

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**Івано-Франківський національний технічний університет
нафти і газу**

А. І. Бандура

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ЧАСТИНА 1

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

**Івано-Франківськ
2013**

УДК 512.64 + 514.12 + 517.1 (075.8)
ББК 22.143я73 + 22.151.5я73 + 22.161я73
Б 23

Рецензенти:

Гаврилків В. М.

кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри алгебри і геометрії Прикарпатського національного університету ім. В. Стефаника;

Гургула С. І.

кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу

Рекомендовано методичною радою Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу (протокол № 5 від 28.05.2013 р.)

Бандура А. І.

Б 23 Вища математика. Частина 1: конспект лекцій. — Івано-Франківськ: ІФНТУНГ, 2013. — 153 с.

МВ 02070855-5034-2013

Конспект лекцій розроблений відповідно до робочої програми дисципліни „Вища математика“. Він містить детальний і чіткий виклад теоретичного матеріалу розділів вищої математики: лінійної алгебри, аналітичної геометрії та вступу до математичного аналізу, які вивчаються у першому семестрі.

Виклад відповідного теоретичного матеріалу спирається на численні приклади, які містять детальне розв’язання. До значної частини прикладів наведено рисунки для кращого розуміння математичних понять та методів, розглянутих у конспекті.

Конспект лекцій призначено для студентів першого курсу напряму підготовки 6.050504 — „Зварювання“.

УДК 512.64 + 514.12 + 517.1 (075.8)
ББК 22.143я73 + 22.151.5я73 + 22.161я73

МВ 02070855-5034-2013

© Бандура А. І.
© ІФНТУНГ, 2013

Зміст

Вступ	6
Лінійна алгебра та аналітична геометрія	7
Тема 1. Визначники.	7
Визначники другого і третього порядків та їхні властивості	7
Розклад визначника за елементами рядка або стовпця	9
Визначники вищих порядків	11
Основні властивості визначників	11
Тема 2. Матриці	14
Основні означення	14
Дії над матрицями	15
Обернена матриця	17
Ранг матриці.	18
Тема 3. Системи лінійних рівнянь.	20
Основні поняття з теорії систем лінійних алгебраїчних рівнянь	20
Метод виключення невідомих (метод Жордана - Гауса)	20
Метод Крамера	22
Матричний метод	23
Теорема Кронекера-Капеллі	23
Тема 4. Вектори та дії над ними	24
Векторні та скалярні величини	24
Лінійні дії з векторами	25
Розклад вектора за базисом	26
Декартова система координат	26
Прямокутна система координат.	27
Координати вектора	28
Лінійні дії з векторами. Рівність і колінеарність векторів	29
Поділ відрізка в даному відношенні	29
Проекція вектора на вісь	30
Тема 5. Системи координат	31
Полярна система координат	31
Перетворення прямокутних координат на площині	32
Циліндрична та сферична системи координат.	34
Поняття про n-вимірні простори	35
Лінійна залежність векторів	36
Тема 6. Добутки векторів	37
Означення, геометричний та механічний зміст скалярного добутку.	37
Властивості скалярного добутку	38
Вираз скалярного добутку через координати. Кут між векторами.	40
Означення і властивості векторного добутку	41
Векторний добуток двох векторів, заданих координатами	43
Означення і обчислення мішаного добутку	44
Властивості мішаного добутку	45

Тема 7. Лінія та поверхні на площині і просторі	48
Предмет аналітичної геометрії	48
Поняття про лінію та її рівняння.	48
Знаходження рівняння лінії за її геометричними властивостями	49
Параметричні рівняння лінії	50
Векторне рівняння лінії	50
Про залежність рівняння лінії від вибору системи координат	51
Тема 8. Пряма на площині	51
Різні види рівнянь прямої на площині	51
Нормальне рівняння прямої лінії.	54
Відстань від точки до прямої.	55
Загальне рівняння прямої та його дослідження	56
Кут між двома прямими. Умови паралельності і перпендикулярності двох прямих	57
Тема 9. Лінії другого порядку	61
Поняття лінії другого порядку	61
Коло	62
Еліпс	65
Гіпербола	68
Парабола	72
Параметричні та полярні рівняння ліній другого порядку	74
Тема 10. Лінії та поверхні в просторі	75
Поверхня та її рівняння	75
Рівняння лінії в просторі	76
Тема 11. Аналітична геометрія в просторі	78
Загальне рівняння площини та його дослідження	78
Рівняння площини, що проходить через три точки. Рівняння площини у відрізках на осях	80
Нормальне рівняння площини	81
Відстань від точки до площини	82
Кут між двома площинами. Умови паралельності і перпендикулярності двох площин.	83
Відстань між паралельними площинами	84
Різні види рівнянь прямої в просторі	85
Кут між двома прямими. Умови паралельності і перпендикулярності прямих	87
Кут між прямою і площиною. Умови паралельності і перпендикулярності прямої і площини	89
Відстань від точки до прямої.	91
Відстань між мимобіжними прямими	91
Тема 12. Поверхні другого порядку.	93
Поняття поверхні другого порядку	93
Циліндричні поверхні.	94
Поверхні обертання.	95
Конічні поверхні	97
Сфера	98
Еліпсоїд	100
Однопорожнинний гіперболоїд	101
Двопорожнинний гіперболоїд	102
Еліптичний параболоїд	103
Гіперболічний параболоїд	104

Лінійчаті поверхні	104
Вступ до математичного аналізу	107
Тема 13. Функція однієї змінної	107
Математична символіка	107
Множини. Логічні символи	107
Множина дійсних чисел	109
Поняття та основні властивості функції. Графік функції	110
Класифікація елементарних функцій	111
Обмежені функції	114
Монотонні функції	114
Парні і непарні функції	115
Періодичні функції	116
Неявно задані функції.	117
Обернені функції.	118
Параметрично задані функції.	119
Тема 14. Границя числової послідовності	119
Поняття про числову послідовність	119
Границя числової послідовності.	120
Нескінченно великі змінні величини	122
Тема 15. Границя функції	123
Границя функції в точці	123
Границя функції на нескінченності. Нескінченно велика функція	127
Нескінченно малі величини. Їхні властивості	130
Основні теореми про границі.	132
Тема 16. Обчислення границь функцій	135
Перша важлива границя	135
Число e . Натуральні логарифми	136
Друга важлива границя	137
Порівняння нескінченно малих функцій. Еквівалентні нескінченно малі функції	138
Тема 17. Неперервність функції	142
Неперервність функції в точці. Точки розриву.	142
Класифікація точок розриву	144
Основні теореми про неперервні функції.	145
Теореми Больцано-Коші та Вейерштраса.	146
Предметний покажчик	148
Перелік рекомендованих джерел	153

ВСТУП

Курс „Вища математика” призначений для розширення кругозору студентів, для оволодіння ними потужного інструменту дослідження руху та зміни стану речовини. Лінійна алгебра та аналітична геометрія виникли під впливом ідей Р. Декарта про прямокутну систему координат. Диференціальне та інтегральне числення започаткувалося працями І. Ньютона та В. Лейбніца у середині XVII століття. Згодом їхню роботу продовжили Ж. Лагранж, О. Коші, К. Якобі, К. Вейерштрасс. Зазначимо, що значний внесок у розвиток інтегрального числення функцій однієї та декількох змінних зробив український математик М. Остроградський. Диференціальні рівняння сформувалися як окремий розділ вищої математики ще у XVIII ст. Гармонійне поєднання суто теоретичного та прикладного аспектів робить їх універсальним інструментом моделювання різноманітних явищ та процесів.

Різноманітні методи, ідеї та поняття усіх розділів вищої математики дуже тісно пов’язані між собою. Разом вони створюють струнку і гнучку теорію. Кожний розділ вищої математики є важливою невіддільною частиною, яка необхідна для повного усвідомлення студентами широких можливостей, що відкриваються перед ними внаслідок застосування методів вищої математики у їхній практичній діяльності.

Лінійна алгебра, аналітична геометрія, диференціальне та інтегральне числення функцій однієї та багатьох змінних, диференціальні рівняння, ряди не є замкнутими на собі теоріями. Вони широко використовуються у інших розділах математики – таких як теорія ймовірностей, математична статистика, рівняння математичної фізики, комплексний аналіз, операційне числення, які студенти вивчатимуть у курсі Спеціальних розділів вищої математики, а також без них не обійтися у фундаментальних дисциплінах — фізиці, нарисній геометрії, теоретичній механіці, опорі матеріалів, матеріалознавстві, електротехніці, термодинаміці і звісно у професійно-орієнтованих дисциплінах. Зокрема у таких технічних курсах як теорія зварювальних процесів, триботехніка, металознавство, деталі машин, технологічні процеси зварювання, основи обробки матеріалів. Тому для студентів напряму підготовки „Зварювання” важливим є вироблення вміння застосовувати математичний інструмент до опису різноманітних технологічних процесів.

У цьому конспекті розглянуто такі розділи вищої математики, як лінійна алгебра, аналітична геометрія, вступ до математичного аналізу. Усі ці три розділи становлять плавний місток від елементарної математики, яка вивчається у школі, до власне вищої математики.

Все це обумовлює актуальність вивчення вищої математики, глибоке розуміння якої сприятиме розширенню наукового кругозору, розвитку аналітичного мислення і підвищенню конкурентоспроможності на ринку праці майбутніх спеціалістів.

Лінійна алгебра та аналітична геометрія

ТЕМА 1. ВИЗНАЧНИКИ

Визначники другого і третього порядків та їхні властивості

Означення 1.1. Вираз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (1.1)$$

називається визначником (детермінантом) другого порядку. ✓

Поняття „визначник“ (від латинського determino - визначаю) ввів В. Лейбніц.

Означення 1.2. Вираз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11} \quad (1.2)$$

називається визначником (детермінантом) третього порядку. ✓

Символи a_{ij} називаються **елементами** визначника, причому перший індекс i показує номер рядка, а другий індекс j — номер стовпця, на перетині яких стоїть даний елемент. Так, елемент a_{23} стоїть у другому рядку і третьому стовпці.

Елементи a_{11} , a_{22} у визначнику (1.1) і a_{11} , a_{22} , a_{33} у визначнику (1.2) складають **головну діагональ** визначника, а елементи a_{12} , a_{21} і a_{13} , a_{22} , a_{31} в тих самих визначниках — **бічну діагональ**.

Для обчислення визначника другого порядку потрібно від добутку елементів, що стоять на головній діагоналі, відняти добуток елементів, розміщених на бічній діагоналі.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \quad (1.3)$$

Визначник третього порядку обчислюється за правилом трикутників (1.3): перші три доданки в правій частині формули (1.2) є добутками елементів, які стоять на головній діагоналі і в вершинах двох трикутників, у яких одна сторона паралельна головній діагоналі. Аналогічно утворюються доданки зі знаком мінус, де за основу береться бічна діагональ.

Крім правила трикутників, визначник третього порядку можна обчислити за правилом Саррюса. Для цього у визначнику справа дописуються перший і другий стовпчики. Потім беруть суму добутків трьох елементів, розміщених на головній діагоналі та двох діагоналях, паралельних до головної, із знаком плюс, а із знаком мінус беруть суму добутків трьох елементів, розміщених на бічній діагоналі, та двох діагоналях, паралельних до неї:

$$\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Зауважимо, що елементами визначника можуть бути не тільки числа, а й алгебраїчні чи тригонометричні вирази, функції тощо.

Приклад 1.1. Обчислити визначники: а) $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}$; в)

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 6 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

☺

Розв'язання. За формулами (1.1) і (1.2) отримуюмо:

$$а) \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - (-2) \cdot 3 = 26; б) \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1;$$

$$в) \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 6 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 2 \cdot 1 + 6 \cdot 4 \cdot (-2) - 4 \cdot (-1) \cdot 1 - 0 \cdot 6 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot (-2) = -35. \blacksquare$$

Розглянемо (на прикладі визначників третього порядку) основні властивості визначників.

1. Визначник не зміниться, якщо його рядки замінити відповідними стовпцями:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Ця властивість доводиться безпосередньо перевіркою: достатньо розкрити обидва визначники за формулою (1.2). Властивість 1 встановлює рівноправність рядків і стовпців визначника. Тому всі подальші властивості справедливі і для рядків і для стовпців. Доводяться вони, як і властивість 1, перевіркою.

2. Якщо переставити місцями два рядки (стовпці), то визначник поміняє знак. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

3. Якщо один з рядків (стовпців) визначника складається тільки з нулів, то визначник дорівнює нулю. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Якщо визначник має два однакових рядки (стовпці), то він дорівнює нулю. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a_{13} \\ b & b & a_{23} \\ c & c & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

5. Спільний множник, що міститься в усіх елементах одного рядка (стовпця), можна винести за знак визначника. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & ka_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

6. Якщо у визначнику елементи двох рядків (стовпців) пропорційні, то визначник дорівнює нулю.
7. Якщо кожен елемент n -го рядка (n -го стовпця) є сумою двох доданків, то такий визначник дорівнює сумі двох визначників, у одного з яких n -й рядок (n -й стовець) складається з перших доданків, а у другого — з других; інші елементи усіх трьох визначників однакові. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

8. Визначник не зміниться, якщо до елементів одного рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне й те саме число. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + ka_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ka_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + ka_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Розклад визначника за елементами рядка або стовпця

Нехай задано визначник третього порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \quad (1.4)$$

Мінором M_{ij} **елемента** a_{ij} визначника називається визначник, який утворюється з даного визначника в результаті викреслення i -го рядка та j -го стовпця. Наприклад, для визначника (1.4) мінорами елементів a_{23} і a_{32} :

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}; \quad M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Алгебраїчним (алгебричним) доповненням A_{ij} елемента a_{ij} називається його мінор, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \quad (1.5)$$

Наприклад, якщо $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & -3 \end{vmatrix}$, то $A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -5$.

Тепер сформулюємо і доведемо теореми про розклад визначника за елементами рядка (стовпцем).

Теорема 1.1.

Визначник дорівнює сумі добутків елементів довільного рядка (стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення. ★

Доведення. Покажемо, що для визначника (1.4) виконуються такі рівності:

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}; \quad \Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}; \\ \Delta &= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}; \quad \Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}; \\ \Delta &= a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}; \quad \Delta = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Доведемо, наприклад, першу з них. Розкриваючи визначник (1.4) за формулою (1.2) і групуємо доданки, що містять елементи першого рядка, маємо

$$\Delta = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) + a_{12}(a_{31}a_{23} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

За формулою (1.5) вирази, що стоять у дужках, відповідно дорівнюють алгебраїчним доповненням A_{11} , A_{12} , A_{13} , тому $\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$. Аналогічно доводяться й інші рівності. □

Запис визначника за будь-якою з формул (1.6) називають **розкладом визначника** за елементами відповідного рядка чи стовпця.

Приклад 1.2. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, розкладаючи його за елементами третього рядка. ☺

Розв'язання. За третьою з формул (1.6) маємо:

$$\Delta = -3 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -3 \cdot 2 + 1 \cdot 10 = 4.$$

Такий самий результат дає формула (1.2). ■

Теорема 1.2.

Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю. ★

ДОВЕДЕННЯ. Розглянемо, наприклад, суму добутків елементів першого рядка визначника (1.4) на алгебраїчні доповнення елементів другого рядка:

$$\begin{aligned} a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} &= -a_{11} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{13} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \\ &= -a_{11}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{12}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{13}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Визначники вищих порядків

Розглянемо квадратну таблицю з n^2 чисел, розміщених в n -горизонтальних і n -вертикальних рядках. За спеціальними правилами знаходиться число, яке називають визначником n -го порядку і позначають буквою Δ грецького алфавіту:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Числа a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$) — називають елементами визначника. Перший індекс вказує номер рядка, а другий — номер стовпця, на перетині яких знаходиться елемент. Елементи, в яких обидва індекси однакові (тобто елементи $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$) утворюють головну діагональ визначника. Інша діагональ $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ називається бічною. Порядок визначника визначає кількість його рядків (або стовпців). При обчисленні визначників n -го порядку одержуємо число, яке дорівнює алгебраїчній сумі всіх можливих добутків його елементів, взятих по одному з кожного з n рядків і кожного із n стовпців. При цьому половина доданків мають свої знаки, а інша — протилежні.

Визначення 1.3. Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника n -го порядку називається визначник $(n-1)$ -го порядку, утворений із визначника n -го порядку $|A|$ викреслюванням i -го рядка та j -го стовпця. ✓

Визначення 1.4. Алгебраїчне доповнення A_{ij} елемента a_{ij} визначника n -го порядку — це добуток виду $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. ✓

Правило обчислення визначника n -го порядку: визначник n -го порядку дорівнює сумі добутків усіх елементів будь-якого стовпця (або рядка) на їх алгебраїчні доповнення, тобто $\Delta =$

$$|A| = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot A_{ik} = \sum_{k=1}^n a_{kj} \cdot A_{kj}.$$

Основні властивості визначників

1. Заміна елементів рядка елементами стовпця не змінює визначника.
2. Якщо один із рядків або з стовпців визначника складається тільки з нулів, то визначник дорівнює нулю.
3. При переставленні місцями двох рядків визначника дістаємо визначник протилежного знаку.

4. Визначник, який має два однакові рядки, дорівнює нулю.
5. Якщо всі елементи деякого рядка визначника помножити на число $k \neq 0$, то сам визначник помножиться на k .
6. Якщо один з рядків визначника пропорційний другому рядку, то визначник дорівнює нулю.
7. Якщо всі елементи i -го рядка визначника n -го порядку записати у вигляді суми двох доданків $a_{ij} + b_{ij}$ ($j = \overline{1, n}$), то визначник дорівнює сумі двох визначників, у яких всі рядки, крім i -го, такі самі, як і в початковому визначнику, i -ий рядок одного з визначників складається a_{ij} , а другого — з елементів b_{ij} .
8. Визначник не змінюється, якщо до елементів одного з рядків додати елементи другого рядка, помножені на одне й те саме число.

Означення визначника n -го порядку взято за метод його обчислення.

Приклад 1.3. Обчислити визначник 4-го порядку:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}.$$



Розв'язання. Розкладемо визначник за елементами другого рядка:

$$\begin{aligned} \Delta = & 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{vmatrix} + \\ & + 1 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Кожен із цих визначників обчислимо, використавши теорему 1.1 (про розклад визначника за рядком або стовпчиком). Перший та третій визначники розкладемо за елементами другого рядка:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} = & (-1) \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} + \\ & + 0 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1)^3 \cdot (-15 - 0) - 1 \cdot (-1)^4 \cdot (-10 - 8) + 0 = -15 + 18 = 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = & 3 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} + \\ & + 0 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^3 \cdot (-10 - 8) - 1 \cdot (-1)^4 \cdot (-5 - 4) + 0 = \\ & = -3 \cdot (-18) - 1 \cdot (-9) = 63. \end{aligned}$$

Четвертий визначник розкладемо за елементами третього рядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^4 \cdot (-2+3) + 2 \cdot (-1)^5 \cdot (-1-9) + 0 = 1 - 2 \cdot (-10) = 21. \quad \blacksquare$$

Таким чином, визначник четвертого порядку рівний за означенням

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^3 \cdot 3 + 1 \cdot (-1)^5 \cdot 63 + 2 \cdot (-1)^6 \cdot 21 = -3 - 63 + 42 = -24.$$

Як бачимо, обчислення визначника 4-го порядку зводиться до обчислення чотирьох визначників 3-го порядку, а, відповідно, обчислення визначника 5-го порядку — до обчислення п'яти визначників 4-го порядку або двадцяти визначників 3-го порядку. Тому доцільно спочатку перетворити визначник так, щоб в одному з рядків (або стовпців) всі елементи, крім одного, стали нульовими. Цього можна досягти, використавши властивості визначників.

Таким чином, обчислення визначника n -го порядку можна звести до обчислення лише одного визначника $(n-1)$ -го порядку.

Приклад 1.4. Обчислити визначник, використавши його властивості:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Від елементів третього стовпця віднімемо відповідні елементи першого стовпця, а до елементів четвертого стовпця додамо відповідні елементи першого стовпця, помножені на „2“.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}.$$

Одержаний визначник 3-го порядку можна обчислити, наприклад, за правилом Саррюса, або звести до визначника 2-го порядку, віднявши від елементів другого і третього стовпців відповідні елементи першого стовпця

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -5 \\ 2 & -3 & -9 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ -3 & -9 \end{vmatrix} = -2 \cdot ((-3) \cdot (-9) - (-3) \cdot (-5)) = -2 \cdot 12 = -24.$$

Одержали значно легшим шляхом той же результат визначника. \blacksquare

ТЕМА 2. МАТРИЦІ

Основні означення

Означення 2.1. Прямокутна таблиця чисел a_{ij} , $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$, складена з m рядків та n стовпців і записана у вигляді

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ або } A = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right\|$$

називається *матрицею*.

Поняття матриці вперше ввели англійські математики У. Гамільтон і Д. Келі. Коротко матрицю позначають так:

$$A = (a_{ij}) \text{ або } A = \|a_{ij}\|$$

де a_{ij} — елементи матриці, причому індекс i в елементі a_{ij} означає номер рядка, а j — номер стовпця, на перетині яких стоїть даний елемент.

Добуток числа рядків m на число стовпців n називають *розміром матриці* і позначають $m \times n$. Якщо хочуть вказати розмір $m \times n$ матриці A , то пишуть $A_{m \times n}$.

Матриця, в якій число рядків дорівнює числу стовпців, називається *квадратною*. Кількість рядків (стовпців) квадратної матриці називається її *порядком*. Матриця, у якій всього один рядок, називається *матрицею-рядком*, а матриця, у якій всього один стовець, — *матрицею-стовпцем*. Дві матриці $A_{m \times n} = (a_{ij})$ та $B_{m \times n} = (b_{ij})$ називаються *рівними*, якщо вони однакових розмірів і мають рівні відповідні елементи: $a_{ij} = b_{ij}$. *Нульовою* називається матриця, у якій всі елементи дорівнюють нулю. Позначається така матриця буквою O . Як і в визначниках, в квадратних матрицях виділяють головну і бічну діагональ.

Квадратна матриця називається *діагональною*, якщо всі її елементи, крім тих, що знаходяться на головній діагоналі, дорівнюють нулю. Діагональна матриця, у якій кожен елемент головної діагоналі дорівнює *одиниці*, називається *одиничною* і позначається буквою E . Наприклад, одинична матриця третього порядку має вигляд

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Будь-якій квадратній матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

можна поставити у відповідність певне число, яке називається *визначником* (детермінантом) цієї матриці і позначається символом $\det A$. За означенням

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Наприклад, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \text{ то } \det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -3.$$

Прямокутна матриця розміром $m \times n$ ($n \neq m$) визначника не має.

Дії над матрицями

Операція додавання матриць вводиться тільки для матриць однакового розміру.

Означення 2.2. Сумою $C = A + B$ двох матриць $A_{m \times n} = (a_{ij})$ і $B_{m \times n} = (b_{ij})$ називається матриця $C_{m \times n} = (c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$. ✓

Приклад 2.1.

