \cdot 10^{-2}$ м. Знайти: максимальну силу, що діє на кульку; повну енергію кульки.

Відповідь: 0,8 мН; 19,7 мкДж.

160. Матеріальна точка здійснює гармонічне коливання з амплітудою 0,03 м і періодом 0,2 с. Записати рівняння коливань та визначити зміщення точки при 0,1 с.

Відповідь: $x = 0,03 \sin 10\pi t$; $x = 0$.

161. Матеріальна точка здійснює коливання за законом $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$, де $A = 2$ м. Визначити початкову фазу, якщо в момент часу $t = 0$ $x = -3$ м.

Відповідь: $\varphi_0 = \frac{5\pi}{6}$.

162. Амплітудне значення швидкості матеріальної точки, що здійснює гармонічні коливання, 0,1 м/с, а максимальне прискорення 1 м/с². Визначити циклічну частоту, період та амплітуду коливань.

Відповідь: 10 с⁻¹; 0,629 с; 0,01 м.

163. Коливання кульки описуються рівнянням $x = 3 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{8}\right)$ м. Визначити: період коливань, амплітудне значення швидкості; амплітудне значення прискорення.

Відповідь: 4 с; 4,71 м/с; 7,4 м/с².

164. Матеріальна точка здійснює гармонічні коливання з частотою 1 Гц і в момент часу $t = 0$ проходить положення з координатою 0,05 м і швидкістю 0,15 м/с. Визначити амплітуду коливань.

Відповідь: 0,0554 м.

165. Кулька масою 0,02 кг здійснює гармонічні коливання за законом $x = 0,1 \cos\left(4\pi + \frac{\pi}{4}\right)$ м. Визначити повну енергію кульки.

Відповідь: 15,8 мДж.

166. Вантаж, підвішений на пружині, коливається по вертикалі з амплітудою 0,08 м. Визначити жорсткість пружини, якщо його максимальна кінетична енергія дорівнює 0,8 Дж.

Відповідь: 250 Н/м.

167. Пружина має жорсткість 25 Н/м. Визначити, тіло якої маси потрібно підвісити на пружині, щоб за 60 с воно здійснювало 25 коливань.

Відповідь: 3,65 кг.

168. Математичний маятник, довжина нитки якого 1 м і радіус кульки 0,02 м, здійснює гармонічні коливання з амплітудою 0,06 м. Визначити: швидкість кульки при її проходженні через положення рівноваги; максимальне значення повертаючої сили. Густина свинцю 11300 кг/м³.

Відповідь: 0,186 м/с; 69,5 мН.

169. Математичний маятник довжиною 0,5 м підвішений в кабіні літака. Визначити період коливань маятника, якщо літак рухається: рівномірно; горизонтально з прискоренням 2,5 м/с².

Відповідь: 1,42 с; 1,4 с.

170. Два однаково напрямлених гармонічних коливання однакового періоду з амплітудами 0,04 і 0,08 м мають різницю фаз $\frac{\pi}{4}$. Визначити амплітуду результуючого коливання.

Відповідь: 0,112 м.

171. Точка бере участь одночасно у двох взаємно перпендикулярних гармонічних коливаннях, які описуються рівняннями $x = \cos 2\pi t$ і $y = \cos \pi t$. Знайти рівняння траєкторії точки і нарисувати її у певному масштабі.

Відповідь: $2y^2 - x = 1$.

172. Амплітуда затухаючих коливань маятника за 120 с зменшилась в 2 рази. Визначити коефіцієнт затухання.

Відповідь: $5,78 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$.

173. Рух тіла задано рівняннями $x = A \sin \omega t$ та $y = B \sin \omega(t + \tau)$. Знайти рівняння траєкторії та швидкість у момент часу $t = 0,5 \text{ с}$, якщо $A = 0,02 \text{ м}$, а $B = 0,01 \text{ м}$.

Відповідь: $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$; $13,7 \text{ м/с}$

174. Тіло масою 0,6 кг, підвішене на спіральній пружині з жорсткістю 30 Н/м, здійснює в деякому середовищі пружні коливання. Логарифмічний декремент затухання 0,01. Визначити: час, за який амплітуда коливань зменшиться в три рази; число повних коливань, які повинно здійснити тіло, щоб відбулося дане зменшення амплітуди.

Відповідь: 97,6 с; 110.

175. При спостереженні затухаючих коливань виявилось, що для двох послідовних коливань амплітуда другого менша за амплітуду першого на 0,6 м. Період затухаючих коливань 0,5 с. Визначити: коефіцієнт затухання; частоту затухаючих коливань (при тих же самих умовах).

Відповідь: $1,83 \text{ с}^{-1}$; 2,02 Гц.

176. Період власних коливань пружинного маятника дорівнює 0,55 с. У в'язкому середовищі період цього самого маятника становить 0,56 с. Визначити резонансну частоту коливань.

Відповідь: 1,75 Гц.

177. Визначити, наскільки резонансна частота відрізняється від частоти власних коливань системи у 1000 Гц, коефіцієнт затухання якої 400 с^{-1} .

Відповідь: 4,1 Гц.

178. Плоска хвиля поширюється вздовж прямої, що співпадає з додатнім напрямом осі Ox в середовищі, яке не поглинає енергію, зі швидкістю 15 м/с. Дві точки, що знаходяться на цій прямій на відстанях 5 м і 5,5 м від джерела хвиль, коливаються з різницею фаз $\frac{\pi}{5}$. Амплітуда хвилі 0,04 м. Визначити: довжину хвилі; зміщення першої точки в момент часу 3 с.

Відповідь: 5 м; 0,04 м.

179. Хвиля поширюється в пружному середовищі зі швидкістю 150 м/с. Визначити частоту коливань, якщо мінімальна відстань між точками середовища, фази коливань яких протилежні, дорівнює 0,75 м.

Відповідь: 100 Гц.

180. Хвилі поширюються зі швидкістю 400 м/с при частоті коливань 500 Гц. Чому дорівнює різниця фаз двох точок, які знаходяться на відстані 0,2 м одна від одної?

Відповідь: 0.5π .

181. Хвиля поширюється вздовж шнура зі швидкістю 10 м/с і має довжину 20 м. Найбільше відхилення точок шнура 0,02 м. Знайти фазу коливань, зміщення і швидкість точки, яка знаходиться на відстані 48,3 м від джерела хвилі в момент часу 5 с.

Відповідь: $\frac{\pi}{6}$; 0,01 м; 2,6 м/с.

182. Звукові коливання з частотою 450 Гц і амплітудою 0,003 м поширюються у пружному середовищі. Довжина хвилі 0,8 м. Визначити: швидкість поширення хвиль; максимальну швидкість частинок середовища.

Відповідь: 360 м/с; 0,848 м/с.

183. Людське вухо може сприймати звуки, які відповідають граничним частотам 16 Гц і 20 000 Гц. Знайти область сприймання звукових хвиль, якщо швидкість поширення звуку в повітрі 343 м/с.

Відповідь: (0,017-21,4) м.

184. Для визначення швидкості звуку в повітрі методом акустичного резонансу використовується труба з поршнем і звуковою мембраною, що закриває один з торців труби. Відстань між сусідніми наложеннями поршня, при яких спостерігається резонанс на частоті 2500 Гц, становить 0,068 м. Визначити швидкість звуку в повітрі.

Відповідь: 340 м/с.

185. Знайти швидкість звуку в матеріалі, модуль Юнга якого дорівнює 0,24 ГПа, а густина 1240 кг/м³.

Відповідь: ≈ 440 м/с.

186. Визначити інтенсивність звуку (Вт/м^2), рівень інтенсивності якого становить 67 дБ. Інтенсивність звуку на порозі чутності $I_0 = 10^{-12} \text{ Вт/м}^2$.

Відповідь: $5,01 \text{ мкВт/м}^2$.

187. На відстані 100 м від точкового джерела звуку рівень гучності при частоті 500 Гц дорівнює 20 дБ. Визначити потужність джерела звуку.

Відповідь: 10^{-10} Вт .

188. Два електропоїзди їдуть назустріч один одному із швидкостями 20 м/с і 15 м/с. Перший електропоїзд дає сигнал на частоті 600 Гц. Знайти частоту звуку, який почує пасажир другого електропоїзда: до зустрічі електропоїздів; після зустрічі. Швидкість поширення звуку в повітрі 340 м/с.

Відповідь: 666 Гц; 542 Гц.

189. По ріці рухається катер і дає свисток на частоті 400 Гц. Спостерігач, який стоїть на березі, сприймає звук свистка частотою 395 Гц. Швидкість звуку в повітрі 340 м/с. Визначити: швидкість руху катера; наближається чи віддаляється катер від спостерігача.

Відповідь: 4,3 м/с.

190. Швидкість поширення звукових хвиль в газі з молярною масою $2,9 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ при температурі 20°C становить 343 м/с. Знайти відношення молярних теплоємностей газу при сталому тиску і сталому об'ємі.

Відповідь: 1,4.

7. Молекулярно-кінетична енергія ідеального газу

Основні закони і формули

Закон Бойля-Маріотта

$$pV = \text{const} \text{ при } T = \text{const} \text{ для } m = \text{const}, \quad (1)$$

де p – тиск; V – об'єм; T – термодинамічна температура; m – маса газу.

Закони Гей-Люссака:

$$\text{а) } V = V_0(1 + \alpha t) \text{ при } p = \text{const} \text{ для } m = \text{const} \text{ або } V = V_0 \alpha T; \quad (2)$$

$$\text{б) } p = p_0(1 + \alpha t) \text{ при } V = \text{const} \text{ для } m = \text{const} \text{ або } p = p_0 \alpha T, \quad (3)$$

де t – температура по шкалі Цельсія; V_0 і p_0 – відповідно об'єм і тиск при 0°C ;

коефіцієнт $\alpha = \frac{1}{273} \text{ K}^{-1}$.

Закони Гей-Люссака для двох довільних станів газу

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2} \text{ при } p = \text{const для } m = \text{const}, \quad (4)$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2} \text{ при } V = \text{const для } m = \text{const}. \quad (5)$$

Закон Дальтона: тиск суміші газів p дорівнює сумі парціальних тисків газів $p_1, p_2, \dots, p_n$, які утворюють суміш

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_n = \sum_{i=1}^n p_i. \quad (6)$$

Закон Авогадро: молі різних газів за однакових умов (однакові тиск і температура) займають однакові об'єми. При нормальних умовах цей об'єм дорівнює $22,41 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{моль}$.

Число Авогадро – це число молекул у молі будь-якої речовини

$$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}. \quad (7)$$

Рівняння стану ідеального газу (рівняння Клапейрона-Менделєєва)

$$pV = \frac{m}{\mu} RT, \quad (8)$$

де m – маса газу; μ – молярна маса газу; R – універсальна газова стала; $\frac{m}{\mu} = \nu$ – кількість речовини (число молів).

Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \overline{v_{\text{кв}}^2} = \frac{2}{3} n \frac{m_0 \overline{v_{\text{кв}}^2}}{2}, \quad (9)$$

або

$$pV = \frac{1}{3} N m_0 \overline{v_{\text{кв}}^2} = \frac{2}{3} \left(\frac{m_0 \overline{v_{\text{кв}}^2}}{2} \right) = \frac{2}{3} E, \quad (10)$$

де n – концентрація молекул; m_0 – маса молекули; $\overline{v_{\text{кв}}^2}$ – середня квадратична швидкість молекул; N – число молекул в об'ємі газу V ; $m = N m_0$ – маса газу; E – загальна кінетична енергія поступального руху всіх молекул газу.

Середня енергія молекули

$$\bar{E}_0 = \frac{i}{2} kT, \quad (11)$$

де $i = i_{\text{повн}} + i_{\text{об}} + 2i_{\text{кол}}$ — сума коливальних, обертальних і подвоєного числа коливальних ступенів вільності (для ідеальних газів $i = 3$); $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — стала Больцмана.

Залежність тиску газу від концентрації молекул і температури

$$p = nkT. \quad (12)$$

Швидкість молекул:

найбільш імовірна

$$v_i = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}}; \quad (13)$$

середня квадратична

$$\bar{v}_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}; \quad (14)$$

середня арифметична

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}}. \quad (15)$$

Закон Максвелла для розподілу молекул газу за швидкостями

$$f(v) = \frac{dN(v)}{Ndv} = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}, \quad (16)$$

де $f(v)$ — функція розподілу молекул за швидкостями, яка визначає відносне число молекул $\frac{dN(v)}{N}$ із загального числа N молекул, швидкості яких знаходяться в інтервалі від v до $v + dv$.

Закон Максвелла для розподілу молекул за енергіями теплового руху

$$f(E) = \frac{dN(E)}{NdE} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-\frac{3}{2}} E^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{E}{kT}}, \quad (17)$$

де $f(E)$ — функція розподілу молекул за енергіями теплового руху, яка визначає відносне число молекул $\frac{dN(E)}{N}$ із загального числа молекул N , які мають кінетичні енергії E , що знаходяться в інтервалі від E до $E + dE$.

Барометрична формула

$$p_h = p_0 e^{-\frac{\rho g (h - h_0)}{kT}}, \quad (18)$$

де p_h і p_0 – тиск газу на висоті h і h_0 .

Розподіл Больцмана в зовнішньому потенціальному полі

$$n = n_0 e^{-\frac{\Delta E_n}{kT}}, \quad (19)$$

де n і n_0 – концентрації частинок (молекул) на рівнях h і $h = 0$; $\Delta E_n = E_n - E_{n0}$ – різниця потенціальних енергій частинок (молекул) на цих рівнях.

Розподіл Максвелла-Больцмана

$$dN = \frac{4}{\sqrt{\pi}} n_0 \left(\frac{m_0}{2kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{M_{c0}}{kT}} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} v^2 dv. \quad (20)$$

Середня довжина вільного пробігу молекул газу

$$\bar{l} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}, \quad (21)$$

де d – ефективний діаметр молекули.

Середня кількість зіткнень однієї молекули за одиницю часу

$$\bar{z} = \sqrt{2} \pi d^2 n \bar{v}. \quad (22)$$

Кількість зіткнень усіх молекул в одиниці об'єму за одиницю часу

$$Z = \frac{1}{2} \bar{z} n = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi d^2 n^2 \bar{v}. \quad (23)$$

Закон Ньютона для внутрішнього тертя (в'язкості)

$$F = \eta \left| \frac{dv}{dx} \right| S, \quad (24)$$

де F – сила внутрішнього тертя між двома шарами площею S ; $\left| \frac{dv}{dx} \right|$ – модуль градієнта швидкості тертя газу в перпендикулярному до S напрямі; $\eta = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{l}$ – коефіцієнт динамічної в'язкості.

Закон дифузії Фіка

$$M = -D \frac{dp}{dx} S t, \quad (25)$$

де M – маса речовини, що переноситься шляхом дифузії за час t через плоску поверхню площею S розміщену перпендикулярно до осі Ox при градієнті густини вздовж цієї осі $\frac{d\rho}{dx}$; $D = \frac{1}{3} \overline{v} l$ – коефіцієнт дифузії.

Закон теплопровідності Фур'є

$$Q = -\lambda \frac{dT}{dx} S t, \quad (26)$$

де Q – кількість теплоти, яка переноситься внаслідок теплопровідності за час t через плоску поверхню площею S при градієнті температури $\frac{dT}{dx}$, перпендикулярному до S ; $\lambda = \frac{1}{3} \rho C_v \overline{v} l$ – коефіцієнт теплопровідності; C_v – молярна теплоємність при сталому об'ємі.

Залежності між коефіцієнтами переносу

$$\eta = \rho D; \quad \lambda = C_v \eta = \rho C_v D.$$

Методичні вказівки

Задачі на закони ідеального газу можна умовно розділити на дві основні групи. До першої групи відносяться задачі, в яких задані параметри газу в початковому стані і деякі параметри в кінцевому стані. Маса газу в умові не задана, але відомо, що вона не змінюється. До другої групи належать задачі, де в умові фігурують маса газу і деякі параметри стану або розглядаються такі процеси, в яких змінюється маса газу. Необхідно знайти невідомі величини.

