

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**Івано-Франківський національний технічний університет
нафти і газу**

А. І. Бандура

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ЧАСТИНА 2

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

**Івано-Франківськ
2013**

УДК 517.2 + 517.3 + 517.9 (075.8)
ББК 22.161.1я73 + 22.161.6я73
Б 23

Рецензенти:

Гаврилків В. М.

кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри алгебри і геометрії Прикарпатського національного університету ім. В. Стефаника;

Гургула С. І.

кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу

Рекомендовано методичною радою Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу (протокол № 5 від 28.05.2013 р.)

Бандура А. І.

Б 23 Вища математика. Частина 2: конспект лекцій. — Івано-Франківськ: ІФНТУНГ, 2013. — 176 с.

МВ 02070855-5035-2013

Конспект лекцій розроблений відповідно до робочої програми дисципліни „Вища математика“. Він містить детальний і чіткий виклад теоретичного матеріалу розділів вищої математики: диференціального числення функцій однієї змінної, диференціального числення функцій декількох змінних, інтегрального числення функцій однієї змінної та диференціальних рівнянь, які вивчаються у другому семестрі.

Виклад відповідного теоретичного матеріалу спирається на численні приклади, які містять детальне розв'язання. До значної частини прикладів наведено рисунки для кращого розуміння математичних понять та методів, розглянутих у конспекті.

Конспект лекцій призначено для студентів першого курсу напряму підготовки 6.050504 — „Зварювання“.

УДК 517.2 + 517.3 + 517.9 (075.8)
ББК 22.161.1я73 + 22.161.6я73

МВ 02070855-5035-2013

© Бандура А. І.
© ІФНТУНГ, 2013

Зміст

Вступ	7
Диференціальне числення функцій однієї змінної	9
Тема 1. Похідна функції	9
Задачі, які приводять до поняття похідної	9
Поняття похідної.	11
Механічний та геометричний зміст похідної	11
Диференціювання функцій.	13
Гіперболічні функції	14
Похідна параметрично заданої функції	16
Диференціювання неявно заданої функції	16
Диференціювання показниково-степеневих виразів	17
Тема 2. Похідні вищих порядків	17
Похідні вищих порядків	17
Похідні вищих порядків від неявно заданої функції	18
Похідні вищих порядків від параметрично заданої функції	18
Тема 3. Диференціал	19
Поняття диференціала	19
Геометричний зміст та механічний зміст диференціала	19
Властивості диференціала	20
Застосування диференціала у наближених обчисленнях	21
Диференціали вищих порядків	21
Тема 4. Основні теореми диференційного числення	22
Теорема Ферма та її геометричний зміст	22
Теорема Ролля та її геометричний зміст	23
Теореми Коші та Лагранжа	24
Тема 5. Правило Лопітала. Формула Тейлора	26
Правило Лопітала	26
Формула Тейлора	29
Тема 6. Екстремальні значення функції	32
Монотонність функції.	32
Локальний екстремум функції	34
Найбільше і найменше значення функції	38
Тема 7. Опуклість та вгнутість графіка функції.	40
Опуклість і вгнутість кривих. Точки перегину	40
Асимптоти кривої	42
Загальна схема дослідження функції та побудова її графіка	44
Диференціальне числення функцій декількох змінних	47
Тема 8. Вступ до аналізу функцій декількох змінних	47
Поняття функції двох змінних	47
Границя функції двох змінних	50
Неперервність та геометрія багатовимірного простору	52

Тема 9. Частинні похідні	53
Частинні похідні функції декількох змінних.	53
Диференційовність функції	56
Похідна складеної функції. Повна похідна	58
Диференціювання неявної функції	60
Скалярне поле	61
Похідна за напрямом. Градієнт	62
Тема 10. Повний диференціал та його застосування.	63
Повний диференціал функції.	63
Застосування повного диференціала до обчислення функцій і похибок	64
Диференціали вищих порядків	66
Дотична площина та нормаль до поверхні	67
Геометричний зміст диференціала функції двох змінних	68
Формула Тейлора для функції двох змінних	70
Тема 11. Екстремум функції двох змінних	70
Локальні екстремуми функції двох змінних.	70
Найбільше та найменше значення функції	74
Умовний екстремум	74
Інтегральне числення функцій однієї змінної	77
Тема 12. Комплексні числа	77
Поняття комплексного числа	77
Дії над комплексними числами	78
Комплексні розв'язки алгебричних рівнянь.	79
Тема 13. Первісна функція та невизначений інтеграл	81
Поняття первісної та невизначеного інтеграла	81
Властивості невизначеного інтеграла	81
Таблиця інтегралів	82
Основні методи інтегрування.	82
Тема 14. Інтегрування раціональних виразів	84
Розклад раціональної функції на прості дробів	84
Інтеграли від елементарних дробів	85
Тема 15. Інтегрування трансцендентних виразів	88
Інтегрування деяких ірраціональних функцій	88
Інтегрування диференціальних біномів	89
Інтеграли від тригонометричних виразів	90
Підстановки Ейлера	91
Інтеграли, що „не беруться“	91
Тема 16. Визначений інтеграл	92
Задачі, що приводять до визначеного інтеграла	92
Означення та умови існування визначеного інтеграла	94
Властивості визначеного інтеграла	96
Інтеграл із змінною верхньою межею. Формула Ньютона - Лейбніца	101
Методи обчислення визначених інтегралів	104
Тема 17. Невластиві інтеграли.	107
Невластиві інтеграли з нескінченними межами інтегрування	107
Невластиві інтеграли від необмежених функцій	110

Тема 18. Застосування визначеного інтеграла	112
Обчислення площ плоских фігур	112
Довжина дуги	115
Об'єм тіла.	116
Площа поверхні обертання.	116
Обчислення роботи.	117

Диференціальні рівняння 119

Тема 19. Диференціальні рівняння першого порядку	119
Основні поняття та означення	119
Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними	123
Рівняння, звідні до рівнянь з відокремлюваними змінними	124
Однорідні диференціальні рівняння	124
Рівняння звідні до однорідних	126
Тема 20. Лінійні рівняння та звідні до них.	127
Лінійні диференціальні рівняння першого порядку	127
Рівняння, які зводяться до лінійних	128
Рівняння в повних диференціалах. Інтегрувальний множник	131
Тема 21. Рівняння, нерозв'язні відносно похідної.	133
Рівняння, що містить лише похідну невідомої функції	133
Рівняння, що містить лише невідому функцію та її похідну	134
Рівняння, що містить лише незалежну змінну та похідну невідомої функції	135
Рівняння Лагранжа і Клеро	135
Тема 22. Диференціальні рівняння вищих порядків	137
Основні поняття і означення. Задача Коші	137
Диференціальні рівняння n-го порядку, які інтегруються в квадратурах	139
Диференціальні рівняння, які допускають пониження порядку	141
Тема 23. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків.	142
Основні поняття. Класифікація лінійних диференціальних рівнянь вищих порядків	142
Властивості розв'язків лінійних однорідних диференціальних рівнянь	144
Властивості розв'язків ЛНДР - лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь	144
Лінійна залежність і лінійна незалежність систем функцій	145
Визначник Вронського	146
Будова загального розв'язку ЛОДР	148
Структура загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння.	151
Метод варіації довільних сталих відшукування частинного розв'язку.	153
Тема 24. Лінійні однорідні диференціальні рівняння із сталими коефіцієнтами.	155
Характеристичне рівняння.	155
Фундаментальна система розв'язків ЛОДР-2 із сталими коефіцієнтами	156
Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння із сталими коефіцієнтами.	159
Знаходження частинного розв'язку ЛНДР-2 із сталими коефіцієнтами методом невизначених коефіцієнтів.	159
Тема 25. Системи диференціальних рівнянь	161
Загальні поняття	161
Розв'язування нормальної системи диференціальних рівнянь	163
Огляд основних фактів теорії системи лінійних диференціальних рівнянь	167
Розв'язування системи лінійних однорідних рівнянь із сталими коефіцієнтами	168

Предметний показчик	171
Перелік рекомендованих джерел	175

ВСТУП

Друга частина конспекту лекцій з вищої математики присвячена чотирьом розділам вищої математики — диференційному численню функцій однієї та декількох змінних, інтегральному численню функцій однієї змінної та диференційним рівнянням. Зазначимо, що диференційне та інтегральне числення започаткувалося працями І. Ньютона та В. Лейбніца у середині XVII століття. Згодом їхню роботу продовжили Ж. Лагранж, О. Коші, К. Якобі, К. Вейєрштрасс. Значний внесок у розвиток інтегрального числення функцій однієї та декількох змінних зробив український математик М. Остроградський. Диференційні рівняння сформувалися як окремий розділ вищої математики ще у XVIII ст. Гармонійне поєднання суто теоретичного та прикладного аспектів робить їх універсальним інструментом моделювання різноманітних явищ та процесів. Саме методи та підходи з диференційних рівнянь та математичної статистики визначають обличчя сучасного математичного моделювання, яке проникло в усі технічні та природничі науки.

У конспекті лекцій наведено чимало прикладів з рисунками, які сприятимуть кращому розумінню теоретичного матеріалу. Він логічно продовжує першу частину конспекту лекцій, тому виклад у цих частинах взаємопов'язаний. Істотну увагу приділено практичному застосуванню різноманітних математичних структур та об'єктів на кшталт застосування похідної та інтеграла до розв'язування задач прикладного змісту. Також не оминули такий важливий аспект як побудова математичних моделей шляхом складання диференційних рівнянь.

Орієнтуючись на студентів технічних напрямків підготовки, автор прагнув зменшити абстрактність цього курсу. Адже саме надмірна абстрактність часто заважає студентам побачити можливі застосування ідей та методів вищої математики у своїй майбутній професійній діяльності. І питання „А навіщо ми це вчимо?“ або „Де це застосовується?“ лунає досить часто. Тому конспект лекцій не переобтяжено доведеннями. Наведено здебільшого такі, що ілюструють якийсь новий математичний метод.

Сподіваємося, що цей конспект сприятиме формуванню математичної культури майбутніх інженерів і дозволить їм впевнено використовувати набуті знання.

Диференціальне числення функцій одної змінної

ТЕМА 1. ПОХІДНА ФУНКЦІЇ

Диференціальне числення — розділ математики, в якому розглядається дослідження функцій за допомогою похідних та диференціалів.

Деякі задачі диференціального числення розв’язані ще в давнину. Так, Евклід розв’язав задачу про паралелограм найбільшої площі, який можна вписати в даний трикутник; Архімед побудував дотичну до спіралі, що носить його ім’я, а Аполлоній — дотичну до еліпса, гіперболи та параболи.

Загальні методи диференціального числення розроблено Ньютоном і Лейбніцем наприкінці 17 ст., але лише в 19 ст. Коші обґрунтував ці методи на основі теорії границь.

Центральне поняття диференціального числення — похідна — широко використовується при розв’язуванні багатьох задач з математики, фізики та інших наук, а також при вивченні різних процесів.

Якщо перебіг того чи іншого процесу описується деякою функцією, то дослідження даного процесу зводиться до вивчення властивостей цієї функції та її похідної.

Задачі, які приводять до поняття похідної

1. Задача про швидкість прямолінійного руху. Нехай матеріальна точка рухається нерівномірно вздовж деякої прямої (рис. 1.1) і за час t проходить відстань s , що дорівнює відрізку OM . Тоді різним моментам часу t відповідатимуть різні положення точки M , тобто відстань s рухомої точки M є деякою функцією часу і $s = s(t)$. Треба знайти швидкість руху точки M .

Нехай з моменту t пройшов деякий час Δt ($\Delta t > 0$ — приріст часу). За час Δt рухома точка перейде в положення M_1 і пройде шлях, який позначимо через Δs (Δs — приріст шляху, що дорівнює відрізку MM_1). Отже, за час $t + \Delta t$ матеріальна точка пройде шлях $s(t) + \Delta s = s(t + \Delta t)$, тому $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$.

Середньою швидкістю v_c руху точки за проміжок часу $[t; t + \Delta t]$ називають відношення приросту шляху до приросту часу: $v_c = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$.

Середня швидкість залежить від значення Δt , причому чим менший проміжок Δt після моменту часу t , тим точніше середня швидкість відображає швидкість руху точки у даний момент часу t . Істинну ж (миттєву) швидкість руху точки дістанемо як границю, до якої прямує середня швидкість v_c при $\Delta t \rightarrow 0$. Цю границю називають швидкістю руху точки в момент часу (або

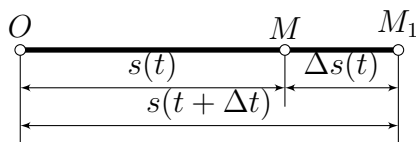


Рисунок 1.1 – Задача про швидкість прямолінійного руху

матт своєю швидкістю) і позначають

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_c = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}. \quad (1.1)$$

2. Задача про густину неоднорідного стержня. Розглянемо тонкий прямолінійний неоднорідний стержень довжини l (рис. 1.2) і розмістимо його на осі Ox так, щоб лівий кінець стержня збігався з початком координат (матеріальне тіло називається неоднорідним, якщо його густина не є сталою, а змінюється від точки до точки). Позначимо через m масу стержня між точками O і M з координатами 0 і x . Оскільки маса відрізка OM залежить від його довжини, то m є функцією від x : $m = m(x)$.

Треба знайти густину стержня в точці M . Як і в попередній задачі, крім точки M , візьмемо ще точку M_1 з координатою $x + \Delta x$ (Δx — приріст довжини x) і позначимо через $m + \Delta m$ масу відрізка OM_1 (Δm — приріст маси, що дорівнює масі відрізка MM_1): $m + \Delta m = m(x + \Delta x)$. Відрізок стержня між точками M і M_1 має довжину Δx і масу $\Delta m = m(x + \Delta x) - m(x)$.

Середньою густиною γ_c стержня на відрізку $[x; x + \Delta x]$ називають відношення приросту маси до приросту довжини:

$$\gamma_c = \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{m(x + \Delta x) - m(x)}{\Delta x}.$$

Границю середньої густини γ_c при $\Delta x \rightarrow 0$ називають **лінійною густиною** стержня в точці x і позначають

$$\gamma = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \gamma_c = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{m(x + \Delta x) - m(x)}{\Delta x}. \quad (1.2)$$

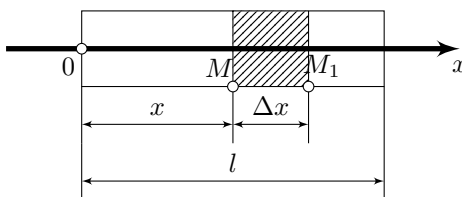


Рисунок 1.2 – Задача про густину стержня

3. Задача про силу струму. Нехай $q = q(t)$ — кількість електрики, що проходить через поперечний переріз провідника за час t , треба знайти силу струму в момент часу t . **Середньою силою** струму I_c за проміжок часу $[t; t + \Delta t]$ називають відношення приросту кількості електрики до приросту часу:

$$I_c = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{q(t + \Delta t) - q(t)}{\Delta t}.$$

Границя середньої сили струму I_c при $\Delta t \rightarrow 0$ є сила струму в момент часу t :

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} I_c = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{q(t + \Delta t) - q(t)}{\Delta t}. \quad (1.3)$$

4. Задача про теплоємність. Нехай $\omega = \omega(t)$ — кількість теплоти, яку дістає тіло при нагріванні його до температури τ . Треба знайти теплоємність тіла при температурі τ .

Середньою теплоємністю C_c тіла на проміжку $[\tau; \tau + \Delta\tau]$ називають відношення приросту теплоти до приросту температури:

$$C_c = \frac{\Delta\omega}{\Delta\tau} = \frac{\omega(\tau + \Delta\tau) - \omega(\tau)}{\Delta\tau}.$$

Границю середньої теплоємності C_c при $\Delta\tau \rightarrow 0$ називають **теплоємністю тіла** при температурі τ :

$$C = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} C_c = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta\tau} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\omega(\tau + \Delta\tau) - \omega(\tau)}{\Delta\tau}. \quad (1.4)$$

5. Задача про швидкість хімічної реакції. Нехай $N = N(t)$ — кількість речовини, що вступає в хімічну реакцію за час t . Треба знайти швидкість реакції. **Середньою швидкістю** v_c , реакції за проміжок часу $[t; t + \Delta t]$ називають відношення приросту кількості речовини до приросту часу:

$$v_c = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t}.$$

Границя середньої швидкості v_c реакції при $\Delta t \rightarrow 0$ є швидкість реакції в момент часу t :

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_c = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t}. \quad (1.5)$$

Поняття похідної

Нехай на відрізку $[a, b]$ задано функцію $y = f(x)$. Візьмемо довільну точку $x \in (a, b)$ і надамо точці x довільного приросту Δx такого, щоб $x + \Delta x$ належала $[a, b]$. Знайдемо приріст функції $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Означення 1.1. Похідною функції $y = f(x)$ у точці x називається границя відношення приросту функції Δy у цій точці до приросту аргументу Δx , коли приріст аргументу прямує до нуля. Похідна функції $y = f(x)$ у точці x позначається одним із символів: y' , $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$, y'_x , $f'(x)$. ✓

Отже,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Якщо ця границя дорівнює ∞ , то похідну $f'(x)$ у точці x називають **нескінченною**.

Означення 1.2. Операція знаходження похідної від функції $y = f(x)$ називається диференціюванням. ✓

Механічний та геометричний зміст похідної

Механічний зміст похідної: нехай матеріальна точка рухається нерівномірно вздовж деякої прямої і за час t проходить відстань s . Тобто різним моментам часу t відповідатимуть різні положення точки M . Інакше кажучи, відстань S рухомої точки є деякою функцією часу $s = s(t)$. Треба знайти швидкість руху точки M .

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t).$$

Швидкість в даний момент часу — це похідна пройденого шляху $s(t)$ за часом.

Означення 1.3. Нехай C — крива, M_0M — січна. Точка M рухається вздовж кривої C і наближається до точки M_0 . Тоді січна M_0M повертатиметься навколо точки M_0 , а довжина відрізка M_0M прямуватиме до нуля. Якщо при цьому величина кута MM_0L прямує до нуля, то пряму M_0L називають граничним положенням січної M_0M . Пряму M_0L , яка є граничним положенням січної M_0M , називають дотичною до кривої C у точці M_0 . ✓

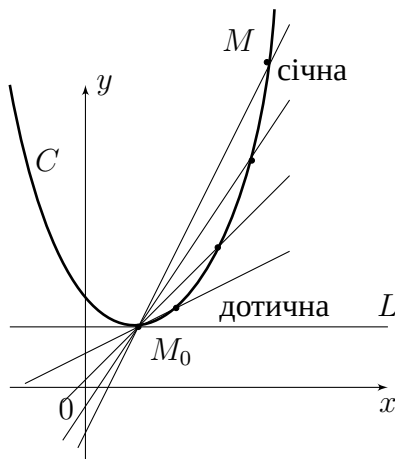


Рисунок 1.3 – Дотична до кривої

Рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці $M(x_0, y_0)$ має вигляд:

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0),$$

де $y_0 = f(x_0)$.

Геометричний зміст похідної: похідна дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці $M_0(x_0, y_0)$ або тангенсу кута утвореного дотичною до кривої у даній точці з додатним напрямом осі Ox .

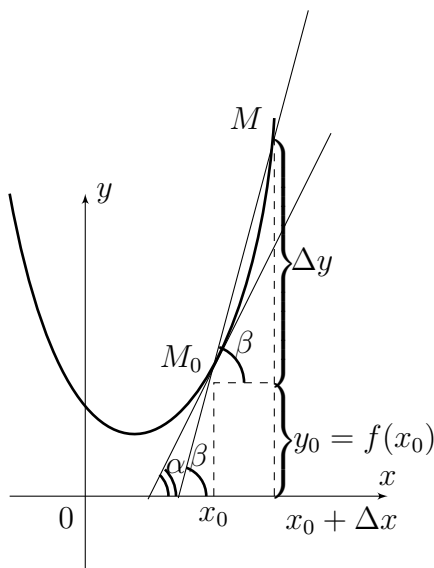


Рисунок 1.4 – Геометричний зміст дотичної

Означення 1.4. Нормаллю до кривої називається пряма, що проходить через точку дотику, перпендикулярно до дотичної. Рівняння нормалі має вигляд:

$$y = y_0 - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Диференціювання функцій

Односторонні похідні визначають за допомогою односторонніх границь.

Означення 1.5. Праву похідною функції $f(x)$ у точці x називається

$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

а ліву похідною функції $f(x)$ у точці x називається

$$f'_-(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Якщо неперервна функція $y = f(x)$ має ліву і праву похідні у точці x і вони рівні, то похідна $f'(x)$ існує і $f'_-(x) = f'_+(x) = f'(x)$.

Означення 1.6. Функція $f(x)$ називається диференційовною у точці x_0 , якщо вона у цій точці має похідну. Функція $f(x)$ називається диференційовною на проміжку, якщо вона диференційовна у кожній точці цього проміжку. ✓

Зв'язок між неперервністю функції в точці і диференційовністю її в цій точці встановлює така теорема.

Теорема 1.1.

Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x_0 , то вона в цій точці неперервна. ★

ДОБРЕДЕННЯ. Справді, якщо $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$, то за властивостями нескінченно малих $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha$, де $\alpha \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Тоді $\Delta y = (f'(x_0) + \alpha)\Delta x \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$, а це означає, що функція $f(x)$ в точці x_0 неперервна. □

Як показують приклади, обернене твердження неправильне: існують неперервні функції, які в деяких точках не є диференційовними. Крім того, відомі приклади функцій, неперервних на всій числовій осі і недиференційовних в жодній її точці. Таким чином, неперервність функції в точці є лише необхідною умовою її диференційовності в цій точці.

Теорема 1.2.

Якщо $u(x)$, $v(x)$ — диференційовні у точці x , сума, різниця, добуток і частка цих функцій (частка за умови, що $v(x) \neq 0$) також диференційовні у цій точці і справедливі такі

формули:

$$(u \pm v)' = u' \pm v', \quad (cu)' = cu', \quad c = \text{const}$$

$$(u \cdot v)' = u'v + uv', \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Використовуючи означення похідної, можна отримати формули для похідних елементарних функцій, які нижче наведено без доведення.

Таблиця похідних

$$\begin{array}{ll} c' = 0, c = \text{const}, & (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \alpha \in \mathbb{R}, \\ (\sin x)' = \cos x, & (\cos x)' = -\sin x, \\ (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, & (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \\ (a^x)' = a^x \ln a, & (e^x)' = e^x, \\ (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, & (\ln x)' = \frac{1}{x}, \\ (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, & (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \\ (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, & (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \end{array}$$

Теорема 1.3 (про похідну складеної функції).

Якщо функція $u = \varphi(x)$ має похідну u'_x у точці x , а функція $y = f(u)$ має похідну y'_u у відповідній точці $u = \varphi(x)$, то така складена функція $y = f(\varphi(x))$ має похідну y'_x в точці x і справедлива формула $y'_x = y'_u \cdot u'_x$. ★

Приклад 1.1. Обчислити похідну:

$$(\cos \operatorname{arctg} 2x)' = -\sin \operatorname{arctg} 2x \cdot \frac{1}{1+(2x)^2} \cdot 2.$$

Гіперболічні функції

У математиці, механіці, електротехніці часто зустрічаються гіперболічні функції.

Гіперболічний синус: $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$

Гіперболічний косинус: $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$

Гіперболічний тангенс: $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$

Гіперболічний котангенс: $\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$

Зауважимо, що для гіперболічних функцій також є аналоги відомих тригонометричних формул. Зокрема, справедливі такі формули:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1,$$

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x, \quad \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x,$$

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y, \quad \operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \mp \operatorname{th} x \operatorname{th} y}.$$

Похідні гіперболічних функцій обчислюються за формулами:

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x,$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

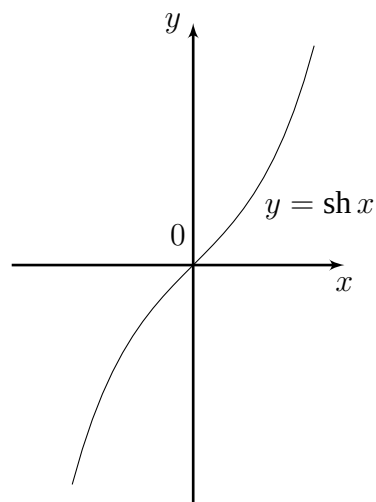


Рисунок 1.5 – Графік функції $y = \operatorname{sh} x$

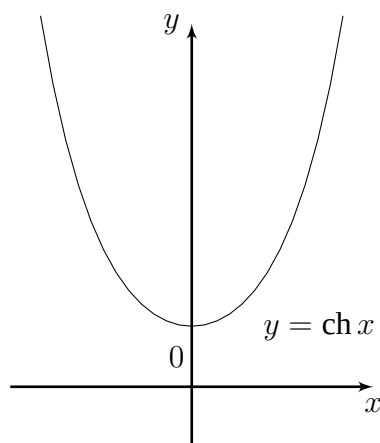


Рисунок 1.6 – Графік функції $y = \operatorname{ch} x$

Нехай $y = f(x)$ і $x = \varphi(y)$ — пара взаємно обернених функцій.

Теорема 1.4.

Якщо функція $y = f(x)$ — строго монотонна на (a, b) і має відмінну від нуля похідну $f'(x)$ для всіх $x \in (a, b)$, то існує обернена функція $x = \varphi(y)$, яка також має похідну $\varphi'(y)$, причому $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$. ★

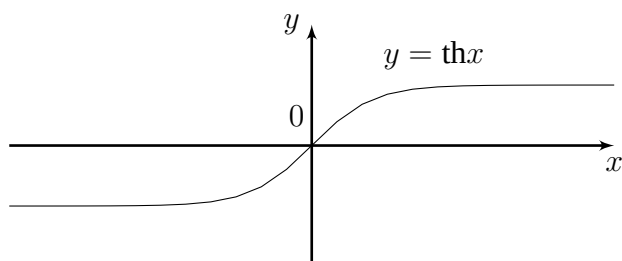


Рисунок 1.7 – Графік функції $y = \operatorname{th} x$

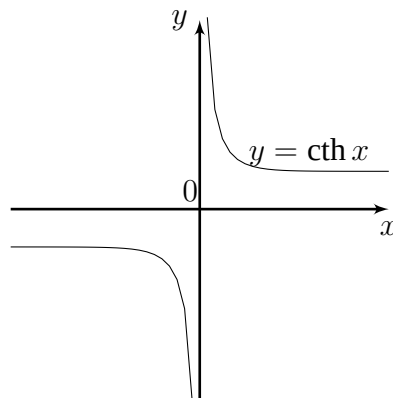


Рисунок 1.8 – Графік функції $y = \operatorname{cth} x$

Похідна параметрично заданої функції

Похідна функції, заданої параметрично

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta],$$

обчислюється за формулою:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Приклад 1.2. Обчислити похідну функції: $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta].$

Розв'язання.

$$y'_x = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \frac{1}{1 - \operatorname{ctgt}}.$$

Диференціювання неявно заданої функції

Нехай функція задана неявно рівнянням $F(x, y) = 0$. Щоб продиференціювати неявно задану функцію, потрібно взяти похідну по x від обох частин рівності, вважаючи y функцією від x і одержане рівняння розв'язати відносно y' . Похідна неявної функції виражається через незалежну змінну x і саму функцію y .

Приклад 1.3. Обчислити похідну y' , якщо $x^2 + y^2 - 2y + 3x = 1$.

Розв'язання.

$$2x + 2yy' - 2y' + 3 = 0 \Rightarrow y' \cdot (2y - 2) = -2x - 3 \Rightarrow y' = \frac{2x + 3}{2 - 2y}.$$

Диференціювання показниково-степеневих виразів

Нехай задано функцію $y = y(x) = \varphi(x)^{\psi(x)}$. Тоді для обчислення похідної цієї функції використовують основу логарифмічну тотожність для функції $\varphi(x) = e^{\ln \varphi(x)}$. Звідси $y(x) = \varphi(x)^{\psi(x)} = e^{\psi(x) \ln \varphi(x)}$. Тоді

$$\begin{aligned} (\varphi(x)^{\psi(x)})' &= (e^{\psi(x) \ln \varphi(x)})' = e^{\psi(x) \ln \varphi(x)} (\psi'(x) \ln \varphi(x) + \psi(x) \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}) = \\ &= \varphi(x)^{\psi(x)} (\psi'(x) \ln \varphi(x) + \psi(x) \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}). \end{aligned}$$

Приклад 1.4. Обчислити похідну:

$$(x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} (x \ln x)' = x^x (\ln x + x \cdot \frac{1}{x}) = x^x (\ln x + 1).$$

ТЕМА 2. ПОХІДНІ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Похідні вищих порядків

Нехай на (a, b) задано диференційовну функцію $y = f(x)$, тоді її похідна $f'(x)$, яку називатимемо *першою похідною (похідною першого порядку)*, також є функцією від x .

Означення 2.1. Якщо функція $f'(x)$ також має похідну на (a, b) чи в деякій точці $x \in (a, b)$, то цю похідну називають другою похідною (або похідною другого порядку) і позначають y'' , $f''(x)$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$, $\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})$. ✓

Механічний зміст другої похідної. Прискорення — це похідна від швидкості: $a = v' = s'' = f''(t)$. Тобто друга похідна — величина, яка рівна прискоренню рухомої точки в даний момент часу.

Означення 2.2. Похідною n -го порядку функції $y = f(x)$ називають першу похідну, якщо вона існує, від похідної $(n-1)$ -го порядку:

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})'; \quad f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'; \quad \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right).$$

Похідні порядку вище першого називають похідними вищих порядків. Починаючи з четвертого порядку, похідні позначають не штрихами, а цифрами. Порядок похідної при цьому беруть в дужки.

Приклад 2.1. Обчислити похідну шостого порядку функції $y = x^5 - 7x^2 + x - 1$. ☹

Розв'язання. $y' = 5x^4 - 14x + 1$, $y'' = 20x^3 - 14$, $y''' = 60x^2$, $y^{(4)} = 120x$, $y^{(5)} = 120$, $y^{(6)} = 0$. ■

Для обчислення похідної n -го порядку від добутку двох функцій використовують **формулу Лейбніца**:

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)},$$

де $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

Похідні вищих порядків від неявно заданої функції

Нехай функція $y = f(x)$ задана неявно $F(x, y) = 0$. Диференціюючи цю рівність по x і розв'язуючи одержане рівняння відносно y' , знайдемо першу похідну. Щоб знайти другу похідну, потрібно продиференціювати по x першу похідну і в одержане співвідношення підставити її значення. Продовжуючи диференціювання, можна знайти одну за одною похідні n -го порядку. Всі вони виражатимуться через незалежну змінну x і саму функцію y .

Приклад 2.2. Обчислити похідну другого порядку неявно заданої функції: $x^2 + y^3 = 1$. ☺

Розв'язання.

$$2x + 3y^2 y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{2x}{3y^2} \Rightarrow$$

$$y'' = -\frac{2}{3} \frac{y^2 - x2yy'}{y^4} = -\frac{2}{3} \frac{y - 2xy'}{y^3} = -\frac{2}{3} \frac{y - 2x \cdot (-\frac{2x}{3y^2})}{y^3} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{3y^3 + 4x^2}{3y^5} = -\frac{2}{9} \frac{3 + x^2}{y^5}.$$

Похідні вищих порядків від параметрично заданої функції

Нехай функція $y = f(x)$ задана параметрично

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Як відомо, у цьому випадку $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$.

Якщо функції $x(t)$ і $y(t)$ мають похідні другого порядку, то

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx} \right)'_t \cdot \frac{1}{x'(t)} = \frac{(y'_x)'_t}{x'(t)}.$$

Дійсно,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx} \right)'_x = \left(\frac{dy}{dx} \right)'_t \cdot t'_x = \left(\frac{dy}{dx} \right)'_t \cdot \frac{1}{x'(t)}.$$

Аналогічно,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right)'_t \cdot \frac{1}{x'(t)}.$$

Приклад 2.3. Знайти $\frac{d^n y}{dx^n}$, $x = \ln t$, $y = t^3$.

Розв'язання.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(t^3)'_t}{(\ln t)'_t} = 3t^3 \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = (3t^3)'_t \cdot \frac{1}{(\ln t)'_t} = 9t^3 = 3^2 t^3;$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = (9t^3)'_t \frac{1}{(\ln t)'_t} = 27t^3 = 3^3 t^3 \Rightarrow \dots \Rightarrow \frac{d^n y}{dx^n} = 3^n t^3.$$

ТЕМА 3. ДИФЕРЕНЦІАЛ

Поняття диференціала

Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна у точці $x \in [a, b]$, тобто у цій точці має похідну

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Тоді $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, де $\alpha \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Звідси $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x$.

Перший доданок $f'(x)\Delta x$ називають **головною частиною приросту функції** $f(x)$.

Означення 3.1. Диференціалом dy функції $y = f(x)$ у точці x називають головну лінійну відносно Δx частину приросту функції $f(x)$ у цій точці:

$$dy = f'(x)\Delta x. \quad (3.1)$$

Диференціал dy також називають диференціалом першого порядку. ✓

Якщо $y = x$, то $y' = x' = 1$, тому $dy = dx = \Delta x$. Отже, (3.1) можна записати так:

$$dy = f'(x)dx. \quad (3.2)$$

Формулу (3.2) використовують при обчисленні диференціалів першого порядку.

Геометричний зміст та механічний зміст диференціала

Геометричний зміст диференціала зрозумілий з рис. 3.1. Зауважимо, що $PN = \Delta y$, $QN = MN \cdot \operatorname{tg} \alpha = \Delta x \cdot f'(x) = dy$.

Отже, диференціал функції $f(x)$ при заданих значеннях x і Δx дорівнює приросту ординати дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці x . Тобто приріст функції Δy при цьому дорівнює приросту ординати кривої. Таким чином, заміна приросту функції на її диференціал геометрично означає заміну ординати AP кривої ординатою дотичної AQ . Зрозуміло, що така заміна доцільна лише для достатньо малих значень Δx .

Для з'ясування **механічного змісту диференціала** припустимо, що матеріальна точка рухається за відомим законом $s = f(t)$, де $f(t)$ — диференційовна на деякому проміжку функція.

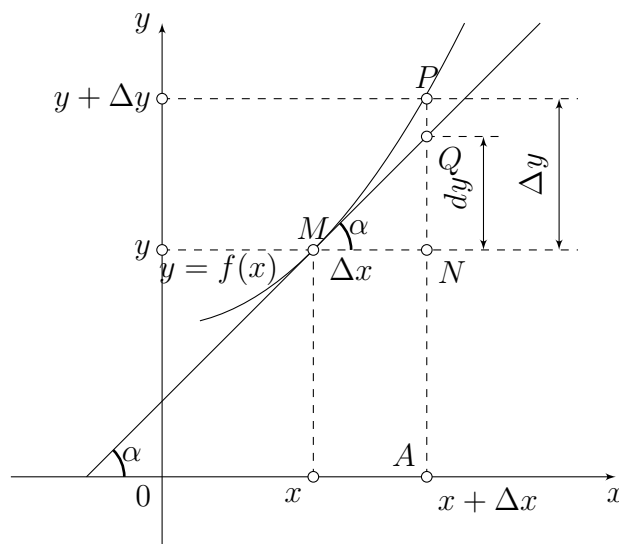


Рисунок 3.1 – Геометричний зміст диференціала

Тоді диференціал цієї функції $ds = f'(t)\Delta t$ при фіксованих значеннях t і Δt — це той шлях, який пройшла б матеріальна точка за час Δt , якби вона рухалася прямолінійно і рівномірно із сталою швидкістю $v = f'(t)$.

Властивості диференціала

На основі таблиці похідних та їхніх властивостей, врахувавши (3.1), можна записати відповідну таблицю диференціалів:

$dc = 0, c = \text{const},$	$d(uv) = u dv + v du,$	$d(cu) = c du, c = \text{const},$
$d(\frac{u}{v}) = \frac{u dv - v du}{v^2},$	$d(u \pm v) = du \pm dv,$	$dx = dx,$
$dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1} dx,$	$d \ln x = \frac{dx}{x},$	$d \cos x = -\sin x dx,$
$d \sin x = \cos x dx,$	$d \operatorname{tg} x = \frac{dx}{\cos^2 x},$	$d \operatorname{ctg} x = -\frac{dx}{\sin^2 x},$
$d \log_a x = \frac{dx}{x \ln a},$	$da^x = a^x \ln a dx,$	$de^x = e^x dx,$
$d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$	$d(\arccos x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$	$d \operatorname{arctg} x = \frac{dx}{1+x^2},$
$d \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x dx,$	$d \operatorname{sh} x = \operatorname{ch} x dx,$	$d \operatorname{th} x = \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x},$
$d \operatorname{cth} x = -\frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x},$	$d \operatorname{arcctg} x = -\frac{dx}{1+x^2}.$	

Важливий наслідок випливає з правила диференціювання складної функції.

Наслідок 3.1.

Нехай $y = f(x) = f(\varphi(t))$ — складена функція з проміжним аргументом $x = \varphi(t)$ і кінцевим аргументом t , причому функції $f(x)$, $\varphi(t)$ — диференційовні у точках x і t . Поді існує похідна $y'_t = y'_x \cdot x'_t$, а, отже, диференціал $dy = y'_t dt = y'_x \cdot x'_t dt = y'_x dx$.

Побто диференціал визначається однією і тією ж формулою, незалежно від того чи змінна x є незалежною змінною чи вона є функцією іншої змінної. Цю властивість називають **інваріантністю (незмінністю) форми диференціала**. ☑

Застосування диференціала у наближених обчисленнях

Приріст Δy функції $y = f(x)$ у точці x можна обчислити наближено, замінивши його диференціалом у цій точці $\Delta y \approx dy$. Тоді $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$.

Приклад 3.1. Обчислити наближено $\operatorname{arctg} 1,05$. ☺

Розв'язання. У нас $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Тому $\operatorname{arctg}(x + \Delta x) \approx \operatorname{arctg} x + (\operatorname{arctg} x)' \Delta x = \operatorname{arctg} x + \frac{\Delta x}{1+x^2}$. Оскільки, $x = 1$, $\Delta x = 0,05$, то $\operatorname{arctg} 1,05 \approx \operatorname{arctg} 1 + \frac{0,05}{1+1^2} = \frac{\pi}{4} + 0,025 \approx 0,811$. ■

Приклад 3.2. Обчислити диференціал функції $y = 3 \ln \operatorname{ch} \frac{x}{3}$.

Розв'язання.

$$dy = 3 \frac{d \operatorname{ch} \frac{x}{3}}{\operatorname{ch} \frac{x}{3}} = 3 \frac{\operatorname{sh} \frac{x}{3} \frac{1}{3}}{\operatorname{ch} \frac{x}{3}} dx = \operatorname{th} \frac{x}{3} dx.$$

Диференціали вищих порядків

Нехай маємо диференційовну на деякому проміжку функцію $y = f(x)$, де x — незалежна змінна. Тоді її перший диференціал або диференціал першого порядку рівний $dy = f'(x)dx$ — це деяка функція від x і можна говорити про диференціал цієї функції.

Означення 3.2. Другим диференціалом або диференціалом другого порядку d^2y називається диференціал від диференціала першого порядку: $d^2y = d(dy)$. Оскільки dx не залежить від x , то

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'_x dx = f''(x)dx^2.$$

Означення 3.3. Взагалі n -м диференціалом або диференціалом n -го порядку називається диференціал від диференціала $(n-1)$ -го порядку

$$d^n y = d(d^{n-1}y) = f^{(n)}(x)dx^n.$$

Зауважимо, що диференціали вищих порядків інваріантної властивості не мають. Покажемо це на прикладі диференціала другого порядку. Дійсно,

$$\begin{aligned} d^2y &= d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx + f'(x)d(dx) = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x = \\ &= f''(x)dx^2 + f'(x)x''(t)dt^2 \neq f''(x)dx^2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Отже, у випадку складеної функції форма диференціала другого порядку змінюється.

Приклад 3.3. Обчислити d^3y для функції $y = \sin 2x$. ☺

Розв'язання.

$$y' = 2 \cos 2x \Rightarrow y'' = -4 \sin 2x \Rightarrow y''' = -8 \cos 2x \Rightarrow d^3y = -8 \cos 2x dx.$$

Приклад 3.4. Обчислити d^2y для складеної функції: $y = x^2$, $x = t^3 - 1$. ☺

Розв'язання. За формулою (3.3) отримуємо:

$$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f''(x) = 2,$$

$$x(t) = t^3 - 1 \Rightarrow x'(t) = 3t^2 \Rightarrow x''(t) = 6t.$$

Тоді

$$d^2y = 2dx^2 + 2x \cdot 6tdt^2 = 2(3t^2dt)^2 + 2(t^3 - 1)6tdt^2 = (30t^4 - 12t)dt^2.$$

Можна також обчислити безпосередньо цей диференціал, підставивши вираз для x у функцію $y = f(x)$:

$$y = x^2 = (t^3 - 1)^2 = t^6 - 2t^3 + 1 \Rightarrow$$

$$y' = 6t^5 - 6t^2 \Rightarrow y'' = (30t^4 - 12t) \Rightarrow d^2y = (30t^4 - 12t)dt.$$

ТЕМА 4. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ДИФЕРЕНЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

Теорема Ферма та її геометричний зміст

Теорема 4.1 (Ферма).

Нехай функція $f(x)$ неперервна на інтервалі (a, b) і набуває свого найбільшого найменшого значення у деякій точці c з цього інтервалу. Тоді якщо у точці c існує похідна $f'(c)$, то $f'(c) = 0$. ★

ДОЗВЕДЕННЯ. Для визначеності вважатимемо, що в точці c функція $f(x)$ набуває свого найбільшого значення, тобто

$$f(x) \leq f(c), x \in (a, b). \quad (4.1)$$

Оскільки точка c є внутрішньою точкою інтервалу (a, b) , то приріст Δx може бути як додатним, так і від'ємним, а відповідний приріст функції, як випливає з умови 4.1, не може бути додатним: $f(c + \Delta x) - f(c) \leq 0$. Звідси при $\Delta x > 0$ маємо $\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0$, тому $f'_+(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0$.

Аналогічно, якщо $\Delta x < 0$, то $f'_-(c) \geq 0$. За умовою похідна існує, тобто

$$f'_+(c) = f'_-(c) = f'(c). \quad (4.2)$$

З рівностей (4.2) за умов $f'_+(c) \leq 0$ і $f'_-(c) \geq 0$ випливає, що $f'(c) = 0$. $\square$

Геометричний зміст теореми Ферма: якщо в точці c функція досягає найбільшого або найменшого значення, то дотична до графіка цієї функції в точці $(c, f(c))$ паралельна осі Ox .

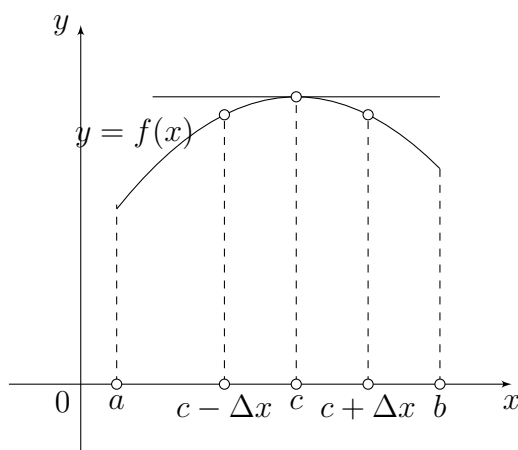


Рисунок 4.1 – Геометричний зміст теореми Ферма

Теорема Ролля та її геометричний зміст

Теорема 4.2 (Ролля).

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, диференційовна на інтервалі (a, b) і набуває на його кінцях однакових значень $f(a) = f(b)$, то знайдеться хоча б одна така точка $c \in (a, b)$, в якій $f'(c) = 0$.

ДОВЕДЕННЯ.

Оскільки функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то вона досягає на цьому відрізку свого найбільшого значення M і найменшого значення m . Якщо $M = m$, то $f(x) = \text{const}$ і $f'(x) = 0$ в довільній точці $x \in [a, b]$.

Нехай $M \neq m$ (рис. 4.2, a, b, v), тоді хоча б одне із значень M чи m досягається функцією у внутрішній точці інтервалу (a, b) , тому $f(a) = f(b)$. За теоремою Ферма похідна в такій точці дорівнює нулю. $\square$

Геометричний зміст теореми Ролля: якщо функція задовольняє умови цієї теореми, то на графіку цієї функції знайдеться хоча б одна точка, в якій дотична паралельна осі Ox .

Зауваження 4.1. Усі три умови теореми Ролля є суттєвими, тобто якщо хоча б одна з умов цієї теореми не виконується, то висновок теореми Ролля не справджується також.

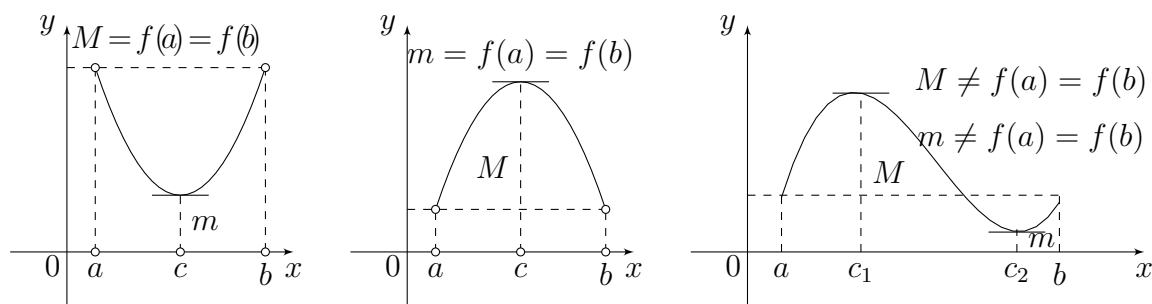


Рисунок 4.2 – Геометричний зміст теореми Ролля

Приклад 4.1. Розглянемо функцію $y = 1 - |x|$. Вона неперервна при $x \in [-1, 1]$ та $y(1) = y(-1) = 0$. Але не існує жодної точки, в якій $f'(x) = 0$. Це пояснюється тим, що при $x = 0$ дана функція недиференційовна. ☺

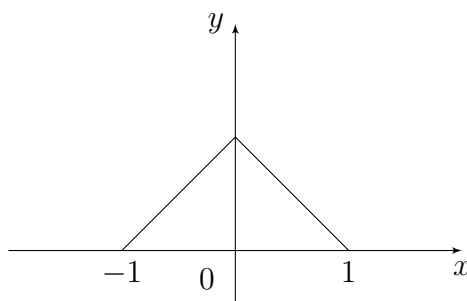


Рисунок 4.3 – Ілюстрація до прикладу 4.1

Приклад 4.2. Розглянемо функцію $y = \varphi(x) = x^2$, $x \in [0, 1]$. Тут не виконується висновок теореми Ролля, бо $\varphi(0) \neq \varphi(1)$. ☺

Приклад 4.3. Розглянемо функцію $y = \psi(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1), \\ 0, & x = 1. \end{cases}$
Тут порушується умова неперервності, бо функція $y = \psi(x)$ – розривна у точці $x = 1$. ☺

Теорема Коші та Лагранжа

Теорема 4.3 (Коші).

Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ – неперервні на $[a, b]$, диференційовні на інтервалі (a, b) , причому $\varphi'(x) \neq 0$ при $x \in (a, b)$, то існує точка $c \in (a, b)$ така, що

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}. \quad (4.3)$$



ДОВЕДЕННЯ. Введемо допоміжну функцію

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}(\varphi(x) - \varphi(a)),$$

яку можна розглядати на відрізку $[a; b]$, бо $\varphi(a) \neq \varphi(b)$. У протилежному разі за теоремою Ролля знайшлася б точка $c \in (a; b)$, в якій $\varphi'(c) = 0$, що неможливо, бо за умовою $\forall x \in (a; b) : \varphi'(x) \neq 0$.

Неважно пересвідчитись, що функція $F(x)$ задовольняє всі умови теореми Ролля. Тому знайдеться точка $c \in (a; b)$, в якій $F'(c) = 0$ або

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(a) - \varphi(b)}\varphi'(c) = 0.$$

звідки й випливає формула (4.3). □

Теорема 4.4 (Лагранжа).

Якщо функція $f(x)$ — неперервна на відрізку $[a, b]$, диференційовна на інтервалі (a, b) , то в середині цього інтервалу знайдеться хоча б одна точка $c \in (a, b)$, в якій

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \quad (4.4)$$



ДОВЕДЕННЯ. Цю теорему можна розглядати як окремий випадок теореми Коші. Дійсно поклавши у формулі (4.3) $\varphi(x) = x$, дістанемо формулу (4.4). □

Геометричний зміст теореми Лагранжа. Запишемо (4.4) у вигляді:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c),$$

де $a < c < b$. Тоді

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{BC}{AB} = \operatorname{tg} \alpha = f'(c).$$

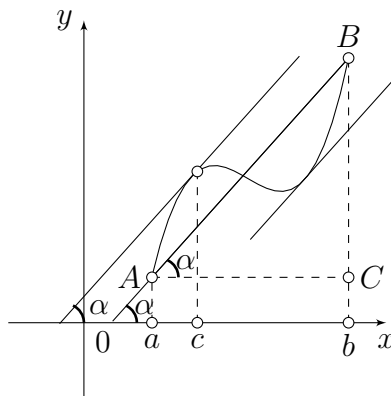


Рисунок 4.4 – Геометричний зміст теореми Лагранжа

Тобто, якщо функція задовольняє умови теореми Лагранжа, то на графіку цієї функції знайдеться хоча б одна точка, в якій дотична до графіка, паралельна хорді що сполучає кінці кривої $A(a, f(a))$ і $B(b, f(b))$. Таких точок може бути декілька, але завжди існує хоча б одна.

Формулу (4.4) називаються *формулою Лагранжа або формулою скінченних приростів*.

Теорема Лагранжа має також і *механічну інтерпретацію*. Якщо $s = s(t)$, $t_1 < t < t_2$ — закон руху матеріальної точки, то відношення $\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$ — це середня швидкість руху за проміжок часу $[t_1; t_2]$. Теорема Лагранжа стверджує, що в деякий момент часу $c \in (t_1; t_2)$ миттєва швидкість неодмінно збігається із середньою швидкістю: $\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = s'(c)$, $c \in (t_1; t_2)$.

Іншими словами, серед усіх можливих швидкостей $s'(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, неодмінно знайдеться така швидкість $s'(c)$, що коли її підтримувати сталою, то за той самий проміжок часу $[t_1; t_2]$ точка пройде той самий шлях $s(t_2) - s(t_1)$, що і при русі із змінною швидкістю $s'(t)$: $s(t_2) - s(t_1) = s'(c)(t_2 - t_1)$.

Якщо при цьому русі в деякий момент часу t доводиться повертати назад, то для цього швидкість потрібно повністю погасити: $s'(\tau) = 0$ (теорема Ролля). Зрозуміло, що ці інтерпретації вірні лише тоді, коли закон руху $s(\tau)$ задовольняє умови, які відповідають умовам теорем Ролля і Лагранжа.

ТЕМА 5. ПРАВИЛО ЛОПІТАЛЯ. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

Правило Лопіталя

Ця правило визначає спосіб розкриття невизначеностей при обчислення границь функцій, який ґрунтується на застосуванні похідних.

Теорема 5.1 (розкриття $\frac{0}{0}$).

Нехай функції $f(x)$, $\varphi(x)$ визначені і диференційовні в околі точки x_0 , за винятком можливо самої точки x_0 , причому $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$ і у вказаному околі $\varphi'(x) \neq 0$.

Якщо існує границя відношення похідних $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то існує границя відношення функцій $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ і ці границі рівні між собою, тобто:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

ДОВЕДЕННЯ.

Вважатимемо, що x_0 — скінченне число: $|x_0| < +\infty$. Довизначимо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ в точці $x = x_0$, поклавши $f(x_0) = \varphi(x_0) = 0$. Тоді ці функції будуть неперервні в точці x_0 . Розглянемо відрізок $[x_0; x]$, що належить даному околу. Функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні на $[x_0; x]$, диференційовні на $(x_0; x)$ і $\forall x \in (x_0; x) : \varphi'(x) \neq 0$. Тому за теоремою Коші знайдеться точка $c \in (x_0; x)$, для якої

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \text{ або } \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}, \quad (5.1)$$

тому що $f(x_0) = \varphi(x_0) = 0$. Оскільки за умовою $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ існує і $c \rightarrow x_0$, якщо $x \rightarrow x_0$, то з рівності (5.1) маємо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{c \rightarrow x_0} \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

□

Зауваження 5.1. Теорема справедлива і в тому випадку, коли $x_0 = \infty$. Дійсно, поклавши $x = \frac{1}{z}$, маємо

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(\frac{1}{z})}{\varphi(\frac{1}{z})} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(\frac{1}{z})'}{\varphi(\frac{1}{z})'} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{z^2} f'(\frac{1}{z})}{-\frac{1}{z^2} \varphi'(\frac{1}{z})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Зауваження 5.2. Якщо похідні $f'(x)$ і $\varphi'(x)$ задовольняють ті самі умови, що і функції $f(x)$ і $\varphi(x)$, то цю теорему можна застосовувати ще раз. При цьому дістанемо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)}.$$

Зауваження 5.3. Взагалі, теорему можна застосовувати доти, поки не прийдемо до відношення похідних $\frac{f^{(n)}(x)}{\varphi^{(n)}(x)}$, яке має певну границю при $x \rightarrow x_0$. Цю саму границю матиме і відношення функцій:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{\varphi^{(n)}(x)}.$$

Ця теорема дає змогу розкривати невизначеність виду $\frac{0}{0}$. Сформулюємо теорему, яка стосується розкриття невизначеності виду $\frac{\infty}{\infty}$.