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 3 \\ 7 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Означення 2.3. Добутком матриці $A_{m \times n} = (a_{ij})$ на число k (або числа k на матрицю $A_{m \times n}$) називається матриця $B_{m \times n} = (ka_{ij})$. ✓

Приклад 2.2.

$$3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot 3 = \begin{pmatrix} -3 & 9 & 15 \\ 12 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Означення 2.4. Різниця матриць $A - B$ визначається як сума матриці A і матриці B , помноженої на -1 : ✓

Справедливі такі властивості операцій:

1. $A + B = B + A$ — комутативність відносно додавання матриць.
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ — асоціативність відносно додавання матриць.
3. $A + O = A$; $A - A = O$ — роль нульової матриці в діях над матрицями така, як і числа нуль в діях над числами.
4. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$ — асоціативність відносно множення чисел.
5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ — дистрибутивність множення на число відносно додавання матриць.
6. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ — дистрибутивність множення на матрицю відносно додавання чисел.

Операція **множення двох матриць** вводиться лише для узгоджених матриць. Матриця A називається **узгодженою з матрицею B** , якщо кількість стовпців першої матриці A дорівнює кількості рядків другої матриці B .

Якщо ця умова не виконується, тобто матриці неузгоджені, то множення таких матриць неможливе.

З узгодженості матриці A з B не випливає, взагалі кажучи, узгодженість матриці B з A . Квадратні матриці одного порядку взаємно узгоджені.

Означення 2.5. Добутком $C = AB$ матриці $A_{m \times n} = (a_{ij})$ на матрицю $B_{n \times k} = (b_{ij})$ називається така матриця, у якій елемент c_{ij} дорівнює сумі добутків елементів i -го рядка матриці A на відповідні елементи j -го стовпця матриці B :

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}; \quad C = C_{m \times k} = (c_{ij}),$$

$$i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Це означення називають **правилом множення рядка на стовець**. Наприклад, щоб визначити елемент c_{24} , що стоїть в другому рядку і четвертому стовпці матриці $C = AB$, потрібно знайти суму добутків елементів другого рядка матриці A на відповідні елементи четвертого стовпця матриці B .

Приклад 2.3. Знайти матрицю $C = AB$, якщо:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$. ☺

Розв'язання. а) Матриця $A_{2 \times 2}$ узгоджена з матрицею $B_{2 \times 3}$, тому за означенням маємо

$$C = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 + (-2) \cdot (-1) & 2 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 & 2 \cdot 2 + (-2) \cdot (-2) \\ 1 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ -3 & 4 & -4 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } C = AB = A_{2 \times 1} B_{1 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 & 1 \cdot 1 \\ -1 \cdot 2 & -1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

З правила множення матриць випливає, що завжди можна перемножити дві квадратні матриці одного порядку; в результаті дістанемо матрицю того самого порядку. Зокрема, квадратну матрицю можна помножити саму на себе, тобто піднести до квадрата; прямокутну неквадратну матрицю піднести до квадрата не можна.

Операція множення матриць не комутативна, тобто при множенні матриць не можна міняти місцями множники:

$$AB \neq BA.$$

Наприклад (перевірте):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -5 & 17 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & -9 & 35 \\ 15 & -10 & 20 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що у двох вище наведених прикладах, якщо переставити місцями матриці, то операція множення нездійсненна через їхню неузгодженість.

Для визначених вище дій над матрицями виконуються такі властивості (за умови, що вказані операції мають зміст):

1. $(AB)C = A(BC)$;
2. $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$;
3. $(A + B)C = AC + BC$;
4. $C(A + B) = CA + CB$;
5. $A \cdot O = O \cdot A = O$;
6. $AE = EA = A$;
7. $\det(AB) = \det A \times \det B$.

Обернена матриця

Нехай A — квадратна матриця. Матриця A^{-1} називається оберненою до матриці A , якщо виконується умова

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Квадратна матриця A називається виродженою, якщо $\det A = 0$, і невинродженою, якщо $\det A \neq 0$.

Теорема 2.1 (про існування оберненої матриці).

Для існування оберненої матриці A^{-1} необхідно і достатньо, щоб матриця A була невинродженою. ★

ДОБЕДЕННЯ. Необхідність. Нехай обернена матриця A^{-1} існує, тоді $A \cdot A^{-1} = E$. Застосовуючи правило знаходження визначника добутку двох матриць, маємо $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$, тому $\det A \neq 0$.

Достатність. Нехай $\det A \neq 0$, тоді матриця A має обернену матрицю A^{-1} , причому

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

де A_{ij} — алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} визначника матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (2.2) \quad \square$$

Дійсно, добутки AA^{-1} і $A^{-1}A$ матриць (2.1) і (2.2) дорівнюють матриці, у якій всі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці (за теоремою 1.1), а всі недіагональні елементи — нулю (за теоремою 1.2). Отже, $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$. Покажемо, що A^{-1} — єдина обернена матриця. Нехай A'' — ще одна обернена матриця, тоді

$$A^{-1} = A^{-1}E = A^{-1}(AA'') = (A^{-1}A)A'' = EA'' = A''.$$

Обернену матрицю також обчислюють за допомогою елементарних перетворень.

Приклад 2.4. Знайти матрицю обернену до даної $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. ☺

Розв'язання. $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -10 - 12 - 1 + 5 + 4 + 6 = -8$.

Матриця A не вироджена. Запишемо A^T :

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -4 & -5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Знаходимо } A_{ij}: A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3; A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = -7; A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1; A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5; A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2; A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -6. \text{ Будуємо } A^*:$$

$$A^* = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{vmatrix}. \text{ Отже, } A^{-1} = \frac{1}{(-8)} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{vmatrix}. \blacksquare$$

Ранг матриці

Нехай задано матрицю $A_{m \times n} = A$. Виділимо в матриці A будь-які k рядків і стільки ж стовпців, де A — число, не більше чисел m і n , тобто $k \leq \min(m, n)$.

Визначник порядку k , складений з елементів, що стоять на перетині виділених рядків і стовпців, називається **мінором k -го порядку** матриці A .

Означення 2.6. Рангом $r(A)$ матриці A називається найбільший з порядків її мінорів, відмінних від нуля. ✓

Безпосередньо з означення випливає, що:

- 1) ранг існує для будь-якої матриці $A_{m \times n}$, причому $0 \leq r(A) \leq \min(m, n)$;
- 2) $r(A) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $A = O$;
- 3) для квадратної матриці n -го порядку ранг дорівнює n тоді і тільки тоді, коли матриця не вироджена.

Ранг матриці можна знайти так. Якщо всі мінори першого порядку (елементи матриці) дорівнюють нулю, то $r = 0$. Якщо хоча б один з мінорів першого порядку відмінний від нуля, а всі мінори другого порядку дорівнюють нулю, то $r = 1$. У випадку, коли є мінор другого порядку, відмінний від нуля, досліджуємо мінори третього порядку. Так продовжуємо доти, поки не станеться одне з двох: або всі мінори порядку k дорівнюють нулю, або мінорів порядку k не існує, тоді $r = k - 1$.

Приклад 2.5. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Оскільки на перетині першого рядка і першого стовпця стоїть елемент матриці $a_{11} = 2$, то ранг матриці A не менший за 1.

З елементів, що стоять на перетині перших двох рядків і перших двох стовпців, утворимо матрицю $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, визначник якої $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 + 4 = 8$. Отже ранг даної матриці принаймні дорівнює двом.

Мінором наступного (третього) порядку буде визначник матриці A , який відмінний від нуля $\Delta_3 = 5$. Отже, ранг даної матриці дорівнює трьом. ■

Цей спосіб відшукування рангу матриці має назву метод „**об'єдних мінорів**“ (**об'єднувальних мінорів**).

Крім визначення рангу матриці шляхом обчислення мінорів, є ще один метод, який ґрунтується на використанні таких елементарних перетворень матриці, що не змінюють її рангу:

- 1) зміна місць двох рядків (стовпців);
- 2) множення рядка (стовпця) на довільне відмінне від нуля число;
- 3) додавання до одного рядка (стовпця) другого рядка (стовпця), помноженого на деяке відмінне від нуля, число.

Для знаходження рангу матриці розміру $m \times n$ за допомогою елементарних перетворень зводимо матрицю до вигляду, в якому всі елементи $a_{ij} = 0$, коли $i \neq j$. Ранг початкової матриці дорівнюватиме числу елементів $a_{ij} = 1$, коли $i = j$, утвореної матриці, тобто кількості одиниць на головній діагоналі.

Приклад 2.6. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Додамо перший рядок до другого, а другий рядок до четвертого, потім другий рядок множимо на 3 і додаємо до третього рядку. Маємо у першому стовпці один елемент 1, а останні 0.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & -11 & 5 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & -11 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Четвертий рядок ділимо на (-3) . Тепер цей рядок дає можливість зробити нульовими елементи другого стовпця крім останнього шляхом послідовного множення його на (-2) , 2 та 11 і додавання до першого, другого та третього рядка. Маємо у перших двох стовпцях два елементи одиничні, а останні – нульові. Перетворюємо третій стовпець наступним чином: перший стовпець множимо на 4 і додаємо до третього стовпця; другий стовпець поділимо на (-3) ; третій рядок поділимо на 5; другий рядок множимо на -1 і додаємо до третього рядка. Таким чином, після зміни місць другого та четвертого рядків, маємо останню матрицю.

Тут елементи $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1$. Тобто, $\text{Rang}(A) = 3$. ■

ТЕМА 3. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Основні поняття з теорії систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Система m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, \dots, x_n$, має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2, \\ \dots \dots \dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n = b_m. \end{cases} \quad (3.1)$$

Величини a_{ij} називаються **коефіцієнтами**, x_j — **невідомими**. Індеси біля коефіцієнта означають номер рівняння та номер невідомого. Величини $b_1, \dots, b_m$ називаються **вільними членами**.

Система рівнянь (3.1) називається **однорідною**, якщо всі $b_i = 0$ ($i = \overline{1, m}$), і **неоднорідна**, якщо хоча б одне з $b_i \neq 0$.

Упорядковану множину чисел $k_1, k_2, \dots, k_n$ називають **розв'язком** системи (3.1), якщо при їх підстановці у (3.1) замість невідомих $x_1, x_2, \dots, x_n$ усі рівняння системи (3.1) перетворюються у тотожності. Система рівнянь **сукупна**, якщо вона має хоча б один розв'язок, і **несукупна**, якщо вона не має жодного розв'язку.

Сумісну систему лінійних рівнянь називають **визначеною**, якщо має єдиний розв'язок.

Сумісна система лінійних рівнянь є **невизначеною**, якщо вона має більше ніж один розв'язок.

Система однорідних лінійних рівнянь завжди має нульовий розв'язок:

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0.$$

Якщо система однорідних рівнянь має ненульовий розв'язок $k_1, k_2, \dots, k_n$, тобто хоча б одне з чисел $k_i \neq 0$, то така система має і незліченну множину розв'язків вигляду $\alpha k_1, \alpha k_2, \dots, \alpha k_n$, де $\alpha \in \mathbb{R}$.

Метод виключення невідомих (метод Жордана - Гауса)

Одним з найпоширеніших методів розв'язування систем лінійних рівнянь є метод послідовного виключення невідомих, або метод Гауса. Цей метод запропонований К. Гаусом і ґрунтується на елементарних перетвореннях системи рівнянь. Нехай маємо систему (3.1), яка містить m рівнянь і n невідомих. Очевидно, серед коефіцієнтів a_{i1} є хоча б один відмінний від нуля. Якщо ж $a_{11} = 0$, то першим в системі (3.1) запишемо те рівняння, в якому коефіцієнт при x_1 відмінний від нуля. Позначимо цей коефіцієнт через a'_{11} . Перетворимо систему (3.1), виключаючи x_1 в усіх рівняннях, крім першого. Для цього помножимо перше рівняння на $-\frac{a_{21}}{a'_{11}}$ і додамо до другого, потім помножимо перше рівняння на $-\frac{a_{31}}{a'_{11}}$ і додамо до третього і т. д. При цьому може статись так, що друге невідоме x_2 також не входить в усі рівняння з номером $i > 1$. Нехай x_k — невідоме з найменшим номером, яке входить в будь-яке рівняння, не рахуючи першого. Дістанемо систему

$$\begin{cases} a'_{11} \cdot x_1 + a'_{12} \cdot x_2 + \dots + a'_{1n} \cdot x_n = b'_1, \\ a'_{2k} \cdot x_k + \dots + a'_{2n} \cdot x_n = b'_2, \\ \dots \dots \dots \\ a'_{mk} \cdot x_k + \dots + a'_{mn} \cdot x_n = b'_m, \end{cases} \quad k > 1, a'_{11} \neq 0. \quad (3.2)$$

Застосовуючи до всіх рівнянь, крім першого, таку саму процедуру і виконавши ряд елементарних перетворень, дістанемо систему

$$\begin{cases} a''_{11} \cdot x_1 + a''_{12} \cdot x_2 + \dots + a''_{1n} \cdot x_n = b''_1, \\ a''_{2k} \cdot x_k + \dots + a''_{2n} \cdot x_n = b''_2, \\ a''_{3l} \cdot x_l + \dots + a''_{3n} \cdot x_n = b''_3, \\ \dots \dots \dots \\ a''_{ml} \cdot x_l + \dots + a''_{mn} \cdot x_n = b''_m, \end{cases} \quad k > 1, a''_{11} \neq 0. \quad (3.3)$$

Якщо продовжити цей процес, то матимемо систему

$$\begin{cases} \bar{a}_{11} \cdot x_1 + \bar{a}_{12} \cdot x_2 + \dots + \bar{a}_{1n} \cdot x_n = \bar{b}_1, \\ \bar{a}_{2k} \cdot x_k + \dots + \bar{a}_{2n} \cdot x_n = \bar{b}_2, \\ \bar{a}_{3l} \cdot x_l + \dots + \bar{a}_{3n} \cdot x_n = \bar{b}_3, \\ \dots \dots \dots \\ \bar{a}_{rs} \cdot x_s + \dots + \bar{a}_{rn} \cdot x_n = \bar{b}_r, \\ 0 = \bar{b}_{r+1}, \\ \dots \\ 0 = \bar{b}_m. \end{cases} \quad (3.4)$$

Таку систему рівнянь називають східчастою або трапецієподібною. Дослідимо цю систему.

1. Якщо система містить рівняння виду $0 = b_i$ і $b_i \neq 0$, то вона очевидно несумісна.
2. Нехай система (3.4) не містить рівнянь виду $0 = b_i$ ($b_i \neq 0$). Назвемо невідомі $x_1, x_k, x_l, \dots, x_s$, з яких починаються перше, друге, ..., r -е рівняння, **основними**, а всі інші, якщо вони є, **вільними**. Основних невідомих за означенням є r . Надаючи вільним невідомим довільні значення і підставляючи ці значення в рівняння системи, з r -го рівняння знайдемо x_s . Підставляючи це значення в перші $r - 1$ рівнянь і, піднімаючись вгору по системі, знайдемо всі основні невідомі. Оскільки вільні невідомі можуть набувати будь-яких значень, система має безліч розв'язків.
3. Нехай в системі (3.4) $r = n$. Тоді вільних невідомих немає, тобто всі невідомі основні і система (3.4) має так званий трикутний вигляд:

$$\begin{cases} \bar{a}_{11} \cdot x_1 + \bar{a}_{12} \cdot x_2 + \dots + \bar{a}_{1n} \cdot x_n = \bar{b}_1, \\ \bar{a}_{22} \cdot x_2 + \dots + \bar{a}_{2n} \cdot x_n = \bar{b}_2, \\ \dots \dots \dots \\ \bar{a}_{nn} x_n = \bar{b}_n. \end{cases} \quad (3.5)$$

З останнього рівняння системи знайдемо x_n і, піднімаючись по системі вгору, знайдемо всі інші, невідомі. Отже, в цьому випадку система має єдиний розв'язок.

Зауваження 3.1. При розв'язуванні системи лінійних рівнянь методом Гауса зручніше приводити до трикутного чи трапецієподібного вигляду не саму систему рівнянь, а розширену матрицю цієї системи, тобто матрицю, утворену приєднанням до матриці її коефіцієнтів стовпця вільних членів. Виконуючи над рядками розширеної матриці елементарні перетворення, приходимо до розв'язку системи. □

Приклад 3.1. Розв'язати систему рівнянь методом Гауса:
$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ 2x + y + 2z = 1, \\ x + y + 3z = 2, \\ x + 3z = 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Виконаємо елементарні перетворення над рядками розширеної матриці даної системи:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{array} \right) & \begin{array}{l} \leftarrow \\ \cdot(-2) \\ \cdot(-1) \\ \cdot(-1) \end{array} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \\ \cdot(-1) \end{array} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \\ \cdot(-1) \end{array} = \\ = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

З останньої системи отримуємо, що $2z = 1$, тобто $z = \frac{1}{2}$. Крім того, $-y = -1$. Звідси, $y = 1$. Нарешті $x = 1 - y - z = -\frac{1}{2}$. ■

Метод Крамера

Розглянемо систему (3.1), коли $m = n$. Запишемо для неї визначники:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix},$$

де Δ_n — головний визначник системи; $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \dots, \Delta_{x_n}$ — допоміжні визначники, які утворені заміною i -го стовпця у головному визначнику стовпцем вільних членів системи (3.1). Якщо $\Delta_n \neq 0$, то за формулами Крамера:

$$x_i = \frac{\Delta_{x_i}}{\Delta_n}. \quad (3.6)$$

Приклад 3.2. Розв'язати систему:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -8, \\ 2x_2 + 7x_3 = 17. \end{cases}$$

Розв'язання. Обчислимо визначники:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 79; \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -8 & 4 & -5 \\ 17 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 395; \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & -8 & -5 \\ 0 & 17 & 7 \end{vmatrix} = -158;$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -8 \\ 0 & 2 & 17 \end{vmatrix} = 237.$$

За формулами (3.6) одержуємо: $x_1 = 395/79 = 5$; $x_2 = -158/79 = -2$; $x_3 = 237/79 = 3$. ■

Матричний метод

Для запису системи m лінійних рівнянь з n невідомими використовується так звана матрична форма запису. Записавши коефіцієнти при невідомих у вигляді матриці A , невідомі та вільні члени у вигляді матриць X і B , систему (3.1) можна записати у вигляді $A \cdot X = B$. Тобто:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Побудуємо нову матрицю приєднанням матриці B до матриці A . Цю матрицю позначимо $\overline{A}$. Вона має назву *розширеної* матриці.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Теорема Кронекера-Капеллі

Повну відповідь на питання існування розв'язку системи m лінійних рівнянь з n невідомими дає теорема Кронекера-Капеллі, яку наведемо без доведення.

Теорема 3.1.

Щоб система рівнянь (3.7) мала розв'язок, необхідно і досить, щоб ранг розширеної матриці дорівнював рангу основної матриці. ★

Якщо ранги основної і розширеної матриці збігаються з числом невідомих, то система має єдиний розв'язок.

Якщо ранг основної і розширеної матриць менший від числа невідомих, то система має більше ніж один розв'язок, тобто нескінченну множину.

В останньому випадку кількість „вільних“ змінних, через які виражається решта невідомих, які мають назву „базові“ змінні, дорівнює $n - \text{rang}(A)$. Припустимо, що $\text{rang}(A) = \text{rang}(\overline{A}) = n = m$. Тоді матриця A є невинороженою і для неї існує обернена матриця A^{-1} .

Відповідно матричне рівняння $A \cdot X = B$ розв'язується так: $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$.

Оскільки $A^{-1} \cdot A = E$, то $X = A^{-1} \cdot B$. Тобто для розв'язання системи n лінійних рівнянь з n невідомими, коли матриця A не вироджена, досить знайти обернену матрицю A^{-1} і знайти добуток двох матриць A^{-1} і B . Це буде матриця - стовпець. Відповідні елементи матриці - стовпця X будуть дорівнювати елементам матриці - стовпця добутку. Це і буде розв'язком системи.

Приклад 3.3. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x + 2y = 3, \\ -x + y + 2z = 5, \\ 3x + z = -2. \end{cases}$$

Розв'язання. Тоді $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{4}{15} \\ \frac{7}{15} & \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

Тоді за формулою $X = A^{-1} \cdot B$ отримуємо

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{4}{15} \\ \frac{7}{15} & \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, $x = -1$, $y = 2$, $z = 1$. ■

ТЕМА 4. ВЕКТОРИ ТА ДІЇ НАД НИМИ

Векторні та скалярні величини

Багато фізичних величин повністю визначаються своїм числовим значенням (об'єм, маса, густина, температура тощо); вони називаються **скалярними**. Але є й такі величини, які крім числового значення мають ще й напрям (швидкість, сила, напруженість магнітного поля тощо). Такі величини називаються **векторними**.

Означення 4.1. Будь-яка упорядкована пара точок A і B простору визначає напрямлений відрізок, або вектор, тобто відрізок, що має певну довжину і певний напрям. ✓

Термін „вектор“ (від лат. vector - переносник) ввів у 1848 р. Гамільтон. Першу точку A називають **початком вектора**, а другу B — **кінцем вектора**. Напрямом вектора вважають напрям від його початку до кінця. Вектор, початок якого знаходиться в точці A , а кінець - в точці B , позначається символом $\overrightarrow{AB}$ або $\vec{a}$. Напрямом вектора на рисунку показують стрілкою. Відстань між початком вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ і його кінцем називається **довжиною (або модулем) вектора** і позначається $|a|$ або $|AB|$. Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається **одиничним**. Одиничний вектор, напрям якого збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, називається **ортом вектора** $\vec{a}$. Вектор, початок якого збігається з кінцем, називається **нульовим** і позначається через $\vec{0}$; напрям нульового вектора невизначений, а його довжина дорівнює нулю.

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються **колінеарними**, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих. Колінеарні вектори можуть бути напрямлені однаково або протилежно. Ве-

ктори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються *рівними*, якщо вони колінеарні, однаково напрямлені і мають рівні довжини.

Три вектори називаються *копланарними*, якщо вони лежать в одній площині або в паралельних площинах.

Лінійні дії з векторами

1. **Додавання векторів.** Сума $\vec{a} + \vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ за означенням є вектор $\vec{c}$, напрямлений з початку вектора $\vec{a}$ в кінець вектора $\vec{b}$ за умови, що початок вектора $\vec{b}$ збігається з кінцем вектора $\vec{a}$ (рис. 4.1). Це правило додавання вектора називають правилом трикутника.

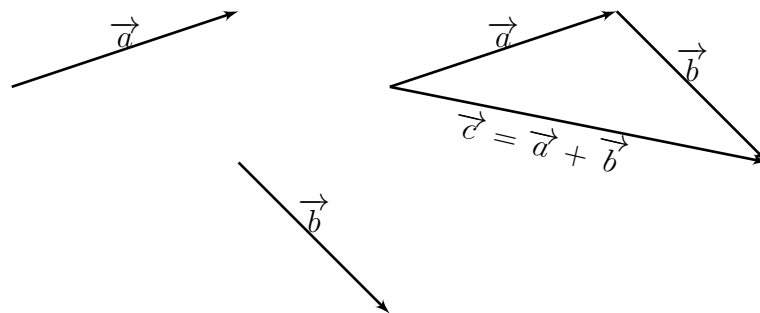


Рисунок 4.1 – Правило трикутника для суми двох векторів

Суму двох векторів можна побудувати також за правилом паралелограма (рис. 4.2).