Якщо при сталій масі газу в результаті переходу із початкового стану в кінцевий один із параметрів газу не змінюється, то при розв'язуванні задач можна використовувати одне із рівнянь (1) – (5). При цьому необхідно також користуватися додатковими умовами у вигляді допоміжних формул і виразити, де це потрібно, тиск і об'єм через інші задані величини.

При розв'язуванні задач другої групи часто буває необхідно визначити один із параметрів стану газу. В цьому випадку користуються рівнянням Клапейрона-Менделєєва (8) з врахуванням додаткових умов. Якщо в задачі розглядається процес змішування газів, які знаходяться в різних посудинах, то потрібно чітко

відрізняти парціальні тиски від тисків, що спричиняють гази на стінки посудини, які вони займали спочатку.

При розв'язуванні задач на основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії необхідно звернути особливу увагу на розуміння природи явищ, зумовлених тепловим рухом молекул. В процесі розв'язування задач для знаходження необхідних параметрів часто використовують рівняння газових законів та закон збереження імпульсу при пружних зіткненнях молекул зі стінкою.

Підкреслимо, що в кінетичній теорії, яка розглядає газ як систему із величезного числа молекул, що рухаються хаотично, користуються різними видами середніх швидкостей молекул: середньою арифметичною $\bar{v}$, середньою квадратичною $\bar{v}_{\text{кр}}$ і найбільш імовірною v_i .

Середня арифметична швидкість $\bar{v}$ (15) дозволяє визначити середні значення таких фізичних величин, що характеризують властивості газу, у формулу яких швидкість входить в першій степені, наприклад, середнє число зіткнень молекули за одиницю часу, середній імпульс молекул, середній час вільного пробігу.

Середньою квадратичною швидкістю $\bar{v}_{\text{кр}}$ (14) користуються у тих випадках, коли потрібно визначити фізичну величину, що пропорціональна квадрату швидкості, наприклад, тиск газу, кінетичну енергію поступального руху молекул газу.

Найбільш імовірною швидкістю v_i (13) користуються в задачах на закон розподілу молекул за швидкостями. Цій швидкості відповідає максимум функції розподілу $f(v)$.

Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії (9), а також закон Максвелла для розподілу молекул газу за швидкостями (16) справедливі тільки для ідеального газу, але їх застосовують і для реальних розріджених газів доти, поки можна нехтувати взаємодією їх молекул на відстані.

У молекулярно-кінетичній теорії рівноважний стан газу розглядається як стан повної хаотичності руху молекул, розподіл яких за швидкостями описується законом Максвелла (16). Основною особливістю нерівноважних станів є

намагання газу самовільно перейти в рівноважний стан. Цей перехід зумовлений хаотичним тепловим рухом молекул з неперервним зіткненням їх одна з одною, які приводять до постійного перемішування молекул, зміни їх швидкостей та енергій. У встановленні рівноважного стану (термодинамічної рівноваги) в газах важливу роль відіграють явища дифузії, внутрішнього тертя і теплопровідності. Дані явища пов'язані з перенесенням маси (дифузія), імпульсу (внутрішнє тертя або в'язкість) і кінетичної енергії (теплопровідність), а тому їх називають явищами переносу. Формули (24) – (27) показують, що за знайденими або відомими в задачах значеннями коефіцієнта внутрішнього тертя η , дифузії D або теплопровідності λ можна визначити інші коефіцієнти переносу, а також обчислювати довжину вільного пробігу $\bar{l}$ і ефективний діаметр d молекул.

Приклади розв'язування задач

191. Балон, який містить $V_1 = 0.02 \text{ м}^3$ повітря під тиском $p_1 = 4 \cdot 10^5 \text{ Па}$, з'єднали трубкою з балоном місткістю $V_2 = 0.06 \text{ м}^3$, з якого викачано повітря. Знайти тиск p , який встановився у посудинах. Температура стала.

Розв'язання. Повітря з першого балона займе весь наданий йому об'єм $V_1 + V_2$. За законом Бойля-Маріотта $p_1 V_1 = p(V_1 + V_2)$. Звідси шуканий тиск

$$p = \frac{p_1 V_1}{V_1 + V_2}; \quad p = 10^5 \text{ Па}.$$

192. Суміш азоту і гелію при температурі 27°C знаходиться під тиском $p = 130 \text{ Па}$. Маса азоту становить 70 % від загальної маси суміші. Знайти концентрацію молекул кожного з газів.

Розв'язання. При даному тиску газ можна вважати ідеальним. Тиск ідеального газу не залежить від його природи і, як видно з рівняння (12) $p = nkT$, одночасно визначається його концентрацією і температурою. Рівняння (12) дозволяє знайти концентрацію молекул суміші і по відомому процентному складу – концентрацію кожного газу. Процентний склад газів задано по масі, а це означає, що маса кожного з них

$$m_1 = c_1 m; \quad m_2 = c_2 m,$$

де m – маса суміші; c_1 і c_2 – процентний вміст відповідно азоту і гелію.

З другого боку, маса кожного із газів

$$m_1 = \frac{V n_1 \mu_1}{N_A}; \quad m_2 = \frac{V n_2 \mu_2}{N_A},$$

де V – об'єм газу; μ_1 і μ_2 – молярні маси азоту і гелію; N_A – стала Авогадро ($\frac{\mu_1}{N_A}$ – маса молекули).

Прирівнюючи праві частини приведених вище рівнянь, дістанемо:

$$c_1 m = \frac{V n_1 \mu_1}{N_A}; \quad c_2 m = \frac{V n_2 \mu_2}{N_A},$$

звідки

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{c_1 \mu_2}{c_2 \mu_1} = \frac{1}{3}.$$

Так як $n_1 + n_2 = n$, то на основі (12)

$$n_1 = \frac{1}{4} \frac{p}{kT} = 8 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3};$$

$$n_2 = \frac{3}{4} \frac{p}{kT} = 24 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}.$$

193. Компресор забирає з навколишнього середовища при кожному циклі роботи $V_0 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ повітря, що знаходиться при нормальному атмосферному тиску p_0 та температурі $T_0 = 280 \text{ К}$ і нагнітає його в резервуар об'ємом $V = 2 \text{ м}^3$. Температура повітря в резервуарі підтримується рівною $T_1 = 300 \text{ К}$. Скільки качань повинен виконати компресор, щоб тиск в резервуарі збільшився на $\Delta p = 3 \cdot 10^5 \text{ Па}$?

Розв'язання. Нехай спочатку в резервуарі був деякий тиск p_1 , а маса повітря m_1 . Рівняння стану ідеального газу в цьому випадку має вигляд

$$p_1 V = \frac{m_1}{\mu} R T_1.$$

Після роботи компресора маса повітря в резервуарі стала рівною m_2 , а тиск p_2 . Рівняння стану в цьому випадку

$$p_2 V = \frac{m_2}{\mu} R T_1.$$

Віднявши від другого рівняння перше, дістанемо

$$\Delta p V = \frac{\Delta m}{\mu} R T_1,$$

звідки

$$\Delta m = \frac{\mu V \Delta p}{R T_1},$$

де $\Delta p = p_2 - p_1$; $\Delta m = m_2 - m_1$ – маса повітря, перенесеного компресором в резервуар за n качань.

Число качань можна визначити за формулою $n = \frac{\Delta m}{m_0}$, де m_0 – маса газу, що переноситься за одне качання. Дану масу знайдемо із рівняння стану для порції повітря, що забирає компресор з навколишнього середовища за один цикл роботи:

$$p_0 V_0 = \frac{m_0}{\mu} R T_0; \quad m_0 = \frac{p_0 V_0 \mu}{R T_0}.$$

Таким чином,

$$n = \frac{V \Delta p T_0}{V_0 p_0 T_1} = 1109.$$

194. Знайти середню квадратичну швидкість, середню кінетичну енергію поступального руху і середню повну кінетичну енергію молекул гелію і азоту при температурі 27°C . Визначити повну енергію всіх молекул $0,1$ кг кожного з газів.

Розв'язання: Середня кінетична енергія поступального руху молекули будь-якого газу однозначно визначається його термодинамічною температурою:

$$\bar{E}_0 = \frac{3}{2} k T. \quad (1)$$

Середня квадратична швидкість молекул газу залежить від маси його молекул m_0 :

$$\bar{v}_{\text{ск}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}. \quad (2)$$

Середня повна енергія молекули залежить не тільки від температури, але і від структури молекул – від числа i ступенів вільності:

$$\bar{E}_m = \frac{i}{2} k T. \quad (3)$$

Повна кінетична енергія всіх молекул, яка дорівнює для ідеального газу його внутрішній енергії, може бути знайдена як добуток $\overline{E}_0$ на число N всіх молекул:

$$E = \nu = \overline{E}_0 N. \quad (4)$$

Очевидно, що

$$N = \frac{m}{\mu} N_A, \quad (5)$$

де m – маса всього газу; $\frac{m}{\mu}$ – число молів, а N_A – стала Авогадро.

Підставляючи в (1) числові значення величин, взятих в одиницях системи СІ, знаходимо

$$\overline{E}_0 = 6,2 \cdot 10^{-21} \text{ Дж.}$$

Для обчислення середньої квадратичної швидкості вираз (2) зручно перетворити, помноживши чисельник і знаменник на N_A . Тоді

$$\overline{v_{\text{кв}}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}},$$

де $R = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$. Для гелію $\overline{v_{\text{кв}}} = 13,7 \cdot 10^3 \text{ м/с}$, а для азоту $\overline{v_{\text{кв}}} = 5,17 \cdot 10^3 \text{ м/с}$.

Для обчислення середньої повної енергії молекули потрібно знати число ступенів вільності молекули.

Гелій – одноатомний газ, отже, $i = 3$, тоді

$$\overline{E}_{\text{м}} = \overline{E}_0 = 6,2 \cdot 10^{-21} \text{ Дж.}$$

Азот – двоатомний газ, отже, $i = 5$ і

$$\overline{E}_{\text{м}} = \frac{5}{2} kT = 10,4 \cdot 10^{-21} \text{ Дж.}$$

Повна енергія всіх молекул після підстановки виразів (3) і (5) в (4) має вигляд

$$E = \frac{i}{2} kT \frac{m}{\mu} N_A = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} RT.$$

Для гелію $E = 93,5 \text{ кДж}$; для азоту $E = 22,3 \text{ кДж}$.

195. Знайти середнє число зіткнень за 1 с при нормальних умовах однієї молекули азоту, якщо її діаметр $d = 3,1 \cdot 10^{-10} \text{ м}$. Скільки в середньому зіткнень однієї молекули азоту відбувається, якщо температура підвищиться на 273 К?

Розв'язання. Середнє число зіткнень однієї молекули азоту за 1 с при нормальних умовах визначається за формулою (22) $\bar{z} = \sqrt{2} \pi d^2 n \bar{v}$, де $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$ – середня арифметична швидкість молекул. Тоді формула для середнього числа зіткнень молекули за 1 с матиме вигляд

$$\bar{z} = \sqrt{2} \pi d^2 n \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}.$$

Підставивши числові значення величин, знайдемо

$$\bar{z} = 5,2 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}.$$

Якщо температура азоту підвищиться, то число молекул в одиниці об'єму зменшиться, оскільки збільшиться об'єм від V_0 до V_1 . Концентрація молекул азоту n_1 при підвищенні температури та сталому тиску знаходять за рівнянням ізобарного процесу

$$\frac{V_0}{V_1} = \frac{T_0}{T_1}.$$

Так як число молекул N_0 в об'ємах V_0 та V_1 не змінилось, то концентрація молекул n_1 при температурі T_1 буде $n_1 = \frac{N_0}{V_1}$, але $N_0 = n_0 V_0$, а $V_1 = V_0 \frac{T_1}{T_0}$, тоді

$$n_1 = \frac{n_0 V_0}{V_1} = \frac{n_0 T_0}{T_1} = 1,345 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}.$$

Середнє число зіткнень молекули азоту за 1 с при даних умовах дорівнюватиме

$$\bar{z} = 3,68 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}.$$

Незважаючи на те, що температура газу підвищилась, середнє число зіткнень молекули зменшилось внаслідок того, що концентрація молекул зменшилась у два рази, а підвищення температури в два рази викликало збільшення середньої швидкості молекул у $\sqrt{2}$ раз.

196. Використовуючи функцію розподілу молекул ідеального газу за відносними швидкостями $f(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2 \left(u = \frac{v}{v_i} \right)$, визначити число молекул ΔN ,

швидкості v яких менші в 0,002 найбільш імовірної швидкості, якщо в об'ємі газу міститься $N = 1.67 \cdot 10^{24}$ молекул.

Розв'язання. Число $dN(u)$ молекул, відносні швидкості яких лежать в інтервалі від u до $u + du$,

$$dN(u) = Nf(u)du = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2 du,$$

де N – число молекул в об'ємі газу. Згідно умови задачі $v_{\max} = 0.002v$, то

$u_{\max} = \frac{v_{\max}}{v} = 0.002$. Оскільки $u \ll 1$, то $e^{-u^2} \approx 1 - u^2$. Нехтуючи $u^2 \ll 1$, формулу для

$dN(u)$ перепишемо у вигляді

$$dN(u) = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} u^2 du.$$

Проінтегрувавши даний вираз по u в межах від 0 до $u_{\max}$, дістанемо

$$\Delta N = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} \int_0^{u_{\max}} u^2 du = \frac{4N}{3\sqrt{\pi}} u_{\max}^3.$$

Виконавши обчислення, знайдемо

$$\Delta N = 10^{16} \text{ молекул.}$$

197. Обчислити середню довжину вільного пробігу молекул азоту, коефіцієнт дифузії і в'язкість при тиску $p = 10^5$ Па і температури $T = 290$ К. Як зміняться знайдені величини в результаті двохкратного збільшення об'єму газу: при постійному об'ємі; при постійній температурі? Ефективний діаметр молекул азоту $d = 3.7 \cdot 10^{-10}$ м.

Розв'язання. Середня довжина вільного пробігу $\bar{l}$ і коефіцієнти переносу можуть бути обчислені за такими формулами:

$$\bar{l} = \frac{1}{\sqrt{2}nd^2n}; \quad (1)$$

$$D = \frac{1}{3}\bar{l}\bar{v}; \quad (2)$$

$$\eta = \frac{1}{3}\rho\bar{l}\bar{v}. \quad (3)$$

Концентрацію молекул можна знайти із рівняння

$$p = nkT. \quad (4)$$

Вирази (1) – (3) мають зміст, якщо довжина вільного пробігу $\bar{l}$ у формулі (1) набагато менша лінійних розмірів посудини. Так як початковий тиск газу – атмосферний, можна стверджувати, що дана умова виконується.

Визначивши n із (4) і підставивши її в (1), дістанемо

$$\bar{l} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p} = 6,5 \cdot 10^{-8} \text{ м.}$$

Для обчислення коефіцієнта дифузії за формулою (2) можна скористатися одержаним результатом для $\bar{l}$, визначивши середню швидкість

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} = 470 \text{ м/с.}$$

Тоді $D = 1 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$.

Для обчислення η підставимо у вираз (3) формулу (1) і $\rho = nm_0$:

$$\eta = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2} m_0 \bar{v},$$

де $m_0 = \frac{\mu}{N_A}$ – маса однієї молекули.

Тепер остаточно отримаємо

$$\eta = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2} \frac{\mu \bar{v}}{N_A} = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ кг/(м}\cdot\text{с)}. \quad (5)$$

Як видно з виразу (1), довжина вільного пробігу залежить тільки від концентрації молекул n . При двохкратному збільшенні об'єму концентрація зменшується вдвоє. Отже, при будь-якому процесі

$$\frac{\bar{l}_2}{\bar{l}_1} = 2.$$

Індекси 1 і 2 відповідають станам до і після розширення газу.