Теорема 5.2 (розкриття $\frac{\infty}{\infty}$).

Нехай функції $f(x)$, $\varphi(x)$ визначені і диференційовні в околі точки x_0 , за винятком можливо самої точки x_0 , причому $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \infty$ і у вказаному околі $\varphi'(x) \neq 0$.

Якщо існує границя відношення похідних $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то існує границя відношення функцій $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ і ці границі рівні між собою, тобто:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Цю теорему приймемо без доведення. Виражене цими теоремами і правило обчислення границь називають правилом Лопіталя за іменем математика, який опублікував його. Але це правило відкрив Й. Бернуллі, тому правило Лопіталя називають ще правилом Бернуллі - Лопіталя. Зауважимо,

Зауважимо, що правило Лопіталя застосовують до розкриття невизначеностей виду $\frac{0}{0}$ і $\frac{\infty}{\infty}$, які називають **основними**. Інші невизначеності $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, ∞^0 , 1^∞ , 0^0 , зводяться до них:

- якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \infty$, то невизначеність $0 \cdot \infty$ зводять до основної так:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{1/\varphi(x)} = \frac{0}{0}$$

або таким способом:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x)}{1/f(x)} = \frac{\infty}{\infty}.$$

- якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \infty$, то невизначеність $\infty - \infty$ зводиться до невизначеності $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1/\varphi(x) - 1/f(x)}{1/f(x) \cdot 1/\varphi(x)} = \frac{0}{0}.$$

- якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{\varphi(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) \ln f(x)}$$

і невизначеність виду 0^0 зводиться до невизначеності $0 \cdot \infty$, розглянутої вище. Аналогічно розкриваються невизначеності виду ∞^0 , 1^∞ .

Приклад 5.1. Обчислити границю функції з допомогою правила Лопіталя:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} = 0.$$

Приклад 5.2. Обчислити границю функції з допомогою правила Лопіталя:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - e^{2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5e^{5x} - 2e^{2x}}{1} = 3.$$

Приклад 5.3. Обчислити границю функції з допомогою правила Лопіталя:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2 - x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - x}{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{4}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{-1/\sin^2 \frac{\pi x}{4} \cdot \frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi}.$$

Приклад 5.4. Обчислити границю функції з допомогою правила Лопіталя:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{1/x^2} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 2x}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cdot \frac{\sin 2x}{\cos 2x}}{2x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} -2 \cdot \frac{\operatorname{tg} 2x}{2x}} = e^{-2}.$$

Приклад 5.5. Обчислити границю функції з допомогою правила Лопіталя:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} (\sin 2x)^{\operatorname{tg} 3x} &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 2x}{\operatorname{tg} 3x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{ctg} 2x}{-3/\sin^2 3x}} = e^{-\frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\operatorname{tg} 2x}} = \\ &= e^{-\frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 3x \cos 3x}{2/\cos^2 2x}} = e^0 = 1.\end{aligned}$$



Формула Тейлора

Розглянемо одну з основних формул математичного аналізу, так звану формулу Тейлора, яка широко застосовується як в самому аналізі, так і в суміжних дисциплінах. Зупинимось лише на трьох застосуваннях.

Зауважимо, що заміна приросту функції її диференціалом дає змогу утворювати різні наближені формули. Виявляється, що ці формули можна уточнити, якщо застосувати диференціали вищих порядків: про це і йдеться у формулі Тейлора.

Формула Тейлора дає змогу розробити простий аналітичний апарат для обчислення значень функції $y = f(x)$, які відповідають заданим значенням незалежної змінної x . Зрозуміло, що в тих випадках, коли функція задається формулою виду $y = \frac{x^2}{2} - 3x + 5$, значення обчислюється лише за допомогою чотирьох арифметичних дій. Але як знайти, наприклад, значення функції $y = \sin x$? Очевидно, цю задачу найпростіше можна „розв’язати“ за допомогою калькулятора. Але ж калькулятор дає лише відповідь. А питання про те, які він при цьому виконує дії, залишається відкритим. Формула Тейлора і вказує, які арифметичні дії потрібно виконати над x , щоб одержати $\sin x$.

Іншими словами, формула Тейлора дає змогу зобразити дану функцію многочленом, що зручно для складання програм і обчислень цієї функції на ЕОМ.

Ще одне практичне застосування цієї формули пов’язане з обробкою числових експериментальних даних. Якщо в результаті експерименту одержано масив значень $(x_i; y_i)$, то спочатку будують графік залежності $y = f(x)$, а потім цю залежність описують аналітично, причому, як правило, у вигляді многочлена.

Обґрунтування можливості представляти функцію многочленом дає формула Тейлора.

Теорема 5.3 (Тейлора).

Нехай функція $f(x)$ має у точці x_0 і в деякому її околі похідну до $(n+1)$ -го порядку включно і нехай x — довільне значення аргументу із вказаного околу ($x \neq x_0$). Тоді між точками x_0 і x знайдеться така точка c , що справедлива формула:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1}, \quad (5.2)$$

де $c = x_0 + \Theta(x - x_0)$, $0 < \Theta < 1$.



ДОЗВЕДЕННЯ. Позначимо многочлен, то стоїть у правій частині формули (5.2), через $\varphi(x, x_0)$:

$$\varphi(x, x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \quad (5.3)$$

Його називають *многочленом Тейлора степеня n для функції $f(x)$* .

Різницю між функціями $f(x)$ і $\varphi(x, x_0)$ позначимо через $R_n(x) : R_n(x) = f(x) - \varphi(x, x_0)$. Теорема буде доведена, якщо встановимо, що

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \quad (5.4)$$

де точка c лежить між точками x_0 і x .

Зафіксуємо довільне значення $x > x_0$ із вказаного околу. Позначимо через t величину, що змінюється на відрізку $[x_0; x]$, тобто $x_0 \leq t \leq x$, і розглянемо функцію

$$F(t) = f(x) - \varphi(x, t) - \frac{(x - t)^{n+1} R_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}}. \quad (5.5)$$

Ця функція задовольняє всі умови теореми Ролля, тому знайдеться точка $c \in (x_0; x)$ для якої

$$F'(c) = 0. \quad (5.6)$$

Якщо в функцію (5.5) підставити значення функції $\varphi(x, t)$ з формули (5.3) і результат продиференціювати по t , то знайдемо

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n + \frac{(n+1)(x - t)^n R_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}}. \quad (5.7)$$

Покладемо у формулі (5.7) $t = c$, тоді з рівності (5.6) дістанемо

$$-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x - c)^n + \frac{(n+1)(x - c)^n R_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = 0.$$

Розв'язуючи це рівняння відносно $R_n(x)$, дістанемо формулу (5.4). □

Формула (5.2) називається **формулою Тейлора для функції $f(x)$** у околі точки x_0 , а вираз

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

— **залишковим членом у формі Лагранжа**. Величина $R_n(x)$ показує, яку помилку ми робимо, замінюючи функцію $f(x)$ її многочленом Тейлора (5.3).

При цьому формулу (5.4) можна використати для того, щоб оцінити величину $R_n(x)$ при $x \rightarrow x_0$ і фіксованому n , а також при $n \rightarrow \infty$.

Якщо взяти $x_0 = 0$, то отримаємо **формулу Маклорена**:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}, \quad (5.8)$$

де $c = \Theta x$, $0 < \Theta < 1$.

Подано формулу (5.2) через диференціали вищих порядків. Для цього покладемо в ній $x - x_0 = \Delta x$, $x = x_0 + \Delta x$:

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n + R_n(x). \quad (5.9)$$

Оскільки $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$, $f^{(n)}(x_0)\Delta x^n = d^n y$, то формулу (5.9) можна записати у вигляді

$$\Delta y = dy + \frac{d^2 y}{2!} + \frac{d^3 y}{3!} + \dots + \frac{d^n y}{n!} + R_n(x). \quad (5.10)$$

Покажемо, що коли функція $f^{(n+1)}(x)$ в околі точки x_0 обмежена, то залишковий член $R_n(x)$ при $x \rightarrow x_0$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж $(x - x_0)^n$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n+1)}(c)(x - x_0)^{n+1}}{(x - x_0)^n(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!} \lim_{x \rightarrow x_0} f^{(n+1)}(c)(x - x_0) = 0,$$

тому що добуток обмеженої величини на нескінченно малу є величина нескінченно мала.

Таким чином, обриваючи формулу (5.9) або (5.10) все далі і далі, дістаємо все точніші наближені формули: з точністю до величини Δx^2 : $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$ або $\Delta y \approx dy$ (це відомі формули для наближених обчислень за допомогою першого диференціала); з точністю до величини $|\Delta x|^3$

$$f(x + \Delta x) \approx f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2 \text{ або } \Delta y \approx dy + \frac{d^2y}{2};$$

з точністю до величини Δx^4

$$f(x + \Delta x) \approx f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}\Delta x^3 \text{ або } \Delta y \approx dy + \frac{d^2y}{2} + \frac{d^3y}{3!}.$$

Те саме можна сказати про формулу (5.2): для тих значень x , для яких залишковий член $R_n(x)$ достатньо малий, многочлен Тейлора (5.3) дає наближене зображення функції $f(x)$.

Многочлени Тейлора дають найкраще наближення функції $f(x)$ у вигляді многочлена даного степеня поблизу точки x_0 . Це треба розуміти так: серед усіх многочленів цього степеня, які збігаються з функцією при $x = x_0$, лише для многочлена Тейлора величина $|R_n(x)|$ виявляється найменшою.

Із формули (5.4) видно, що залишковий член $R_n(x)$ може бути малим навіть при великому відхиленні x від x_0 , якщо взяти достатньо великим порядок n многочлена Тейлора, тому що факторіал при збільшенні n росте швидше степеня.

Із формули (5.8) можна отримати розвинення Маклорена для основних елементарних функцій.

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^{k-1}x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \dots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \dots \\ e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \\ (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \dots \\ \operatorname{arctg} x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \end{aligned}$$

Формулу (5.2) можна записати у вигляді

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}. \quad (5.11)$$

Коли функція $f(x)$ є многочленом $P_n(x)$ степеня n , то похідна $P_n^{(n+1)}(x) \equiv 0$, тому формула (5.11) матиме вигляд

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{P_n^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i. \quad (5.12)$$

Ця формула називається формулою Тейлора для многочлена.

ТЕМА 6. ЕКСТРЕМАЛЬНІ ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ

Монотонність функції

Теорема 6.1 (достатні умови строгої монотонності).

Якщо функція $f(x)$ диференційовна на інтервалі (a, b) і $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) всюди, крім, можливо, скінченного числа точок, в яких $f'(x) = 0$ на $(a; b)$, то функція $f(x)$ зростає (спадає) на $(a; b)$.

ДОВЕДЕННЯ. Нехай для визначеності $f'(x) > 0$ і x_1 та x_2 — дві довільні точки з $(a; b)$, причому $x_1 < x_2$. Тоді на відрізку $[x_1; x_2]$ виконуються всі умови теореми Лагранжа, тому $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$, $c \in (x_1; x_2)$. За умовою $f'(c) > 0$, $x_2 - x_1 > 0$, тому $f(x_2) - f(x_1) > 0$ або $f(x_2) > f(x_1)$, тобто функція $f(x)$ на інтервалі $(a; b)$ зростає. Аналогічно доводиться теорема, якщо $f'(x) < 0$.

Зауваження 6.1. Подібним чином можна довести, що коли $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) на інтервалі $(a; b)$, то функція на цьому інтервалі не спадає (не зростає).

Теорема 6.2 (необхідна умова монотонності).

Якщо диференційовна на інтервалі $(a; b)$ функція зростає (спадає), то $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) на $(a; b)$. ★

ДОВЕДЕННЯ. Дійсно, нерівність $f'(x) < 0$ неможлива — це суперечило б теоремі 6.1. Отже, для всіх $x \in (a; b) : f'(x) \geq 0$. □

Наприклад, функція $y = x^3$ зростає на $(-\infty; +\infty)$ і має похідну $y' = 3x^2 > 0$, якщо $x \neq 0$, і рівну нулю при $x = 0$.

З цього випливає, що інтервали монотонності можуть відділятися один від одного або точками, де похідна дорівнює нулю (їх називають **стаціонарними точками**), або точками, де похідна не існує.

Визначення 6.1. Точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує, називаються критичними точками, або критичними точками першого роду. ✓

Не кожна критична точка відділяє інтервали монотонності. Теорема 6.2 має такий геометричний зміст. Якщо на інтервалі $(a; b)$ функція $f(x)$ зростає, то дотична до кривої $y = f(x)$ у кожній точці $x \in (a; b)$ утворює з додатним напрямом осі Ox гострий кут φ або (в окремих точках) горизонтальна; тангенс цього кута невід'ємний: $f'(x) = \operatorname{tg} \varphi \geq 0$ (рис. 6.1, а). Якщо на інтервалі $(a; b)$ функція $f(x)$ спадає, то кут нахилу дотичної тупий, або (в окремих точках) дотична горизонтальна; тангенс цього кута недодатний: $\operatorname{tg} \varphi = f'(x) \leq 0$ (рис. 6.1, б).

Інтервали монотонності можуть відділятися один від одного точками, де дотична або паралельна осі Ox , або паралельна осі Oy , або її не існує. Отже, щоб знайти інтервали монотонності

функції $f(x)$, треба:

- 1) знайти область визначення функції;
- 2) знайти похідну даної функції;
- 3) знайти критичні точки з рівняння $f'(x) = 0$ та з умови, що $f'(x)$ не існує;
- 4) розділити критичними точками область визначення на інтервали і у кожному з них визначити знак похідної. На інтервалах, де похідна додатна, функція зростає, а де від'ємна — спадає.

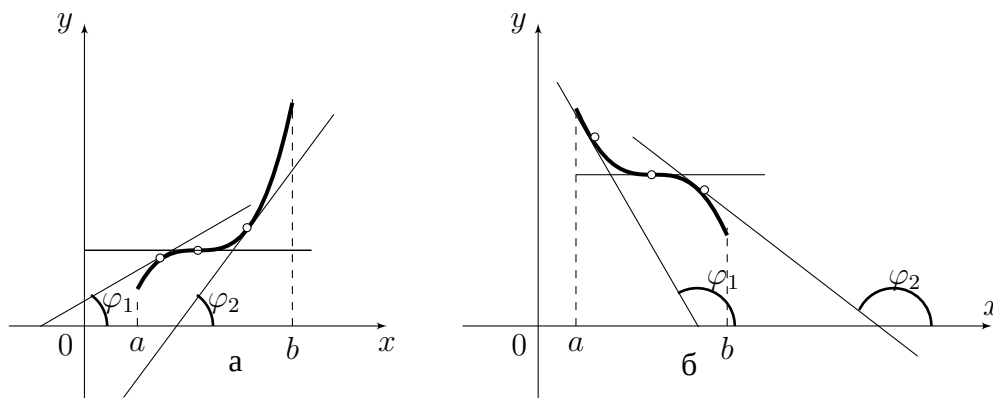


Рисунок 6.1 – Геометричний зміст необхідної умови монотонності

Приклад 6.1. Знайти інтервали монотонності функцій: а) $y = \arctg x$; б) $y = x \ln x + 3x$; в) $y = (2x + 1) \sqrt[3]{(x - 2)^2}$. ☺

Розв'язання. а) Областю визначення заданої функції є нескінченний інтервал $(-\infty; +\infty)$. Похідна $y' = \frac{1}{1+x^2} \neq 0$ також існує на всій числовій осі, тому критичних точок дана функція не має. Оскільки для всіх $x \in (-\infty; +\infty)$: $y'(x) > 0$, то функція зростає на всій області визначення.

б) Ця функція визначена на інтервалі $(0; +\infty)$. Знаходимо похідну: $y' = \ln x + 4$; знаходимо критичні точки: $\ln x + 4 \Rightarrow x = e^{-4}$. Інших критичних точок функція не має, бо похідна існує на всій області визначення.

Розбиваємо область визначення точкою $x = e^{-4}$ на інтервали і встановлюємо знак похідної на кожному з них.

Для цього досить визначити знак похідної в одній довільній внутрішній точці кожного інтервалу. Маємо $\forall x \in (0; e^{-4})$: $y'(x) < 0$, отже, при $x \in (0; e^{-4})$ функція спадає; і $\forall x \in (e^{-4}; +\infty)$: $y'(x) > 0$, отже, при $x \in (e^{-4}; +\infty)$ функція зростає.

в) Область визначення $(-\infty; +\infty)$. Знаходимо похідну $y' = \frac{10(x-1)}{3\sqrt[3]{x-2}}$. Критичні точки: $x_1 = 1$ - похідна дорівнює нулю, $x_2 = 2$ - похідної не існує. Маємо $\forall x \in (-\infty; 1)$: $y'(x) > 0$ - функція зростає; $\forall x \in (1; 2)$: $y'(x) < 0$ - функція спадає; $\forall x \in (2; +\infty)$: $y'(x) > 0$ - функція зростає. ■

Приклад 6.2. Довести, що рівняння $\frac{x^5}{5} + x - 1 = 0$ має лише один дійсний корінь. ☺

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x) = \frac{x^5}{5} + x - 1$, $x \in (-\infty; +\infty)$. Оскільки $f(0) < 0$, $f(1) > 0$, то на інтервалі $(0; 1)$ функція має принаймні один корінь. Похідна $f'(x) = x^4 + 1 > 0$, де $x \in (-\infty; +\infty)$, тому функція зростає на всій області визначення. Отже, більше одного дійсного кореня дана функція мати не може. ■

Приклад 6.3. Довести нерівність $\forall x > 0 : \ln(1+x) < \frac{x(x+2)}{2(x+1)}$. ☺

Розв'язання. Нехай $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x(x+2)}{2(x+1)}$. Оскільки $\forall x > 0 : f'(x) = -\frac{x^2}{(x+1)^2} < 0$, то функція $f(x)$ на інтервалі $(0; +\infty)$ спадає. Отже,

$$f(x) < f(0) = 0 \Rightarrow \ln(1+x) < \frac{x(x+2)}{2(x+1)}.$$

Локальний екстремум функції

Означення 6.2. Точка x_0 називається точкою локального максимуму (або мінімуму) функції $f(x)$, якщо існує такий окіл $0 < |x - x_0| < \delta$ точки x_0 , який належить області визначення функції, і для всіх x з цього околу виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$ (або $f(x) > f(x_0)$). ✓

Геометричний зміст означення зрозумілий з (рис. 6.2).

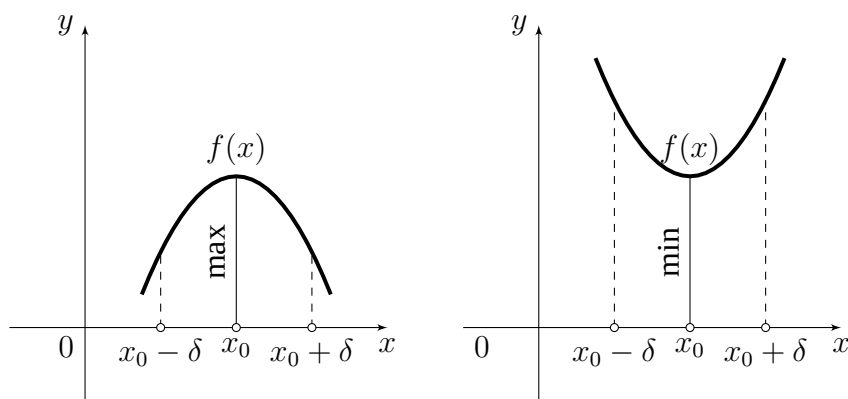


Рисунок 6.2 – Локальний екстремум функції

Означення 6.3. Точки локального (від латинського *localis* — місцевий) максимуму і локального мінімуму називаються точками локального екстремуму, а значення функції в цих точках називаються відповідно локальним максимумом і локальним мінімумом або локальним екстремумом. ✓

З означення випливає, що поняття екстремуму носить локальний характер в тому розумінні, що нерівність $f(x) < f(x_0)$ (або $f(x) > f(x_0)$) може і не виконуватись для всіх значень x з області визначення функції, але повинна виконуватись лише в деякому околі точки x_0 . Отже, не слід плутати локальний максимум з найбільшим значенням функції, якого вона може набувати в області визначення (його називають також абсолютним максимумом). Локальних максимумів функція може мати кілька, абсолютний максимум може бути тільки один. Це саме стосується локального і абсолютного мінімумів. Може статись, що окремий локальний мінімум більший від деякого локального максимуму, тоді як абсолютний мінімум не перевищує абсолютного максимуму M (рис. 6.3).

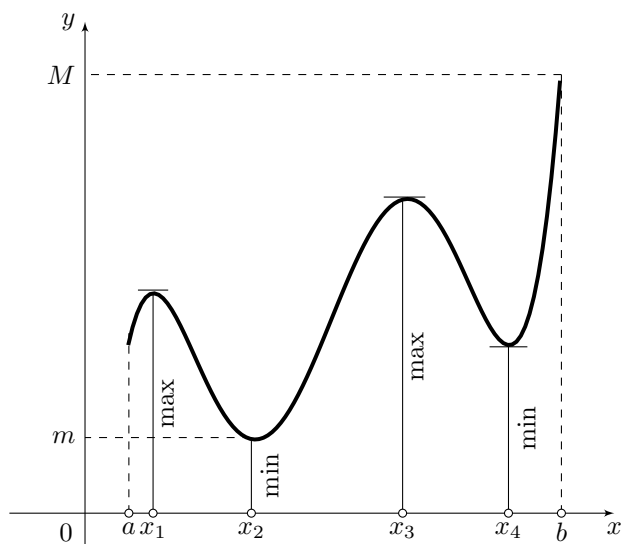


Рисунок 6.3 – Геометричний зміст необхідної умови монотонності

Нарешті, локальних екстремумів функція може досягати тільки у внутрішніх точках відрізка, тоді як абсолютні екстремуми можуть знаходитись і в крайніх його точках. З'ясуємо умови існування локального екстремуму.

Теорема 6.3 (необхідна умова екстремуму).

Якщо функція $f(x)$ має в точці x_0 локальний екстремум і диференційовна в цій точці, то $f'(x_0) = 0$.



ДОВЕДЕННЯ.

Оскільки за умовою x_0 — точка локального екстремуму, то існує інтервал $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, в якому значення $f(x_0)$ найбільше або найменше. Тоді за теоремою Ферма $f'(x_0) = 0$. □

Ця теорема має такий **геометричний зміст** (рис. 6.3). Якщо точки x_1, x_2, x_3, x_4 — точки локального екстремуму і у відповідних точках графіка існують не вертикальні дотичні, то ці дотичні паралельні осі Ox .

Умова $f'(x_0) = 0$ є необхідною, але не достатньою для того, щоб диференційовна в точці x_0 функція мала локальний екстремум. Це означає, що не всяка точка x_0 , в якій $f'(x_0) = 0$, є екстремальною точкою. Наприклад, функція $y = x^3$ (рис. 6.4, а) має похідну $y' = 3x^2$, що дорівнює нулю в точці $x = 0$, але не має в цій точці екстремуму.

Досі розглядалися функції, які в точках екстремуму мають похідну. Проте існують функції, які в точках екстремуму не мають похідної. Наприклад, функція $y = |x|$ має в точці $x = 0$ мінімум, але не має в цій точці похідної. Це зовсім не означає, що кожна точка, в якій функція не має похідної, обов'язково є точкою екстремуму. Наприклад, функція $y = \sqrt[3]{x}$ (рис. 6.4, б) недиференційовна в точці $x = 0$ і не має в цій точці екстремуму.

Таким чином, повну необхідну умову локального екстремуму можна сформулювати так: якщо функція має в точці локальний екстремум, то ця точка є критичною. Обернене твердження невірне: не всяка критична точка функції є її екстремальною точкою.

Іншими словами, точки локального екстремуму можуть бути по-перше, серед точок, в яких $f'(x) = 0$, і, по-друге, серед точок, в яких $f'(x)$ не існує.

У зв'язку з цим критичні точки іноді називають точками можливого екстремуму.

Розглянемо критерії, які дають змогу із множини критичних точок виділити точки максимуму і мінімуму.

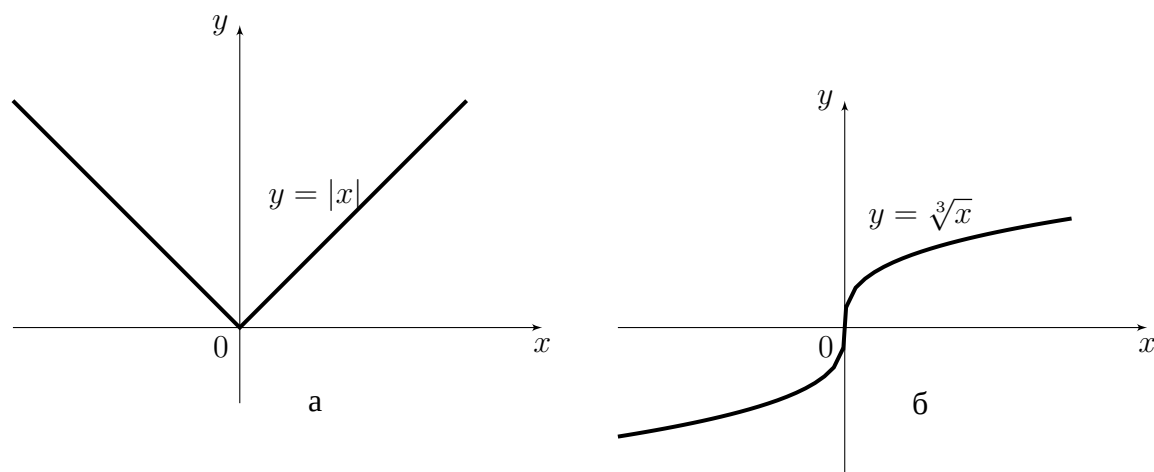


Рисунок 6.4 – Графіки функцій $y = |x|$ і $y = \sqrt[3]{x}$

Теорема 6.4 (перша достатня умова екстремуму).

Нехай x_0 – критична точка функції, яка в цій точці неперервна, і нехай існує окіл $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0 , в якому функція має похідну $f'(x)$, крім, можливо, точки x_0 , тоді:

- 1) якщо в інтервалі $(x_0 - \delta, x_0)$ похідна $f'(x) > 0$, а в інтервалі $(x_0, x_0 + \delta)$ похідна $f'(x) < 0$, то точка x_0 є точкою локального максимуму функції $f(x)$;
- 2) якщо в інтервалі $(x_0 - \delta, x_0)$ похідна $f'(x) < 0$, а в інтервалі $(x_0, x_0 + \delta)$ похідна $f'(x) > 0$, то точка x_0 є точкою локального мінімуму функції $f(x)$;
- 3) якщо в обох інтервалах $(x_0 - \delta, x_0)$ та $(x_0, x_0 + \delta)$ похідна $f'(x)$ має той самий знак, то точка x_0 не є точкою локального екстремуму функції $f(x)$. ★

ДОБРЕДЕННЯ.

Можна ще сказати так: якщо при переході зліва направо через критичну точку x_0 знак похідної $f'(x)$ змінюється з плюса на мінус, то x_0 — точка локального максимуму; якщо знак похідної $f'(x)$ змінюється з мінуса на плюс, то x_0 — точка локального мінімуму; якщо похідна не змінює знак, то в точці x_0 екстремум відсутній.

Нехай для деякого $\delta > 0$ виконуються умови: $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0) : f'(x) > 0; \forall x \in (x_0; x_0 + \delta) : f'(x) < 0$.

Тоді на інтервалі $(x_0 - \delta; x_0)$ функція $f(x)$ зростає і $f(x) < f(x_0)$ для всіх x з цього інтервалу, а на інтервалі $(x_0; x_0 + \delta)$ функція $f(x)$ спадає і $f(x) < f(x_0)$ для всіх x з цього інтервалу.

Отже, існує окіл $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ точки x_0 такий, що $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} : f(x) < f(x_0)$, а це й означає, що x_0 — точка локального максимуму функції.

Випадки 2 і 3 доводяться аналогічно. □

З теорем 6.4 і 6.3 випливає таке правило дослідження функції на екстремум: щоб знайти локальні екстремуми функції $f(x)$, треба:

- 1) знайти критичні точки функції $f(x)$. Для цього слід розв'язати рівняння $f'(x) = 0$ і серед його розв'язків вибрати тільки ті дійсні корені, які є внутрішніми точками області існування функції; знайти точки, в яких похідна $f'(x)$ не існує;
- 2) якщо критичних точок функція не має, то вона не має і екстремумів. Якщо критичні точки є, то треба дослідити знак похідної в кожному з інтервалів, на які розбивається область

існування цими критичними точками. Для цього достатньо визначити знак похідної в якій-небудь одній точці інтервалу, оскільки похідна може змінити знак лише при переході через критичну точку;

- 3) за зміною знака $f'(x)$ при переході через критичні точки зліва направо визначити точки максимумів та мінімумів і обчислити значення функції $f(x)$ в цих точках. Результати дослідження доцільно звести в таблицю.

Приклад 6.4. Знайти локальні екстремуми функції $f(x) = \sqrt[3]{x^2}e^x$.



Розв'язання. Область визначення $(-\infty; +\infty)$. Знаходимо похідну $f'(x) = \frac{2+3x}{3\sqrt[3]{x}}e^x$. Похідна $f'(x)$ дорівнює нулю при $x = -\frac{2}{3}$ і не існує при $x = 0$. Отже, $x_1 = -\frac{2}{3}$, $x_2 = 0$ – критичні точки даної функції. Складаємо таблицю (символами $\nearrow$ та $\searrow$ умовно позначається відповідно зростання і спадання функції на інтервалі). При цьому скористаємось тим, що

$$f'(-1) > 0, f'\left(-\frac{1}{3}\right) < 0, f'(1) > 0, f\left(-\frac{2}{3}\right) = \sqrt[3]{\frac{4}{9e}} \approx 0,4, f(0) = 0.$$

x	$(-\infty; -\frac{2}{3})$	$-\frac{2}{3}$	$(-\frac{2}{3}; 0)$	0	$(0; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	∞	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\approx 0,4$	$\searrow$	0	$\nearrow$
		max		min	

Отже, $x_1 = -\frac{2}{3}$ – точка локального максимуму, $y_{\max} \approx 0,4$; $x_2 = 0$ – точка локального мінімуму, $y_{\min} = 0$. ■

Зауважимо, що для визначення типу екстремуму замість визначення знаків першої похідної функції в околі критичної точки можна скористатися визначенням знаку другої похідної у самій критичній точці. Нижче наведено без доведення відповідну теорему.

Теорема 6.5 (друга достатня умова екстремуму).

Нехай x_0 – стаціонарна точка функції $f(x)$, тобто $f'(x_0) = 0$, і в околі точки x_0 існує друга неперервна похідна, причому $f''(x_0) \neq 0$. Якщо $f''(x_0) > 0$, то точка x_0 – точка локального мінімуму. А якщо $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка локального максимуму. ★

Приклад 6.5. Знайти локальні екстремуми функції $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 3$.

Розв'язання. Область визначення $(-\infty; +\infty)$. Похідна $f'(x) = x^2 - 3x + 2$. Розв'язуємо рівняння $f'(x) = 0 : x^2 - 3x + 2 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Звідси дістаємо стаціонарні точки: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Точок, в яких похідна $f'(x)$ не існує, немає. Отже, стаціонарні точки є єдиними критичними точками даної функції, тому можна знайти екстремуми за другою достатньою умовою: оскільки $f''(x) = 2x - 3$ і $f''(1) < 0$, то $x_1 = 1$ – точка локального максимуму, $y_{\max} = f(1) = -\frac{13}{6}$, $f''(2) > 0$, тому $x_2 = 2$ – точка локального мінімуму, $y_{\min} = f(2) = -\frac{7}{3}$. ■

Як бачимо, дослідження функції на екстремум за другою достатньою умовою простіше, ніж за першою. Однак ця умова застосовна до вузького класу функцій. Її не можна використати для дослідження тих критичних точок, в яких перша похідна не існує, а також до тих стаціонарних

точок, в яких друга похідна дорівнює нулю. Проте іноді той випадок, коли в стаціонарній точці друга похідна дорівнює нулю, можна дослідити, застосувавши таку теорему.

Теорема 6.6 (третья достатня умова екстремуму).

Нехай в околі стаціонарної точки x_0 існує неперервно похідна $f^{(n)}(x)$, причому $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$. Тоді

- 1) якщо n — парне і $f^{(n)}(x_0) < 0$, то $f(x)$ має у точці x_0 локальний максимум;
- 2) якщо n — парне і $f^{(n)}(x_0) > 0$, то $f(x)$ має у точці x_0 локальний мінімум;
- 3) якщо n — непарне, то $f(x)$ у точці x_0 локального екстремуму не має.



ДОВЕДЕННЯ.

Скориставшись формулою Тейлора і взявши до уваги рівності $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, дістанемо $f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n$, де c лежить між x та x_0 .

Внаслідок неперервності похідної $f^{(n)}(x)$ робимо висновок, що існує δ -оکیل точки x_0 , в якому числа $f^{(n)}(c)$ і $f^{(n)}(x_0)$ мають однакові знаки. Тому залишковий член у попередній рівності матиме знак $f^{(n)}(x_0)$, як при $x < x_0$, так і при $x > x_0$, якщо число n парне, і набуватиме двох значень, протилежних за знаком, якщо n непарне, тобто $f(x) - f(x_0) < 0$ при $f^{(n)}(x_0) < 0$ і n парному означає, що x_0 — точка локального максимуму; $f(x) - f(x_0) > 0$ при $f^{(n)}(x_0) > 0$ і n — парному означає, що x_0 — точка локального мінімуму; різниця $f(x) - f(x_0)$ при $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ і n непарному має різні знаки на інтервалах $(x_0 - \delta; x_0)$ та $(x_0; x_0 + \delta)$, тому x_0 не є екстремальною точкою для функції $f(x)$. $\square$

Зазначимо, що теорема 6.5 є окремим випадком доведеної теореми і впливає з останньої, якщо покласти $n = 2$.

Приклад 6.6. Дослідити на екстремум в точці $x = 0$ функцію $f(x) = e^x + e^{-x} + 2 \cos x$.

Розв'язання. Маємо $f'(x) = e^x - e^{-x} - 2 \sin x$, $f'(0) = 0$; $f''(x) = e^x + e^{-x} - 2 \cos x$, $f''(0) = 0$; $f'''(x) = e^x - e^{-x} + 2 \sin x$, $f'''(0) = 0$; $f^{(4)}(x) = e^x + e^{-x} + 2 \cos x$, $f^{(4)}(0) = 4 > 0$.
Таким чином, функція $f(x) = e^x + e^{-x} + 2 \cos x$ у точці $x = 0$ має локальний мінімум. $\blacksquare$

Найбільше і найменше значення функції

Розглянемо спочатку випадок, коли функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$. Як відомо, така функція досягає своїх найбільшого і найменшого значень, які називають також абсолютними екстремумами функції на цьому відрізку і позначають відповідно $M = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$, $m = \min_{a \leq x \leq b} f(x)$.

Зрозуміло, що для точки x_0 , де функція досягає найбільшого значення, може бути лише три можливості: а) $x_0 = a$, б) $x_0 \in (a; b)$, в) $x_0 = b$. Якщо $x_0 \in (a; b)$, то точку x_0 потрібно шукати серед критичних точок даної функції. Те саме можна сказати і про точку, в якій функція набуває найменшого значення.

Отже, щоб знайти найбільше (найменше) значення функції $f(x)$, яка неперервна на відрізку

$[a; b]$, треба:

- 1) знайти критичні точки функції $f(x)$, які належать інтервалу $(a; b)$;
- 2) обчислити значення функції $f(x)$ у знайдених критичних точках і точках a та b і серед цих значень вибрати найбільше (найменше).

Нехай тепер функція $f(x)$ неперервна в інтервалі $(a; b)$. Така функція може й не мати абсолютних екстремумів. Про наявність їх судять з поведінки даної функції на кінцях інтервалу (обчислюючи $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$) та значення $f(x)$ в критичних точках, які належать інтервалу $(a; b)$.

При розв'язуванні практичних задач буває наперед відомо, що функція має лише абсолютний максимум або лише абсолютний мінімум, який досягається у внутрішній точці відрізка $[a; b]$. Тоді задача зводиться до знаходження критичних точок, які належать $(a; b)$. Якщо виявиться, що така точка єдина, то вона й буде точкою абсолютного екстремуму.

Приклад 6.7. Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^4 - 8x^2$ на відрізку $[-1; 3]$. ☺

Розв'язання. Знаходимо критичні точки заданої функції. Маємо $f'(x) = 4x^3 - 16x$, $4x^3 - 16x = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 2$. Відрізок $[-1, 3]$ належать точки $x_2 = 0$ та $x_3 = 2$. Обчислюємо значення функцій в цих точках і на кінцях відрізка:

$$f(-1) = -7, f(0) = 0, f(2) = -16, f(3) = 9.$$

$$\text{Отже, } M = \max_{-1 \leq x \leq 3} f(x) = 9, m = \min_{-1 \leq x \leq 3} f(x) = -16. \quad \blacksquare$$

Приклад 6.8. Завод A потрібно з'єднати шосейною дорогою з прямолінійною залізничною колією, на якій розміщене місто B . Відстань AC від заводу до залізничної колії рівна a . Вартість перевезень одиниці ваги вантажу на одиницю відстані рівна α залізницею та β по шосе. Як провести шосе AM до залізниця, щоб вартість перевезень від заводу A до міста B була найменшою? ☺

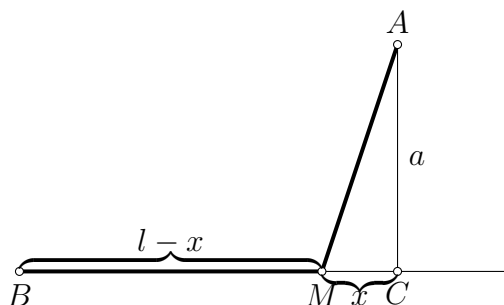


Рисунок 6.5 – Ілюстрація до прикладу 6.8

Розв'язання. Вартість перевезень одиниці вантажу при довільному положенні точки M дорівнює

$$y = \alpha(l - x) + \beta\sqrt{x^2 + a^2}, \quad 0 \leq x \leq l.$$

$$\text{Обчислимо похідну: } y'_x = \frac{\beta x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \alpha = \beta \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{\alpha}{\beta} \right).$$

Якщо $\alpha \geq \beta$, то похідна y'_x всюди від'ємна, тобто функція спадає при зростанні x від 0 до l і очевидно, що набуває свого найменшого значення при $x = l$. У цьому випадку шосе слід починати безпосередньо від міста і аж до заводу, причому

$$y_{\min} = y|_{x=l} = \beta\sqrt{l^2 + a^2}.$$

Якщо $\alpha < \beta$, то похідна має один корінь: $\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{\alpha}{\beta} \Rightarrow \beta^2 x^2 = \alpha^2 x^2 + \alpha^2 a^2$. Звідси, $x^2 = \frac{\alpha^2 a^2}{\beta^2 - \alpha^2}$
 $\Rightarrow x_0 = \frac{\alpha a}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}$.

При $x_0 \geq l$ цей корінь лежить зовні допустимого для x проміжку або на його кінці, так що в середині $y'_x \leq 0$. Тому ми приходимо до уже розглянутого випадку. Лише коли $\alpha < \beta$ і $x_0 < l$ значення x_0 визначає положення точки M між B і C , коли витрати на перевезення будуть найменшими:

$$\begin{aligned} y|_{\min} = y|_{x=x_0} &= \alpha \left(l - \frac{\alpha a}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} \right) + \beta \sqrt{\frac{\alpha^2 a^2}{\beta^2 - \alpha^2} + a^2} = \\ &= \alpha l - \frac{\alpha^2 a}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} + \beta \cdot \frac{\beta a}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} = \alpha l + a \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}. \end{aligned}$$

ТЕМА 7. ОПУКЛІСТЬ ТА ВГНУТІСТЬ ГРАФІКА ФУНКЦІЇ

Опуклість і вгнутість кривих. Точка перегину

Означення 7.1. Крива $y = f(x)$ називається опуклою на інтервалі, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать нижче її довільної дотичної на цьому інтервалі. ✓

Означення 7.2. Крива $y = f(x)$ називається увігнутою на інтервалі, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать вище довільної її дотичної на цьому інтервалі. ✓

Означення 7.3. Точкою перегину називається така точка кривої яка відділяє її опуклу частину від вгнутої. ✓

На рис. 7.1 крива $y = f(x)$ опукла на інтервалі $(a; b)$, вгнута на інтервалі $(b; c)$ і точка $B(b; f(b))$ точка перегину.

Зрозуміло, що в точці перегину дотична перетинає криву, оскільки з одного боку околу цієї точки графік кривої знаходиться під дотичною, а з другого — над дотичною.

Позначимо довільну ординату кривої через y , а дотичної — через Y . Нехай $M(x_0; y_0)$ — точка дотику, $x_0 \in (a; b)$. Тоді означення опуклості і вгнутості можна записати так: крива $y = f(x)$ опукла на $(a; b)$, якщо $\forall x \in (a; b), x \neq x_0 : y - Y < 0$; крива $y = f(x)$ вгнута на $(a; b)$, якщо $\forall x \in (a; b), x \neq x_0 : y - Y > 0$. Інтервали опуклості і вгнутості знаходять за допомогою такої теореми.

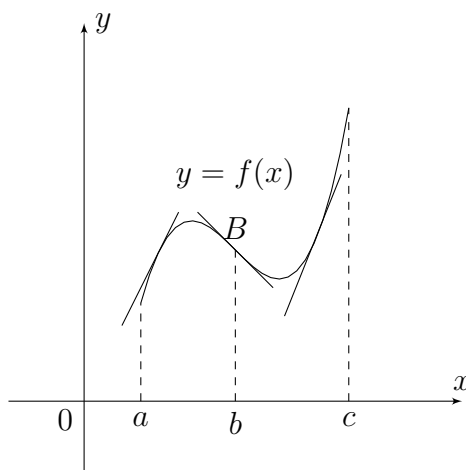


Рисунок 7.1 – Інтервали опуклості та вгнутості

Теорема 7.1 (достатня умова опуклості, вгнутості).

Нехай функція $y = f(x)$ — двічі диференційовна на (a, b) .

1. Якщо $f''(x) < 0$ для $x \in (a, b)$, то крива $y = f(x)$ опукла на (a, b) .
2. Якщо $f''(x) > 0$ для $x \in (a, b)$, то крива $y = f(x)$ вгнута на (a, b) .



ДОВЕДЕННЯ. з формули Тейлора і рівняння дотичної маємо

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)(x - x_0)^2}{2},$$

$$Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

де точка c лежить між x і x_0 . Віднімаючи почленно ці рівності, дістанемо $y - Y = \frac{f''(c)(x - x_0)^2}{2}$.

Нехай $\forall x \in (a; b) : f''(x) < 0$. Тоді $\forall x \in (a; b), x \neq x_0, y - Y < 0$, а це й означає, що крива $y = f(x)$ на $(a; b)$ опукла. Аналогічно доводиться теорема для випадку $f''(x) > 0$. □

З теореми 7.1 випливає, що в точці перегину друга похідна дорівнює нулю (якщо вона існує). Однак точками перегину кривої $y = f(x)$ можуть бути також і точки, в яких друга похідна $f''(x)$ не існує (наприклад, точка $x = 0$ кривої $f(x) = \sqrt[3]{x}$).

Точки, в яких друга похідна $f''(x)$ дорівнює нулю або не існує, називаються критичними точками другого роду функції $f(x)$. Отже, якщо x_0 — абсциса точки перегину функції $f(x)$, то x_0 є критичною точкою другого роду цієї функції. Обернене твердження неправильне.

Приклад 7.1. Функція $f(x) = x^4$ має другу похідну $f''(x) = 12x^2$, яка дорівнює нулю при $x = 0$. Але критична точка, $x = 0$ не є абсцисою точки перегину даної кривої.

Функція $y = x^3$ має критичну точку $x = 0$, яка є абсцисою точки перегину. ☺

Встановимо достатні умови існування точки перегину.

Теорема 7.2 (умови існування точки перегину).

Нехай x_0 — критична точка другого роду функції $f(x)$. Якщо при переході через точку x_0 похідна $f''(x)$ змінює знак, то точка $(x_0, f(x_0))$ є точкою перегину графіка функції $f(x)$. ★

ДОБРЕДЕННЯ.

Нехай, наприклад, існує δ -окол точки x_0 такий, що $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0) : f''(x) < 0; \forall x \in (x_0; x_0 + \delta) : f''(x) > 0$. Тоді за попередньою теоремою крива опукла на інтервалі $(x_0 - \delta; x_0)$ і вгнута на інтервалі $(x_0; x_0 + \delta)$, тобто точка $(x_0; f(x_0))$ — точка перегину.

Якщо похідна $f''(x)$ не змінює знак в δ -околі точки x_0 , то крива буде в цьому околі або опуклою (при $f''(x) < 0$), або вгнутою (при $f''(x) > 0$). □

Отже, щоб знайти точки перегину кривої, треба знайти критичні точки другого роду і дослідити зміну знака другої похідної при переході через ці точки.

Приклад 7.2. Знайти інтервали опуклості і вгнутості та точки перегину кривих:
а) $f(x) = x^5 - x + 2$; б) $f(x) = 2 + (x - 5)^{5/3}$. ☺

Розв'язання. а) Розглянемо функцію $f(x) = x^5 - x + 2$. Область визначення $D(f) = (-\infty, +\infty)$.

Обчислимо першу похідну: $f'(x) = 5x^4 - 1$.

Обчислимо другу похідну: $f''(x) = 20x^3$.

Прирівняємо її до нуля: $20x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$.

Отже, $x = 0$ — критична точка другого роду. Якщо $x \in (-\infty, 0)$, то $f'(x) < 0$ — крива опукла. А якщо $x \in (0, +\infty)$, то $f''(x) > 0$ — крива вгнута. Отже, точка $(0, 2)$ — точка перегину кривої.

б) Область визначення $(-\infty, +\infty)$. Оскільки $f''(x) = \frac{10}{9\sqrt[3]{x-5}} \neq 0$ і не існує при $x = 5$, то єдиною критичною точкою другого роду є точка $x = 5$. Маємо $\forall x \in (-\infty; 5) : f''(x) < 0; \forall x \in (5; +\infty) : f''(x) > 0$. Тому крива опукла на інтервалі $(-\infty; 5)$ і вгнута на інтервалі $(5; +\infty)$; точка $(5; 2)$ — точка перегину, б

Асимптоти кривої

Означення 7.4. Пряма l називається асимптотою кривої, якщо відстань δ від змінної точки M кривої до цієї прямої прямує до нуля, коли точка M , рухаючись по кривій, віддаляється на нескінченність. ✓

На (рис. 7.2) показано **вертикальну** (а), **горизонтальну** (б) і **похилу** (в) асимптоти. З означення асимптоти випливає, що для існування вертикальної асимптоти $x = x_0$ необхідно і достатньо, щоб $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \infty$, або $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \infty$, або $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$. Дійсно, в цьому випадку (рис. 7.2,

а) $\delta = \sqrt{(x - x_0)^2 + (f(x) - f(x_0))^2} = |x - x_0| \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_0$. Рівняння похилої асимптоти будемо шукати у вигляді

$$y = kx + b. \quad (7.1)$$

Знайдемо k та b . З рис. 7.2, в маємо $\delta = MP$, $MN = \frac{MP}{\cos \varphi} = \frac{\delta}{\cos \varphi}$, де $\angle NMP = \varphi$, тому, якщо $\delta \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, то $MN \rightarrow 0$, і навпаки. Але $MN = MQ - NQ = f(x) - (kx + b)$, тому

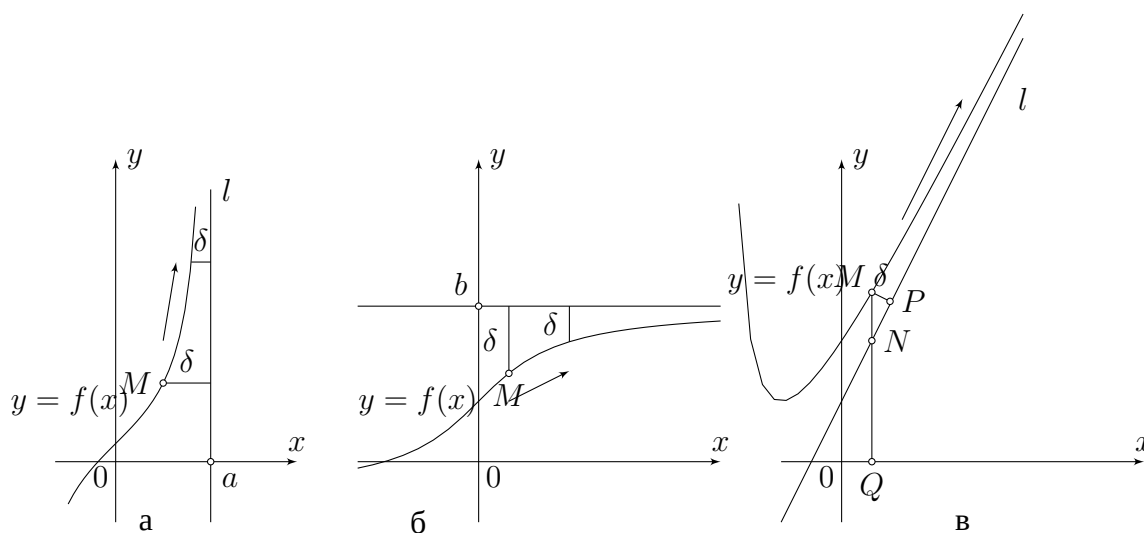


Рисунок 7.2 – Види асимптот

якщо при $x \rightarrow \infty$ пряма $y = kx + b$ є асимптотою, то

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx - b) = 0. \quad (7.2)$$

Тому

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right) = 0,$$

звідки

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}. \quad (7.3)$$

Знайшовши k , для b дістанемо

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx). \quad (7.4)$$

Отже, якщо існує похила асимптота, то k та b знаходяться за формулами (7.3) і (7.4). Навпаки, якщо існують скінченні границі (7.3) і (7.4), то виконується рівність (7.2), тобто пряма (7.1) є похилою асимптотою.

Зауваження 7.1. Якщо хоча б одна з границь у (7.3) або (7.4) не існує або дорівнює нескінченності, то крива не має похилої асимптоти.

Зауваження 7.2. Якщо $k = 0$, то $b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, тобто $y = b$ — рівняння горизонтальної асимптоти.

Зауваження 7.3. Асимптоти кривої $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ і $x \rightarrow -\infty$ можуть бути різними. Тому при знаходженні асимптот границі у формулі (7.3) або (7.4) необхідно обчислювати при $x \rightarrow +\infty$ і при $x \rightarrow -\infty$.

Приклад 7.3. Знайти асимптоти кривої $y = \frac{2x^2+5x+1}{x}$.**Розв'язання.** Функція $f(x)$ не визначена у точці $x = 0$. Тоді:

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{2x^2 + 5x + 1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +0} \frac{2x^2 + 5x + 1}{x} = +\infty.$$

Отже, $x = 0$ – вертикальна асимптота.

Знайдемо похилу асимптоту:

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 5x + 1}{x^2} = 2, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 + 5x + 1}{x} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x + 1}{x} = 5.$$

Пряма $y = 2x + 5$ є похилою асимптотою даної кривої при $x \rightarrow +\infty$. Подібно доводиться, що це рівняння є також рівняння асимптоти при $x \rightarrow -\infty$. Отже, є дві асимптоти $x = 0$ і $y = 2x + 5$. ■**Загальна схема дослідження функції та побудова її графіка**

Щоб дослідити функцію та побудувати її графік треба:

- 1) знайти область визначення функції та область значень;
- 2) знайти (якщо це можливо) точки перетину графіка з координатними осями ($x = 0$ або $y = 0$);
- 3) дослідити функцію на періодичність, парність і непарність;
- 4) знайти точки розриву та дослідити їх;
- 5) знайти інтервали монотонності, точки локальних екстремумів та значення функції в них;
- 6) знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину;
- 7) знайти асимптоти кривої;
- 8) побудувати графік функції, враховуючи дослідження проведені у попередніх пунктах.

Якщо графік виявиться не зовсім зрозумілим, то потрібно додатково знайти кілька точок графіка, обчисливши значення функції при певних значеннях аргументу.