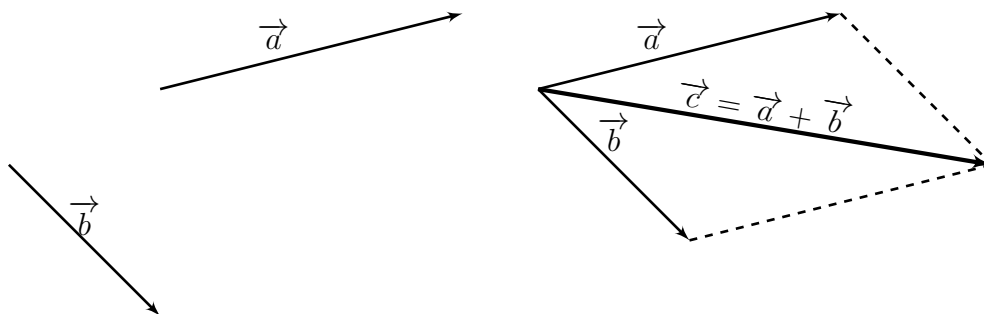


Рисунок 4.2 – Правило паралелограма для суми двох векторів

2. **Віднімання векторів** визначається як дія, обернена додаванню. *Різницею* $\vec{a} - \vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який, будучи доданий до вектора $\vec{b}$, дає вектор $\vec{a}$ (рис. 4.3). Два вектори називаються *протилежними*, якщо вони колінеарні, довжини їх однакові, а напрями протилежні. Вектор, протилежний вектору $\vec{a}$, позначається через $-\vec{a}$.
3. **Множення вектора на число.** Нехай задані вектор $\vec{a} \neq 0$, число $\lambda \neq 0$. **Добутком** $\lambda \vec{a}$ називається вектор, довжина якого дорівнює $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$, а напрям збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, якщо $\lambda > 0$, і протилежний йому, якщо $\lambda < 0$. Якщо $\lambda = 0$ або $\vec{a} = 0$, то $\vec{a} = 0$. Геометричний зміст операції множення вектора на число такий: множення вектора $\vec{a}$ на число λ можна розуміти як "розтяг" вектора $\vec{a}$ у λ разів при $\lambda > 1$ і "стиск" при $0 < \lambda < 1$. При чому при $\lambda < 0$ відбувається ще й зміна напрямку.

Лінійні операції над векторами мають такі властивості:

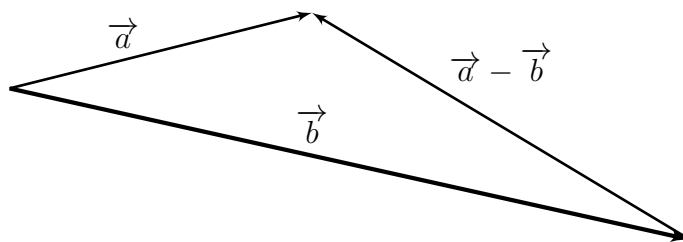


Рисунок 4.3 – Різниця двох векторів

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;
3. $\lambda(\mu \vec{a}) = (\lambda\mu) \vec{a}$;
4. $(\lambda + \mu) \vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$;
5. $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$.

Розклад вектора за базисом

Застосовуючи лінійні операції над векторами, можна знаходити суми добутків чисел α_i , де $i = 1, 2, \dots$, на вектори: $\vec{a}_i : \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n$. Вирази такого виду називаються **лінійними комбінаціями векторів**, а числа α_i , що входять в лінійну комбінацію, — її **коефіцієнти**. **Базисом на прямій** називається довільний ненульовий вектор на цій прямій. **Базисом на площині** називається довільна упорядкована пара неколінеарних векторів, а **базисом у просторі** — довільна упорядкована трійка некомпланарних векторів. Вектори, що складають базис, називаються **базисними**. **Розкласти вектор за базисом** означає зобразити його у вигляді лінійної комбінації базисних векторів.

Теорема 4.1.

Кожен вектор, паралельний якій-небудь прямій, можна розкласти за базисом на цій прямій. Кожен вектор, паралельний якій-небудь площині, можна розкласти за базисом на цій площині. Кожен вектор можна розкласти за базисом у просторі. Координати вектора у кожному випадку визначаються однозначно. ★

Декартова система координат

Розглянемо в просторі точку O і деякий базис, що задається векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ (рис. 4.4). Сукупність точки і базису називається **декартовою системою координат в просторі** на честь французького математика Р. Декарта. Точка O називається **початком координат**, а осі, які проходять через початок координат в напрямі базисних векторів, називаються **осьми координат**. Перша з них проходить в напрямі вектора $\vec{e}_1$ і називається **віссю абсцис**, друга вісь, яка проходить у напрямі вектора $\vec{e}_2$, — **віссю ординат** і третя — в напрямі вектора $\vec{e}_3$ — **віссю аплікат**. Площини, які проходять через осі координат, називаються **координатними площинами**. Кожній точці простору можна поставити вектор $\vec{OM}$, початок якого збігається з початком координат O , а кінець — з точкою M . Такий вектор називається **радіусом-вектором** точки M відносно точки O .

Згідно з теоремою 4.1 існують такі дійсні числа x_1, x_2, x_3 , що $\vec{OM} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$. Координати x_1, x_2, x_3 радіуса-вектора точки M відносно початку координат називають **декартовими координатами** точки M в даній системі координат і скорочено пишуть: $M(x_1; x_2; x_3)$.

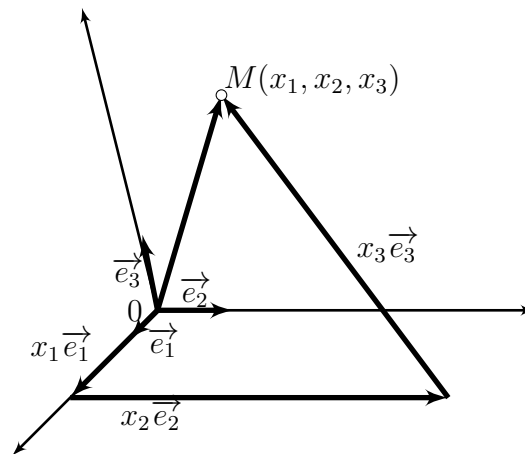


Рисунок 4.4 – Декартова система координат

Координата x_1 називається **абсцисою** точки М, координата x_2 — **ординатою** і координата x_3 — **аплікатою** точки М. Аналогічно визначаються декартові координати точки на площині і на прямій.

Прямокутна система координат

Очевидно, що декартових систем координат можна задати скільки завгодно. Серед них широко використовується прямокутна декартова система координат. Щоб визначити цю систему, введемо такі поняття.

Упорядкована трійка одиничних попарно ортогональних векторів називається **ортонормованим базисом**. Позначають ортонормований базис через $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, де $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$, $(\vec{i}, \vec{j}) = (\vec{i}, \vec{k}) = (\vec{j}, \vec{k}) = \frac{\pi}{2}$.

Упорядкована трійка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ некомпланарних векторів називається **правою** (рис. 4.5, а), якщо з кінця третього вектора с найкоротший поворот від першого вектора $\vec{a}$ до другого вектора $\vec{b}$ видно проти годинникової стрілки; в протилежному випадку трійка векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називається **лівою** (рис. 4.5,б).

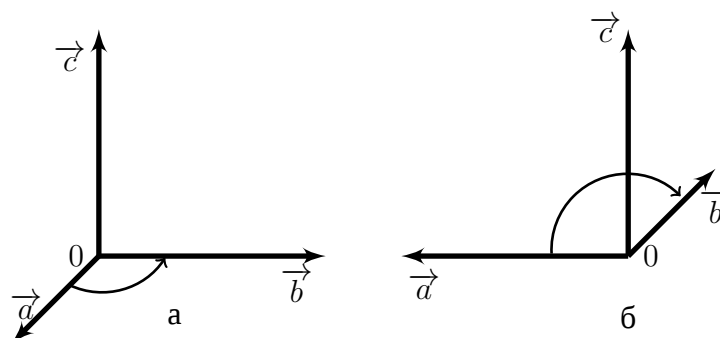


Рисунок 4.5 – Права (а) і ліва (б) трійка векторів

Прямокутною декартовою системою координат (або просто прямокутною системою координат) називається декартова система координат, базис якої ортонормований. Прямокутна система координат називається **правою (лівою)**, якщо її ортонормований базис утворює праву (ліву) трійку векторів. Надалі користуватимемося правою системою координат, яка визначається правим ортонормованим базисом: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Прямокутну систему координат позначають

(рис. 4.6) через $Oxyz$ (Ox — вісь абсцис, Oy — вісь ординат, Oz — вісь аплікат), а координатні площини — через Oxy , Oyz , Ozx . Вони поділяють простір на вісім октантів. Нехай задана прямокутна система координат $Oxyz$ і довільна точка M (рис. 4.6).

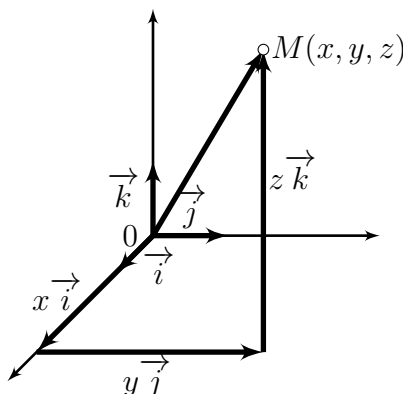


Рисунок 4.6 – Прямокутна декартова система координат

Радіус-вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ цієї точки записують у вигляді $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, або $\vec{r} = (x; y; z)$. Координати x, y, z радіуса-вектора точки M називаються координатами точки M .

Координати вектора

Для того, щоб операції над векторами звести до операцій над числами, розглядатимемо вектори в системі координат.

1. **Координати вектора.** Нехай в прямокутній системі координат $Oxyz$ задано вектор $\vec{a}$. Це означає, що в ортонормованому базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, який задає обрану систему координат, вектор $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, де числа a_x, a_y, a_z — координати вектора $\vec{a}$ в цьому базисі.

Отже, координати вектора в системі координат $Oxyz$ — це його проекції на осі координат.

2. **Довжина вектора.** Вектор $\vec{a}$ є діагоналлю прямокутного паралелепіпеда з вимірами $|a_x|, |a_y|, |a_z|$, тому довжина цього вектора дорівнює

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Якщо початок вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ міститься в точці $A(x_1, y_1, z_1)$, а кінець — в точці $B(x_2, y_2, z_2)$, то $a_x = x_2 - x_1, a_y = y_2 - y_1, a_z = z_2 - z_1$, тобто

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

Тоді знаходимо довжину вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Цією формулою користуються для знаходження відстані між точками A і B .

3. **Напрямні косинуси вектора.** Напрям довільного вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ визначається кутами α, β, γ , які утворює вектор $\vec{a}$ з осями координат:

$$\alpha = (\vec{a}, \vec{i}), \beta = (\vec{a}, \vec{j}), \gamma = (\vec{a}, \vec{k}), 0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq \pi.$$

Косинуси цих кутів називаються **напрямними косинусами**. Формули для напрямних косинусів наступні:

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

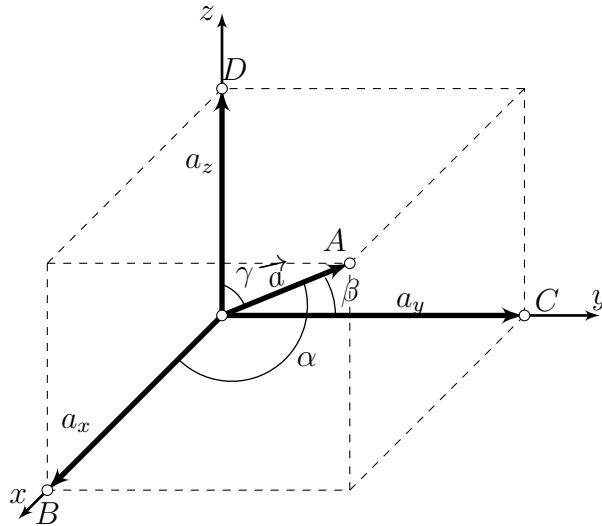


Рисунок 4.7 – Напрямні косинуси вектора

Лінійні дії з векторами. Рівність і колінеарність векторів

1. Дії з векторами.

Якщо відомі координати векторів, то лінійними діями з векторами відповідають відповідні арифметичні дії над їхніми координатами.

Нехай задано вектори $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ і дійсне число λ , тоді $\lambda \vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$, $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$.

2. Рівність векторів.

Нехай вектори $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ та $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ рівні, тобто мають однакові довжини і напрям, тоді

$$a_x = b_x, \quad a_y = b_y, \quad a_z = b_z, \quad (4.1)$$

і навпаки, якщо мають місце формули (4.1), то $\vec{a} = \vec{b}$.

3. Колінеарність векторів.

Необхідною і достатньою умовою того, що вектори $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ та $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ колінеарні, є пропорційність їхніх проекцій:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \quad (4.2)$$

Поділ відрізка в даному відношенні

Нехай задано відрізок AB точками $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$. Знайдемо на відрізку таку точку $M(x, y, z)$, яка ділить цей відрізок у відношенні λ , тобто $|\vec{AM}| : |\vec{MB}| = \lambda$. Введемо радіуси-вектори $\vec{r}_1 = \vec{OA}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{r} = \vec{OM} = (x, y, z)$, $\vec{r}_2 = \vec{OB} = (x_2, y_2, z_2)$ (рис. 4.8). Оскільки $\vec{AM} = \vec{r} - \vec{r}_1$, $\vec{MB} = \vec{r}_2 - \vec{r}$ і за умовою $\vec{AM} = \lambda \vec{MB}$, то $\vec{r} - \vec{r}_1 = \lambda(\vec{r}_2 - \vec{r})$, звідки $\vec{r} = \frac{\vec{r}_1 + \lambda \vec{r}_2}{1 + \lambda}$. Звідси отримуємо:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \quad (4.3)$$

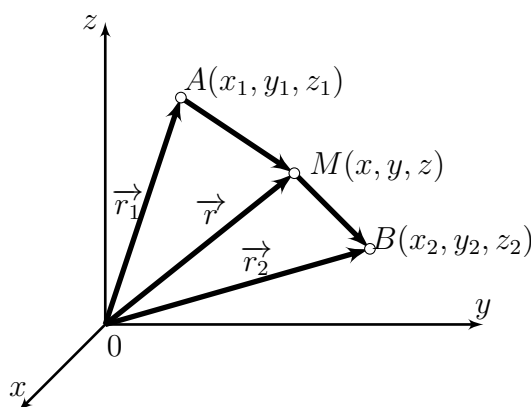


Рисунок 4.8 – Поділ відрізка

Зокрема координати точки, яка ділить відрізок AB навпіл, знаходять за формулами

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Проекція вектора на вісь

Віссю називається напрямлена пряма. Напрямок прямої позначають стрілкою. Заданий на осі напрям вважають додатним, а протилежний йому — від’ємним.

Означення 4.2. Проекцією точки A на вісь u називається основа A_1 , перпендикуляра AA_1 опущеного з точки A на дану вісь. Таким чином, проекція A_1 є точкою перетину осі u з площиною, яка проходить через точку A , перпендикулярно до осі u . ✓

Нехай у просторі задано вісь u і вектор $\overrightarrow{AB}$. Позначимо через A_1 та B_1 проекції на вісь u відповідно початку A і кінця B вектора $\overrightarrow{AB}$ і розглянемо вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$.

Означення 4.3. Проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь u називають додатне число $|\overrightarrow{A_1B_1}|$, якщо вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ і вісь u однаково напрямлені, і від’ємне число $-|\overrightarrow{A_1B_1}|$, якщо вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ і вісь u протилежно напрямлені. Проекцію вектора $\vec{a}$ на вісь позначають так: $\text{пр}_u \vec{a}$. Якщо $\vec{a} = \vec{0}$, то вважають, що $\text{пр}_u \vec{a} = 0$. ✓

Означення 4.4. Кут φ між вектором $\vec{a}$ і віссю u (або між двома векторами) називається менший з кутів, на який потрібно повернути один вектор або вісь, щоб він збігався за напрямом з другим вектором або віссю: $\varphi = (\vec{a}, u) = (\vec{a}, \vec{u}^0)$, $0 \leq \varphi \leq \pi$. ✓

У деяких випадках ми будемо вказувати, від якого вектора і в якому напрямі кут відраховується. Справедливі такі властивості проєкцій.

1. Проекція вектора $\vec{a}$ на вісь u дорівнює добутку довжини вектора $\vec{a}$ на косинус кута φ між вектором і віссю, тобто

$$\text{пр}_u \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi. \quad (4.4)$$

ДОВЕДЕННЯ. Якщо $\varphi = (\vec{a}, u) < \frac{\pi}{2}$, то $\text{пр}_u \vec{a} = |\vec{a}_1| = |\vec{a}| \cos \varphi$. Якщо $\varphi > \frac{\pi}{2}$, то $\text{пр}_u \vec{a} = -|\vec{a}_1| = -|\vec{a}| \cos(\pi - \varphi) = |\vec{a}| \cos \varphi$. Якщо $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то формула (4.4) справедлива, оскільки $\text{пр}_u \vec{a} = 0$. $\square$

2. Проекція суми кількох векторів на дану вісь дорівнює сумі їхніх проекцій на цю вісь, тобто

$$\text{пр}_u(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \text{пр}_u \vec{a} + \text{пр}_u \vec{b} + \text{пр}_u \vec{c}. \quad (4.5)$$

Нехай вектор $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. Маємо

$$\text{пр}_u \vec{d} = |\vec{d}_1| = |\vec{a}_1| + |\vec{b}_1| + |\vec{c}_1| = \text{пр}_u \vec{a} + \text{пр}_u \vec{b} + \text{пр}_u \vec{c}.$$

3. При множенні вектора $\vec{a}$ на число λ його проекція також помножиться на це число:

$$\text{пр}_u(\lambda \vec{a}) = \lambda \text{пр}_u \vec{a}. \quad (4.6)$$

ДОВЕДЕННЯ. Нехай $\varphi = (\vec{a}, u)$ і $\varphi' = (\lambda \vec{a}, u)$. Якщо $\lambda > 0$, то за формулою (4.4)

$$\text{пр}_u(\lambda \vec{a}) = |\lambda \vec{a}| \cos \varphi' = \lambda |\vec{a}| \cos \varphi = \lambda \text{пр}_u \vec{a};$$

якщо $\lambda < 0$, то

$$\text{пр}_u(\lambda \vec{a}) = |\lambda \vec{a}| \cos \varphi' = -\lambda |\vec{a}| \cos(\pi - \varphi) = \lambda \text{пр}_u \vec{a}.$$

Таким чином, основні властивості проекції вектора на вісь полягають в тому, що лінійні операції над векторами приводять до відповідних лінійних операцій над проекціями цих векторів.

ТЕМА 5. СИСТЕМИ КООРДИНАТ

Полярна система координат

Декартова система координат не єдиний спосіб визначати за допомогою чисел місце знаходження точки на площині. Для цієї мети використовують багато інших координатних систем.

Найважливішою після прямокутної системи координат є полярна система координат. Вона задається точкою O , яка називається **полюсом**, і променем Or , який виходить з полюса і називається **полярною віссю**. Задаються також одиниці масштабу: лінійна — для вимірювання довжин відрізків і кутова — для вимірювання кутів.

Розглянемо полярну систему координат і візьмемо на площині довільну точку M (рис. 5.1). Нехай $\rho = |\vec{OM}|$ — відстань від точки O до точки M і $\varphi = (\vec{Or}, \vec{OM})$ — кут, на який треба повернути полярну вісь проти годинникової стрілки, щоб сумістити її з вектором $\vec{OM}$.

Полярними координатами точки M називаються числа ρ і φ . При цьому число ρ вважається першою координатою і називається **полярним радіусом**, а число φ — другою координатою і називається **полярним кутом**. Точка M з полярними координатами ρ і φ позначається так: $M(\rho, \varphi)$. Очевидно, полярний радіус може набувати довільних невід'ємних значень: $0 \leq \rho < +\infty$ полярний кут вважатимемо таким, що змінюється в межах $0 \leq \varphi < 2\pi$. Іноді розглядають кути

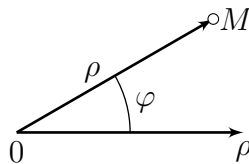


Рисунок 5.1 – Полярна система координат

φ , більші від 2π , а також від'ємні кути, тобто такі, що відкладаються від полярної осі за годинниковою стрілкою.

Виразимо декартові координати точки M через полярні. Вважатимемо, що початок прямокутної системи збігається з полюсом, а вісь Ox — з полярною віссю $O\rho$. Якщо точка M (рис. 5.2) має декартові координати x і y і полярні ρ і φ , то

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad (5.1)$$

звідки

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x}. \quad (5.2)$$

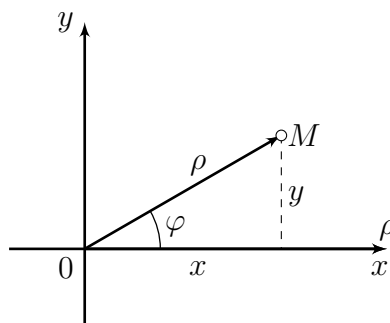


Рисунок 5.2 – Зв'язок між декартовими і полярними координатами

Зауважимо, що друга з формул (5.2) дає два значення кута φ , оскільки він змінюється від 0 до 2π . З цих двох значень кута треба взяти те, для якого задовольняються формули (5.1). Формули (5.1) називають **формулами переходу від полярних координат до декартових**, а формули (5.2) — **формулами переходу від декартових координат до полярних**.

Приклад 5.1. Побудувати точки за полярними координатами: $A(3; \frac{\pi}{4})$, $B(2; \frac{3\pi}{2})$, $C(4; \frac{5\pi}{6})$. ☺

Розв'язання. Дані точки показано на (рис. 53). ■

Перетворення прямокутних координат на площині

При розв'язуванні задач іноді треба переходити від однієї прямокутної системи до іншої. Виконується такий перехід за допомогою формул перетворення координат.

Розглянемо перетворення координат на площині.

1. **Паралельне перенесення осей.** Візьмемо дві прямокутні декартові системи координат Oxy і $O_1X_1Y_1$ з різними початками координат і однаково напрямленими осями.

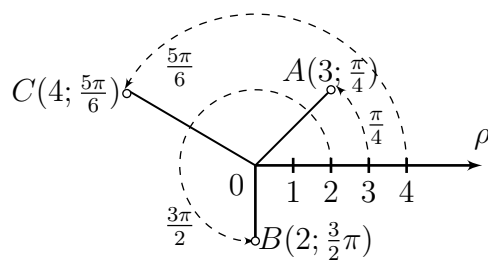


Рисунок 5.3 – Побудова точок за полярними координатами

Нехай точки O_1 і M в системі Oxy (рис. 5.4) мають відповідно координати $(a; b)$ і $(x; y)$, тоді координати точки M в системі O_1XY задовольняють рівності

$$X = x - a, \quad Y = y - b. \quad (5.3)$$

Формули (5.3) називаються формулами перетворення координат при паралельному перенесенні осей. Вони виражають координати точок в системі O_1XY через координати точок в системі Oxy .