У вираз коефіцієнта дифузії (2) входить не тільки довжина вільного пробігу $\bar{l}$, а й середня швидкість $\bar{v}$. Отже,

$$\frac{D_2}{D_1} = \frac{\bar{l}_2}{\bar{l}_1} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}.$$

При сталому тиску об'єм прямо пропорційний температурі:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1} = 2.$$

Таким чином,

$$\frac{D_2}{D_1} = 2\sqrt{2}.$$

При сталій температурі $\frac{D_2}{D_1} = \frac{\bar{l}_2}{\bar{l}_1} = 2$.

В'язкість, як видно із виразу (5), залежить тільки від швидкості молекул, отже, і від температури (всі решту величини, що входять у вираз (5), сталі), тобто

$\frac{\eta_2}{\eta_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$. Це означає, що при сталому тиску

$$\frac{\eta_2}{\eta_1} = \sqrt{2}.$$

При сталій температурі коефіцієнт в'язкості не змінюється.

Задачі до теми 7.

198. Яка густина повітря в балоні, якщо тиск $p = 10 \cdot 10^5$ Па, а температура $t = 15^\circ \text{C}$? (Тиск повітря за нормальних умов $p_0 = 1,0334 \cdot 10^5$ Па, а густина $\rho_0 = 1,3 \text{ кг/м}^3$).

Відповідь: 12 кг/м^3 .

199. В балоні місткістю $15 \cdot 10^{-3}$ знаходиться азот при тиску $100 \cdot 10^3$ Па і температурі 300 К. Після того як із балона випустили $14 \cdot 10^{-3}$ кг азоту, температура стала 290 К. Визначити тиск азоту, який залишився в балоні.

Відповідь: $16,3 \cdot 10^3$ Па.

200. У відкритій посудині при 20°C є 0,15 кг повітря. На яку величину зменшиться маса повітря у посудині при нагріванні її до 100°C . Зміною об'єму посудини при нагріванні знехтувати.

Відповідь: 0,0322 кг.

201. При нормальних умовах густина ацетилену $1,16 \text{ кг/м}^3$. Визначити його густину при тиску $12,16 \cdot 10^3$ Па і температурі 300 К.

Відповідь: $1,04 \text{ кг/м}^3$.

202. Яка маса гелію потрібна для наповнення оболонки літаючої кулі місткістю 10 м^3 при температурі 300 К і нормальному тиску? Яким стане об'єм гелію на певній висоті, де тиск становить $13,32 \cdot 10^3 \text{ Па}$, а температура 223 К ?

Відповідь: $1,625 \text{ кг}$; $56,5 \text{ м}^3$.

203. Газ стискають при сталій температурі від об'єму $10 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ до об'єму $5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$. При цьому тиск змінився на $6 \cdot 10^3 \text{ Па}$. Знайти початковий тиск газу.

Відповідь: $6 \cdot 10^3 \text{ Па}$.

204. Визначити зміну маси повітря в посудині місткістю $10 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$, якщо при зміні температури від 293 К до 343 К тиск змінився від $100 \cdot 10^3$ до $120 \cdot 10^3 \text{ Па}$.

Відповідь: $0,0013 \text{ кг}$.

205. З посудини місткістю $20 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ потрібно відкачати повітря від нормального атмосферного тиску до тиску 1018 Па . За скільки циклів роботи насоса це можна зробити при об'ємі всмоктувальної камери насоса $2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$?

Відповідь: 46.

206. Аеростат наповнений воднем при температурі 290 К . Під дією сонячних променів температура водню в аеростаті підвищилась до 310 К , а зовнішній атмосферний тиск не змінився. Під час нагрівання надлишковий водень вийшов із аеростата і його маса зменшилась на 6 кг . Визначити об'єм аеростата, якщо середня густина водню $0,09 \text{ кг/м}^3$.

Відповідь: $1,05 \cdot 10^3 \text{ м}^3$.

207. У двох посудинах місткістю $2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ і $5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ знаходяться однакові гази при тисках відповідно $5 \cdot 10^5 \text{ Па}$ і $7 \cdot 10^5 \text{ Па}$ та температурах 300 К і 400 К . Який тиск і яка температура встановиться у посудинах після з'єднання їх трубою і змішування газів?

Відповідь: 372 К ; $643 \cdot 10^3 \text{ Па}$.

208. В посудині знаходиться суміш $0,007 \text{ кг}$ азоту і $0,011 \text{ кг}$ вуглекислого газу при температурі 290 К і тиску $1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}$. Знайти густину цієї суміші, вважаючи гази ідеальними.

Відповідь: $1,5 \text{ кг/м}^3$.

209. В балоні об'ємом $7,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ при температурі 300 К знаходиться суміш ідеальних газів: $0,1$ моль кисню, $0,2$ моль азоту і $0,3$ моль вуглекислого газу.

Знайти тиск суміші p і середню масу μ , яка входить в рівняння стану $pV = \frac{m}{\mu}RT$,

де m – маса суміші.

Відповідь: $36,7 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

210. В посудині місткістю $5 \cdot 10^{-3}$ м³ при нормальних умовах знаходиться азот. Визначити: кількість речовини; масу азоту; концентрацію його молекул в посудині.

Відповідь: 0,223 моль; $6,24 \cdot 10^{-3}$ кг; $2,69 \cdot 10^{25}$ м⁻³.

211. При якій температурі середня арифметична швидкість молекул кисню дорівнює 495 м/с?

Відповідь: ≈ 370 К.

212. Визначити середню квадратичну швидкість молекул: а) кисню при 405 К; б) гелію при 0,1 К.

Відповідь: а) 562 м/с; б) 24,5 м/с.

213. Визначити середню арифметичну та найбільш імовірну швидкості молекул вуглекислого газу при температурі 405 К.

Відповідь: 441 м/с; 391 м/с.

214. Обчислити середню кінетичну енергію поступального руху молекул гелію при температурі 300 К.

Відповідь: $6,21 \cdot 10^{-21}$ Дж.

215. При тиску $1 \cdot 10^5$ Па в 1 м³ знаходиться $2,7 \cdot 10^{25}$ молекул повітря. Обчислити їхню найбільш імовірну швидкість.

Відповідь: 400 м/с.

216. Деяка маса кисню знаходиться при температурі 300 К і тиску $1 \cdot 10^5$ Па. Середня кінетична енергія поступального руху молекул кисню 6,3 Дж. Обчислити кількість молекул кисню, його об'єм і масу.

Відповідь: 10^{21} ; $4,2 \cdot 10^{-5}$ м³; $54 \cdot 10^{-6}$ кг.

217. Знайти відносну кількість молекул кисню, швидкості яких при температурі 280 К лежать у межах від 275 до 280 м/с.

Відповідь: 0,85 %.

218. У закритій посудині міститься 0,1 кг кисню. Знайти кількість молекул кисню, швидкості яких знаходяться у межах від 195 до 205 м/с при 273 К.

Відповідь: $2,3 \cdot 10^{22}$.

219. На якій висоті тиск повітря становить 60 % від тиску на рівні моря? Вважати, що температура повітря скрізь однакова і дорівнює 283 К.

Відповідь: 4220 м.

220. Сучасні літаки можуть літати на висоті 30 000 м. Який тиск атмосфери на цій висоті покаже барометр? Температуру атмосфери вважати сталою і рівною 280 К, а склад атмосфери – незмінним.

Відповідь: 2560 Па.

221. Визначити відношення тиску повітря на висоті 1000 м до тиску на дні свердловини глибиною 100 м. Повітря біля поверхні Землі знаходиться при нормальних умовах, а його температура не залежить від висоти.

Відповідь: 0,78.

222. При якому тиску середня довжина вільного пробігу молекул водню дорівнює 0,025 м, якщо температура водню дорівнює 340 К? Діаметр молекули водню становить 0,28 нм.

Відповідь: 0,539 Па.

223. Середня довжина вільного пробігу молекул водню при нормальних умовах дорівнює $0,1 \cdot 10^{-6}$ м. Визначити середню довжину їх вільного пробігу при тиску $0,1 \cdot 10^{-3}$ Па, якщо температура газу залишається незмінною.

Відповідь: 101 м.

224. Знайти концентрацію і середню довжину вільного пробігу молекул азоту: при нормальних умовах; при тиску $1 \cdot 10^{-9}$ Па і температурі 290 К.

Відповідь: $2,7 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$; $87,7 \cdot 10^{-9} \text{ м}$; $2,5 \cdot 10^{11} \text{ м}^{-3}$; $9,5 \cdot 10^6 \text{ м}$.

225. Знайти граничну концентрацію молекул гелію у сферичній колбі діаметра 0,1 м, при якій між молекулами не буде зіткнень.

Відповідь: $6,3 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$.

226. Який ефективний діаметр молекул азоту, якщо при температурі 273 К коефіцієнт внутрішнього тертя дорівнює $1,7 \cdot 10^{-5}$ Па·с?

Відповідь: $316 \cdot 10^{-12} \text{ м}$.

227. Знайти масу водню, яка буде перенесена при нормальному тиску за рахунок дифузії через поверхню площею $0,01 \text{ м}^2$ за 30 с при градієнті густини $1,18 \text{ кг/м}^4$ в напрямі, перпендикулярному до плоскої поверхні, якщо температура стала і дорівнює 290 К .

Відповідь: $35 \cdot 10^{-6} \text{ кг}$.

228. Обчислити коефіцієнт дифузії і динамічної в'язкості водяної пари при тиску $1 \cdot 10^5 \text{ Па}$ і температурі 290 К .

Відповідь: $26,2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $19,4 \cdot 10^{-6} \text{ Па}\cdot\text{с}$.

229. Обчислити коефіцієнт теплопровідності азоту при температурі 290 К . При яких умовах він не залежить від тиску?

Відповідь: $12,6 \cdot 10^{-3} \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$.

230. При деяких умовах коефіцієнти дифузії і динамічної в'язкості азоту відповідно дорівнюють $20,9 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ та $17,7 \cdot 10^{-6} \text{ Па}\cdot\text{с}$. Обчислити концентрацію молекул азоту та його коефіцієнт теплопровідності.

Відповідь: $1,8 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$; $0,013 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$.

231. Під диском відцентрової машини, що робить 600 обертів за хвилину, підвішено на тонкій нитці паперовий диск радіуса $0,1 \text{ м}$ на відстані $0,008 \text{ м}$ від диска машини. Визначити силу, що діє на паперовий диск, якщо коефіцієнт в'язкості повітря $2 \cdot 10^{-5} \text{ Па}\cdot\text{с}$.

Відповідь: $3,29 \cdot 10^{-4} \text{ Н}$.

8. Основи термодинаміки

Основні закони і формули

Перше начало термодинаміки: кількість теплоти Q , отримана системою, витрачається на збільшення її внутрішньої енергії ΔU і на виконання системою роботи A проти зовнішніх сил.

$$Q = \Delta U + A, \quad (1)$$

де Q — кількість теплоти, що підводиться до термодинамічної системи; ΔU — зміна внутрішньої енергії системи; A — робота системи проти зовнішніх сил.

Перше начало термодинаміки при нескінченно малій зміні стану системи

$$\delta Q = dU + \delta A, \quad (2)$$

де δQ – елементарна кількість теплоти, що надається системі; dU – нескінченно мала зміна внутрішньої енергії системи; $\delta A = p \cdot dV$ – елементарна робота, виконувана системою проти зовнішніх сил при нескінченно малій зміні об'єму.

Внутрішня енергія ідеального газу

$$U = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} RT, \quad (3)$$

де m – маса газу; μ – молярна маса газу; i – кількість ступенів вільності; R – універсальна газова стала; T – термодинамічна температура.

Зміна внутрішньої енергії ідеального газу

$$dU = \frac{m}{\mu} C_V dT, \quad (4)$$

де $C_V = \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_V = \frac{i}{2} R$ – молярна теплоємність газу при ізохорному процесі; dT – зміна температури.

Молярна теплоємність газу при ізобарному процесі (рівняння Майєра)

$$C_p = \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_p = C_V + R. \quad (5)$$

Зв'язок між молярною C і питомою c теплоємностями газу

$$C = c\mu. \quad (6)$$

Робота виконувана газом при ізобарному процесі

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p(V_2 - V_1). \quad (7)$$

Робота при ізотермічному процесі

$$A = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{p_1}{p_2}. \quad (8)$$

Рівняння Пуассона для адіабатного процесу в ідеальному газі

$$PV^\gamma = \text{const}, \text{ або } TV^{\gamma-1} = \text{const}, \text{ або } Tp^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \text{const}, \quad (9)$$

де $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$ – показник адіабати.

Робота ідеального газу при адіабатному процесі

$$A = -\Delta U = \frac{m}{\mu} C_1 (T_1 - T_2), \quad (10)$$

або

$$A = \frac{RT_1}{\gamma - 1} \frac{m}{\mu} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right] \quad (11)$$

Коефіцієнт корисної дії теплової машини

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}, \quad (12)$$

де Q_1 – кількість теплоти, яку дістає робоче тіло від нагрівника; Q_2 – кількість теплоти, яку віддає робоче тіло холодильнику.

Коефіцієнт корисної дії ідеального циклу Карно

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \quad (13)$$

де T_1 – температура нагрівача; T_2 – температура холодильника.

Зміна ентропії ΔS при переході термодинамічної системи зі стану 1 у стан 2

$$\Delta S = S_2 - S_1 \geq \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}. \quad (14)$$

Зв'язок ентропії S з термодинамічною ймовірністю ω

$$S = k \ln \omega, \quad (15)$$

де k – стала Больцмана.

Друге начало термодинаміки: ентропія замкнутої системи при будь-яких процесах не зменшується – вона залишається незмінною у випадку оборотних процесів і зростає при необоротних процесах

$$\Delta S \geq 0. \quad (16)$$

Приклади обчислення ентропії.

1. Нагрівання тіла.

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\delta Q}{T} = cm \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = cm \ln \frac{T_2}{T_1}, \quad (17)$$

де $\delta Q = c m dT$ – кількість теплоти, що витрачається на нагрівання тіла від температури T_1 до T_2 ($dT = T_2 - T_1$); c – питома теплоємність речовини; m – маса тіла.

2. Плавлення, пароутворення.

$$\Delta S_{пл} = \frac{\lambda m}{T}; \quad \Delta S_{пр} = \frac{r m}{T}, \quad (18)$$

оскільки обидва процеси ізотермічні, то у формулі (14) T можна винести за знак інтеграла, а інтеграл $\int \delta Q$ – просто теплота плавлення λ або, відповідно, теплота пароутворення r , помножена на масу тіла m .

3. Адіабатний процес.

$$\Delta S \geq 0, \quad (19)$$

так як при цьому процесі $\delta Q = 0$.

Методичні вказівки

Задачі на перший закон термодинаміки можна розділити на три основні групи. До першої групи відносяться задачі, які описують процеси, при яких в результаті взаємодії має місце тільки теплообмін між тілами (робота не виконується). Другу групу складають задачі, які описують процеси, пов'язані з перетворенням одного виду енергії в другий при взаємодії двох тіл. До третьої групи відносяться задачі, в яких описуються процеси, що відбуваються в ідеальних газах.

1. Якщо в процесі взаємодії тіл робота не виконується, тобто має місце тільки явище теплообміну, то необхідно вияснити, у яких тіл внутрішня енергія зменшується, а в яких збільшується, і скласти рівняння теплового балансу:

$$Q_1 = Q_2,$$

де Q_1 – кількість теплоти, що віддали одні тіла; Q_2 – кількість теплоти, що отримали інші тіла. Якщо в умові задачі вказано ККД теплообміну η , то рівняння теплового балансу матиме вигляд

$$\eta Q_1 = Q_2.$$

Розв'язавши дане рівняння, визначають шукану величину.

При складанні рівняння теплового балансу потрібно враховувати, чи відбуваються в процесі теплообміну агрегатні перетворення чи ні.