Якщо функція — періодична з періодом T , то досить побудувати її графік на відрізку $[0, T]$, після чого повторити цей графік на проміжках $[nT, (n+1)T]$, $n = 1, 2, \dots$ Якщо функція — парна (або непарна), то досить побудувати її графік для $x \geq 0$, а потім відобразити його симетрично відносно осі Oy (або відносно початку координат).**Приклад 7.4.** Дослідити функцію $y = \frac{x^3}{1-x^2}$. ☺**Розв'язання.** 1. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.2. $x = 0 \Rightarrow y = 0$; $y = 0 \Rightarrow x = 0$. Отже, маємо точку $O(0, 0)$.

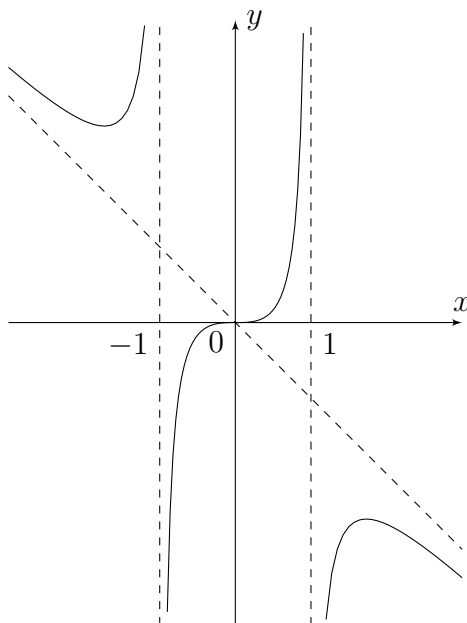


Рисунок 7.3 – Ілюстрація до прикладу 7.4

3. Функція неперіодична. $f(-x) = \frac{(-x)^3}{1-(-x)^2} = -\frac{x^3}{1-x^2} = -f(x)$. Функція – непарна, тому досліджуватимемо її лише для $x \geq 0$.

4. Функція $f(x)$ у точці $x = 1$ має розрив другого роду:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^3}{1-x^2} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^3}{1-x^2} = -\infty.$$

5. Обчислимо першу похідну: $y' = \frac{3x^2(1-x^2)+x^3 \cdot 2x}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2} = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{3}$. y' не існує у точках $x = \pm 1$.

x	$(0, 1)$	1	$(1, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
y'	+	∞	+	0	–
y	$\nearrow$	∞	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$

6. Обчислимо другу похідну:

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(6x - 4x^3)(1-x^2)^2 - x^2(3-x^2)2(1-x^2)(-2x)}{(1-x^2)^4} = \\ &= \frac{6x - 4x^3 - 6x^3 + 4x^5 + 12x^3 - 4x^5}{(1-x^2)^3} = \frac{6x + 2x^3}{(1-x^2)^3} = \frac{2x(x^2 + 3)}{(1-x^2)^3} = 0 \Rightarrow x = 0. \end{aligned}$$

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y''	+	∞	–	0	+	∞	–
y	$\cup$	∞	$\cap$	т. перегину	$\cup$	∞	$\cap$

7. $x = 1$ – вертикальна асимптота.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{(1-x^2)x} = -1; \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3}{1-x^2} - (-1)x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{1-x^2} = 0.$$

Отже, $y = -x$ – похила асимптота.

На основі виконаних досліджень властивостей функції можна побудувати її графік (рис. 7.3) ■

Диференціальне числення функцій декількох змінних

ТЕМА 8. ВСТУП ДО АНАЛІЗУ ФУНКЦІЙ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ

Поняття функції двох змінних

Нехай $D \subset \mathbb{R}^2$ — довільна підмножина.

Означення 8.1. Якщо всім $(x, y) \in D$ за певним законом відповідає число $z \in \mathbb{R}$, то кажуть, що на множині D визначено функцію z від двох змінних x і y та записують $z = f(x, y)$ або $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. ✓

Змінну z називають залежною змінною (функцією), а змінні x та y — незалежними змінними (аргументами).

Значення функції $z = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$ позначають $z_0 = f(x_0, y_0)$ або $z_0 = f(M_0)$, або $z = z|_{M_0}$.

Поняття функції двох змінних легко узагальнюється для довільного числа змінних. Ми у подальшому здебільшого розглядатимемо випадок двох та трьох змінних. Це обумовлено тим, що ми проживаємо у тривимірному просторі. І більшість технічних застосувань базується саме на тривимірній геометрії.

Функції двох змінних непрямо вивчаються ще у школі, але про це не згадується. Наприклад, формула для площі трикутника $S = \frac{1}{2}a \cdot h$, де a — сторона, h — висота. У цій формулі кожній парі (a, h) відповідає єдине значення площі, тобто S — функція двох змінних і $S = f(a, h)$.

Іншим прикладом може бути фізичний закон Джоуля-Ленца для ділянки кола з постійним струмом, суть якого задається формулою $Q = I^2 R t$, де Q — енергія, що виділяється в колі під час протікання постійного струму, I — сила струму, R — опір ділянки кола, t — час. У цій формулі енергія Q є функцією від трьох змінних, тобто $Q = f(I, R, t)$.

Зауважимо, що хоча людина живе та переміщується у тривимірному просторі на практиці часто зустрічаються функції від чотирьох і більшого числа змінних, в тому числі і від нескінченного числа змінних. Прикладом функції чотирьох змінних може слугувати формула для обчислення визначника другого порядку: $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$. Ми вивчатимемо тільки скінченновимірний випадок. Нескінченновимірний випадок у курсі вищої математики не розглядається, хоча це не

означає, що такі функції не мають жодного практичного значення. Зокрема, вони зустрічаються у квантовій механіці.

Множину значень функції $z = f(x, y)$ позначають $E(f)$ або E і називають областю значень. Множину значень (x, y) , для яких функція $z = f(x, y)$ визначена, називають областю визначення цієї функції. Позначають $D(f)$ або D .

Означення 8.2. Графіком функції $z = f(x, y)$ у прямокутній системі координат $Oxyz$ називають геометричне місце точок $M(x, y, f(x, y))$, проекції яких (x, y) належать області визначення функції, тобто $(x, y) \in D$.

Зауважимо, що графіком функції двох змінних в загальному випадку є деяка поверхня у тривимірному просторі.

Як відомо, область визначення для функції однієї змінної здебільшого є відрізком або інтервалом, можливо, з виклотими окремими точками. Для деяких функцій однієї змінної область визначення може складатися з декількох точок. Натомість у двовимірному випадку область визначення має значно складнішу геометричну природу. Це обумовлено появою додаткового виміру. Наведемо декілька прикладів на відшукування області визначення.

Приклад 8.1. Знайти область визначення функції $z = \sqrt{x - y}$. ☺

Розв'язання. Як відомо, квадратний корінь визначений для невід'ємних дійсних чисел. Тому отримуємо таку умову $x - y \geq 0$. Звідси, $x \geq y$. Тобто $D(f) = \{(x, y) : x \geq y\}$.

Щоб зобразити графічно цю область, спершу зображаємо пряму $y = x$. Вона роздіє координатну площину на дві півплощини. Щоб визначити, яка півплощина зображає область визначення, беремо довільну точку, що не лежить на прямій $y = x$. Наприклад, точку $(1, 2)$. Після цього перевіряємо, чи справджується для неї нерівність $x \geq y$. Якщо справджується, то півплощина, у якій лежить вибрана точка задає область визначення. Для точки $(1, 2)$ виконується $1 < 2$, тобто протилежна нерівність. Отже, ця точка і відповідна півплощина не належать області визначення функції $z = \sqrt{x - y}$. Тому областю визначення є інша півплощина, яку й заштриховуємо. Графічно це виглядає так: ■

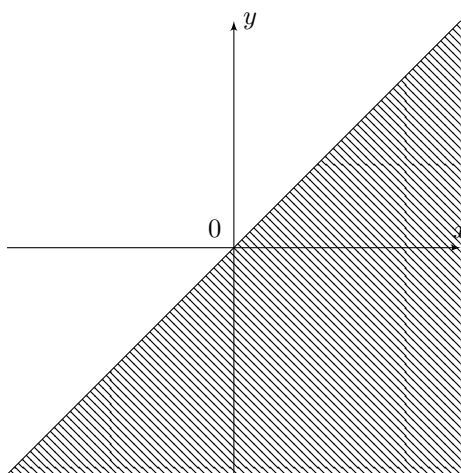


Рисунок 8.1 – Область визначення функції $z = \sqrt{x - y}$

Приклад 8.2. Знайти область визначення функції $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} +$

$$\sqrt{9 - x^2 - y^2}.$$



Розв'язання. У попередньому прикладі було зазначено, що квадратний корінь визначений для невід'ємних дійсних чисел. Тільки тут ми маємо суму коренів, тому отримаємо дві умови – по одній на кожний підкореневий вираз: $x^2 + y^2 - 1 \geq 0$ та $9 - x^2 - y^2 \geq 0$. Звідси, $x^2 + y^2 \geq 1$ та $x^2 + y^2 \leq 9$. Тобто $D(f) = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$.

Щоб зобразити графічно цю область, спершу з'ясуємо тип кривих $x^2 + y^2 = 1$ та $x^2 + y^2 = 9 = 3^2$. Легко бачити, що кожне цих рівнянь є рівнянням кола з центром у початку координат та радіусами 1 та 3 відповідно. Взявши точку $(1, 1)$, легко переконалися, що для неї виконується нерівність $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$, бо насправді у цій точці $x^2 + y^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. Тобто областю визначення є множина точок, які містяться між двома колами радіусами 1 та 3. Інакше кажучи, областю визначення є кільце. Графічно це виглядає так:

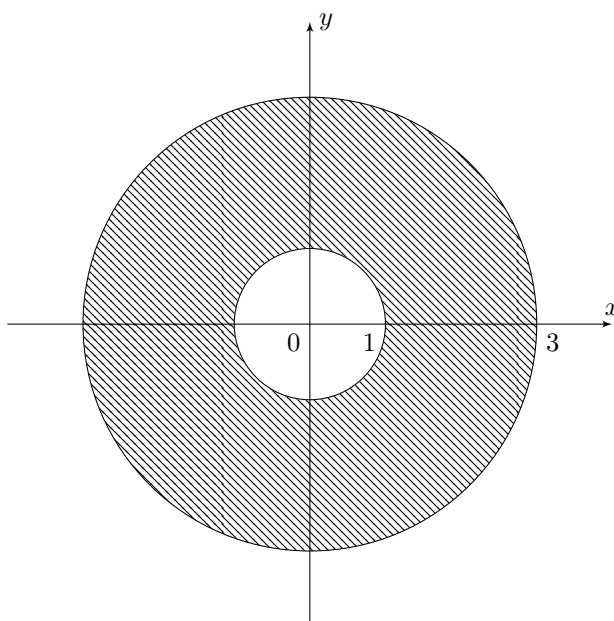


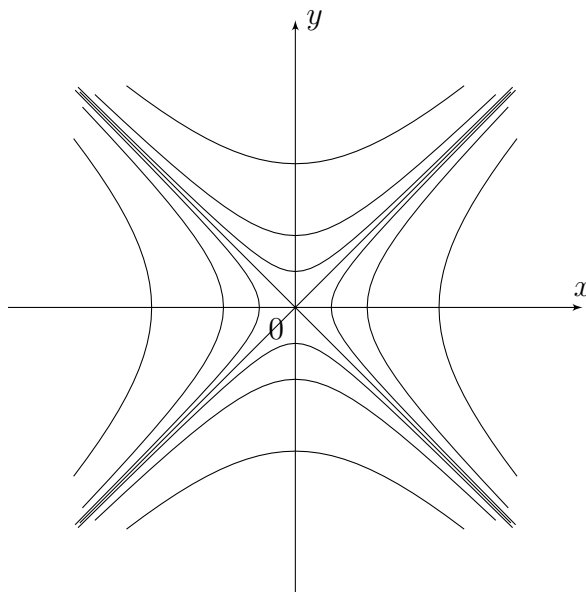
Рисунок 8.2 – Область визначення функції $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

Означення 8.3. Криву $f(x, y) = C$, де C – довільне фіксоване число, взяте з множини значень функції $f(x, y)$, називають лінією рівня (ізокривою функції). ✓

Приклад 8.3. Побудувати лінії рівня функції $z = x^2 - y^2$. ☺

Розв'язання. Для побудови лінії рівня скористаємося її означенням. Вибиратимемо довільним чином значення сталі C і на його основі будуватимемо рівняння відповідної кривої $f(x, y) = C$.

Візьмемо спершу $C = 0$. Тоді $x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ y=-x \end{cases}$. Намалюємо ці дві прямі. Після цього візьмемо $C = 1$. Тоді $x^2 - y^2 = 1$ – рівняння гіперболи. Далі беремо $C = 2$. Аналогічно отримуємо $x^2 - y^2 = 2 \Leftrightarrow (\frac{x}{\sqrt{2}})^2 - (\frac{y}{\sqrt{2}})^2 = 1$ – рівняння гіперболи. Легко бачити, що усі лінії рівня при решті значень C також будуть гіперболами з асимптотами $y = x$ та $y = -x$. Відповідні лінії рівня побудовано на рис. 8.3

Рисунок 8.3 – Лінії рівня функції $z = x^2 - y^2$

Границя функції двох змінних

Означення 8.4. Множина всіх точок $M(x, y) \in \mathbb{R}^2$, координати яких задовольняють нерівність $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$, називається δ -околом точки $M_0(x_0, y_0)$.

Тобто насправді δ -окол — це всі внутрішні точки круга з центром у точці $M_0(x_0, y_0)$ та радіусом δ . Нехай $\{M_n\}$ — послідовність точок із $\mathbb{R}^2$, тобто $M_n = (x_n, y_n)$.

Означення 8.5. Послідовність точок $M_n(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ називається збіжною до точки $M_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $N = N(\varepsilon) > 0$, що для всіх $n > N$ виконується нерівність $\sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} < \varepsilon$. При цьому точку M_0 називають границею послідовності $\{M_n\}$ і це записують так: $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = M_0$ або $M_n \rightarrow M_0$ при $n \rightarrow \infty$. ✓

Означення 8.6. Число A називають границею функції $z = f(M)$ у точці M_0 , якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує $\delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх точок $M(x, y) \in D(f)$ таких, що $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$, справджується $|f(M) - A| < \varepsilon$. ✓

Користуючись даним означенням границі функції двох змінних, основні теореми про границі для функцій однієї змінної (границя суми, різниці, добутку, частки, границя, теорема про двох міліціонерів) можна перенести на двовимірний випадок. Усі вони не зазнають істотних змін у формулюванні. Усі методи, які використовувалися у одновимірному випадку для обчислення границь, також можна використовувати у двовимірному.

Теорема 8.1.

Нехай функції $f(M)$ і $g(M)$ визначені на одній і тій самій множині D і мають в точці M_0 границі B і C . Тоді функції $f(M) \pm g(M)$, $f(M) \cdot g(M)$, $\frac{f(M)}{g(M)}$, (остання за умови, що

$g(M) \neq 0$) мають в точці M_0 границі, які відповідно дорівнюють $B \pm C$, $B \cdot C$, $\frac{B}{C}$ (остання, якщо $C \neq 0$). ★

Означення 8.7. Функція $z = f(M)$ називається нескінченно малою в точці M_0 (або при $M \rightarrow M_0$), якщо $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = 0$. ✓

Якщо функція $z = f(M)$ має в точці M границю, яка дорівнює A , то функція $\alpha(M) = f(M) - A$ є нескінченно малою в точці M_0 , тому що $\lim_{M \rightarrow M_0} \alpha(M) = \lim_{M \rightarrow M_0} (f(M) - A) = 0$. Звідси випливає, що функція $f(M)$ в околі точки M_0 відрізняється від границі A на нескінченно малу функцію.

Приклад 8.4. Обчислити границю: ☺

Розв'язання.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{|x| + |y|}{\sqrt{|x| + |y| + 7} - \sqrt{7}} = \left| \frac{\rho = |x| + |y|}{\rho \rightarrow 0} \right| = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho}{\sqrt{\rho + 7} - \sqrt{7}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho(\sqrt{\rho + 7} + \sqrt{7})}{\rho} = 2\sqrt{7}$$

Зауважимо, що у двовимірному випадку вже не можна ввести поняття ліво- та правосторонньої границі, бо у означенні границі функції від двох змінних відповідна нерівність має справджуватися для всіх (x, y) з деякого круга радіусом δ та з центром у точці (x_0, y_0) . Тобто поняття прямування справа та зліва для круга в деякій мірі втрачає сенс.

Як і у одновимірному випадку, тут також є функції, для яких границя не існує. При цьому для доведення відсутності границі функції у точці раніше ми здебільшого обчислювали ліво- та правосторонню границю та показували, що вони не рівні між собою. Оскільки на площині при обчисленні границі функції двох змінних ми можемо брати точки, де завгодно у крузі, то у цьому випадку для доведення відсутності границі у функції найчастіше вибирають довільні дві прямі виду $y = kx + b$, що проходять через точку (x_0, y_0) та обчислюють границю функції на цих прямих. Якщо на двох прямих у нас отримані різні границі, то це свідчить, що ця функція не має границі у точці (x_0, y_0) . Зауважимо, що замість прямих можна обирати довільні неперервні криві, що проходять через точку (x_0, y_0) .

Приклад 8.5. Довести, що функція $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$ не має границі у точці $(0, 0)$. ☹

Розв'язання. Використовуючи математичну символіку, це завдання можна записати так:

$$\nexists \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}.$$

Як вище задувалося, необхідно вибрати дві криві, які проходять через точку $(0, 0)$ і довести, що на кожній з них інакша границя у точці $(0, 0)$. Візьмемо спершу $y = 2x$. Тоді

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ y=2x}} \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4x^2}{x^2 - 4x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2}{-3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3}.$$

Візьмемо тепер $y = 3x$. Тоді

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ y=3x}} \frac{x^2 + 9x^2}{x^2 - 9x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x^2}{-8x^2} = -\frac{10}{8} = -\frac{5}{4}.$$

Оскільки, $-\frac{5}{3} \neq -\frac{5}{4}$, то це означає, що не існує границі функції $f(x, y)$ у точці $(0, 0)$. ■

Неперервність та геометрія багатовимірнього простору

Означення 8.8. Функція $z = f(x, y)$ називається неперервною у точці $M_0(x_0, y_0)$, якщо

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Точки, в яких функція неперервна, називаються **точками неперервності**, а в яких неперервність порушується — **точками розриву** функції. Як видно, з означення для неперервної функції двох змінних границя в точці зводиться до обчислення значення функції у цій точці.

Умові неперервності можна надати іншого вигляду. Позначимо $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $\Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0)$. Величини Δx , Δy називають приростами аргументів x і y , а Δz — повним приростом функції $f(x, y)$ у точці (x_0, y_0) . З означення неперервності випливає, що

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (f(x, y) - f(x_0, y_0)) = 0$$

або

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \Delta z = 0.$$

З отриманої рівності випливає ще одне означення неперервності.

Означення 8.9. Функція $f(x, y)$ називається неперервною в точці $M_0(x_0, y_0)$, якщо повний приріст її в цій точці прямує до нуля, коли прирости її аргументів x та y прямують до нуля. ✓

Означення 8.10. Функція $f(x, y)$ називається неперервною на множині D , якщо вона неперервна в кожній точці (x, y) цієї множини. ✓

Приклад 8.6. Обчислити границю:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow \pi}} (x^2 \sin y + y^2) = 1 \sin \pi + \pi^2 = \pi^2.$$

Означення 8.11. Множина точок D на площині називається зв'язною, якщо будь-які дві її точки можна сполучити неперервною лінією, яка цілком лежить у D . ✓

Наприклад, кільце — зв'язна множина, а множина, що складається з двох неперетинних кілець, не є зв'язною.

Означення 8.12. Точка M називається внутрішньою точкою множини D , якщо існує окіл цієї точки, який цілком міститься у D . ✓

Означення 8.13. Множина D називається відкритою, якщо кожна її точка — внутрішня. ✓

Означення 8.14. Область (відкритою областю) називають відкриту зв'язну множину. ✓

Означення 8.15. Точку M називають межевою точкою множини D , якщо будь-який її окіл містить точки, що належать D і точки, що не належать D . Множину всіх межевих точок називають межею області D .

Означення 8.16. Область разом із своєю межею називається замкненою.

Означення 8.17. Якщо існує круг скінченного радіуса, в якому повністю міститься область, то вона називається обмеженою. ✓

Властивості неперервних функцій в замкненій обмеженій області:

1. Якщо функція $z = f(x, y)$ — неперервна у замкненій обмеженій області, то вона обмежена у цій області.
2. Якщо функція $z = f(x, y)$ — неперервна у замкненій обмеженій області, то існують точки в цій області, в яких функція набуває свого найбільшого і найменшого значення.
3. Якщо функція $z = f(x, y)$ неперервна у замкненій обмеженій області $D \subset \mathbb{R}^2$ і $f(x_1, y_1) < c < f(x_2, y_2)$, де $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$, то існує точка (x_0, y_0) така, що $f(x_0, y_0) = c$.

ТЕМА 9. ЧАСТИННІ ПОХІДНІ

Частинні похідні функції декількох змінних.

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі точки $M(x; y)$. Надамо змінній x приросту Δx , залишаючи змінну y незмінною, так, щоб точка $M_1(x + \Delta x; y)$ належала заданому околу.

Величина $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ називається **частинним приростом функції $f(x, y)$ по змінній x** . Аналогічно вводиться **частинний приріст $\Delta_y z$ функції по змінній y** : $\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

Означення 9.1. Якщо існує границя $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$, то вона називається частинною похідною функції $f(x, y)$ в точці $M(x; y)$ по змінній x і позначається одним із таких символів: z'_x , f'_x , $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $f'_x(x_0, y_0)$, $f'_x|_{M_0}$ — частинні похідні по x в точці $M_0(x_0; y_0)$. ✓

Аналогічно частинна похідна функції $f(x, y)$ по y визначається як границя

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

і позначається одним із символів: z'_y , f'_y , $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$. Згідно з означенням, при знаходженні частинної похідної z'_x обчислюють звичайну похідну функції однієї змінної x , вважаючи змінну y сталою, а при знаходженні похідної z'_y сталою вважається змінна x . Тому частинні похідні знаходять за формулами і правилами обчислення похідних функцій однієї змінної.

Частинна похідна z'_x (або z'_y) характеризує швидкість зміни функції в напрямі осі Ox (або Oy).

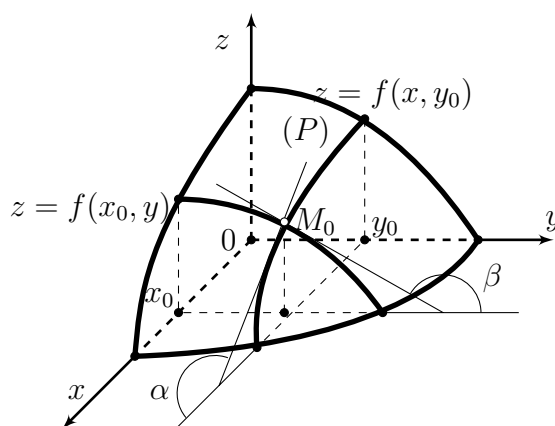


Рисунок 9.1 – Геометричний зміст частинних похідних

З'ясуємо **геометричний зміст частинних похідних функцій двох змінних**. Графіком функції $z = f(x, y)$ є деяка поверхня (рис. 9.1). Графіком функції $z = f(x, y_0)$ є лінія перетину цієї поверхні з площиною $y = y_0$. Виходячи з геометричного змісту похідної для функції однієї змінної, дістанемо, що $f'_x(x_0, y_0) = \tan \alpha$, де α — кут між віссю Ox і дотичною, проведеною до кривої $z = f(x, y_0)$ в точці $M_0(x_0; y_0; f(x_0, y_0))$. Аналогічно $f'_y(x_0, y_0) = \tan \beta$.

Для функції $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n змінних можна знайти n частинних похідних: $\frac{\partial u}{\partial x_1}$, $\frac{\partial u}{\partial x_2}$, $\dots$, $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $\dots$, $\frac{\partial u}{\partial x_n}$, де $\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_i} u}{\Delta x_i}$, $\Delta_{x_i} u = f(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Щоб знайти частинну похідну $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, треба взяти звичайну похідну функції $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по змінній x_i , вважаючи решту змінних сталими.

Приклад 9.1. Знайти частинні похідні функцій: а) $z = x^2 + y^3 - 2xy^2 + 5x - 1$; б) $u = x^2 z + \arctg \frac{x}{y}$. ☺

Розв'язання. Маємо: а) $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y^2 + 5$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 4xy$; б) $\frac{\partial u}{\partial x} = 2xz + \frac{y}{x^2 + y^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{x^2 + y^2}$; $\frac{\partial u}{\partial z} = x^2$. ■

Якщо функція $z = f(x, y)$ задана в області D і має частинні похідні z'_x , z'_y в усіх точках $(x; y) \in D$, то ці похідні можна розглядати як нові функції, задані в області D . Тому має сенс

питання про існування частинних похідних від цих функцій по якій-небудь змінній в точці $(x, y) \in D$.

Означення 9.2. Якщо існує частинна похідна по x від функції $\frac{\partial f}{\partial x}$, то її називають частинною похідною другого порядку від функції $f(x, y)$ по змінній x і позначають $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ або f''_{xx} . Таким чином, за означенням $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$ або $f''_{xx} = (f'_x)'_x$. ✓

Означення 9.3. Якщо існує частинна похідна від функції $\frac{\partial f}{\partial x}$ по змінній y , то цю похідну називають мішаною частинною похідною другого порядку від функції $f(x, y)$ і позначають $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ або f''_{xy} . ✓

Отже, за означенням $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$ або $f''_{xy} = (f'_x)'_y$.

Для функції двох змінних $f(x, y)$ можна розглядати чотири похідні другого порядку: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Якщо існують частинні похідні від частинних похідних другого порядку, то їх називають **частинними похідними третього порядку** функції $f(x, y)$, їх є вісім:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}, \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}, \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}.$$

Природно поставити запитання: чи залежить результат диференціювання від порядку диференціювання? Інакше кажучи, чи будуть рівними між собою мішані похідні, якщо вони взяті по одних і тих самих змінних, одне й те саме число разів, але в різному порядку? Наприклад, чи дорівнюють одна одній похідні

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ і } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \text{ або } \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial z \partial x} \text{ і } \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y \partial z}?$$

У загальному випадку відповідь на це запитання негативна. Проте справедлива теорема, яку вперше довів К. Г. Шварц.

Теорема 9.1 (про рівність мішаних похідних).

Якщо функція $z = f(x, y)$ визначена разом із своїми похідними $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ в деякому околі точки $M_0(x_0; y_0)$ причому похідні f''_{xy} та f''_{yx} неперервні в точці M_0 , то в цій точці $f''_{xy}|_{M_0} = f''_{yx}|_{M_0}$. ★

Аналогічна теорема справедлива для будь-яких неперервних мішаних похідних, які відрізняються між собою лише порядком диференціювання.

Приклад 9.2. Знайти похідні другого порядку від функції $z = x^3 - x^2y + y^2$.

Розв'язання. Маємо: $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 2xy$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x - 2y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -x^2 + 2y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2x$. ■

Приклад 9.3. Нехай $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$
Переконатись, що $f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$. ☺

Розв'язання. Знаходимо

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \frac{y(x^4 - y^4 + 4x^2y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

оскільки

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0.$$

Звідси $\frac{\partial f(0,y)}{\partial x} = -y$, $\frac{\partial^2 f(0,y)}{\partial x \partial y} = -1$, зокрема $\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} = -1$.

Аналогічно обчислюємо $\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x} = 1$. Отже, для даної функції $f''_{xy}(0,0) \neq f''_{yx}(0,0)$, тобто результат диференціювання залежить від порядку диференціювання. Це пов'язано з тим, що похідні f''_{xy} і f''_{yx} в точці $(0;0)$ розривні. ■

Диференційовність функції

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі точки $M(x, y)$. Виберемо прирости Δx і Δy так, щоб точка $M_1(x + \Delta x; y + \Delta y)$ належала розглядуваному околу і знайдемо повний приріст функції в точці $M(x; y)$:

$$\Delta z = f(x + \Delta, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Визначення 9.4. Функція $f(x, y)$ називається диференційовною в точці M , якщо її повний приріст в цій точці можна подати у вигляді

$$\Delta z = A\Delta + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y, \quad (9.1)$$

де A та B — дійсні числа, які не залежать від Δx та Δy , $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y)$, $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y)$ — нескінченно малі при $\Delta x \rightarrow 0$ і $\Delta y \rightarrow 0$ функції. ✓

Відомо, що коли функція однієї змінної диференційовна в деякій точці, то вона в цій точці неперервна і має похідну. Перенесемо ці властивості на функції двох змінних.

Теорема 9.2 (неперервність диференційовної функції).

Якщо функція $z = f(M)$ диференційовна в точці M , то вона неперервна в цій точці. ★

Розведення.

Якщо функція диференційовна в точці M , то з рівності (9.1) випливає, що $\Delta z = 0$. Це означає, що функція неперервна в точці □

Теорема 9.3 (існування частинних похідних).

Якщо функція $z = f(M)$ диференційовна в точці $M(x; y)$, то вона має в цій точці похідні $f'_x = f'_x(x, y)$ та $f'_y = f'_y(x, y)$ і $\Delta z = f'_x \Delta x + f'_y \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y$.

ДОВЕДЕННЯ.

Оскільки $f(x, y)$ диференційовна в точці $M(x, y)$, то справджується рівність (9.1). Поклавши в ній $\Delta y = 0$, $\Delta x \neq 0$, дістанемо $\Delta_x z = A\Delta x + \alpha(\Delta x, 0)\Delta x$. Поділимо обидві частини цієї рівності на Δx і перейдемо до границі при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (A + \alpha(\Delta x, 0)) = A.$$

Отже, в точці M існує частинна похідна $f'_x(x, y) = A$. Аналогічно доводиться, що в точці M існує частинна похідна $f'_y(x, y) = B$. $\square$

Твердження, обернені до теорем 9.2 і 9.3, взагалі кажучи, неправильні, тобто із неперервності функції $f(x, y)$ або існування її частинних похідних ще не випливає диференційовність. Наприклад, функція $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ неперервна в точці $(0; 0)$, але не диференційовна в цій точці. Справді, границі

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(0 + \Delta x)^2 + 0} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

не існує, тому не існує й похідної $f'_x(0, 0)$. Аналогічно впевнюємося, що не існує також похідної $f'_y(0, 0)$. Оскільки задана функція в точці $(0; 0)$ не має частинних похідних, то вона в цій точці не диференційовна.

Більше того, відомі приклади функцій, які є неперервними в деяких точках і мають в них частинні похідні, але не є в цих точках диференційовними.

Теорема 9.4 (достатні умови диференційовності).

Якщо функція $f(x, y)$ має частинні похідні в деякому околі точки M і ці похідні неперервні в точці M , то функція $f(x, y)$ диференційовна в точці M .

Надамо змінним x і y приростів $\Delta x \neq 0$, $\Delta y \neq 0$ таких, щоб точка $(x + \Delta x; y + \Delta y)$ належала даному околу точки M . Повний приріст функції $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ запишемо у вигляді

$$\Delta z = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]. \quad (9.2)$$

Вираз у перших квадратних дужках рівності (9.2) можна розглядати як приріст функції однієї змінної x , а в других — як приріст функції змінної y . Оскільки дана функція має частинні похідні, то за теоремою Лагранжа дістанемо:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = f'_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) \Delta x, \quad 0 < \theta_1 < 1,$$

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = f'_y(x, y + \theta_2 \Delta y) \Delta y, \quad 0 < \theta_2 < 1.$$

Похідні f'_x та f'_y неперервні в точці M , тому

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f'_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) = f'_x(x, y),$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f'_y(x, y + \theta_2 \Delta y) = f'_y(x, y).$$

Звідси випливає, що

$$f'_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) = f'_x(x, y) + \alpha(\Delta x, \Delta y),$$

$$f'_y(x, y + \theta_2 \Delta y) = f'_y(x, y) + \beta(\Delta x, \Delta y),$$

де $\alpha(\Delta x, \Delta y)$, $\beta(\Delta x, \Delta y)$ — нескінченно малі функції при $\Delta x \rightarrow 0$ і $\Delta y \rightarrow 0$.

Підставляючи ці вирази у рівність (9.2), знаходимо

$$\Delta z = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y,$$

а це й означає, що функція $f(x, y)$ диференційовна в точці M .

З попередніх теорем випливає такий наслідок.

Наслідок 9.1.

Для того, щоб функція $f(x, y)$ була диференційовною в точці, необхідно, щоб вона мала в цій точці частинні похідні, і достатньо, щоб вона мала в цій точці неперервні частинні похідні. $\square$

Зазначимо, що для функції $f(x)$ однієї змінної існування похідної $f'(x)$ в точці x є необхідною і достатньою умовою її диференційовності в цій точці.

Похідна складеної функції. Повна похідна

Нехай $z = f(x, y)$ — функція двох змінних x та y , кожна з яких, в свою чергу, є функцією незалежної змінної t : $x = x(t)$, $y = y(t)$, тоді функція $f(x(t), y(t))$ є складеною функцією змінної t .

Теорема 9.5.

Якщо функції $x = x(t)$, $y = y(t)$ диференційовні в точці t , а функція $z = f(x(t), y(t))$ диференційовна в точці $M(x, y)$, то складена функція $z = f(x(t), y(t))$ також диференційовна в точці t . Похідну цієї функції знаходять за формулою

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}. \quad (9.3)$$



ДОВЕДЕННЯ. За умовою теореми $\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$, де $\alpha \rightarrow 0$ та $\beta \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$. Поділимо Δz на Δt і перейдемо до границі при $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \alpha \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \\ &+ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \beta \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} + 0 \cdot \frac{dx}{dt} + 0 \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}. \quad \square \end{aligned}$$

Аналогічно знаходять похідну, якщо число проміжних змінних більше двох. Наприклад, якщо $u = f(x, y, z)$, де $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, то

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}. \quad (9.4)$$

Зокрема, якщо $u = f(x, y, z)$, а $y = y(x)$, $z = z(x)$, то $\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx}$ а оскільки $\frac{dx}{dx} = 1$, то

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx}. \quad (9.5)$$

Цю формулу називають *формулою для обчислення повної похідної* (на відміну від частинної похідної $\frac{\partial u}{\partial x}$).

Приклад 9.4. Знайти $\frac{dz}{dt}$, якщо $z = x^2 - 3xy$, де $x = 2t$, $y = t^2$. ☺

Розв'язання. За формулою (9.3) дістанемо

$$\frac{dz}{dt} = (2x - 3y)2 - 3x2t = (4t - 3t^2)2 - 12t^2 = 8t - 18t^2.$$

Результат буде такий самий, коли попередньо підставити замість x та y їхні значення, а потім знайти звичайну похідну по t :

$$z = 4t^2 - 6t^3, \quad \frac{dz}{dt} = 8t - 18t^2.$$

Приклад 9.5. Нехай $u = x^2 - xy + z^2$, де $y = 2x$, $z = x^3$. За формулою (9.5) маємо:

$$\frac{du}{dx} = 2x - y - x^2 + 3z^2 3x^2 = -2x + 9x^3.$$

Інший спосіб:

$$u = x^2 - 3x^2 + x^9 = -x^2 + x^9, \quad \frac{du}{dx} = -2x + 9x^8.$$

Розглянемо загальніший випадок. Нехай $z = f(x, y)$ — функція двох змінних x та y , які, в свою чергу, залежать від змінних $u, v : x = x(u, v), y = y(u, v)$, тоді функція $z = f(x(u, v), y(u, v))$ є складеною функцією незалежних змінних u та v , а змінні x та y — проміжні.

Аналогічно попередній теоремі доводиться таке твердження.

Теорема 9.6.

Якщо функції $x(u, v)$ та $y(u, v)$ диференційовні в точці $M_1(u; v)$, а функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці $M_2(x(u, v); y(u, v))$, то складена функція $f(x(u, v), y(u, v))$ диференційовна в точці $M_1(u; v)$ і її частинні похідні знаходяться за формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}. \quad (9.6)$$



Формули (9.6) можна узагальнити на випадок більшого числа змінних. Якщо $u = f(x, y, z)$, де $x = x(s_1, s_2, s_3)$, $y = y(s_1, s_2, s_3)$, $z = z(s_1, s_2, s_3)$, то

$$\frac{\partial u}{\partial s_i} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s_i} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s_i} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial s_i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Приклад 9.6. Знайти z'_u і z'_v , якщо $z = x^2 \ln y$, де $x = \frac{u}{v}$, $y = uv$.

Розв'язання. За формулами (9.6) маємо

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 2x \ln y \frac{1}{v} + \frac{x^2}{y} v = \frac{u}{v^2} (1 + 2 \ln(uv)),$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = 2x \ln y \left(-\frac{u}{v^2}\right) + \frac{x^2}{y} u = \frac{u^2}{v^3} (1 - 2 \ln uv).$$

Диференціювання неявної функції

Нехай задано рівняння

$$F(x, y) = 0 \quad (9.7)$$

де $F(x, y)$ — функція двох змінних.

Нагадаємо, що коли кожному значенню x з деякої множини D відповідає єдине значення y , яке разом з x задовольняє рівняння (9.7), то кажуть, що це рівняння задає на множині D неявну функцію $y = \varphi(x)$.

Таким чином, для неявної функції $y = \varphi(x)$, $x \in D$, заданої рівнянням (9.7), має місце тотожність

$$F(x, \varphi(x)) \equiv 0, \quad x \in D.$$

Які ж умови має задовольняти функція $F(x, y)$, щоб рівняння (9.7) визначало неявну функцію і при тому єдину? Відповідь на це запитання дає така теорема існування неявної функції.

Теорема 9.7.

Нехай функція $F(x, y)$ і її похідні $F'_x(x, y)$ та $F'_y(x, y)$ визначені та неперервні в якому-небудь околі точки $M_0(x_0, y_0)$ і $F(x_0, y_0) = 0$, а $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$; тоді існує окіл точки M_0 , в якому рівняння $F(x, y) = 0$ визначає єдину неявну функцію $y = \varphi(x)$, неперервну та диференційовну в околі точки x_0 і таку, що $\varphi(x_0) = y_0$. ★

Знайдемо похідну неявної функції. Нехай ліва частина рівняння (9.7) задовольняє зазначені в теоремі умови, тоді це рівняння задає неявну функцію $y = y(x)$, для якої на деякій множині точок x має місце тотожність $F(x, y(x)) = 0$. Оскільки похідна функції, що тотожно дорівнює нулю, також дорівнює нулю, то повна похідна $\frac{dF}{dx} = 0$. Але за формулою (9.5) маємо $\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$, тому $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$, звідки

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}. \quad (9.8)$$

За цією формулою знаходять похідну неявної функції однієї змінної. Нагадаємо, що похідну функції, заданої рівнянням (9.8), можна знаходити й іншим способом.

Приклад 9.7. Знайти похідну $\frac{dy}{dx}$ функції y , заданої рівнянням $e^y - e^x + 2xy = 0$.

Розв'язання. Тут $F(x, y) = e^y - e^x + 2xy$, $F'_x = -e^x + 2y$, $F'_y = e^y + 2x$, отже за формулою (9.8) маємо

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{-e^x + 2y}{e^y + 2x} = \frac{e^x - 2y}{e^y + 2x}.$$

Розглянемо рівняння

$$F(x, y, z) = 0 \quad (9.9)$$

Якщо кожній парі чисел x та y з деякої множини відповідає єдине значення z , яке разом з x та y задовольняє рівняння (9.9), то це рівняння задає неявну функцію $z = \varphi(x, y)$.

Справджується така теорема існування.

Теорема 9.8.

Нехай функція $F(x, y, z)$ і її похідні $F'_x(x, y, z)$, $F'_y(x, y, z)$ та $F'_z(x, y, z)$ визначені і неперервні в деякому околі точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$, причому $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, а $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Тоді існує околі точки M_0 , в якому рівняння (9.9) визначає єдину функцію $z = \varphi(x, y)$ неперервну і диференційовну в околі точки $(x_0; y_0)$ і таку, що $\varphi(x_0, y_0) = z_0$. ★

Знайдемо частинні похідні z'_x і z'_y неявної функції z від x та y , заданої рівнянням (9.9).

Коли визначаємо z'_x (або z'_y), то змінну y (або x) вважаємо сталою, тому за формулою (9.8)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}. \quad (9.10)$$

Аналогічно знаходять похідні неявної функції $y = y(x_1, x_2, \dots, x_n)$, яка задається рівнянням $F(y, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$:

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{F'_{x_i}}{F'_y}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad F'_y \neq 0.$$

Приклад 9.8. Знайти повний диференціал функції $z = \varphi(x, y)$, якщо $e^z - x^2y + z + 6 = 0$. ☺

Розв'язання. Тут $F(x, y, z) = e^z - x^2y + z + 6$, $F'_x = -2xy$, $F'_y = -x^2$, $F'_z = e^z + 1$.
Скориставшись формулами (9.10) і (10.2), дістанемо

$$z'_x = \frac{2xy}{e^z + 1}, \quad z'_y = \frac{x^2}{e^z + 1}, \quad dz = \frac{2xydx + x^2dy}{e^z + 1}.$$

Скалярне поле

Визначення 9.5. Область простору, кожній точці $M(x, y, z)$ якого поставлено у відповідність деякої скалярної величини $u(M) = u(x, y, z)$, називається скалярним полем. ✓

Прикладами скалярних полів є поле температури $T(x, y, z)$ деякого тіла, поле густини неоднорідного середовища $\rho(x, y, z)$, поле потенціалів $\varphi(x, y, z)$ заданого електростатичного поля, поле вологості повітря, поле атмосферного тиску.

Визначення 9.6. Якщо функція $u(M)$ не залежить від часу t , то скалярне поле називають стаціонарним, а скалярне поле, змінне з часом, нестаціонарним. ✓

Надалі розглядатимемо лише стаціонарні поля. Залежно від розмірності області скалярні поля ділять на лінійні ($u = u(x, y)$), плоскі ($u = u(x, y, z)$), просторові (тривимірні) ($u = u(x, y, z)$).

Геометрично плоскі скалярні поля зображають за допомогою ліній рівня, а просторові за допомогою поверхонь рівня, тобто точок простору, в яких функція $u(x, y, z)$ набуває однакових значень: $u(x, y, z) = c$ (або $u(x, y) = c$ для плоских полів).

Прикладами ліній рівня є ізобари (ліній постійного тиску на синоптичних картах), ізотерми (лінії постійної температури на синоптичних картах), еквіпотенціальні поверхні електростатичного поля. Фізичні скалярні поля володіють певними елементами симетрії.

Якщо значення функції $u(x, y, z)$ залежить лише від відстані до фіксованої точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, тобто $u = u(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2})$, то таке поле називають **сферично симетричним**, а точку M_0 — центром симетрії. Наприклад, скалярним потенціал електростатичного поля, утвореного точковим зарядом. Якщо скалярне поле залежить від відстані до деякої прямої (наприклад, осі Oz) та координати z , тобто $u = u(\sqrt{x^2 + y^2}, z)$, то його називають **осесиметричним**, а пряму Oz — віссю симетрії. Якщо ж функція u не залежить від z , тобто $u = u(\sqrt{x^2 + y^2})$, то таке осесиметричне поле називають **циліндричним**.

Похідна за напрямком. Градієнт

Нагадаємо, що для функції однієї змінної $y = f(x)$ похідна $y' = f'(x_0)$ виражає швидкість зміни цієї функції в точці $x = x_0$. Отже, частинні похідні $f'_x(x_0, y_0, z_0)$, $f'_y(x_0, y_0, z_0)$, $f'_z(x_0, y_0, z_0)$ виражають швидкість зміни функції (поля) відповідно в напрямках, паралельних координатним осям.

Тому природно поставити питання про швидкість зміни функції $u = f(x, y, z)$ в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ в довільному напрямку, що виходить з цієї точки.

Нехай задано скалярне поле $u = f(x, y, z)$, причому область визначення функції є відкритою та зв'язною. Розглянемо якийсь фіксований вектор $\vec{l}$, який утворює з додатними напрямками координатних осей відповідно кути α, β, γ . Зафіксуємо в скалярному полі точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і візьмемо в цьому полі довільну точку $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$, таку щоб вектор $\overrightarrow{M_0M}$ був співнаправленим з вектором $\vec{l}$.

Позначимо $\Delta l = |\overrightarrow{M_0M}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$.

При переході від точки M_0 до точки M функція $f(M)$ отримає приріст в напрямі вектора $\vec{l}$, який дорівнює

$$\Delta_l u = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0).$$

Означення 9.7. Якщо існує скінченна границя відношення $\frac{\Delta_l u}{\Delta l}$ при $\Delta l \rightarrow 0$, то ця границя називається похідною функції (поля) $u = f(M)$ у точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ за напрямком вектора $\vec{l}$ і позначається

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta_l u}{\Delta l}.$$

Нехай $\vec{l} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ заданий напрямними косинусами, де α, β, γ — кути утворені вектором $\vec{l}$ та осями координат Ox, Oy, Oz . Тоді

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$$

— формула для обчислення похідної за напрямом.

Похідна за напрямом характеризує швидкість зміни скалярного поля $u(x, y, z)$ у точці $M(x, y, z)$ за напрямом $\vec{l}$.

Приклад 9.9. Знайти похідну функції $u = 2x - xz + y^3$ у точці $A(0, 1, 2)$ за напрямом від точки A до точки $B(2, 0, 0)$. ☺

Розв'язання. $\vec{l} = \overrightarrow{AB} = (2, -1, -2)$. $|\overrightarrow{AB}| = 3$. $\cos \alpha = \frac{2}{3}$; $\cos \beta = -\frac{1}{3}$; $\cos \gamma = -\frac{2}{3}$.
 $\frac{\partial u}{\partial x} = 2 - z|_A = 0$; $\frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2|_A = 3$; $\frac{\partial u}{\partial z} = -x|_A = 0$; $\frac{\partial u}{\partial l}|_A = 0 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot (-\frac{1}{3}) + 0 \cdot (-\frac{2}{3}) = -1$,
 тобто функція спадає у даному напрямі, бо $\frac{\partial u}{\partial l} < 0$. ■

Гradientом називається $\text{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}$, де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — орти осей Ox, Oy, Oz .

Тоді $\frac{\partial u}{\partial l} = (\text{grad} u, \vec{l}) = \text{pr}_{\vec{l}}(\text{grad} u)$.

Отже, напрям gradientа є напрямом найбільшого зростання функції.

Властивості gradientа:

1. $\text{grad}(u \pm v) = \text{grad} u \pm \text{grad} v$.
2. $\text{grad}(uv) = v \text{grad} u + u \text{grad} v$.
3. $\text{grad}(Cu) = C \text{grad} u$, $C = \text{const}$.
4. $\text{grad} \frac{u}{v} = \frac{v \text{grad} u - u \text{grad} v}{v^2}$.
5. $\text{grad} f(u) = \frac{\partial f}{\partial u} \text{grad} u$.

ТЕМА 10. ПОВНИЙ ДИФЕРЕНЦІАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

Повний диференціал функції

Нагадаємо, що коли функція $z = f(M)$ диференційовна в точці M , то її повний приріст у цій точці можна подати у вигляді

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y,$$

де $\alpha(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0$ і $\beta(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$.

Означення 10.1. Повним диференціалом dz диференційовної в точці M функції $z = f(M)$ називається лінійна відносно Δx та Δy частина повного приросту цієї функції в точці M , тобто

$$dz = A\Delta x + B\Delta y. \quad (10.1)$$

Диференціалами незалежних змінних x та y назвемо прирости цих змінних $dx = \Delta x, dy = \Delta y$. Тоді з урахуванням теореми 9.3 рівність (10.1) можна записати так:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \quad (10.2)$$

Подібна формула виконується для функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz. \quad (10.3)$$

З формул (10.2) і (10.3) може здатися, що повний диференціал du існуватиме в кожній точці, в якій існують частинні похідні. Але це не так. Згідно з означенням, повний диференціал можна розглядати лише стосовно диференційовної функції.

Застосування повного диференціала до обчислення функцій і похибок

Покажемо, що різниця між повним приростом Δz і диференціалом dz при $\Delta x \rightarrow 0$ і $\Delta y \rightarrow 0$ є нескінченно мала величина вищого порядку, ніж величина $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Дійсно, з формул (9.1) і (10.1) маємо

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta z - dz}{\rho} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \left(\frac{\alpha \Delta x}{\rho} + \frac{\beta \Delta y}{\rho} \right) = 0,$$

оскільки функції α, β — нескінченно малі при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$, а $\frac{\Delta x}{\rho}$ та $\frac{\Delta y}{\rho}$ — обмежені функції:

$$\left| \frac{\Delta x}{\rho} \right| = \left| \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}}} \leq 1, \quad \left| \frac{\Delta y}{\rho} \right| \leq 1.$$

Отже, різниця $\Delta z - dz$ — нескінченно мала величина вищого порядку, ніж ρ . Тому повний диференціал називають також головною частиною повного приросту диференційовної функції. При цьому виконується наближена рівність $\Delta z \approx dz$ або

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y. \quad (10.4)$$

Ця рівність тим точніша, чим менша величина ρ . Рівність (10.4) широко використовується в наближених обчисленнях, оскільки диференціал функції обчислюється простіше, ніж її повний приріст.

Покажемо, як за допомогою диференціала можна оцінити похибку в обчисленнях.

Нехай задана диференційовна функція $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, незалежні змінні якої виміряні з точністю $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$. Потрібно знайти похибку, з якою обчислюється u .

Природно вважати, що ця похибка дорівнює величині

$$\Delta u = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Для малих значень Δx_i маємо

$$\Delta u \approx du = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n,$$

звідки

$$|\Delta u| \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \cdot |\Delta x_1| + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \cdot |\Delta x_2| + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \right| \cdot |\Delta x_n|.$$

Якщо через $|\Delta^* x_i|$ позначити максимальну абсолютну похибку змінної x_i , то можна дістати значення максимальної абсолютної похибки $|\Delta^* u|$ функції u :

$$|\Delta^* u| = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \cdot |\Delta^* x_1| + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \cdot |\Delta^* x_2| + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \right| \cdot |\Delta^* x_n|. \quad (10.5)$$

Щоб оцінити максимальну відносну похибку функції u , поділимо обидві частини рівності (10.5) на $|u| = |f(x_1, x_2, \dots, x_n)|$:

$$|\delta^* u| = \left| \frac{\Delta^* u}{u} \right| = \left| \frac{f'_{x_1}}{f} \right| \cdot |\Delta^* x_1| + \left| \frac{f'_{x_2}}{f} \right| \cdot |\Delta^* x_2| + \dots + \left| \frac{f'_{x_n}}{f} \right| \cdot |\Delta^* x_n|.$$

Оскільки $\frac{f'_{x_i}}{f} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\ln |f|)$, то

$$|\delta^* u| = \left| \frac{\partial}{\partial x_1}(\ln |f|) \right| \cdot |\Delta^* x_1| + \left| \frac{\partial}{\partial x_2}(\ln |f|) \right| \cdot |\Delta^* x_2| + \dots + \left| \frac{\partial}{\partial x_n}(\ln |f|) \right| \cdot |\Delta^* x_n|$$

або

$$|\delta^* u| = |\Delta^* \ln |f||, \quad (10.6)$$

тобто максимальна відносна похибка функції дорівнює максимальній абсолютній похибці її логарифма.

Приклад 10.1. Знайти повний диференціал функції $z = x^3 y^2$.

Розв'язання. Частинні похідні заданої функції $z'_x = 3x^2 y^2$ і $z'_y = 2x^3 y$ є неперервними функціями на всій площині Oxy . Тому диференціал цієї функції на всій площині дорівнює

$$dz = 3x^2 y^2 dx + 2x^3 y dy.$$

Приклад 10.2. Обчислити наближене значення за допомогою повного диференціала $\operatorname{arctg}\left(\frac{1,97}{1,02} - 1\right)$. ☺

Розв'язання. Розглянемо функцію і застосуємо до неї формулу (10.2), поклавши $x = 2$, $y = 1$, $\Delta x = -0,03$, $\Delta y = 0,02$:

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{x + \Delta x}{y + \Delta y} - 1\right) \approx \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y} - 1\right) + \frac{y}{y^2 + (x - y)^2} \Delta x - \frac{x}{y^2 + (x - y)^2} \Delta y;$$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{2 - 0,03}{1 + 0,02} - 1\right) \approx \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{1} - 1\right) + \frac{1}{1 + (2 - 1)^2}(-0,03) - \frac{2}{1 + (2 - 1)^2}0,02.$$

Маємо $\operatorname{arctg}\left(\frac{1,97}{1,02} - 1\right) = \frac{\pi}{4} - 0,015 - 0,02 = 0,75$. ■

Приклад 10.3. Період коливання маятника дорівнює $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, де l – довжина маятника, g – прискорення вільного падіння. Розв'язуючи цю рівність відносно g , дістанемо $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$. Цією формулою користуються для обчислення g в різних точках земної поверхні, вимірюючи в цих точках величини l і T . Нехай в результаті вимірювань дістали $l = 50 \pm 0,01$ см, $T = 1,4196 \pm 0,0001$ с.