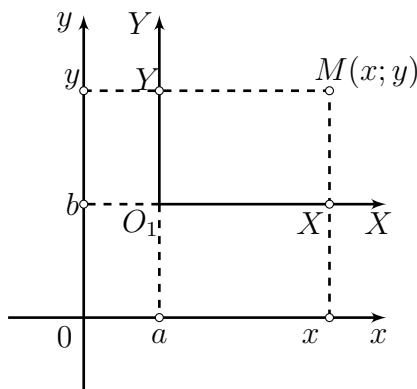


Рисунок 5.4 – Паралельне перенесення

2. **Поворот осей координат.** Нехай на площині задані дві прямокутні системи координат Oxy і OXY , що мають спільний початок координат, причому система OXY утворена з системи Oxy поворотом осей на додатний кут α (рис. 5.5).

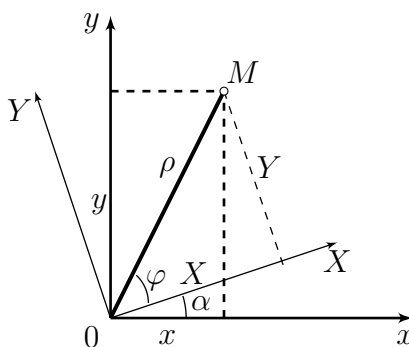


Рисунок 5.5 – Поворот осей координат

Знайдемо формули, що виражають координати $(x; y)$ точки M в системі Oxy через координати $(X; Y)$ цієї точки в системі OXY . Введемо дві полярні

системи координат із спільним полюсом O і полярними осями Ox і OX , тоді згідно з формулами (5.1) маємо

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\varphi + \alpha) = \rho \cos \varphi \cos \alpha - \rho \sin \varphi \sin \alpha = X \cos \alpha - Y \sin \alpha; \\ y = \rho \sin(\varphi + \alpha) = \rho \sin \varphi \cos \alpha + \rho \cos \varphi \sin \alpha = Y \cos \alpha + X \sin \alpha, \end{cases}$$

звідки

$$X = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \quad Y = -x \sin \alpha + y \cos \alpha. \quad (5.4)$$

Формули (5.4) називаються **формулами перетворення координат при повороті осей**.

Приклад 5.2. В системі Oxy точка M має координати $(3; 1)$. Знайти її координати в системі OXY , яка утворюється з системи Oxy поворотом на кут $\pi/2$. ☺

Розв'язання. За формулами (5.4) маємо

$$\begin{aligned} X &= 3 \cos \frac{\pi}{2} + 1 \sin \frac{\pi}{2} = 1, \\ Y &= -3 \sin \frac{\pi}{2} + 1 \cos \frac{\pi}{2} = -3. \end{aligned}$$

Такий самий результат можна дістати геометрично, побудувавши точку M і системи координат Oxy і OXY . ■

Циліндрична та сферична системи координат

У просторі крім прямокутної системи координат часто вживаються циліндрична та сферична системи координат.

1. **Циліндрична система координат.** Якщо в прямокутній системі координат $Oxyz$ замість перших двох координат x, y взяти полярні координати ρ, φ , а третю координату z залишити без зміни, то дістанемо циліндричну систему координат (рис. 5.6). Координати точки M простору в цій системі записуються у вигляді $M(\rho, \varphi; z)$. Залежності між прямокутними координатами точки $M(x; y; z)$ та її циліндричними координатами $M(\rho, \varphi; z)$ задаються формулами:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z,$$

де $0 \leq \rho < +\infty, 0 \leq \varphi < 2\pi, -\infty < z < +\infty$.

2. **Сферична система координат.** У системі Oxy візьмемо точку M і через цю точку і вісь Oz проведемо площину (рис. 5.7). Нехай r — відстань від початку координат до точки M ; φ — двогранний кут між площинами Ozx і zOM ; θ — кут між віссю Oz і променем OM . Упорядкована трійка чисел r, φ, θ однозначно визначає положення точки M у просторі. Ці числа називаються сферичними координатами точки M . Знайдемо залежність між прямокутними і сферичними координатами точки M :

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

де $0 \leq r < +\infty, 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi$.

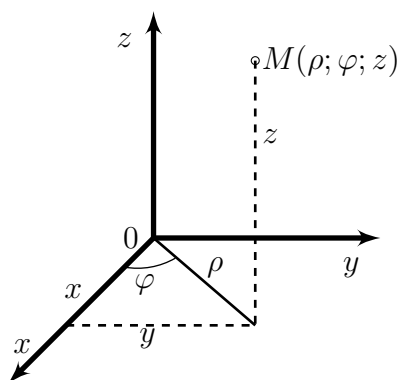


Рисунок 5.6 – Циліндрична система координат

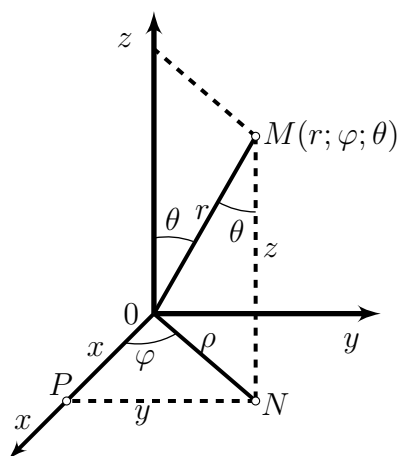


Рисунок 5.7 – Сферична система координат

Поняття про n -вимірні простори

Як уже вказувалось, між геометричними векторами і їхніми координатами у фіксованому базисі існує взаємнооднозначна відповідність. При цьому кожному вектору простору співставляється упорядкована трійка чисел, кожному вектору, що належить деякій площині, — упорядкована пара чисел, а кожному вектору, що належить деякій прямій, — дійсне число, і навпаки.

Упорядковану трійку чисел називають тривимірним вектором, а множину всіх тривимірних векторів називають тривимірним простором і позначають через $\mathbb{R}^3$. Упорядковані пари чисел називають двовимірними векторами, а числа — одновимірними. Множини двовимірних і одновимірних векторів називають відповідно двовимірними і одновимірними просторами і позначають через $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^1$. Узагальнюючи простори $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^1$, приходимо до n -вимірного простору $\mathbb{R}^n$, де n — довільне натуральне число. Упорядкована множина n дійсних чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ називається n -вимірним вектором $\vec{x}$ і позначається так: $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Множина всіх n -вимірних векторів називається n -вимірним простором і позначається через $\mathbb{R}^n$. Якщо довільний вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ простору $\mathbb{R}^n$ розглядати як радіус-вектор відповідної точки М відносно початку вибраної системи координат, то координати точки М визначаються як координати цього радіуса-вектора. У зв'язку з цим n -вимірний простір $\mathbb{R}^n$ можна тлумачити також як множину впорядкованих сукупностей n дійсних чисел. Простори $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ є окремими випадками простору $\mathbb{R}^n$. Їх можна зобразити геометрично; для $n > 3$ простори $\mathbb{R}^n$ геометрично вже уявити не можна, проте вони відіграють важливу роль у науці і техніці.

Лінійна залежність векторів

Розглянемо систему з m n -вимірних векторів

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m \quad (5.5)$$

За означенням вектори (5.5) називаються лінійно залежними, якщо рівність

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_m \vec{a}_m = 0 \quad (5.6)$$

можлива за умови, що хоча б одне з чисел $\alpha_i \neq 0$, де $i = 1, 2, \dots, m$. Якщо ж рівність (5.6) можлива лише за умови, що $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$, то вектори (5.5) називаються лінійно незалежними.

Для з'ясування питання про лінійну залежність векторів (5.5) кожен із заданих векторів $\vec{a}_i = (a_{1i}; a_{2i}; \dots; a_{ni})$ і нуль-вектор $\vec{0} = (0; 0; \dots; 0)$ запишемо як матрицю-стовпець, тоді векторну рівність (5.6) можна записати у матричній формі:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_m \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},$$

або

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1m}\alpha_m = 0, \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2m}\alpha_m = 0, \\ \dots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + a_{nm}\alpha_m = 0. \end{cases} \quad (5.7)$$

Маємо лінійну однорідну систему рівнянь відносно невідомих α_i . Якщо система (5.7) має лише нульовий розв'язок, то вектори (5.5) будуть лінійно незалежними. Якщо ж, крім нульового, система (5.7) має ще й ненульові розв'язки, то вектори (5.5) лінійно залежні. Наводимо без доведення такі властивості поняття лінійної залежності:

1. Якщо серед векторів (5.5) є нульовий, то ці вектори лінійно залежні.
2. Якщо вектори (5.5) лінійно залежні, то після додавання до них одного чи кількох нових векторів дістанемо лінійно залежну систему векторів.
3. Якщо вектори (5.5) лінійно незалежні, то після відкидання одного чи кількох векторів дістанемо знову лінійно незалежні вектори.
4. Вектори (5.5) лінійно залежні тоді і лише тоді, коли один з них є лінійною комбінацією інших.
5. Якщо два ненульові тривимірні вектори лінійно залежні, то вони колінеарні, і навпаки.
6. Якщо три ненульові тривимірні вектори лінійно залежні, то вони компланарні, і навпаки.
7. Чотири (і більше) тривимірних вектори завжди лінійно залежні.

Поняття лінійної залежності має досить глибокий зміст і широко використовується в математиці. Не вдаючись до подробиць, наведемо такі застосування цього поняття.

1. Всяка упорядкована сукупність лінійно незалежних векторів, через які лінійно виражається довільний вектор простору, називається **базисом** цього простору. Незавжди перекона-
тись в еквівалентності цього означення і означення базисів у просторах $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$.

2. Максимальне число лінійно незалежних векторів деякого простору називається його *розмірністю*. Розмірність простору дорівнює числу базисних векторів цього простору. Відповідно до цього означення пряму лінію розглядають як одновимірний простір $\mathbb{R}$, з одним базисним вектором; площа — це двовимірний простір $\mathbb{R}^2$, базис якого містить два вектори і т. п.
3. Максимальне число лінійно незалежних стовпців матриці дорівнює максимальному числу її лінійно незалежних рядків, і це число дорівнює рангу матриці.

Розглянемо систему лінійних рівнянь і зафіксуємо який-небудь відмінний від нуля мінор, порядок якого дорівнює рангу матриці цієї системи. Рівняння, у яких коефіцієнти при невідомих утворюють обраний мінор, називають базисними. Тоді з твердження 3 випливає такий важливий для практики висновок.

Висновок 5.1

Система лінійних рівнянь еквівалентна системі своїх базисних рівнянь. ◇

Приклад 5.3. Довести, що вектори $\vec{a} = (2; 0; -1)$, $\vec{b} = (3; -2; 1)$, $\vec{c} = (1; 4; 2)$ лінійно незалежні. ☺

Розв'язання. Розв'яжемо рівняння $\alpha_1 \vec{a} + \alpha_2 \vec{b} + \alpha_3 \vec{c} = 0$. Маємо

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ або } \begin{cases} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0; \\ -2\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0; \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Оскільки визначник системи відмінний від нуля (він дорівнює -30), то система має єдиний розв'язок $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$. Отже, задані вектори лінійно незалежні. ■

ТЕМА 6. ДОБУТКИ ВЕКТОРІВ

Означення, геометричний та механічний зміст скалярного добутку

Означення 6.1. Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число $\vec{a} \cdot \vec{b}$, що дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi, \quad (6.1)$$

де $\varphi = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ — кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$. ✓

Якщо хоча б один з векторів $\vec{a}$ чи $\vec{b}$ нульовий, то за означенням $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Оскільки за формулою (4.4) $|\vec{a}| \cos \varphi = \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a}$, $|\vec{b}| \cos \varphi = \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b}$, то з (6.1) маємо

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a}. \quad (6.2)$$

Формули (6.2) виражають геометричний зміст скалярного добутку: скалярний добуток двох векторів дорівнює добутку довжини одного вектора на проекцію на нього другого вектора.

З фізики відомо, що робота A сили P при переміщенні матеріальної точки з початку в кінець вектора $\vec{S}$, який утворює з вектором $\vec{F}$ кут α 6.1, дорівнює $A = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cos \alpha$, або

$$A = \vec{F} \cdot \vec{S}. \quad (6.3)$$

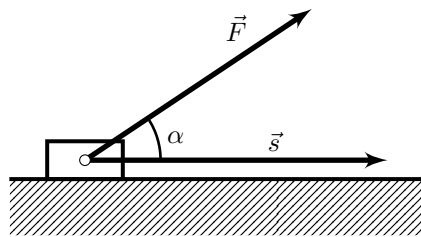


Рисунок 6.1 – Механічний зміст скалярного добутку

Отже, робота дорівнює скалярному добутку вектора сили на вектор переміщення. В цьому суть механічного змісту скалярного добутку.

Властивості скалярного добутку

У векторному численні величину $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ називають скалярним добутком векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ тому, що, по-перше, ця величина є скаляр і, по-друге, має деякі алгебраїчні властивості звичайного добутку чисел.

Розглянемо три алгебраїчні властивості скалярного добутку.

1. Комутативна властивість множення:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}.$$

ДОВЕДЕННЯ. За означенням скалярного добутку $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ і $\vec{b} \cdot \vec{a} = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cos(\widehat{\vec{b}, \vec{a}})$. Оскільки $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}|$ як добуток чисел і $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \cos(\widehat{\vec{b}, \vec{a}})$, тому що $\widehat{\vec{a}, \vec{b}} = \widehat{\vec{b}, \vec{a}}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$. □

2. Асоціативна властивість відносно множення на число λ :

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

ДОВЕДЕННЯ. з формул (6.2) і (4.6) маємо

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = |\vec{b}| \text{пр}_{\vec{b}}(\lambda \vec{a}) = \lambda |\vec{b}| \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

3. Дистрибутивна властивість відносно додавання векторів:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$$

ДОВЕДЕННЯ. Згідно з формулами (6.2) і (4.5) дістанемо

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}| \text{пр}_{\vec{a}}(\vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}| \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} + |\vec{a}| \text{пр}_{\vec{a}} \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$$

Сформульовані властивості обумовлюють глибоку аналогію між векторною алгеброю і алгеброю чисел. Перша властивість дає змогу міняти місцями множники, друга — об'єднувати числові коефіцієнти векторних множників, а третя — розкривати або вводити дужки і виносити за них спільні скалярні чи векторні множники. Проте аналогія між скалярним добутком векторів і добутком чисел є неповною. Зокрема, не існує скалярного добутку трьох і більшого числа векторів; рівність $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ може виконуватись і при ненульових множниках $\vec{a} \neq 0$, $\vec{b} \neq 0$, якщо $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$; не можна робити висновок, що з рівності $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ випливає рівність $\vec{b} = \vec{c}$ навіть коли $\vec{a} \neq 0$. Рівність $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ при $\vec{a} \neq 0$ означає, що $(\vec{a}, \vec{b} - \vec{c}) = \frac{\pi}{2}$ і правильна при $\vec{b} \neq \vec{c}$. Наведемо геометричні властивості скалярного добутку.

4. Якщо $\vec{a} \neq 0$ і $\vec{b} \neq 0$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 > 0$, коли кут $(\vec{a}, \vec{b})$ - гострий, і $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$, коли кут $\varphi = (\vec{a}, \vec{b})$ — тупий.
5. Скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді і лише тоді, коли ці вектори взаємно перпендикулярні.
6. Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2, \quad (6.4)$$

звідки

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}. \quad (6.5)$$

Властивості 4 – 6 безпосередньо випливають з формули (6.1).

Приклад 6.1. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{m} = -\vec{a} + 2\vec{b}$ і $\vec{n} = 4\vec{a} + 3\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$. ☺

Розв'язання. Користуючись властивостями 1 – 3, маємо

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = (-\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (4\vec{a} + 3\vec{b}) = -4\vec{a}^2 - 3\vec{a} \cdot \vec{b} + 8\vec{a} \cdot \vec{b} + 6\vec{b}^2 = -4\vec{a}^2 + 5\vec{a} \cdot \vec{b} + 6\vec{b}^2.$$

Застосовуючи формули (6.1) і (6.4), знаходимо

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = -4 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot 3^2 = 53.$$

Приклад 6.2. Знайти довжину вектора $\vec{c} = 5\vec{a} - 2\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$. ☺

Розв'язання. За формулою (6.5) дістанемо

$$|\vec{c}| = \sqrt{\vec{c}^2} = \sqrt{(5\vec{a} - 2\vec{b})^2} = \sqrt{25\vec{a}^2 - 20\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b}^2} = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}.$$

Вираз скалярного добутку через координати. Кут між векторами

Нехай задано два вектори $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ та $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$. Знайдемо їхній скалярний добуток. Використовуючи властивості 1 і 3 скалярного добутку, дістанемо

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = \\ &= a_x b_x \vec{i}^2 + a_x b_y \vec{i} \cdot \vec{j} + a_x b_z \vec{i} \cdot \vec{k} + a_y b_x \vec{i} \cdot \vec{j} + a_y b_y \vec{j}^2 + \\ &+ a_y b_z \vec{j} \cdot \vec{k} + a_z b_x \vec{k} \cdot \vec{i} + a_z b_y \vec{k} \cdot \vec{j} + a_z b_z \vec{k}^2. \end{aligned}$$

Оскільки $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — попарно ортогональні орти, то $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$, $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$, тому

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (6.6)$$

Отже, скалярний добуток двох векторів, заданих координатами в прямокутній системі координат, дорівнює сумі добутків їхніх відповідних координат. Вкажемо на ряд важливих висновків з формули (6.6).

1. Необхідною і достатньою умовою перпендикулярності векторів $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ і $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$ є рівність

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0. \quad (6.7)$$

2. Довжина вектора $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ визначається за формулою

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (6.8)$$

Формула (6.8) випливає з формул (6.5) і (6.6).

3. Кут $\varphi = (\vec{a}, \vec{b})$ між векторами $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ та $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$ визначається рівністю

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \quad (6.9)$$

Ця формула є наслідком формул (6.1), (6.6) і (6.8).

Приклад 6.3. Обчислити, яку роботу виконує сила $\vec{F} = (3; -2; 5)$, яка прямолінійно переміщує матеріальну точку з точки $M(-2; 1; 2)$ в точку $N(0; 4; 4)$. ☺

Зов'язання. Знайдемо вектор переміщення $\vec{S} = \overrightarrow{MN} = (2; 3; 2)$, тоді за формулами (6.3) і (6.6) робота $A = \vec{F} \cdot \vec{S} = 50$. ■

Приклад 6.4. Задані вектори $\vec{a} = (1; -1; -2)$ і $\vec{b} = (-3; 0; 1)$. Знайти проекцію вектора $\vec{c} = 4\vec{a} - \vec{b}$ на вектор $\vec{b}$. ☺

Зов'язання. Знайдемо координати вектора $\vec{c}$:

$$\vec{c} = 4(\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}) - (-3\vec{i} + \vec{k}) = 7\vec{i} - 4\vec{j} - 9\vec{k} = (7; -4; -9).$$

З формул (6.2), (6.6) і (6.8) дістаємо

$$\text{пр}_{\vec{b}} \vec{c} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{b}|} = \frac{-3 \cdot 7 + 0 \cdot (-4) + 1 \cdot (-9)}{\sqrt{9 + 0 + 1}} = -\frac{30}{\sqrt{10}} = -3\sqrt{10}.$$

Приклад 6.5. Трикутник заданий вершинами $A(0; -1; 2)$, $B(-1; -2; 7)$, $C(1; -2; 6)$. Знайти його внутрішній кут при вершині A . ☺

Зов'язання. Користуючись формулою (6.9), дістанемо

$$\overrightarrow{AB} = (-1; -1; 5), \overrightarrow{AC} = (1; -1; 4), \cos \varphi = \cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \frac{20}{9\sqrt{6}} \approx 0,91,$$

$$\varphi \approx 25^\circ.$$

Обзначення і властивості векторного добутку

Обзначення 6.2. Векторним добутком вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який визначається такими трьома умовами:

- 1) довжина вектора $\vec{c}$ дорівнює $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$, де $\varphi = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$;
- 2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;
- 3) якщо $c \neq 0$, то вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють праву трійку векторів. ✓

Векторний добуток позначають одним із символів:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{a} \times \vec{b}].$$

Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 6.6. Нехай в точці A (рис. 6.2) прикладена сила $\vec{F}$ і O – деяка фіксована точка. Як відомо з фізики, моментом сили $\vec{F}$ відносно точки O називається вектор $\vec{M}$, довжина якого дорівнює добутку сили на плече і який напрямлений по осі обертання так, що коли дивитися з його кінця, то обертання тіла відбувається проти руху стрілки годинника. ☺

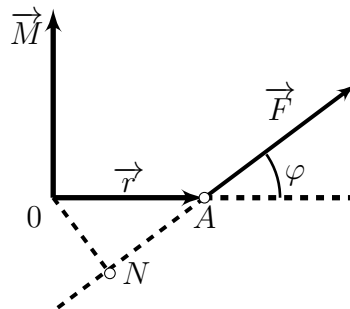


Рисунок 6.2 – Момент сили

Оскільки $|\vec{M}| = |\vec{F}| \cdot ON = |\vec{F}| \cdot |r| \sin \varphi = |\vec{F}| \cdot |\vec{OA}| \cdot \sin \varphi = |\vec{F}| \cdot |\vec{OA}| \sin(\widehat{\vec{F} \vec{OA}})$, то момент сили $\vec{F}$, прикладеної в точці A , відносно точки O визначається векторним добутком $\vec{M} = \vec{OA} \times \vec{F}$.

Приклад 6.7. Швидкість $\vec{v}$ точки P твердого тіла, яке обертається з кутовою швидкістю ω навколо нерухомої осі l , визначається за формулою Ейлера $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. ☺

Приклад 6.8. Якщо електрон, заряд якого дорівнює e , рухається з швидкістю $\vec{v}$ в магнітному полі сталої напруги $\vec{H}$, то на електрон діє сила $\vec{F}$, яка визначається за формулою

$$\vec{F} = \frac{e}{c}(\vec{v} \times \vec{H}),$$

де c – швидкість світла. ☺

Розглянемо алгебраїчні властивості векторного добутку.

1. Анτικомутативність множення: $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$, тобто від перестановки множників векторний добуток змінює знак. Це випливає з того, що вектори $\vec{a} \times \vec{b}$ і $\vec{b} \times \vec{a}$ мають однакові модулі, колінеарні і трійки векторів $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$ і $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{b} \times \vec{a})$ протилежної орієнтації (рис. 6.3).
2. Асоціативність відносно скалярного множника λ :

$$\lambda \vec{a} \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}); \quad \vec{a} \times \lambda \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}).$$

3. Дистрибутивність відносно додавання векторів:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.$$

Алгебраїчні властивості векторного добутку дають змогу при множенні лінійних векторів виконувати дії так само, як з алгебраїчними многочленами. Проте при виконанні векторного

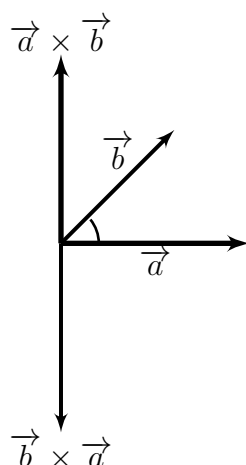


Рисунок 6.3 – Антикомутативність векторного добутку

множення слід пам'ятати, що воно некомутативне: при перестановці співмножників знак векторного добутку змінюється на протилежний.

Наведемо геометричні властивості векторного добутку.