2. Якщо розглядуваний процес протікає з виконанням механічної роботи, то потрібно для складання рівняння скористатись законом збереження і перетворення енергії. Як правило в таких задачах теплообмін між тілами не враховується. В результаті взаємодії внутрішня енергія одного з тіл зменшується. Потрібно встановити, що є причиною цієї зміни: робота, виконувана самим тілом або робота, виконана над тілом. Якщо робота виконується за рахунок зменшення внутрішньої енергії тіла, то отримуємо рівняння

$$A = \eta \Delta U,$$

де A – виконана робота; η – коефіцієнт корисної дії; ΔU – зміна внутрішньої енергії. Якщо внутрішня енергія збільшується за рахунок роботи, виконаної над тілом, то

$$\Delta U = \eta A.$$

Отримавши ці рівняння, ΔU і A виражають через дані умови задачі. Складаючи вираз для ΔU , потрібно врахувати, які процеси мають місце за умовою задачі. Такими процесами можуть бути: нагрівання тіла; плавлення; випаровування і інші.

3. Задачі на теплові процеси, які відбуваються в газах, розв'язуються з допомогою першого закону термодинаміки: $Q = \Delta U + A$. Виражаючи Q , ΔU і A із відповідних формул і підставляючи їх у рівняння закону, одержують співвідношення для визначення шуканої величини.

Приступаючи до розв'язування задачі, перш за все потрібно в'яснити характер процесу, що протікає в газі. У більшості задач використовується не загальна форма першого закону термодинаміки, а його різні часткові випадки. Наприклад, при ізотермічному процесі ($T = const$) внутрішня енергія газу залишається незмінною ($\Delta U = 0$), а тому рівняння першого закону набуває вигляду $Q = A$, тобто надана газу кількість теплоти витрачається на роботу, виконувану ним проти зовнішніх сил.

При ізохоричному процесі ($V = \text{const}$) робота газу дорівнює нулю. Вся кількість теплоти, що одержав газ, йде на збільшення його внутрішньої енергії:
 $Q = \Delta U$.

При ізобаричному процесі ($p = \text{const}$) кількість теплоти, надана газу йде на збільшення його внутрішньої енергії і виконання газом роботи проти зовнішніх сил: $Q = \Delta U + A$.

При адіабатному процесі ($Q = 0$) зміна внутрішньої енергії відбувається тільки за рахунок виконаної роботи: $\Delta U = A$. Потрібно звернути увагу на те, що зміна внутрішньої енергії однозначно визначається початковим і кінцевим станами газу, в той час як кількість теплоти і робота залежать від способу, з допомогою якого газ переходить із одного стану в другий. В залежності від характеру процесу робота може бути як додатною, так і від'ємною. Якщо газ розширюється, то він виконує додатню роботу проти зовнішніх сил. Якщо газ стискають, то його робота від'ємна, і над газом виконують роботу зовнішні сили. Знак роботи повинен бути врахований при розв'язуванні задач.

При розв'язуванні задач на перший закон термодинаміки потрібно звернути увагу на графічне зображення різних процесів. Графічний метод дозволяє аналізувати явища, які описуються замкнутими циклами, що складаються із окремих ізопроцесів, а також спрощує обчислення коефіцієнта корисної дії циклу.

Задачі на другий закон термодинаміки пов'язані з оборотним циклом Карно і з обчисленням зміни ентропії. В останніх використовуються важливі властивості ентропії: ентропія є функцією стану; ентропія складної системи дорівнює сумі ентропій її частин.

Обчислюючи зміну ентропії тіла за формулою (14), потрібно пам'ятати, що δQ означає кількість теплоти, одержану тілом. Тому, якщо тіло віддає теплоту, то величину δQ потрібно підставити в (14) із знаком „-“.

Якщо перехід тіла з початкового стану в кінцевий здійснюється декількома послідовними процесами, то повна зміна ентропії дорівнює алгебраїчній сумі змін ентропії в кожному процесі.

231. При ізобаричному нагріванні аргон виконав роботу 8 Дж. Яку кількість теплоти було надано газу?

Розв'язання. При ізобаричному процесі отримана газом кількість теплоти Q витрачається на збільшення його внутрішньої енергії ΔU і на виконання газом роботи A :

$$Q = \Delta U + A. \quad (1)$$

Для знаходження ΔU запишемо формулу внутрішньої енергії одноатомного аргону для його початкового і кінцевого станів:

$$U_1 = \frac{3}{2} \frac{m}{\mu} RT_1; \quad U_2 = \frac{3}{2} \frac{m}{\mu} RT_2, \quad (2)$$

де T_1 і T_2 – початкова і кінцева температура газу.

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{3}{2} \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1). \quad (3)$$

Виконана газом при ізобарному нагріванні робота

$$A = p(V_2 - V_1).$$

Виразимо приріст об'єму газу через приріст його температури в кінцевому і початковому станах, для чого застосуємо до цих станів рівняння Менделєєва-Клапейрона:

$$pV_1 = \frac{m}{\mu} RT_1; \quad pV_2 = \frac{m}{\mu} RT_2,$$

звідки

$$p(V_2 - V_1) = \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1).$$

Робота, виконувана газом,

$$A = \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1). \quad (4)$$

Порівнюючи вирази для ΔU (3) і для A (4), отримаємо

$$\Delta U = \frac{3}{2} A. \quad (5)$$

Підставивши (5) в (1), знайдемо

$$Q = \frac{5}{2} A = 20 \text{ Дж}.$$

232. Азот, який займає при тиску 10^5 Па об'єм 10 л, розширився до об'єму 20 л. Знайти кінцевий тиск і роботу, виконану газом при таких процесах: а) ізобарному; б) ізохорному; в) адіабатному (рис. 19).

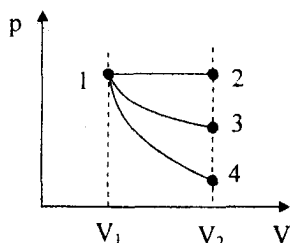


Рис. 19

Розв'язання. Заданий початковий тиск дозволяє вважати газ ідеальним. Розглянемо графіки всіх процесів в координатах p, V .

Очевидно, що робота буде тим більша, чим вище пройде крива, тобто чим більший тиск протягом процесу. На основі молекулярно-кінетичної теорії тиск визначається силою ударів молекул об стінки і частотою ударів, тобто

$$p = \frac{2}{3} n \frac{mv^2}{2}.$$

При ізобарному 1-2 процесі (рис. 19) розширення газу відбувалося при підвищенні температури, що відповідає збільшенню сили окремих ударів молекул об стінки. Частота ударів зменшується внаслідок збільшення об'єму так, що тиск залишається постійним.

При ізотермічному 1-3 (рис. 19) процесі кінетична енергія молекул не змінюється і тиск зменшується тільки в результаті зменшення числа ударів, яких зазнає стінка.

При адіабатному 1-4 (рис. 19) процесі кінетична енергія молекул, яка віддається рухомому поршню, не поповнюється ззовні. Тому адіабатне розширення відбувається при більш різкому, ніж при сталій температурі, зменшенні тиску (зменшується і частота ударів, і сила ударів).

Робота при ізобарному процесі

$$A_{12} = p_1(V_2 - V_1) = 1000 \text{ Дж.}$$

Кінцевий тиск при ізотермічному процесі

$$p_3 = p_1 \frac{V_1}{V_2} = 0,5 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

Робота газу

$$A_{13} = \int_{V_1}^{V_3} p dV = p_1 V_1 \int_{V_1}^{V_3} \frac{dV}{V} = p_1 V_1 \ln \frac{V_3}{V_1} = 690 \text{ Дж.}$$

При адіабатному процесі кінцевий тиск

$$p_4 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma.$$

Азот – двохатомний газ, тому $\gamma = \frac{i+2}{i} = 1,4$. Тоді

$$p_4 = 0,38 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

Робота, виконувана газом при адіабатному розширенні, дорівнює зменшенню внутрішньої енергії:

$$A_{14} = -\Delta U_{14} = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} R(T_1 - T_4).$$

Із рівняння Менделєєва для початкового і кінцевого станів, дістанемо:

$$\frac{m}{\mu} R T_1 = p_1 V_1; \quad \frac{m}{\mu} R T_4 = p_4 V_2.$$

Підставляючи дані вирази у формулу роботи, знайдемо

$$A_{14} = \frac{i}{2} (p_1 V_1 - p_4 V_2) = 600 \text{ Дж.}$$

233. 0,5 моль ідеального газу нагрівають від температури 250 К до 500 К так, що в процесі нагрівання $\frac{p}{V} = \text{const}$. Визначити молярну теплоємність і обчислити кількість теплоти, отриману газом при нагріванні.

Розв'язання. Молярна теплоємність цього процесу може бути знайдена безпосередньо із першого закону термодинаміки, в диференціальній формі

$$\delta Q = dU + \delta A = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R dT + p dV. \quad (1)$$

З іншої сторони, із визначення молярної теплоємності

$$\delta Q = \frac{m}{\mu} C dT, \quad (2)$$

де C – молярна теплоємність заданого процесу.

Прирівнюючи праві частини формул (1) і (2), отримаємо

$$C = \frac{i}{2} R + \frac{m}{\mu} p \frac{dV}{dT}. \quad (3)$$

Другий доданок в (3) знайдемо із рівняння заданого процесу і рівняння стану газу. Підставимо вираз для тиску, одержаний із рівняння Менделєєва-

Клапейрона $p = \frac{mRT}{\mu V}$, почергово в (3) і в рівняння процесу $\frac{P}{V} = \text{const}$:

$$C = \frac{i}{2} R + R \frac{T}{V} \frac{dV}{dT} \quad (4)$$

$$\frac{V^2}{T} = \text{const}. \quad (5)$$

Щоб знайти $\frac{dV}{dT}$, продиференціюємо вираз (5) по змінній T :

$$\frac{2V \left(\frac{dV}{dT} \right) T - V^2}{T^2} = 0,$$

звідки

$$\frac{dV}{dT} = \frac{1}{2} \frac{V}{T}. \quad (6)$$

Підставимо вираз (6) в (4):

$$C = \frac{i}{2} R + \frac{R}{2} = \frac{i+1}{2} R.$$

Так як газ – одноатомний ($i = 3$), то $C = 16.6$ Дж/(моль·К).

Кількість теплоти, поглинута газом при нагріванні,

$$Q_{12} = \int_{T_1}^{T_2} \delta Q = \frac{m}{\mu} C (T_2 - T_1) = 2100 \text{ Дж}.$$

234. Замкнутий цикл, виконуваний 0,3 кг азоту, зображений на рисунку.

Визначити: кількість теплоти, отриману від нагрівника за один цикл; ККД циклу; який ККД мав би ідеальний тепловий цикл, ізотерми якого відповідали б найбільшій і найменшій температурам розглядуваного циклу?

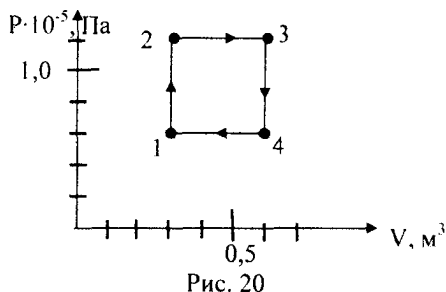


Рис. 20

Розв'язання: Нагрівання газу в розглядуваному циклі відбувається на ділянках 1-2 і 2-3; на ділянках 3-4 і 4-1 газ охолоджується, а тому $Q = Q_{12} + Q_{23}$. Кількість теплоти, отримана азотом від нагрівника при ізохорному нагріванні, $Q_{12} = C_V m(T_2 - T_1)$, при ізобарному нагріванні $Q_{23} = C_P m(T_3 - T_2)$, де C_P і C_V – молярні теплоємності азоту при сталому тиску і сталому об'ємі; T_1 – його температура в початковому стані, T_2 – в стані 2, T_3 – в стані 3.

Із графіка визначаємо параметри газу:

$$p_1 = 60 \text{ кПа}; V_1 = 0{,}63 \text{ м}^3; p_2 = 120 \text{ кПа}; V_3 = 0{,}6 \text{ м}^3.$$

Запишемо рівняння Менделєєва-Клапейрона для станів 1, 2 і 3:

$$p_1 V_1 = \frac{m}{\mu} R T_1; p_2 V_1 = \frac{m}{\mu} R T_2; p_2 V_3 = \frac{m}{\mu} R T_3.$$

Віднявши від другого рівняння перше, а від третього – друге, знайдемо різниці температур $T_2 - T_1$ і $T_3 - T_2$:

$$T_2 - T_1 = \frac{\mu V_1 (p_2 - p_1)}{R}; T_3 - T_2 = \frac{\mu p_2 (V_3 - V_1)}{R}.$$

Отже,

$$Q = \frac{\mu}{R} [C_V V_1 (p_2 - p_1) + C_P p_2 (V_3 - V_1)] = 171 \text{ кДж}.$$

При замкнутому циклі робота чисельно дорівнює площі фігури 1-2-3-4, тобто

$$A = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1) = 18 \text{ кДж}.$$

ККД циклу є відношення роботи, виконаної газом за цикл, до кількості теплоти, отриманої від нагрівача:

$$\eta = \frac{A}{Q} = 0.10.$$

ККД ідеального теплового циклу

$$\eta' = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \quad \text{де}$$

де T_1 – найбільша температура циклу; T_2 – найменша його температура.

Найменшу температуру T_1 газу знайдемо із рівняння Менделєєва-Клапейрона для стану 1:

$$T_1 = \frac{p_1 V_1 \mu}{mR} = 202 \text{ К}.$$

Застосувавши рівняння стану газу до станів 1 і 3, знайдемо його максимальну температуру T_3 :

$$T_3 = T_1 \frac{p_3 V_3}{p_1 V_1} = 808 \text{ К}.$$

Отже, $\eta' = 0.75$.

235. Знайти зміну ентропії при ізотермічному розширенні азоту масою 0,01 кг, якщо тиск газу зменшився від 100 кПа до 50 кПа.

Розв'язання. Зміна ентропії, враховуючи, що процес ізотермічний,

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T} \int_1^2 \delta Q = \frac{Q}{T}.$$

Згідно першого закону термодинаміки, кількість теплоти, одержана газом, $Q = \Delta U + A$. Але для ізотермічного процесу $\Delta U = 0$, тому $Q = A$. Робота газу при ізотермічному процесі

$$A = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

Підставивши даний вираз в першу формулу, знайдемо зміну ентропії:

$$\Delta S = \frac{m}{\mu} R \ln \frac{p_1}{p_2} = 2.06 \text{ Дж/К}.$$

236. Кисень, маса якого 0,2 кг, нагрівають від температури 300 К до 400 К. Знайти зміну ентропії, якщо відомо, що початковий і кінцевий тиски однакові і близькі до атмосферного.

Розв'язання. Остання вказівка показує, що в даній задачі кисень можна вважати ідеальним газом.

Характер процесу нагрівання невідомий. Але зміна ентропії системи при переході із одного стану в **другий** визначається тільки параметрами цих станів і не залежать від характеру процесу.

Знайти ентропію можна, розглянувши довільний оборотний процес, в результаті якого систему (ідеальний газ) можна перевести із стану 1 в стан 2 (рис. 21).

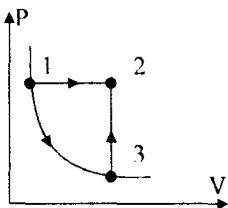


Рис. 21

На рисунку показані два таких можливих квазістатичних процеси: перший – ізобарне розширення 1-2; другий – ізотермічне розширення 1-3 з наступним ізохорним нагріванням 3-2.

Для процесу 1-2

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q_p}{T}, \quad (1)$$

де $\delta Q_p = \frac{m}{\mu} C_p dT$.

Для процесів 1-3-2

$$S_2 - S_1 = \frac{1}{T} \int_1^3 \delta Q_r + \int_3^2 \frac{\delta Q_r}{T}, \quad (2)$$

де $\delta Q_r = \delta A = p dV$, $\delta Q_r = \frac{m}{\mu} C_r dT$.

При ізобарному процесі 1-2 молярна теплоємність $C_p = \text{const} = \frac{i+2}{2} R$.

Підставивши вираз δQ_p під знак інтеграла в (1), отримаємо

$$S_2 - S_1 = \frac{m}{\mu} \frac{i+2}{2} R \int_1^2 \frac{dT}{T} = \frac{m}{\mu} \frac{i+2}{2} R \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

Кисень – двоатомний газ ($i = 5$), і для заданих температур $S_2 - S_1 = 52$ Дж/К.