Потрібно знайти прискорення вільного падіння g і максимальну абсолютну та відносну похибки знайденого значення g , вважаючи, що $\pi = 3,1416 \pm 0,0001$. ☺

Розв'язання. Маємо $\ln g = \ln 4 + 2 \ln \pi + \ln l + 2 \ln T$, $\Delta^* T = 0,0001$, $\Delta^* l = 0,01$, $\Delta^* \pi = 0,0001$.

Знайдемо наближене значення прискорення: $g = \frac{4 \cdot (3,1416)^2 \cdot 50}{(1,4196)^2} = 979,5$ см/с².

За формулами (10.5) і (10.6) дістанемо максимальне значення відносної і абсолютної похибок:

$$\begin{aligned} |\delta^* g| &= |\Delta^* \ln |g|| = \frac{2|\Delta^* \pi|}{\pi} + \frac{|\Delta^* l|}{l} + \frac{|\Delta^* T|}{T} = \\ &= \frac{2 \cdot 0,0001}{3,1416} + \frac{0,01}{50} + \frac{2 \cdot 0,0001}{1,4196} \approx 0,0004 = 0,04\%, \\ |\Delta^* g| &= |\delta^* g|g = 0,0004 \cdot 979,5 \approx 0,4 \text{ см/с}^2. \end{aligned}$$

Отже, $g = 979,5 \pm 0,4 \text{ см/с}^2$. ■

Диференціали вищих порядків

Введемо поняття диференціала вищого порядку. Нехай $z = f(x, y)$ — функція незалежних змінних x, y . Повний диференціал цієї функції, знайдений за формулою (10.1), називають ще **диференціалом першого порядку**.

Означення 10.2. Диференціал другого порядку визначають за формулою $d^2 z = d(dz)$. ✓

Тоді, якщо функція $z = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні, то

$$\begin{aligned} d^2 z &= d \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right) = \\ &= \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right)'_x dx + \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right)'_y dy, \end{aligned}$$

звідки

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2. \quad (10.7)$$

Символічно це записують так: $d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 z$. Аналогічно можна дістати формулу для **диференціала третього порядку**: $d^3 z = d(d^2 z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^3 z$.

Застосовуючи метод математичної індукції, можна дістати формулу для **диференціала n -го порядку**:

$$d^n z = d(d^{n-1} z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n z. \quad (10.8)$$

Зазначимо, що формула (10.8) справедлива лише для випадку, коли змінні x і y функції $z = f(x, y)$ є незалежними змінними.

Приклад 10.4. Знайти $d^2 z$, якщо $z = e^{x^2+y^2}$. ☺

Розв'язання. Послідовно дістанемо $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2ye^{x^2+y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2e^{x^2+y^2}(1 + 2x^2)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2e^{x^2+y^2}(1 + 2y^2)$. За формулою (10.7) маємо

$$d^2 z = 2e^{x^2+y^2}[(1 + 2x^2)dx^2 + 4xy dx dy + (1 + 2y^2)dy^2].$$

Знайдемо диференціал складеної функції. Скориставшись формулами (9.6), дістанемо

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \right) du + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \right) dv = \\ &= \frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) + \frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right) = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \end{aligned}$$

Отже, диференціал функції $z = f(x, y)$, де $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, визначається формулою

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy, \quad (10.9)$$

де $dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv$, $dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv$.

Порівнявши формули (10.9) і (10.2), дійдемо висновку, що повний диференціал функції $z = f(x, y)$ має **інваріантну (незмінну) форму** незалежно від того, чи є x та y незалежними змінними, чи диференційовними функціями змінних u та v . Проте формули (10.2) і (10.9) однакові лише за формою, а по суті різні, бо в формулі (10.2) dx і dy — диференціали незалежних змінних, а в формулі (10.9) dx і dy — повні диференціали функцій $x = x(u, v)$ та $y = y(u, v)$.

Диференціали вищих порядків властивості інваріантності не мають. Наприклад, якщо $z = f(x, y)$, де $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, то

$$\begin{aligned} d^2 z &= d(dz) = d \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right) = \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial z}{\partial x} d^2 x + \frac{\partial z}{\partial y} d^2 y. \end{aligned} \quad (10.10)$$

Формула (10.10) відрізняється від формули (10.7), тому що для складеної функції диференціали $d^2 x$ та $d^2 y$ можуть і не дорівнювати нулю. Отже, для складеної функції $z = f(x, y)$, де $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, формула (10.7) невірна.

Дотична площина та нормаль до поверхні

Нехай задано поверхню

$$F(x, y, z) = 0. \quad (10.11)$$

Точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ належить цій поверхні і функція $F(x, y, z)$ диференційовна в точці M_0 , причому не всі частинні похідні в точці M_0 дорівнюють нулю, тобто

$$(F'_x(M_0))^2 + (F'_y(M_0))^2 + (F'_z(M_0))^2 \neq 0.$$

Розглянемо довільну криву L , яка проходить через точку M_0 , лежить на поверхні (10.11) і задається рівнянням $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, де точці M_0 відповідає параметр t_0 . Оскільки крива лежить на поверхні, то координати її точок задовольняють рівняння (10.11):

$$F(x(t), y(t), z(t)) = 0. \quad (10.12)$$

Диференціюючи рівність (10.12), маємо

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = 0. \quad (10.13)$$

Ця рівність показує, що вектори

$$\vec{n} = (F'_x(M_0), F'_y(M_0), F'_z(M_0)), \quad \vec{s} = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)).$$

ортогональні, причому другий з них є напрямним вектором дотичної до кривої L у точці M_0 . Крім того, з рівності (10.13) випливає, що дотичні до всіх кривих, які проходять через точку M_0 і лежать на поверхні (10.11), ортогональні до одного й того самого вектора $\vec{n}$. Тоді всі ці дотичні лежать в одній і тій самій площині, яка називається дотичною площиною до поверхні в точці M_0 .

Знайдемо рівняння **дотичної площини**. Оскільки ця площина проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\vec{n}$, то її рівняння має вигляд:

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0. \quad (10.14)$$

Означення 10.3. *Нормаллю до поверхні в точці M_0 називають пряму, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до дотичної площини в цій точці.* ✓

Оскільки нормаль проходить через точку M_0 і має напрямний вектор $\vec{n}$, то канонічні рівняння нормалі мають такий вигляд:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}. \quad (10.15)$$

Якщо поверхню задано явно $z = f(x, y)$, то, поклавши $F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$, дістанемо

$$F'_x(M_0) = f'_x(x_0, y_0), F'_y(M_0) = f'_y(x_0, y_0), F'_z(M_0) = -1.$$

тоді рівняння (10.14) і (10.15) наберуть вигляду

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0; \quad (10.16)$$

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \quad (10.17)$$

Геометричний зміст диференціала функції двох змінних

З'ясуємо геометричний зміст повного диференціала функції $z = f(x, y)$. Якщо в формулі (10.16) покласти $x - x_0 = \Delta x$, $y - y_0 = \Delta y$, то ця формула запишеться у вигляді

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Права частина цієї рівності є повним диференціалом функції $z = f(x, y)$ в точці $(x_0; y_0)$, тому $z - z_0 = dz$.

Таким чином, повний диференціал функції двох змінних у точці $(x_0; y_0)$ дорівнює приросту аплікати точки на дотичній площині до поверхні в точці $M_0(x_0; y_0; f(x_0, y_0))$, якщо від точки $(x_0; y_0)$ перейти до точки $(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ (рис. 10.1).

Зауваження 10.1. Ми розглянули випадок, коли функція (9.7) диференційовна в точці M_0 і $(F'_x(M_0))^2 + (F'_y(M_0))^2 + (F'_z(M_0))^2 \neq 0$.

Якщо ці умови не виконуються в деякій точці (її називають **особливою**), то дотична та нормаль в такій точці можуть не існувати.

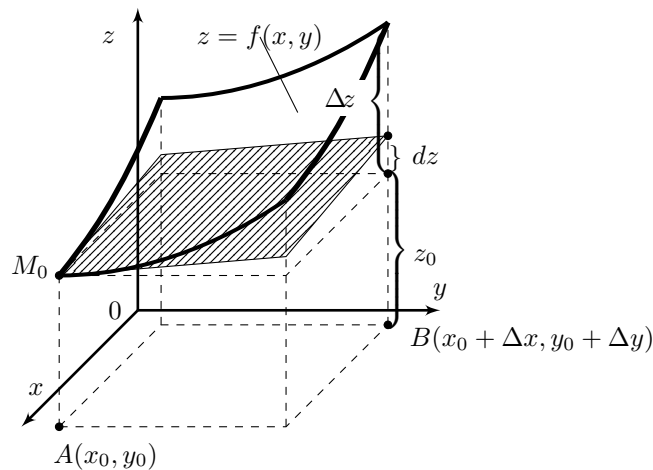


Рисунок 10.1 – Геометричний зміст повного диференціала

Зауваження 10.2. Якщо поверхня (10.11) є поверхнею рівня для деякої функції $u = u(x, y, z)$, тобто $F(x, y, z) = u(x, y, z) - c = 0$, то вектор $\vec{n} = \{F'_x; F'_y; F'_z\} = \{u'_x, u'_y, u'_z\}$ буде напрямним вектором нормалі до цієї поверхні рівня.

Приклад 10.5. Написати рівняння нормалі та дотичної площини до еліпсоїда $2x^2 + y^2 + z^2 = 15$ в точці $M(1; 2; 3)$. ☺

Розв'язання. Скористаємось рівняннями (10.14) і (10.15). Маємо

$$F(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - 15; F'_x = 4x; F'_y = 2y;$$

$$F'_z = 2z; F'_x(M_0) = 4; F'_y(M_0) = 4, F'_z(M_0) = 6.$$

Отже, шукані рівняння нормалі та дотичної площини мають вигляд

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{6} \text{ або } \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3};$$

$$4(x-1) + 4(y-2) + 6(z-3) = 0 \text{ або } 2x + 2y + 3z - 15 = 0.$$

Приклад 10.6. Написати рівняння нормалі та дотичної площини до параболоїда $z = x^2 + y^2$ в точці $M_0(1; -2; 5)$. ☺

Розв'язання. Скористаємось формулами (10.16) та (10.17). Маємо

$$f(x, y) = x^2 + y^2; f'_x(x, y) = 2x; f'_y(x, y) = 2y; f'_x(1, -2) = 2; f'_y(1, -2) = -4.$$

Звідси $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-5}{-1}$ – рівняння нормалі, $2x - 4y - z - 5 = 0$ – рівняння дотичної площини. ■

Формула Тейлора для функції двох змінних

У одновимірному випадку отримали наступну формулу Тейлора:

$$F(t) = F(t_0) + F'(t_0)(t - t_0) + \dots + \frac{F^{(n)}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n + \frac{F^{(n+1)}(t_0 + \Theta(t - t_0))}{(n+1)!}(t - t_0)^{n+1},$$

де $0 < \Theta < 1$, $t \in [\alpha, \beta]$. Цю формулу можна записати у диференціальній формі:

$$\Delta F(t_0) = df(t_0) + \frac{d^2 F(t_0)}{2!} + \dots + \frac{d^n F(t_0)}{n!} + \frac{d^{n+1} F(t_0 + \Theta \Delta t)}{(n+1)!},$$

$0 < \theta < 1$. Аналогічна формула існує для двох змінних:

$$\Delta f(x_0, y_0) = df(x_0, y_0) + \frac{d^2 f(x_0, y_0)}{2!} + \dots + \frac{d^n f(x_0, y_0)}{n!} + R_{n+1},$$

де $R_{n+1} = \frac{d^{n+1} f(x_0 + \Theta \Delta x, y_0 + \Theta \Delta y)}{(n+1)!}$, $0 < \Theta < 1$. Ця формула є **формулою Тейлора для функції двох змінних із залишковим членом R_{n+1} у формі Лагранжа**. Вона нагадує формулу Тейлора для випадку однієї змінної, але насправді є складнішою. Наприклад, для $n = 1$ отримуємо:

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) &= f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \\ &+ \frac{1}{2!} (f''_{xx}(x_0 + \Theta \Delta x, y_0 + \Theta \Delta y)\Delta x^2 + 2f''_{xy}(x_0 + \Theta \Delta x, y_0 + \Theta \Delta y)\Delta x \Delta y + \\ &+ f''_{yy}(x_0 + \Theta \Delta x, y_0 + \Theta \Delta y)\Delta y^2). \end{aligned}$$

ТЕМА 11. ЕКСТРЕМУМ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

Локальні екстремуми функції двох змінних

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в області D , а точка $M_0(x_0; y_0) \in D$.

Означення 11.1. Якщо існує околі точки M_0 , який належить області D і для всіх відмінних від M_0 точок M цього околу виконується нерівність $f(M) < f(M_0)$ ($f(M) > f(M_0)$), то точку M_0 називають точкою локального максимуму (мінімуму) функції $z = f(x, y)$, а число $f(M_0)$ — локальним максимумом (мінімумом) цієї функції. Точки максимуму та мінімуму функції називають її точками екстремуму. ✓

Це означення можна перефразувати так. Покладемо $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, тоді

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \Delta f(x_0, y_0).$$

Якщо приріст функції $\Delta f(x_0, y_0) < 0$ ($\Delta f(x_0, y_0) > 0$) при всіх достатньо малих за абсолютною величиною приростах Δx і Δy , то функція $f(x, y)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$ досягає локального максимуму $z_{\max} = f(x_0, y_0)$ (локального мінімуму $z_{\min} = f(x_0, y_0)$). Інакше кажучи, в околі екстремальної точки прирости функції мають один і той самий знак.

Теорема 11.1 (необхідні умови екстремуму).

Якщо функція $z = f(x, y)$ має в точці $(x_0; y_0)$ локальний екстремум, то в цій точці частинні похідні першого порядку по змінних x та y дорівнюють нулю або не існують. ★

ДОЗВЕДЕННЯ. Нехай (x_0, y_0) — точка екстремуму. Тоді функція $f(x_0, y_0)$ буде функцією однієї змінної. Ця функція має екстремум у точці $x = x_0$, тому її похідна $f'_x(x_0, y_0)$ дорівнює нулю або не існує.

Аналогічно, розглянувши функцію $f(x_0, y_0)$, дістанемо, що $f'_y(x_0, y_0)$ дорівнює нулю або не існує. $\square$

Подібна теорема справедлива для функції n змінних.

Означення 11.2. Точку (x_0, y_0) , в якій частинні похідні першого порядку функції $f(x, y)$ дорівнюють нулю, тобто $f'_x = f'_y = 0$, називають стаціонарною точкою функції $f(x, y)$.

Означення 11.3. Стаціонарні точки та точки, в яких частинні похідні не існують, називаються критичними точками. $\checkmark$

Таким чином, якщо функція в якій-небудь точці досягає екстремуму, то це може статися лише в критичній точці. Проте не всяка критична точка є точкою екстремуму, тобто ця теорема встановлює лише необхідні, але не достатні умови екстремуму.

Наприклад, частинні похідні функції $z = x^2 - y^2$ дорівнюють нулю в точці $(0; 0)$. Але ця функція у вказаній точці екстремуму не має, тому що в досить малому околі точки $(0; 0)$ вона набуває як додатних (при $|x| > |y|$), так і від'ємних (при $|x| < |y|$) значень.

Слід зазначити, що в задачах з практичним змістом, як правило, відомо, що функція має екстремум. Якщо така функція має лише одну критичну точку, то ця точка і буде точкою екстремуму.

Приклад 11.1. Відкритий прямокутний басейн повинен мати об'єм V . Знайти розміри басейну, за яких на його облицювання піде найменша кількість матеріалу. $\odot$

Розв'язання. Нехай x — довжина, y — ширина, z — висота басейну, тоді $V = xyz$, звідки $z = \frac{V}{xy}$. Кількість матеріалу, необхідного для облицювання басейну, визначається формулою $S = xy + 2yz + 2xz$ або $S = S(x, y) = xy + 2V \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$. Треба знайти мінімум функції $S(x, y)$, якщо $x > 0$, $y > 0$. Знайдемо стаціонарні точки функції $S(x, y)$. Маємо $S'_x(x, y) = y - \frac{2V}{x^2}$, $S'_y(x, y) = x - \frac{2V}{y^2}$,

$$\begin{cases} y - \frac{2V}{x^2} = 0, \\ x - \frac{2V}{y^2} = 0, \end{cases} \quad x = y = \sqrt[3]{2V}.$$

Отже, функція $S(x, y)$ має тільки одну стаціонарну точку $M(\sqrt[3]{2V}; \sqrt[3]{2V})$, яка є її точкою мінімуму, бо, згідно з умовою задачі, мінімум функції $S(x, y)$ існує. Обчисливши відповідне значення z , дістанемо $z = \frac{1}{2} \sqrt[3]{2V}$. Таким чином, басейн повинен мати висоту, рівну $\frac{1}{2} \sqrt[3]{2V}$, і квадратну основу із стороною, рівною $\sqrt[3]{2V}$. $\blacksquare$

Теорема 11.2 (достатні умови локального екстремуму).

Нехай в стаціонарній точці $M_0(x_0, y_0)$ і деякому її околі функція $f(x, y)$ має неперервні частинні похідні другого порядку. Якщо

$$\Delta(x_0, y_0) = f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2 = \begin{vmatrix} z''_{xx}(M_0) & z''_{xy}(M_0) \\ z''_{xy}(M_0) & z''_{yy}(M_0) \end{vmatrix} > 0,$$

то функція $f(x, y)$ має в точці M_0 екстремум, причому максимум при $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ і мінімум при $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$. Якщо $\Delta(x_0, y_0) < 0$, то в точці M_0 функція $f(x, y)$ екстремуму не має. ★

ДОВЕДЕННЯ.

Запишемо формулу Тейлора для функції $z = f(x, y)$ в околі стаціонарної точки M_0 . Враховуючи, що $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$, дістанемо:

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2!}(f''_{xx}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta x^2 + 2f''_{xy}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta x\Delta y + f''_{yy}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta y^2), \quad 0 < \theta < 1.$$

У випадку мінімуму для довільних достатньо малих значень $|\Delta x|$ та $|\Delta y|$ права частина цієї рівності повинна бути додатною, а у випадку максимуму — від'ємною.

Внаслідок неперервності других частинних похідних для цього достатньо, щоб диференціал другого порядку в точці M_0

$$d^2 f(M_0) = f''_{xx}(x_0, y_0)\Delta x^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)\Delta x\Delta y + f''_{yy}(x_0, y_0)\Delta y^2$$

зберігав знак для малих значень $|\Delta x|$ та $|\Delta y|$. Введемо такі позначення:

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0), \quad B = f''_{xy}(x_0, y_0), \quad C = f''_{yy}(x_0, y_0),$$

тоді $\Delta(x_0, y_0) = AC - B^2$.

Нехай φ — кут між відрізком $M_0M = \rho$, де M — точка з координатами $(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ і віссю Ox ; тоді $\Delta x = \rho \cos \varphi$, $\Delta y = \rho \sin \varphi$, тому при $A \neq 0$ маємо

$$\begin{aligned} d^2 f(M_0) &= A\rho^2 \cos^2 \varphi + 2B\rho^2 \sin \varphi \cos \varphi + C\rho^2 \sin^2 \varphi = \\ &= \frac{\rho^2}{A}((A \cos \varphi + B \sin \varphi)^2 + (AC - B^2) \sin^2 \varphi) = \\ &= \frac{\rho^2}{A}((A \cos \varphi + B \sin \varphi)^2 + \Delta(x_0, y_0) \sin^2 \varphi). \end{aligned}$$

Розглянемо тепер п'ять можливих випадків.

1) Нехай $\Delta(x_0, y_0) > 0$ і $A < 0$, тоді $d^2 f(M_0) < 0$, тому при досить малих значеннях ρ приріст $\Delta f(x_0, y_0) < 0$, тобто функція $f(x, y)$ має в точці M_0 максимум.

2) Аналогічно доводимо, що коли $\Delta(x_0, y_0) > 0$ і $A > 0$, то функція $f(x, y)$ в точці M_0 має мінімум.

3) Нехай $\Delta(x_0, y_0) < 0$ і $A > 0$. Якщо з точки M_0 рухатись вздовж променя $\varphi = 0$, то $d^2 f(M_0) = \rho^2 A > 0$. Якщо взяти $\varphi = \varphi_1$ таким, щоб $A \cos \varphi_1 + B \sin \varphi_1 = 0$ або $\operatorname{ctg} \varphi_1 = -\frac{B}{A}$, то

$$d^2 f(M_0) = \frac{\rho^2}{A} \Delta(x_0, y_0) \sin^2 \varphi_1 < 0.$$

Отже, при малих значеннях ρ приріст $\Delta f(x_0, y_0)$ в околі точки M_0 не зберігає знак, тому ця точка не є точкою екстремуму функції $f(x, y)$.

4) Аналогічно встановлюємо, що коли $\Delta(x_0, y_0) < 0$ і $A < 0$, то функція $f(x, y)$ в точці M_0 також не має екстремуму.

5) Нехай $\Delta(x_0, y_0) = AC - B^2 < 0$, тоді $B \neq 0$ і

$$d^2 f(M_0) = \rho^2 \sin \varphi (2B \cos \varphi + C \sin \varphi).$$

При досить малих кутах φ знак величини $2B \cos \varphi + C \sin \varphi$ збігається із знаком B , тому знак величини $d^2 f(M_0)$ залежатиме від знака множника $\sin \varphi$. Але знак величини $\sin \varphi$ змінюється при $\varphi > 0$ і $\varphi < 0$, бо $\sin(-\varphi) = -\sin \varphi$. Отже, в достатньо малому околі точки M_0 знак $\Delta f(x_0, y_0)$ не зберігається, тобто функція $f(x, y)$ в цій точці екстремуму не має. □

Зауваження 11.1. З доведення теореми 11.2 випливають так звані другі достатні умови екстремуму: функція $f(x, y)$ має мінімум в стаціонарній точці $M_0(x_0; y_0)$, якщо диференціал другого порядку в цій точці $d^2 f(M_0) > 0$, і максимум — якщо $d^2 f(M_0) < 0$.

Можна довести, що другі достатні умови екстремуму справедливі для функцій довільного числа змінних.

На основі теорем 11.1 і 11.2 дістанемо правило дослідження диференційовних функцій двох змінних на екстремум. Щоб знайти екстремум диференційовної функції $z = f(x, y)$, необхідно:

- 1) знайти стаціонарні точки функції із системи рівнянь;
- 2) у кожній стаціонарній точці $(x_0; y_0)$ обчислити вираз

$$\Delta(x_0, y_0) = f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2;$$

якщо $\Delta(x_0, y_0) > 0$, то (x_0, y_0) — точка екстремуму функції, причому точка максимуму при $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ і мінімуму при $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$; якщо $\Delta(x_0, y_0) < 0$, то точка (x_0, y_0) не є точкою екстремуму функції;

- 3) обчислити значення функції $f(x, y)$ в точках максимуму та мінімуму.

Якщо $\Delta(x_0, y_0) = 0$, то ніякого висновку про характер стаціонарної точки зробити не можна. У цьому випадку потрібне додаткове дослідження.

Приклад 11.2. Знайти екстремуми функції $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$. ☺

Розв'язання. Знаходимо частинні похідні $z'_x = 4(x^3 - x + y)$, $z'_y = 4(y^3 + x - y)$.

Стаціонарні точки функції визначимо із системи:

$$\begin{cases} x^3 - x + y = 0, \\ y^3 + x - y = 0. \end{cases}$$

Додаючи ці рівняння, знайдемо $x^3 + y^3 = 0$, звідки $y = -x$.

Підставляючи $y = -x$ в перше рівняння дістанемо $x^3 - 2x = 0$, звідки $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{2}$, $x_3 = -\sqrt{2}$, тоді $y_1 = 0$, $y_2 = -\sqrt{2}$, $y_3 = \sqrt{2}$. Отже, функція має три стаціонарні точки: $M_1(0, 0)$, $M_2(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$, $M_3(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$.

Знайдемо величину $\Delta(x, y)$. Оскільки $f''_{xx}(x, y) = 12x^2 - 4$, $f''_{xy}(x, y) = 4$, $f''_{yy}(x, y) = 12y^2 - 4$, то $\Delta(x, y) = 16(9x^2y^2 - 3x^2 - 3y^2)$. Обчислимо величину $\Delta(x, y)$ в кожній стаціонарній точці: $\Delta(M_1) = 0$, $\Delta(M_2) = \Delta(M_3) = 384 > 0$, $f''_{xx}(M_2) = f''_{xx}(M_3) = 20 > 0$. Таким чином, точки M_2 та M_3 — точки мінімуму. В цих точках $z_{\min} = -8$.

У точці M_1 значення $\Delta(M_1) = 0$, тому теорему 2 застосувати не можна. Переконаємось, що в цій точці екстремум відсутній. Дійсно, якщо $y = 0$, то $z = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2) < 0$ в околі точки M_1 . Якщо $y = x$, то $z = 2x^2 > 0$. Отже, в околі точки M_1 значення z можуть бути як додатні, так і від'ємні, а це значить, що точка M_1 не є екстремальною. Визначимо, що інших екстремумів задана функція не має, оскільки точки, в яких похідні z'_x і z'_y не існують, відсутні. ■

Найбільше та найменше значення функції

Відомо, що функція $z = f(x, y)$ задана і неперервна в замкненій та обмеженій області D , досягає в цій області найбільшого і найменшого значень. У внутрішніх точках області диференційовна функція може набувати цих значень лише в точках локального екстремуму. Тому треба знайти всі стаціонарні точки функції, які належать області D , розв'язавши систему рівнянь $f'_x(x, y) = 0$, $f'_y(x, y) = 0$, і обчислити значення функції в цих точках. Потім потрібно дослідити функцію на екстремум на межі області D . Використовуючи рівняння межі, цю задачу зводять до знаходження абсолютного екстремуму функції однієї змінної. Серед здобутих таким чином значень функції всередині і на межі області вибирають найбільше і найменше значення.

Зазначимо, що загального методу знаходження найбільшого та найменшого значень для довільної неперервної функції в замкненій та обмеженій області D немає.

Приклад 11.3. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2y(2 - x - y)$ в замкненій області D , обмеженій прямими $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$ (рис. 6.15). ☺

Розв'язання. Знаходимо стаціонарні точки. Маємо $z'_x = xy(4 - 3x - 2y)$, $z'_y = x^2(2 - x - 2y)$.

Прирівнюючи похідні до нуля і скорочуючи їх на xy та x^2 (всередині трикутника OAB $x \neq 0$, $y \neq 0$), дістаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 4 - 3x - 2y = 0, \\ 2 - x - 2y = 0, \end{cases}$$

звідки $x = 1$, $y = 1/2$. Стаціонарна точка $M(1; 1/2)$ належить області D , тому обчислюємо значення $z(M) = 1/4$.

Рівняннями сторін OB та OA трикутника є $x = 0$ та $y = 0$, тому значення функції $z = 0$ в усіх точках відрізків OB і OA , зокрема $z(0) = z(A) = z(B) = 0$.

Знайдемо стаціонарні точки на стороні AB трикутника OAB . Рівняння цієї сторони $y = 6 - x$, тому $z = x^2(6 - x)(2 - x - 6 + x) = -4x^2(6 - x)$, $0 \leq x \leq 6$. Далі дістанемо $z'_x = -48x + 12x^2 = 0$, звідки $x_1 = 0$, $x_2 = 4$. Оскільки $y = 6 - x$, то $y_1 = 6$, $y_2 = 2$.

Знаходимо точки $B(0; 6)$ і $C(4; 2)$ і обчислюємо значення $z(C) = -128$. Порівнюючи значення заданої функції в точках A , B , C , O , M , знаходимо найбільше та найменше значення:

$$\max_{(x,y) \in D} z = \frac{1}{4}, \quad \min_{(x,y) \in D} z = -128.$$

Умовний екстремум

Нехай в області D задано функцію $z = f(x, y)$ і лінію L , яка визначається рівнянням $\varphi(x, y) = 0$ та лежить в цій області.

Означення 11.4. Задача відшукування умовного екстремуму полягає в тому, щоб на лінії L знайти таку точку $M(x; y)$, в якій значення функції $f(x, y)$ є найбільшим або найменшим порівняно із значеннями цієї функції в інших точках лінії L . Такі точки M називають точками умовного екстремуму функції $f(x, y)$ на лінії L .

На відміну від звичайного екстремуму значення функції в точці умовного екстремуму порівнюється із значеннями цієї функції не в усіх точках області D (чи δ -околу точки M), а лише

в точках, які лежать на лінії L .

Назва „умовний екстремум“ пов’язана з тим, що змінні x та y мають додаткову умову: $\varphi(x, y) = 0$.

Рівняння $\varphi(x, y) = 0$ називається **рівнянням зв’язку**; якщо це рівняння можна розв’язати відносно однієї змінної, наприклад $y : y = \psi(x)$, то, підставляючи замість y значення $\psi(x)$ у функцію $z = f(x, y)$, дістаємо функцію однієї змінної $z = f(x, \psi(x))$. Оскільки додаткова умова врахована, то задача знаходження умовного екстремуму зводиться до задачі на звичайний екстремум функції однієї змінної.

Проте не завжди можна розв’язати рівняння зв’язку відносно y чи x . Тоді розв’язують поставлену задачу так.

Розглянемо функцію $z = f(x, y)$, де $y = \psi(x)$, як складену функцію. З необхідної умови екстремуму випливає, що в точках екстремуму $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$. У цьому випадку $\frac{dy}{dx}$ означає похідну неявної функції y , заданої рівняннями зв’язку $\phi(x, y) = 0 : \frac{dy}{dx} = -\frac{\phi'_x}{\phi'_y}$, тому $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \left(-\frac{\phi'_x}{\phi'_y}\right) = 0$, тобто $\frac{f'_x}{\phi'_x} = \frac{f'_y}{\phi'_y}$.

Позначивши останні відношення через $(-\lambda)$ ($\lambda \neq 0$) (знак мінус взято для зручності, а саме число λ може мати довільний знак), знайдемо, що в точці умовного екстремуму виконуються умови $\frac{f'_x}{\phi'_x} = \frac{f'_y}{\phi'_y} = -\lambda$, тобто $f'_x + \lambda\phi'_x = 0$, $f'_y + \lambda\phi'_y = 0$.

Отже, стаціонарні точки умовного екстремуму мають задовольняти систему рівнянь

$$\begin{cases} \varphi(x, y) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (11.1)$$

Аналізуючи цю систему, помічаємо, що знаходження умовного екстремуму функції $z = f(x, y)$ звелось до знаходження звичайного екстремуму функції

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y). \quad (11.2)$$

Означення 11.5. Функція (11.2) називається функцією Лагранжа, а число λ — множником Лагранжа. ✓

Умови (11.1) є лише необхідними. Вони дають змогу знайти стаціонарні точки умовного екстремуму. З зауваження 11.1 випливає, що характер умовного екстремуму (достатні умови) можна встановити за знаком диференціала другого порядку функції Лагранжа: якщо в стаціонарній точці $d^2F > 0$ ($d^2F < 0$), то ця точка є точкою умовного мінімуму (максимуму).

Для функції $u = f(x, y, z)$ з рівняннями зв’язку $\phi_1(x, y, z) = 0$, $\phi_2(x, y, z) = 0$ функція Лагранжа записується у вигляді $\Phi(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = f(x, y, z) + \lambda_1\phi_1(x, y, z) + \lambda_2\phi_2(x, y, z)$.

Стаціонарні точки умовного екстремуму знаходяться із системи рівнянь

$$\begin{cases} \phi_1(x, y, z) = 0, \\ \phi_2(x, y, z) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} + \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial z} + \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

а достатні умови існування умовного екстремуму в цих точках можна визначити за знаком диференціала $d^2\Phi$. Розглянутий метод можна поширити на дослідження умовного екстремуму функції довільного числа змінних.

Приклад 11.4. Знайти найбільше значення функції $z = xy$, якщо x та y додатні і задовольняють рівняння зв'язку $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0$. ☺

Розв'язання. Складаємо функцію Лагранжа: $F(x, y, \lambda) = xy + \lambda \left(\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 \right)$. Користуючись системою (11.1), знаходимо стаціонарні точки цієї функції!

$$\begin{cases} \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0, \\ y + \lambda \frac{x}{4} = 0, \\ x + \lambda y = 0, \\ x > 0, y > 0, \end{cases}$$

звідки $x = 2$, $y = 1$, $\lambda = -2$. Отже, маємо одну стаціонарну точку $M(2; 1; -2)$. Щоб визначити характер умовного екстремуму в цій точці, знайдемо другий диференціал функції Лагранжа при $\lambda = -2$:

$$d^2F = -\frac{1}{2}dx^2 + 2dxdy - 2dy^2 + (y - \frac{x}{2})d^2x + (x - 2y)d^2y.$$

Знайшовши з рівняння зв'язку $dy(2; 1) = -\frac{1}{2}dx$, дістанемо

$$d^2F(M) = -\frac{1}{2}dx^2 + 2dx(-\frac{1}{2}dx) - 2(-\frac{1}{2}dx)^2 = -2dx^2 < 0,$$

тому точка $(2; 1)$ є точкою умовного максимуму функції $z = xy$. При цьому $z_{\max} = 2$. Цей результат легко перевірити, знайшовши звичайний екстремум функції: $z = x\sqrt{2 - \frac{x^2}{4}}$. ■

Інтегральне числення функцій однієї змінної

ТЕМА 12. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

Поняття комплексного числа

Означення 12.1. Комплексним числом називається вираз $z = a + bi$, де $a, b \in \mathbb{R}$, а символ i — уявна одиниця, $i = \sqrt{-1}$, яка визначається рівністю $i^2 = -1$. При цьому число a називається дійсною частиною комплексного числа z і позначається $a = \operatorname{Re} z$, а b — уявною частиною числа z , $b = \operatorname{Im} z$ (від французьких слів *real* — дійсний, *imaginaire* — уявний). Множину комплексних чисел позначають через $\mathbb{C}$. ✓

Означення 12.2. Запис комплексного числа у вигляді $a + bi$ називаються алгебраїчною (алгебричною) формою комплексного числа. ✓

Означення 12.3. Два комплексні числа $z = a + bi$ та $\bar{z} = a - bi$, які відрізняються лише знаком уявної частини, називаються спряженими. ✓

Означення 12.4. Два комплексні числа $z_1 = a_1 + b_1i$ та $z_2 = a_2 + b_2i$ вважаються рівними, коли рівні їх дійсні частини і рівні їх уявні частини, тобто $a_1 = a_2$ та $b_1 = b_2$. ✓

Зауважимо, що множина комплексних чисел неупорядкована, тобто їх не можна порівнювати. Натомість комплексні числа можна зображати на площині.

У декартовій системі координат число $z = a + bi$ зображається точкою $M(a, b)$. Така площина називається комплексною площиною змінної z , вісь Ox — дійсна вісь, а Oy — уявна вісь.

Дійсні числа є окремим випадком комплексних чисел. Вони зображаються точками на осі Ox .

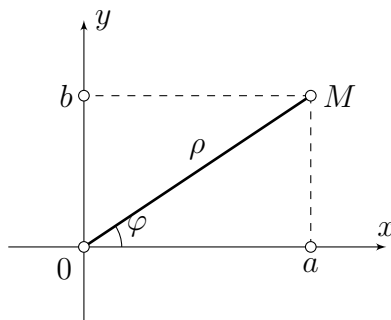


Рисунок 12.1 – Комплексна площина

Означення 12.5. Модулем комплексного числа називається $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$. Кут φ називають аргументом комплексного числа і позначають $\varphi = \text{Arg } z$. ✓

Оскільки $a = \rho \cos \varphi$, $b = \rho \sin \varphi$, то

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (12.1)$$

Означення 12.6. Вираз (12.1) називають тригонометричною формою запису комплексного числа $z = a + bi$. ✓

Модуль $|z| = \rho$ комплексного числа визначається однозначно, а аргумент з точністю до $2\pi k$:

$$\text{Arg } z = \arg z + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}_+.$$

Тут під $\text{Arg } z$ розуміють загальне значення аргументу, а під $\arg z$ — головне значення аргументу. Воно знаходиться на проміжку $[0, 2\pi]$, відраховується від додатного напрямку осі Ox проти годинникової стрілки та обчислюється за формулою

$$\arg z = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x}, & x > 0, \\ \arctg \frac{y}{x} + \pi \text{sign } y, & x < 0, \\ \frac{\pi}{2} \text{sign } y, & x = 0, \end{cases}$$

$$\text{де } \text{sign } y = \begin{cases} 1, & y > 0, \\ 0, & y = 0, \\ -1, & y < 0. \end{cases}$$

Дії над комплексними числами

Основі дії над комплексними числами $z_1 = a_1 + b_1 i$ та $z_2 = a_2 + b_2 i$ визначаються такими рівностями:

1. $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$;
2. $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$;
3. $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$;
4. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2)i}{a_2^2 + b_2^2}$.

Справедлива така формула

$$a^2 + b^2 = (a - bi)(a + bi).$$

Якщо замість алгебричної записати комплексні числа у тригонометричній формі

$$z_1 = \rho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = \rho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2),$$

то

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \rho_1 \rho_2 ((\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)i) = \rho_1 \rho_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Аналогічно можна довести, що для ділення двох комплексних чисел, записаних у тригонометричній формі, справджується рівність:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Для піднесення до натурального степеня комплексного числа справедлива **формула Муавра**:

$$z^n = (\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Для добування кореня з комплексного числа справджується формула:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right),$$

де $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Приклад 12.1. Розв'язати рівняння $z^4 - 1 = 0$.

Розв'язання. $z^4 = 1 \Rightarrow z = \sqrt[4]{\cos 0 + i \sin 0} = \cos \frac{2\pi k}{4} + i \sin \frac{2\pi k}{4}, k = 0, 1, 2, 3$. Тоді $z_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$; $z_1 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$; $z_2 = \cos \pi + i \sin \pi = -1$; $z_4 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i$. ■

Показникову функцію з уявним показником можна виразити через тригонометричні функції за **формулою Ейлера**:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

З цієї формули одержуємо ще одну форму запису комплексного числа:

$$z = e^{i\varphi},$$

яку називають **показниковою формою запису комплексного числа**.

Зауважимо, що завдяки комплексним числам можна встановити такі формули зв'язку між гіперболічними та тригонометричними функціями:

$$\cos x = \operatorname{ch}(xi); \quad \sin x = \frac{\operatorname{sh}(xi)}{i}; \quad \operatorname{sh} x = \frac{\sin(xi)}{i} = -i \sin(xi).$$

Комплексні розв'язки алгебричних рівнянь

Означення 12.7. Многочленом (поліномом) або цілою раціональною функцією називається функція виду

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n, \quad (12.2)$$

де $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \dots, a_n$ — коефіцієнти многочлена, $a_j \in \mathbb{C}$. При цьому n називають степенем многочлена. ✓

Далі розглядатимемо лише многочлени з дійсними коефіцієнтами

Визначення 12.8. Коренем многочлена (12.2) називають таке числове значення змінної $x = x_1$ (дійсне або комплексне), при якому многочлен перетворюється в нуль, тобто таке, що $P_n(x_1) = 0$. ✓

Теорема 12.1 (Безу).

Остача від ділення многочлена $P_n(x)$ на лінійний двочлен $(x - a)$ дорівнює $P_n(a)$. ★

Теорема 12.2 (основна теорема алгебри).

Кожний многочлен степеня $n \geq 0$ має хоча б один корінь, дійсний або комплексний. ★

З цієї теореми випливає, що кожен многочлен $P_n(x)$ завжди можна записати у такому вигляді: $P_n(x) = P_{n-1}(x)(x - a)$.

Повторивши цей процес для $P_{n-1}(x)$ і т.д. отримаємо таке твердження.

Теорема 12.3 (теорема про розклад многочлена).

Кожний многочлен n -го степеня можна подати у вигляді

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n), \quad (12.3)$$

де $x_1, x_2, \dots, x_n$ — корені многочлена, a_0 — коефіцієнт многочлена $P_n(x)$ при x^n . ★

Вираз (12.3) називається **розкладом многочлена на лінійні множники**.

Приклад 12.2.

$$x^3 + x^2 + 9x + 9 = (x + 1)(x - 3i)(x + 3i);$$

$$5x^4 - 40x^3 + 115x^2 - 140x + 60 = 5(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4).$$

Якщо деякі з лінійних множників виду $(x - x_i)$ однакові, то їх можна об'єднати і тоді формула (12.3) набуде вигляду:

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (x - x_r)^{k_r}, \quad (12.4)$$

де r — кількість різних коренів, $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$. У цьому випадку корінь x_1 називають **коренем кратності k_1** або **k_1 -кратним коренем**. Корінь кратності 1 називають **простим коренем**.

Якщо число $\alpha + i\beta$ — комплексний корінь многочлена $P_n(x)$, то можна показати, що число $\alpha - i\beta$ також є коренем $P_n(x)$ з дійсними коефіцієнтами. Тоді

$$\begin{aligned} (x - (\alpha + i\beta))(x - (\alpha - i\beta)) &= (x - \alpha - i\beta)(x - \alpha + i\beta) = (x - \alpha)^2 - (\beta i)^2 = \\ &= x^2 - 2x\alpha + \alpha^2 + \beta^2 = x^2 + px + q. \end{aligned}$$

Тобто $P_n(x) = a_0(x - x_0)^{k_1} \cdot \dots \cdot (x - x_m)^{k_m}(x^2 + p_1x + q_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_sx + q_s)^{l_s}$, де k_i — кратності дійсних коренів ($i = 1, 2, \dots, m$), l_j — кратності комплексно спряжених коренів ($j = 1, 2, \dots, s$), $k_1 + k_2 + \dots + k_m + 2(l_1 + l_2 + \dots + l_s) = n$, $a_0, x_i, p_j, q_j \in \mathbb{R}$, при чому $p_j^2 - 4q_j < 0$.

Отже, кожний многочлен з дійсними коефіцієнтами можна розкласти на добуток лінійних та квадратних тричленів з дійсними коефіцієнтами.

ТЕМА 13. ПЕРВІСНА ФУНКЦІЯ ТА НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Поняття первісної та невизначеного інтеграла

Визначення 13.1. Функція $F(x)$ називається первісною функції $f(x)$ на проміжку (a, b) , якщо $F(x)$ диференційовна на (a, b) і $F'(x) = f(x)$ для всіх $x \in (a, b)$.

Приклад 13.1. Первісною функції $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, є функція $F(x) = \frac{x^3}{3}$. ☺

Розв'язання. Дійсно, $F'(x) = (\frac{x^3}{3})' = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Очевидно, що первісними будуть також функції $F(x) = \frac{x^3}{3} + 1$, $F(x) = \frac{x^3}{3} + 2$, і взагалі $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$, де C — довільна стала. ■

Теорема 13.1.

Якщо функція $F(x)$ — первісна функції $f(x)$ на (a, b) , то кожна інша первісна цієї функції $f(x)$ на цьому самому проміжку (a, b) має вигляд $F(x) + C$. ★

Визначення 13.2. Якщо $F(x)$ — первісна функції $f(x)$ на проміжку (a, b) і C — довільна стала, то вираз $F(x) + C$ називається невизначеним інтегралом функції $f(x)$ на цьому проміжку (a, b) і позначається символом $\int f(x)dx$. Отже, запис $\int f(x)dx$ означає множину всіх первісних функції $f(x)$. ✓

Визначення 13.3. Символ $\int$ називають інтегралом, $f(x)dx$ — підінтегральним виразом, $f(x)$ — підінтегральною функцією, x — змінною інтегрування. ✓

Отже,

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

де $F'(x) = f(x)$, $x \in (a, b)$.

Визначення 13.4. Операцію знаходження невизначеного інтеграла від функції називають інтегруванням цієї функції. ✓

Властивості невизначеного інтеграла

1. $(\int f(x)dx)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$.

2. $\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C.$
3. $d(\int f(x)dx) = (\int f(x)dx)'dx = f(x)dx.$
4. $\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx.$
5. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$
6. Якщо $\int f(x) = F(x) + C$ і $u = \varphi(x)$ — довільна функція, що має неперервну похідну, то

$$\int f(u)du = F(u) + c$$

(інваріантність форми інтегрування).

7. Якщо $\int f(x) = F(x) + C$, то $\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C$, де $a, b \in \mathbb{R}$.

Таблиця інтегралів

Зазначимо, що інтеграли від найпростіших ірраціональних та дробових виразів та основних елементарних функцій утворюють так звану **таблицю інтегралів**, наведену нижче.

$\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1;$	$\int \frac{du}{u} = \ln u + C;$
$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C;$	$\int e^u du = e^u + C;$
$\int \sin u du = -\cos u + C;$	$\int \cos u du = \sin u + C;$
$\int \operatorname{sh} u du = \operatorname{ch} u + C;$	$\int \operatorname{ch} u du = \operatorname{sh} u + C;$
$\int \operatorname{tg} u du = -\ln \cos u + C;$	$\int \operatorname{ctg} u du = \ln \sin u + C;$
$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C;$	$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C;$
$\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C;$	$\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = -\operatorname{th} u + C;$
$\int \frac{du}{\sin u} = \ln \left \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right + C;$	$\int \frac{du}{\cos u} = \ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right) \right + C;$
$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C;$	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + A}} = \ln u + \sqrt{u^2 + A} + C;$
$\int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{u}{a} + C;$	$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{u-a}{u+a} \right + C;$
$\int \sqrt{u^2 + A} du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 + A} + \frac{A}{2} \ln u + \sqrt{u^2 + A} + C;$	$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C.$

Основні методи інтегрування

1. **метод безпосереднього інтегрування.** Він полягає у обчислення інтегралів за допомогою основних властивостей невизначеного інтеграла і використання таблиці інтегралів.

Приклад 13.2. Обчислити інтеграл:

$$\begin{aligned} \int (2x + \sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}}) dx &= 2 \int x dx + \int x^{1/2} dx + 3 \int x^{-1/3} dx = \\ &= x^2 + \frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} + 3 \frac{x^{-1/3+1}}{-1/3+1} + C = x^2 + \frac{2}{3} x \sqrt{x} + \frac{9}{2} \sqrt[3]{x^2} + C. \end{aligned} \quad \odot$$

Приклад 13.3. Обчислити інтеграл:

$$\begin{aligned} \int (\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2})^2 dx &= \int (\cos^2 \frac{x}{2} + 2 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}) dx = \int (1 + \sin x) dx = \\ &= x - \cos x + C. \end{aligned} \quad \odot$$

2. **метод підстановки (заміни змінної).** Суть методу полягає у введенні нової змінної інтегрування. Він ґрунтується на такій теоремі.

Теорема 13.2 (про заміну змінної у невизначеному інтегралі).

Нехай $F(x)$ — первісна для функції $f(x)$ на проміжку (a, b) , тобто $\int f(x)dx = F(x) + C$, $x \in (a, b)$ і нехай функція $x = \varphi(t)$ визначена і диференційовна на проміжку (α, β) , причому множиною значень цієї функції є проміжок (a, b) . Тоді справедлива формула:

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C, \quad t \in (\alpha, \beta). \quad (13.1)$$



Формулу (13.1) записують так:

$$\int g(x)dx = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + C.$$

Приклад 13.4. Обчислити інтеграл:

$$\int \frac{(2 \ln x + 3)^3}{x} dx = \left| \begin{array}{l} u = 2 \ln x + 3 \\ du = 2 \frac{dx}{x} \\ \frac{du}{2} = \frac{dx}{x} \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int u^3 du = \frac{1}{8} u^4 + C = \frac{1}{8} (2 \ln x + 3)^4 + C.$$

3. **метод введення функції під знак диференціала.** При достатньому вмінні диференціювати та знанні таблиць інтегралів нову змінну u можна не вводити, але мати її на увазі:

$$\begin{aligned} \int g(x)dx &= \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \left| \begin{array}{l} \varphi(x) = u \\ \varphi'(x)dx = du \end{array} \right| = \int f(u)du = \\ &= F(u) + C = F(\varphi(x)) + C. \end{aligned}$$

Приклад 13.5. Обчислити інтеграл:

$$\int \frac{\sqrt[3]{3+5 \operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{5} \int (3+5 \operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{2}} d(3+5 \operatorname{ctg} x) = -\frac{3}{20} (3+5 \operatorname{ctg} x)^{\frac{4}{3}} + C.$$

4. **метод інтегрування частинами.** Нехай $u(x)$, $v(x)$ — функції, що мають на деякому проміжку неперервні похідні. Тоді справджується формула

$$\int u dv = uv - \int v du, \quad (13.2)$$

яку називають **формулою інтегрування частинами**.

У деяких випадках формулу (13.2) застосовують підряд кілька разів. Цією формулою зручно обчислювати такі типи інтегралів:

- 1) інтеграли виду $\int P(x)e^{kx}dx$, $\int P(x)\sin kx dx$, $\int P(x)\cos kx dx$, де $P(x)$ — многочлен, $k \in \mathbb{R}$. У цих інтегралах за множник u беруть $P(x)$, а за dv — вираз, що залишився.
- 2) інтеграли виду $\int P(x)\ln x dx$, $\int P(x)\arcsin x dx$, $\int P(x)\arccos x dx$, $\int P(x)\operatorname{arctg} x dx$, де $P(x)$ — многочлен. У цих інтегралах $dv = P(x)dx$, du — решта виразу, що залишився.
- 3) інтеграли виду $\int e^{ax}\sin \beta x dx$, $\int e^{ax}\cos \beta x dx$, де $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тут після двократного застосування формули інтегрування частинами утворюється лінійне рівняння відносно шуканого інтеграла. Розв'язуючи це рівняння, знаходять інтеграл.

Приклад 13.6. Обчислити інтеграл:

$$\begin{aligned} \int (2x+1)\sin x dx &= \left| \begin{array}{l} u = 2x+1, \quad du = 2dx \\ dv = \sin x dx, \quad v = \int \sin x dx = -\cos x \end{array} \right| = \\ &= -(2x+1)\cos x - \int (-\cos x)2dx = -(2x+1)\cos x + 2\sin x + C. \end{aligned} \quad \odot$$

Приклад 13.7. Обчислити інтеграл:

$$\begin{aligned} \int e^x \sin 2x dx &= \left| \begin{array}{l} u = e^x, \quad du = e^x dx \\ dv = \sin 2x dx, \quad v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{array} \right| = -\frac{1}{2}e^x \cos 2x + \frac{1}{2} \int e^x \cos 2x dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = e^x, \quad du = e^x dx \\ dv = \cos 2x, \quad v = \frac{\sin 2x}{2} \end{array} \right| = -\frac{1}{2}e^x \cos 2x + \frac{1}{4}e^x \sin 2x - \int \frac{1}{4}e^x \sin 2x dx + C. \end{aligned} \quad \odot$$

Звідси одержуємо:

$$\int e^x \sin 2x dx = -\frac{1}{2}e^x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{4} \int e^x \sin 2x dx + C.$$

Розв'язавши це рівняння відносно інтеграла, отримуємо:

$$\int e^x \sin 2x dx = \frac{1}{5}e^x(\sin 2x - 2\cos 2x) + C.$$

ТЕМА 14. ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ВИРАЗІВ

Розклад раціональної функції на прості дроби

Раціональні функції складають важливий клас функцій, інтеграли від яких завжди виражаються через елементарні функції. Нехай треба обчислити:

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx,$$

де $P_m(x)$, $Q_n(x)$ — многочлени степенів відповідно m , n . Спершу виділяють цілу частину раціональної функції, поділивши чисельник на знаменник. Тоді отримають таке:

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx = \int W_k(x) dx + \int \frac{R_p(x)}{Q_n(x)} dx,$$

де $p < n$, $P_m(x)$, $Q_n(x)$, $W_k(x)$, $R_p(x)$ — многочлени степенів відповідно m , n , k , p . Інтеграл від многочлена $W_k(x)$ знаходять безпосередньо, використовуючи властивості інтеграла та таблицю інтегралів. А інтеграл від дробу $\frac{R_p(x)}{Q_n(x)}$ зводиться до інтегралів від елементарних дробів. Для цього розкладають знаменник на добуток лінійних множників та квадратичних тричленів, які мають лише комплексні корені, тобто дискримінант яких — невід’ємне число. Після цього відповідний дріб $\frac{R_p(x)}{Q_n(x)}$ можна записати у вигляді суми дробів, в знаменниках яких будуть згадані лінійні множники та квадратичні тричлени:

$$\begin{aligned} \frac{R_p(x)}{Q_n(x)} = & \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \dots + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \dots + \\ & + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \frac{M_\mu x+N_\mu}{(x^2+px+q)^\mu} + \dots + \frac{L_1x+F_1}{x^2+lx+s} + \\ & + \frac{L_2x+F_2}{(x^2+lx+s)^2} + \dots + \frac{L_\nu x+F_\nu}{(x^2+lx+s)^\nu}, \end{aligned} \quad (14.1)$$

де $A_1, \dots, A_\alpha, B_1, \dots, B_\beta, M_1, N_1, \dots, M_\mu, N_\mu, L_1, F_1, \dots, L_\nu, F_\nu \in \mathbb{R}$, $Q_n(x) = a_0(x-a)^\alpha \cdot \dots \cdot (x-b)^\beta (x^2+px+q)^\mu \cdot \dots \cdot (x^2+lx+s)^\nu$.