4. Векторний добуток двох векторів дорівнює нулю тоді і лише тоді, коли ці вектори колінеарні.
5. Модуль $|\vec{a} \times \vec{b}|$ векторного добутку неколінеарних векторів дорівнює площі S паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, віднесених до спільного початку, тобто

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}|. \quad (6.10)$$

6. Векторні добутки ортів задовольняють такі рівності: $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$, $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$, $\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$, $\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$, $\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$.

Приклад 6.9. Обчислити $|(-2\vec{a} + \vec{b}) \times (3\vec{a} + 2\vec{b})|$, якщо $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = \frac{\pi}{2}$. ☺

Розв'язання.

$$\begin{aligned} (-2\vec{a} + \vec{b}) \times (3\vec{a} + 2\vec{b}) &= -6(\vec{a} \times \vec{a}) - 4(\vec{a} \times \vec{b}) + 3(\vec{b} \times \vec{a}) + 2(\vec{b} \times \vec{b}) = \\ &= -4(\vec{a} \times \vec{b}) - 3\vec{a} \times \vec{b} = -7(\vec{a} \times \vec{b}); \end{aligned} \quad \blacksquare$$

$$|-7(\vec{a} \times \vec{b})| = 7|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \frac{\pi}{2} = 7 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 14.$$

Векторний добуток двох векторів, заданих координатами

Нехай в прямокутній системі координат задано вектори $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ і $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Покажемо, що векторний добуток вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ визначається за формулою

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (6.11)$$

Доведення. Використовуючи властивості 1–3 і 6 векторного добутку і теорему 1.1 про розклад визначника за рядком, маємо

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = a_x b_x (\vec{i} \times \vec{i}) + \\ &+ a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z (\vec{i} \times \vec{k}) + a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j} \times \vec{j}) + \\ &+ a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k}) + a_z b_x (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z b_z (\vec{k} \times \vec{k}) = \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} - \vec{j} (a_x b_z - a_z b_x) + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} = \\ &= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad \square\end{aligned}$$

Приклад 6.10. Знайти площу трикутника ABC , заданого вершинами $A(2; -1; 3)$, $B(1; -2; 0)$, $C(4; 1; 3)$. ☺

Розв'язання. Площа трикутника ABC дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{AB}$ і $\vec{AC}$. Оскільки $\vec{AB} = (-1; -1; -3)$, $\vec{AC} = (2; 2; 0)$ і за формулою (6.11)

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - 6\vec{j},$$

то за формулою (6.10) площа $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{6^2 + 6^2} = 3\sqrt{2}$. ■

Приклад 6.11. Знайти момент сили $\vec{F} = (1; -2; 4)$, прикладеної до точки $A(1; 2; 3)$, відносно точки $B(3; 2; -1)$. ☺

Розв'язання. Момент сили $\vec{M} = \vec{BA} \times \vec{F}$. Оскільки $\vec{BA} = (-2; 0; 4)$, то

$$\vec{M} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 8\vec{i} + 12\vec{j} + 4\vec{k}.$$

Означення і обчислення мішаного добутку

При множенні двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вище було визначено два види добутків: скалярний, результатом якого є число $\vec{a} \cdot \vec{b}$, і векторний, результатом якого є вектор $\vec{a} \times \vec{b}$.

Множення трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ можна виконати різними способами. Зокрема, можна утворити такі добутки:

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}, (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}, (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

Перший з цих добутків відповідає множенню скаляра $\vec{a} \cdot \vec{b}$ на вектор $\vec{c}$ і не розглядається. Те саме стосується добутків $(\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b}$ та $(\vec{b} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{a}$.

Результатом другого добутку є вектор $\vec{d}$, який називається подвійним векторним або векторно-векторним добутком даних трьох векторів:

$$\vec{d} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}.$$

Для знаходження подвійного векторного добутку застосовують формули

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a};$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}.$$

Подвійний векторний добуток часто зустрічається у векторному численні, але певного геометричного змісту не має.

Останній з наведених добутків $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ — це скалярний добуток вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ на вектор $\vec{c}$; його називають **мішаним добутком** $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$. Цей добуток має чіткий геометричний зміст і широко використовується в задачах.

Знайдемо мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, заданих координатами:

$$\vec{a} = (a_x; a_y; a_z), \quad \vec{b} = (b_x; b_y; b_z), \quad \vec{c} = (c_x; c_y; c_z).$$

Координати вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ визначаються за формулою (6.11):

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Помноживши вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ скалярно на вектор $\vec{c}$, за формулою (6.6) дістанемо:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (6.12)$$

Властивості мішаного добутку

1. Якщо в мішаному добутку поміняти місцями які-небудь два множники, то мішаний добуток змінить знак, наприклад:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -\vec{c} \cdot (\vec{b} \times \vec{a}).$$

Дійсно, якщо в мішаному добутку поміняти місцями два множники, то це те саме, що у визначнику (6.12) поміняти місцями два рядки, а від цього визначник змінює знак.

2. При циклічній перестановці множників мішаний добуток не змінюється:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}.$$

Справді, при циклічній перестановці міняються місцями два рази множники, або, що те саме, у визначнику (6.12) рядок міняється місцем два рази, а від цього визначник не змінюється.

3. У мішаному добутку знаки векторного і скалярного добутків можна міняти місцями:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Дійсно, з властивості 2 і комутативності скалярного добутку маємо

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

У зв'язку з цим мішані добутки $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ (векторно-скалярний добуток) і $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}$ (скалярно-векторний добуток) скорочено позначають так: $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$.

4. Модуль мішаного добутку $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, віднесених до спільного початку:

$$V = |\vec{a} \vec{b} \vec{c}| \quad (6.13)$$

ДОВЕДЕННЯ. Візьмемо три некопланарних вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ і побудуємо на цих векторах паралелепіпед (рис. 6.4).

Об'єм цього паралелепіпеда $V = Sh$, де V — площа основи, а h — висота. Але $S = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = |\vec{a} \times \vec{b}|$, $h = |\vec{AA}_2| = |np_{\vec{a} \times \vec{b}} \vec{c}|$, тому $V = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |np_{\vec{a} \times \vec{b}} \vec{c}| = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |\vec{a} \vec{b} \vec{c}|$. $\square$

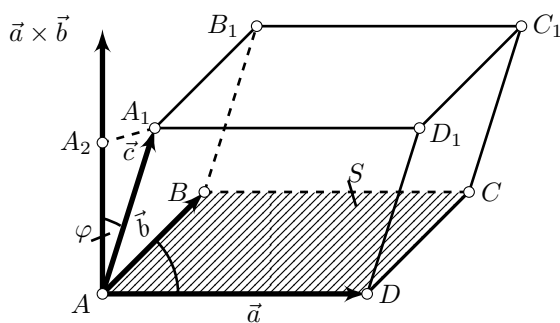


Рисунок 6.4 – Геометричний зміст мішаного добутку

5. Якщо мішаний добуток $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$ додатний, то вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють праву трійку, а якщо від'ємний, то ліву.

ДОВЕДЕННЯ. з формул (6.2) випливає, що $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| np_{\vec{a} \times \vec{b}} \vec{c}$. Якщо $\vec{a} \vec{b} \vec{c} > 0$, то $np_{\vec{a} \times \vec{b}} \vec{c} > 0$ і кут $\varphi = (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})$ гострий, тобто вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють праву трійку. Якщо $\vec{a} \vec{b} \vec{c} < 0$, то $np_{\vec{a} \times \vec{b}} \vec{c} < 0$, кут $\varphi = (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})$ тупий, тому вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють ліву трійку. $\square$

6. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарні тоді і тільки тоді, коли їхній мішаний добуток дорівнює нулю.

ДОВЕДЕННЯ. Якщо $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = 0$, то вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ і лежить з векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ в одній площині. Це означає, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарні. Навпаки, якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарні, то можна вважати, що вони лежать в одній площині, тому $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = \frac{\pi}{2}$; $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = 0$. $\square$

Властивості 4 – 6 виражають геометричний зміст мішаного добутку трьох векторів.

Приклад 6.12. Знайти об'єм тетраедра, заданого вершинами $A(2; -1; 0)$, $B(5; 5; 3)$, $C(3; 2; -2)$, $D(4; 1; 2)$. ☺

Розв'язання. Відомо, що об'єм тетраедра V_{ABCD} , побудованого на векторах $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$, дорівнює шостій частині об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах. Тому за формулою (6.12) маємо

$$V = \frac{1}{6} |\vec{AB} \vec{AC} \vec{AD}|.$$

Знаходимо вектори $\vec{AB} = (3; 6; 3)$, $\vec{AC} = (1; 3; -2)$, $\vec{AD} = (2; 2; 2)$. За формулою (6.12) дістанемо

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 3.$$

Приклад 6.13. Довести, що точки $A(0; 1; 2)$, $B(-2; 0; -1)$, $C(-1; 5; 8)$, $D(1; 6; 11)$ лежать в одній площині. ☺

Розв'язання. Точки A, B, C, D лежать в одній площині, якщо вектори $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$ компланарні. Знаходимо вектори $\vec{AB} = (-2; -1; -3)$, $\vec{AC} = (-1; 4; 6)$, $\vec{AD} = (1; 5; 9)$.
Оскільки мішаний добуток

$$\vec{AB} \vec{AC} \vec{AD} = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -1 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

то за властивістю 6 вектори $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ і $\vec{AD}$ компланарні, тому задані точки лежать в одній площині. ■

Приклад 6.14. Яку трійку утворюють вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, якщо $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (-1; 0; 2)$, $\vec{c} = (1; -2; 5)$? ☺

Розв'язання. Оскільки мішаний добуток

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 24 > 0.$$

то за властивістю 5 дані вектори утворюють праву трійку. ■

ТЕМА 7. ЛІНІЯ ТА ПОВЕРХНІ НА ПЛОЩИНІ І ПРОСТОРІ

Предмет аналітичної геометрії

Аналітична геометрія — це розділ математики, в якому властивості геометричних об'єктів (точок, ліній, поверхонь, фігур, тіл тощо) вивчаються засобами алгебри на основі методу координат.

Основоположником аналітичної геометрії вважають Рене Декарта, який вперше в 1637 р. у своїй книзі „Геометрія“ дав чіткий виклад ідеї методу координат на площині. Р. Декарт запропонував положення точки на площині відносно заданої системи координат визначати за допомогою двох чисел — її координат, а кожен ліній на площині розглядати як множину точок, заданих певною геометричною умовою. Ця умова записується у вигляді рівняння, яке зв'язує змінні координати точки, що належить даній лінії, і називається рівнянням цієї лінії. Такий спосіб дослідження геометричних об'єктів і називають методом координат.

Наступний важливий вклад в аналітичну геометрію зробив французький учений Ж.-Л. Лагранж, який вперше в 1788 р. у своєму творі „Аналітична механіка“ запропонував положення вектора визначати за допомогою чисел — його проєкцій на координатні осі. Розвиток ідей Лагранжа привів до створення векторної алгебри. Метод координат та апарат векторної алгебри широко використовуються в сучасній аналітичній геометрії.

Поняття про лінію та її рівняння.

Розглянемо рівність

$$F(x, y) = 0, \quad (7.1)$$

яка зв'язує змінні величини x та y .

Рівність (7.1) називають рівнянням з двома змінними x і y , якщо ця рівність виконується не для всіх пар чисел x, y , і тотожністю, якщо вона справедлива для всіх значень x і y . Наприклад, рівності $x + y = 0$ і $x^2 + y^2 = 9$ є рівняннями, а рівності $x + y - (x + y) = 0$ та $(x + y)^2 - x^2 - 2xy - y^2 = 0$ — тотожностями.

Означення 7.1. Рівняння (7.1) називається рівнянням лінії l , яка задана на площині відносно певної системи координат, якщо це рівняння задовольняють координати x і y кожної точки лінії l і не задовольняють координати x і y жодної точки, яка не лежить на цій лінії. ✓

Коли рівняння (7.1) є рівнянням лінії l , то кажуть, що це рівняння **визначає (або задає)** лінію l . Отже, якщо лінія задана рівнянням, то про кожен точку площини можна сказати, чи лежить вона на цій лінії, чи не лежить. Якщо координати точки задовольняють рівняння лінії, то точка лежить на ній, якщо не задовольняють, то не лежить.

Лінія, яка задана рівнянням (7.1) відносно певної системи координат у площині, є геометричним місцем точок, координати яких задовольняють задане рівняння.

Змінні x і y в рівнянні (7.1) лінії l називаються **змінними координатами** її точок.

Нехай лінія l відносно системи координат Oxy визначається рівнянням (7.1). В аналітичній геометрії лінії класифікують залежно від властивостей цього рівняння. Якщо вираз $F(x, y)$ в рівнянні (7.1) є многочленом від змінних x та y (тобто сумою скінченного числа одночленів $ax^k y^m$, де a — сталий коефіцієнт, а показники k і m — цілі додатні числа або нулі), то лінія, що задається цим рівнянням, називається алгебраїчною.

Алгебраїчні лінії розрізняють залежно від їхнього порядку. **Степенем одночлена** $ax^k y^m$ називається сума $k + m$ показників при змінних. **Степенем рівняння** (7.1) називається найвищий степінь одночлена, що входить до його складу. **Алгебраїчною лінією n -го порядку** називається лінія, що виражається рівнянням n -го степеня. Порядок алгебраїчної лінії не змінюється при заміні однієї декартової системи на іншу.

Лінія, яка не є алгебраїчною, називається **трансцендентною**. Ми вивчатимемо лише алгебраїчні лінії першого та другого порядків, тобто лінії, що задаються рівняннями

$$ax + by + c = 0 \text{ та } ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0.$$

Таким чином, лінію на площині можна задати геометрично як сукупність точок з певними геометричними властивостями і аналітично — за допомогою рівняння. У зв'язку з цим виникають дві типові для аналітичної геометрії задачі: скласти рівняння лінії, яка задана геометрично, і навпаки, встановити геометричний образ лінії, заданої аналітично. Зазначимо, що в аналітичній геометрії друга задача розв'язується лише для алгебраїчних ліній першого та другого порядків. Загальний метод дослідження ліній, заданих рівняннями, дається в курсі математичного аналізу.

Приклад 7.1. 1. Рівняння $y = 5x + 6$ визначає на площині пряму лінію.

2. Рівняння $x^2 - y^2 = 0$ або $(x + y)(x - y) = 0$ визначають дві прямі - бісектриси координатних кутів.

3. Рівняння $x^2 + y^2 = 0$ задовольняє лише одна точка $O(0;0)$. У подібних випадках кажуть, що рівняння визначає вироджену лінію.

4. Рівняння $x^2 + y^2 + 1 = 0$ не визначає ніякого геометричного місця точок, оскільки для будь-яких значень x та y маємо $x^2 + y^2 + 1 > 0$. ☺

Знаходження рівняння лінії за її геометричними властивостями

Зупинимось детальніше на задачі складання рівняння лінії, заданої геометрично. Для її розв'язання потрібно встановити геометричну властивість, яку задовольняють лише точки даної лінії, і записати цю властивість у вигляді рівняння. Таке рівняння пов'яже змінні координати точок даної лінії і ті відомі сталі величини, які геометрично визначають саме цю лінію.

Приклад 7.2. Скласти рівняння лінії, сума квадратів відстаней кожної точки якої до точок $A(-1;0)$ і $B(1;0)$ дорівнює 4. ☺

Розв'язання. Нехай точка $M(x; y)$ лежить на лінії, тоді за умовою $AM^2 + BM^2 = 4$. Оскільки $AM^2 = (x + 1)^2 + y^2$, $BM^2 = (x - 1)^2 + y^2$, то $(x + 1)^2 + y^2 + (x - 1)^2 + y^2 = 4$, звідки після спрощень дістаємо шукане рівняння: $x^2 + y^2 = 1$. ■

Приклад 7.3. Скласти рівняння лінії, кожна точка якої розміщена від точки $A(1;2)$ в два рази далі, ніж від точки $B(-2;0)$. ☺

Зов'язання. Позначимо змінну точку лінії через $M(x, y)$, тоді за умовою $AM = 2BM$, тобто

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = 2\sqrt{(x+2)^2 + y^2}.$$

Перетворюючи це рівняння, маємо

$$3x^2 + 3y^2 + 18x + 4y + 11 = 0.$$

Параметричні рівняння лінії

Нехай залежність між змінними x і y виражена через третю змінну t , тобто

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases} \quad (7.2)$$

Змінна t називається параметром і визначає положення точки $(x; y)$ на площині. Наприклад, якщо $x = 3t - 2$, $y = t^2 + 1$, то значенню параметра $t = 2$ відповідає на площині точка $(4; 5)$, тому що $x = 3 \cdot 2 - 2 = 4$, $y = 2^2 + 1 = 5$.

Якщо t змінюється, то точка на площині переміщується, описуючи деяку лінію l . Такий спосіб задання лінії називається *параметричним*, а рівняння (7.2) — *параметричними рівняннями лінії*. Щоб від рівняння (7.2) перейти до рівняння (7.1), потрібно будь-яким способом з двох рівнянь (7.2) виключити параметр t (наприклад, з першого рівняння виразити через x і результат підставити в друге рівняння). Але такий перехід не завжди доцільний і не завжди можливий, тому доводиться користуватись параметричними рівняннями (7.2).

Векторне рівняння лінії

Лінію можна задати також векторним рівнянням $\vec{r} = \vec{r}(t)$, де t — скалярний змінний параметр. Кожному значенню t_0 відповідає цілком визначений вектор $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$ площини. Таким чином, якщо параметр t набуває певної множини деяких значень, то рівняння $\vec{r} = \vec{r}(t)$ задає деяку множину векторів. Якщо від точки O (рис. 7.1) площини відкласти вектори $\vec{OM} = \vec{r}(t)$, то геометричне місце точок, які збігаються з кінцями цих векторів (за умови, що всі вектори компланарні), визначить на площині деяку лінію l .

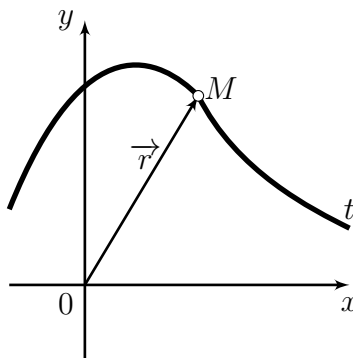


Рисунок 7.1 – Векторне рівняння лінії

Векторному параметричному рівнянню $\vec{r} = \vec{r}(t)$ в прямокутній системі координат Oxy відповідають два скалярних рівняння:

$$x = x(t), y = y(t),$$

тобто проекціями на осі координат векторного рівняння лінії є її параметричні рівняння.

Векторне рівняння і параметричні рівняння лінії мають такий механічний зміст: якщо точка рухається на площині, то вказані рівняння називаються рівняннями руху точки, а лінія l — траєкторією точки; параметром t при цьому є час.

Про залежність рівняння лінії від вибору системи координат

Зазначимо, що одну й ту саму лінію можна задати різними рівняннями. Таким чином, вигляд рівняння лінії залежить від вибору системи координат або, що те саме, від розміщення лінії відносно системи координат. Рівняння лінії змінюється як при переході від однієї декартової системи до іншої, тобто при перетворенні координат, так і при переході від декартових до будь-яких інших координат.

У зв'язку з цим виникають такі задачі: як обрати таку систему координат, у якій рівняння лінії, заданої геометрично, було б найпростішим, або як замінити систему координат, щоб задане рівняння лінії спростилося? Подібні задачі ми розглядатимемо при вивченні ліній другого порядку.

ТЕМА 8. ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ

Різні види рівнянь прямої на площині

Пряма на площині геометрично може бути задана різними способами: точкою і вектором, паралельним даній прямій; двома точками; точкою і вектором, перпендикулярним до даної прямої, тощо. Різним способам задання прямої відповідають у прямокутній системі координат різні види її рівнянь.

Нехай пряма (на площині чи в просторі) проходить через задану точку M_0 паралельно заданому ненульовому вектору $\vec{s}$, який називається **напрямним вектором прямої**. Пряма має безліч напрямних векторів, їхні відповідні координати пропорційні. Точка M_0 і її напрямний вектор цілком визначають пряму, тому що через точку M_0 можна провести лише одну пряму, паралельну вектору $\vec{s}$. Складемо рівняння цієї прямої. Позначимо через M (рис. 8.1) довільну точку прямої і розглянемо радіуси-вектори $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$ та $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ точок M_0 та M і вектор $\overrightarrow{M_0M}$, що лежить на даній прямій.

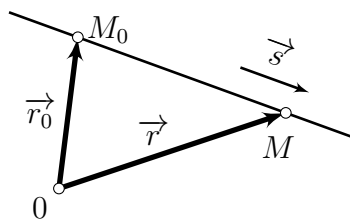


Рисунок 8.1 – Векторне параметричне рівняння прямої

Оскільки вектори $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$ і $\vec{s}$ колінеарні, то $\vec{r} - \vec{r}_0 = t\vec{s}$, звідки

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s} \quad (8.1)$$

Змінна t у формулі (8.1) може набувати довільних дійсних значень і називається параметром, а рівняння (8.1) називається **векторним параметричним рівнянням прямої**.

Векторне параметричне рівняння прямої має однаковий вигляд і на площині, і в просторі.

Якщо пряма l розглядається на площині і задається точкою $M_0(x_0; y_0)$ та напрямним вектором $\vec{s} = (m; n)$, то, прирівнюючи відповідні координати векторів $\vec{r}$ та $\vec{r}_0 + t\vec{s}$ за формулою (8.1), маємо

$$x = x_0 + mt, \quad y = y_0 + nt, \quad (8.2)$$

звідки

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \quad (8.3)$$

Рівняння (8.2) називаються **параметричними рівняннями прямої** а рівняння (8.3) — її **канонічним рівнянням**.

Зокрема, якщо пряма проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ паралельно осі Ox , то її напрямний вектор $\vec{s} = (m; 0)$, тому рівняння (8.3) набирає вигляду

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{0}$$

Як відомо, добуток середніх членів пропорції дорівнює добутку крайніх членів. Тому маємо $(y - y_0)m = (x - x_0) \cdot 0$, звідки $y = y_0$. Це і є рівняння прямої, яка паралельна осі Ox .

Аналогічно, якщо пряма проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ паралельно осі Oy , то її рівнянням є $x = x_0$.

Виведемо рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Якщо пряма не перпендикулярна до осі Ox , то рівняння (8.3) можна записати у вигляді

$$y - y_0 = \frac{n}{m}(x - x_0) \text{ або } y = \frac{n}{m}x + (y_0 - \frac{n}{m}x_0)$$

Позначивши $\frac{n}{m} = k$, $y_0 - \frac{n}{m}x_0 = b$, дістанемо

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad (8.4)$$

або

$$y = kx + b. \quad (8.5)$$

Відношення $k = \frac{n}{m} = \operatorname{tg} \alpha$, де α — кут, утворений прямою з додатним напрямом осі Ox (рис. 8.2), називається **кутовим коефіцієнтом прямої**, а величина $b = y_0 - \frac{n}{m}x_0$ — ордината точки перетину прямої з віссю Oy .

Якщо пряма проходить через початок координат, то $b = 0$ і рівняння такої прямої має вигляд

$$y = kx. \quad (8.6)$$

Рівняння (8.4) називається **рівнянням прямої, яка проходить через задану точку і має заданий кутовий коефіцієнт**, а рівняння (8.5) — **рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом**.

Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки $M_1(x_1; y_1)$ та $M_2(x_2; y_2)$, дістанемо з рівняння прямої, що проходить через точку M_1 і має напрямний вектор $\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (8.7)$$

Рівняння (8.7) називається **рівнянням прямої, яка проходить через дві задані точки**.

Зокрема, якщо пряма проходить через точки $A(a; 0)$ та $B(0; b)$, тобто відтинає на осях відрізки a та b (рис. 8.3), то з рівняння (8.6) маємо

$$\frac{x - a}{0 - a} = \frac{y - 0}{b - 0} \text{ або } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (8.8)$$

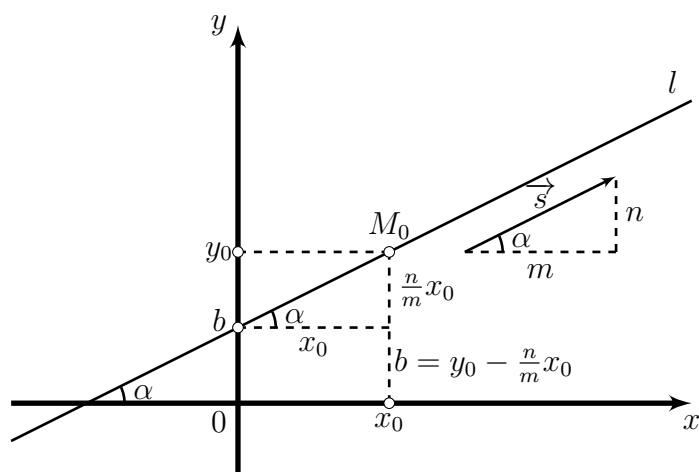


Рисунок 8.2 – пряма через дану точку і з даним кутовий коефіцієнт

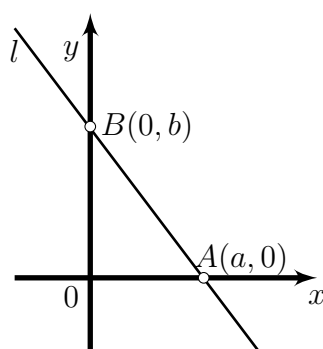


Рисунок 8.3 – Пряма у відрізках на осях

Рівняння (8.8) називається **рівнянням прямої у відрізках на осях**.

Розглянемо рівняння прямої, яка проходить через задану точку $M_1(x_1, y_1)$ перпендикулярно до заданого ненульового вектора $\vec{n} = (A; B)$.

Візьмемо на прямій l довільну точку (рис. 8.4) $M(x, y)$ і введемо вектор $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1, y - y_1)$. Оскільки вектори $\vec{n}$ і M_1M перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю, тобто

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0. \quad (8.9)$$

Рівняння (8.9) називається **рівнянням прямої, яка проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора**.

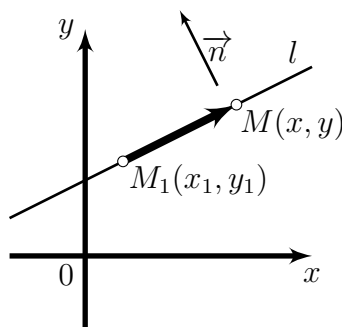


Рисунок 8.4 – Пряма через дану точку перпендикулярна до даного вектора

Вектор $\vec{n} = (A; B)$ називається **нормальним вектором прямої**. Пряма має безліч нормальних векторів. Усі вони паралельні, отже, їхні відповідні координати пропорційні.

Нормальне рівняння прямої лінії.

Нехай положення прямої на площині визначається двома величинами (параметрами прямої): довжиною і напрямком перпендикуляра OP , опущеного із початку координат на пряму і величиною кута α , який утворює даний перпендикуляр з віссю Ox .

На прямій l візьмемо довільну точку $M(x, y)$. Позначимо довжину перпендикуляра через p , а орт нормалі через $\vec{n}^0$. Проекція радіус-вектора $\vec{r} = \vec{OM}$ на нормаль буде завжди рівною p .

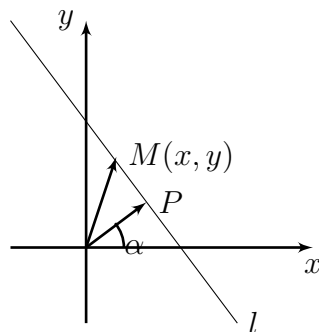


Рисунок 8.5 – Нормальне рівняння прямої

Таким чином, пряма l визначається як геометричне місце точок площини, проекції радіус-векторів яких на нормаль дорівнюють сталій величині p . На основі скалярного добутку маємо

$$\text{пр}_{\vec{n}^0} \vec{r} = \vec{r} \cdot \vec{n}^0. \quad (8.10)$$

Рівняння (8.10) є нормальним рівнянням прямої у векторній формі. Тому що $|\vec{n}^0| = 1$, координати $\vec{n}^0 = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, вектор $\vec{OM} = (x, y)$, то в координатній формі рівняння (8.10) буде мати вигляд

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0. \quad (8.11)$$

Якщо пряма лінія задана загальним рівнянням $Ax + By + C = 0$, то це рівняння можна звести до нормального рівняння прямої (8.11). Помножимо загальне рівняння прямої на деякий множник μ

$$\mu Ax + \mu By + \mu C = 0. \quad (8.12)$$

Одержане рівняння і загальне рівняння прямої рівносильні. Щоб рівняння (8.12) було нормальним, тобто мало вигляд (8.11) потрібно, щоб виконувалися рівності

$$\begin{cases} \mu A = \cos \alpha, \\ \mu B = \sin \alpha, \\ \mu C = -p. \end{cases} \quad (8.13)$$

Перші дві рівності в (8.13) піднесемо до квадрату і додамо. Тоді одержимо, що

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (8.14)$$

μ називається нормувальним (нормуючим) множником. Третя рівність (8.13) встановлює знак множника μ , а саме знак μ є протилежним знакові вільного члена C .

Приклад 8.1. Привести до нормального вигляду рівняння $4x - 3y - 7 = 0$.



Розв'язання. Знаходимо нормувальний множник

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{1}{5}$$

(вибираємо знак плюс, так як $C = -7 < 0$). Помноживши на $\frac{1}{5}$ дане рівняння, одержимо

$$\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - \frac{7}{5} = 0.$$

Одержане рівняння і є нормальним рівнянням прямої. В цьому рівнянні $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$, $p = \frac{7}{5}$. ■

Відстань від точки до прямої

Нехай маємо пряму l , задану рівнянням $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ і точку $M_0(x_0, y_0)$. Потрібно знайти віддаль від цієї точки до прямої l . Через точку $M_0(x_0, y_0)$ проведемо пряму l_1 паралельну прямій l

Шукану віддаль від точки M до прямої l позначимо через $d = M_0D$. Тому що $OP = p$, а $OP_1 = p_1$, то $d = p_1 - p$.

Якщо б точка M знаходилася на тій же віддалі від прямої l , але з другого боку, то тоді $d = -(p_1 - p)$. Таким чином, шукана віддаль визначається рівністю $d = \pm(p_1 - p)$ або $d = |p_1 - p|$. Нормальне рівняння прямої l_1 паралельної l має вигляд

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p_1 = 0. \quad (8.15)$$

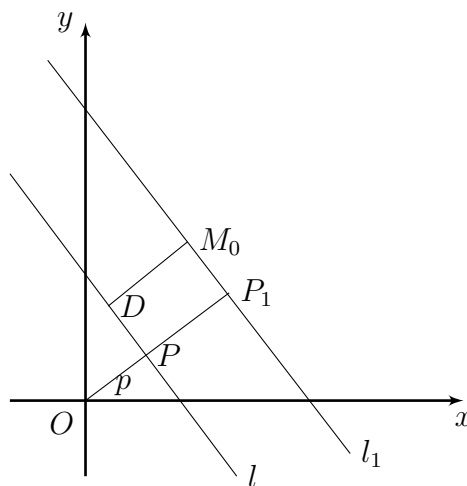


Рисунок 8.6 – Відстань від точки до прямої

Тому що точка $M_0(x_0; y_0)$ знаходиться на прямій l_1 , то її координати задовольняють рівнянню (8.15), тобто

$$x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p_1 = 0$$

і звідси $p_1 = x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha$.

Підставляючи значення p_1 в рівність $d = |p_1 - p|$, одержимо

$$d = |x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p|. \quad (8.16)$$

Формула (8.16) є формулою відстані від точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої, заданої нормальним рівнянням.

Якщо ж пряма задана загальним рівнянням, то вістань від точки $M_0(x_0; y_0)$ знаходиться за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (8.17)$$

Зауваження 8.1. Значення d завжди додатне, бо це відстань. Відхиленням δ точки $M_0(x_0; y_0)$ від прямої $Ax + By + C = 0$ називається додатне число $\delta = d$, якщо точки M_0 і $O(0; 0)$ лежать по різні сторони від прямої, і від'ємне число $\delta = -d$, якщо ці точки лежать по один бік від неї. З формули (8.17) випливає, що відхилення

$$\delta = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}},$$

де знак знаменника має бути протилежний до знаку C . □

Приклад 8.2. Знайти площу квадрата, дві сторони якого лежать на прямих $4x - 3y - 10 = 0$ і $8x - 6y + 15 = 0$. ☺

Розв'язання. Оскільки задані прямі паралельні, то довжину d сторони квадрата можна знайти як відстань від довільної точки однієї прямої до другої прямої. Знайдемо яку-небудь точку на першій прямій. Нехай, наприклад, $x = 1$, тоді $4 \cdot 1 - 3y - 10 = 0$, звідки $y = -2$. Отже, точка $M_0(1; -2)$ належить першій прямій.

За формулою (8.17) знайдемо відстань від точки M_0 до другої прямої:

$$d = \frac{|8 \cdot 1 - 6 \cdot (-2) + 15|}{\sqrt{8^2 + (-6)^2}} = \frac{7}{2}.$$

Площа квадрата $S = d^2 = \frac{49}{4}$. ■

Приклад 8.3. Знайти віддаль від точки $M(3; 4)$ до прямої $4x - 3y + 10 = 0$. ☺

Розв'язання. Підставляємо замість x_0 і y_0 координати точки M_0 , тобто $x_0 = 3$, $y_0 = 4$ у формулу (8.17) і знаходимо шукану відстань $d = \frac{|4 \cdot 3 - 3 \cdot 4 + 10|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{10}{5} = 2$. ■

Загальне рівняння прямої та його дослідження

Усі одержані вище рівняння прямої лінії є рівняннями першого степеня відносно змінних x і y , тобто лінійними рівняннями. Отже, рівняння будь-якої прямої, яка лежить в площині Oxy , є

лінійним рівнянням відносно x і y .

Покажемо, що правильним буде й обернене твердження: кожне лінійне рівняння

$$Ax + By + C = 0 \quad (8.18)$$

з двома змінними x і y визначає на площині в прямокутній системі координат пряму лінію.

Дійсно, якщо (x_1, y_1) — будь-який розв'язок рівняння (8.18), то

$$Ax_1 + By_1 + C = 0. \quad (8.19)$$

Віднімаючи почленно від рівняння (8.18) рівність (8.19), дістаємо

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0. \quad (8.20)$$

Рівняння (8.20) еквівалентне рівнянню (8.18) і згідно з формулою (8.9) визначає на площині Oxy пряму, яка проходить через точку $M_1(x_1, y_1)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (A; B)$, тобто рівняння (8.18) також визначає пряму і називається **загальним рівнянням прямої**. Коефіцієнти A і B при невідомих x і y загального рівняння є координатами її нормального вектора.

Кожне з рівнянь (8.2) - (8.9) зводиться до рівняння (8.18), отже, кожна пряма лінія задається рівнянням (8.18), і навпаки, кожне рівняння (8.18) визначає на площині Oxy пряму. Це означає, що кожна пряма — це лінія першого порядку, і навпаки, кожна лінія першого порядку є пряма.

Дослідимо загальне рівняння, тобто розглянемо окремі випадки розміщення прямої в системі координат Oxy залежно від значень коефіцієнтів A , B і C .

1. Якщо $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, то рівняння (8.18) зводиться до рівняння прямої у відрізках на осях

$$\frac{x}{-C/A} + \frac{y}{-C/B} = 1,$$

тобто пряма перетинає осі координат в точках з координатами $(-\frac{C}{A}; 0)$ і $(0; -\frac{C}{B})$.

2. Якщо $A = 0$, то пряма $By + C = 0$ паралельна осі Ox і проходить через точку $(0; -\frac{C}{B})$, оскільки нормальний вектор $\vec{n} = (0; B)$ прямої перпендикулярний до осі Ox , а координати даної точки задовольняють рівняння прямої.
3. Аналогічно попередньому, якщо $B = 0$, то пряма $Ax + C = 0$ паралельна осі Oy і проходить через точку $(-\frac{C}{A}; 0)$.
4. Якщо $C = 0$, то пряма $Ax + By = 0$ проходить через початок координат, тому що координати точки $O(0; 0)$ задовольняють рівняння прямої.
5. Якщо $A = C = 0$, то згідно з попереднім рівнянням $By = 0$ або $y = 0$ визначає вісь Ox .
6. Якщо $B = C = 0$, то рівняння $Ax = 0$ або $x = 0$ визначає вісь Oy .

Кут між двома прямими. Умови паралельності і перпендикулярності двох прямих

Кут між двома прямими вимірюється кутом між їхніми напрямними векторами. При цьому слід зазначити, що, вибравши на одній із прямих напрямний вектор, напрямлений в протилежну сторону, дістанемо другий кут, який доповнює перший до π .

а) Нехай прямі l_1 та l_2 задано канонічними рівняннями

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1}; \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2}$$

і φ — кут між цими прямими: $\varphi = (\widehat{l_1, l_2})$, $0 < \varphi < \pi$. Оскільки вектори $\vec{s}_1 = (m_1; n_1)$ і $\vec{s}_2 = (m_2; n_2)$ є напрямними векторами даних прямих (рис. 8.7) і $\varphi = (\widehat{\vec{s}_1, \vec{s}_2})$, то отримаємо

$$\cos \varphi = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2}}. \quad (8.21)$$

— *формула кута між двома прямими.*

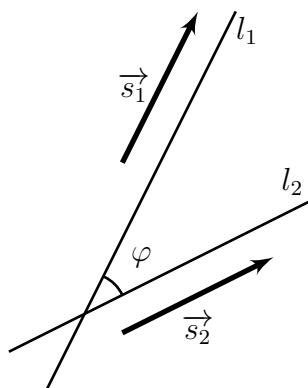


Рисунок 8.7 – Кут між двома прямими, заданими канонічними рівняннями

Якщо прямі l_1 і l_2 паралельні, то вектори $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$ теж паралельні, тому їхні координати пропорційні, тобто

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad (8.22)$$

— *умова паралельності двох прямих.*

Якщо прямі l_1 і l_2 перпендикулярні, то вектори $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$ теж перпендикулярні і їхній скалярний добуток дорівнює нулю, отже,

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0 \quad (8.23)$$

— *умова перпендикулярності двох прямих.*

б) Нехай тепер прямі l_1 і l_2 задані загальними рівняннями $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ і $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$, тоді кут φ між ними (рис. 8.8) дорівнює куту між їхніми нормальними векторами $\vec{n}_1 = (A_1; B_1)$ і $\vec{n}_2 = (A_2; B_2)$; тому аналогічно випадку а) дістанемо:

а) формулу для кута φ між прямими l_1 і l_2 :

$$\cos \varphi = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}; \quad (8.24)$$

б) умову паралельності прямих l_1 і l_2 :

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}; \quad (8.25)$$

в) умову перпендикулярності прямих l_1 і l_2 :

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0. \quad (8.26)$$

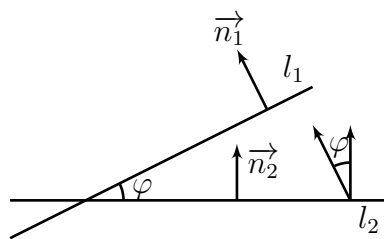


Рисунок 8.8 – Кут між двома прямими, заданими загальними рівняннями

Нехай прямі l_1 і l_2 задані рівняннями з кутовими коефіцієнтами $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, де $k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$, $k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$ — кутові коефіцієнти, то з рис. 8.9 видно, що

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \quad (8.27)$$

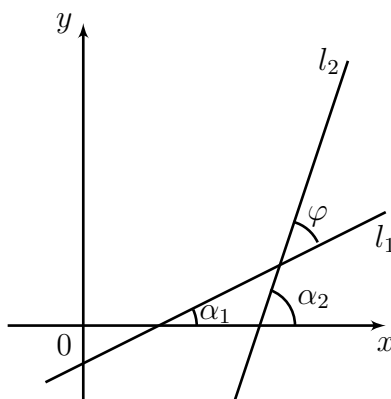


Рисунок 8.9 – Кут між прямими, заданими рівняннями з кутовими коефіцієнтами

Зауважимо, що формула (8.27) визначає кут, на який треба повернути пряму l_1 , (проти годинникової стрілки), щоб вона збіглась з прямою l_2 . Якщо прямі l_1 і l_2 паралельні, то $\varphi = 0$ і $\operatorname{tg} \varphi = 0$, тому з формули (8.27) маємо $k_2 - k_1 = 0$. Отже, **умовою паралельності двох прямих є рівність їхніх кутових коефіцієнтів**:

$$k_1 = k_2. \quad (8.28)$$

Якщо прямі l_1 і l_2 перпендикулярні, то $\varphi = 90^\circ$ і $\operatorname{tg} \varphi$ не існує, тому що знаменник дробу (8.27) дорівнює нулю. Таким чином, **умова перпендикулярності прямих має вигляд**

$$k_1 k_2 + 1 = 0 \text{ або } k_2 = -\frac{1}{k_1}. \quad (8.29)$$

Формули (8.21), (8.24) і (8.27) дають змогу визначити один із двох суміжних кутів, які утворюються при перетині двох прямих. Другий кут дорівнює $\pi - \varphi$. Іноді вирази справа в цих формулах записують по модулю, тоді визначається гострий кут між прямими.

Приклад 8.4. Знайти кут між прямими $3x - 4y + 1 = 0$ і $5x - 12y + 3 = 0$. ☺

Розв'язання. За формулою (8.24) маємо

$$\cos \varphi = \frac{3 \cdot 5 + (-4) \cdot (-12)}{\sqrt{3^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{5^2 + (-12)^2}} = \frac{15 + 48}{5 \cdot 13} = \frac{63}{65} \approx 0,96.$$

$$\varphi = \arccos 0,96.$$

Приклад 8.5. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $(-8; 1)$ паралельно прямій $2x - y + 7 = 0$. ☺

Розв'язання. Зведемо задане рівняння до вигляду (8.5): $y = 2x + 7$. Отже, кутовий коефіцієнт прямої $k = 2$. Оскільки шукана і задана прямі паралельні, то за умовою (8.28) їхні кутові коефіцієнти рівні між собою, тому, скориставшись рівнянням (8.4), дістанемо $y - 1 = 2(x + 8)$ або $y - 2x - 17 = 0$. ■

Приклад 8.6. Медіани BM і CN (рис. 8.10) трикутника ABC лежать на прямих $x + y = 3$ і $2x + 3y = 1$, а точка $A(1; 1)$ – вершина трикутника. Скласти рівняння прямої BC . ☺

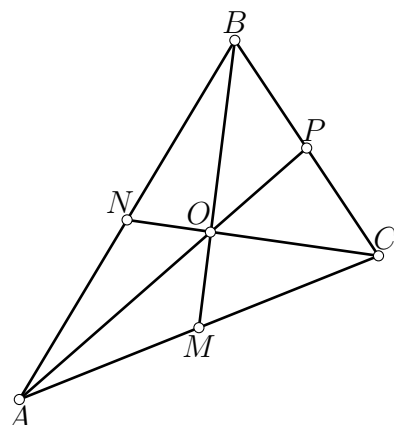


Рисунок 8.10 – Ілюстрація до прикладу 8.6

Розв'язання. Розв'язуючи систему рівнянь $\begin{cases} x + y = 3; \\ 2x + 3y = 1, \end{cases}$ знайдемо координати точки перетину

медіан: $O(8; -5)$. Як відомо, медіани трикутника у точці перетину діляться як 2 до 1, тому з відношення $\frac{AO}{OP} = \frac{2}{1} = \lambda$ і формул (4.3) дістанемо координати точки P (середини BC): $8 = \frac{1+2x_P}{1+2}$, $-5 = \frac{1+2y_P}{1+2}$; $x_P = \frac{23}{2}$, $y_P = -8$. Оскільки точки B і C лежать на заданих прямих, то їхні координати задовольняють задані рівняння. Точка P ділить відрізок BC навпіл, отже, маємо систему рівнянь

$$\frac{x_B + x_C}{2} = \frac{23}{2}; \quad \frac{y_B + y_C}{2} = -8; \quad x_B + y_B = 3; \quad 2x_C + 3y_C = 1,$$

звідки $x_C = 11$, $y_C = -7$. Пряма BC проходить через точки $P(\frac{23}{2}; -8)$ і $C(11; -7)$, тому за формулою (8.7) дістанемо $\frac{x - \frac{23}{2}}{11 - \frac{23}{2}} = \frac{y + 8}{-7 + 8}$ або $2x + y - 15 = 0$. ■

ТЕМА 9. ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Поняття лінії другого порядку

Визначення 9.1. Лінія другого порядку — це множина точок, координати яких задовольняють рівняння виду

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0, \quad (9.1)$$

де коефіцієнти a, b, c, d, e, f — дійсні числа, причому хоча б одне з чисел a, b, c відмінне від нуля, тобто $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

Зокрема, до ліній другого порядку належать такі лінії: коло, еліпс, гіпербола і парабола. Виявляється, що множиною точок $(x; y)$ з дійсними координатами, які задовольняють рівняння (9.1), може бути не тільки одна з названих ліній. Рівняння (9.1) може визначати на площині Oxy також дві прямі, одну пряму, точку або не визначати жодної точки.

Отже, коло, еліпс, парабола і гіпербола задаються рівняннями другого степеня, але, на відміну від прямої лінії, обернене твердження неправильне.

Щоб відповісти на запитання, яке геометричне місце точок визначається рівнянням (9.1), треба підібрати таку систему координат, в якій це рівняння спростилося би. Відомо, що для всякої лінії другого порядку існує прямокутна система координат (її називають канонічною), в якій рівняння (9.1) має найпростіший або канонічний вигляд. Ми не займатимемося тут зведенням загального рівняння (9.1) до канонічного вигляду, а встановимо і дослідимо лише окремі канонічні рівняння.

Лінії другого порядку називають також **конічними перерізами** через те, що їх можна дістати як лінії перетину кругового конуса з площиною. Коло утворюється як лінія перетину площини, яка перпендикулярна до осі конуса і не проходить через його вершину (9.1, а); еліпс — лінія перетину площини, яка перетинає всі твірні конуса, не перпендикулярна до осі конуса і не проходить через його вершину (9.1, б); якщо перетнути двопорожнинний конус площиною, паралельною двом твірним, дістанемо гіперболу (9.1, в), а одній твірній — параболу (9.1, г).