Легко перевірити, що результат не зміниться і при переході 1-3-2.

Підставляючи вираз δQ_1 і δQ_2 в (2) і враховуючи, що при ізотермічному процесі $p = \frac{p_1 V_1}{V} = \frac{m R T_1}{\mu V}$, дістанемо

$$S_2 - S_1 = \frac{m}{\mu} R \int_1^3 \frac{dV}{V} + \frac{m}{\mu} C_V \int_3^2 \frac{dT}{T} = \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_3}{V_1} + \frac{m}{\mu} C_V \ln \frac{T_2}{T_3}.$$

Враховуючи, що $T_3 = T_1$, $V_3 = V_2$, а також $\frac{T_2}{T_1} = \frac{V_2}{V_1}$, отримаємо

$$S_2 - S_1 = \frac{m}{\mu} \frac{i+2}{2} R \ln \frac{T_2}{T_1} = 52 \text{ Дж/К}.$$

Задачі до теми 8

237. Кисень нагрівають від 323 К до 333 К. Маса кисню 0,16 кг. Знайти кількість поглинутої теплоти і зміну внутрішньої енергії при ізохорному і ізобарному процесах. Початковий тиск близький до атмосферного.

Відповідь: 1040 Дж; 1450 Дж.

238. Яка зовнішня робота буде виконана, якщо 0,2 кг азоту нагріти від 293 К до 373 К при сталому тиску?

Відповідь: 4754 Дж.

239. Азот при температурі 300 К і тиску $2 \cdot 10^5$ Па займав об'єм $4 \cdot 10^{-3}$ м³. Внаслідок адіабатичного розширення його температура знизилась до 273 К. Яку роботу виконав газ під час розширення?

Відповідь: 174,1 Дж.

240. При ізотермічному розширенні 0,001 кг водню його об'єм збільшився в 3 рази. Обчислити роботу розширення газу, якщо його температура дорівнює 280 К.

Відповідь: $12,8 \cdot 10^5$ Дж.

241. 0,2 кг азоту нагрівається при сталому тиску від 293 К до 373 К. Яку кількість теплоти поглинає газ? Який приріст внутрішньої енергії газу? Яку роботу проти зовнішніх сил виконує газ?

Відповідь: 16,64 кДж; 11,885 кДж; 4,755 кДж.

242. 1 кг повітря, взятого при температурі 293 К, стискають так, що його тиск зростає від 9,8 Па до 98 Па. Обчислити роботу у випадку ізотермічного та адіабатного стиснення.

Відповідь: - 195 кДж; - 196 кДж.

243. Обчислити роботу адіабатного стиснення 1 кг повітря від тиску $1 \cdot 10^5$ Па, якщо початкова температура була 280 К.

Відповідь: - 187 кДж.

244. Газ в об'ємі $10 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ знаходиться під тиском $2 \cdot 10^5$ Па, ізотермічно розширився до об'єму $28 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$. Яку роботу виконав газ при розширенні?

Відповідь: 2,086 кДж.

245. Водень в об'ємі $5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$, який знаходиться під тиском $10,13 \cdot 10^4$ Па, адіабатно стиснули до об'єму $1 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$. Знайти роботу стиску газу.

Відповідь: -1143 Дж.

246. Яку кількість теплоти поглинає 0,2 кг водню, нагріваючись від 273 К до 373 К при сталому тиску? Який приріст внутрішньої енергії газу? Яку роботу виконує газ?

Відповідь: 291,2 кДж; 208 кДж; 83,2 кДж.

247. Гелій при сталому тиску 200 кПа розширюється від об'єму $3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ до об'єму $8 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$. Обчислити роботу розширення газу і приріст його внутрішньої енергії.

Відповідь: 1 кДж; 1,5 кДж.

248. Кисень масою 0,0165 кг, що має початковий тиск 150 кПа і температуру 300 К, адіабатно стискають до 0,1 його початкового об'єму. Знайти кінцевий тиск і температуру газу, виконану над газом роботу та приріст внутрішньої енергії.

Відповідь: 3,9 МПа; 750 К; $A = -\Delta U = -4.67 \text{ кДж}$.

249 При адіабатному розширенні тиск повітря масою 1,29 кг зменшується від 200 кПа до 100 кПа, а температура змінюється від 300 К до деякої кінцевої температури. Визначити кінцевий об'єм повітря, його температуру, внутрішню енергію та виконану роботу при розширенні.

Відповідь: $0,9 \text{ м}^3$; 240 К; $A = -\Delta U = 55,4 \text{ кДж}$.

250. Вуглекислий газ масою 0,088 кг, який знаходиться в об'ємі $10 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ під тиском 506,5 кПа, спочатку ізохорно нагріли, а потім ізобарно стиснули до об'єму $5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$, виконавши роботу 16,8 кДж. Знайти різницю температур у початковому і кінцевому станах.

Відповідь: 706 К.

251. Азот масою 1 кг при температурі 300 К займає об'єм $0,5 \text{ м}^3$. В результаті адіабатного стиску тиск газу збільшився в 3 рази. Визначити: кінцевий об'єм газу; його кінцеву температуру; зміну внутрішньої енергії газу.

Відповідь: $0,228 \text{ м}^3$; 411 К; 82,4 кДж.

252. Нагрівач теплової машини, яка працює за циклом Карно, має температуру 473 К. Яка температура холодильника, якщо за рахунок кожного кілоджоуля теплоти одержаної від нагрівача машина виконує роботу 0,4 кДж?

Відповідь: 283,8 К.

253. Ідеальна теплова машина, яка працює за циклом Карно, $2/3$ кількості теплоти, одержаної від нагрівача, передає холодильнику з температурою 283 К. Визначити температуру нагрівача.

Відповідь: 424,5 К.

254. В циклі Карно внаслідок ізотермічного розширення газ одержав від нагрівника 150 Дж теплоти. Визначити роботу ізотермічного стиснення цього газу, якщо коефіцієнт корисної дії циклу 0,4.

Відповідь: - 90 Дж.

255. Під час циклу Карно газ, одержавши від нагрівника 1 кДж теплоти, виконав роботу 400 Дж. Знайти ККД теплової машини та температуру нагрівника, якщо температура холодильника 273 К.

Відповідь: 0,4; 455 К.

256. У циклі Карно газ дістав від нагрівника 1,5 кДж теплоти, 0,3 якої пішло на виконання роботи. У скільки разів температура нагрівника вища від температури холодильника?

Відповідь: 1,4 раза. .

257. Температура пари, що поступає в парову машину, 400 К; температура в конденсаторі 300 К. Визначити теоретично максимальну роботу при затраті кількості теплоти 4,2 кДж.

Відповідь: 1,05 кДж.

258. Ідеальний газ здійснює цикл Карно і виконує роботу 600 Дж. Температура нагрівника 500 К, а холодильника – 300 К. Визначити: термічний коефіцієнт корисної дії циклу; кількість теплоти, відданої газом холодильнику за один цикл.

Відповідь: 0,4; 900 Дж.

259. Коефіцієнт корисної дії ідеальної машини, яка працює за циклом Карно, дорівнює 0,6. Температура холодильника 280 К. Яка температура нагрівника? Як потрібно змінити температуру нагрівника, щоб ККД збільшився в 1,5 рази?

Відповідь: 700 К; 2800 К.

260. Визначити зміну ентропії одного моля ідеального газу в ізобарному, ізохорному і ізотермічному процесах.

Відповідь: $C_p \ln \frac{V_2}{V_1}$; $C_v \ln \frac{p_2}{p_1}$; $R \ln \frac{V_2}{V_1}$.

261. Обчислити зміну ентропії при плавленні 2 кг льоду, що має температуру 273 К.

Відповідь: 2,462 кДж/К.

262. Обчислити зміну ентропії при ізобаричному розширенні $8 \cdot 10^{-3}$ кг гелію від об'єму $10 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ до $25 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$.

Відповідь: $\approx 38,5$ Дж/К.

263. Визначити зміну ентропії при ізобаричному розширенні $6 \cdot 10^{-3}$ кг водню, якщо його тиск зміниться від $1 \cdot 10^5$ Па до $0,5 \cdot 10^5$ Па.

Відповідь: 17,7 Дж/К.

264. 2 кг води нагрівається від 283 К до 373 К та при цій температурі перетворюється в пару. Визначити зміну ентропії.

Відповідь: ≈ 14400 Дж/К.

265. Визначити зміну ентропії при ізотермічному розширенні $10 \cdot 10^{-3}$ кг кисню від об'єму $25 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ до $100 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$.

Відповідь: 3,61 Дж/К.

266. Визначити зміну ентропії $10 \cdot 10^{-3}$ кг кисню при ізобаричному нагріванні від температури 290 К до температури 293 К.

Відповідь: 2,9 Дж/К.

267. Знайти приріст ентропії 0,8 кг водню при його стиску від 100 кПа при температурі 300 К до 1500 кПа при температурі 400 К.

Відповідь: $- 5650$ Дж/К.

268. При ізохорному охолодженні 2 кг азоту до деякої температури від температури 390 К його ентропія зменшилася на 890 Дж/К. До якої температури було охолоджено азот?

Відповідь: 290 К.

269. При нагріванні 3 молів двохатомного ідеального газу його термодинамічна температура збільшилась у 2 рази. Визначити зміну ентропії, якщо нагрівання відбувається: ізохорно, ізобарно.

Відповідь: 28,8 Дж/К; 40,3 Дж/К.

270. Теплоізовльована посудина розділена на дві рівні частини перегородкою, в якій зроблено отвір, що може закриватись. В одній половині посудини міститься $10 \cdot 10^{-3}$ кг водню. Друга половина відкачана до повного вакууму. Після відкриття отвору в перегородці, газ заповнює об'єм всієї посудини. Вважаючи газ ідеальним, обчислити приріст його ентропії.

Відповідь: 29 Дж/К.

9. Реальні гази, рідини і тверді тіла

Основні закони і формули

Рівняння стану ідеального газу (рівняння Ван-дер-Ваальса) для одного моля

$$\left(p + \frac{a}{V_\mu^2}\right)(V_\mu - b) = RT, \quad (1)$$

де V_μ – молярний об'єм; a і b – сталі Ван-дер-Ваальса (різні для різних газів).

Рівняння Ван-дер-Ваальса для довільної маси газу

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu RT, \quad (2)$$

де $\nu = \frac{m}{\mu}$ – кількість речовини; $\frac{\nu^2 a}{V^2} = p'$ – тиск, зумовлений силами взаємодії

молекул; $\nu b = V'$ – об'єм, зв'язаний з власним об'ємом молекул.

Зв'язок між параметрами критичного стану і сталими Ван-дер-Ваальса

$$V_{\mu k} = 3b, \quad p_k = \frac{a}{27b^2}, \quad T_k = \frac{8a}{27bR}, \quad (3)$$

де $V_{\mu k}$ – молярний критичний об'єм газу, p_k і T_k – критичні тиск і температура.

Зв'язок між критичними параметрами моля речовини

$$p_k V_{\mu k} = \frac{3}{8} RT_k. \quad (4)$$

Зведене рівняння Ван-дер-Ваальса для одного моля газу

$$\left(p_n + \frac{3}{V_n^2}\right)(3V_n - 1) = 8T_n, \quad (5)$$

де $p_n = \frac{p}{p_k}$, $V_n = \frac{V_\mu}{V_{\mu k}}$, $T_n = \frac{T}{T_k}$ – зведені параметри, під якими розуміють відношення

змінної величини даного параметра до його критичного значення.

Внутрішня енергія реального газу

$$U = \nu \left(C_v T - \frac{a}{V_\mu} \right), \quad (6)$$

де C_v – молярна теплоємність газу при сталому об'ємі.

Зміна температури при дроселюванні реального газу в об'єм з невеликим тиском

$$\Delta T = \frac{1}{C_p} \left(\frac{RT_1 b}{V_1 - b} - \frac{2a}{V_1} \right), \quad (7)$$

де V_1 , T_1 – початкові об'єм і температура газу.

Коефіцієнт поверхневого натягу рідини

$$\sigma = \frac{F}{l}, \text{ або } \sigma = \frac{\Delta E}{\Delta S}, \quad (8)$$

де F – сила поверхневого натягу; l – довжина контура, що обмежує поверхню рідини; ΔE – зміна вільної енергії поверхневого шару рідини; ΔS – зміна площі поверхні рідини.

Формула Лапласа для обчислення додаткового тиску, зумовленого кривизною поверхні рідини

$$\Delta p = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (9)$$

де R_1 і R_2 – радіуси кривизни двох взаємно перпендикулярних нормальних перерізів поверхні рідини.

Висота підняття рідини в капілярі

$$h = \frac{2\sigma \cos \theta}{\rho g r}, \quad (10)$$

де θ – крайовий кут змочування; ρ – густина рідини; r – радіус капіляра.

Температурний коефіцієнт об'ємного розширення при нагріванні рідини

$$\beta = \frac{\Delta V}{V \Delta T}. \quad (11)$$

Коефіцієнт стисливості рідини

$$z = \frac{\beta \Delta T}{\Delta p} = \frac{\Delta V}{V \Delta p}. \quad (12)$$

Закон Дюлонга і Піті

$$C_V = 3R, \quad (13)$$

де C_V – молярна теплоємність хімічно простих твердих тіл.

Стала кристалічної решітки кубічної системи

$$a = \sqrt{\frac{n\mu}{k\rho N_A}}, \quad (14)$$

де n – кількість однакових атомів, які утворюють елементарну комірку; μ – молярна маса речовини; k – кількість однакових атомів у хімічній формулі кристалічного тіла; N_A – число Авогадро; ρ – густина кристала.

Коефіцієнт лінійного теплового розширення твердого тіла

$$\alpha = \frac{\Delta l}{l \Delta T}, \quad (15)$$

де l – початкова довжина; Δl – зміна довжини; ΔT – зміна температури.

Коефіцієнт об'ємного теплового розширення для твердих ізотропних тіл

$$\beta = 3\alpha. \quad (16)$$

Густина тіл при їх тепловому розширенні

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \beta t}, \quad (17)$$

де ρ і ρ_0 – густина тіла при температурі t і 0°C .

Кількість теплоти, яка передається твердими тілами внаслідок теплопровідності,

$$Q = \chi \frac{\Delta T}{\Delta x} S \tau, \quad (18)$$

де χ – коефіцієнт теплопровідності; $\frac{\Delta T}{\Delta x}$ – градієнт температури в напрямку, перпендикулярному до поверхні площею S ; τ – час процесу теплопередачі.

Рівняння Клапейрона-Клаузіуса для зміни температури dT фазового переходу в залежності від зміни тиску dp

$$\frac{dT}{dp} = \frac{T(V_2' - V_1')}{L}, \quad (19)$$

де L – питома теплота переходу; $V_2' - V_1'$ – різниці питомих об'ємів фаз, які перебувають у рівновазі; T – температура фазового переходу.

Методичні вказівки

1. В задачах на реальні гази розглядаються процеси при температурі T не нижче критичної T_k .

Як правило в умовах задачі обговорюють ті випадки, коли газ можна розглядати як реальний. В іншому випадку вивчають дане питання для того, щоб із двох рівнянь стану газу – Клапейрона-Менделєєва і Ван-дер-Ваальса – вибрати одне для розв'язування задачі. При цьому газ вважають реальним тоді, коли він сильно стиснутий у порівнянні з газом, взятим при нормальних умовах (див. задачу № 271).

Якщо з умови задачі неможливо зробити висновок про те, яким потрібно вважати даний газ – ідеальним чи реальним, – треба знайти його молярний об'єм V_μ і порівняти його з молярним об'ємом, що займає будь-який газ при нормальних умовах ($V_0 = 22.4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{моль}$). Якщо $V_\mu \geq V_0$, то газ можна без будь-якої похибки вважати ідеальним. Якщо $V_\mu \ll V_0$, тобто густина даного газу значно перевищує її значення при нормальних умовах, то газ потрібно вважати реальним.