Зауважимо, що коефіцієнти, які є у чисельниках формули (14.1) можна знайти **методом не-визначених коефіцієнтів (метод прирівнювання коефіцієнтів)**. Суть його така: множаться обидві частини рівності (14.1) на $Q_n(x)$, внаслідок чого дістають два тотожно рівні многочлени: відомий многочлен $R_p(x)$ і многочлен з невідомими коефіцієнтами $A_1, \dots, F_\nu$. Прирівнюючи їхні коефіцієнти при однакових степенях x , дістаємо систему лінійних рівнянь, з якої визначаємо невідомі $A_1, \dots, F_\nu$.

Крім методу невизначених коефіцієнтів, суть якого у прирівнюванні коефіцієнтів, користуються також **методом окремих значень аргументів**. Нехай після множення (14.1) дістали два тотожно рівні многочлени, один з яких — відомий, а другий з невідомими коефіцієнтами. Надаючи змінній конкретні значення стільки разів, скільки невідомих коефіцієнтів, дістанемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, з якої і визначаємо шукані коефіцієнти. Система рівнянь значно спрощується, коли змінній x надавати значення дійсних коренів знаменника $Q_n(x)$. Іноді зручно скористатися комбінованим методом, тобто деякі з невідомих коефіцієнтів визначають, надаючи змінній x значення дійсних коренів знаменника, а інші — визначають методом прирівнювання.

Інтеграли від елементарних дробів

Означення 14.1. Елементарними раціональними дробами називаються дробки такого вигляду:

$$\frac{A}{(x-a)^n}, \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

де $A, a, M, N, p, q \in \mathbb{R}$, і квадратний тричлен не має дійсних коренів, тобто $p^2 - 4q < 0$.

Обчислимо інтеграли від елементарних дробів.

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \ln |x-a| + C.$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = A \int (x-a)^{-n} d(x-a) = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C.$$

$$\begin{aligned}\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx &= \left| \begin{array}{l} x = t - \frac{p}{2}, \\ dx = dt, \end{array} \right| = \int \frac{M(t - \frac{p}{2}) + N}{(t - \frac{p}{2})^2 + p(t - \frac{p}{2}) + q} dt = \int \frac{Mt + N - M\frac{p}{2}}{t^2 + q - \frac{p^2}{4}} dt = \\ &= M \int \frac{t dt}{t^2 + q - \frac{p^2}{4}} + \left(N - \frac{Mp}{2} \right) \int \frac{dt}{t^2 + (q - \frac{p^2}{4})}.\end{aligned}$$

$$\int \frac{t}{t^2 + q - \frac{p^2}{4}} dt = \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2 + q - \frac{p^2}{4})}{t^2 + q - \frac{p^2}{4}} = \frac{1}{2} \ln |t^2 + q - \frac{p^2}{4}| + C.$$

А другий інтеграл є табличним, бо за умовою $q - \frac{p^2}{4} > 0$.

Інтеграл виду $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} dx$, $p^2 - 4q \leq 0$, $n \geq 2$, підстановкою $x = t - \frac{p}{2}$, зводиться до двох інтегралів:

$$\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n} dx = M \int \frac{t dt}{(t^2 + a^2)^n} + \left(N - \frac{Mp}{2} \right) \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^n},$$

де $a^2 = q - \frac{p^2}{4}$.

Перший інтеграл береться безпосередньо за формулою:

$$M \int \frac{t dt}{(t^2 + a^2)^n} = -\frac{M}{2} \frac{1}{(n-1)(t^2 + a^2)^{n-1}} + C,$$

а другий обчислюється за такою рекурентною формулою:

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^n} = \frac{t}{2a^2(n-1)(t^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2} \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}.$$

Приклад 14.1. Обчислити інтеграл:

$$\int \frac{2x + 3}{x^2 + 4x + 9} dx.$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned}\int \frac{2x + 3}{x^2 + 4x + 9} dx &= \left| \begin{array}{l} x = t - 2, \\ dx = dt, \\ t = x + 2 \end{array} \right| = \int \frac{2(t - 2) + 3}{(t - 2)^2 + 4(t - 2) + 9} dt = \int \frac{2t - 1}{t^2 + 5} dt = \\ &= \int \frac{2t}{t^2 + 5} dt - \int \frac{dt}{t^2 + 5} = \ln |t^2 + 5| - \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{5}} + C = \\ &= \ln(x^2 + 4x + 9) - \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x + 2}{\sqrt{5}} + C. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Приклад 14.2. Обчислити інтеграл:

$$\int \frac{x^2 + 2x^3 + 5x^2 + 1}{x(x^2 + 1)^2} dx.$$

Розв'язання. Оскільки степені чисельника рівний 4, а степені знаменника дорівнює 5, то у цьому раціональному виразі не потрібно виділяти цілу частину ділення чисельника на знаменник. Враховуючи розклад знаменника на множники, запишемо розклад для підінтегрального виразу на суму елементарних дробів, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів:

$$\frac{x^2 + 2x^3 + 5x^2 + 1}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 1)^2}.$$

Зведемо до спільного знаменника та запишемо відповідні чисельники у лівій та правій частинах рівності:

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^2 + 5x^2 + 1 &\equiv A(x^2 + 1)^2 + (Bx + C)(x^2 + 1)x + (Dx + E)x = \\ &= (A + B)x^4 + Cx^3 + (2A + B + D)x^2 + (C + E)x + A. \end{aligned}$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x :

$$\begin{cases} A + B = 1, \\ C = 2, \\ 2A + B + D = 5, \\ C + E = 0, \\ A = -1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1, \\ B = 2, \\ C = 2, \\ D = 5, \\ E = -2. \end{cases}$$

Тепер перейдемо до обчислення інтеграла, враховуючи отриманий нами його розклад на суму елементарних дробів:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 2x^3 + 5x^2 + 1}{x(x^2 + 1)^2} dx &= \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{2x + 2}{x^2 + 1} + \frac{5x - 2}{(x^2 + 1)^2} \right) dx = \\ &= -\ln|x| + \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx + \int \frac{2}{x^2 + 1} dx + \int \frac{5x}{(x^2 + 1)^2} dx - 2 \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= -\ln|x| + \int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} + 2 \arctg x + \frac{5}{2} \int \frac{d(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^2} - 2 \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= -\ln|x| + \ln|x^2 + 1| + 2 \arctg x - \frac{5/2}{x^2 + 1} - 2 \int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx = \\ &= \ln \frac{x^2 + 1}{|x|} - \frac{5/2}{x^2 + 1} + 2 \arctg x - 2 \int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx = \left| \begin{array}{l} \text{застосувавши} \\ \text{рекурентну} \\ \text{формулу} \end{array} \right| = \\ &= \ln \frac{x^2 + 1}{|x|} - \frac{5/2}{x^2 + 1} + 2 \arctg x - \frac{x}{x^2 + 1} - \arctg x + C = \\ &= \ln \frac{x^2 + 1}{|x|} - \frac{5/2}{x^2 + 1} + \arctg x - \frac{x}{x^2 + 1} + C. \end{aligned}$$

Приклад 14.3. Обчислити інтеграл:

$$\int \frac{x^5 + 2}{x^3 - 1} dx.$$

Розв'язання. Під знаком інтеграла маємо неправильний дріб (степінь чисельника більший за степінь знаменника), тому спочатку виділимо його цілу частину, поділивши чисельник на знаменник:

$$\frac{x^5 + 2}{x^3 - 1} = x^2 + \frac{x^2 + 2}{x^3 - 1}.$$

Звідси

$$\frac{x^5 + 2}{x^3 - 1} = x^2 + \frac{x^2 + 2}{x^3 - 1}.$$

Розклавши правильний дріб на елементарні, маємо:

$$\frac{x^2 + 2}{x^3 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x :

$$x^2 + 2 \equiv A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x - 1) = (A + B)x^2 + (A - B + C)x + (A - C).$$

Скористаємось комбінованим методом знаходження коефіцієнтів A, B, C . Якщо $x = 1$, то $3 = 3A$ або $A = 1$. Тоді із $A + B = 0$ отримуємо $B = 0$. Оскільки $A - C = 2$, то $C = -1$. Далі гіст'анемо:

$$\int \frac{x^5 + 2}{x^3 - 1} dx = \int \left(x^2 + \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x^2 + x + 1} \right) dx = \frac{x^3}{3} + \ln|x - 1| - \int \frac{dx}{x^2 + x + 1}.$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + x + 1} = \left| \frac{x = t - \frac{1}{2}}{dx = dt} \right| = \int \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{x}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C.$$

Отже,

$$\int \frac{x^5 + 2}{x^3 - 1} dx = \frac{x^3}{3} + \ln|x - 1| - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C.$$

ТЕМА 15. ІНТЕГРУВАННЯ ТРАНСЦЕНДЕНТНИХ ВИРАЗІВ

Інтегрування деяких ірраціональних функцій

Зауважимо, що інтеграли від ірраціональних та інших трансцендентних виразів не завжди обчислюються в елементарних функціях. Нехай $R(u, v, \dots, s)$ — раціональна функція змінних $u, v, \dots, s$, тобто така функція, в якій над зазначеними змінними та дійсними числами виконується скінченна кількість чотирьох арифметичних операцій $+$, $-$, $\cdot$, та ділення. Інтеграли виду

$$\int R \left(x, \left(\frac{ax + b}{cx + d} \right)^{\frac{m}{n}}, \dots, \left(\frac{ax + b}{cx + d} \right)^{\frac{r}{s}} \right) dx$$

зводяться до раціональних виразів підстановкою $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$, де k — спільний знаменник дробів $\frac{m}{n}, \dots, \frac{r}{s}$.

Приклад 15.1. Обчислити інтеграл

$$\int \frac{1}{(x-1)^2} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} dx = \left| \begin{array}{l} \frac{x+1}{x-1} = t^3, \\ x = \frac{t^3+1}{t^3-1}, \\ dx = -\frac{6t^2}{(t^3-1)^2} dt; \\ x-1 = \frac{2}{t^3-1}. \end{array} \right| = \int \frac{(t^3-1)^2 t}{4} \cdot \frac{(-6t^2)}{(t^3-1)^2} dt = -\frac{3}{2} \int t^3 dt =$$

$$= -\frac{3}{8} t^3 + C = -\frac{3}{8} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{\frac{4}{3}} + C. \quad \text{☺}$$

Інтегрування диференціальних біномів

Розглянемо тепер інтегрування диференціальних біномів.

Визначення 15.1. Вираз виду $x^m(a+bx^n)^p$, де m, n, p — раціональні числа, $a, b \in \mathbb{R}$, називається диференціальним біномом.

Для диференціальних біномів справджується така теорема.

Теорема 15.1 (Чебишова).

Інтеграл від диференціального бінома $\int x^m(a+bx^n)^p dx$ виражається через інтеграл від раціональної функції відносно нової змінної, якщо:

- 1) p — ціле число, тоді підстановка $x = t^s$, де s — найменший спільний знаменник дробів m і p .
- 2) $\frac{m+1}{n}$ — ціле число, тоді підстановка $a+bx^n = t^r$, де r — знаменник дроби p .
- 3) $\frac{m+1}{n} + p$ — ціле число, то підстановка $ax^{-n} + b = t^r$, де r — знаменник дроби p . ★

У інших випадках інтеграл від диференціального бінома не виражається через елементарні функції.

Приклад 15.2. Обчислити інтеграл:

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx.$$

Розв'язання.

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx = \left| \begin{array}{l} m = -\frac{1}{2}, n = \frac{1}{4}, p = \frac{1}{3}, \frac{m+n}{n} = 2 \in \mathbb{Z}, \\ \text{група підстановки Чебишова} \\ t^3 = 1 + x^{1/4}, x = (t^3 - 1)^4, \\ dx = 12t^2(t^3 - 1)^3 dt. \end{array} \right| = 12 \int (t^6 - t^3) dt =$$

$$= \frac{12}{7}t^7 - 3t^4 + C = \frac{12}{7}(1 + \sqrt[4]{x})^{7/3} - 3(1 + \sqrt[4]{x})^{4/3} + C. \quad \blacksquare$$

Інтеграли від тригонометричних виразів

Інтеграли виду $\int R(\sin x, \cos x)dx$ завжди раціоналізуються підстановкою $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, яка називається універсальною. Дійсно,

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}; \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

Але ця підстановка часто призводить до раціональних дробів з великими степенями. Тому в деяких випадках використовують інші підстановки:

1. $\int R(\sin x) \cos x dx$, підстановка $\sin x = t$.
2. $\int R(\cos x) \sin x dx$, підстановка $\cos x = t$.
3. $\int R(\operatorname{tg} x) dx$, підстановка $\operatorname{tg} x = t$.
4. $\int R(\sin x, \cos x) dx$ підстановка $\cos x = t$ у випадку, коли R — непарна стосовно $\sin x$, тобто $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, або $\sin x = t$, якщо R — непарна стосовно $\cos x$, тобто $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$.
5. $\int \sin^m x \cos^n x dx$, якщо n — ціле додатне непарне число, то $t = \sin x$, або якщо m — ціле додатне непарне число, то $\cos x = t$.

Якщо m і n — цілі додатні парні числа, то спершу понижують степінь

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

Якщо m і n — цілі парні числа, але хоча б одне з них від'ємне, то підстановка $t = \operatorname{tg} x$.
Якщо m і n — цілі непарні від'ємні числа, то підстановка $t = \operatorname{tg} x$.

Приклад 15.3. Обчислити інтеграл виду

$$\int \frac{1}{\sin x} dx.$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin x} dx &= \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ dx = \frac{2}{1+t^2} dt \end{array} \right| = \int \frac{2}{(1+t^2)(\frac{2t}{1+t^2} + 1)} dt = 2 \int \frac{dt}{(1+t^2)^2} = -\frac{2}{1+t^2} + C = \\ &= -\frac{2}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + C. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Підстановки Ейлера

Інтеграл виду $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$ за допомогою підстановки $x = t - \frac{b}{2a}$ зводиться до одного з таких інтегралів:

1. $\int R(t, \sqrt{t^2 + m^2})dt$, а далі підстановка $t = m \operatorname{tg} z$;
2. $\int R(t, \sqrt{t^2 - m^2})dt$, а далі підстановка $t = \frac{m}{\sin z}$;
3. $\int R(t, \sqrt{m^2 - t^2})dt$, а далі підстановка $t = m \sin z$.

Після цієї підстановки отримуємо інтеграл виду $\int R(\sin x, \cos x)dx$. Необхідно зазначити, що інтеграли виду $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$ виражаються через раціональні функції також за допомогою так званих підстановок Ейлера:

1. якщо $a > 0$, то $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{ax} + t$;
2. якщо $c > 0$, то $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}$;
3. якщо $b^2 - 4ac > 0$, то $\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha)t$, де α — корінь тричлена $ax^2 + bx + c = 0$.

Для інтегралів виду $\int R(e^x)dx$ застосовна підстановка $e^x = t$.

Інтеграли, що „не беруться“

Як видно було з диференціального числення, похідна від довільної елементарної функції є такою функцією елементарною. Інакше кажучи, операція диференціювання не виводить нас із класу елементарних функцій. Цього не можна сказати про інтегрування — операцію, обернену до диференціювання. Інтегрування елементарної функції не завжди знову приводить до елементарної функції. Подібне спостерігається й для інших взаємообернених операцій: сума довільних натуральних чисел є завжди число натуральне, а різниця — ні; добуток двох цілих чисел завжди є цілим числом, а частка — ні і т. п. Строго доведено, що існують елементарні функції, інтеграли від яких не є елементарними функціями. Про такі інтеграли кажуть, що вони не обчислюються в скінченному вигляді або „не беруться“.

Наприклад, доведено, що „не беруться“ такі інтеграли:

- $\int e^{-x^2} dx = \varphi(x)$ — інтеграл (функція) Пуассона (застосовується у теорії ймовірностей);
- $\int \cos x^2 dx = C(x)$, $\int \sin x^2 dx = S(x)$ — інтеграли Френеля (застосовується у оптиці при вивченні дифракції);
- $\int \frac{\cos x}{x} dx = ci(x)$ — інтегральний косинус;
- $\int \frac{\sin x}{x} dx = si(x)$ — інтегральний синус;
- $\int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} dx$, $|k| < 1$, — еліптичний інтеграл (еліптичні функції використовуються у шифруванні);
- $\int x^\alpha \sin x dx$, $\int x^\alpha \cos x dx$, $\int x^\alpha e^x dx$, $\alpha \notin \mathbb{N}$

та ряд інших інтегралів.

Вказані інтеграли хоча й існують, але не є елементарними функціями. В подібних випадках первісна являє собою деяку нову, неелементарну функцію, тобто функцію, яка не виражається через скінченне число арифметичних операцій і композицій над основними елементарними

функціями. Неелементарні (або так звані спеціальні) функції розширюють істотно множину елементарних функцій.

Зрозуміло, що інтеграл, який не обчислювався в класі елементарних функцій, може виявитись таким, що обчислюється в розширеному класі функцій. Таким чином, інтегрування в порівнянні з диференціюванням — операція набагато складніша. Тому треба твердо володіти основними методами інтегрування і чітко знати види функцій, інтеграли від яких цими методами знаходяться. Крім того, виявляється, що треба розрізняти також інтеграли, які „не беруться“. Тому в інженерній практиці широко користуються довідниками, в яких містяться докладні таблиці інтегралів, що виражаються через елементарні і неелементарні функції.

ТЕМА 16. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Задачі, що приводять до визначеного інтеграла

1. **Задача про площу криволінійної трапеції.** Нехай на відрізку $[a; b]$ задано функцію $y = f(x) > 0$. Фігура, обмежена графіком даної функції і відрізками прямих $y = 0$, $x = a$, $x = b$, називається криволінійною трапецією. Обчислити площу S цієї трапеції.

Розіб'ємо відрізок $[a; b]$ за допомогою точок $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ на n частинних відрізків $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$.

На кожному з цих відрізків візьмемо довільну точку $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ і обчислимо значення $f(\xi_i)$. Тоді добуток $f(\xi_i)\Delta x_i$, де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, дорівнює площі прямокутника з основою Δx_i і висотою $f(\xi_i)$, а сума цих добутків — площі ступінчастої фігури і наближено дорівнює площі криволінійної трапеції: $S \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$.

Із зменшенням усіх величин Δx_i точність цієї формули збільшується, тому природно за площу криволінійної трапеції вважати границю площ ступінчастих фігур за умови, що максимальна довжина частинних відрізків прямує до нуля:

$$S = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i. \quad (16.1)$$

2. **Задача про роботу змінної сили.** Нехай на матеріальну точку діє сила F , яка стала за напрямом і неперервно змінюється за величиною, і нехай під дією цієї сили точка перемістилася вздовж осі Ox з точки a в точку b ($a < b$). Обчислити роботу A цієї сили на відрізку $[a; b]$.
задача про роботу змінної сили

У кожній точці $x \in [a; b]$ діє сила F , яка за умовою є неперервною функцією від x : $F = F(x)$. Розіб'ємо відрізок $[a; b]$ точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ на n частинних відрізків $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$. Припустимо, що кожний з частинних відрізків такий малий, що силу $F(x)$ на ньому можна вважати сталою і рівною значенню функції $F(x)$ в деякій довільно вибраній точці $x = \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$: $F = F(\xi_i)$. Робота, виконана цією силою на відрізку $[x_{i-1}, x_i]$ дорівнює добутку $F(\xi_i)\Delta x_i$, де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Насправді, на відрізку $[x_{i-1}, x_i]$ сила $F(x)$ змінюється, тому вираз $F(\xi_i)\Delta x_i$ дає лише наближене значення роботи на цьому відрізку.

Оскільки робота на відрізку $[a; b]$ дорівнює сумі робіт на всіх частинних відрізках, то $A \approx \sum_{i=1}^n F(\xi_i)\Delta x_i$. Ця наближена рівність тим точніша, чим менші довжини Δx_i . Тому

природно за роботу сили $F(x)$ на шляху $[a; b]$ вважати границю одержаної суми:

$$A = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(\xi_i) \Delta x_i. \quad (16.2)$$

3. **Задача про пройдений шлях.** Нехай точка рухається по прямій з швидкістю $v = v(t)$, де v — неперервна функція часу t . Треба визначити шлях s , який пройде точка за проміжок часу $[a; b]$ від моменту $t = a$ до моменту $t = b$ ($a < b$).

Розіб'ємо відрізок $[a; b]$ точками $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ на n частинних проміжків часу $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, 2, \dots$. Припустимо, що відрізок $[t_{i-1}, t_i]$ такий малий, що швидкість $v(t)$ при $t \in [t_{i-1}, t_i]$ змінюється мало. Тоді її можна вважати на цьому відрізку сталою і рівною, наприклад, $v(\xi_i)$, де $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Це означає, що рух точки на проміжку $[t_{i-1}, t_i]$ вважається рівномірним, тому шлях, пройдений точкою за час $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, дорівнює добутку $v(\xi_i) \Delta t_i$, а шлях, пройдений за час $[a; b]$, виражається наближеною формулою $s \approx \sum_{i=1}^n v(\xi_i) \Delta t_i$.

Ця наближена рівність тим точніша, чим менші величини Δt_i . Тому природно за шлях s вважати границю знайденої суми:

$$s = \lim_{\max \Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n v(\xi_i) \Delta t_i. \quad (16.3)$$

4. **Задача про масу неоднорідного стержня.** Нехай маємо прямолінійний стержень, який лежить на осі Ox в межах відрізка $[a; b]$. Треба знайти масу m цього стержня, якщо його густина γ є деякою неперервною функцією від x : $y = y(x)$.

Розіб'ємо стержень на n довільних частин $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$ точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$.

Якщо відрізок $[x_{i-1}, x_i]$ достатньо малий, то функція $\gamma(x)$ на ньому змінюється мало, тому маса частини стержня $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, яка відповідає цьому відрізку, наближено дорівнює добутку $\gamma(\xi_i) \Delta x_i$, де $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, а маса всього стержня

Точне значення маси знайдемо як границю цієї суми, коли

$$m = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \gamma(\xi_i) \Delta x_i. \quad (16.4)$$

Усі розглянуті задачі привели нас до однієї й тієї самої математичної операції — знаходження границі певного виду сум. Проте границі (16.2)-(16.4) не зовсім звичайні. Справді, суми під знаком границі залежать не тільки від заданої функції, а й від точок розбиття x_i , t_i і від точок ξ_i . Число точок прямує до нескінченності, коли довжина максимального частинного відрізка прямує до нуля.

Інакше кажучи, у кожному випадку, тобто для кожної заданої функції, йдеться про знаходження границі суми нескінченно великого числа нескінченно малих доданків.

До такої самої математичної операції над функціями приводять багато інших задач, тому виникає потреба всебічного вивчення цієї операції, незалежно від конкретного змісту тієї чи іншої задачі.

Означення та умови існування визначеного інтеграла

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[a; b]$, $a < b$. Розіб'ємо цей відрізок на n довільних частин точками:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Означення 16.1. Сукупність точок $x_0, x_1, \dots, x_n$ позначимо через τ і назовемо τ -розбиттям відрізка $[a, b]$. ✓

На кожному частинному відрізку $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, візьмемо довільну точку $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ і побудуємо суму

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i, \quad (16.5)$$

де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ — довжина відрізка $[x_{i-1}, x_i]$.

Означення 16.2. Сума (16.5) називається інтегральною сумою функції $f(x)$, яка відповідає τ -розбиттю відрізка $[a; b]$ на частинні відрізки і даному вибору проміжних точок ξ_i . ✓

Позначимо через λ довжину найбільшого частинного відрізка τ -розбиття і назовемо його **діаметром цього розбиття**.

Означення 16.3. Якщо існує скінченна границя інтегральної суми (16.5) при $\lambda \rightarrow 0$, яка не залежить ні від τ -розбиття, ні від вибору точок ξ_i , то ця границя називається визначеним інтегралом функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ і позначається символом $\int_a^b f(x) dx$. ✓

Отже, згідно з означенням

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i. \quad (16.6)$$

У цьому випадку функція $f(x)$ називається **інтегрованою на відрізку $[a; b]$** . Числа a і b називаються відповідно **нижньою і верхньою межею інтегрування**; функція $f(x)$ називається **підінтегральною функцією**; $f(x) dx$ — **підінтегральним виразом**, x — **змінною інтегрування**; $[a; b]$ — **проміжком інтегрування**.

Повертаючись до попередніх задач на основі рівностей (16.2)-(16.6), можна сказати, що:

1. площа S криволінійної трапеції, обмеженої прямими $y = 0$, $x = a$, $x = b$ і графіком функції $y = f(x) \geq 0$, дорівнює визначеному інтегралу від цієї функції:

$$S = \int_a^b f(x) dx. \quad (16.7)$$

У цьому полягає геометричний зміст визначеного інтеграла: визначений інтеграл від невід'ємної функції чисельно дорівнює площі відповідної криволінійної трапеції;

2. робота A змінної сили $P(x)$, яка діє на відрізку $[a; b]$, дорівнює визначеному інтегралу від сили:

$$A = \int_a^b P(x) dx. \quad (16.8)$$

3. шлях s , пройдений точкою за проміжок часу від $t = a$ до $t = b$, дорівнює визначеному інтегралу від швидкості $v(t)$:

$$s = \int_a^b v(t) dt. \quad (16.9)$$

Ця формула характеризує фізичний зміст визначеного інтеграла;

4. маса m неоднорідного стержня на відрізку $[a; b]$ дорівнює визначеному інтегралу від густини $\gamma(x)$:

$$m = \int_a^b \gamma(x) dx. \quad (16.10)$$

В означенні визначеного інтеграла функція f не обов'язково неперервна і невід'ємна на $[a; b]$. Це означення не підтверджує також існування визначеного інтеграла для будь-якої функції f , визначеної на $[a; b]$. Воно лише говорить про те, що коли границя інтегральної суми існує для заданої на $[a; b]$ функції f і при довільному розбитті τ відрізка $[a; b]$ і довільному виборі точок ξ_i вона одна і та сама, то ця границя називається визначеним інтегралом функції f на відрізку $[a; b]$.

Слід також мати на увазі, що коли кажуть, що функція f інтегровна на $[a; b]$, то розуміють, що існує скінченна границя (16.6), і ця границя не залежить ні від способу розбиття відрізка $[a; b]$ на частинні відрізки $[x_{i-1}, x_i]$, ні від вибору проміжних точок ξ_i в кожному з них.

Сформулюємо умови інтегровності функції.

Теорема 16.1 (необхідна умова інтегровності).

Якщо функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a; b]$, то вона обмежена на цьому відрізку.★

Слід зазначити, що обернене твердження неправильне: існують функції, які обмежені на відрізку, але не інтегровні на ньому.

Прикладом такої функції є функція Діріхле:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \text{ — раціональне;} \\ 0, & \text{якщо } x \text{ — ірраціональне.} \end{cases}$$

Ця функція на відрізку $[0; 1]$ є обмеженою: $|D(x)| \leq 1$, але не інтегровою. Справді, якщо на кожному частинному відрізку за проміжні точки ξ_i взяти раціональні числа, то з формули (16.5) випливає, що сума $\sigma_n = 1$, а якщо ξ_t — ірраціональні числа, то $\sigma_n = 0$. Це означає, що величина границі інтегральної суми, побудованої для функції $D(x)$, залежить від вибору точок ξ_t . Тому функція Діріхле не інтегровна на $[0; 1]$.

Теорема 16.2 (достатня умова інтегровності).

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, то вона інтегровна на цьому відрізку.★

Умова неперервності функції є достатньою умовою її інтегровності. Однак це не означає, що визначений інтеграл існує лише для неперервних функцій. Клас інтегральних функцій значно ширший. Так, існує визначений інтеграл від кусково-неперервних функцій, тобто функцій, які мають скінченне число точок розриву першого роду. Це стверджує така теорема.

Теорема 16.3.

Якщо функція $f(x)$ обмежена на відрізку $[a; b]$ і неперервна в ньому скрізь, крім скінченного числа точок, то вона інтегровна на цьому відрізку. ★

Більше того, справедлива така теорема.

Теорема 16.4.

Всяка обмежена і монотонна на відрізку функція інтегровна на цьому відрізку. ★

Ця теорема значно розширює клас інтегровних функцій, оскільки монотонна функція може мати не лише скінченну, а й нескінченну кількість точок розриву першого роду. Надалі, як правило, розглядатимемо лише неперервні функції.

Властивості визначеного інтеграла

1. Величина визначеного інтеграла не залежить від позначення змінної інтегрування:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz \text{ тощо.}$$

Інтегральна сума (16.5), а отже, і її границя (16.6) не залежать від того, якою буквою позначено аргумент функції f . Це й означає, що визначений інтеграл не залежить від позначення змінної інтегрування.

Визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ введений для випадку, коли $a < b$. Узагальнимо поняття інтеграла на випадки, коли $a = b$ і $a > b$.

2. Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0. \quad (16.11)$$

3. Від переставлення меж інтегрування інтеграл змінює знак на протилежний:

$$\int_a^b = - \int_b^a f(x)dx. \quad (16.12)$$

Властивості 2 і 3 приймають за означенням. Відзначимо, що ці означення повністю виправдовує наведена далі формула Ньютона — Лейбніца.

4. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на максимальному з відрізків $[a; b]$, $[a; c]$, $[c; b]$, то справедлива рівність

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad (16.13)$$

(адитивність визначеного інтеграла).

ДОВЕДЕННЯ.

Припустимо спочатку, що $a < c < b$. Оскільки границя інтегральної суми не залежить від способу розбиття відрізка $[a; b]$ на частинні відрізки, то розіб'ємо $[a; b]$ так, щоб точка c була точкою розбиття. Якщо, наприклад, $c = x_m$, то інтегральну суму можна розбити на дві суми:

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^m f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=m+1}^n f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Переходячи в цій рівності до границі при $\lambda \rightarrow 0$, дістанемо формулу (16.13).

Інше розміщення точок a, b, c зводиться до вже розглянутого. Якщо, наприклад, $a < b < c$, то за формулами (16.13) і (16.12) маємо

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx;$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

На рис. 16.1 показано геометрично цю властивість для випадку, коли $f(x) > 0$ і $a < c < b$: площа трапеції $aABb$ дорівнює сумі площ трапецій $aACc$ і $cCBb$. $\square$

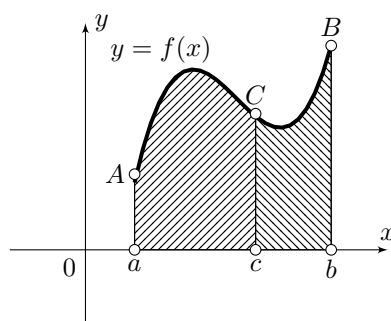


Рисунок 16.1 – Адитивність визначеного інтеграла

Зауваження 16.1. Нехай $f(x)$ — знакозмінна неперервна функція на відрізку $[a; b]$, де $a < b$, наприклад, $\forall x \in [a; \alpha] \cup [\beta; b] : f(x) \leq 0$ і $\forall x \in (\alpha; \beta) : f(x) > 0$.

Скориставшись адитивністю та геометричним змістом інтеграла, дістанемо

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^\alpha f(x)dx + \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\beta^b f(x)dx = -S_1 + S_2 - S_2,$$

де S_1, S_2, S_3 — площі відповідних криволінійних трапецій.

Отже, в загальному випадку, з погляду геометрії визначений інтеграл (16.6) при $a < b$ дорівнює алгебраїчній сумі площ відповідних криволінійних трапецій, причому площі трапецій, розміщених над віссю Ox , мають знак плюс, а нижче осі Ox — знак мінус. Якщо $a > b$, то все формулюється навпаки. Зазначимо, що площа заштрихованої на рис. 16.2 фігури виражається інтегралом

$$\int_a^b |f(x)|dx = S_1 + S_2 + S_3.$$

5. Сталий множник C можна винести за знак визначеного інтеграла:

$$\int_a^b C f(x)dx = C \int_a^b f(x)dx. \quad (16.14)$$

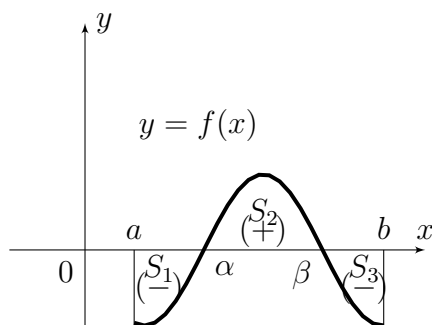


Рисунок 16.2 – Геометричний зміст інтеграла знакозмінної функції

Дійсно,

$$\int_a^b C f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n C f(\xi_i) \Delta x_i = C \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = C \int_a^b f(x) dx.$$

6. Визначений інтеграл від суми інтегровних функцій дорівнює сумі визначених інтегралів від цих функцій:

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx. \quad (16.15)$$

ДОВЕДЕННЯ. Для довільного τ -розбиття маємо

$$\sum_{i=1}^n (f(\xi_i) + g(\xi_i)) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i + \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta x_i.$$

Звідси, переходячи до границі при $\lambda = \lambda(\tau) \rightarrow 0$, дістанемо формулу (16.15). $\square$

Ця властивість має місце для довільного скінченного числа доданків.

Властивості 5 і 6 називаються **лінійністю визначеного інтеграла**.

7. Якщо всюди на відрізку $[a; b]$ маємо $f(x) \geq 0$ ($a < b$), то

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0 \quad (16.16)$$

(збереження знака підінтегральної функції визначеним інтегралом).

ДОВЕДЕННЯ. Оскільки $f(\xi_i) \geq 0$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, то будь-яка інтегральна сума і її границя при $\lambda \rightarrow 0$ теж невід'ємна. $\square$

8. Якщо всюди на відрізку $[a; b]$ маємо $f(x) \leq g(x)$ ($a < b$), то

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \quad (16.17)$$

(монотонність визначеного інтеграла).

ДОВЕДЕННЯ. Оскільки $g(x) \geq f(x)$, то з нерівності (16.16) маємо

$$\int_a^b (g(x) - f(x)) dx \geq 0.$$

Використовуючи властивість 6, дістаємо нерівність (16.17). □

9. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a; b]$ ($a < b$), то

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx. \quad (16.18)$$

Застосовуючи формулу (16.17) до нерівності

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|,$$

дістаємо

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx,$$

звідки й випливає нерівність (16.18).

10. Якщо $\forall x \in [a; b] : |f(x)| \leq C$, то

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq C(b - a). \quad (16.19)$$

ДОВЕДЕННЯ. Скориставшись формулами (16.18) та (16.14), дістанемо

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq C \int_a^b dx.$$

Звідси й одержуємо нерівність (16.19), оскільки

$$\int_a^b dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 1 \cdot \Delta x_i = b - a. \quad (16.20)$$

□

11. Якщо m і M — відповідно найменше і найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ ($a < c < b$), то

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a) \quad (16.21)$$

(оцінки інтеграла по області).

ДОВЕДЕННЯ. За умовою $\forall x \in [a; b] :$

$$m \leq f(x) \leq M,$$

тому з властивості 7 маємо

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx.$$

Застосовуючи до крайніх інтегралів формули (16.14) і (16.20), отримуємо нерівність (16.21). □

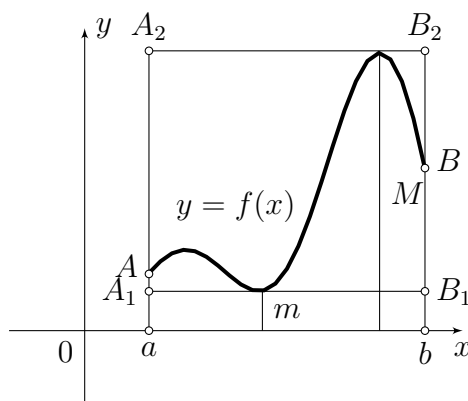


Рисунок 16.3 – Геометричний зміст властивості 11

Якщо $f(x) \geq 0$, то властивість 11 ілюструється геометрично (рис. 16.3): площа криволінійної трапеції $aABb$ не менша за площу прямокутника aA_1B_1b і не більша за площу прямокутника aA_2B_2b .

12. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, то на цьому відрізку знайдеться така точка c , що

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) \quad (16.22)$$

(теорема про середнє значення функції).

ДОЗВЕДЕННЯ. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку, то вона досягає свого найбільшого значення M і найменшого значення m . Тоді з оцінок (16.21) дістанемо (якщо $a < b$)

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M.$$

Покладемо $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$. Оскільки функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, то вона набуває всі проміжні значення відрізка $[m; M]$. Отже, існує точка $c \in [a; b]$ така, що $f(c) = \mu$, або

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx, \quad (16.23)$$

звідки й випливає дана властивість.

Для випадку, коли $a > b$, приводимо ті самі міркування для інтеграла $\int_a^b f(x)dx$, а потім, переставивши границі, приходимо до попередньої формули. $\square$

Рівність (16.23) називається **формулою середнього значення**, а величина $f(c)$ — **середнім значенням функції** на відрізку $[a; b]$.

Теорема про середнє значення при $f(x) \geq 0$ має такий геометричний зміст (рис. 16.4): значення визначеного інтеграла дорівнює площі прямокутника з висотою $f(c)$ і основою $b-a$.

Термін "середнє значення функції" добре узгоджується з такими фізичними поняттями, як середня швидкість, середня густина, середня потужність тощо. Якщо, наприклад, у формулі (16.23) інтеграл означає пройдений шлях за проміжок часу $[a; b]$, то середнє значення $f(c)$ означає середню швидкість, тобто сталу швидкість, при якій точка, рухаючись рівномірно, за той же проміжок часу пройшла б той самий шлях, що і при нерівномірному русі із швидкістю $f(t)$.

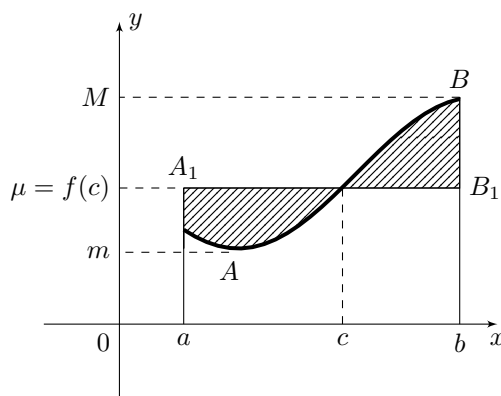


Рисунок 16.4 – Геометричний зміст теореми про середнє

13. Якщо змінити значення інтегровної функції в скінченному числі точок, то інтегровність її не порушиться, а значення інтеграла при цьому не зміниться. Ця властивість дає змогу говорити про інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ навіть тоді, коли функція $f(x)$ не визначена в скінченному числі точок відрізка $[a; b]$. При цьому в цих точках функції можна надати цілком довільних значень і величина інтеграла не зміниться.

Інтеграл із змінною верхньою межею. Формула Ньютона - Лейбніца

Нехай функція $f(x)$ неперервна на $[a; b]$, тоді вона інтегровна на довільному $[a; x] \subset [a; b]$, тобто для довільного $x \in [a; b]$ існує інтеграл $\int_a^x f(t)dt$. (Оскільки визначений інтеграл не залежить від змінної інтегрування, то ми позначили її через t , щоб не плутати з верхньою межею x .) Заданий інтеграл, очевидно, є функцією від x . Позначимо цю функцію через $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt. \quad (16.24)$$

і назовемо *інтегралом із змінною верхньою межею*.

Розглянемо основну властивість функції $\Phi(x)$.

Теорема 16.5.

Похідна визначеного інтеграла із змінною верхньою межею по верхній межі дорівнює значенню підінтегральної функції для цієї межі:

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t)dt \right) = f(x). \quad (16.25)$$



ДОВЕДЕННЯ. Надамо аргументу x функції (16.24) приросту Δx , тоді, враховуючи адитивність інтеграла, дістанемо

$$\Phi(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = \Phi(x) + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt,$$

звідки

$$\Delta\Phi = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Застосовуючи до цього інтеграла теорему про середнє значення, знайдемо, що $\Delta\Phi = f(c)(x + \Delta x - x) = f(c)\Delta x$, де точка c знаходиться між x і $x + \Delta x$. Отже,

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c).$$

Якщо $\Delta x \rightarrow 0$, то $x + \Delta x \rightarrow x$ і $c \rightarrow x$, тому з неперервності функції f маємо

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c) = \lim_{c \rightarrow x} f(c) = f(x).$$

З доведеної теореми випливає важливий наслідок:

Наслідок 16.1.

Для всякої неперервної на відрізку $[a; b]$ функції $f(x)$ існує первісна функція. При цьому однією з первісних функцій є визначений інтеграл (16.24) ✓

ДОБЕДЕННЯ. Справді, оскільки функція $F(x)$, яка задовольняє умову $F'(x) = f(x)$, є первісною функції $f(x)$, то, згідно з формулою (16.25), функція $\Phi(x)$ є первісною. Але будь-яка інша первісна $\Phi(x)$ функції $f(x)$ може відрізнятися від $\Phi(x)$ лише на сталу C : $\Phi(x) = F(x) + C$, $x \in [a, b]$, тому

$$\int f(x)dx = F(x) + C = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a, b]. \quad (16.26)$$

□

Теорема 16.5 розкриває глибокий зв'язок між невизначеним та визначеним інтегралами. Крім того, вона дає змогу встановити простий метод обчислення визначених інтегралів, минаючи громіздкі операції сумування і перехід до границі. Цей метод ґрунтується на такій теоремі.

Теорема 16.6.

Якщо $F(x)$ є якою-небудь первісною від неперервної функції $f(x)$, $x \in [a, b]$, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \quad (16.27)$$

★

ДОБЕДЕННЯ. Ця формула називається **формулою Ньютона-Лейбніца**.

Нехай $F(x)$ — деяка первісна функції $f(x)$. Оскільки інтеграл (16.24) є також первісною, то згідно з формулою (16.26) маємо $\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$.

Поклавши в цій рівності $x = a$, з формули (16.11) дістанемо $\int_a^a f(t)dt = F(a) + C$, звідки $C = -F(a)$, тому $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$. Зокрема, при $x = b$ дістаємо формулу (16.27). □

Різницю $F(b) - F(a)$ умовно позначають символами $F(x)|_a^b$, або $[F(x)]_a^b$, тому формула

Ньютона - Лейбніца записується ще й так:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b; \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b.$$

Формула Ньютона - Лейбніца дає практично зручний спосіб обчислення визначеного інтеграла: визначений інтеграл від неперервної функції дорівнює різниці значень довільної її первісної, обчислених для верхньої і нижньої меж інтегрування.

Зазначимо, що формула (16.27) сама по собі не розв'язує ні задачі знаходження первісної, ні задачі обчислення границі інтегральних сум. Її цінність полягає в тому, що вона встановлює зв'язок між цими задачами.

Формула Ньютона - Лейбніца значно розширює область застосування визначеного інтеграла, тому що дає загальний метод для розв'язування різноманітних практичних задач. Безпосередні ж обчислення визначеного інтеграла за формулою (16.6) не дозволили створити такого методу. Ще геніальний давньогрецький мислитель Архімед розв'язав задачу знаходження площі параболічного сегмента методом, що нагадує обчислення границь інтегральних сум. Потім протягом декількох століть математики таким самим способом розв'язали багато окремих задач, але лише в 17 ст. Ньютон і Лейбніц показали, що обчислення визначеного інтеграла від довільної неперервної функції зводиться до відшукування її первісної.

Зауваження 16.2. Теорема 16.3 стверджує існування визначеного інтеграла від кусково-неперервної функції, яка має скінченне число точок розриву першого роду. Обчислення інтеграла від такої функції можна провести на основі властивостей інтеграла 4 і 13.

На рис. 16.5 зображено графік кусково-неперервної функції, заданої на відрізку $[a; b]$. Вона інтегровна на $[a; b]$ і

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \int_{c_2}^b f(x)dx.$$

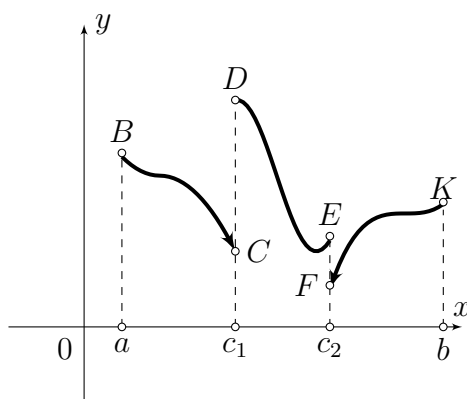


Рисунок 16.5 – Кусково-неперервна функція

Приклад 16.1. Нехай $f(x) = \begin{cases} e^x, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$ Обчислити $\int_0^2 f(x)dx$.

Маємо $\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 e^x dx + \int_1^2 dx = e^x|_0^1 + x|_1^2 = e$.



Зауваження 16.3. Обчислення визначеного інтеграла від кусково-неперервної функції можна проводити безпосередньо також за допомогою формули, аналогічної формулі (16.27). Для цього дамо розширене означення первісної.

Означення 16.4. Функція $F(x)$ називається первісною функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$, якщо:

1. $F(x)$ неперервна на $[a, b]$;
2. $F'(x) = f(x)$ в точках неперервності $f(x)$.

Очевидно, для неперервної функції це означення первісної збігається із загальноприйнятим. Крім того, справедливе таке твердження:

Кусково-неперервна на відрізку $[a; b]$ функція має первісну на цьому відрізку в розумінні розширеного означення; однією з первісних є функція $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ справедлива формула Ньютона - Лейбніца: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Наприклад, $\int_1^2 \operatorname{sign} x dx = 1$, оскільки за розширеним означенням функція $f(x) = \operatorname{sign} x$ на $[-1; 2]$ має первісну $F(x) = |x|$.

Методи обчислення визначених інтегралів

При обчисленні визначених інтегралів, як і невизначених, широко користуються методом заміни змінної (або методом підстановки) і методом інтегрування частинами.

Теорема 16.7 (про заміну змінної у визначеному інтегралі).

Нехай виконуються умови: 1) функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$; 2) функція $x = \varphi(t)$ і її похідна $x' = \varphi'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha; \beta]$; 3) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ і $\forall t \in (\alpha; \beta) : a < \varphi(t) < b$. Тоді справджується рівність

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \quad (16.28)$$



ДОВЕДЕННЯ. Оскільки функція $f(x)$ неперервна на $[a; b]$, то вона має первісну. Позначимо її через $F(x)$, $x \in [a; b]$, тоді з теореми про заміну змінної в невизначеному інтегралі випливає, що функція $F(\varphi(t))$ буде первісною функції $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$. Застосувавши формулу Ньютона - Лейбніца, маємо

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a); \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a).$$

Формула (16.28) називається формулою заміни змінної (або підстановки) у визначеному інтегралі.

Зауваження 16.4. Якщо при обчисленні невизначеного інтеграла заміною $x = \varphi(t)$ у первісній функції необхідно було від змінної t повернутися до змінної x , то при обчисленні визначеного інтеграла замість цього треба змінити межі інтегрування. Нижня межа α знаходиться як розв'язок рівняння $\alpha = \varphi(t)$ відносно невідомого t , а верхня межа β — з рівняння $b = \varphi(t)$.

Якщо функція $\varphi(t)$ не монотонна, то може статися, що ці рівняння дадуть кілька різних пар α і β , які задовольняють умови теореми 1. В цьому випадку можна взяти будь-яку з таких пар.

Зауваження 16.5. Часто замість підстановки $x = \varphi(t)$ застосовують підстановку $t = \psi(x)$. У цьому випадку нові межі інтегрування визначаються безпосередньо: $\alpha = \psi(a)$, $\beta = \psi(b)$. Проте тут слід мати на увазі, що функція $x = x(t)$, обернена до функції $\psi(t)$, має, як і раніше, задовольняти всі умови теореми 1. Зокрема, функція $x(t)$ в межах інтегрування має бути визначеною неперервно диференційовною функцією t і при зміні t від α до β змінна $x(t)$ має змінюватися від a до b .

Найзручніше виконувати заміну монотонними диференційовними функціями. Ці функції гарантують однозначність як прямої, так і оберненої функцій.

Приклад 16.2. Обчислити інтеграл:

$$\int \frac{(2 \ln x + 3)^3}{x} dx = \left| \begin{array}{l} u = 2 \ln x + 3 \\ du = 2 \frac{dx}{x} \\ \frac{du}{2} = \frac{dx}{x} \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int u^3 du = \frac{1}{8} u^4 + C = \frac{1}{8} (2 \ln x + 3)^4 + C.$$

Приклад 16.3. Довести, що $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$, коли $f(x)$ — парна функція; $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$, коли $f(x)$ — непарна функція. ☺

ДОЗВЕДЕННЯ. Маємо $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$. У першому інтегралі виконаємо підстановку $x = -t$: $\int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_a^0 f(-t) dt = \int_0^a f(-t) dt = \int_0^a f(-x) dx$. Далі дістаємо $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a f(-x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a (f(-x) + f(x)) dx$. Якщо функція парна, то $f(-x) + f(x) = 2f(x)$, а якщо непарна, то $f(-x) + f(x) = 0$. □

Знайдені формули дуже корисні. Можна, наприклад, не виконуючи обчислень, сказати, що $\int_{-a}^a x^3 \cos x dx = 0$; $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^5 x \cos^4 x dx = 0$; $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^5 \sin^2 x dx = 0$ тощо.

Приклад 16.4. Обчислити інтеграл: $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$.

Розв'язання.

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left| \begin{array}{l} x = a \sin t, \\ x = 0 \Rightarrow a \sin t = 0 \Rightarrow t = 0, \\ x = a \Rightarrow a \sin t = a \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} a \cos t dt =$$

$$= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}. \quad \blacksquare$$

Теорема 16.8.

Якщо функції $u = u(x)$, $v = v(x)$ мають на відрізку $[a, b]$ неперервну похідну, то

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du. \quad (16.29) \quad \star$$

Формула (16.29) називається формулою інтегрування частинами для визначеного інтеграла.

ДОВЕДЕННЯ. Оскільки функція uv є первісною функції $(uv)' = u'v + uv'$, то за формулою Ньютона - Лейбніца дістанемо

$$\int_a^b (u'v + uv') dx = uv \Big|_a^b.$$

Скориставшись лінійністю визначеного інтеграла, дістаємо формулу (16.29). Формула (16.29) називається формулою інтегрування частинами визначеного інтеграла. $\square$

Всі зауваження відносно формули інтегрування частинами невизначеного інтеграла переносяться і на формулу (16.29).

Приклад 16.5. Обчислити інтеграл: $\int_1^e x \ln x dx$.

$$\int_1^e x \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, dv = x dx \\ du = \frac{dx}{x}, v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{1}{4}(e^2 + 1).$$

Приклад 16.6. Обчислити інтеграл: $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$.

Розв'язання.

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = \sin^{n-1} x, \quad du = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x dx, \\ dv = \sin x dx, \quad v = -\cos x \end{array} \right|$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx =$$

$$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx.$$

Отже, $I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$, звідки $I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$, $n \geq 2$.

Дістали рекурентну формулу, за якою інтеграл I_n послідовно зводиться до інтеграла $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^0 dx = \frac{\pi}{2}$, або до інтеграла $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$. Методом індукції можна довести, що $I_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$; $I_{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$. Символ $n!!$ означає добуток натуральних чисел, які не перевищують n і однієї з них парності. ■

ТЕМА 17. НЕВЛАСТИВІ ІНТЕГРАЛИ

Вище ми ввели визначений інтеграл як границю інтегральних сум, передбачаючи при цьому, що відрізок інтегрування скінченний, а підінтегральна функція на цьому відрізку обмежена. Якщо хоча б одна з цих умов порушується, то наведене вище означення визначеного інтеграла стає неприйнятним: у випадку нескінченного проміжку інтегрування його не можна розбити на n частинних відрізків скінченної довжини, а у випадку необмеженої функції інтегральна сума явно не має скінченної границі. Узагальнюючи поняття визначеного інтеграла на ці випадки, приходимо до невластивого інтеграла — інтеграла від функції на необмеженому проміжку або від необмеженої функції.

Невластиві інтеграли з нескінченними межами інтегрування

Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a; +\infty)$ і інтегровна на будь-якому відрізку $[a; b]$, де $-\infty < a < b < +\infty$.

Означення 17.1. Якщо існує скінченна границя

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx, \quad (17.1)$$

то її називають невластивим інтегралом першого роду і позначають так:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx. \quad (17.2)$$

Таким чином, за означенням

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (17.3)$$

У цьому випадку інтеграл (17.2) називають **збіжним**, а підінтегральну функцію $f(x)$ — **інтегровою на проміжку** $[a; +\infty)$.

Якщо ж границя (17.1) не існує або нескінченна, то інтеграл (17.2) називається також невластивим, але **розбіжним**, а функція $f(x)$ **неінтегровою на** $[a; +\infty)$.

Подібним чином визначається невластивий інтеграл на проміжку $(-\infty, b]$:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (17.4)$$

Невластивий інтеграл з двома нескінченними межами визначається рівністю

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx, \quad (17.5)$$

де c — довільне дійсне число. Отже, інтеграл зліва у формулі (17.5) існує або є збіжним лише тоді, коли є збіжними обидва інтеграли справа. Можна довести, що інтеграл, визначений формулою (17.5), не залежить від вибору числа c .

З наведених означень видно, що невластивий інтеграл не є границею інтегральних сум, а є границею означеного інтеграла із змінною межею інтегрування.