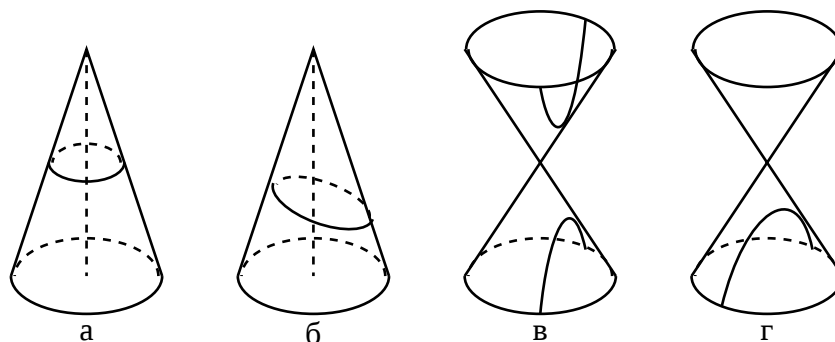


Рисунок 9.1 – Конічні перерізи

Лінії другого порядку широко застосовуються в науці і техніці.

Приклад 9.1. 1. Планети Сонячної системи рухаються по еліпсах з спільним фокусом, в якому розташовано Сонце.

2. Якщо у фокусі параболи розмістити джерело світла, то промені, відбившись від параболи, підуть паралельно її осі. На цій властивості ґрунтується побудова прожектора.
3. У динаміці космічних польотів використовуються поняття трьох космічних швидкостей: $v_1 = 7,9$ км/с, $v_2 = 11,2$ км/с, $v_3 = 16,7$ км/с. Нехай v_0 – початкова швидкість, з якою штучний супутник запускається з поверхні Землі. При недостатній початковій швидкості $v_0 < v_1$ супутник обертається навколо Землі не буде. Якщо $v_0 = v_1$, то супутник буде обертатися по круговій орбіті, центр якої знаходиться в центрі Землі. Якщо $v_1 < v_0 < v_2$, то обертання супутника відбуватиметься по еліпсу, причому центр Землі знаходитиметься в одному з фокусів еліпса.
При $v_2 \leq v_0 < v_3$ супутник долає земне тяжіння і стає штучним супутником Сонця, рухаючись при цьому по параболі (при $v_0 = v_2$) або по гіперболі (при $v_2 < v_0 < v_3$) відносно Землі. Якщо $v_0 \geq v_3$, то супутник спочатку долає земне, а потім і сонячне тяжіння і залишає Сонячну систему.
4. Рух матеріальної точки під дією центрального поля сили тяжіння відбувається по одній з ліній другого порядку. ☺

Коло

Означення 9.2. Колом називають множину точок площини, відстані яких від заданої точки площини (центра кола) дорівнюють сталому числу (радіусу). ✓

Щоб вивести рівняння кола, використаємо прямокутну систему координат Oxy ; позначимо через $O_1(a; b)$ — центр кола, через $M(x; y)$ — довільну точку площини і через R — радіус кола (рис. 9.2).

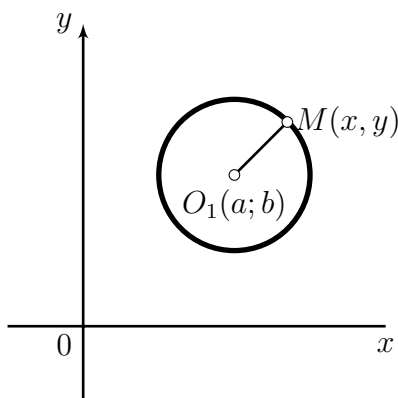


Рисунок 9.2 – Коло

Точка M лежить на колі тоді і лише тоді, коли $O_1M = R$ або

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = R. \quad (9.2)$$

Рівняння (9.2) і є шуканим рівнянням кола. Але зручніше користуватись рівнянням, яке дістанемо при піднесенні обох частин рівняння (9.2) до квадрата:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \quad (9.3)$$

Оскільки рівняння (9.3) випливає з рівняння (9.2), то координати всякої точки, які задовольняють рівняння (9.2), задовольнятимуть також рівняння (9.3). Проте при піднесенні будь-якого рівняння до квадрата, як відомо, можуть з'явитися сторонні корені, тобто рівняння (9.2) і (9.3) можуть виявитися нееквівалентними. Покажемо, що в цьому випадку так не буде. Справді, добувши корінь з обох частин рівняння (9.3), дістанемо

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = \pm R.$$

Але в правій частині знак мінус треба відкинути, бо відстань $R > 0$. Отже, рівняння (9.2) і (9.3) еквівалентні, тобто визначають одну й ту саму криву — коло.

Якщо центр кола міститься в початку координат, то $a = b = 0$ і рівняння (9.3) набирає вигляду

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (9.4)$$

Рівняння (9.4) називається **канонічним рівнянням кола**. Якщо в рівнянні (9.3) розкрити дужки, то дістанемо **загальне рівняння кола**

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0, \quad (9.5)$$

де $A = -2a$, $B = -2b$, $C = a^2 + b^2 - R^2$. Отже, коло — лінія другого порядку.

Рівняння кола має такі властивості.

1. Коефіцієнти при x^2 і y^2 рівні між собою.
2. У рівнянні відсутній член з добутком xy .

Обернене твердження неправильне: не всяке рівняння другого степеня, яке задовольняє умови 1 і 2, є рівнянням кола, тобто не кожне рівняння виду (9.5) визначає коло.

Приклад 9.2. Написати рівняння кола, якщо точки $A(-1; 4)$ і $B(3; 2)$ є кінцями його діаметра. ☺

Розв'язання. Нехай $O_1(a; b)$ — центр кола. Тоді $AO_1 = O_1B$, тому маємо

$$a = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1 + 3}{2} = 1, \quad b = 3.$$

Оскільки радіус кола $R = AO_1 = \sqrt{5}$, то за формулою (9.3) дістаємо шукане рівняння: $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 5$. ■

Приклад 9.3. Знайти центр і радіус кола $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 23 = 0$. ☺

Розв'язання. Групуємо доданки із змінною x та змінною y і доповнимо одержані вирази до повних квадратів:

$$x^2 + 4x + y^2 - 6y - 23 = 0,$$

або

$$(x^2 + 4x + 4) - 4 + (y^2 - 6y + 9) - 9 - 23 = 0,$$

звідки

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 36.$$

Отже, точка $(-2; 3)$ — центр кола, а $R = 6$ — його радіус. ■

Приклад 9.4. Показати, що рівняння $x^2 + y^2 + 6x - 6y + 19 = 0$ не визначає ніякого геометричного об'єкта. ☺

Розв'язання. Перетворимо рівняння

$$(x^2 + 6x + 9) - 9 + (y^2 - 6y + 9) - 9 + 19 = 0$$

або

$$(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = -1.$$

Оскільки сума невід'ємних чисел не може бути від'ємним числом, то задане рівняння не задовольняють координати жодної точки площини Oxy . ■

Приклад 9.5. Арка має форму дуги кола. Знайти довжину l дуги арки, якщо її проліт і підйом відповідно дорівнюють $2a$ і b . (Підйом арки дорівнює відношенню її висоти до прольоту.) ☺

Розв'язання. Введемо систему координат Oxy так, як показано на 9.3, де арка MPN – дуга кола, $MO = ON$, $OP = h = 2ab$. В обраній системі координат точки M , P і N мають координати $M(-a, 0)$, $P(0, 2ab)$, $N(a, 0)$. Нехай $O_1(0; y_0)$ і R відповідно центр і радіус кола, тоді його рівняння має вигляд

$$x^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

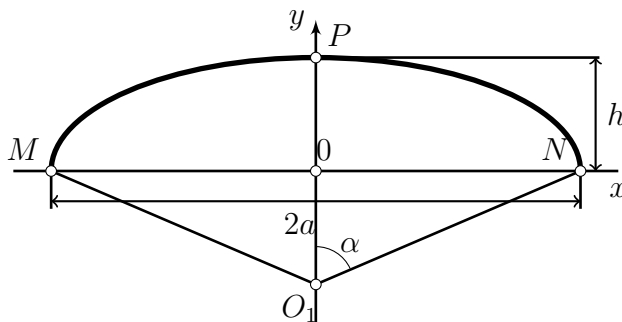


Рисунок 9.3 – Ілюстрація до задачі 9.5

Оскільки коло проходить через точки P і N , то

$$(2ab - y_0)^2 = R^2, \quad a^2 + y_0^2 = R^2,$$

звідки

$$R = \frac{(4b^2 + 1)a}{4b}; \quad |y_0| = \frac{(4b^2 - 1)a}{4b}.$$

Знайдемо центральний кут $2\alpha = \angle MO_1N$, на який спирається дуга арки. Маємо $\cos \alpha = \frac{|y_0|}{R} = \frac{|4b^2 - 1|}{4b^2 + 1}$, тому $2\alpha = 2 \arccos \frac{|4b^2 - 1|}{4b^2 + 1}$, отже

$$l = 2R\alpha = \frac{(4b^2 + 1)a}{2b} \arccos \frac{|4b^2 - 1|}{4b^2 + 1}.$$

Еліпс

Означення 9.3. Еліпсом називають множину всіх точок площини, сума відстаней яких від двох даних точок цієї площини, які називаються фокусами, є величина стала і більша від відстані між фокусами.

Щоб вивести рівняння еліпса, візьмемо на площині дві точки F_1 і F_2 — фокуси еліпса і розмістимо прямокутну систему координат так, щоб вісь Ox проходила через фокуси, а початок координат ділив відрізок F_1F_2 навпіл (рис. 9.4).

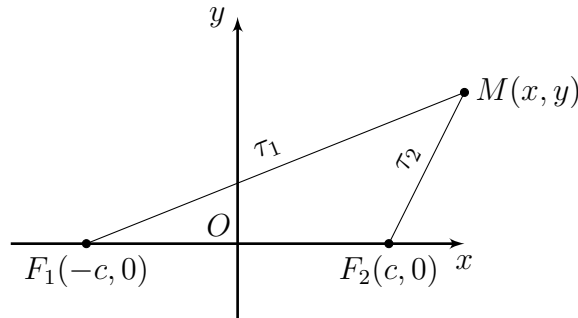


Рисунок 9.4 – Побудова еліпса

Позначимо відстань між фокусами, яку називають фокальною, через $2c$: $F_1F_2 = 2c$, а суму відстаней від довільної точки еліпса до фокусів — через $2a$. Тоді фокуси мають такі координати: $F_1(-c; 0)$ і $F_2(c; 0)$. За означенням $2a > 2c$, тобто $a > c$. Нехай $M(x; y)$ — довільна точка площини. Ця точка лежить на еліпсі тоді, коли $F_1M + F_2M = 2a$ або

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \quad (9.6)$$

Це, по суті, і є рівняння еліпса. Щоб спростити його, перенесемо один радикал у праву частину, піднесемо обидві частини до квадрата і зведемо подібні. Матимемо

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

Піднісши обидві частини цього рівняння ще раз до квадрата та спростивши вираз, дістанемо: $x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$. Оскільки $a > c$, то $a^2 - c^2 > 0$, тому можна позначити

$$a^2 - c^2 = b^2. \quad (9.7)$$

Тоді рівняння (9.6) набере вигляду

$$x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

або

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (9.8)$$

Можна довести, що рівняння (9.6) і (9.8) еквівалентні. Рівняння (9.8) називається **канонічним рівнянням еліпса**. Отже, еліпс — крива другого порядку.

Встановимо деякі властивості і дослідимо форму еліпса.

1. Рівняння (9.8) містить змінні x та y лише в парних степенях, тому, якщо точка $(x; y)$ належить еліпсу, то йому також належать точки $(-x; y)$, $(x; -y)$ і $(-x; -y)$. Тому еліпс симетричний відносно осей Ox та Oy , а також відносно точки $O(0; 0)$, яку називають центром еліпса. Отже, для встановлення форми еліпса достатньо дослідити ту його частину, яка розміщена в одному, наприклад в першому, координатному куті.

2. В першому координатному куті $x \geq 0, y \geq 0$, тому з рівності (9.8) маємо

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad (9.9)$$

звідки випливає, що точки $A_1(a; 0)$ та $B_1(0; b)$ належать еліпсу, причому, якщо x збільшується від 0 до a , то y зменшується від b до 0. Крім того, не існує точок еліпса, у яких $x > a$, бо вираз (9.9) при $x > a$ не має змісту. Таким чином, частина еліпса, розміщена в першому координатному куті, має форму дуги A_1B_1 (рис. 9.5).

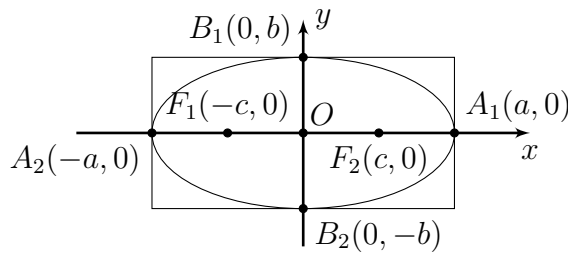


Рисунок 9.5 – Канонічне рівняння еліпса

Відобразивши цю дугу симетрично відносно осей Ox та Oy , дістанемо весь еліпс. Він вміщується в прямокутник із сторонами $2a$ і $2b$. Сторони прямокутника дотикаються до еліпса в точках перетину його з осями Ox і Oy .

Еліпс перетинає осі координат в точках $A_1(a; 0)$, $A_2(-a; 0)$, $B_1(0; b)$, $B_2(0; -b)$. Ці точки називаються **вершинами еліпса**.

Величини $A_1A_2 = 2a$ та $B_1B_2 = 2b$ називаються відповідно **великою та малою осями еліпса**.

Таким чином, з властивостей 1 і 2 випливає, що всякий еліпс має дві взаємно перпендикулярні **осі симетрії (головні осі еліпса)** і **центр симетрії (центр еліпса)**. Точки, в яких еліпс перетинає головні осі, обмежують на головних осях відрізки довжинами $2a$ і $2b$, які називаються великою і малою осями еліпса, а числа a та b — великою і малою півосьми еліпса. Весь еліпс вміщується в прямокутник із сторонами $2a$ і $2b$. Сторони прямокутника дотикаються до еліпса в його вершинах.

3. Якщо $a = b$, то рівняння (9.8) набирає вигляду $x^2 + y^2 = a^2$, тобто дістаємо рівняння кола. Отже, коло є окремим випадком еліпса. З формули (9.7) випливає, що при $a = b$ значення $c = 0$, тобто коло — це еліпс, у якого фокуси збігаються з його центром.

Міра відхилення еліпса від кола характеризується величиною ε , яка називається **ексцентриситетом еліпса** і дорівнює відношенню половини його фокальної відстані до довжини більшої півосі:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \quad (9.10)$$

причому $0 \leq \varepsilon < 1$, оскільки $0 \leq c < a$. З формул (9.7) і (9.10) дістаємо

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

Отже, якщо $\varepsilon = 0$, то $b = a$, тобто еліпс перетворюється в коло; якщо ε наближається до одиниці, то відношення осей $\frac{b}{a}$ зменшується, тобто еліпс все більше розтягується вздовж осі Ox .

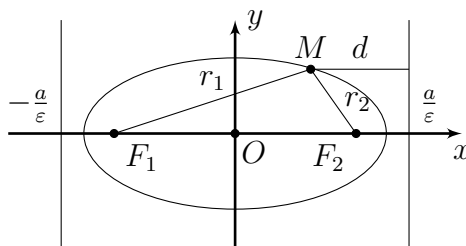


Рисунок 9.6 – Директриси еліпса

4. Нехай $M(x; y)$ — довільна точка еліпса з фокусами F_1 і F_2 (рис. 9.6). Відстані $F_1M = r_1$ і $F_2M = r_2$ називаються **фокальними радіусами точки M** . Очевидно $r_1 + r_2 = 2a$. Прямі $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ називаються **директрисами еліпса**.

Відношення фокальних радіусів довільної точки еліпса до відстаней цієї точки від відповідних директрис ε величина стала і дорівнює ексцентриситету еліпса, тобто

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon. \quad (9.11)$$

Приклад 9.6. Скласти канонічне рівняння еліпса, який проходить через точки $M_1(3; 2)$ і $M_2(4; \frac{2\sqrt{2}}{3})$, якщо фокуси його лежать на осі Ox симетрично початку координат. ☺

Розв'язання. За умовою координати заданих точок задовольняють рівняння (9.8):

$$\frac{16}{a^2} + \frac{8}{9b^2} = 1, \quad \frac{9}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1.$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, знаходимо $a^2 = 18$ і $b^2 = 8$. Отже, шукане рівняння має вигляд

$$\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1.$$

Приклад 9.7. Скласти канонічне рівняння еліпса, фокуси якого розміщені на осі Ox симетрично початку координат, якщо відстань між фокусами дорівнює 14, а ексцентриситет дорівнює $7/9$. ☺

Розв'язання. Оскільки $2c = 14$, то $c = 7$. З формул (9.10) і (9.7) дістаємо, що $a = 9$ і $b^2 = 32$. Отже, шукане рівняння має вигляд

$$\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1.$$

Рівняння дотичної до еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ у точці $M_0(x_0, y_0)$ має вигляд $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$. Еліпс з центром у точці $C(x_0, y_0)$ задається рівнянням

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Гіпербола

Означення 9.4. Гіперболою називається множина всіх точок площини, модуль різниці відстаней яких від двох даних точок цієї площини, що називаються фокусами, є величина стала і менша відстані між фокусами. ✓

Позначимо через F_1 і F_2 фокуси гіперболи, відстань між ними — через $2c$, а модуль різниці відстаней від довільної точки гіперболи до фокусів — через $2a$. За означенням $a < c$. Щоб вивести рівняння гіперболи, візьмемо на площині прямокутну систему координат Oxy так, щоб вісь Ox проходила через фокуси, а початок координат поділив відрізок F_1F_2 навпіл 9.7. Точка $M(x; y)$ площини лежить на гіперболі тоді і лише тоді, коли $|MF_1 - MF_2| = 2a$ або

$$|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}| = 2a.$$

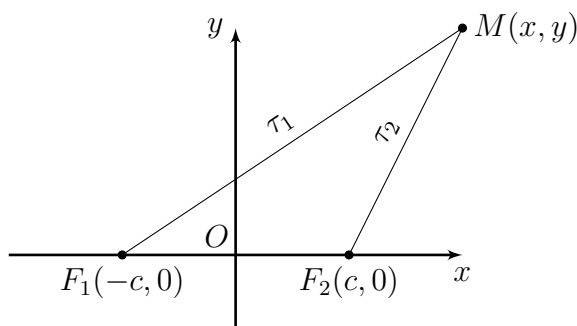


Рисунок 9.7 – Побудова гіперболи

Виконавши ті самі перетворення, що й при виведенні рівняння еліпса, дістанемо канонічне рівняння гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (9.12)$$

де

$$b^2 = c^2 - a^2. \quad (9.13)$$

Отже, гіпербола є лінією другого порядку.

Встановимо деякі властивості і дослідимо форму гіперболи.

1. Гіпербола симетрична осям Ox , Oy і початку координат.
2. Для частини гіперболи, яка лежить у першому координатному куті, з рівняння (9.12) дістанемо

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}. \quad (9.14)$$

З рівності (9.14) випливає, що $x \geq a$. Точка $A_1(a; 0)$ належить гіперболі і є точкою перетину гіперболи з віссю Ox . Гіпербола не перетинає вісь Oy . Якщо $x > a$, то $y > 0$, причому якщо x збільшується, то y також збільшується, тобто якщо $x \rightarrow +\infty$, то $y \rightarrow +\infty$. Покажемо, що, віддаляючись у нескінченність, змінна точка $M(x; y)$ гіперболи необмежено наближається до прямої

$$y = \frac{b}{a}x. \quad (9.15)$$

$M(x; y)$, і знайдемо різницю MN між ординатами ліній (9.14) і (9.15):

$$MN = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) =$$

$$= \frac{b(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{a(x + \sqrt{x^2 - a^2})} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Звідси, якщо $x \rightarrow +\infty$, то знаменник теж прямує до $+\infty$, а $MN \rightarrow 0$, бо чисельник є сталою величиною. Отже, точки M гіперболи, віддаляючись від точки $A_1(a; 0)$ у нескінченність, необмежено наближаються до прямої (9.15), тобто ця пряма є асимптотою.

Таким чином, частина гіперболи, розміщена у першому координатному куті, має вигляд дуги, яка показана на (рис. 9.8). Відобразивши цю дугу симетрично відносно координатних осей, дістанемо вигляд всієї гіперболи.

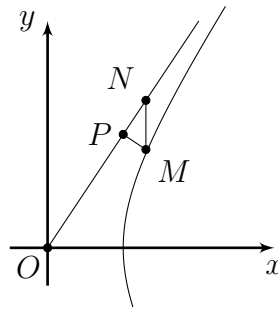


Рисунок 9.8 – Побудова асимптот гіперболи

Гіпербола складається з двох віток (лівої і правої) і має дві асимптоти:

$$y = \frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

Осі симетрії називаються **осями гіперболи**, а точка перетину осей — **її центром**. Вісь Ox перетинає гіперболу в двох точках $A_1(a; 0)$ і $A_2(-a; 0)$, які називаються **вершинами гіперболи**. Ця вісь називається **дійсною віссю** гіперболи, а вісь, яка не має спільних точок з гіперболою, — **уявною віссю**.

Дійсною віссю називають також відрізок A_1A_2 , який сполучає вершини гіперболи і його довжину A_1A_2 . Відрізок B_1B_2 , який сполучає точки $B_1(0; b)$ і $B_2(0; -b)$, а також його довжину, називають **уявною віссю**. Величини a і b відповідно називаються **дійсною і уявною півосями гіперболи**.

Прямокутник із сторонами $2a$ і $2b$ називається **основним прямокутником гіперболи**.

При побудові гіперболи (9.12) доцільно спершу побудувати основний прямокутник C_1D_1DC (рис. 9.9), провести прямі, що проходять через протилежні вершини цього прямокутника — асимптоти гіперболи і визначити вершини A_1 і A_2 гіперболи. Рівняння

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \tag{9.16}$$

також визначає гіперболу, яка називається **спряженою до гіперболи** (9.12). Гіпербола (9.16) показана на (рис. 9.9) штриховою лінією.

Вершини цієї гіперболи лежать в точках $B_1(0; b)$ і $B_2(0; -b)$, а її асимптоти збігаються з асимптотами гіперболи (9.12).

Гіпербола з рівними півосями ($a = b$) називається **рівносторонньою**, її канонічне рівняння має вигляд $x^2 - y^2 = a^2$. Основним прямокутником рівносторонньої гіперболи є квадрат із стороною $2a$, а її асимптотами — бісектриси координатних кутів $y = \pm x$.