В усіх інших випадках ($V_\mu < V_0$) треба припустити, що даний газ реальний і знайти поправки на додатковий тиск $\frac{a}{V_\mu^2}$ та власний об'єм b , а після порівняти їх з величинами p і V_μ (рівняння (1)), якщо вони обидві дані в умові задачі. Коли поправки виявляться малі, то їх відкидають і отримують рівняння стану ідеального газу або, залишаючи поправки, ми тим самим вирішуємо питання про вибір рівняння стану реального газу (див. задачу № 272).

Якщо в задачі невідомою величиною є об'єм або маса газу i , отже, неможливо знайти молярний об'єм V_μ , то критерієм вибору рівняння стану може служити величина тиску газу. Так, при тиску меншому нормального атмосферного ($p_0 = 1.01 \cdot 10^5 \text{ Па}$), газ буде достатньо розрідженим і його можна вважати ідеальним (якщо його температура не дуже низька в порівнянні з нормальною $T_0 = 273 \text{ К}$). При тиску $p \gg p_0$ газ буде сильно стиснутим і його вважають реальним (якщо температура не дуже висока в порівнянні з нормальною T_0). В цьому випадку розв'язують рівняння (1), яке є кубічним відносно V_μ (див. задачу № 273).

2. При розв'язуванні задач на поверхневий натяг потрібно враховувати, що сили поверхневого натягу діють вздовж будь-якого контура, який оточує ділянку поверхні розділу рідини. При цьому сила поверхневого натягу, прикладена до кожного елемента контура і напрямлена по дотичній до поверхні вздовж внутрішньої нормалі до елемента контура.

У багатьох задачах розглядаються мильні плівки. В таких випадках необхідно враховувати, що плівка має дві поверхні – зовнішню і внутрішню, вздовж кожної з яких діють сили поверхневого натягу (див. задачу № 274).

В усіх задачах, пов'язаних з розрахунком висоти підняття рідини в капілярі, в яких неможливо безпосередньо застосувати формулу (10), потрібно виходити із умови рівноваги стовпа рідини: різниця тисків, що діють на стовп знизу і зверху, повинна дорівнювати гідростатичному тиску ρgh , який створює стовп рідини на його основу.

3. Парою називають газ, що знаходиться при температурі, меншій за критичну. В залежності від того, наскільки пара стиснута, вона підпорядкована рівнянню стану ідеального газу (при малих густинах) або рівнянню стану реального газу (при великих густинах). При цьому критерій ступеня стиску пари залишається то й же, що і для любого газу (див. п. 1 даного параграфу). Відмітимо важливу особливість пари, яку необхідно враховувати, застосовуючи до неї рівняння стану. При ізотермічному стиску пари її густина і тиск будуть зростати тільки до тих пір, поки пара не стане насиченою. При подальшому зменшенні об'єму пара почне конденсуватися, перетворюючись у рідину. При цьому густина і тиск маси пари, яка залишиться, залишаються сталими та рівними густині і тиску насичуючої пари при даній температурі (значення цих величин беруть з таблиці). Отже, при обчисленні тиску або густини пари по якому-небудь рівнянню стану реальними відповідями будуть тільки ті значення p і ρ , які не перевищують значень цих величин для насичуючої пари при даній температурі. У протилежному випадку пару в даних умовах потрібно вважати насиченою і за шукані величини p і ρ брати їх табличні значення для насичуючої пари при даній температурі (див. задачу № 275).

4. При розв'язуванні задач на властивості твердих тіл і фазові переходи потрібно спочатку вияснити характер процесів, що відображені в умові задачі. Наприклад, розв'язування задач на теплове розширення тіл базується на використанні до кожного стану нагріваючого тіла формул (15) – (16). Часто в задачах з тепловим розширенням одночасно розглядають різні інші процеси (деформація, зміна гідростатичного тиску, теплообмін і ін.). В задачах на розширення води потрібно враховувати аномальну залежність її густини від температури в інтервалі від 0 до 4°C.

Тверді тіла мають невеликий коефіцієнт теплового розширення і тому для них значення теплоємностей при сталому об'ємі та сталому тиску практично не відрізняються, і через це говорять просто про молярну теплоємність твердого тіла, яка при досить високій температурі для усіх хімічно простих тіл не залежить від температури і дорівнює $3R$ (13) (закон Дюлонга і Пті). Очевидно, що молярна теплоємність сполук приблизно дорівнює сумі теплоємностей їх компонент (наприклад, для кристала $NaCl$ молярна теплоємність буде вдвоє більша і рівна $6R$).

Якщо в твердому тілі є градієнт температури, то для нього буде характерним процес передачі теплоти, який приводить до вирівнювання температури. Процес передачі теплоти у твердому тілі здійснюється завдяки теплопровідності, яка описується законом Фур'є (18).

Підкреслимо, що рівняння (19) Клапейрона-Клаузіуса справедливе для різних фазових переходів першого роду, таких як випаровування (конденсація), плавлення (кристалізація), сублімація. Воно зв'язує похідну від температури по тиску з питомою теплотою переходу, температурою фазового переходу і різницею питомих об'ємів фаз, які перебувають у рівновазі. Також рівняння (19) дає можливість встановити функціональний зв'язок $p = f(T)$ для насиченої пари далеко від значення критичної температури. При невисоких температурах густина насичуючої пари мала і вона за своїми властивостями близька до ідеального газу, тому об'єм пари $V_n = \frac{RT}{p}$ (зауважимо, що $V_n \gg V_p$; V_p – об'єм рідини). Якщо L не залежить від температури, то з (19) дістанемо

$$p = C \cdot e^{-\frac{L}{kT}},$$

де C – стала інтегрування, яку можна знайти якщо відомий тиск насичуючої пари p_0 при температурі T_0 .

Приклади розв'язування задач

271. У дуже міцному закритому сталюму балоні міститься вода, яка при кімнатній температурі займає половину об'єму балону. Знайти густину і тиск водяної пари при підвищенні температури до 673 К.

Розв'язання. Із таблиці критичних температур критична температура для води дорівнює 647 К. Отже, нагрівання води в балоні до температури вищої за критичну призведе до того, що вся вода буде знаходитись у газоподібному стані.

Густину водяної пари визначимо, враховуючи, що об'єм однієї і тієї ж маси води в результаті нагрівання збільшиться у два рази. Отже, густина ρ пари, яка дорівнює відношенню маси до об'єму, буде у два рази менша за густину води $\rho_c = 1 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$

$$\rho = \frac{\rho_c}{2} = 5 \cdot 10^2 \text{ кг/м}^3.$$

Так як густина пари в балоні величезна в порівнянні з густиною газів при нормальних умовах (наприклад, густина повітря становить $1,29 \text{ кг/м}^3$), то водяну пару необхідно розглядати як реальний газ. З рівняння Ван-дер-Ваальса (1) дістанемо

$$p = \frac{RT}{V_\mu - b} - \frac{a}{V_\mu^2}, \quad (1)$$

де V_μ – молярний об'єм, але не об'єм всієї маси пари. Тому на основі визначення густини можна записати $V_\mu = \frac{\mu}{\rho}$, де μ – молярна маса пари. Підставивши V_μ в (1), знайдемо

$$p = \frac{RT}{\frac{\mu}{\rho} - b} - \frac{a\rho^2}{\mu^2}. \quad (2)$$

Взявши із таблиць значення сталих a , b і μ для води ($a = 0,55 \frac{\text{м}^3 \cdot \text{Н}}{\text{моль}^2}$;

$b = 3 \cdot 10^{-5} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}$; $\mu = 0,018 \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$) та підставивши усі величини у формулу (2), після виконаних обчислень, отримаємо

$$p = 5,1 \cdot 10^8 \text{ Па}.$$

272. Знайти тиск 0,28 кг азоту, який знаходиться при температурі 300 К в посудині, об'єм якої дорівнює: 1) $V = 1 \text{ м}^3$; 2) $V = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$.

Розв'язання. Щоб вияснити питання про те, яким потрібно вважати даний газ – ідеальним чи реальним, – знайдемо його молярний об'єм V_μ .

$$V_\mu = \frac{V}{\nu} = \frac{V \cdot \mu}{m}.$$

Враховуючи, що молярна маса азоту $\mu = 0,028 \text{ кг/моль}$ дістанемо:

$$1) V_\mu = \frac{1 \text{ м}^3 \cdot 0,028 \frac{\text{кг}}{\text{моль}}}{0,28 \text{ кг}} = 0,1 \frac{\text{м}^3}{\text{моль}};$$

$$2) V_\mu = \frac{0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 \cdot 0,028 \frac{\text{кг}}{\text{моль}}}{0,28 \text{ кг}} = 5 \cdot 10^{-5} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}.$$

Порівнюючи обчислені значення V_μ з молярним об'ємом газу при нормальних умовах $V_{\mu \text{ норм}} = 22,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{моль}$ бачимо, що у першому випадку газ достатньо розріджений і його можна вважати ідеальним. Рівняння стану ідеального газу для одного моля запишеться так:

$$pV_\mu = RT,$$

звідки

$$p = \frac{RT}{V_\mu} = \frac{8,3 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}}{0,1 \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}} = 25 \text{ кПа}.$$

У другому випадку $V_\mu \ll V_{\mu \text{ норм}}$, тому газ вважаємо реальним. Його тиск знаходимо із рівняння Ван-дер-Ваальса (1):

$$p = \frac{RT}{V_\mu - b} - \frac{a}{V_\mu^2}.$$

Взявши із таблиць значення сталих Ван-дер-Ваальса для азоту ($a = 0,13 \text{ м}^4 \cdot \text{Н/моль}^2$; $b = 3,7 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{моль}$), обчислимо тиск

$$p = \left[\frac{8,3 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \cdot 300 \text{ К}}{5 \cdot 10^{-5} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}} - 3,7 \cdot 10^{-5} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}} - \frac{0,13 \frac{\text{м}^4 \cdot \text{Н}}{\text{моль}^2}}{\left(5 \cdot 10^{-5} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}\right)^2} \right] = 140 \text{ МПа}.$$

273. Знайти масу кисню в балоні місткістю $10 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ при температурі 300 К і тисках: 1) $p = 9,8 \cdot 10^4 \text{ Па}$; 2) $p = 4018 \cdot 10^4 \text{ Па}$.

Розв'язання. У першому випадку ($p = 9,8 \cdot 10^4 \text{ Па}$) кисень в балоні знаходиться в умовах, близьких до нормальних. Тому газ можна вважати ідеальним. На основі рівняння стану ідеального газу, враховуючи, що для кисню $\mu = 0,032 \text{ кг/моль}$, дістанемо

$$m = \frac{\mu p V}{RT} = \frac{0,032 \frac{\text{кг}}{\text{моль}} \cdot 9,8 \cdot 10^4 \text{ Па} \cdot 10 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3}{8,3 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \cdot 300 \text{ К}} = 0,013 \text{ кг}.$$

У другому випадку ($p = 4018 \cdot 10^4 \text{ Па}$), враховуючи величезний у порівнянні з нормальним тиск газу, його потрібно вважати реальним і розрахунки проводити на основі рівняння Ван-дер-Ваальса (1).

Масу газу визначаємо із співвідношення

$$m = \mu \nu = \frac{\mu V}{V_\mu}, \quad (\text{А})$$

де μ – молярна маса; ν – число молів; V – об'єм газу; V_μ – молярний об'єм, який знаходимо із рівняння (1), яке є рівнянням третього степеня відносно V_μ і тому має три корені. Але, враховуючи, що кисень у балоні знаходиться при температурі вище критичної ($T_k = 154 \text{ К}$), можна стверджувати, що при певному тиску газ буде мати тільки один певний об'єм (у системі координат (p, V) ізотерма Ван-дер-Ваальса, що відповідає температурі вищій за критичну, не має завитка). Отже, кубічне відносно V_μ рівняння Ван-дер-Ваальса (1) має в даному випадку тільки один дійсний корінь. Його можна знайти методом послідовних наближень, так як розв'язування кубічного рівняння за формулою Кардано дуже громіздке.

У якості першого наближення обчислимо молярний об'єм V_μ газу, розглядаючи його як ідеальний. Із рівняння стану ідеального газу дістанемо

$$V_\mu = \frac{RT}{p} = \frac{8,3 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \cdot 300 \text{ К}}{4018 \cdot 10^4 \text{ Па}} = 0,62 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}.$$

Тепер, позначивши в рівнянні (1) поправку на тиск через $p_i = \frac{a}{V_\mu^2}$, знайдемо

із (1) величину V_μ :

$$V_\mu = \frac{RT}{p + p_i} + b. \quad (B)$$

Підставивши в (B) приблизне значення $p_i = \frac{a}{V_\mu^2}$:

$$V_{\mu 2} = \frac{RT}{p + \frac{a}{V_{\mu 2}^2}} + b.$$

Виконавши обчислення (із таблиць для кисню $a = 0,13 \frac{\text{м}^4 \cdot \text{Н}}{\text{моль}^2}$,

$b = 3,1 \cdot 10^{-5} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}$), дістанемо

$$V_{\mu 2} = 0,65 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}.$$

Другий раз обчисливши за (B) молярний об'єм, вважаючи при цьому

$p_i = \frac{a}{V_{\mu 2}^2}$, одержимо третє наближення

$$V_{\mu 3} = 0,66 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}.$$

Повторюючи таким чином обчислення за формулою (B), будемо одержувати все більш точні значення V_μ :

$$V_{\mu 4} = 0,67 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}};$$

$$V_{\mu 5} = 0,67 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}.$$

Бачимо, що при дальніших обчисленнях (з точністю до другого знака) відповідь уже не змінюється. Тому дійсним коренем кубічного рівняння (1), обчисленим з точністю до другого знака, буде

$$V_\mu = 0,67 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}.$$

Тепер за формулою (A) знайдемо шукану масу газу:

$$m = \frac{0,032 \cdot \frac{\text{кг}}{\text{моль}} \cdot 10 \cdot 10^{-3} \cdot \text{м}^3}{0,67 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}} = 4,8 \text{ кг}.$$

Примітка. Легко переконатися в тому, що обчислення за рівнянням Клапейрона-Менделєєва ($m = \frac{\mu p V}{RT} = 5,2 \text{ кг}$) дає неправильний результат.

274. Яку роботу проти сил поверхневого натягу треба виконати, щоб видути мильну бульбашку радіуса $0,05 \text{ м}$? Чому дорівнює додатковий тиск всередині бульбашки?

Розв'язання. Мильна бульбашка – це тонка плівка мильної води приблизно сферичної форми. Ця плівка має дві поверхні – зовнішню і внутрішню. Нехтуючи товщиною плівки і вважаючи радіуси двох куль однаковими, знайдемо їх загальну площу:

$$S = 2 \cdot 4\pi R^2 = 8\pi R^2. \quad (1)$$

Оскільки поверхня мильної води, із якої видули бульбашку, була дуже мала, то можна вважати, що $S = \Delta S$, тобто приросту площі поверхні мильної води.

Згідно формули (8) приріст поверхневої енергії

$$\Delta E = \sigma \Delta S. \quad (2)$$

Виконувана при видуванні бульбашки робота проти сил поверхневого натягу йде на збільшення поверхневої енергії ΔE . Отже, із (1) і (2) дістанемо

$$A = \Delta E = 8\pi R^2 \sigma. \quad (3)$$

Для визначення додаткового тиску всередині бульбашки врахуємо, що обидві сферичні поверхні – зовнішня і внутрішня – тиснуть на повітря всередині бульбашки внаслідок своєї кривизни. Цей тиск знаходять за формулою Лапласа (9), в якій радіуси кривизни всіх нормальних перерізів для сфери рівні її радіусу, тобто $R_1 = R_2 = R$. Отже, надлишковий (у порівнянні з зовнішнім) тиск повітря всередині бульбашки

$$\Delta p = 2 \cdot \sigma \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) = \frac{4\sigma}{R}. \quad (4)$$

Взявши із таблиці значення σ для мильної води ($\sigma = 0,04 \text{ Н/м}$) і виконавши обчислення за формулами (3) і (4), дістанемо:

$$A = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}; \Delta p = 3,2 \text{ Па}.$$

275. У закритій посудині є вода масою 0,5 кг нагріта до 380 К. Визначити тиск водяної пари у посудині при даній температурі і таких значеннях об'єму посудини: 1) $V = 1 \text{ м}^3$; 2) $V = 0,5 \text{ м}^3$; 3) $V = 0,005 \text{ м}^3$.