Зауважимо, що коли функція $f(x)$ неперервна і невід'ємна на проміжку $[a; +\infty)$ і коли інтеграл (17.3) збігається, то природно вважати, що він виражає площу необмеженої області.

Приклад 17.1. Обчислити невластивий інтеграл: $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg x \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\arctg b - \arctg 1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

У розглянутому прикладі обчислення невластного інтеграла ґрунтувалося на його означенні. Проте у деяких випадках немає необхідності обчислювати інтеграл, а достатньо знати, збіжний він чи ні. Наводимо без доведення деякі ознаки збіжності.

Теорема 17.1 (ознака порівняння).

Якщо на проміжку $[a, +\infty)$ функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні і задовольняють умову $0 \leq f(x) \leq g(x)$, то із збіжності інтеграла

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx < +\infty \quad (17.6)$$

випливає збіжність інтеграла

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx < +\infty, \quad (17.7)$$

а із розбіжності (17.7) випливає розбіжність (17.6). ★

Наведена теорема має простий **геометричний зміст**: якщо площа більшої за розмірами необмеженої області є скінченне число, то площа меншої області є також скінченне число; якщо площа меншої області нескінченно велика величина, то площа більшої області є також нескінченно велика величина.

Приклад 17.2. Дослідити на збіжність інтеграли: $\int_1^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^6+5}}$; $\int_2^{+\infty} \frac{2+\sin x + \ln x}{\sqrt{x}} dx$. ☺

Розв'язання. а) Оскільки $\forall x \in [1; +\infty) : 0 \leq \frac{x}{\sqrt{x^6+5}} < \frac{1}{x^3}$ і інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$ збігається, то за ознакою порівняння заданий інтеграл також збігається,

б) Цей інтеграл розбігається, бо $\forall x \in [2; +\infty) :$

$$\frac{2 + \sin x + \ln x}{\sqrt{x}} > \frac{1}{\sqrt{x}} > 0$$

і інтеграл $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ розбігається. ■

Теорема 17.2 (гранична ознака порівняння).

Якщо існує границя

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k,$$

де $0 < k < +\infty$, $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, то обидва інтеграли (17.6) і (17.7) одночасно збіжні або розбіжні. ★

Ця ознака іноді виявляється зручнішою, ніж теорема 17.1, бо не потребує перевірки нерівності $0 \leq f(x) \leq g(x)$.

Приклад 17.3. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_1^{+\infty} \ln \frac{x^2+2}{x^2+1} dx$.

Розв'язання. Оскільки інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ збігається і

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{x^2+2}{x^2+1}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x^2+1}\right)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^2+1}}{\frac{1}{x^2}} = 1.$$

то заданий інтеграл також збігається. ■

В теоремах 17.1 і 17.2 розглядались невластиві інтеграли від невід'ємних функцій. У випадку, коли підінтегральна функція є знакозмінною, справедлива така теорема.

Теорема 17.3.

Якщо інтеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ збігається, то збігається також інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$. ★

Приклад 17.4. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1+3\sin x}{x^3} dx$. ☺

Розв'язання. Тут підінтегральна функція знакозмінна. Оскільки

$$\left| \frac{3 + \sin x}{x^3} \right| \leq \frac{4}{x^3} \text{ і } \int_1^{+\infty} \frac{4}{x^3} dx = 2.$$

то заданий інтеграл збігається. ■

Слід зауважити, що із збіжності інтеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ не випливає, взагалі кажучи, збіжність інтеграла $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$. Ця обставина виправдовує такі означення.

Означення 17.2. Якщо разом з інтегралом $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ збігається також інтеграл

$\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ то інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ називають абсолютно збіжним, а функцію $f(x)$ —

абсолютно інтегровною на проміжку $[a; +\infty)$.

Означення 17.3. Якщо інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається, а інтеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ розбігається, то інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ називають умовно (або неабсолютно) збіжним.

Тепер теорему 17.3 можна перефразувати так: абсолютно збіжний інтеграл збігається.

Отже, для знакозмінної функції викладені тут міркування дають змогу встановити лише абсолютну збіжність інтеграла. Якщо ж невластивий інтеграл збігається умовно, то застосовують глибші ознаки збіжності.

Приклад 17.5. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{b^2+x^2} dx$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$). ☺

Розв'язання. Оскільки

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{b^2+x^2} = \frac{1}{b} \lim_{a \rightarrow +\infty} \arctg \frac{x}{b} \Big|_0^a = \frac{\pi}{2b} \text{ і } 0 \leq \left| \frac{\sin ax}{b^2+x^2} \right| \leq \frac{1}{b^2+x^2},$$

то за теоремою 3 інтеграл $\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin ax}{b^2+x^2} \right| dx$ збігається. Отже, збігається, причому абсолютно, і заданий інтеграл, а функція $f(x) = \frac{\sin ax}{b^2+x^2}$ на проміжку $[0; +\infty)$ є абсолютно інтегровною. ■

Невластиві інтеграла від необмежених функцій

Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a; b)$.

Означення 17.4. Точку $x = b$ назовемо особливою точкою функції $f(x)$, якщо $f(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow b - 0$. ✓

Означення 17.5. Нехай функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a; b - \varepsilon]$ при довільному $\varepsilon > 0$ такому, що $b - \varepsilon > a$, тоді, якщо існує скінченна границя

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx, \quad (17.8)$$

її називають невластивим інтегралом другого роду і позначають так:

$$\int_a^b f(x)dx. \quad (17.9) \quad \checkmark$$

Отже, за означенням

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \quad (17.10)$$

У цьому випадку кажуть, що інтеграл (17.9) існує або збігається. Якщо ж границя (17.8) нескінченна або не існує, то інтеграл (17.9) також називають невластивим інтегралом, але розбіжним.

Аналогічно якщо $x = a$ — особлива точка, то невластивий інтеграл визначається так:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

Якщо $f(x)$ необмежена в околі якої-небудь внутрішньої точки $c_0 \in (a; b)$, то за умови існування обох невластивих інтегралів $\int_a^{c_0} f(x)dx$ і $\int_{c_0}^b f(x)dx$ за означенням покладають

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_0} f(x)dx + \int_{c_0}^b f(x)dx.$$

Нарешті, якщо a та b — особливі точки, то за умови існування обох невластивих інтегралів $\int_a^c f(x)dx$ і $\int_c^b f(x)dx$ за означенням покладають

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

де c — довільна точка інтервалу $(a; b)$.

Приклад 17.6. Обчислити невластивий інтеграл:

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \arcsin \frac{x}{2} \Big|_0^{2-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \arcsin \frac{2-\varepsilon}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Отже, інтеграл — збіжний.



Наведемо ознаки збіжності для невластивих інтегралів другого роду.

Теорема 17.4 (ознака порівняння).

Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ — неперервні на $[a, b)$, мають особливу точку $x = b$ та задовольняють умову $0 \leq f(x) \leq g(x)$, то із збіжності $\int_a^b g(x)dx$ випливає збіжність інтеграла $\int_a^b f(x)dx$, а із розбіжності інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ випливає розбіжність інтеграла $\int_a^b g(x)dx$.



Приклад 17.7. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+5x^4}}$.

Розв'язання. Заданий інтеграл збігається, бо

$$\forall x \in (0; 1] : 0 < \frac{1}{\sqrt{x+5x^4}} < \frac{1}{\sqrt{x}}$$

і збігається інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.



Теорема 17.5 (гранична ознака порівняння).

Нехай функції $f(x)$, $g(x)$, на проміжку $[a, b)$ неперервні, додатні і мають особливість у точці $x = b$. Якщо існує границя $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = k$, то інтеграли $\int_a^b f(x)dx$ та $\int_a^b g(x)dx$ — одночасно збіжні або розбіжні. ★

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = k,$$

де $0 < k < \infty$, то інтеграли $\int_a^b f(x)dx$ та $\int_a^b g(x)dx$ — одночасно збіжні або розбіжні. ★

Приклад 17.8. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sin x}$.

Розв'язання. Функції $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ та $g(x) = \frac{1}{x}$ мають особливість в точці $x = 0$. Оскільки $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} = 1$, і інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ розбігається, то заданий інтеграл також розбігається. ■

Теорема 17.6.

Якщо $x = b$ — особлива точка функції $f(x)$ та інтеграл $\int_a^b |f(x)|dx$ збігається, то інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ також збігається. ★

Приклад 17.9. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_1^2 \frac{\cos x}{\sqrt[3]{x-1}} dx$.

Розв'язання. Заданий інтеграл збігається, тому що $\left| \frac{\cos x}{\sqrt[3]{x-1}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$ і збігається інтеграл $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx$. ■

ТЕМА 18. ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА**Обчислення площ плоских фігур**

Якщо функція $f(x)$ — неперервна на відрізку $[a, b]$, $f(x) \geq 0$ на цьому ж відрізку, то площа криволінійної трапеції (рис. 18.1) обмеженої кривою $y = f(x)$, прямими $x = a$, $x = b$, $y = 0$ знаходиться за формулою

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Якщо ж функція $y = f(x)$ на $[a, b]$ скінченне число змінює знак, то площа відповідної криволінійної трапеції (рис. 18.2) обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b |f(x)|dx.$$

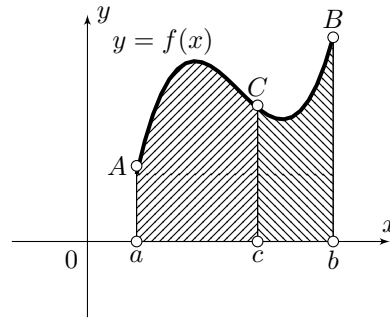


Рисунок 18.1 – Площа криволінійної трапеції, обмеженої додатною функцією

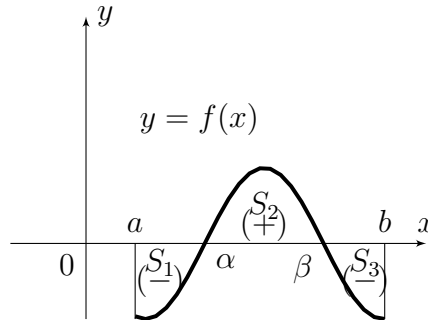


Рисунок 18.2 – Площа криволінійної трапеції, обмеженої знакозмінною функцією

Якщо ж потрібно обчислити площу фігури $a_1 A_2 B_1 B_1$ (рис. 18.3), то

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx.$$

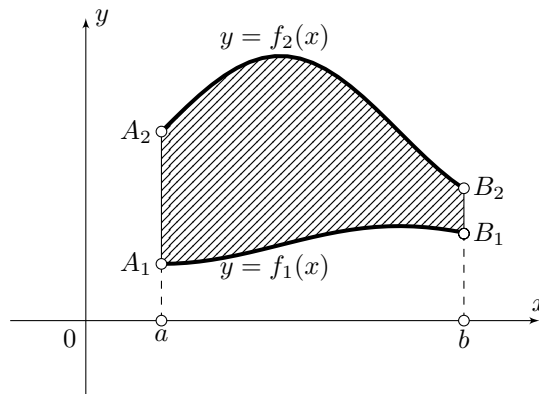


Рисунок 18.3 – Площа криволінійної трапеції, обмеженої двома функціями

Нехай тепер криволінійна трапеція обмежена кривою, заданою параметрично:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta],$$

де $x(t), y(t)$ — неперервні функції, які мають на відрізку $[\alpha, \beta]$ похідні $x'(t), y'(t)$. Якщо $x = x(t)$ — монотонна на $[\alpha, \beta]$, $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$, то

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) x'(t) dt.$$

Приклад 18.1. Знайти площу фігури, обмеженої прямою $y = x$ і параболою $y = 2 - x$. ☺

Розв'язання. Знайдемо точки перетину цих ліній:

$$\begin{cases} y = 2 - x^2, \\ y = x, \end{cases} \Rightarrow 2 - x^2 = x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2, x = 1.$$

Тоді площа фігури дорівнює: $S = \int_{-2}^1 ((2 - x^2) - x) dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-2}^1 = \frac{9}{2}$. ■

Приклад 18.2. Знайти площу фігури, обмеженої еліпсом:

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Розв'язання. Еліпс симетричний відносно осей Ox та Oy , тому:

$$\begin{aligned} S &= 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 b \sin t \cdot a \cdot (-\sin t) dt = -4ab \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 t dt = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \\ &= 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = 2ab \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab. \end{aligned}$$
 ■

Розглянемо тепер полярну систему координат. Нагадаємо формули переходу між декартовою та полярною:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi = \arctg \frac{y}{x}, \end{cases} \quad \rho \geq 0, \varphi \in [0, 2\pi].$$

Якщо криву задано рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, то площа визначається за формулою:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi.$$

Приклад 18.3. Обчислити площу фігури, обмежену трипелюстковою квіткою у полярних координатах: $\rho = a \cos 3\varphi$. ☺

Розв'язання. Знайдемо площу одної півпелюстки і помножимо її на шість:

$$S = 6 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2} (a \cos(3\varphi))^2 d\varphi = 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1 + \cos 6\varphi}{2} d\varphi = \frac{3}{2} a^2 \left(\varphi + \frac{\sin 6\varphi}{6} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Довжина дуги

Довжина дуги кривої $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, обчислюється за формулою:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Якщо ж крива задана параметрично

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta],$$

то

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Нехай тепер крива задана у полярних координатах $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, тоді:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi.$$

Довжина дуги просторової кривої, заданої рівнянням

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta],$$

обчислюється за формулою:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2} dt.$$

Приклад 18.4. Знайти довжину дуги параболи $y = \frac{x^2}{2}$ від точки $O(0,0)$ до точки $A(1, \frac{1}{2})$.

Розв'язання. Оскільки $y = x$, $0 \leq x \leq 1$, то

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + x^2} dx = \left(\frac{x}{2} \sqrt{1 + x^2} + \frac{1}{2} \ln |x + \sqrt{1 + x^2}| \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})).$$

Приклад 18.5. Знайти довжину однієї арки циклоїди:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = b(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Розв'язання. Згідно наведеної вище формули для обчислення довжини параметрично заданої кривої отримуємо:

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(a(1 - \cos t))^2 + (a \sin t)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = \\ &= -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 8a. \end{aligned}$$

Об'єм тіла

Нехай нам треба знайти об'єм тіла, якщо відомі площі S перерізів цього тіла площинами, перпендикулярними до деякої осі, наприклад: $S = S(x)$, $a \leq x \leq b$.

Тоді об'єм тіла визначається так:

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

— *формула об'єму тіла за площами паралельних перерізів.*

Розглянемо тепер тіло обертання. Нехай криволінійна трапеція обмежена зверху графіком неперервної функції $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$. Якщо цю трапецію обернути навколо осі Ox , то утвориться фігура, яка називається тілом обертання. Його об'єм обчислюється за формулою:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Приклад 18.6. Знайти об'єм тіла обертання, утвореного обертанням параболи $y = x^2$ на проміжку $1 \leq x \leq 2$ навколо осі Ox .

$$V = \pi \int_1^2 x^4 dx = \pi \frac{x^5}{5} \Big|_1^2 = \frac{31\pi}{5}.$$

Площа поверхні обертання

Нехай криву задано неперервною функцією $y = f(x) \geq 0$, $a \leq x \leq b$, яка обертається навколо осі Ox .

Тоді площі її поверхні утвореного тіла визначається за формулою:

$$Q = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Приклад 18.7. Обчислити площу поверхні частини параболоїда, утвореного обертанням навколо осі Ox параболи $y^2 = 2x$, де $0 \leq x \leq 4$. ☺

Розв'язання. $\text{Тоді } y = \sqrt{2x} \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{2x}} \Rightarrow \sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{\frac{1+2x}{2x}}.$

$$Q = 2\pi \int_0^4 \sqrt{2x} \sqrt{\frac{1+2x}{2x}} dx = 2\pi \int_0^4 \sqrt{1+2x} dx = \frac{2}{3}\pi(1+2x)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 = \frac{52\pi}{3}.$$

Обчислення роботи

Нехай під дією сили $F = F(x)$ матеріальна точка рухається вздовж прямої лінії. Якщо напрям руху збігається з напрямом сили, то робота A виконана цією силою при переміщенні точки на відрізок $[a, b]$ обчислюється за формулою:

$$A = \int_a^b F(x) dx.$$

Приклад 18.8. Обчислити роботу, яку треба затратити, щоб тіло маси m підняти з поверхні Землі вгору на висоту h , якщо радіус Землі рівний R . ☺

Розв'язання. Згідно закону гравітації $F = \gamma \frac{mM}{x^2}$ – сила притягання тіла Землею, де M – маса Землі, γ – гравітаційна стала, x – відстань від центра тіла до центра Землі. Покладемо $\gamma m M = k$. Тоді $F(x) = kx^{-2}$, $R \leq x \leq R+h$. При $x = R$ $F(R)$ дорівнює вазі тіла $P = mg$, тобто $\frac{k}{R^2} = P \Rightarrow k = PR^2 \Rightarrow F(x) = PR^2 x^{-2}$. Звідси, робота дорівнює:

$$A = PR^2 \int_R^{R+h} x^{-2} dx = \frac{PRh}{R+h}.$$

Диференціальні рівняння

ТЕМА 19. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

При дослідженні різноманітних процесів та явищ, що містять елементи руху, часто користуються математичними моделями у вигляді рівнянь, до яких, крім незалежних величин і залежних від них шуканих функцій, входять також похідні від шуканих функцій. Такі рівняння називають диференціальними.

Диференціальне рівняння називається звичайним, якщо невідома функція є функцією однієї змінної, і диференціальним рівнянням у частинних похідних, якщо невідома функція є функцією багатьох змінних. Надалі, говорячи про диференціальні рівняння, матимемо на увазі лише звичайні диференціальні рівняння.

Основні поняття та означення

Означення 19.1. Диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння виду

$$F(x, y, y') = 0. \quad (19.1)$$

яке зв'язує незалежну змінну x , невідому функцію $y = y(x)$ та її похідну y' . ✓

Рівняння (19.1) може не містити явно x або y , але обов'язково має містити похідну y' (у протилежному випадку воно не буде диференціальним рівнянням).

Означення 19.2. Диференціальне рівняння (19.1), нерозв'язне відносно похідної y' , називають неявним диференціальним рівнянням. ✓

Означення 19.3. Якщо рівняння (19.1) можна розв'язати відносно y' , то його записують у вигляді

$$y' = f(x, y) \quad (19.2)$$

і називають рівнянням першого порядку, розв'язаним відносно похідної, або рівнянням в нормальній формі. ✓

Ми, в основному, розглядатимемо саме такі рівняння.

Рівняння (19.2) можна записати ще й так:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \text{ або } -f(x, y)dx + dy = 0.$$

Помноживши останнє рівняння на деяку функцію $Q(x, y) \neq 0$, дістанемо рівняння першого порядку, записане в диференціальній формі:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad (19.3)$$

де $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ — відомі функції. Рівняння (19.3) зручне тим, що змінні x та y в ньому рівноправні, тобто кожен з них можна розглядати як функцію другої. Приклади диференціальних рівнянь виду (19.1), (19.2) і (19.3):

$$xy' + y^2 - 1 = 0; \quad y' = 2x - y; \quad (x - 3y)dx + xydy = 0.$$

Означення 19.4. Знаходження невідомої функції, що входить в диференціальне рівняння, називають розв'язанням або інтегруванням цього рівняння. ✓

(Якщо не виникатиме непорозуміння, замість терміну „диференціальне рівняння“ іноді використовуватимемо термін „рівняння“.)

Означення 19.5. Розв'язком диференціального рівняння (19.2) на деякому інтервалі $(a; b)$ називається диференційовна на цьому інтервалі функція $y = \varphi(x)$, яка при підстановці в рівняння (19.2) обертає його в тотожність по x на $(a; b)$, тобто $\forall x \in (a; b) : \varphi'(x) \equiv f(x; \varphi(x))$. ✓

Наприклад, функція $y = x \ln x$, $x \in (0; +\infty)$, є розв'язком рівняння $xy' - x - y = 0$. Дійсно, підставляючи цю функцію та її похідну $y' = \ln x + 1$ в дане рівняння, дістаємо тотожність

$$x(\ln x + 1) - x - x \ln x \equiv 0; \quad x \in (0; +\infty).$$

Неважко переконатися, що розв'язком даного рівняння є функція $y = x \ln x + Cx$, де C — довільна стала. Надаючи C довільного дійсного значення, щоразу дістаємо розв'язок даного рівняння, тобто маємо нескінченну множину розв'язків.

Означення 19.6. Графік розв'язку диференціального рівняння називається інтегральною кривою цього рівняння. ✓

Відповідь на запитання про те, за яких умов рівняння (19.2) має розв'язок, дає така теорема Коші.

Теорема 19.1 (про існування і єдиність розв'язку).

Нехай функція $f(x, y)$ і її частинна похідна $f'_y(x, y)$ визначені і неперервні у відкритій області G площини Oxy і точка $(x_0; y_0) \in G$. Тоді існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ рівняння (19.2), який задовольняє умову

$$y = y_0 \text{ при } x = x_0, \text{ тобто } \varphi(x_0) = y_0. \quad (19.4)$$



Ця теорема дає достатні умови існування єдиного розв'язку рівняння (19.2).

Геометрично теорема Коші стверджує, що через кожну точку $(x_0; y_0) \in G$ проходить єдина інтегральна крива. Якщо зафіксувати x_0 і змінювати y_0 , не виходячи при цьому з області G , то діставатимемо різні інтегральні криві. Це наочно показує, що рівняння (19.2) має безліч різних розв'язків.

Означення 19.7. Умову (19.4), згідно з якою розв'язок $y = \varphi(x)$ набуває наперед задане значення y_0 в заданій точці x_0 , називають початковою умовою розв'язку і записують так:

$$y|_{x=x_0} = y_0 \text{ або } y(x_0) = y_0. \quad (19.5)$$

✓

Означення 19.8. Задача знаходження розв'язку рівняння (19.2), який задовольняє початкову умову (19.5), називається задачею Коші.

З погляду геометрії розв'язати задачу Коші — це означає виділити з множини інтегральних кривих ту, яка проходить через задану точку $(x_0; y_0)$.

Означення 19.9. Точки площини, в яких не виконуються умови теореми Коші (наприклад, $f(x, y)$ або $f'_y(x, y)$ в цих точках розривні), називаються особливими.

Через кожну з таких точок проходить кілька інтегральних кривих або не проходить жодної.

Означення 19.10. Розв'язок диференціального рівняння, в кожній точці якого порушується умова єдиності, називають особливим розв'язком. Графік особливого розв'язку називають особливою інтегральною кривою.

Щоб з'ясувати її геометричний зміст, введемо поняття обвідної. Нехай задано рівняння

$$\Phi(x, y, C) = 0, \quad (19.6)$$

де x, y — змінні декартові координати, а C — параметр. Це рівняння визначає сім'ю кривих, які залежать від одного параметра, або, як часто кажуть, однопараметричну сім'ю кривих.

Означення 19.11. Лінія L називається обвідною однопараметричної сім'ї кривих (19.6), якщо вона в кожній своїй точці дотикається до однієї з кривих і якщо в різних точках вона дотикається до різних кривих.

Виявляється, що особлива інтегральна крива геометрично є обвідною сім'ї інтегральних кривих диференціального рівняння, визначених його загальним розв'язком.

Приклад 19.1. Рівняння $y' = 2x$ має безліч розв'язків $y = x^2 + C$ — це сім'я парабол. Права частина рівняння задовольняє умови теореми Коші на всій площині Oxy . Це означає, що через кожну точку площини проходить лише одна інтегральна крива.

☺

Приклад 19.2. Рівняння $y' = \frac{y}{x}$ має безліч розв'язків $y = Cx$ – це сім'я прямих, що проходять через точку $(0; 0)$. Права частина рівняння задовольняє умови теореми Коші, якщо $x \neq 0$. Тому через кожную точку, яка не лежить на осі Oy , проходить єдина інтегральна крива (пряма). Точка $(0; 0)$ – особлива, через неї проходить безліч інтегральних кривих. Особливими будуть також точки $(0; y_0)$, де $y_0 \neq 0$. Через ці точки не проходить жодної інтегральної кривої. ☺

Приклад 19.3. Рівняння $y' = \sqrt{y}$ має сім'ю інтегральних кривих, парабол, $y = (\frac{x}{2} + C)^2$. Крім того, очевидно, що це рівняння має також розв'язок $y = 0$. Цей розв'язок особливий, бо функція $f'_y = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ при $y \equiv 0$ розривна. Пряма $y = 0$ дотикається до сім'ї парабол і є її обвідною. ☺

Розглянуті приклади показують, що диференціальне рівняння може мати нескінченну множину розв'язків або сім'ю інтегральних кривих. За певних умов з цієї сім'ї можна виділити єдину криву, яка проходить через задану точку. У зв'язку з цим дамо означення частинного розв'язку диференціального рівняння.

Нехай права частина диференціального рівняння (19.2) задовольняє в області G умови теореми Коші.

Означення 19.12. Функція $y = \varphi(x, C)$, яка залежить від аргументу x і довільної сталої C , називається загальним розв'язком рівняння (19.2) в області G , якщо вона задовольняє дві умови:

1. функція $\varphi(x, C)$ є розв'язком рівняння при будь-якому значенні сталої C з деякої множини;
2. для довільної точки $(x_0; y_0) \in G$ можна знайти таке значення $C = C_0$, що функція $y = \varphi(x, C_0)$ задовольняє початкову умову: $\varphi(x_0, C_0) = y_0$. ✓

Означення 19.13. Частинним розв'язком рівняння (19.2) називається функція $y = \varphi(x, C_0)$, яка утворюється із загального розв'язку $y = \varphi(x, C)$ при певному значенні сталої $C = C_0$.

Означення 19.14. Якщо загальний розв'язок диференціального рівняння знайдено в неявному вигляді, тобто у вигляді рівняння $\Phi(x, y, C) = 0$, то такий розв'язок називають загальним інтегралом диференціального рівняння. Рівність $\Phi(x, y, C_0) = 0$ у цьому випадку називають частинним інтегралом рівняння. ✓

Перейдемо тепер до розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку.

Означення 19.15. Якщо задачу про знаходження всіх розв'язків диференціального рівняння вдається звести до обчислення скінченного числа інтегралів і похідних від відомих функцій і алгебраїчних операцій, то кажуть, що диференціальне рівняння інтегрується в квадратурах (або зводиться до квадратур). ✓

Зрозуміло, що далеко не всяке диференціальне рівняння, яке інтегрується в квадратурах, має розв'язок, який виражається через елементарні функції. Більше того, дуже часто диференціальне рівняння не можна проінтегрувати не тільки в елементарних функціях, а й у квадратурах.

Проте існують окремі типи диференціальних рівнянь, для яких це можливо.

Розглянемо такі рівняння. На жаль, клас інтегровних в квадратурах диференціальних рівнянь надзвичайно вузький.

Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Рівняння виду

$$y' = f(x)\varphi(y), \quad (19.7)$$

де $f(x)$ і $\varphi(y)$ — задані і неперервні на деякому інтервалі функції, називається диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними.

Права частина рівняння (19.7) являє собою добуток двох множників, кожен з яких є функцією лише однієї змінної. Щоб розв'язати рівняння (19.7), треба відокремити змінні. Для цього замінимо y' на $\frac{dy}{dx}$, поділимо обидві частини рівняння (19.7) на $\varphi(y)$ (вважаємо, що $\varphi(y) \neq 0$) і помножимо на dx , тоді рівняння (19.7) запишеться у вигляді

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx. \quad (19.8)$$

Означення 19.16. Диференціальне рівняння виду (19.8), в якому множник при dx є функцією, яка залежить лише від x , а множник при dy є функцією, яка залежить лише від y , називається диференціальним рівнянням з відокремленими змінними.

Оскільки рівняння (19.8) містить тотожно рівні диференціали, то відповідні невизначені інтеграли відрізняються між собою на сталу величину, тобто $\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx + C$.

Отже, рівняння (19.7) розв'язано в квадратурах. Диференціальне рівняння (19.7) є окремим випадком рівняння виду

$$f_1(x)\varphi_1(y)dx + f_2(x)\varphi_2(y)dy = 0. \quad (19.9)$$

Для відокремлення змінних у цьому рівнянні досить обидві його частини поділити на функцію $\varphi_1(y)f_2(x)$.

Зауважимо, що при діленні обох частин рівняння (19.7) на $\varphi_1(y)$ можна загубити деякі розв'язки. Дійсно, якщо $\varphi(y_0) = 0$, то стала $y = y_0$ є розв'язком рівняння (19.7), оскільки перетворює це рівняння в тотожність. Цей розв'язок може бути як частинним, так і особливим.

Аналогічне зауваження стосується коренів функцій $\varphi_1(y)$ та $f_2(x)$ у рівнянні (19.9).

Приклад 19.4. Розв'язати рівняння $(x + xy^2)dx - (y + yx^2)dy = 0$. ☺

Розв'язання. Оскільки це рівняння можна записати у вигляді $x(1 + y^2)dx - y(1 + x^2)dy = 0$, то воно є рівнянням з відокремлюваними змінними. Поділивши обидві його частини на $(1 + x^2)(1 + y^2) \neq 0$, дістанемо рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{x}{1 + x^2}dx - \frac{y}{1 + y^2}dy = 0 \text{ або } \frac{2x dx}{1 + x^2} = \frac{2y dy}{1 + y^2},$$

інтегруючи останнє рівняння, маємо

$$\ln(1 + x^2) = \ln(1 + y^2) + \ln|C|, \quad C \neq 0.$$

Потенціюючи, дістаємо загальний інтеграл заданого рівняння:

$$\frac{1+x^2}{1+y^2} = C, \quad C \neq 0.$$

Рівняння, звідні до рівнянь з відокремлюваними змінними

Розглянемо тепер рівняння

$$y' = f(ax + by + c), \quad (19.10)$$

де a, b, c — задані числа, і покажемо, що заміною

$$u = ax + by + c \quad (19.11)$$

рівняння (19.10) зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.

Справді, диференціюючи рівність (19.11) по x , дістанемо $\frac{du}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$, тому згідно з (19.10) маємо рівняння $\frac{du}{dx} = a + bf(u)$, у якому при $a + bf(u) \neq 0$ відокремлюються змінні: $\frac{du}{a + bf(u)} = dx$. Інтегруючи це рівняння і замінюючи u на $ax + by + c$, дістанемо загальний інтеграл рівняння (19.10).

Якщо $a + bf(x) = 0$, або, що те ж саме, $\frac{du}{dx} = 0$, то, згідно з рівністю (19.11), рівняння (19.10) може мати розв'язки $ax + by + c = 0$.

Приклад 19.5. Розв'язати рівняння $y' = (x + y)^2$. ☺

Розв'язання. Покладемо $u = x + y$, тоді $\frac{du}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$, або $\frac{du}{dx} = 1 + u^2$, звідки $\frac{du}{1+u^2} = dx$. Інтегруючи це рівняння, знаходимо $\arctg u = x + C$, тобто $\arctg(x + y) = x + C$ — загальний інтеграл заданого рівняння. Інших розв'язків це рівняння не має, бо $1 + u^2 \neq 0$. ■

Однорідні диференціальні рівняння

Спершу дамо означення однорідної функції.

Означення 19.17. Функція $f(x, y)$ називається однорідною функцією n -го виміру відносно змінних x та y , якщо для довільного числа $t \neq 0$ виконується тотожність $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$. ✓

Наприклад, функція $f(x, y) = x^2 - 5xy$ однорідна функція другого виміру, оскільки

$$f(tx, ty) = (tx)^2 - 5(tx)(ty) = t^2(x^2 - 5xy) = t^2 f(x, y);$$

функція $f(x, y) = \frac{2x-y}{\sqrt{xy}}$ — однорідна функція нульового виміру, оскільки

$$f(tx, ty) = \frac{2(tx) - (ty)}{\sqrt{(tx)(ty)}} = \frac{t(2x - y)}{t\sqrt{xy}} = \frac{2x - y}{\sqrt{xy}} = t^0 f(x, y).$$

Означення 19.18. Диференціальне рівняння

$$y' = f(x, y) \quad (19.12)$$

називається *однорідним*, якщо функція $f(x, y)$ є однорідною функцією нульового виміру. ✓

Очевидно, рівняння виду

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (19.13)$$

буде однорідним тоді і тільки тоді, коли функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ будуть однорідними функціями одного й того самого виміру.

Покажемо, що однорідні рівняння зводяться до рівнянь з відокремлюваними змінними підстановкою

$$y = ux, \quad (19.14)$$

де u — невідома функція: $u = u(x)$.

Якщо функція (19.14) є розв'язком диференціального рівняння (19.12) і $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$, то

$$u + x\frac{du}{dx} = f(x, ux). \quad (19.15)$$

За умовою $f(x, y)$ — однорідна функція нульового виміру, тобто $f(tx, ty) \equiv f(x, y)$. Поклавши в цій тотожності $y = ux$ і $t = x$, дістанемо $f(x, ux) = f(1, u)$, тому рівняння (19.15) набирає вигляду

$$u + x\frac{du}{dx} = f(1, u). \quad (19.16)$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними. Якщо $f(1, u) - u \neq 0$, то, відокремлюючи змінні, дістаємо рівняння

$$\frac{du}{f(1, u) - u} = \frac{dx}{x}$$

проінтегрувавши, знайдемо

$$\int \frac{du}{f(1, u) - u} = \ln|x| + C.$$

Після інтегрування підставляють $u = \frac{y}{x}$ і дістають інтеграл рівняння (19.12).

Якщо $f(1, u) - u = 0$, то рівняння (19.16) запишеться у вигляді $x\frac{du}{dx} = 0$. У цьому випадку рівняння (19.12) і (19.13) можуть мати ще розв'язки $y = Cx$ ($x \neq 0$) та $x = 0$ ($y \neq 0$).

Приклад 19.6. Розв'язати рівняння $y' = \frac{x^2 + y^2}{2x^2}$.



Розв'язання. Права частина цього рівняння є однорідною функцією нульового виміру, тому що

$$f(tx, ty) = \frac{(tx)^2 + (ty)^2}{2(tx)^2} = \frac{x^2 + y^2}{2x^2} = f(x, y).$$

Отже, диференціальне рівняння є однорідним. Застосувавши підстановку $y = ux$, дістанемо загальний інтеграл даного рівняння:

$$\begin{aligned} xu' + u &= \frac{1 + u^2}{2}; \quad xu' = \frac{1 + u^2}{2} - u; \\ xu' &= \frac{(u - 1)^2}{2}; \quad x\frac{du}{dx} = \frac{(u - 1)^2}{2}; \end{aligned}$$

$$\frac{2du}{(u-1)^2} = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{2du}{(u-1)^2} = \int \frac{dx}{x};$$

$$-\frac{2}{u-1} = \ln|x| + \ln|C|; \quad -\frac{2}{\frac{y}{x}-1} = \ln|Cx|;$$

$$\frac{2x}{x-y} = \ln|Cx|; \quad Cx = e^{\frac{2x}{x-y}}.$$

При відокремленні змінних ми ділили на x і на $(u-1)^2$, що можливо при $x \neq 0$ та $u \neq 1$. Точки, в яких $x = 0$, не входять в область визначення правої частини заданого рівняння, тому пряма $x = 0$ не може бути інтегральною кривою цього рівняння.

Нехай $u = 1$, тобто $y = x$. Функція $y = x$ перетворює дане рівняння в тотожність, тому є його розв'язком. Цей розв'язок є особливим і його слід вказувати додатково до знайденого інтеграла. ■

Рівняння зведені до однорідних

Розглянемо тепер рівняння, які можна звести до однорідних. Нехай маємо рівняння виду

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \quad (19.17)$$

де $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ — задані сталі. Якщо $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, то підстановкою $z = a_1x + b_1y + c_1$ рівняння (19.17) зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.

Якщо $\Delta \neq 0$, то можна зробити таку заміну змінних $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$, що в лінійних функціях зникнуть вільні члени, тобто виконуватимуться рівності $a_ix + b_iy + c_i = a_iu + b_iv$, $i = 1, 2$. Для цього α і β вибирають як розв'язок системи

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0, \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0. \end{cases}$$

Після такої заміни рівняння буде однорідним.

Приклад 19.7. Розв'язати рівняння $y' = \frac{x+2y+1}{2x+y-1}$. ☺

Розв'язання. Для цього рівняння $\Delta = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -3 \neq 0$, тому, поклавши $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$, дістанемо

$$dx = du, \quad dy = dv; \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du};$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{u + 2v + (\alpha + 2\beta + 1)}{2u + v + (2\alpha + \beta - 1)}.$$

Сталі α і β доберемо так, щоб

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 1 = 0; \\ 2\alpha + \beta - 1 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, знайдемо $\alpha = 1$, $\beta = 1$, тому заміною змінних $x = u + 1$, $y = v + 1$ задане рівняння зводиться до однорідного: $\frac{dv}{du} = \frac{u+2v}{2u+v}$.

За допомогою підстановки $v = uz$ знаходимо загальний інтеграл цього рівняння: $(v-u)^2 = C(u+v)$, $C > 0$. Звідси, враховуючи, що $u = x - 1$, $v = y - 1$, дістанемо загальний інтеграл заданого рівняння $(y - x + 2)^3 = C(x + y)$. ■

ТЕМА 20. ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ ТА ЗВІДНІ ДО НИХ

Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

Означення 20.1. Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння виду

$$y' + p(x)y = f(x), \quad (20.1)$$

де $p(x)$ і $f(x)$ — задані і неперервні на деякому проміжку функції. ✓

Термін „лінійне рівняння“ пояснюється тим, що невідома функція y і її похідна y' входять до рівняння у першому степені, тобто лінійно.

Є кілька методів інтегрування рівняння (20.1). Один з них (метод Бернуллі) полягає в тому, що розв’язок цього рівняння шукають у вигляді добутку

$$y = uv, \quad (20.2)$$

де $u = u(x)$, $v = v(x)$ — невідомі функції x , причому одна з цих функцій довільна (але не рівна тотожно нулю). Знаходячи похідну $y' = u'v + uv'$ і підставляючи значення y та y' в рівняння (20.1), дістанемо $u'v + u(v' + p(x)v) = f(x)$. Користуючись довільністю у виборі функції $v(x)$, доберемо її так, щоб

$$v' + p(x)v = 0; \quad (20.3)$$

тоді

$$u'v = f(x). \quad (20.4)$$

Розв’яжемо ці рівняння. Відокремлюючи в рівнянні (20.3) змінні та інтегруючи, знайдемо його загальний розв’язок:

$$\frac{dv}{dx} = -p(x)v; \quad \frac{dv}{v} = -p(x)dx; \\ \ln |v| = -\int p(x)dx + \ln |C_1|; \quad v = C_1 e^{-\int p(x)dx}, \quad C_1 \neq 0.$$

Візьмемо за v який-небудь частинний розв’язок рівняння (20.3), наприклад

$$v = e^{-\int p(x)dx}. \quad (20.5)$$

Знаючи функцію v , з рівняння (20.4) знаходимо функцію u :

$$du = f(x)e^{\int p(x)dx}; \\ u = \int f(x)e^{\int p(x)dx} dx + C. \quad (20.6)$$

Підставляючи функції (20.5) і (20.6) в (20.2), знаходимо загальний розв’язок рівняння (20.1)

$$y = uv = e^{-\int p(x)dx} \left(\int f(x)e^{\int p(x)dx} dx + C \right).$$

Приклад 20.1. Знайти загальний розв'язок рівняння $y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin 2x}{x}$. ☺

Розв'язання. Це лінійне рівняння виду (20.1), в якому

$$p(x) = \frac{1}{x}, \quad f(x) = \frac{\sin 2x}{x}.$$

Нехай $y = uv$, тоді $y' = u'v + uv'$. Маємо

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{\sin 2x}{x} \Rightarrow u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = \frac{\sin 2x}{x}.$$

Доберемо функцію v так, щоб $v' + \frac{v}{x} = 0$; тоді $u'v = \frac{\sin 2x}{x}$. Інтегруючи перше з цих рівнянь дістаємо

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}; \quad \ln |v| = -\ln |x|; \quad v = \frac{1}{x}.$$

Підставивши значення v у друге рівняння, дістанемо

$$u' \frac{1}{x} = \frac{\sin 2x}{x}; \quad du = \sin 2x dx; \quad u = -\frac{\cos 2x}{2} + C.$$

після чого знайдемо загальний розв'язок

$$y = uv = \frac{1}{x} \left(C - \frac{1}{2} \cos 2x \right).$$

Рівняння, які зводяться до лінійних

Розглянемо класи рівнянь, які за допомогою певних перетворень можна звести до лінійних.

1. Рівняння виду

$$y' = \frac{R(y)}{P(y)x + Q(y)}, \quad (20.7)$$

де $P(y)$, $Q(y)$, $R(y)$ — задані функції, $R(y) \neq 0$, можна звести до лінійних, якщо x вважати функцією, а y — аргументом: $x = x(y)$; тоді з рівностей (20.7) і $y'_x x'_y = 1$ дістанемо лінійне рівняння відносно x :

$$\frac{dy}{dx} + \varphi(y)x = f(y), \quad \text{де } \varphi(y) = -\frac{P(y)}{R(y)}, \quad f(y) = \frac{Q(y)}{R(y)}.$$

Розв'язок цього рівняння шукаємо у вигляді $x = u(y)v(y)$.

Приклад 20.2. Розв'язати рівняння $(2xy + y^3)dy - dx = 0$.

Розв'язання. Оскільки $y' = \frac{1}{2xy+y^3}$, то маємо рівняння виду (20.7). Якщо x вважати функцією y , то відносно x це рівняння стає лінійним: $x' - 2yx = y^3$.

Розв'яжемо це рівняння: $x = uv$; $u'v + uv' - 2uvy = y^3$;

$$u'v + u(v' - 2vy) = y^3; \quad v' - 2vy = 0; \quad \frac{dv}{v} = 2ydy;$$

$$\ln |v| = y^2 + \ln |C|; \quad v = e^{y^2}; \quad \frac{du}{dy} e^{y^2} = y^3; \quad du = y^3 e^{-y^2} dy;$$

$$u = \int y^3 e^{-y^2} dy = \frac{1}{2} \int y^2 e^{-y^2} dy^2 = -\frac{1}{2} e^{-y^2} (1 + y^2) + C;$$

$$x = uv = C e^{y^2} - \frac{1}{2} (1 + y^2).$$

2. Рівняння виду

$$f'_y(y)y' + p(x)f(y) = q(x), \quad (20.8)$$

де f, p, q — задані функції, заміною $z = f(y)$ зводиться до лінійного відносно змінної z :

$$z' + p(x)z = q(x). \quad (20.9)$$

Справді, якщо $z = f(y)$, де $y = y(x)$ — невідома функція, то $\frac{dz}{dx} = \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = f'_y(y)y'$, тому рівняння (20.8) набуває вигляду (20.9).

3. Рівняння Бернуллі.

Означення 20.2. Рівнянням Бернуллі називається рівняння виду

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0, 1. \quad (20.10)$$

✓

Рівняння (20.10) запропонував у 1695 р. Якоб Бернуллі, а в 1697 р. його брат Йоганн Бернуллі це рівняння розв'язав.

Очевидно, при $\alpha = 0$ це рівняння — лінійне, а при $\alpha = 1$ — з відокремлюваними змінними. Припускаючи, що $y \neq 0$, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$, поділимо рівняння (20.10) на y^α , тоді матимемо рівняння виду (20.8): $y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x)$.

Таким чином, заміною $z = y^{1-\alpha}$ рівняння Бернуллі зводиться до лінійного рівняння. Проте на практиці розв'язок рівняння Бернуллі зручніше шукати методом Бернуллі у вигляді $y = uv$, не зводячи його до лінійного рівняння. Слід зазначити, що при $\alpha > 0$, крім розв'язку $y = uv \neq 0$, рівняння Бернуллі має розв'язок $y \equiv 0$.

Приклад 20.3. Розв'язати рівняння $(x^2 \ln y - x)y' - y = 0$.

Розв'язання. Перетворимо рівняння: $y' = \frac{y}{x^2 \ln y - x}$. Звідки $yx' + x = x^2 \ln y$, або $x' + \frac{x}{y} = \frac{x^2}{y} = \ln y$. Маємо рівняння Бернуллі відносно змінної $x = x(y)$. Знайдемо його розв'язки

$$x = uv \Rightarrow u'v + uv' + \frac{uv}{y} = u^2 v^2 \frac{\ln y}{y};$$

$$u'v + u(v' + \frac{v}{y}) = u^2 v^2 \frac{\ln y}{y} \Rightarrow \frac{dv}{y} + \frac{v}{y} = 0; \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{dy}{y} \Rightarrow v = \frac{1}{y};$$

$$\frac{du}{dy} \cdot \frac{1}{y} = u^2 \frac{1}{y^2} \cdot \frac{\ln y}{y}; \Rightarrow \frac{du}{u^2} = \frac{\ln y}{y^2} dy;$$

$$u = \frac{y}{1 + \ln y - Cy}; \Rightarrow x = uv = \frac{1}{1 + \ln y - Cy}.$$

4. Рівняння Ріккати.

Означення 20.3. Рівняння виду

$$y' + p(x)y = q(x)y^2 = r(x), \quad (20.11)$$

де $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ — задані функції, називається рівнянням Ріккати.

Якщо p , q , r — сталі числа, то це рівняння інтегрується відокремленням змінних:

$$\int \frac{dy}{r - py - qy^2} = x + C.$$

Коли $q(x) \equiv 0$, рівняння (20.11) стає лінійним, а у випадку $r(x) \equiv 0$ — рівнянням Бернуллі. У загальному випадку рівняння (20.11) не інтегрується у квадратурах. Проте якщо відомий його один частинний розв'язок $y_1 = y_1(x)$, то заміною $y = y_1 + z$ рівняння Ріккати зводиться до рівняння Бернуллі.

Приклад 20.4. Розв'язати в квадратурах рівняння $y' + 2y(y - x) = 1$.

Розв'язання. Задане рівняння є рівнянням Ріккати. Неважко пересвідчитись, що функція $y = x$ — розв'язок цього рівняння, тому заміна $y = x + z$ зводить його до рівняння Бернуллі:

$$1 + z' + 2(x + z)(x + z - x) = 1$$

або

$$z' + 2zx = -2z^2.$$

Далі маємо

$$z = uv; \quad u'v + uv' + 2uvx = -2u^2v^2;$$

$$u'v + u(v' + 2vx) = -2u^2v^2;$$

$$\frac{dv}{dx} = -2vx; \quad \frac{dv}{v} = -2xdx; \quad v = e^{-x^2};$$

$$\frac{du}{dx} e^{-x^2} = -2u^2 e^{-2x^2}; \quad -\frac{du}{u^2} = 2e^{-x^2} dx;$$

$$u = \left(2 \int e^{-x^2} dx + C \right)^{-1}; \quad z = uv = e^{-x^2} \left(2 \int e^{-x^2} dx + C \right)^{-1};$$

отже, розв'язком даного рівняння є:

$$y = x; \quad y = x + z = x + e^{-x^2} \left(2 \int e^{-x^2} dx + C \right)^{-1}.$$

Рівняння в повних диференціалах. Інтегровальний множник

Означення 20.4. Рівняння виду

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (20.12)$$

називається рівнянням у повних диференціалах, якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$, тобто

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = du(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy. \quad \checkmark$$

У цьому випадку загальний інтеграл рівняння (20.12) має вигляд $u(x, y) = C$, де C — довільна стала.

Для того, щоб рівняння (20.12) було рівнянням в повних диференціалах необхідно і достатньо, щоб

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}. \quad (20.13)$$

З'ясуємо методику інтегрування цих рівнянь. Якщо для рівняння (20.12) умова (20.13) виконується, то невідома функція $u = u(x, y)$ задовольняє рівності

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \quad (20.14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y). \quad (20.15)$$

Інтегруючи рівність (20.14) по x , визначимо функцію $u(x, y)$ з точністю до довільної диференційовної функції $\varphi(y)$:

$$u(x, y) = \int P(x, y)dx = F(x, y) + \varphi(y), \quad (20.16)$$

де $F(x, y)$ — первісна функції $P(x, y)$ по x . Диференціюючи рівність (20.16) по y і враховуючи (20.15), дістаємо рівняння для знаходження функції $\varphi(y)$: $\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} + \frac{d\varphi}{dy} = Q(x, y)$.

Приклад 20.5. Розв'язати рівняння $(3y^2 + 2xy + 2x)dx + (6xy + x^2 + 3)dy = 0$. ☺

Розв'язання. У даному випадку $P(x, y) = 3y^2 + 2xy + 2x$, $Q(x, y) = 6xy + x^2 + 3$.

Оскільки $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 6y + 2x$, то ліва частина заданого рівняння є повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$, причому

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3y^2 + 2xy + 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 6xy + x^2 + 3. \quad (20.17)$$

Інтегруючи, наприклад, перше з рівнянь (20.17) по x (вважаючи y сталою), маємо

$$u(x, y) = 3xy^2 + x^2y + x^2 + \varphi(y), \quad (20.18)$$

де $\varphi(y)$ — довільна диференційовна функція від y .

Диференціюючи рівність (20.18) по y , згідно з другим рівнянням (20.17) дістанемо

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy + x^2 + \frac{d\varphi}{dy} = 6xy + x^2 + 3,$$

тобто $\frac{d\varphi}{dy} = 3$, звідки $\varphi(y) = 3y + C_1$, тому $u(x, y) = 3xy^2 + x^2y + x^2 + 3y + C_1$. Отже, загальний інтеграл заданого рівняння виражається рівністю $3xy^2 + x^2y + x^2 + 3y = C$. ■

Таким чином, рівняння в повних диференціалах інтегрується досить просто. У зв'язку з цим виникає питання, а чи не можна множенням на певний множник $\mu(x, y)$ довільне рівняння в диференціальній формі (19.3) звести до рівняння в повних диференціалах? Виявляється, що за певних умов це цілком можливо.

Визначення 20.5. Функція $\mu(x, y)$ називається інтегрувальним множником рівняння (20.12), якщо після домноження на неї цього рівняння воно стає рівнянням у повних диференціалах. ✓

Можна довести, що всяке диференціальне рівняння першого порядку, яке задовольняє умовам теореми Коші, має безліч інтегрувальних множників.

Розглянемо методи знаходження інтегрувальних множників $\mu(x, y)$. Загального методу знаходження функцій $\mu(x, y)$ немає. Їх можна знайти лише в деяких окремих випадках. Складемо рівняння для інтегрувальних множників.

Якщо $\mu = \mu(x, y)$ — інтегрувальний множник рівняння (20.12), то рівняння $P\mu dx + Q\mu dy = 0$ є рівнянням у повних диференціалах. Тому, згідно з умовою (20.13), маємо $\frac{\partial(P\mu)}{\partial y} = \frac{\partial(Q\mu)}{\partial x}$, тобто

$$\mu \frac{\partial P}{\partial y} + P \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{\partial Q}{\partial x} + Q \frac{\partial \mu}{\partial x},$$

звідки

$$P \frac{\partial \mu}{\partial y} - Q \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right),$$

або

$$P \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} - Q \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \quad (20.19)$$

Отже, щоб дістати інтегрувальний множник, треба знайти який-небудь частинний розв'язок рівняння (20.19). Це рівняння є диференціальним рівнянням з частинними похідними відносно невідомої функції $\mu(x, y)$. У загальному випадку задача знаходження $\mu(x, y)$ з рівняння (20.19) значно складніша, ніж розв'язування самого рівняння (20.12).

Розглянемо два випадки, коли рівняння (20.19) спрощується і інтегрувальний множник рівняння (20.12) можна знайти.

Припустимо, що рівняння (20.12) має інтегрувальний множник, який залежить лише від x , тобто $\mu = \mu(x)$; тоді в рівнянні (20.19) $\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = 0$ і для знаходження μ матимемо звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = \frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right), \quad (20.20)$$

з якого однією квадратурою визначається $\ln \mu$, а потім і μ . Зрозуміло, що рівняння (20.20) має зміст лише в тому випадку, коли вираз $\frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right)$ не залежить від y , а залежить лише від x .

Аналогічно якщо вираз $\frac{1}{P}(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})$ залежить лише від y і не залежить від x , то інтегровальний множник є функцією однієї змінної y і його знаходять з рівняння

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right), \quad (20.21)$$

Приклад 20.6. Розв'язати рівняння $(x^2y^2 - 1)dx + 2x^3ydy = 0$. ☺

Розв'язання. Маємо

$$P(x, y) = x^2y^2 - 1, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 2x^2y;$$

$$Q(x, y) = 2x^3y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 6x^2y.$$

Оскільки рівність (20.13) не виконується, то задане рівняння не є рівнянням у повних диференціалах. Проте

$$\frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = \frac{-4x^2y}{2x^3y} = -\frac{2}{x},$$

тому рівняння має інтегровальний множник, який залежить лише від x . Складаємо рівняння (20.20) розв'язуємо його:

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = -\frac{2}{x}; \quad \ln \mu = -2 \ln |x| + \ln |C|; \quad \mu = \frac{C}{x^2}; \quad C \neq 0.$$

Візьмемо інтегровальним множником функцію $\mu = \frac{1}{x^2}$ і помножимо обидві частини заданого рівняння на цей множник. Дістанемо рівняння в повних диференціалах $(y^2 - \frac{1}{x^2})dx + 2xydy = 0$. Розв'язуючи це рівняння (див. попередній приклад), знайдемо, що загальний інтеграл заданого рівняння має вигляд $xy^2 + \frac{1}{x} = C$. ■

ТЕМА 21. РІВНЯННЯ, НЕРОЗВ'ЯЗНІ ВІДНОСНО ПОХІДНОЇ

Нехай маємо рівняння виду

$$F(x, y, y') = 0. \quad (21.1)$$

яке важко або неможливо розв'язати відносно похідної y' .

Розглянемо деякі інтегровні в квадратурах класи таких рівнянь.

Рівняння, що містить лише похідну невідомої функції

Нехай рівняння (21.1) залежить лише від y' :

$$F(y') = 0. \quad (21.2)$$

Якщо алгебраїчне рівняння $F(x) = 0$ має хоча б один дійсний корінь $x = k$, то рівняння (21.2) має загальний інтеграл

$$F\left(\frac{y - C}{x}\right) = 0, \quad (21.3)$$

де C — довільна стала.

Справді, оскільки рівняння $y' = k$ інтегрується: $y = kx + C$, то, підставивши $k = \frac{y-C}{x}$ в (21.2), матимемо рівність (21.3). Можна показати, що рівняння (21.2) особливих розв'язків не має.

Приклад 21.1. Розв'язати рівняння $y^3 + y'^2 + y' - 3 = 0$.

Розв'язання. Оскільки алгебраїчне рівняння $x^3 + x^2 + x - 3 = 0$ має дійсний корінь $x = 1$, то, згідно з (21.3), загальний інтеграл заданого рівняння має вигляд

$$\left(\frac{y-C}{x}\right)^3 + \left(\frac{y-C}{x}\right)^2 + \left(\frac{y-C}{x}\right) - 3 = 0.$$

Рівняння, що містять лише невідому функцію та її похідну

Нехай рівняння (21.1) не залежить від x :

$$F(y, y') = 0. \quad (21.4)$$

Якщо ввести параметр t , то рівняння (21.4) можна замінити двома рівняннями:

$$y = \varphi(t), \quad y' = \psi(t), \quad t \in [t_0; t_1],$$

такими, що

$$F(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0, \quad t \in [t_0; t_1].$$

Тоді

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)} dt.$$

звідки

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt + C.$$

Таким чином, шукані інтегральні криві визначаються параметричними рівняннями

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt + C, \quad y = \varphi(t).$$

Приклад 21.2. Розв'язати рівняння $y^{\frac{2}{3}} + (y')^{\frac{2}{3}} = 1$. ☺

Розв'язання. Нехай $y = \cos^3 t$, $y' = \sin^3 t$. Далі маємо

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{-3 \cos^2 t \sin t dt}{\sin^3 t} = -3 \operatorname{ctg}^2 t dt,$$

$$x = -3 \int \operatorname{ctg}^2 t dt = 3t + 3 \operatorname{ctg} t + C.$$

Отже, параметричні рівняння шуканих інтегральних кривих мають вигляд

$$x = 3t + 3 \operatorname{ctg} t + C, \quad y = \cos^3 t.$$

Зокрема, якщо рівняння (21.4) можна розв'язати відносно y : $y = \varphi(y')$, то за параметр зручно взяти y' . Справді, якщо $y' = t$, то $y = \varphi(t)$, тому $dx = \frac{\varphi'(t)dt}{t}$. Отже, $x = \int \frac{\varphi'(t)dt}{t} + C$, $y = \varphi(t)$ — параметричні рівняння інтегральних кривих.

Приклад 21.3. Розв'язати рівняння $y\sqrt{y'-1} = 2 - y'$.

Розв'язання. Розв'яжемо рівняння відносно y і покладемо $y' = t$: $y = \frac{2-t}{\sqrt{t-1}}$. Далі гіст'анемо

$$dx = \frac{dy}{y'} = -\frac{dt}{2(t-1)^{\frac{3}{2}}}, \quad x = \frac{1}{\sqrt{t-1}} + C.$$

Знаходимо параметричні рівняння інтегральних кривих:

$$x = \frac{1}{\sqrt{t-1}} + C, \quad y = \frac{2-t}{\sqrt{t-1}}.$$

Параметр t тут легко виключити. Для цього з першого рівняння визначимо $t = 1 + \frac{1}{(x-C)^2}$ і підставимо в друге рівняння. Знайдемо загальний розв'язок заданого рівняння: $y = x - C - \frac{1}{x-C}$. ■

Рівняння, що містить лише незалежну змінну та похідну невідомої функції

Нехай рівняння (21.1) не залежить від y :

$$F(x, y') = 0. \quad (21.5)$$

Як і в попередньому випадку, можна ввести параметр і замінити рівняння (21.5) двома рівняннями:

$$x = \varphi(t), \quad y' = \psi(t), \quad t \in [t_0; t_1],$$

такими, що

$$F(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0, \quad t \in [t_0; t_1].$$

Тоді дістанемо

$$dy = y'dx = \psi(t)\varphi'(t)dt.$$

Отже, інтегральні криві визначаються, параметричними рівняннями

$$x = \varphi(t), \quad y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C.$$

Зокрема, якщо рівняння (21.5) легко розв'язується відносно x : $x = \varphi(y')$, то за параметр беруть $y' = t$. Тоді $dy = t\varphi'(t)dt$, звідки

$$y = \int t\varphi'(t)dt + C.$$

Рівняння Лагранжа і Клеро

Означення 21.1. Рівняння виду

$$y = x\varphi(y') + \psi(y') \quad (21.6)$$

✓

де φ, ψ — відомі функції, називається рівнянням Лагранжа.

Зокрема, якщо $\varphi(y') \equiv y'$, то рівняння (21.6) набирає вигляду

$$y = xy' + \psi(y') \quad (21.7)$$

і називається **рівнянням Клеро**.

Введемо параметр $t = y'$, тоді рівняння (21.6) запишеться так:

$$y = x\varphi(t) + \psi(t). \quad (21.8)$$

Диференціюючи (21.8) по x , дістанемо

$$t = \varphi(t) + (x\varphi'(t) + \psi'(t))\frac{dt}{dx}, \quad (21.9)$$

або

$$t - \varphi(t) = (x\varphi'(t) + \psi'(t))\frac{dt}{dx},$$

звідки

$$(t - \varphi(t))\frac{dx}{dt} = x\varphi'(t) + \psi'(t). \quad (21.10)$$

Рівняння (21.10) є лінійним відносно невідомої функції $x = x(t)$. Розв'язуючи його, знайдемо загальний розв'язок $x = x(t, C)$, який разом з рівнянням (21.8) визначить шукані інтегральні криві.

Переходячи до рівняння (21.10), ми ділили обидві частини рівняння (21.9) на $\frac{dt}{dx}$. При цьому можуть загубитись розв'язки, для яких $\frac{dt}{dx} = 0$, тобто $t = \text{const}$. Вважаючи t сталою, бачимо, що рівняння (21.9) задовольняється лише в тому випадку, коли t є коренем рівняння $t = \varphi(t) = 0$. Отже, якщо рівняння $t - \varphi(t) = 0$ має дійсні корені $t = t_i$, то знайдені вище розв'язки рівняння (21.6) треба доповнити розв'язками $y = x\varphi(t_i) + \psi(t_i)$. Якщо ці розв'язки не утворюються з загального ні за яких значень довільної сталої, то вони є особливими розв'язками.

Розглянемо рівняння Клеро. Поклавши $y' = t$, дістанемо

$$y = xt + \psi(t). \quad (21.11)$$

Диференціюючи рівність (21.11) по x , маємо

$$t = t + x\frac{dt}{dx} + \psi'(t)\frac{dt}{dx} \text{ або } (x + \psi'(t))\frac{dt}{dx} = 0.$$

Якщо $\frac{dt}{dx} = 0$, то $t = C$, тому з (21.11) маємо загальний розв'язок рівняння (21.7):

$$y = Cx + \psi(C). \quad (21.12)$$

Якщо $x + \psi'(C) = 0$, то дістаємо частинний розв'язок у параметричній формі:

$$x = -\psi'(t), \quad y = xt + \psi(t). \quad (21.13)$$

Можна довести, що рівняння (21.13) — особливий розв'язок рівняння Клеро, а саме, рівняння обвідної сім'ї прямих (21.12).

Приклад 21.4. Розв'язати рівняння $y = xy' - y'^2$.

Розв'язання. Маємо рівняння Клеро. Загальний розв'язок, згідно з (21.12), має вигляд $y = Cx - C^2$. Особливий розв'язок заданого рівняння дістанемо з (21.13): $y = xt - t^2$, $x = 2t$, звідки $y = \frac{x^2}{4}$. Це рівняння обвідної сім'ї прямих $y = Cx - C^2$. ■

ТЕМА 22. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Основні поняття і означення. Задача Коші

Розглянемо диференціальні рівняння, які містять похідні вищих порядків. Порядок найвищої похідної невідомої функції, що входить у диференціальне рівняння, називається *порядком цього рівняння*. Зокрема, *диференціальне рівняння n -го порядку* має вигляд

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (22.1)$$

де x — незалежна змінна; $y = y(x)$ — невідома функція; F — відома функція.

У рівняння n -го порядку (22.1) похідна n -го порядку $y^{(n)}$ має справді входити, тоді як наявність у ньому решти змінних, тобто $x, y, \dots, y^{(n-1)}$, необов'язкова.

Означення 22.1. Рівняння (22.1), не розв'язане відносно старшої похідної $y^{(n)}$, називається *неявним диференціальним рівнянням*. ✓

Означення 22.2. Нормальним або явним диференціальним рівнянням n -го порядку називається рівняння (22.1), розв'язане відносно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (22.2)$$

✓

Розглядатимемо в основному саме такі рівняння.

Означення 22.3. Розв'язком рівняння (22.2) на деякому інтервалі $(a; b)$ називається n разів неперервно диференційовна на цьому інтервалі функція $\varphi(x)$, яка при підстановці в дане рівняння обертає його в тотожність по $x \in (a; b)$, тобто

$$\forall x \in (a; b) : \varphi^{(n)}(x) \equiv f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)).$$

Означення 22.4. Графік розв'язку диференціального рівняння (22.1) або (22.2) називається його інтегральною кривою. ✓

Для диференціальних рівнянь вищих порядків, як і для рівнянь першого порядку, розглядається *задача Коші* або *задача з початковими умовами*. Для рівняння (22.2) ця задача ставиться так: серед усіх розв'язків рівняння (22.2) знайти такий розв'язок $y = y(x)$, $x \in (a; b)$, який при $x = x_0 \in (a; b)$ задовольняв такі умови:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

або

$$y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y'_0, \dots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}. \quad (22.3)$$

де $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ — довільні наперед задані дійсні числа. Умови (22.3) називають *початковими умовами* рівняння (22.2). Зокрема, для рівняння другого порядку

$$y'' = f(x, y, y') \quad (22.4)$$

початкові умови при $x = x_0$ мають вигляд

$$y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y'_0. \quad (22.5)$$

Існування і єдиність розв'язку задачі Коші визначаються такою теоремою Коші.

Теорема 22.1.

Якщо функція $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ і її частинні похідні по аргументам $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ неперервні в деякій відкритій області $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$, то для всякої точки $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in G$ існує єдиний розв'язок $y = y(x)$ рівняння (22.2), який задовольняв початкові умови (22.3). ★

Прийmemo дану теорему без доведення. Слід звернути увагу на те, що в цій теоремі мова йде про єдиність розв'язку в $(n + 1)$ -вимірному просторі: інакше кажучи, єдиність розв'язку рівняння (22.2) з умовами (22.3) на відміну від диференціального рівняння першого порядку не означає, що через задану точку $(x_0; y_0)$ проходить лише одна інтегральна крива рівняння (22.2). Так, для рівняння (22.4) єдиність розв'язку з умовами (22.5) означає, що через точку $(x_0; y_0)$ проходить лише одна інтегральна крива рівняння (22.4) з кутовим коефіцієнтом дотичної в цій точці, який дорівнює $\operatorname{tg} \alpha = y'_0$ (рис. 8.11). Проте через цю точку можуть проходити й інші інтегральні криві, але з іншим нахилом дотичної.

Нарешті, зупинимось на поняттях загального та частинного розв'язку рівняння (22.2). Як ми вже бачили, загальний розв'язок рівняння першого порядку знаходиться за допомогою операції інтегрування і містить одну довільну сталу. В загальному випадку розв'язок диференціального рівняння n -го порядку знаходиться в результаті n послідовних інтегрувань, тому *загальний розв'язок* рівняння (22.2) містить n довільних сталих, тобто має вигляд

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n). \quad (22.6)$$

Якщо загальний розв'язок знаходиться в неявній формі

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0, \quad (22.7)$$

то його називають *загальним інтегралом* рівняння (22.2).

Частинний розв'язок або частинний інтеграл знаходять із загального, якщо у співвідношенні (22.6) або (22.7) кожній довільній сталій $C_1, C_2, \dots, C_n$ надати конкретного числового значення. З погляду геометрії загальним розв'язком рівняння (22.2) є n -параметрична сім'я інтегральних кривих, залежних від n параметрів $C_1, C_2, \dots, C_n$, а частинний розв'язок — окрема крива з цієї сім'ї.

Зауважимо, що не кожний розв'язок рівняння (22.2), який містить n довільних сталих, є **загальним розв'язком**. Розв'язок (22.6) диференціального рівняння (22.2), який містить n довільних сталих, називається загальним розв'язком, якщо можна знайти такі єдині сталі $C_1 = C_{10}$, $C_2 = C_{20}$, $\dots$, $C_n = C_{n0}$, що частинний розв'язок $y = \varphi(x, C_{10}, C_{20}, \dots, C_{n0})$ задовольняє початкові умови (22.3).

Отже, розв'язати (проінтегрувати) диференціальне рівняння n -го порядку — означає: 1) знайти його загальний розв'язок; 2) із загального розв'язку виділити частинний розв'язок, який задовольняє початкові умови, якщо такі умови задані.

Диференціальні рівняння n -го порядку, які інтегруються в квадратурах

Рівняння n -го порядку інтегруються в квадратурах дуже рідко. Розглянемо деякі класи таких рівнянь.

1. Рівняння виду

$$y^{(n)} = f(x). \quad (22.8)$$

де $f(x)$ — задана неперервна функція, інтегрується в квадратурах.

Справді, записавши це рівняння у вигляді

$$\frac{d}{dx}(y^{(n-1)}) = f(x) \text{ або } d(y^{(n-1)}) = f(x)dx$$

та інтегруючи, дістанемо

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1,$$

де C_1 — стала інтегрування.

Аналогічно знайдемо

$$d(y^{(n-2)}) = \left(\int f(x)dx + C_1 \right) dx,$$

звідки

$$y^{(n-2)} = \int \left(\int f(x)dx \right) dx + C_1x + C_2;$$

$$dy^{(n-3)} = \left(\int \left(\int f(x)dx \right) dx + C_1x + C_2 \right) dx;$$

$$y^{(n-3)} = \int \left(\int \left(\int f(x)dx \right) dx \right) dx + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3;$$

де C_1, C_2, C_3 — сталі інтегрування. Продовжуючи далі, після n інтегрувань знайдемо загальний розв'язок рівняння (22.8):

$$y = \int \left(\dots \int \left(\int \left(\int f(x)dx \right) dx \right) \dots \right) dx + \frac{C_1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{C_2}{(n-2)!}x^{n-2} + \dots C_n.$$

Приклад 22.1. Знайти загальний розв'язок рівняння $y^{(4)} = \cos 2x$.

Розв'язання. Послідовно дістанемо

$$y''' = \int \cos 2x dx + C_1 = \frac{1}{2} \sin 2x + C_1;$$

$$y'' = \int \left(\frac{1}{2} \sin 2x + C_1 \right) dx + C_2 = -\frac{1}{4} \cos 2x + C_1 x + C_2;$$

$$y' = \int \left(-\frac{1}{4} \cos 2x + C_1 x + C_2 \right) dx + C_3 = -\frac{1}{8} \sin 2x + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3;$$

$$y = \int \left(-\frac{1}{8} \sin 2x + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3 \right) dx + C_4 = \frac{1}{16} \cos 2x + \frac{C_1}{6} x^3 + \frac{C_2}{2} x^2 + C_3 x + C_4.$$

2. Розглянемо рівняння виду

$$F(x, y^{(n)}) = 0. \quad (22.9)$$

Якщо задане рівняння можна розв'язати відносно $y^{(n)}$, то маємо вже розглянуте вище рівняння (22.8). Припустимо, що рівняння (22.9) можна розв'язати відносно x :

$$x = f(y^{(n)}). \quad (22.10)$$

Якщо покласти $y^{(n)} = t$, то рівняння (22.10) набере вигляду $x = f(t)$, звідки $dx = f'(t)dt$. Підставляючи значення $y^{(n)}$ і dx у тотожність $d(y^{(n-1)}) = t^{(n)} dx$, дістаємо

$$d(y^{(n-1)}) = t f'(t) dt, \quad y^{(n-1)} = \int t f'(t) dt + C_1. \quad (22.11)$$

Інтегруючи рівняння (22.11) тим самим методом, що й рівняння (22.8), і враховуючи щоразу, що $dx = f'(t)dt$, дістанемо розв'язок рівняння (22.9) в параметричній формі.

Приклад 22.2. Розв'язати рівняння $(y''')^3 + 3y'' - x = 0$.

Розв'язання. Маємо $y'' = t$, $x = t^3 + 3t$, $dx = (3t^2 + 3)dt$; $y' = \int t(3t^2 + 3)dt + C_1 = \frac{3}{4}t^4 + \frac{3}{2}t^2 + C_1$;

$$\begin{aligned} dy &= \left(\frac{3}{4}t^4 + \frac{3}{2}t^2 + C_1 \right) dx = \left(\frac{3}{4}t^4 + \frac{3}{2}t^2 + C_1 \right) (3t^2 + 3)dt = \\ &= 3 \left(\frac{3}{4}t^6 + \frac{9}{4}t^4 + (C_1 + \frac{3}{2})t^2 + C_1 \right) dt; \end{aligned}$$

$$y = \frac{9}{28}t^7 + \frac{27}{20}t^5 + (C_1 + \frac{3}{2})t^3 + 3C_1t + C_2.$$

Отже, загальний розв'язок даного рівняння у параметричній формі має вигляд

$$x = t^3 + 3t, \quad y = \frac{9}{28}t^7 + \frac{27}{20}t^5 + (C_1 + \frac{3}{2})t^3 + 3C_1t + C_2.$$

Диференціальні рівняння, які допускають пониження порядку

Одним з методів розв'язування диференціальних рівнянь вищих порядків є метод пониження порядку. Суть його полягає в тому, що за допомогою відповідної заміни змінної дане диференціальне рівняння зводиться до рівняння нижчого порядку.

Розглянемо два типи диференціальних рівнянь, які допускають пониження порядку.

1. Нехай задано диференціальне рівняння виду

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (22.12)$$

яке не містить явно шуканої функції. Порядок такого рівняння можна понизити, якщо за нову невідому функцію $z = z(x)$ взяти найнижчу із похідних даного рівняння, тобто покласти $y^{(k)} = z$; тоді $y^{(k+1)} = z'$; $y^{(k+2)} = z''$; $\dots$, $y^{(n)} = z^{(n-k)}$; тому дістаємо рівняння $F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0$. Таким чином, порядок рівняння понижується на k одиниць. Окремим випадком рівняння (22.12) є рівняння $F(x, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$, яке за допомогою нової змінної $z = y^{(n-1)}$, $z' = y^{(n)}$ зводиться до рівняння першого порядку: $F(x, z, z') = 0$.

Якщо для цього рівняння вдається знайти загальний розв'язок $z = z(x, C_1)$, то приходимо до рівняння $y^{(n-1)} = z(x, C_1)$ виду (22.8), яке інтегрується в квадратурах.

Приклад 22.3. Розв'язати рівняння $y'' + 3y' = e^{2x}$.

Розв'язання. Покладемо $z = y'$, тоді $z' = y''$ і маємо лінійне рівняння першого порядку відносно невідомої функції $z = z(x)$: $z' + 3z = e^{2x}$. Розв'язавши це рівняння, знайдемо $z(x) = C_1 e^{-3x} + \frac{1}{5} e^{2x}$, тоді $y' = C_1 e^{-3x} + \frac{1}{5} e^{2x}$, звідки $y = -\frac{C_1}{3} e^{-3x} + \frac{2}{5} e^{2x} + C_2$. ■

2. Розглянемо диференціальне рівняння виду

$$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (22.13)$$

яке не містить явно незалежної змінної x .

Рівняння (22.13) допускають пониження порядку на одиницю. Справді, покладемо $y' = z$, де (на відміну від попереднього випадку) новою невідомою z є функція від y : $z = z(y)$, тоді за правилом диференціювання складеної функції маємо:

$$y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} z = z'_y z,$$

тобто порядок другої похідної понизився на одиницю. Аналогічно дістаємо

$$y''' = \frac{d}{dx}(z'_y z) = \frac{d}{dy}(z'_y z) \cdot \frac{dy}{dx} = z(z''_{yy} z + (z'_y)^2)$$

тощо. Методом індукції можна довести, що порядок усіх наступних похідних також понижується на одиницю.

Таким чином, від рівняння (22.13) n -го порядку приходимо до рівняння $(n-1)$ -го порядку:

$$F(y, z, z', \dots, z^{(n-1)}) = 0.$$

Окремим випадком рівняння (22.13) є рівняння

$$F(y, y', y'') = 0, \quad (22.14)$$

яке підстановкою $y' = z$, $y'' = \frac{dz}{dy} \cdot z$ зводиться до диференціального рівняння першого порядку: $F(y, z, \frac{dz}{dy} z) = 0$.

Приклад 22.4. Розв'язати рівняння $yy'' - 2(y')^2 = 0$.

Розв'язання. Маємо рівняння виду (22.14). Поклавши $y' = z$, $y'' = \frac{dz}{dy}z$, дістанемо

$$yz \frac{dz}{dy} - 2z^2 = 0 \text{ або } z(y \frac{dz}{dy} - 2z) = 0.$$

Це рівняння розпадається на два: $z = 0$, $y \frac{dz}{dy} - 2z = 0$. З першого маємо $y' = 0$, звідки $y = C$. У другому рівнянні відокремлюються змінні:

$$\frac{dz}{z} = 2 \frac{dy}{y}; \ln |z| 2 \ln |y| + \ln |C_1|, \quad z = C_1 y^2, \quad C_1 \neq 0.$$

Оскільки $z = \frac{dy}{dx}$, то

$$\frac{dy}{dx} = C_1 y^2, \quad \frac{dy}{y^2} = C_1 dx, \quad -\frac{1}{y} = C_1 x + C_2.$$

Замінивши C_1 на $-C_1$, C_2 на $-C_2$, знайдемо другий розв'язок даного рівняння: $y = \frac{1}{C_1 x + C_2}$. Отже, задане рівняння має розв'язки $y = C$ та $y = \frac{1}{C_1 x + C_2}$. ■

ТЕМА 23. ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Основні поняття. Класифікація лінійних диференціальних рівнянь вищих порядків

Визначення 23.1. Лінійним диференціальним рівнянням n -го порядку (ЛДР- n) називається рівняння виду

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x), \quad (23.1)$$

де y — шукана функція змінної x , $p_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) і $f(x)$ — задані функції, неперервні на (a, b) . ✓

Функції $p_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) називаються **коефіцієнтами рівняння**, а $f(x)$ — його правою частиною.

Визначення 23.2. Якщо $f(x) \equiv 0$, то таке рівняння, тобто

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0, \quad (23.2)$$

називають **лінійним однорідним рівнянням (ЛОДР- n)** або рівнянням без правої частини. А якщо $f(x) \neq 0$, то рівняння (23.1) називають **лінійним неоднорідним рівнянням (ЛНДР- n)**. ✓

Кажуть також, що ЛОДР- n (23.2) відповідає ЛНДР- n (23.1).

Якщо розв'язати рівняння (23.1) відносно старшої похідної

$$y^{(n)} = -p_1(x)y^{(n-1)} - \dots - p_{n-1}(x)y' - p_n(x)y + f(x) \equiv F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

то бачимо, що рівняння завжди задовольняє умовам теореми Коші для ДР- n . Справді, в області неперервності коефіцієнтів рівняння (на проміжку (a, b)) функція

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

є неперервною функцією своїх $(n + 1)$ аргументів, як сума неперервних функцій, а частинні похідні

$$F'_y = -p_n(x), F'_{y'} = -p_{n-1}(x), \dots, F'_{y^{(n-1)}} = p_1(x)$$

— неперервні на (a, b) .

Отже, лінійне рівняння (23.2) має єдиний розв'язок при будь-яких початкових умовах

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \quad (23.3)$$

де $x_0 \in (a, b)$, а $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ - будь-які числа. Зокрема, якщо початкові умови нульові, то розв'язком ЛОДР- n (23.2) є тільки $y = 0$ (тривіальний розв'язок).

Формулюватимемо теореми в загальному виді (для ЛДР- n), доводитимемо їх з метою спрощення записів, не зменшуючи при цьому загальності, для ЛДР-2, тобто для рівнянь

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x), \quad (23.4)$$

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \quad (23.5)$$

відповідно ЛНДР-2 і ЛОДР-2.

Для спрощення записів і для спрощення багатьох доведень введемо поняття **лінійного диференціального оператора** L :

$$L = \left\{ \frac{d^n}{dx^n} + p_1(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1}(x) \frac{d}{dx} + p_n(x) \right\},$$

$$L[y] = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y.$$

Диференціальні рівняння (23.1) і (23.2) записуються в термінах (позначеннях) лінійного диференціального оператора відповідно так:

$$L[y] = f(x), L[y] = 0.$$

Використовуючи правила диференціювання суми і добутку змінної на число, можна довести наступні дві властивості лінійності цих операторів:

$$L[u + v] = L[u] + L[v], L[cu] = cL[u],$$

де $c = \text{const}$, або їх наслідок:

$$L[c_1 y_1 + \dots + c_k y_k] = c_1 L[y_1] + \dots + c_k L[y_k].$$

„Роботу“ лінійних диференціальних операторів проілюструємо на доведенні властивостей розв'язків лінійних диференціальних рівнянь.

Властивості розв'язків лінійних однорідних диференціальних рівнянь

1. Якщо y_1 - розв'язок ЛОДР $L[y] = 0$, а C - число (стала величина), то Cy_1 задовольняє цьому ж ЛОДР.

ДОВЕДЕННЯ. Справді,

$$L[Cy_1] = CL[y_1] = C \cdot 0 = 0.$$

□

2. Якщо y_1, y_2 - розв'язки ЛОДР $L[y] = 0$, то сума $y_1 + y_2$ - також розв'язок цього рівняння.

ДОВЕДЕННЯ. Справді,

$$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] = 0 + 0 = 0.$$

□

3. Якщо y_1, y_2 — розв'язки ЛОДР $L[y] = 0$, то їх лінійна комбінація $y = C_1y_1 + C_2y_2$ задовольняє даному рівнянню.

ДОВЕДЕННЯ. Ця властивість є наслідком двох попередніх.

□

4. Якщо комплекснозначна функція дійсної змінної $y(x) = u(x) + iv(x)$, де $u(x), v(x)$ — дійсні (їх називають відповідно дійсна і уявна частини функції $y(x)$), задовольняє ЛОДР з дійсними коефіцієнтами, то цьому рівнянню задовольняють її дійсна і уявна частини.

ДОВЕДЕННЯ. Справді, якщо прийняти до відома, що правило диференціювання суми дійсних функцій переноситься і на комплекснозначні функції, то $L[u + iv] = L[u] + iL[v]$. Далі, зважаючи на те, що коефіцієнти ЛОДР - дійсні, безпосередньо переконаємось, що $L[u], L[v]$ — дійсні. А тоді із $L[u + iv] = 0$ і $L[u] + iL[v] = 0$ випливає, що $L[u] = 0, L[v] = 0$.

□

Властивості розв'язків ЛНДР - лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь

1. Властивість накладання частинних розв'язків ЛНДР: якщо y_1 і y_2 — розв'язки відповідно ЛНДР $L[y_1] = f_1$ і $L[y_2] = f_2$, то їх сума $y = y_1 + y_2$ — розв'язок ЛНДР

$$L[y] = f_1 + f_2.$$

ДОВЕДЕННЯ. $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] = f_1 + f_2.$

2. Якщо y_1 і y_2 — розв'язки ЛНДР з однаковими правими частинами, то їх різниця $y = y_1 - y_2$ є розв'язком відповідного ЛОДР.

ДОБЕДЕННЯ. $L[y_1 - y_2] = L[y_1] - L[y_2] = f - f = 0.$ □

3. Якщо y_1 — розв'язок ЛНДР $L[y] = f$, а y_0 — розв'язок відповідного ЛОДР, то їх сума $y = y_1 + y_0$ — розв'язок заданого ЛНДР.

ДОБЕДЕННЯ. $L[y_1 + y_0] = L[y_1] + L[y_0] = f + 0 = f.$ □

Лінійна залежність і лінійна незалежність систем функцій

Означення 23.3. Лінійною комбінацією функцій $y_1, y_2, \dots, y_n$ називається функція

$$Y = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n, \quad (23.6)$$

утворена із заданих функцій за допомогою лінійних операцій, тобто операцій множення на число і додавання. ✓

Означення 23.4. Система функцій $y_1, y_2, \dots, y_n$, визначених на (a, b) називається лінійно залежною на цьому проміжку, якщо можна підібрати такі числа $C_1, C_2, \dots, C_n$ не всі рівні нулю і такі, що лінійна комбінація

$$C_1 y_1 + \dots + C_n y_n \equiv 0$$

при $x \in (a, b)$. ✓

Виконання цієї умови означає, що хоча б одну із заданих функцій можна виразити лінійно через інші. Наприклад, якщо $C_n \neq 0$, то

$$y_n = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_{n-1} y_{n-1},$$

де $\alpha_k = -\frac{C_k}{C_n}, k = 1, 2, \dots, (n-1)$.

Означення 23.5. Якщо при всіх $x \in (a, b)$ лінійна комбінація $C_1 y_1 + \dots + C_n y_n \equiv 0$ тільки тоді, коли $C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0$, то система функцій $y_1, y_2, \dots, y_n$ називається лінійно незалежною на (a, b) . ✓

У цьому випадку жодну із заданих функцій не можна виразити лінійно через інші.

Наприклад, функції $y_1 = \sin^2 x, y_2 = \cos^2 x, y_3 = 1$ лінійно залежні на $(-\infty, \infty)$, бо $C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 \equiv 0$ при $C_1 = 1, C_2 = 1, C_3 = -1$.

Для двох функцій ($n = 2$) y_1, y_2 можна записати таку умову лінійної залежності: $\frac{y_2}{y_1} = -\frac{C_1}{C_2} = k = \text{const}$, звідки $y_2 = k y_1$. Ця умова є рівнянням прямої лінії в координатах y_1, y_2 , звідси і назва — лінійна залежність.

Приклад 23.1. Переконайтесь, що кожна з систем функцій

$$1, x, x^2, \dots, x^n \quad (23.7)$$

$$e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \dots, e^{k_n x} (k_i \neq k_j) \quad (23.8)$$

лінійно незалежна на $(-\infty, \infty)$.



Розв'язання. 1. Продиференціюємо тотожність

$$\begin{aligned} P_n(x) &\equiv C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots + C_nx^n \equiv 0, \\ P'_n(x) &\equiv C_1 + 2C_2x + \dots + nC_nx^{n-1} \equiv 0, \\ P''_n(x) &\equiv 2C_2 + 3 \cdot 2C_3x + \dots + n(n-1)C_nx^{n-2} \equiv 0, \\ &\dots\dots\dots \\ P_n^{(n)}(x) &\equiv n!C_n \equiv 0. \end{aligned}$$

З останнього рівняння цієї системи рівностей випливає, що $C_n = 0$. Тоді з передостанньої рівності знаходимо, що $C_{n-1} = 0$. Далі, „піднімаючись вгору“ з наступних рівностей знаходимо $C_{n-2} = 0, \dots, C_0 = 0$.

2. Розглянемо тотожність:

$$C_1e^{\alpha_1x} + C_2e^{\alpha_2x} + \dots + C_ne^{\alpha_nx} \equiv 0, \alpha_i \neq \alpha_j.$$

Маємо, після ділення обох частин на $(e^{\alpha_1x} \neq 0)$:

$$C_1 + C_2e^{(\alpha_2-\alpha_1)x} + \dots + C_ne^{(\alpha_n-\alpha_1)x} \equiv 0.$$

Диференціюючи, знаходимо:

$$C_2(\alpha_2 - \alpha_1)e^{(\alpha_2-\alpha_1)x} + \dots + C_n(\alpha_n - \alpha_1)e^{(\alpha_n-\alpha_1)x} \equiv 0.$$

Ділимо тепер обидві частини рівності на $e^{(\alpha_2-\alpha_1)x}$:

$$C_2(\alpha_2 - \alpha_1) + C_3(\alpha_3 - \alpha_1)e^{(\alpha_3-\alpha_2)x} + \dots + C_n(\alpha_n - \alpha_1)e^{(\alpha_n-\alpha_2)x} \equiv 0.$$

Знову диференціюємо обидві частини, а потім ділимо на $e^{(\alpha_3-\alpha_2)x}$ і т. д.

Через n кроків дістаємо:

$$C_n(\alpha_n - \alpha_1)(\alpha_n - \alpha_2) \dots (\alpha_n - \alpha_{n-1})e^{(\alpha_n-\alpha_{n-1})x} \equiv 0,$$

Звідки $C_n = 0$. Тоді „піднімаючись“ по рівностях вгору, одержуємо:

$$C_{n-1} = 0, \dots, C_1 = 0.$$



Визначник Вронського

Для побудови загального розв'язку ЛОДР треба глибше вивчити питання лінійної залежності частинних розв'язків цих рівнянь. З цією метою введемо поняття так званого вронскіана.

Означення 23.6. Якщо функції $y_1, y_2, \dots, y_n$ $n - 1$ -раз диференційовані на про-

міжку (a, b) , то визначником Вронського або Вронскіаном називається

$$\Delta = W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \quad (23.9)$$

Зокрема, при $n = 2$

$$\Delta = W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'. \quad (23.10)$$

Відзначимо такі властивості вронскіана.

Теорема 23.1.

Якщо функції $y_1, y_2, \dots, y_n$ лінійно залежні на (a, b) , то їх визначник Вронського тотожно дорівнює нулю на цьому проміжку. ★

ДОВЕДЕННЯ. При $n = 2$ маємо $y_2 = k y_1$, звідси

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 y_2 \\ y_1' y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 k y_1 \\ y_1' k y_1' \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} y_1 y_1 \\ y_1' y_1' \end{vmatrix} = 0,$$

що і треба було довести. □

Теорема 23.2.

Нехай функції $y_1, y_2, \dots, y_n$ є розв'язками ЛОДР- n (23.2) на (a, b) . Якщо для якогось $x_0 \in (a, b)$ $W(x_0) \neq 0$, то $W(x) \neq 0$ для всіх $x \in (a, b)$. ★

ДОВЕДЕННЯ. Як і вище, розглянемо випадок $n = 2$. Нехай $y_1 \neq y_2$ — розв'язок ЛОДР (23.2). Тоді

$$\begin{aligned} y_1'' + p_1 y_1' + p_2 y_1 &= 0, \\ y_2'' + p_1 y_2' + p_2 y_2 &= 0. \end{aligned}$$

Помножимо перше рівняння на y_2 , а друге — на y_1 . Віднімемо від отриманої другої рівності першу, одержимо:

$$y_1 y_2'' - y_2 y_1' + p_1 (y_1 y_2' - y_2 y_1') = 0.$$

Якщо врахувати (23.6), то остання рівність набуде вигляду:

$$W'(x) + p_1 W(x) = 0. \quad (23.11)$$

Знайдемо розв'язок цього рівняння при умові

$$W(x_0) = W_0 \neq 0. \quad (23.12)$$

Рівняння (23.11) — диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремлюємо змінні і, почленно інтегруючи, знаходимо

$$\frac{dW}{W} + p_1 dx = 0.$$

$$\ln |W| + \int_{x_0}^x p_1 d\bar{x} = \ln |C|.$$

$$W = Ce^{-\int_{x_0}^x p_1(x) dx}.$$

Враховуючи початкову умову (23.12), одержуємо

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^x p_1(\bar{x}) d\bar{x}}. \quad (23.13)$$

Ця формула називається **формулою Остроградського-Ліувілля**.

З неї видно, що для $\forall x \in (a, b)$ $W(x) \neq 0$, що і треба було довести. $\square$

Теорема 23.3.

Якщо функції $y_1, y_2, \dots, y_n$ є лінійно незалежними розв'язками ЛОДР- n (23.2) на (a, b) , то $W(x) \neq 0$ для всіх $x \in (a, b)$. ★

ДОВЕДЕННЯ. Доведемо теорему методом від супротивного (при $n = 2$). Нехай $y_1(x), y_2(x)$ — лінійно незалежні розв'язки рівняння (23.2) і існує точка $x_0 \in (a, b)$ така, що $W(x_0) = 0$. Складемо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = 0, \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = 0, \end{cases} \quad (23.14)$$

в якій невідомі — C_1 і C_2 . Система (23.14) — це система лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь, її визначник $\Delta = W(x_0) = 0$. Отже вона має ненульовий розв'язок. Тому функція

$$Y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

є ненульовим розв'язком лінійного однорідного диференціального рівняння. Але система умов (23.14) означає, що $Y(x_0) = 0, Y'(x_0) = 0$, тобто $Y(x)$ задовольняє таким же умовам, як і $Y(x) \equiv 0$.

Зважаючи на єдиність розв'язку ЛОДР, приходимо до суперечності: $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \equiv 0$ при ненульових C_1, C_2 .

Отже, наше припущення, що існує точка $x_0 \in (a, b)$, в якій $W(x_0) = 0$, неправильне, тобто визначник Вронського $W(x)$ не перетворюється в нуль ні в одній точці на (a, b) , що і треба було довести. $\square$

Будова загального розв'язку ЛОДР

Переходимо тепер до питання про структуру загального розв'язку ЛОДР.

Означення 23.7. Будь-яка сукупність n лінійно незалежних на (a, b) частинних розв'язків $y_1, y_2, \dots, y_n$ лінійного однорідного диференціального рівняння n -го порядку (23.2) називається **фундаментальною системою розв'язків** цього рівняння.

Можна показати, що для всякого ЛОДР- n з неперервними коефіцієнтами фундаментальна система розв'язків існує. Більше того, якщо рівняння має хоча б одну фундаментальну систему розв'язків, то воно має їх нескінченну множину. Звернемо увагу, що кількість лінійно

незалежних розв'язків ЛОДР— n , з яких складається фундаментальна система розв'язків цього рівняння, співпадає з порядком цього рівняння. Назвемо цю вимогу умовою **повноти** фундаментальної системи розв'язків.

Теорема 23.4 (про будову загального розв'язку ЛОДР— n).

Якщо $y_1, y_2, \dots, y_n$ — фундаментальна система розв'язків ЛОДР— n (23.2), то функція

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x), \quad (23.15)$$

де $C_1, C_2, \dots, C_n$ — довільні сталі, є загальним розв'язком цього рівняння. ★

ДОВЕДЕННЯ.

Згідно нашої домовленості зупинимось на випадку $n = 2$. Нехай $y_1(x), y_2(x)$ — лінійно незалежні розв'язки рівняння (23.5), тоді, за властивістю розв'язків ЛОДР, функція

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \quad (23.16)$$

також буде розв'язком цього рівняння. Отже, для доведення теореми достатньо показати, що для довільних початкових умов $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1$, можна підібрати сталі C_1, C_2 так, щоб функція (23.16) була розв'язком задачі Коші. Маємо, таким чином, для визначення C_1, C_2 систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0, \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = y_1. \end{cases} \quad (23.17)$$

Визначником цієї системи є визначник Вронського $W(x_0)$. Такий визначник, згідно теореми 3, не дорівнює нулю. Отже, система розв'язок має. □

Зауваження 23.1. Не існує регулярного прийому для знаходження фундаментальної системи розв'язків ЛОДР, а тому і знаходження загального розв'язку таких рівнянь. Миусимо обмежуватись пошуками, що ґрунтуються на здогадці і кмітливості. Більше того, багато лінійних однорідних диференціальних рівнянь (із змінними коефіцієнтами) взагалі не інтегруються в елементарних функціях. Виняток складають лише однорідні рівняння із сталими коефіцієнтами. До інтегрування таких рівнянь перейдемо на наступній лекції.

А зараз зупинимось на деяких практичних питаннях.

Приклад 23.2. Відомий один частинний розв'язок $y_1 \neq 0$ ЛОДР - 2

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0.$$

Знайти другий частинний розв'язок y_2 , який би був лінійно незалежний з y_1 . ☺

Розв'язання. Виходимо з формули (23.13) Остроградського-Ліувілля. Запишемо цю формулу в розгор-

нутому вигляді:

$$y_2' y_1 - y_2 y_1' = C e^{-\int p_1 dx}.$$

Поділивши почленно на y_1^2 , маємо: $\frac{y_2' y_1 - y_2 y_1'}{y_1^2} = \frac{C}{y_1^2} e^{-\int p_1 dx}$, тобто

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{C}{y_1^2} e^{-\int p_1 dx}; \quad (23.18)$$

звідси, інтегруючи, знаходимо:

$$y_2 = C y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p_1 dx} dx + C_1. \quad (23.19)$$

Оскільки нас цікавить частинний розв'язок, то поклавши $C = 1$, $C_1 = 0$, маємо:

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p_1 dx} dx.$$

Як випливає з (23.18) $\left(\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' \neq 0\right) \Rightarrow \left(\frac{y_2}{y_1} \neq \text{const.}\right)$ Тобто y_2 і y_1 – лінійно незалежні. ■

Приклад 23.3. Знайти загальний розв'язок рівняння: $x^2 y'' + x y' - y = 0$, якщо $y_1 = x$ його частинний розв'язок. ☺

Розв'язання. Розв'язання. В тому, що $y_1 = x$ є розв'язком заданого рівняння, переконуємось безпосередньо підстановкою його в задане рівняння. Перепишемо диференціальне рівняння в „стандартному” вигляді:

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = 0.$$

Отже, $p_1(x) = \frac{1}{x}$. Тоді за формулою (23.19) знаходимо:

$$\begin{aligned} y_2 &= x \int \frac{1}{x^2} e^{-\int \frac{1}{x} dx} = x \int \frac{1}{x^2} e^{-\ln x} dx = x \int \frac{1}{x^2} \frac{1}{x} dx = x \int \frac{1}{x^3} dx = \\ &= x \left(-\frac{1}{2x^2} + C\right) = Cx - \frac{1}{2x}. \end{aligned}$$

Ми шукаємо частинний розв'язок, а тому покладемо $C = 0$. Отже другим розв'язком лінійного рівняння є $y_2 = -\frac{1}{2x}$. Використовуючи тепер властивості розв'язків ЛОДР, з точністю до „сталого множника” знаходимо

$$y_2 = \frac{1}{x}. \quad \blacksquare$$

Отже, загальний розв'язок має вигляд:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 x + \frac{C_2}{x}.$$

Приклад 23.4. Скласти лінійне диференціальне рівняння, якщо функції $y_1 = x^2$, $y_2 = x^3$ утворюють фундаментальну систему його розв'язків. ☺

Розв'язання. Спочатку переконаємось чи утворюють ці функції фундаментальну систему розв'язків деякого ЛОДР. Розглянемо вронскіан

$$W = \begin{vmatrix} y_1 y_2 \\ y_1' y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 x^3 \\ 2x 3x^2 \end{vmatrix} = 3x^4 - 2x^4 = x^4 \neq 0,$$

якщо $x \neq 0$. Отже, при $x \neq 0$ функції $y_1 = x^2$, $y_2 = x^3$ утворюють фундаментальну систему розв'язків ЛОДР другого порядку, бо цих функцій дві.

Складемо це диференціальне рівняння, виходячи з формули його загального розв'язку

$$\tilde{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 x^2 + C_2 x^3.$$

Для цього остінню рівності двічі диференціюємо:

$$\tilde{y}' = 2C_1 x + 3C_2 x^2, \quad \tilde{y}'' = 2C_1 + 6C_2 x$$

і з остінніх трьох рівностей виключаємо C_1 і C_2 .

Одержимо шукане диференціальне рівняння

$$x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0 (x \neq 0). \quad \blacksquare$$

Структура загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння

Поряд з ЛНДР- n

$$L[y] \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \quad (23.20)$$

будемо розглядати відповідне йому (з тією ж лівою частиною!) ЛОДР- n

$$L[y] \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0. \quad (23.21)$$

Має місце наступна

Теорема 23.5 (про структуру загального розв'язку ЛНДР- n).

Загальний розв'язок ЛНДР (23.20) можна представити у вигляді суми якого-небудь його частинного розв'язку $y^*(x)$ та загального розв'язку $\tilde{y}_0$ відповідного йому однорідного рівняння (23.21)

$$y = y^*(x) + \tilde{y}(x). \quad (23.22) \quad \star$$

ДОВЕДЕННЯ. Із властивостей розв'язків ЛНДР (нагадаємо: $L[y] = L[y^* + \tilde{y}] = L[y^*] + L[\tilde{y}] = f(x) + 0 = f(x)$) випливає, що (23.22) - розв'язок ЛНДР. Покажемо, що розв'язок

(23.22) - загальний. Для цього досить показати, що функція (23.22) задовольняє будь-яким початковим умовам. Запишемо ці умови для випадку $n = 2$:

$$\begin{cases} y(x_0) = y^*(x_0) + \tilde{y}(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y^{*'}(x_0) + \tilde{y}'(x_0) = y_1, \end{cases}$$

(де x_0 лежить в області неперервності коефіцієнтів $p_1(x), p_2(x)$; y_0, y_1 — довільні числа).

Якщо врахувати будову $\tilde{y}(x_0)$, то останню систему рівнянь перепишемо так:

$$\begin{cases} y^*(x_0) + C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0, \\ y^{*'}(x_0) + C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = y_1; \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0 - y^*(x_0), \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = y_1 - y^{*'}(x_0). \end{cases}$$

Визначник цієї системи, будучи визначником Вронського лінійно незалежних розв'язків ЛНДР — 2, не дорівнює нулю. А тому C_1 і C_2 визначаються однозначно. Теорему доведено. $\square$

Ця теорема дає нам один із методів інтегрування ЛНДР. Його можна назвати **методом підбору частинного розв'язку**. Він полягає в наступному:

- знаходимо який-небудь частинний розв'язок ЛНДР;
- знаходимо загальний розв'язок відповідного ЛОДР.

Їх сума буде шуканим загальним розв'язком ЛНДР.

Приклад 23.5. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - \frac{y'}{x} = 3x \quad (x \neq 0).$$



Розв'язання. вигляд коефіцієнтів і правої частини даного рівняння „підказує”, що частинний розв'язок цього рівняння треба шукати в класі функцій x^m . Безпосередньою підстановкою переконуємось, що одним з розв'язків заданого рівняння є $y^* = x^3$.

Розв'яжемо відповідне однорідне рівняння

$$y'' - \frac{y'}{x} = 0.$$

Понижуємо його порядок заміною $y' = p, y'' = p'$. Одержимо:

$$\frac{dp}{dy} - \frac{p}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dp}{p} - \frac{dx}{x} = 0 \Rightarrow \ln |p| - \ln |x| = \ln |C| \Rightarrow p = Cx$$

звідки, враховуючи заміну, дістаємо:

$$\left(\frac{dy}{dx} = Cx \right) \Rightarrow (dy = Cx dx) \Rightarrow \left(y = \frac{C}{2} x^2 + C_1 \right),$$

тобто $\tilde{y} = C_2 x^2 + C_1, C_2 = \frac{C_1}{2}$. Отже, загальним розв'язком заданого рівняння є

$$y = x^3 + C_2 x^2 + C_1.$$



Зрозуміло, що на методі підбору „далеко не заїдеш“. Розглянемо ще один метод інтегрування ЛНДР, т.зв. метод варіації довільних сталих, запропонований Лагранжем.

Метод варіації довільних сталих в ішування частинного розв'язку

Нехай нам відомий загальний розв'язок відповідного ЛОДР. Для ЛОДР-2

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0$$

такий розв'язок має вигляд (див. (23.15), (23.16)):

$$\tilde{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2, \quad (23.23)$$

де y_1, y_2 — одна із фундаментальних систем розв'язків рівняння, а C_1 і C_2 — довільні сталі.

Поставимо таку задачу: знайти частинний розв'язок ЛНДР-2

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = f(x) \quad (23.24)$$

у вигляді

$$y^* = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 \quad (23.25)$$

„подібному” до (23.23), замінюючи в (23.23) довільні сталі деякими функціями $C_1(x)$ і $C_2(x)$, що підлягають визначенню. Покажемо, що ці функції можна знайти за допомогою операцій інтегрування. Основна ідея цього методу – не те, як здогадатись, що частинний розв'язок неоднорідного рівняння треба шукати у вигляді (23.25), а те, що в такому вигляді його можна знайти.

Для складання рівнянь, з яких би можна було визначити $C_1(x)$ і $C_2(x)$ скористаємось ідеєю, опрацьованою нами у методі Бернуллі розв'язування лінійних рівнянь першого порядку.

Для знаходження функцій $C_1(x)$ і $C_2(x)$ маємо лише одну умову: функція (23.25) повинна задовольняти рівняння (23.24). Маємо, отже, додаткову ступінь свободи, яку використаємо на свій розсуд. Найперше, функцію (23.25) треба підставити в рівняння (23.24). Для цього диференціюємо (23.25):

$$y^{*'} = C_1 y_1' + C_2 y_2' + (C_1' y_1 + C_2' y_2)$$

і, використовуючи, одержану ступінь свободи, накладемо умову:

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0. \quad (23.26)$$

Тоді:

$$\begin{aligned} y^{*'} &= C_1 y_1' + C_2 y_2', \\ y^{*''} &= C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + (C_1' y_1' + C_2' y_2'). \end{aligned}$$

Знайдені значення $y^{*''}$, $y^{*'}$, y^* підставляємо в (23.24):

$$C_1(y_1'' + p_1 y_1' + p_2 y_1) + C_2(y_2'' + p_1 y_2' + p_2 y_2) + C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x).$$

Вирази в першій і другій дужках дорівнюють нулю, бо y_1 і y_2 — розв'язки ЛОДР. А тому маємо:

$$C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x). \quad (23.27)$$

Дістали, таким чином, для визначення C_1' , C_2' систему двох рівнянь (23.26) і (23.27). Як відомо, визначник цієї системи $\Delta = W(x) \neq 0$, як вронскіан лінійно незалежних розв'язків ЛОДР, тому система рівнянь (23.26), (23.27) розв'язки має.

Зауважимо, що з цієї системи ми знайдемо $C_1'(x) = \alpha(x)$, $C_2'(x) = \beta(x)$. Для визначення $C_1(x)$, $C_2(x)$ треба $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ проінтегрувати. Оскільки ми шукаємо лише частинний розв'язок ЛНДР, то при цьому інтегруванні довільними сталими можна нехтувати.

Приклад 23.6. Розв'язати задачу Коші

$$y'' - y' = \frac{1}{1+e^x}, y(0) = 1, y'(0) = 2.$$



Розв'язання. а) Спочатку будемо шукати загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y'' - y' = 0$. Методом підбору переконуємось, що функції $y_1 = 1$, $y_2 = e^x$ цьому рівнянню задовольняють і є лінійно незалежні. Отже, загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд:

$$\tilde{y} = C_1 + C_2 e^x.$$

б) За частинний розв'язок заданого неоднорідного рівняння беремо функцію

$$y^* = C_1(x) + C_2(x)e^x,$$

а функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$ шукаємо з системи рівнянь

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot 1 + C_2'(x)e^x = 0 \\ C_1'(x) \cdot 0 + C_2'(x)e^x = \frac{1}{1+e^x}, \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} C_2'(x) = \frac{1}{e^x(1+e^x)} \\ C_1'(x) = -\frac{1}{1+e^x}. \end{cases}$$

Тоді $C_1(x) = -\int \frac{dx}{1+e^x} = -x + \ln(1+e^x)$, $C_2(x) = -e^{-x} - x + \ln(1+e^x)$.

Сталими інтегрування нехтуємо, бо шукаємо частинний розв'язок. Отже:

$$y^* = -x + \ln(1+e^x) - 1 - xe^x + e^x \ln(1+e^x).$$

в) загальним розв'язком рівняння є:

$$\begin{aligned} y = y^* + \tilde{y} &= -x + \ln(1+e^x) - 1 - xe^x + e^x \ln(1+e^x) + C_1 + C_2 e^x = \\ &= C_1 - 1 - x + e^x(C_2 - x) + (1+e^x) \ln(1+e^x). \end{aligned}$$

Сталі інтегрування C_1 і C_2 визначаємо з початкових умов: $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$. Маємо: $C_1 = -1 - \ln 2$, $C_2 = 3 - \ln 2$.