Розв'язання. Тут на відміну від задачі № 271 вода нагріта до температури нижче критичної. Тому не виключено, що не вся вода при нагріванні перетвориться у пару, яка при цьому буде знаходитись в стані насичення. Із таблиці залежність тиску насиченої пари від температури знаходимо, що при 380 К тиск пари $p_{\text{нас}} = 1,3 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

Це значення визначає максимально можливий тиск у посудині при даній температурі.

Тепер обчислимо дійсний тиск пари у посудині в трьох випадках.

1) $V = 1 \text{ м}^3$. Щоб вияснити, ідеальним чи реальним газом можна вважати водяну пару, знайдемо її молярний об'єм V_μ , припустивши, що вся вода в посудині перетворилася в пару:

$$V_\mu = \frac{V}{\nu} = \frac{V\mu}{m} = \frac{1 \text{ м}^3 \cdot 0,018 \frac{\text{кг}}{\text{моль}}}{0,5 \text{ кг}} = 0,036 \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}.$$

Оскільки отримане значення V_μ перевищує молярний об'єм газу при нормальних умовах ($V_{\mu \text{ норм}} = 0,024 \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}$) і, отже, густина пари менша, ніж при нормальних умовах, то водяну пару можна вважати ідеальним газом. Із рівняння стану ідеального газу для одного моля знайдемо

$$p_1 = \frac{RT}{V_\mu} = \frac{8,3 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \cdot 380 \text{ К}}{0,036 \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}} = 9 \cdot 10^4 \text{ Па}.$$

Порівнюючи значення p_1 і $p_{\text{нас}}$, бачимо, що $p_1 < p_{\text{нас}}$. Отже, припущення про те, що вся вода у посудині випарувалась, було правильним. Посудина була повністю заповнена ненасиченою парою.

2) $V = 0,5 \text{ м}^3$. Знову обчислимо молярний об'єм V_μ пари, припустивши, що вся вода перетворилася у пару:

$$V_{\mu} = \frac{V_{\mu}}{m} = \frac{0,5 \cdot \text{м}^3 \cdot 0,018 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}}{0,5 \text{ кг}} = 0,018 \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}.$$

Оскільки тепер $V_{\mu} < V_{\text{норм}}$, і, отже, густина пари більша, ніж при нормальних умовах, то пару будемо вважати реальним газом, який описується рівняння Ван-дер-Ваальса (1). Із таблиці візьмемо значення сталих Ван-дер-Ваальса: $a = 0,55 \frac{\text{м}^4 \cdot \text{Н}}{\text{моль}^2}$; $b = 3 \cdot 10^{-5} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}$. Нехтуючи поправкою b у порівнянні з V_{μ} , з (1) дістанемо

$$p_2 = \frac{RTV_{\mu} - a}{V_{\mu}^2} = \frac{8,3 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \cdot 380 \text{ К} \cdot 0,018 \frac{\text{м}^3}{\text{моль}} - 0,55 \frac{\text{м}^4 \cdot \text{Н}}{\text{моль}^2}}{\left(0,018 \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}\right)^2} = 1,7 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Порівнюючи цей результат із значенням $p_{\text{нас}}$, бачимо, що $p_2 > p_{\text{нас}}$ при даній температурі, а це неможливо.

Отже, припущення про те, що вся вода в посудині перетворилася у пару, виявилася помилковим. В дійсності пара у посудині об'ємом $0,5 \text{ м}^3$ знаходиться у стані насичення і її тиск

$$p_2 = p_{\text{нас}} = 1,3 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

3) $V = 0,005 \text{ м}^3$. Так як пара виявилася насиченою в об'ємі $0,5 \text{ м}^3$, то при меншому об'ємі посудини вона також буде насиченою. Отже,

$$p_3 = p_{\text{нас}} = 1,3 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

276. Питома теплота пароутворення води $L_k = 2,44 \text{ МДж/кг}$, а при $T = 373 \text{ К}$ густина пари $\rho_n = 0,598 \text{ кг/м}^3$. Користуючись рівнянням Клапейрона-Клаузіуса, знайти швидкість зміни температури кипіння $\frac{dT}{dh}$ (в К/м) залежно від висоти, взявши за початок відліку рівень моря, а температуру повітря вважати сталою і такою, що дорівнює 300 К .

Розв'язання. Згідно з рівнянням Клапейрона-Клаузіуса

$$\frac{dT}{dp} = \frac{T(V'_n - V'_r)}{L_k}.$$

Оскільки $V_n'' \gg V_p'$, то $V_n'' - V_p' \approx V_n''$. Тиск з висотою змінюється за законом

$$\frac{dp}{dh} = -\rho g \quad (\rho - \text{густина повітря}).$$

Тепер $\frac{dT}{dh} = \frac{dT}{dp} \cdot \frac{dp}{dh} = -\frac{TV_n''}{L_k} \rho g$, де $V_n'' = \frac{1}{\rho_n}$.

Отже,

$$\frac{dT}{dh} = -\frac{T\rho g}{L_k \rho_n} \approx -3 \cdot 10^{-5} \frac{K}{m}.$$

Знак „мінус” означає, що температура кипіння з висотою зменшується.

Задачі до теми 9

277. Обчислити, користуючись рівнянням Ван-дер-Ваальса, тиск 1,1 кг вуглекислого газу, що знаходиться в балоні місткістю $20 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ при температурі 286 К (для вуглекислого газу $a = 0,364 \text{ м}^4 \cdot \text{Н/моль}^2$; $b = 4,3 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{моль}$).

Відповідь: $25,4 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$.

278. За значенням сталих Ван-дер-Ваальса для азоту ($a = 0,136 \text{ м}^4 \cdot \text{Н/моль}^2$; $b = 3,86 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{моль}$) знайти критичні значення об'єму, тиску і температури.

Відповідь: $V_{\text{кр}} = 11,58 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{моль}$; $p_k = 33,8 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$; $T_k = 126 \text{ К}$.

279. 0,02 кг гелію при тиску 10^8 Н/м^2 займає об'єм 10^{-4} м^3 . Яка температура газу? Якою була б температура гелію, якщо його вважати ідеальним газом? ($a = 0,003 \text{ м}^4 \cdot \text{Н/моль}^2$; $b = 2,2 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{моль}$).

Відповідь: $\approx 2224 \text{ К}$; $\approx 481 \text{ К}$.

280. Обчислити власний об'єм молекул кисню та тиск, зумовлений силами їх взаємодії, якщо в балоні місткістю $10 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ знаходиться 0,5 кг газу ($a = 0,136 \text{ м}^4 \cdot \text{Н/моль}^2$; $b = 3,19 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{моль}$).

Відповідь: $124 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$; $3,32 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$.

281. В балоні місткістю $10 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ перебуває азот масою 0,25 кг при температурі 280 К. Знайти (в %), яку частину об'єму балона становить власний об'єм молекул газу та внутрішній тиск від тиску газу на стінки балона.

Відповідь: 0,86 %; 5,05 %.

282. Один моль газу займає деякий критичний об'єм при критичній температурі, який в 3 рази більший від його критичного об'єму. У скільки разів тиск газу в цьому стані менший від критичного тиску? (використати зведене рівняння Ван-дер-Ваальса).

Відповідь: в 1,5 рази.

283. 1000 молів гелію займають об'єм $0,237 \text{ м}^3$ при температурі 73 К. Користуючись рівнянням Ван-дер-Ваальса у зведених величинах, знайти тиск гелію.

Відповідь: $27 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

284. 1 кмоль деякого газу займає об'єм 1 м^3 . При розширенні газу до об'єму $1,5 \text{ м}^3$ була виконана робота 45300 Дж проти сил міжмолекулярного притягання. Визначити сталу a Ван-дер-Ваальса.

Відповідь: $0,136 \text{ м}^4 \cdot \text{Н/моль}^2$.

285. Знайти зміну внутрішньої енергії 0,02 кг хлору при ізотермічному розширенні від $20 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$ до $500 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$ ($a = 0,65 \text{ м}^4 \cdot \text{Н/моль}^2$; $\mu = 0,071 \text{ кг/моль}$).

Відповідь: 154 Дж. .

286. Яку температуру має 0,002 кг азоту, що займає об'єм $82 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3$ при тиску в $2 \cdot 10^5 \text{ Па}$? Газ розглядати як реальний.

Відповідь: 280 К.

287. У посудині місткістю $20 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$ знаходиться 0,008 кг кисню при температурі 300 К. Визначити внутрішню енергію кисню. Газ вважати реальним.

Відповідь: 1,13 кДж.

288. Вуглекислий газ масою 0,088 кг займає об'єм 10^{-3} м^3 при температурі 290 К. Обчислити внутрішню енергію газу, якщо: 1) газ ідеальний; 2) газ реальний ($a = 0,36 \text{ м}^4 \cdot \text{Н/моль}^2$).

Відповідь: 14,5 кДж; 13 кДж.

289. Яку роботу може виконати мильна плівка при зменшенні площі її поверхні на $1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$, якщо коефіцієнт поверхневого натягу мильної плівки дорівнює 0,045 Н/м?

Відповідь: $4,5 \cdot 10^{-6} \text{ Дж}$.

290. Визначити тиск повітря в повітряній бульбашці діаметром $1 \cdot 10^{-5}$ м, що знаходиться у воді при температурі 20°C ($\sigma = 0.073 \text{ Н/м}$) на глибині 3 м. Тиск атмосфери нормальний.

Відповідь: $\approx 160 \text{ кПа}$.

291. Дві мильних бульбашки радіусами 0,02 м і 0,03 м зливаються в одну. Визначити енергію, що виділяється при цьому процесі, якщо коефіцієнт поверхневого натягу мильної плівки дорівнює $0,045 \text{ Н/м}$.

Відповідь: $261,09 \text{ мкДж}$.

292. Визначити діаметр трубки, з якої витікає краплями деяка рідина, якщо вага 100 крапель рідини виявилася рівною $0,023 \text{ Н}$ ($\sigma = 0.075 \text{ Н/м}$).

Відповідь: $\approx 0,001 \text{ м}$.

293. На скільки знизиться вода в капілярі радіусом $0,0001 \text{ м}$ при підвищенні її температури на 80° , якщо з підвищенням температури на 1° коефіцієнт поверхневого натягу води зменшується на $1,5 \cdot 10^{-4} \text{ Н/м}$?

Відповідь: $0,0245 \text{ м}$.

294. У посудину з ртуттю занурено відкритий капіляр, внутрішній діаметр якого $0,003 \text{ м}$. Різниця рівнів ртуті в посудині і в капілярі $0,0037 \text{ м}$. Знайти радіус кривизни меніска в капілярі.

Відповідь: $0,002 \text{ м}$.

295. У капілярній трубці, радіус якої $0,0005 \text{ м}$, рідина піднялася на висоту $0,011 \text{ м}$. Визначити густину цієї рідини, якщо її коефіцієнт поверхневого натягу становить $0,022 \text{ Н/м}$.

Відповідь: $0,8 \text{ кг/м}^3$.

296. Знайти, під яким тиском перебуває повітря всередині бульбашки радіусом $0,005 \text{ мм}$, розміщеної під поверхнею води на глибині $0,2 \text{ м}$. Атмосферний тиск становить $101,7 \text{ кПа}$, а коефіцієнт поверхневого натягу води дорівнює $0,073 \text{ Н/м}$.

Відповідь: $132,9 \text{ кПа}$.

297. Коефіцієнт об'ємного розширення ртуті $1,82 \cdot 10^{-4} \text{ К}^{-1}$. Щоб при нагріванні ртуті на 1 К об'єм не змінився, потрібно збільшити зовнішній тиск на $4,7 \text{ МПа}$. Визначити коефіцієнт стисливості ртуті.

Відповідь: $3,96 \cdot 10^{-11} \text{ Па}^{-1}$.

298. На скільки потрібно збільшити зовнішній тиск, щоб при нагріванні бензолу на 5 К його об'єм не змінився? Коефіцієнт об'ємного розширення бензолу дорівнює $1,25 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}$, а коефіцієнт стисливості – $9 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$.

Відповідь: $6,9 \text{ МПа}$.

299. Гас наливо в скляну посудину висотою $15 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ так, що при температурі 10°C його рівень на $0,005 \text{ м}$ нижчий від висоти посудини. Чи виллється гас із посудини при його нагріванні до температури 40°C ? Тепловим розширенням скла знехтувати. Середній коефіцієнт об'ємного розширення гасу дорівнює $1 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}$.

Відповідь: не виллється.

300. Залізний стержень довжиною $0,5 \text{ м}$ та площею поперечного перерізу $6,25 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ нагрівається на 400°C . Яку роботу виконує стержень, остигаючи до 0°C ? Модуль пружності заліза дорівнює $19,6 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$, а коефіцієнт лінійного теплового розширення – $1,2 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}$.

Відповідь: $\approx 705,6 \text{ Дж}$.

301. Визначити механічну напругу в латунному циліндрі, затиснутому при 0°C між двома опорами, якщо його нагріти до 150°C . Для латуні модуль Юнга дорівнює $90 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$, а коефіцієнт лінійного теплового розширення – $1,9 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}$.

Відповідь: $257 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$.

302. Обчислити сталу кристалічної решітки кухонної солі (NaCl). Скільки молекул NaCl входить до складу елементарної комірки кристала кухонної солі?

Відповідь: $5,64 \cdot 10^{-10} \text{ м}$; 4.

303. Кристали хлористого цезію (CsCl) мають кубічну об'ємноцентровану решітку. У вершинах кристалічної комірки з ребром рівним $0,41 \text{ нм}$ перебувають іони хлору, а в центрі комірки – іон цезію. Знайти молярний об'єм і густину кристалів.

Відповідь: $42 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$; $4,1 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

304. Користуючись законом Дюлонга і Пті, знайти, з якої речовини виготовлена металічна кулька масою $0,02 \text{ кг}$, якщо відомо, що для її нагрівання від 10 до 30°C потрібно затратити 117 Дж теплоти.

Відповідь: молярна маса матеріалу кульки 107 кг/моль (із срібла).

305. Користуючись законом Дюлонга і Пті, визначити питому теплоємність:
а) міді; б) алюмінію.

Відповідь: 390 Дж/(кг·К); 920 Дж/(кг·К).

306. Зовнішня поверхня стіни має температуру -20°C , а внутрішня $+20^{\circ}\text{C}$. Товщина стіни 0,4 м. Знайти коефіцієнт теплопровідності матеріалу стіни, якщо через кожний 1 м^2 її поверхні за 1 годину проходить 461 кДж теплоти.

Відповідь: 1,28 Дж/(м·с·К).

307. Площа цегляної стіни 12 м^2 , а товщина 1 м. Температура повітря в кімнаті дорівнює $+15^{\circ}\text{C}$, а надворі -15°C . Чому дорівнює кількість теплоти, що виходить з кімнати протягом доби? Коефіцієнт теплопровідності цегли 1,3 Дж/(м·с·К).

Відповідь: $\approx 40\text{ МДж}$.

308. Температура плавлення заліза змінюється на $0,012^{\circ}\text{C}$ при зміні тиску на $9,8 \cdot 10^4\text{ Па}$. Знайти, на скільки змінюється при цьому об'єм одного кіломоля заліза при плавленні. Температура плавлення заліза 1530°C ; питома теплота плавлення 272 кДж/кг .

Відповідь: На $1,03 \cdot 10^{-3}\text{ м}^3$.

309. Знайти приріст температури плавлення льоду ΔT поблизу $T = 273\text{ К}$ при підвищенні тиску на $\Delta p = 1,01 \cdot 10^5\text{ Па}$, якщо питомий об'єм льоду V'_l на $\Delta V' = 91 \cdot 10^{-6}\text{ м}^3/\text{кг}$ більший від питомого об'єму води V'_n ($L_{nl} = 3,35 \cdot 10^5\text{ Дж/кг}$).

Відповідь: $\Delta T = -\frac{T\Delta V'\Delta p}{L_{nl}} = -7,5\text{ мК}$.

ДОДАТОК

1. Варіанти задач до контрольних робіт (на 45 хвилин)

Позначення варіантів	Номери задач і контрольних робіт (к. р.)		
	К. р. 1	К. р. 2	К. р. 3
1	6; 34; 65	125; 133; 159	198; 239; 309
2	8; 36; 89	123; 135; 161	200; 241; 307
3	10; 38; 87	121; 136; 163	202; 243; 308
4	12; 40; 85	119; 137; 165	204; 245; 303
5	14; 42; 86	117; 138; 167	206; 247; 304
6	16; 44; 83	115; 139; 169	208; 249; 305
7	17; 46; 84	113; 140; 171	210; 250; 303
8	18; 47; 81	112; 141; 173	212; 251; 306
9	19; 48; 82	111; 142; 175	214; 252; 301
10	20; 49; 78	110; 143; 177	216; 253; 302
11	21; 50; 79	109; 145; 179	218; 254; 300
12	22; 51; 80	107; 147; 181	220; 255; 299
13	23; 52; 69	108; 149; 183	222; 256; 298
14	24; 53; 71	105; 151; 185	224; 257; 297
15	25; 54; 68	106; 148; 187	226; 260; 294
16	26; 55; 67	104; 146; 189	228; 262; 295
17	27; 56; 66	103; 144; 182	230; 264; 282
18	28; 58; 64	101; 132; 184	225; 269; 284

2. Варіанти завдань до колоквиуму з механіки та молекулярної фізики

Варіант 1

1. Кінематика поступального руху.
2. Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії.

Варіант 2

1. Кінематика обертального руху.
2. Ідеальний газ. Рівняння стану ідеального газу.

Варіант 3

1. Динаміка матеріальної точки і поступального руху твердого тіла.
2. Явище переносу – в'язкість.

Варіант 4

1. Момент сили. Момент імпульсу. Закон збереження моменту імпульсу.
2. Барометрична формула. Розподіл Больцмана.

Варіант 5

1. Основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла. Момент інерції.
2. Явище переносу – теплопровідність.

Варіант 6

1. Імпульс. Закон збереження імпульсу. Реактивний рух.
2. Явище переносу – дифузія.

Варіант 7

1. Закон збереження енергії в механіці.
2. Середнє число зіткнень і середня довжина вільного пробігу молекул.

Варіант 8

1. Неінерціальні системи відліку. Сили інерції.
2. Робота і теплота. Перший закон термодинаміки.

Варіант 9

1. Основи спеціальної теорії відносності: постулати Ейнштейна; наслідки із перетворень Лоренца.
2. Теплоємність речовини. Адіабатичний процес, рівняння Пуассона.

Варіант 10

1. Елементи релятивістської динаміки. Робота і енергія. Закон взаємозв'язку маси і енергії.
2. Ентропія. Другий закон термодинаміки.

Варіант 11

1. Стаціонарний рух рідини. Рівняння нерозривності і рівняння Бернуллі.
2. Оборотні і необоротні процеси. Цикл Карно та його коефіцієнт корисної дії.

Варіант 12

1. Гідродинаміка в'язкої рідини: сили в'язкості; формула Стокса; формула Пуазейля.
2. Внутрішня енергія. Розподіл енергії за ступенями вільності. Робота газу при ізопроцесах.

Варіант 13

1. Рух у центральному силовому полі. Закони Кеплера. Закон всесвітнього тяжіння.
2. Внутрішня енергія реального газу. Явище Джоуля-Томсона. Зрідження газів.

Варіант 14

1. Гармонічні коливання. Незатухаючі коливання фізичного і пружинного маятників.
2. Реальні гази. Рівняння Ван-дер-Ваальса. Критичний стан речовини.

Варіант 15

1. Затухаючі і вимушені коливання. Резонанс.
2. Фазові переходи і рівновага фаз. Рівняння Клапейрона-Клаузіуса.

Варіант 16

1. Поширення хвиль. Енергія і потік енергії хвилі.
2. Тверді тіла. Теплове розширення і теплоємність твердих тіл. Закон Дюлонга і Пті.

Варіант 17

1. Інтерференція хвиль. Стоячі хвилі. Елементи акустики.

2. Будова рідин. Поверхневий натяг. Капілярні явища.

3. Приставки для позначення кратних і часткових одиниць

Найменування приставок	Скорочене позначення	Кратність і частковість
екса	Е	10^{18}
пета	П	10^{15}
тера	Т	10^{12}
гіга	Г	10^9
мега	М	10^6
кіло	к	10^3
гекто	г	10^2
дека	да	10^1
деци	д	10^{-1}
санти	с	10^{-2}
мілі	м	10^{-3}
мікро	мк	10^{-6}
нано	н	10^{-9}
піко	п	10^{-12}
фемто	ф	10^{-15}
атто	а	10^{-18}

4. Деякі основні фізичні сталі

Назва	Позначення	Числове значення
Прискорення вільного падіння	g	$9,8 \text{ м/с}^2$
Гравітаційна стала	G	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$
Стала Авогадро	N_A	$6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
Універсальна газова стала	R	$8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$
Стала Больцмана	k	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$
Абсолютний нуль температури	0 К	-273°C
Нормальний атмосферний тиск	p_0	$1,013 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$
Об'єм моля газу при нормальних умовах	V_0	$22,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{моль}$

5. Таблиці фізичних величин

Таблиця 1. Деякі фізичні параметри Сонця, Землі, Місяця

Назва	Сонце	Земля	Місяць
Маса, кг	$1,98 \cdot 10^{30}$	$598 \cdot 10^{22}$	$7,33 \cdot 10^{22}$
Радіус, км	$695 \cdot 10^3$	$6,37 \cdot 10^3$	$1,74 \cdot 10^3$
Середня відстань від землі, км	$149,6 \cdot 10^6$	-	$384,4 \cdot 10^3$
Середня густина, кг/м ³	1400	5518	3350

Таблиця 2. Густина речовини, кг/м³

Гази при нормальних умовах ($T_0 = 273 \text{ K}$; $p_0 = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}$)

Азот	1,250	Кисень	1,429
Водень	0,089	Неон	0,900
Вуглекислий газ	1,977	Повітря	1,290
Гелій	0,178	Хлор	3,210

Рідини

Бензин (20° C)	700	Нафта (20° C)	800
Вода (4° C)	1000	Скипидар (16° C)	858
Гас (0° C)	800	Спирт (0° C)	790
Гліцерин (0° C)	1260	Ртуть (0° C)	13596

Тверді тіла (при 293 K)

Алюміній	2700	Олово	7300
Вольфрам	19300	Платина	21500
Залізо	7900	Свинець	11300
Золото	19300	Срібло	10500
Лід (0° C)	910	Сталь	7800
Мідь	8900	Цегла	1800

Таблиця 3. Коефіцієнт поверхневого натягу (Н/м)

Бензин	0,029	Мильний розчин	0,04
Вода	0,072	Ртуть	0,47
Гас	0,024	Скипидар	0,027
Ефір	0,017	Спирт	0,022

Таблиця 4. Сталі Ван-дер-Ваальса

Речовина	a , Дж·м ³ /моль ²	$b \cdot 10^5$, м ³ /моль
Азот	0,136	3,86
Аргон	0,132	3,23
Вода	0,552	3,04
Вуглекислий газ	0,364	4,30
Гелій	0,003	2,20
Кисень	0,136	3,19

Таблиця 5. Критичні значення температури і тиску

Речовина	T_c , К	p_c , МПа	Речовина	T_c , К	p_c , МПа
Азот	126	3,40	Водяна пара	647	22,0
Аргон	151	4,78	Гелій	5,2	0,23
Бензол	562	4,80	Вуглекислий газ	304	7,40
Водень	33	1,30	Кисень	154	5,07

ПЕРІОДИЧНА СИСТЕМА ХІМІЧНИХ

		Г Р У П П И					
ПЕРІОДИ	РАДІИ	I	II	III	IV	V	
I	1	1 H ВОДЕНЬ 1,008					
II	2	3 Li ЛІТІЙ 6,94	4 Be БЕРИЛІЙ 9,01	5 B БОР 10,81	6 C ВУГЛЕЦЬ 12,011	7 N АЗОТ 14,007	
III	3	11 Na НАТРІЙ 22,99	12 Mg МАГНІЙ 24,31	13 Al АЛЮМІНІЙ 26,98	14 Si КРЕМНІЙ 28,09	15 P ФОСФОР 30,97	
IV	4	19 K КАЛІЙ 39,10	20 Ca КАЛЬЦІЙ 40,08	Sc 21 СКАНДІЙ 44,96	Ti 22 ТИТАН 47,90	V 23 ВАНАДІЙ 50,94	
	5	29 Cu МІДЬ 63,55	30 Zn ЦИНК 65,37	31 Ga ГАЛІЙ 69,72	32 Ge ГЕРМАНІЙ 72,59	33 As МИШ'ЯК 74,92	
V	6	37 Rb РУБІДІЙ 85,47	38 Sr СТРОНЦІЙ 87,62	Y 39 ІТРИЙ 88,91	Zr 40 ЦИРКОНІЙ 91,22	Nb 41 НИОБІЙ 92,91	
	7	47 Ag СРІБЛО 107,87	48 Cd КАДМІЙ 112,40	49 In ІНДИЙ 114,82	50 Sn ОЛОВО 118,69	51 Sb СУРМА 121,75	
VI	8	55 Cs ЦЕЗІЙ 132,91	56 Ba БАРІЙ 137,34	La* 57 ЛАНТАН 138,91	Hf 72 ГАФНІЙ 178,49	Ta 73 ТАНТАЛ 180,93	
	9	79 Au ЗОЛОТО 196,97	80 Hg РТУТЬ 200,59	81 Tl ТАЛІЙ 204,37	82 Pb СВИНЕЦЬ 207,19	83 Bi ВІСМУТ 209,00	
VII	10	87 Fr ФРАНЦІЙ [223]	88 Ra РАДІЙ [226]	Ac** 89 АКТИНІЙ [227]	Ku 104 КУРЧАТОВІЙ [261]	Ns 105 НІЛЬСБОРІЙ [261]	
ВИЩІ ОКСИДИ		R ₂ O		RO	R ₂ O ₃	RO ₂	R ₂ O ₅
ЛЕГКІ ВОДНЕВІ СПОЛУКИ						RH ₄	RH ₃
* ЛАНТАНОЇДИ		58 Ce ЦЕРІЙ 140,12	59 Pr ПРАЗЕОДИМ 140,91	60 Nd НЕОДИМ 144,24	61 Pm ПРОМЕТІЙ [145]	62 Sm САМАРІЙ 150,35	63 Eu ЄВРОПІЙ 151,96
** АКТИНОЇДИ		90 Th ТОРІЙ 232,04	91 Pa ПРОТАКТИНІЙ [231]	92 U УРАН 238,03	93 Np НЕПУНІЙ [237]	94 Pu ПЛУТОНІЙ [244]	95 Am АМЕРИЦІЙ [243]

ЕЛЕМЕНТИВ Д. I. МЕНДЕЛЕЕВА

Е Л Е М Е Н Т И В							
VI		VII		VIII			
		(H)		2 He ГЕЛИЙ 4,00			
8 O КИСЕЛЬ 15,999		9 F ФТОР 19,00		10 Ne НЕОН 20,18			
16 S СИРКА 32,06		17 Cl ХЛОР 35,45		18 Ar АРГОН 39,95			
Cr 24 ХРОМ 52,00		Mn 25 МАРГАНЕЦ 54,94		Fe 26 ЖЕЛЕЗО 55,85		Co 27 КОБАЛЬТ 58,93	
				Ni 28 НИКЕЛЬ 58,70			
34 Se СЕЛЕН 78,96		35 Br БРОМ 79,90		36 Kr КРИПТОН 83,80			
Mo 42 МОЛИБДЕН 95,94		Tc 43 ТЕХНЕЦИЙ [97]		Ru 44 РУТЕНИЙ 101,07		Rh 45 РОДИЙ 102,90	
				Pd 46 ПАЛАДИЙ 106,40			
52 Te ТЕЛУР 127,60		53 I ЙОД 126,90		54 Xe КСЕНОН 131,30			
W 74 ВОЛЬФРАМ 183,85		Re 75 РЕНИЙ 186,21		Os 76 ОСМИЙ 190,20		Ir 77 ИРИДИЙ 192,22	
				Pt 78 ПЛАТИНА 195,09			
84 Po ПОЛОНИЙ [209]		85 At АСТАТ [210]		86 Rn РАДОН [222]			
RO ₃		R ₂ O ₇		RO ₄			
RH ₂		RH					
Gd 64 ГАДОЛИНИЙ 157,25		Tb 65 ТЕРБИЙ 158,92		Dy 66 ДИСПРОЗИЙ 162,50		Ho 67 ГОЛЬМИЙ 164,93	
				Er 68 ЕРБИЙ 167,26		Tm 69 ТУЛИЙ 168,93	
Yb 70 ИТЕРБИЙ 173,04		Lu 71 ЛЮТЕЦИЙ 174,97					
Cm 96 КУРИЙ [247]		Bk 97 БЕРКЛИЙ [247]		Cf 98 КАЛИФОРНИЙ [251]		Es 99 ЭЙНШТЕЙНИЙ [254]	
				Fm 100 ФЕРМИЙ [257]		Md 101 МЕНДЕЛЕВИЙ [258]	
No 102 НОБЕЛИЙ [259]		Lr 103 ЛОУРЕНСИЙ [260]					

Передмова.....	3
Загальні методичні вказівки і вимоги до розв'язування задач.....	4
1. Кінематика поступального та обертального руху.....	8
Основні закони і формули.....	8
Методичні вказівки.....	10
Приклади розв'язування задач.....	13
Задачі до теми 1.....	19
2. Динаміка поступального руху.....	22
Основні закони і формули.....	22
Методичні вказівки.....	24
Приклади розв'язування задач.....	25
Задачі до теми 2.....	28
3. Робота, потужність, енергія. Закони збереження в механіці.....	33
Основні закони і формули.....	33
Методичні вказівки.....	35
Приклади розв'язування задач.....	37
Задачі до теми 3.....	41
4. Динаміка обертального руху.....	44
Основні закони і формули.....	44
Методичні вказівки.....	47
Приклади розв'язування задач.....	49
Задачі до теми 4.....	55
5. Механіка рідин і газів.....	60
Основні закони і формули.....	60
Методичні вказівки.....	62
Приклади розв'язування задач.....	63
Задачі до теми 5.....	68
6. Механічні коливання і хвилі.....	71
Основні закони і формули.....	71
Методичні вказівки.....	77

Приклади розв'язування задач.....	81
Задачі до теми 6.....	89
7. Молекулярно-кінетична теорія ідеального газу.....	93
Основні закони і формули.....	93
Методичні вказівки.....	97
Приклади розв'язування задач.....	99
Задачі до теми 7.....	106
8. Основи термодинаміки.....	110
Основні закони і формули.....	110
Методичні вказівки.....	113
Приклади розв'язування задач.....	116
Задачі до теми 8.....	123
9. Реальні гази, рідини і тверді тіла.....	127
Основні закони і формули.....	127
Методичні вказівки.....	130
Приклади розв'язування задач.....	133
Задачі до теми 9.....	141
Додаток.....	146
1. Варіанти задач до контрольних робіт.....	147
2. Варіанти запитань до колоквиуму з механіки та молекулярної фізики....	147
3. Приставки для позначень кратних і часткових одиниць.....	149
4. Деякі основні фізичні сталі.....	149
5. Таблиці фізичних величин.....	150

Підписано до друку 21.07.2003.
Формат 60х84/16. Гарнітура «Таймс».
Умовн. друк арк. 9,07. Тираж 1000 прим.



Видавництво "Місто НВ", м. Івано-Франківськ,
вуп. Незалежності, 53, тел. (0342) 55-94-93