Відповідь:

$$y = -x + e^x(3 - \ln 2 - x) + (1+e^x) \ln(1+e^x) - 2 - \ln 2.$$



Зауваження 23.2. Аналогічно застосовується метод варіації довільних сталих для ЛНДР- n . Якщо $y_1, y_2, \dots, y_n$ - фундаментальна система

[illegible]

[illegible]

[illegible]

розв'язків ЛОДР- n (23.2), тобто

$$\tilde{y} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \dots + C_n y_n$$

— його загальний розв'язок, то частинний розв'язок ПНДР- n шукаємо у вигляді суми

$$y^* = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \dots + C_n y_n,$$

в якій функції $C_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, n$ знаходимо із системи рівнянь

$$\left\{\begin{array}{l}C'_1 y_1 + C'_2 y_2 + \dots + C'_n y_n = 0, \\C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 + \dots + C'_n y'_n = 0, \\..... \\C'_1 y_1^{(n-2)} + C'_2 y_2^{(n-2)} + \dots + C'_n y_n^{(n-2)} = 0, \\C'_1 y_1^{(n-1)} + C'_2 y_2^{(n-1)} + \dots + C'_n y_n^{(n-1)} = f(x).\end{array}\right.$$

Остання система розв'язок має, бо її визначник — Вронскіан фундаментальної системи розв'язків ПДР- n .

розв'язків ЛОДР- n (23.2), тобто

$$\tilde{y} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \dots + C_n y_n$$

— його загальний розв'язок, то частинний розв'язок ПНДР- n шукаємо у вигляді суми

$$y^* = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \dots + C_n y_n,$$

в якій функції $C_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, n$ знаходимо із системи рівнянь

$$\left\{\begin{array}{l}C'_1 y_1 + C'_2 y_2 + \dots + C'_n y_n = 0, \\C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 + \dots + C'_n y'_n = 0, \\..... \\C'^{(n-2)}_1 y^{(n-2)}_1 + C'^{(n-2)}_2 y^{(n-2)}_2 + \dots + C'^{(n-2)}_n y^{(n-2)}_n = 0, \\C'^{(n-1)}_1 y^{(n-1)}_1 + C'^{(n-1)}_2 y^{(n-1)}_2 + \dots + C'^{(n-1)}_n y^{(n-1)}_n = f(x).\end{array}\right.$$

Остання система розв'язок має, бо її визначник — Вронскіан фундаментальної системи розв'язків ПДР- n .

[illegible]

[illegible]

ТЕМА 24. ЛІНІЙНІ ОДНОРІДНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ІЗ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Характеристичне рівняння

Розглянемо ЛОДР- n із сталими коефіцієнтами

$$L[y] \equiv y^{(n)}(x) + p_1 y^{(n-1)}(x) + p_2 y^{(n-2)}(x) + \dots + p_n y(x) = 0, \quad (24.1)$$

де $p_1, p_2, \dots, p_n$ — довільні числа. Розв’язок задачі Коші для такого рівняння завжди існує і єдиний (див. п. 4.1).

Спочатку визначимо клас функцій $\varphi(x)$, що можуть бути розв'язками таких рівнянь. Оскільки підстановка $y = \varphi(x)$ в (24.1) перетворює цю рівність в тотожність, то доданки лівої частини (24.1) при такій підстановці повинні знищуватись. Тому розв'язками рівняння (24.1) можуть бути функції, що мають подібні до себе похідні. Такими функціями є показникові: $\varphi(x) = e^{rx}$ ($r = \text{const}$). Справді

$$(e^{rx})^{(m)} = r^m e^{rx}, (e^{rx})^{(k)} = r^k e^{rx},$$

тобто вони відрізняються сталими множниками — степенями r .

В зв'язку з чим розв'язки ЛОДР (24.1) із сталими коефіцієнтами будемо шукати у вигляді

$$y = e^{rx}, \quad (24.2)$$

де r — стала величина, яку треба знайти. Підставляючи (24.2) в (24.1), дістанемо умову визначення r :

$$L[e^{rx}] \equiv (r^{(n)} + p_1 r^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} r + p_n) e^{rx} = 0.$$

Оскільки $e^{rx} \neq 0$, то остання рівність буде виконуватись, якщо

$$r^n + p_1 r^{n-1} + \dots + p_{n-1} r + p_n = 0. \quad (24.3)$$

Для визначення r дістали, таким чином, алгебраїчне рівняння n -го степеня. Його називають **характеристичним рівнянням** ЛОДР (24.1) із сталими коефіцієнтами.

Як відомо, алгебраїчне рівняння n -го степеня має n коренів. Якби всі корені цього рівняння були дійсні і різні (ще кажуть — „прості”), то ми б одержали фундаментальну систему розв’язків ЛОДР (24.1):

$$y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}, \dots, y_n = e^{r_n x}. \quad (24.4)$$

Кількість розв’язків (24.4) дорівнює n , всі вони лінійно незалежні (див. приклад 23.1), отже, знайдено загальний розв’язок ЛОДР (24.1):

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \dots + C_n e^{r_n x}.$$

Але не всі корені алгебраїчного рівняння — прості. Тому в системі $\{y_m = e^{r_m x}\}$ може не бути n різних лінійно незалежних розв’язків

$$y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}, \dots, y_k = e^{r_k x} (k < n),$$

а, отже, не будемо мати фундаментальної системи розв’язків ЛОДР- n : не виконується умова повноти. Можливий також випадок, коли не всі корені характеристичного рівняння (24.3) — дійсні. Потребує, отже, дослідження на фундаментальність система розв’язків $\{y_m = e^{r_m x}\}$ ЛОДР із сталими коефіцієнтами в залежності від коренів характеристичного рівняння. Проведемо таке дослідження для рівнянь другого порядку.

Фундаментальна система розв’язків ЛОДР-2 із сталими коефіцієнтами

Розглянемо ЛОДР-2 із сталими коефіцієнтами

$$y'' + py' + qy = 0. \quad (24.5)$$

Складаємо характеристичне рівняння

$$r^2 + pr + q = 0 \quad (24.6)$$

(до речі, варто запам’ятати формальний запис характеристичного рівняння: в ЛОДР замість похідної k -го порядку пишуть k -й степінь r).

1. Якщо $\frac{p^2}{4} > q$, то дискримінант $D = p^2 - 4q > 0$, і корені характеристичного рівняння — дійсні різні: $r_1 = -\frac{p}{2} + \frac{\sqrt{D}}{2}$, $r_2 = -\frac{p}{2} - \frac{\sqrt{D}}{2}$. Тоді, як вже підкреслювалось вище, маємо фундаментальну систему розв’язків рівняння (24.5): $y_1 = e^{r_1 x}$, $y_2 = e^{r_2 x}$, а тому і його загальний розв’язок —

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}. \quad (24.7)$$

2. Якщо $\frac{p^2}{4} = q$, то дискримінант $D = p^2 - 4q = 0$. Тоді корені характеристичного рівняння — дійсні рівні: $r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$ (тобто $2r - p = 0$). Маємо, отже, лише один розв’язок рівняння (24.5): $y_1 = e^{-\frac{p}{2}x}$. Покажемо, що розв’язком цього рівняння є також $y_2 = xy_1 = xe^{r_1 x}$. Справді,

$$L[y_2] = (xe^{r_1 x})'' + p(xe^{r_1 x})' + qxe^{r_1 x} = x((r_1^2 + pr + q) + (2r + p))e^{r_1 x} = x(0 + 0)e^{r_1 x} = 0.$$

Оскільки, $\frac{y_2}{y_1} = x \neq \text{const}$, то y_1 і y_2 утворюють фундаментальну систему розв'язків, а загальний розв'язок ЛОДР-2 (24.5) має вигляд

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{rx}. \quad (24.8)$$

3. Нехай $\frac{p^2}{4} < q$, тобто $\frac{p^2}{4} - q = -(q - \frac{p^2}{4}) = -\beta^2 < 0$.

Тоді корені характеристичного рівняння (як рівняння з дійсними коефіцієнтами) комплексно спряжені $r = \alpha \pm i\beta$, де $\alpha = -\frac{p}{2}$, $\beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$. Таким чином, ми одержимо комплекснозначні розв'язки ЛОДР-2 з дійсними коефіцієнтами $y = e^{(\alpha \pm i\beta)x}$. Користуючись формулою Ейлера, запишемо ці розв'язки у вигляді

$$y = e^{\alpha x}(\cos \beta x \pm i \sin \beta x)$$

або

$$y(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x \pm i e^{\alpha x} \sin \beta x = u(x) \pm i v(x).$$

Згідно властивостей розв'язків ЛОДР можна переконатися, що розв'язками ЛОДР-2 є функції:

$$y_1(x) = u(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

$$y_2(x) = v(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Ці функції лінійно незалежні, бо $\frac{y_1}{y_2} = \frac{\cos \beta x}{\sin \beta x} \neq \text{const}$. Отже, вони утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (24.5). А загальний розв'язок цього рівняння такий:

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x). \quad (24.9)$$

Приклад 24.1. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - 4y' + 3y = 0$. ☺

Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння $r^2 - 4r + 3 = 0$. Їого корені дійсні і різні ($r_1 = 1$, $r_2 = 3$). Тому загальний розв'язок такий: $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$. ■

Приклад 24.2. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - 2y' + y = 0$. ☺

Розв'язання. Корені характеристичне рівняння $r^2 - 2r + 1 = 0$ такі: $r_1 = r_2 = 1$. Тому загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд: $y = e^x(C_1 + C_2 x)$. ■

Приклад 24.3. Для рівняння $y'' + 4y' = 0$ знайти інтегральну криву, що проходить через точку $(0; 0)$ і дотикається в цій точці прямої $y = 1$. ☺

Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння $r^2 + 4r = 0$. Їого корені: $r_1 = 0$, $r_2 = -4$. Отже, загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд: $y = C_1 + C_2 e^{-4x}$. Щоб знайти відповідну інтегральну криву, використаємо задані початкові умови: $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Маємо $y' = -4C_2 e^{-4x}$. Отже, при $x = 0$: $0 = C_1 + C_2$, $1 = -4C_2$. Звідси знаходимо $C_1 = \frac{1}{4}$, $C_2 = -\frac{1}{4}$.
Таким чином, шукана інтегральна крива має рівняння $y = \frac{1}{4}(1 - e^{-4x})$. ■

Приклад 24.4. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - 6y' + 13y = 0$. ☺

Розв'язання. Розв'язуючи характеристичне рівняння $r^2 - 6r + 13 = 0$, одержуємо комплексні корені $r = 3 \pm 2i$. Тут $\alpha = 3$, $\beta = 2$. Отже, на основі формули (24.9) загальний розв'язок запишеться у вигляді: $y = e^{3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$. ■

Зауваження 24.1. Можна показати, що в загальному випадку (для $\text{НОДР-}n$ із сталими коефіцієнтами) фундаментальна система розв'язків в залежності від коренів характеристичного рівняння утворюється аналогічно. А саме:

а) якщо r_1 — дійсний корінь характеристичного рівняння (24.3) кратності m , то розв'язками $\text{НОДР-}n$ (24.1) є функції

$$e^{r_1 x}, x e^{r_1 x}, \dots, x^{m-1} e^{r_1 x}; \quad (24.10)$$

б) якщо $\alpha_1 + i\beta_1$ — комплексний корінь характеристичного рівняння (24.3) кратності $l \leq \frac{n}{2}$, то розв'язками $\text{НОДР-}n$ (24.1) із сталими коефіцієнтами будуть функції:

$$\begin{aligned} &e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x, e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x, \\ &x e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x, x e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x, \\ &\dots\dots\dots \\ &x^{l-1} e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x, x^{l-1} e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x. \end{aligned} \quad (24.11)$$

Слід мати на увазі, що загальна кількість розв'язків (24.10), (24.11) повинна дорівнювати n (умова повноти).

Приклад 24.5. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''' + y'' + y' + y = 0. \quad \text{☺}$$

Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння $r^3 + r^2 + r + 1 = 0$. Знаходимо його корені: $r_1 = -1$; $r_2 = \pm i$. Тому загальним розв'язком буде:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x. \quad \blacksquare$$

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння із сталими коефіцієнтами

Як відомо, розв'язування лінійного неоднорідного рівняння $L[y] = f(x)$ зводиться:

- 1) до знаходження фундаментальної системи розв'язків відповідного однорідного рівняння ;
- 2) до знаходження хоча б одного частинного розв'язку заданого неоднорідного рівняння.

Перша з цих задач нами тільки що розглянута. Друга задача може бути розв'язана методом варіації довільних сталих. Але цей метод здебільшого приводить до громіздких обчислень і складних квадратур. Тому виникає питання про те, як знайти один частинний розв'язок, не вдаючись до методу варіації. Для рівняння із сталими коефіцієнтами при певних видах правої частини $f(x)$ частинний розв'язок вдається знайти відносно легко т. зв. **методом невизначених коефіцієнтів** (або методом підбору), до викладу якого ми переходимо.

Як побачимо далі, цей прийом знаходження частинного розв'язку використовує лише елементарні операції: диференціювання і розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Щоправда, він застосовується до розв'язування лише рівнянь із спеціальними правими частинами.

Нехай права частина неоднорідного рівняння $L[y] = f(x)$ має вигляд

$$f(x) = e^{\alpha x} (P_k(x) \cos \beta x + Q_l(x) \sin \beta x), \quad (24.12)$$

де α і β — дійсні числа, $P_k(x)$ і $Q_l(x)$ — многочлени з дійсними коефіцієнтами степеня відповідно $k \geq 0$ і $l \geq 0$; будемо вважати $k = 0$ або $l = 0$ тоді, коли $P_k(x)$ або $Q_l(x)$ є просто числами і, зокрема, можуть тотожно дорівнювати нулю. Наприклад, якщо $f(x) = e^x \cdot x^2 \cdot \sin 2x$, то $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $k = 0$, $l = 2$; якщо $f(x) = 3x \cdot e^{-x}$, то $\alpha = -1$, $\beta = 0$, $l = 0$ (взагалі кажучи, l тут можна надавати будь-якого числового значення, оскільки $\sin \beta x = 0$, але завжди треба вибирати найменше із можливих значень).

Основна ідея методу: частинний розв'язок неоднорідного рівняння із сталими коефіцієнтами шукаємо у вигляді „подібному” в певному розумінні до правої частини $f(x)$, а саме

$$y^*(x) = x^m e^{\alpha x} (P_s^*(x) \cos \beta x + Q_s^*(x) \sin \beta x), \quad (24.13)$$

де α і β — ті ж числа, що і в формулі (24.12); m — кратність кореня $\alpha + i\beta$ для характеристичного многочлена відповідного однорідного рівняння $L[y] = 0$, причому $m = 0$, якщо $\alpha + i\beta$ не є коренем многочлена (24.3); s — більше з чисел k і l , тобто більший із степенів многочленів $P_k(x)$ і $Q_l(x)$ у формулі (24.12); $P_s^*(x)$ і $Q_s^*(x)$ — многочлени степеня s з невизначеними коефіцієнтами, що підлягають числовому визначенню. Доведення можливості знаходження частинного розв'язку опускаємо. Проілюструємо цей метод для ЛНДР другого порядку.

Знаходження частинного розв'язку ЛНДР-2 із сталими коефіцієнтами методом невизначених коефіцієнтів

Отже, зупинимось на знаходженні частинних розв'язків y^* рівнянь

$$L[y] \equiv y'' + py' + qy = f(x), \text{ де } p, q \text{ — — — константи,} \quad (24.14)$$

праві частини яких окремі випадки функції (24.12).

Поряд з рівнянням (24.12) розглядають відповідне ЛОДР – 2

$$y'' + py' + qy = 0, \quad (24.15)$$

Його характеристичне рівняння $r^2 + pr + q = 0$ — алгебраїчне квадратне рівняння з дійсними коефіцієнтами. Як відомо, дійсні корені таких рівнянь або прості або двократні, а комплексні — завжди прості.

Для знаходження частинних розв'язків y^* неоднорідних рівнянь другого порядку з правою частиною (24.12) не варто користуватись формулою (24.13) в загальному вигляді з наступним дослідженням в ній випадків:

а) $\beta = 0, m \leq 2$ і б) $\beta \neq 0, m = 1$, де m — кратність коренів характеристичного рівняння (24.15).

Зручніше буде зіставити тут функції $f(x)$ (24.12) і $y^*(x)$ (24.13) такою таблицею:

Вигляд правої частини $f(x)$	Корені характеристичного рівняння	Вигляд частинного розв'язку
$P_k(x)e^{\alpha x}$	Число α не є коренем характеристичного рівняння.	$y^* = P_k^*(x)e^{\alpha x}$
	Число α є простим коренем характеристичного рівняння.	$y^* = xP_k^*(x)e^{\alpha x}$
	Число α є кратним коренем характеристичного рівняння.	$y^* = x^2P_k^*(x)e^{\alpha x}$
$e^{\alpha x}(P_k(x)\cos\beta x + Q_l(x)\sin\beta x),$ ($\beta \neq 0$)	Число $\alpha + i\beta$ не є коренем характеристичного рівняння.	$y^* = e^{\alpha x}(P_s^*(x)\cos\beta x + Q_s^*(x)\sin\beta x),$ $s = \max(k, l)$
	Число $\alpha + i\beta$ є коренем характеристичного рівняння.	$y^* = xe^{\alpha x}(P_s^*(x)\cos\beta x + Q_s^*(x)\sin\beta x),$ $s = \max(k, l)$

Знаходження частинного розв'язку ЛНДР доцільно починати із знаходження коренів характеристичного рівняння відповідного однорідного рівняння і їх співставлення з коефіцієнтами α і β правої частини, записаної у формі (24.12).

І ще одне! Може трапитись, що функцію $f(x)$ — праву частину рівняння (24.14) не можливо зобразити формулою (24.12), але вона є сумою двох функцій $f_1(x)$ і $f_2(x)$ (або більшого їх числа), кожна з яких зображається за допомогою цієї формули. В такому разі ми знаходимо окремо частинний розв'язок $y_1^*(x)$ рівняння з правою частиною $f_1(x)$ і частинний розв'язок $y_2^*(x)$ рівняння з правою частиною $f_2(x)$. Тоді сума цих двох розв'язків буде частинним розв'язком рівняння (24.14) (властивість накладання розв'язків ЛНДР).

Приклад 24.6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - 3y' + 2y = x + 2. \quad (24.16)$$



Розв'язання. Права частина цього рівняння - многочлен першого степеня. За нашою таблицею, $k = 1, \alpha = 0$. Корені характеристичного рівняння $r^2 - 3r + 2 = 0$: $r_1 = 1, r_2 = 2$. Тому загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння дорівнює

$\tilde{y} = C_1e^x + C_2e^{2x}$. Оскільки $\alpha = 0$ не є коренем цього рівняння, то частинний розв'язок заданого в умові рівняння має вигляд

$$y^* = ax + b, \quad (24.17)$$

де a і b – невідомі коефіцієнти. Підставляючи функцію (24.17) в рівняння (24.16), знаходимо a і b . Маємо:
 $L[y^*] = 2ax + b - 3x \equiv x + 2$, звідки $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{7}{4}$;
 $y^* = \frac{1}{2}x + \frac{7}{4}$. Таким чином, загальний розв'язок рівняння (24.16) має вигляд:

$$y = y^* + \tilde{y} = \frac{1}{2}x + \frac{7}{4} + C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Приклад 24.7. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 3y' + 2y = 2e^x. \quad (24.18)$$

☺

Розв'язання. Права частина рівняння (24.18) є добутком многочлена нульового степеня (в термінах нашої таблиці $k = 0$) і показникової функції e^x з коефіцієнтом при показнику степеня $\alpha = 1$. Корені характеристичного рівняння: $r_1 = 1$, $r_2 = 2$. Отже, число $\alpha = 1$ є простим коренем характеристичного рівняння. Тому частинний розв'язок заданого диференціального рівняння має вигляд:

$$y^* = a x e^x, \quad (24.19)$$

де a – невідомий коефіцієнт. Щоб знайти a , підставимо вираз (24.19) в рівняння (24.18), маємо:

$$y^* = a x e^x, (y^*)' = a x e^x + a e^x, (y^*)'' = a x e^x + 2a e^x,$$

$$L[y^*] = -a e^x \equiv 2e^x.$$

Отже, $a = -2$. Тому $y^* = -2x e^x$, і загальний розв'язок рівняння (24.18) запишеться у вигляді:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - 2x e^x.$$

ТЕМА 25. СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Загальні поняття

В процесі розв'язування багатьох науково-технічних задач виникає необхідність вивчення взаємодії декількох процесів або випадків, коли шукана функція є вектором, що приводить до розв'язування не одного диференціального рівняння, а системи таких рівнянь.

Приклад 25.1. Рівняння руху деякого об'єкта у векторній формі має вигляд:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}(x, y, \vec{v}, t),$$

де $\vec{v} = \vec{i} \frac{dx}{dt} + \vec{j} \frac{dy}{dt}$ – швидкість, $\vec{F} = \vec{i} X + \vec{j} Y$ – зовнішня сила.

Проектуючи це співвідношення на осі координат, одержуємо систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = X\left(t, x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right), \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y\left(t, x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right). \end{cases} \quad (25.1)$$

Надалі ми обмежимося розглядом так званих *канонічних систем*, в яких всі рівняння розв’язані відносно старшої похідної. Канонічну систему завжди можна замінити еквівалентною їй системою рівнянь першого порядку, число рівнянь якої дорівнює сумі порядків рівнянь вихідної системи.

Проілюструємо цей факт на наведеному вище прикладі. Для цього позначимо: $\frac{dx}{dt} = u$, $\frac{dy}{dt} = v$. Тоді система рівнянь (25.1) набере вигляду:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u, \\ \frac{dy}{dt} = v, \\ m \frac{du}{dt} = X(t, x, y, u, v), \\ m \frac{dv}{dt} = Y(t, x, y, u, v). \end{cases} \quad (25.2)$$

Зрештою, подібний прийом ми вже використовували. Так, інтегруючи диференціальне рівняння другого порядку $xy'' \ln x = y'$ методом пониження порядку, ми фактично одержували систему рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} y' = p, \\ xp' \ln x = p, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y' = p, \\ p' = \frac{p}{x \ln x}. \end{cases}$$

У зв'язку з цим будемо розглядати тільки системи першого порядку, розв'язані відносно похідних; такі системи називаються *нормальними*, їх вигляд:

[illegible]

Визначення 25.1. Під розв'язком системи диференціальних рівнянь (25.3) розумітимемо систему функцій

[illegible]

що перетворює (25.3) в тотожність при будь-яких значеннях довільних сталих C_i .

При цьому, які б не були *погаткові умови* :

$$y_1(x_0) = y_{10}, y_2(x_0) = y_{20}, \dots, y_n(x_0) = y_{n0}. \quad (25.5)$$

ці сталі C_i визначаються однозначно. Названа система функцій (25.4) при сформульованих умовах (25.5) є **загальним розв'язком**. Будь-які n функцій, що одержуються із загального розв'язку

(25.4) при конкретних значеннях сталих $C_1, C_2, \dots, C_n$ називаються **частинним розв'язком** системи диференціальних рівнянь.

Пошук частинного розв'язку системи рівнянь (25.3) при початкових умовах (25.5) називається **задачею Коші**. Наведемо формулювання теореми про існування і єдиність розв'язку задачі Коші системи диференціальних рівнянь.

Теорема 25.1.

Розв'язок задачі Коші існує і єдиний, якщо функції $f_1(x, y_1, \dots, y_n), \dots, f_n(x, y_1, \dots, y_n)$ неперервні разом із своїми частинними похідними по аргументах $y_1, \dots, y_n$ в області D $(n+1)$ -вимірного простору, яка містить точку $M_0(x_0, y_{10}, \dots, y_{n0})$. ★

Розв'язування нормальної системи диференціальних рівнянь

Вище ми вже зауважували про можливість „розгортання“ диференціального рівняння n -го порядку у систему диференціальних рівнянь першого порядку. В свою чергу при певних умовах нормальну систему рівнянь (25.3) можна звести до еквівалентного одного диференціального рівняння n -го порядку з однією шуканою функцією. Це буде одним із методів розв'язування (інтегрування) такої системи рівнянь — **метод виключень**.

Здійснюється це таким чином. Перше рівняння системи (25.3) диференціюємо по x (знаходимо від обох частин першої рівності повну похідну по x):

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \frac{dy_2}{dx} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \frac{dy_n}{dx}$$

і замість $y_1', y_2', \dots, y_n'$ підставляємо їх значення із системи (25.3). В результаті одержуємо рівняння

$$y_1'' = F_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Одержану рівність знову диференціюємо по x і поступаємо аналогічно вищезгаданому. Тоді:

$$y_1''' = F_3(x, y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Так ми чинимо до тих пір, доки не одержимо рівняння:

$$y_1^{(n)} = F_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Потім із одержаних на проміжних етапах $(n-2)$ -рівнянь $y_1'' = F_2, y_1''' = F_3, \dots, y_1^{(n-1)} = F_{n-1}$ і рівняння $y_1' = f_1$ знаходимо $y_2, y_3, \dots, y_n$ і підставляємо в останнє рівняння $y^{(n)} = F_n$, внаслідок чого дістанемо рівняння:

$$y_1^{(n)} = F^*(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}).$$

Розв'язуємо його і одержимо функцію

$$y_1 = \varphi_1^*(x, C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Інші невідомі функції $y_2, y_3, \dots, y_n$ шукаємо за допомогою допоміжних рівнянь, що одержувались на проміжних етапах.

Приклад 25.2. Знайти загальний розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y + z, \\ \frac{dz}{dx} = y - z. \end{cases}$$



Розв'язання. Диференціюємо перше рівняння по x : $y''_{x^2} = y'_x + z'_x$ і підставляємо в нього похідну z'_x , взяту з другого рівняння: $y''_{x^2} = y'_x + y - z$. Невідому z виключаємо за допомогою першого рівняння. В результаті маємо ЛОДР-2 із сталими коефіцієнтами, еквівалентне заданій системі: $y'' - 2y = 0$. Її загальний розв'язок

$$y = C_1 e^{\sqrt{2}x} + C_2 e^{-\sqrt{2}x}.$$

Невідому z знаходимо не з другого рівняння (z'_x невідома!), а із першого рівняння системи:

$$z = y'_x - y = (\sqrt{2} - 1)C_1 e^{\sqrt{2}x} - (\sqrt{2} + 1)C_2 e^{-\sqrt{2}x}. \quad \blacksquare$$

Приклад 25.3. Проінтегрувати систему рівнянь .

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} + 2y + z = \sin x, \\ \frac{dz}{dx} - 4y - 2z = \cos x. \end{cases}$$



Розв'язання. Диференціюємо перше рівняння по x :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} = \cos x. \quad (25.6)$$

З першого рівняння даної системи визначаємо z :

$z = \sin x - 2y - \frac{dy}{dx}$. Підставляємо це значення в друге рівняння системи. Одержимо:

$$\frac{dz}{dx} - 4y - 2\sin x + 4y + 2\frac{dy}{dx} = \cos x$$

або

$$\frac{dz}{dx} = \cos x + 2\sin x - 2\frac{dy}{dx}.$$

Підставляємо знайдене значення $\frac{dz}{dx}$ в рівняння (25.6):

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + \cos x + 2\sin x - 2\frac{dy}{dx} = \cos x$$

або

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2\sin x.$$

Це рівняння другого порядку. Інтегруючи його двічі, знаходимо

$$y = 2\sin x + C_1 x + C_2.$$

Підставляючи y і y' в рівняння (25.2) знайдемо

$$\begin{aligned} z &= \sin x - 4\sin x - 2C_1 x - 2C_2 - 2\cos x - C_1 = \\ &= -3\sin x - 2\cos x - 2C_1 x - C_1 - 2C_2. \end{aligned}$$

Розв'язком системи є функції

$$\begin{aligned} y &= 2\sin x + C_1 x + C_2, \\ z &= -3\sin x - 2\cos x - 2C_1 x - C_1 - 2C_2. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Приклад 25.4. Речовина A розкладається на дві речовини P і Q із швидкістю утворення кожної з них пропорційно кількості нерозкладеної на даний момент речовини. Знайти закон зміни кількості x і y речовини P і Q в залежності від часу t , якщо при $t = 0$ $x = y = 0$, а через 1 годину x і y дорівнюють відповідно $\frac{a}{8}$ і $\frac{3a}{8}$, де a - початкова кількість речовини A . ☺

Розв'язання. На момент часу t кількість речовини A дорівнює $a - x - y$. Отже, для встановлення закону зміни кількості речовин P і Q маємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = k_1(a - x - y), \\ \frac{dy}{dt} = k_2(a - x - y). \end{cases}$$

Можна було б при розв'язуванні цієї системи використати загальний метод виключення, але тут простіше поділити обидві частини другого рівняння на відповідні частини першого рівняння. Одержуємо:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k_2}{k_1},$$

звідки

$$y = \frac{k_2}{k_1}x + C.$$

Оскільки при $t = 0$ маємо $x = y = 0$, то $C = 0$, а тому

$$y = \frac{k_2}{k_1}x. \quad (25.7)$$

Замінюючи в першому рівнянні y на $\frac{k_2}{k_1}x$, одержимо

$$\frac{dx}{dt} + (k_1 + k_2)x = k_1a. \quad (25.8)$$

Це лінійне рівняння першого порядку із сталими коефіцієнтами. Складемо характеристичне рівняння відповідного

однорідного рівняння:

$$r + (k_1 + k_2) = 0 \Rightarrow r = -(k_1 + k_2),$$

а тому загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння буде

$$\tilde{x} = C_1 e^{-(k_1 + k_2)t}.$$

Частинний розв'язок даного неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $x^* = A$. Тоді $(x^*)' = 0$ і

$$(0 + (k_1 + k_2)A = k_1a \Rightarrow A = \frac{k_1a}{k_1 + k_2}.$$

Отже, загальний розв'язок неоднорідного рівняння (25.8) має вигляд

$$x(t) = x^* + \tilde{x} = \frac{k_1a}{k_1 + k_2} + C_1 e^{-(k_1 + k_2)t}.$$

Використовуючи початкову умову $x(0) = 0$, матимемо $C_1 = -\frac{k_1a}{k_1 + k_2}$ і, отже,

$$x(t) = \frac{k_1a}{k_1 + k_2} (1 - e^{-(k_1 + k_2)t}).$$

Підставляючи цей вираз в (25.7), одержимо

$$y(t) = \frac{k_2 a}{k_1 + k_2} (1 - C_1 e^{-(k_1 + k_2)t}).$$

Коефіцієнти k_1 і k_2 можна визначити, якщо врахувати умову: $x(1) = \frac{a}{8}$, $y(1) = \frac{3a}{8}$. Одержимо:

$$\begin{cases} \frac{a}{8} = \frac{k_1 a}{k_1 + k_2} (1 - e^{-(k_1 + k_2)t}), \\ \frac{3a}{8} = \frac{k_2 a}{k_1 + k_2} (1 - e^{-(k_1 + k_2)t}). \end{cases}$$

Тоді $k_2 = 3k_1$, а потім $k_1 = \frac{1}{4} \ln 2$, $k_2 = \frac{3}{4} \ln 2$.

Запишемо тепер розв'язок задачі:

$$x = \frac{a}{4} (1 - (e^{-\ln 2})^t) = \frac{a}{4} (1 - 2^{-t});$$

$$y = \frac{3a}{4} (1 - 2^{-t}).$$

Приклад 25.5. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} = z, \\ \frac{d^2 z}{dx^2} = y. \end{cases}$$



Розв'язання. Перше рівняння двічі диференціюємо по x і виключаємо $\frac{d^2 z}{dx^2}$ за допомогою другого рівняння. Одержимо

$$y^{IV} - y = 0.$$

А далі складаємо і розв'язуємо характеристичне рівняння:

$$(r^4 - 1 = 0) \Rightarrow ((r - 1)(r + 1)(r^2 + 1) = 0) \Rightarrow (r_1 = 1, r_2 = -1, r_3 = i).$$
 Тоді,

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x,$$

$$x = y'' = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - C_3 \cos x - C_4 \sin x.$$

Зауваження 25.1. До одного рівняння n -го порядку можна зводити не тільки нормальні системи рівнянь, але й системи рівнянь вищих порядків. Але робити це треба безпосередньо.

Огляд основних фактів теорії системи лінійних диференціальних рівнянь

Найбільше вивченою нормальною системою диференціальних рівнянь є **система лінійних рівнянь**. Це система виду (25.3), в якій функції $f_k(x, y_1, \dots, y_n)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) — лінійні відносно шуканих функцій $y_1, \dots, y_n$:

$$f_k(x, y_1, \dots, y_n) = p_{k1}(x)y_1 + p_{k2}(x)y_2 + \dots + p_{kn}(x)y_n + f_k^*(x);$$

$p_{k1}(x), p_{k2}(x), \dots, p_{kn}(x)$ називаються коефіцієнтами, $f_k^*(x)$ — правими частинами лінійних рівнянь.

Очевидно, що якщо коефіцієнти $p_{ki}(x)$ і праві частини $f_k^*(x)$ - неперервні на (a, b) , то при $x_0 \in (a, b)$ умови теореми Коші для такої системи будуть виконуватись.

Запишемо систему лінійних рівнянь в розгорнутому вигляді:

[illegible]

Відзначимо, насамперед, що рівняння n -го порядку, до якого зводиться система лінійних рівнянь (25.9), також лінійне.

Багато питань теорії системи лінійних рівнянь перегукуються з аналогічними питаннями теорії лінійних диференціальних рівнянь n -го порядку.

Почнемо із скорочених записів лінійних систем, використовуючи при цьому векторно-матричну символіку. Запишемо коефіцієнти лінійної системи (25.9) у вигляді матриці:

$$A(x) = \begin{pmatrix} p_{11}(x) & \dots & p_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{n1}(x) & \dots & p_{nn}(x) \end{pmatrix},$$

а сукупність невідомих функцій $y_k(x)$ у вигляді вектор-функції:

$$\vec{Y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \dots\dots\dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}.$$

Тоді, використовуючи правило множення матриць, систему (25.9) можна записати так:

$$\frac{d\vec{Y}}{dx} = A(x)\vec{Y} + \vec{F}(x),$$

де $\frac{d\vec{Y}}{dx}$ - стовпець похідних, а $\vec{F}(x)$ - стовпець з правих частин $f_k^*(x)$.

Система лінійних рівнянь без правих частин, тобто при $\vec{F}(x) \equiv \vec{0}$, називається однорідною ; вона записується так:

$$\frac{d\vec{Y}}{dx} = A(x)\vec{Y}. \quad (25.10)$$

Безпосередньо перевіряються такі властивості системи ЛОДР (25.10):

1. якщо вектор-функція $\vec{Y}$ є розв'язком системи (25.10), то $C\vec{Y}$, де C — довільне число, також є її розв'язком.

2. якщо вектор-функції $\vec{Y}_1$ і $\vec{Y}_2$ є розв'язками системи (25.10), то їх сума $\vec{Y}_1 + \vec{Y}_2$ також задовольняє цій системі.

З цих властивостей випливає: якщо $\vec{Y}_1, \dots, \vec{Y}_m$ — розв'язки системи (25.10), то їх лінійна комбінація $\vec{Y} = C_1 \vec{Y}_1 + \dots + C_m \vec{Y}_m$ є розв'язком цієї системи.

За аналогією з векторною алгеброю система вектор-функцій $\vec{Y}_1, \dots, \vec{Y}_m$ називається **лінійно незалежною** на (a, b) , якщо рівність $C_1 \vec{Y}_1 + \dots + C_m \vec{Y}_m = \vec{0}$ виконується тільки при $C_1 = C_2 = \dots = C_m = 0$.

Означення 25.2. Будь-яку сукупність n лінійно незалежних розв'язків

$$\vec{Y}_1, \vec{Y}_2, \dots, \vec{Y}_m \quad (25.11)$$

✓

системи (25.10) називають **фундаментальною системою розв'язків**.

Існування і умови фундаментальності розв'язків системи (25.10) встановлюються аналогічно до подібних тверджень для розв'язків лінійних рівнянь n -порядку. Якщо сукупність розв'язків (25.11) утворює фундаментальну систему розв'язків, то їх лінійна комбінація

$$\vec{Y}(x) = \sum_{k=1}^n C_k \vec{Y}_k(x) \quad (25.12)$$

є загальним розв'язком системи (25.10), тобто, множина (25.10) вичерпує всі можливі її частинні розв'язки.

Як і для одного рівняння n -го порядку, можна довести, що загальний розв'язок неоднорідної системи (25.9) є сумою загального розв'язку відповідної однорідної системи (25.10) і частинного розв'язку неоднорідної системи. При цьому частинні розв'язки неоднорідної системи можна знайти методом варіації довільних сталих.

Розв'язування системи лінійних однорідних рівнянь із сталими коефіцієнтами

Зрозуміло, що систему (25.10) можна розв'язати методом зведення її до одного рівняння n -го порядку методом виключень. Але, враховуючи, що коефіцієнти $p_{kl}(x) = a_{kl}$ — сталі розглянемо ще й такий спосіб (назвемо його матричним). Для зручності обмежимося випадком $n = 3$, тобто обмежимося трьома рівняннями. Запишемо їх в таких позначеннях:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1x + a_2y + a_3z; \\ \frac{dy}{dt} = b_1x + b_2y + b_3z; \\ \frac{dz}{dt} = c_1x + c_2y + c_3z. \end{cases} \quad (25.13)$$

Шукатимемо окремі розв'язки системи у вигляді:

$$x = \alpha e^{rt}, \quad y = \beta e^{rt}, \quad z = \gamma e^{rt}, \quad (25.14)$$

де α, β, γ, r — невизначені сталі, які треба знайти.

Підставляючи функції (25.14) в (25.13) і скорочуючи на множник $e^{rt} \neq 0$, дістанемо:

$$\begin{cases} r\alpha = a_1\alpha + a_2\beta + a_3\gamma; \\ r\beta = b_1\alpha + b_2\beta + b_3\gamma; \\ r\gamma = c_1\alpha + c_2\beta + c_3\gamma; \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} (a_1 - r)\alpha + a_2\beta + a_3\gamma = 0; \\ b_1\alpha + (b_2 - r)\beta + b_3\gamma = 0; \\ c_1\alpha + c_2\beta + (c_3 - r)\gamma = 0. \end{cases} \quad (25.15)$$

Нас, природно, цікавить ненульовий розв'язок цієї системи, бо при $\alpha = \beta = \gamma = 0$ одержуємо тривіальний розв'язок: $x = y = z = 0$. Щоб система лінійних алгебраїчних однорідних рівнянь мала ненульовий розв'язок, потрібно, щоб її визначник дорівнював нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (a_1 - r) & a_2 & a_3 \\ b_1 & (b_2 - r) & b_3 \\ c_1 & c_2 & (c_3 - r) \end{vmatrix} = 0. \quad (25.16)$$

Рівняння (25.16) є алгебраїчним рівнянням відносно r . Його називають **характеристичним рівнянням** системи лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами. В нашому випадку це рівняння третього степеня.

Розглянемо випадок, коли рівняння (25.16) має три дійсні різні корені r_1, r_2, r_3 . Кожний з цих коренів r_i по чергову підставляємо в систему (25.15) і визначаємо невідомі $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$. Можна довести, що загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь (25.13) в даному випадку має вигляд:

$$\begin{cases} x = C_1\alpha_1 e^{r_1 t} + C_2\alpha_2 e^{r_2 t} + C_3\alpha_3 e^{r_3 t}; \\ y = C_1\beta_1 e^{r_1 t} + C_2\beta_2 e^{r_2 t} + C_3\beta_3 e^{r_3 t}; \\ z = C_1\gamma_1 e^{r_1 t} + C_2\gamma_2 e^{r_2 t} + C_3\gamma_3 e^{r_3 t}. \end{cases} \quad (25.17)$$

У векторній формі загальний розв'язок запишемо так:

$$\vec{Y}(t) = C_1 \vec{Y}_1(t) + C_2 \vec{Y}_2(t) + C_3 \vec{Y}_3(t), \quad (25.18)$$

$$\text{де } \vec{Y}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \vec{Y}_1(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} e^{r_1 t}, \vec{Y}_2(t) = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} e^{r_2 t}, \vec{Y}_3(t) = \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} e^{r_3 t}.$$

Вважаємо, отже, що вектор-функції $\vec{Y}_1(t), \vec{Y}_2(t), \vec{Y}_3(t)$ утворюють фундаментальну систему розв'язків заданої системи диференціальних рівнянь.

Зауваження 25.2. Оскільки визначник системи (25.15) дорівнює нулю, то хоча б один з його рядків є лінійною комбінацією інших. А тому в однорідній системі (25.15) є „зайві” рівняння. Цей факт можна використати ще й так: одну із змінних $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ можна брати довільною, наприклад, рівною 1 (одна лише вимога: коефіцієнт біля цієї змінної при підстановці в систему (25.15) $r = r_i$ не повинен дорівнювати нулю).

Приклад 25.6. Розв'язати задачу Коші:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 2y; \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y; \end{cases} \quad x(0) = 2, y(0) = \frac{1}{2}. \quad (6.14')$$



Розв'язання. Шукаємо спочатку загальний розв'язок системи. В нашому прикладі:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Нехай $x = \alpha e^{rt}$, $y = \beta e^{rt}$ – один з розв'язків. Тоді для знаходження α , β одержуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} (a_1 - r)\alpha + a_2\beta = 0, \\ b_1\alpha + (b_2 - r)\beta = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2 - r)\alpha + 2\beta = 0, \\ \alpha + (3 - r)\beta = 0, \end{cases} \quad (25.19)$$

в якій r – корінь характеристичного рівняння:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (a_1 - r)a_2 \\ b_1(b_2 - r) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} (2 - r)2 \\ 1(3 - r) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (r^2 - 5r + 4 = 0).$$

Корені характеристичного рівняння: $r_1 = 1$, $r_2 = 4$.

Підставляємо в (25.15) $r = r_1 = 1$. Тоді:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\beta_1 = 0, \\ \alpha_1 + 2\beta_1 = 0. \end{cases}$$

Якщо взяти $\alpha_1 = 1$, тоді $\beta_1 = -\frac{1}{2}$. Отже, одним з розв'язків системи (25.19) є

$$\vec{Y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} e^t.$$

Якщо в 25.19 покласти $r = r_2 = 4$, то

$$\begin{cases} -2\alpha_2 + 2\beta_2 = 0, \\ \alpha_2 - \beta_2 = 0. \end{cases}$$

Візьмемо $\alpha_2 = 1$, тоді $\beta_2 = 1$. Одержуємо другий розв'язок системи:

$$\vec{Y}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}.$$

Загальний розв'язок дорівнює лінійній комбінації знайдених розв'язків:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}.$$

В скалярній формі це можна записати так:

$$\begin{aligned} x &= C_1 e^t + C_2 e^{4t}, \\ y &= -\frac{1}{2} C_1 e^t + C_2 e^{4t}. \end{aligned}$$

C_1 і C_2 знаходимо з початкових умов:

$$\begin{cases} 2 = x(0) = C_1 + C_2, \\ \frac{1}{2} = y(0) = -\frac{1}{2} C_1 + C_2. \end{cases}$$

Отже, $C_1 = C_2 = 1$.

Віповідь:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^t + e^{4t}, \\ y(t) &= -\frac{1}{2} e^t + e^{4t}. \end{aligned}$$

Предметний покажчик

- δ -окіл, 50
- τ -розбиття відрізка, 94
- Гіперболічний косинус, 14
- Гіперболічний котангенс, 14
- Гіперболічний синус, 14
- Гіперболічний тангенс, 14
- абсолютно збіжний інтеграл, 110
- асимптота
 - вертикальна, 42
 - горизонтальна, 43
 - кривої, 42
 - похила, 42
- визначений інтеграл, 94
 - властивості, 96
- вронскіан, 147
- головна частина приросту функції, 19
- градієнт, 63
 - властивості, 63
- границя функції, 50
- гранична ознака
 - порівняння, 112
- гранична ознака порівняння, 109
- диференціал, 19
 - n -го порядку, 21, 66
 - властивості, 20
 - геометричний зміст, 19
 - другого порядку, 21, 66
 - застосування, 21, 64
 - механічний зміст, 19
 - першого порядку, 19
 - повний, 63
 - інваріантність форми, 20
- диференціальне рівняння
 - n -го порядку, 137
 - першого порядку, 119
- диференціальний біном, 89
- диференціювання, 11
- довжина дуги кривої, 115
- достатня умова опуклості, вгнутості, 41
- достатні умови
 - строгої монотонності, 32
- достатні умови диференційовності, 57
- достатні умови локального екстремуму, 71
- достатні умови інтегровності, 95
- достатні умови існування точки перегину, 42
- дотична
 - до кривої, 12
- дотична площа, 68
- друга достатня умова екстремуму, 37
- другі достатні умови локального екстремуму, 73
- діаметр розбиття, 94
- елементарні раціональні дробі, 85
- загальний розв'язок, 122
- задана
 - про площу криволінійної трапеції, 92
- задача
 - Коші, 121
 - про густину неоднорідного стержня, 10
 - про масу неоднорідного стержня, 93
 - про пройдений шлях, 93
 - про силу струму, 10
 - про теплоємність, 10
 - про швидкість прямолінійного руху, 9
 - про швидкість хімічної реакції, 11
- залежна змінна, 47
- залишковий член
 - у формі Лагранжа, 30
- збіжна послідовність, 50
- збіжний інтеграл, 107, 111
- компліксне число
 - алгебраїчна форма запису, 77
- комплексна площа, 77
- комплексне число, 77
 - дійсна частина, 77
 - показникова форма, 79
 - тригонометрична форма запису, 78
 - уявна частина, 77
- корінь многочлена, 80
- кратність кореня, 80
- крива
 - опукла, 40
 - увігнута, 40
- критична точка, 32, 71

- локальний екстремум, 34, 70
- локальний максимум, 70
- локальний мінімум, 70
- лінійна комбінація функцій, 145
- лінійне рівняння
 - n -го порядку, 142
- лінійно незалежна система, 145
- лінійно незалежна система функцій, 168
- лінія рівня, 49
- метод
 - Бернуллі, 127
 - безпосереднього інтегрування, 82
 - виключень, 163
 - внесення функції під диференціал, 83
 - заміни змінної, 83
 - невизначених коефіцієнтів, 85, 160
 - окремих значень аргументів, 85
 - підбору частинного розв'язку, 152
 - інтегрування частинами, 83
- многочлен, 79
 - Тейлора, 29
- множина
 - зв'язна, 52
- множник Лагранжа, 75
- невизначений інтеграл, 81
 - властивості, 81
- невластивий інтеграл
 - другого роду, 110
 - першого роду, 107
- незалежна змінна, 47
- необхідна умова
 - екстремуму, 35
 - строгої монотонності, 32
- необхідна умова інтегровності, 95
- необхідні умови екстремуму, 70
- нескінченно мала, 51
- нормаль
 - до кривої, 13
 - до поверхні, 68
- нормальна система, 162
- об'єм тіла, 116
- обвідна, 121
- область, 53
 - визначення, 48
 - замкнена, 53
 - значень, 48
 - обмежена, 53
- однорідна система, 167
- ознака порівняння, 108, 111
- основна теорема алгебри, 80
- основні невизначеності, 28
- особливий розв'язок, 121
- особливі точки, 121
- первісна, 81
- перша достатня умова екстремуму, 36
- площа плоскої фігури, 112
- площа поверхні обертання, 116
- повний диференціал
 - геометричний зміст, 68
- похідна, 11
 - n -го порядку, 17
 - геометричний зміст, 12
 - другого порядку, 17
 - механічний зміст, 17
 - за напрямом, 62
 - ліва, 13
 - механічний зміст, 11
 - нескінченна, 11
 - неявно заданої функції, 16, 18
 - параметрично заданої функції, 16, 18
 - права, 13
 - частинна, 54
 - геометричний зміст, 54
 - другого порядку, 55
 - мішана, 55
 - третього порядку, 55
- початкові умови, 162
- правило
 - Лопіталя, 26
- підстановки
 - Ейлера, 91
 - Чебишова, 89
- розбіжний інтеграл, 107, 111
- розв'язок диференціального рівняння, 120, 137
- розв'язок системи, 162
- розвинення
 - Маклорена, 31
- рівняння
 - Бернуллі, 129
 - Клеро, 136
 - Лагранжа, 136
 - Ріккати, 130
 - з відокремленими змінними, 123
 - з відокремлюваними змінними, 123
 - звідне до однорідного, 126
 - лінійне
 - першого порядку, 127
 - однорідне, 125
 - у повних диференціалах, 131
 - характеристичне, 156

- рівняння зв'язку, 75
- система
 - лінійних рівнянь, 167
- скалярне поле, 61
- стаціонарна точка, 32, 71
- стаціонарне поле, 61
- схема дослідження функції, 44
- таблиця
 - диференціалів, 20
 - похідних, 14
 - інтегралів, 82
- теорема
 - Безу, 80
 - Коші, 24, 120, 138
 - Лагранжа, 25
 - геометричний зміст, 25
 - механічна інтерпретація, 26
 - Ролля, 23
 - геометричний зміст, 23
 - Тейлора, 29
 - Ферма, 22
 - геометричний зміст, 23
 - Чебишова, 89
 - Шварца, 55
 - про будову загального розв'язку ЛОДР- n , 149
 - про границю суми, різниці, добутку, частки функцій, 50
 - про заміну змінної у визначеному інтегралі, 104
 - про заміну змінної у невизначеному інтегралі, 83
 - про похідну складеної функції, 14, 58, 59
 - про розклад многочлена, 80
 - про розкриття невизначеності $\frac{0}{0}$, 26
 - про розкриття невизначеності $\frac{\infty}{\infty}$, 27
 - про рівність мішаних похідних, 55
 - про середнє значення, 100
 - про структуру загального розв'язку ЛНДР- n , 151
 - про існування неявної функції, 60, 61
 - про існування частинних похідних диференційовної функції, 56
 - про існування і єдиність розв'язку, 120
- точка
 - внутрішня, 53
 - локального екстремуму, 34
 - межова, 53
 - особлива, 68
 - умовного екстремуму, 74
 - точка перегину, 40
 - третя достатня умова екстремуму, 38
 - умовний екстремум, 74
 - умовно збіжний інтеграл, 110
 - формула
 - Ейлера, 79
 - Лагранжа, 26
 - Маклорена, 30
 - Муавра, 79
 - Ньютона-Лейбніца, 102
 - Остроградського-Ліувілля, 148
 - Тейлора, 29, 70
 - Тейлора для многочлена, 31
 - для обчислення повної похідної, 59
 - заміни змінної, 83, 104
 - інтегрування частинами, 83, 106
 - формула Лейбніца, 18
 - фундаментальна система розв'язків, 148, 168
 - функція
 - Діріхле, 95
 - Лагранжа, 75
 - від двох змінних, 47
 - графік, 48
 - диференційовна, 13, 56
 - неперервна
 - властивості, 53
 - неперервна на множині, 52
 - неперервна у точці, 52
 - однорідна n -го виміру, 124
 - частинний приріст, 53
 - частинний розв'язок, 122
 - інтеграл
 - із змінною верхньою межею, 101
 - інтегральна крива, 120, 137
 - інтегральна сума, 94
 - інтегровальний множник, 132

ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика. – К.: А.С.К., 2003. – 648 с.
2. Овчинников П. П., Яремчук Ф. П., Михайленко В. М. Вища математика. – К.: Техніка, 2000. – 592 с.
3. Пак В. В., Косенко Ю. Л. Вища математика: Підручник. – К.: Либідь, 1996. – 440 с.
4. Шкіль М. І. Математичний аналіз. Ч.ІІ. – К.: Вища школа, 1995. – 512 с.
5. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Том 2. — М.: Наука, 1978. – 456 с.
6. Шипачев В. С. Высшая математика. — М.: Высш. шк., 1991.- 479 с.
7. Кудрявцев Л. Д. Математический анализ. Т.І. — М.: Высш. шк., 1970. – 688 с.
8. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. Т.І. – М.: Гостехиздат, 1955. – 696 с.
9. Кудрявцев В. Ф., Демидович Б. П. Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 1989. – 656 с.
10. Горгула В. І., Сікора Б. С., Воробйова В. О. Математичний аналіз. Диференціальні рівняння: конспект лекцій. – Івано-Франківськ: ІФНТУНГ, 2004. – 165 с.

А. І. Бандура

Вища математика. Частина 2

Конспект лекцій

Комп'ютерна верстка: А. І. Бандура

Дизайн обкладинки: А. І. Бандура

Підписано до друку: 06.06.2013. Формат 61х84/16

Папір офсетний, друк цифровий.

Гарнітура Xe_{La}TeX. Умовн. друк. арк. 11,5 Тираж 100 прим. Зам. №76 від 06.06.2013.

Видавництво „Сімик“

76000, м. Івано-Франківськ, вул. Незалежності, 46/111

тел. (0342)3-25-91, e-mail:symykcom.if.ua

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єкта

Видавничої справи серія ІФ № 11 від 27.03.2001 року

Віддруковано: підприємець Голіней О. М.

76008, м. Івано-Франківськ, вул. Галицька, 128

тел. (0342) 58 04 32