3. Ексцентриситет гіперболи визначається як відношення половини фокальної відстані до довжини її дійсної півосі:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}. \tag{9.17}$$

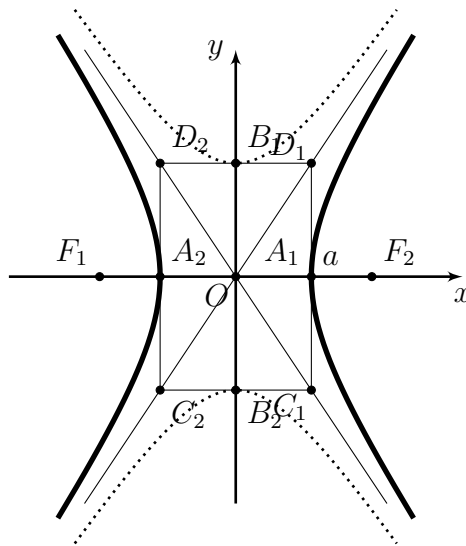


Рисунок 9.9 – Канонічне рівняння гіперболи

Оскільки $c > a$, то $\varepsilon > 1$. Крім того, з формул (9.13) і (9.17) випливає, що

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}.$$

Отже, ексцентриситет гіперболи характеризує її форму: чим більший ексцентриситет, тим більше відношення $\frac{b}{a}$, тобто тим більше основний прямокутник розтягується в напрямі осі Oy , а гіпербола відхиляється від осі Ox ; чим ближче ексцентриситет до одиниці, тим більше основний прямокутник розтягується в напрямі осі Ox , а гіпербола наближається до цієї осі.

4. Прямі $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$, де a — дійсна піввісь гіперболи, а ε — ексцентриситет, називаються директрисами гіперболи. Директриси гіперболи мають ту саму властивість (9.11), що й директриси еліпса.

Приклад 9.8. Скласти канонічне рівняння гіперболи, фокуси якої розміщено на осі Ox симетрично початку координат, якщо дійсна вісь дорівнює 6, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{3}$. ☺

Розв'язання. Оскільки $2a = 6$, то $a = 3$. З формул (9.13) і (9.17) знаходимо, що $b = 4$. Шукане рівняння має вигляд $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

Знайти відстань фокуса гіперболи $x^2 - 8y^2 = 1$ до її асимптот.

Запишемо канонічне рівняння даної гіперболи:

$$\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{1} = 1,$$

звідки $a = \sqrt{8}$, $b = 1$ — півосі гіперболи, тому згідно з формулою (9.15) рівняння асимптоти має вигляд $x - y\sqrt{8} = 0$.

З формули (9.13) знаходимо, що $c = 3$, тому $F_1(-3; 0)$ і $F_2(3; 0)$ — фокуси гіперболи.

Обчислюємо відстань d від фокуса F_1 (або, що те саме, фокуса F_2) до знайденої асимптоти: $d = 1$.

Приклад 9.9. На прямолінійному відрізку залізниці розташовано станції A і B , відстань між якими l . Від заводу N йдуть прямі автомагістралі NA і NB , причому $NB < NA$. Вантаж із заводу N на станцію A можна транспортувати або по автомагістралі NB , а звідти залізницею (перший шлях), або безпосередньо по автомагістралі NA (другий шлях). При цьому тариф (вартість перевезення 1 т вантажу на 1 км) залізницею і автотранспортом становить відповідно m і n ($n > m$), а розвантаження - завантаження однієї тонни коштує k . Визначити зону впливу станції B , тобто множину точок, з яких дешевше доставити вантаж в A першим шляхом, ніж другим. ☺

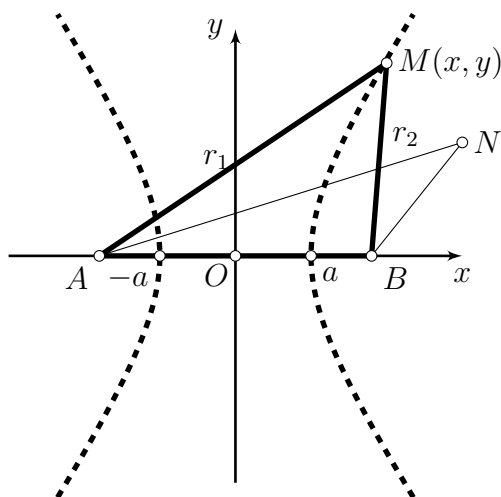


Рисунок 9.10 – Ілюстрація до задачі 9.9

Розв'язання. Введемо систему координат Oxy так, як показано на (рис. 9.10), де $AO = OB$. Знайдемо рівняння множини точок $M(x, y)$, для яких обидва шляхи „однаково вигідні“, тобто таких, що вартість доставки вантажу $S_1 = r_2n + k + lm$ першим шляхом дорівнює вартості $S_2 = r_1n$ доставки вантажу другим шляхом

$$r_2n + k + lm = r_1n, (AM = r_1, BM = r_2).$$

З цієї умови дістанемо

$$r_2 - r_1 = \frac{k + lm}{n} = \text{const.}$$

Отже, множиною точок, в яких $S_1 = S_2$, є права гілка гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

де $a = \frac{lm+k}{2n}$, $b = \frac{1}{2}\sqrt{l^2 - 4a^2}$. Для точок площини, які лежать справа від цієї гілки, $S_1 < S_2$, тобто вигіднішим є перший шлях, а для точок, які лежать зліва, – другий шлях.

Таким чином, права гілка гіперболи обмежує зону впливу станції B , а ліва – станції A . ■

Приклад 9.10. Встановити, що рівняння $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$ визначає гіперболу. Знайти її центр і півосі. ☺

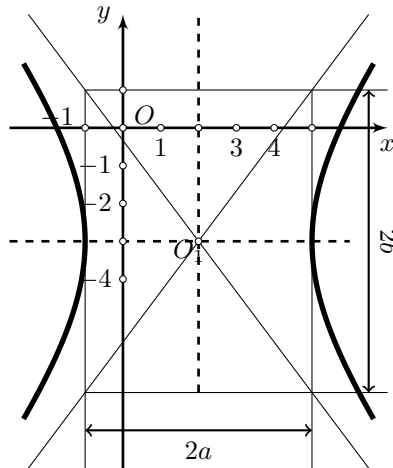


Рисунок 9.11 – Ілюстрація до прикладу 9.10

Розв'язання. Виділимо повні квадрати відносно x та y :

$$16(x^2 - 4x) - 9(y^2 + 6y) - 161 = 0;$$

$$16(x^2 - 4x + 4 - 4) - 9(y^2 + 6y + 9 - 9) - 161 = 0;$$

$$16(x - 2)^2 - 64 - 9(y + 3)^2 + 81 - 161 = 0;$$

$$16(x - 2)^2 - 9(y + 3)^2 = 144; \quad \frac{(x - 2)^2}{9} - \frac{(y + 3)^2}{16} = 1.$$

Дотична до гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ у точці $M_0(x_0, y_0)$ визначається рівнянням

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Рівняння гіперболи з центром у точці $C(x_0, y_0)$ має вигляд

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1,$$

а рівняння її асимптот

$$y - y_0 = \pm \frac{b}{a}(x - x_0).$$

Парабола

Визначення 9.5. Параболою називається множина всіх точок площини, кожна з яких знаходиться на однаковій відстані від даної точки, яка називається фокусом, і від даної прямої, яка називається директрисою і не проходить через фокус. ✓

Знайдемо рівняння параболи. Нехай на площині задані фокус F і директриса, причому відстань фокуса від директриси дорівнює p . Візьмемо прямокутну систему координат Oxy так, щоб вісь Ox проходила через фокус, перпендикулярно до директриси, а вісь Oy ділила відстань між фокусом F і директрисою навпіл (рис. 9.12). Тоді фокус має координати $F(\frac{p}{2}; 0)$, а рівняння директриси має вигляд $x = -\frac{p}{2}$.

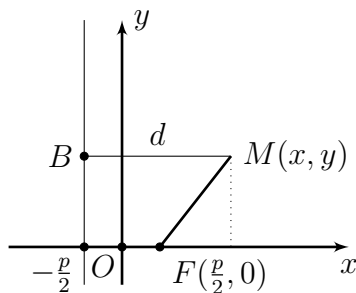


Рисунок 9.12 – Побудова параболі

Нехай $M(x; y)$ — довільна точка площини, а відрізки MB і MF — відстані цієї точки від директриси і фокуса. Точка M тоді лежить на параболі, коли $MB = MF$ або

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}. \quad (9.18)$$

Це і є рівняння параболі. Щоб спростити його, піднесемо обидві частини рівності (9.18) до квадрата:

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4},$$

тобто

$$y^2 = 2px. \quad (9.19)$$

Можна довести, що рівняння (9.18) і (9.19) рівносильні.

Рівняння (9.19) називається **канонічним рівнянням параболі**. Отже, парабола є лінія другого порядку.

Дослідимо форму параболі. Оскільки рівняння (9.19) містить змінну y в парному степені, то парабола симетрична відносно осі Ox . Тому достатньо розглянути лише ту її частину, яка лежить у верхній півплощині. Для цієї частини $y \geq 0$, тому з рівняння (9.19) дістанемо

$$y = \sqrt{2px}. \quad (9.20)$$

З цієї рівності випливає, що парабола розміщена справа від осі Oy , тому що при $x < 0$ вираз (9.20) не має змісту. Значення $x = 0$, $y = 0$ задовольняють рівняння (9.20), тобто парабола проходить через початок координат. Із зростанням x значення y також зростає. Отже, змінна точка $M(x, y)$ параболі, виходячи з початку координат із зростанням x , рухається по ній вправо і вгору.

Виконавши симетричне відображення розглянутої частини параболі відносно осі Ox , матимемо всю параболу (рис. 9.13).

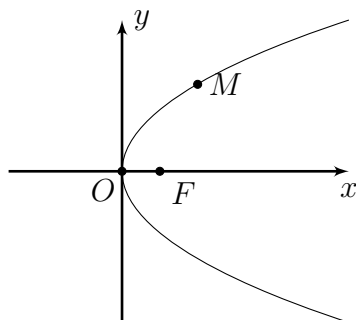


Рисунок 9.13 – Парабола

Вісь симетрії параболі називається її **віссю**; точка перетину осі з параболою — **вершиною параболі**; число, яке дорівнює відстані фокуса від директриси, — **параметром параболі**. Віссю параболі, заданої рівнянням (9.19), є вісь Ox , вершиною — точка $O(0; 0)$ і параметром — число p .

З'ясуємо вплив параметра p на форму параболі. Якщо в рівнянні (9.19) покласти $x = \frac{p}{2}$, то відповідні значення ординати $y = \pm p$, тобто маємо на параболі дві симетричні відносно осі Ox точки $(\frac{p}{2}; p)$ і $(\frac{p}{2}; -p)$. Відстань між цими точками дорівнює $2p$ і збільшується із збільшенням p . Отже, параметр p характеризує „ширину“ області, яку обмежує парабола.

Зауваження 9.1. Використовуючи властивість 4 еліпса та гіперболи і означення параболі, можна дати таке загальне означення кривої другого порядку (крім кола): множина точок, для яких відношення відстані до фокуса і до відповідної директриси є величина стала, — це еліпс (при $0 < \varepsilon < 1$), або парабола (при $\varepsilon = 1$) або гіпербола (при $\varepsilon > 1$). $\square$

Приклад 9.11. Дослідити взаємне розміщення параболі $y^2 = 2x$ і прямої $x + y - 2 = 0$. $\odot$

Розв'язання. Розв'язуючи систему рівнянь $\begin{cases} y^2 = x; \\ x + y - 2 = 0, \end{cases}$ знаходимо розв'язки $(4; -2)$ і $(1; 1)$. Це означає, що пряма перетинає параболу в точках $M_1(4; -2)$, $M_2(1; 1)$. $\blacksquare$

Приклад 9.12. В параболу $x^2 = y\sqrt{3}$ вписано рівносторонній трикутник так, що одна з вершин його збігається з вершиною параболі. Знайти сторону трикутника. $\odot$

Розв'язання. Нехай точка $A(x_0; y_0)$ — одна з вершин трикутника. Тоді іншими його вершинами будуть точки $B(-x_0; y_0)$ і $O(0; 0)$. Оскільки трикутник рівносторонній, то $AB = AO = BO$, звідки $2x_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$. Розв'язуючи це рівняння разом з рівнянням $x_0^2 = y_0\sqrt{3}$, знаходимо $x_0 = 3$. Отже, сторона трикутника дорівнює $2x_0 = 6$. $\blacksquare$

Дотична до параболі з вершиною у точці $C(x_0, y_0)$ має вигляд $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$. Рівняння параболі з вершиною у точці $C(x_0, y_0)$ має вигляд

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0).$$

Параметричні та полярні рівняння ліній другого порядку

Рівняння

$$x = x_0 + R \cos t, \quad y = y_0 + R \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

є параметричним рівнянням кола з центром у точці $C(x_0, y_0)$ і радіусом R , зокрема, якщо центр кола лежить у точці $O(0; 0)$, то рівняннями кола є

$$x = R \cos t, \quad y = R \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

У полярній системі координат рівняння кола з центром у точці $C(\rho_0, \varphi_0)$ і радіусом R має вигляд

$$\rho^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + \rho_0^2 = R^2,$$

зокрема, $\rho = R$, якщо центр лежить у точці $O(0, 0)$.

Параметричні рівняння

$$x = x_0 + a \cos t, y = y_0 + b \sin t, (a > 0, b > 0, 0 \leq t < 2\pi)$$

задають еліпс з центром у точці $(x_0; y_0)$ і з півосями a і b .

А у полярній системі координат еліпс має рівняння:

$$\rho = \frac{b^2}{a(1 - \varepsilon \cos \varphi)},$$

де $\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$ — ексцентриситет еліпса.

Рівняння правої вітки гіперболи у полярній системі координат

$$\rho = \frac{b^2}{a(1 - \varepsilon \cos \varphi)},$$

де $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$ — ексцентриситет гіперболи.

Рівнянням параболи в полярній системі координат є

$$\rho = \frac{p}{1 - \cos \varphi},$$

де p — параметр параболи.

ТЕМА 10. ЛІНІЇ ТА ПОВЕРХНІ В ПРОСТОРІ

Поверхня та її рівняння

Розглянемо співвідношення

$$F(x, y, z) = 0 \tag{10.1}$$

між трьома змінними величинами x, y, z .

Рівність (10.1) називають рівнянням з трьома змінними x, y, z , якщо ця рівність не виконується для всіх трійок чисел x, y, z , і тотожністю, якщо вона справджується при будь-яких значеннях x, y, z .

Припустимо, парою значень $x = x_0$ і $y = y_0$ з рівняння (10.1) визначається єдине значення $z = z_0$. Упорядкована трійка чисел x_0, y_0, z_0 у заданій прямокутній системі координат визначає точку $M(x_0; y_0; z_0)$.

Означення 10.1. Сукупність всіх розв'язків з рівняння (10.1), які відповідають певним значенням змінних величин x та y , визначає в просторі деяке геометричне місце точок $M(x; y; z)$, яке називається поверхнею, а рівняння (10.1) — рівнянням цієї поверхні. ✓

Отже, рівняння (10.1) називається **рівнянням поверхні відносно заданої системи координат**, якщо це рівняння задовольняють координати x, y, z кожної точки даної поверхні і не задовольняють координати x, y, z жодної точки, яка не лежить на цій поверхні.

Поверхнею, заданою рівнянням (10.1) відносно певної системи координат, називається геометричне місце точок $M(x; y; z)$, координати яких x, y, z задовольняють дане рівняння. Якщо вираз $F(x, y, z) = 0$ в рівнянні (10.1) є многочленом від x, y, z , тобто сумою скінченного числа одночленів $ax^k y^m z^p$ із сталими коефіцієнтами a і невід'ємними цілими показниками k, m, p , то поверхня, яка задається цим рівнянням, називається **алгебраїчною**.

Неалгебраїчні поверхні називаються **трансцендентними**. **Порядком** алгебраїчної поверхні називається степінь многочлена, яким задається дана лінія.

Ми розглядатимемо лише алгебраїчні поверхні першого порядку і деякі алгебраїчні поверхні другого порядку. Отже, як і лінію на площині, поверхню в просторі можна задати геометрично і аналітично. Якщо поверхня задана геометрично, то виникає задача про складання рівняння цієї поверхні і, навпаки, якщо поверхня задана рівнянням, то постає задача про її геометричні властивості.

Приклад 10.1. Скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від двох даних точок $A(1; -1; 2)$ і $B(0; -2; 3)$. ☺

Розв'язання. Нехай точка $M(x; y; z)$ лежить на заданій поверхні. Тоді за умовою $AM = BM$, тобто

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2},$$

звідки після спрощень дістаємо шукане рівняння $2x + 2y - 2z + 7 = 0$. ■

Рівняння лінії в просторі

Лінію l в просторі можна розглядати як лінію перетину двох поверхонь, або геометричне місце точок, що знаходяться одночасно на двох поверхнях; отже, якщо $F_1(x, y, z) = 0$ і $F_2(x, y, z) = 0$ рівняння двох поверхонь, які визначають лінію l , то координати точок цієї лінії задовольняють систему двох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases} \quad (10.2)$$

Рівняння системи (10.2) сумісно визначають лінію l і називаються **рівняннями лінії в просторі**.

Лінію в просторі можна розглядати також як траєкторію рухомої точки. При такому підході лінію в просторі задають векторним параметричним рівнянням

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad (10.3)$$

Цьому рівнянню (10.3) відповідають скалярні параметричні рівняння

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

— проєкції вектора (10.3) на осі координат. Таким чином, векторні рівняння лінії на площині і в просторі мають однаковий вигляд і однакову суть, а відповідні параметричні рівняння відрізняються лише кількістю рівнянь, що залежить від числа базисних векторів на площині і в просторі.

Приклад 10.2. Якщо деяка точка M рівномірно рухається по твірній кругового циліндра, а сам циліндр рівномірно обертається навколо своєї осі, то точка M описує криву, яка називається гвинтовою лінією.

Радіусом гвинтової лінії називають радіус циліндра, а її віссю – вісь циліндра. Відстань, на яку зміститься точка вздовж твірної при повному оберті циліндра, називається кроком гвинта і позначається через h .

Щоб вивести рівняння гвинтової лінії, візьмемо вісь циліндра за вісь Oz , а площину Oxz – за початок відліку кута повороту циліндра (рис. 10.1, а). Нехай $\angle NOB = t$ і $M(x; y; z)$ – довільна точка гвинтової лінії. Координати x і y точки M збігаються з координатами точки B (рис. 10.1, б): $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, де R – радіус циліндра.

Щоб визначити координату z , побудуємо розгортку циліндра NN_1D_1D (рис. 10.1, в), в якій $NN_1 = 2\pi R$, $N_1D_1 = ND = h$, $NB = Rt$, $BM = z$. З подібності трикутників NMB і ND_1N_1 дістанемо $\frac{z}{h} = \frac{Rt}{2\pi R}$, $z = \frac{h}{2\pi}t$.

Таким чином, параметричні рівняння гвинтової лінії мають вигляд

$$x = R \cos t, \quad y = R \sin t, \quad z = \frac{h}{2\pi}t,$$

або у векторній формі $\vec{r}(t) = R \cos t \vec{i} + R \sin t \vec{j} + \frac{ht}{2\pi} \vec{k}$.

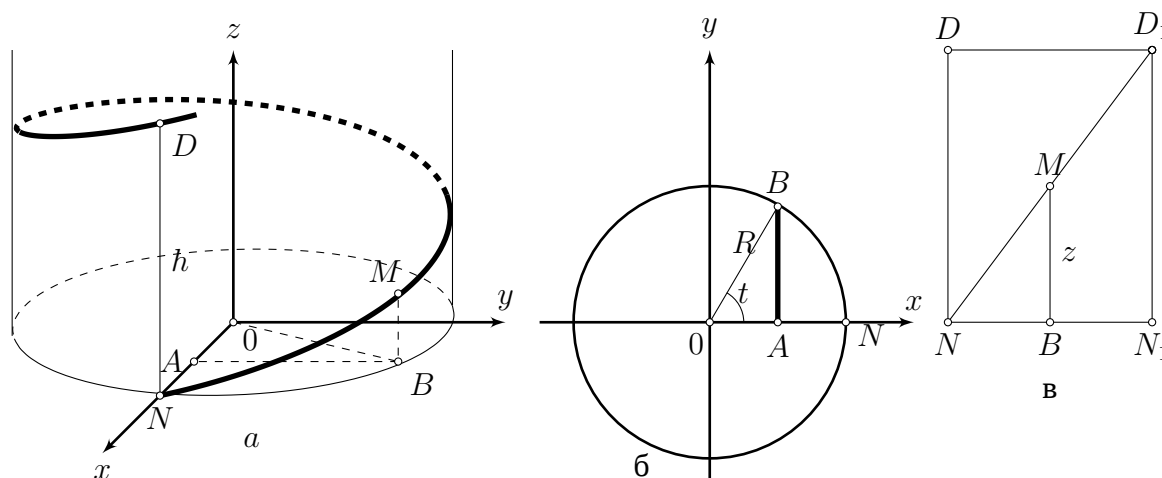


Рисунок 10.1 – Побудова гвинтової лінії

Приклад 10.3. Лінія, яка задається рівняннями

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2; \\ x^2 + y^2 + Rx = 0, \end{cases} \quad (10.4)$$

утворюється при перетині циліндричної та сферичної поверхонь і називається лінією Вів'яні (рис. 10.2).



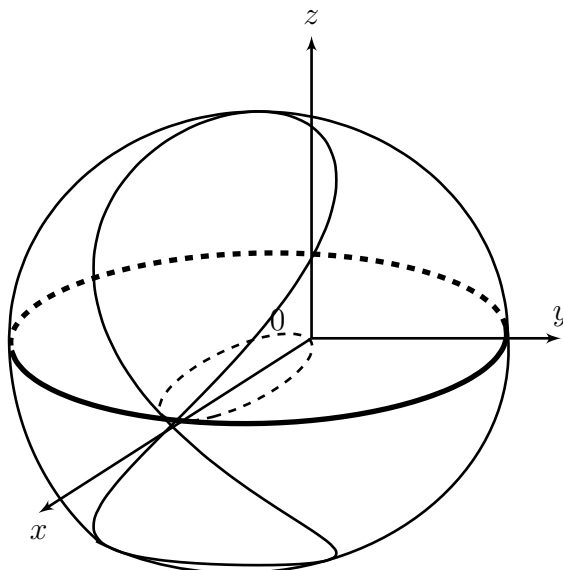


Рисунок 10.2 – Лінія Вівіані

ТЕМА 11. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ В ПРОСТОРІ

Загальне рівняння площини та його дослідження

Нехай в прямокутній системі координат $Oxyz$ задано площину Π (рис. 11.1) точкою $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і вектором $\vec{n} = (A; B; C)$, перпендикулярним до цієї площини. Візьмемо на площині точку $M(x; y; z)$ і знайдемо вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$. При будь-якому положенні точки M на площині Π вектори $\vec{n}$ і $\overrightarrow{M_0M}$ взаємно перпендикулярні, тому їхній скалярний добуток дорівнює нулю, тобто

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (11.1)$$

або

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (11.2)$$

де $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. Рівняння (11.1) називається *рівнянням площини, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (A; B; C)$* , а рівняння (11.2) — *загальним рівнянням площини*.

Вектор $\vec{n} = (A; B; C)$ називається *нормальним вектором площини*. Кожна площина має безліч нормальних векторів. Усі вони паралельні між собою, а їхні координати пропорційні. Отже, всяка площина в прямокутній системі координат визначається рівнянням першого степеня.

Покажемо тепер справедливості оберненого твердження: всяке рівняння першого степеня

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (11.3)$$

з трьома змінними x, y і z задає в прямокутній системі координат $Oxyz$ площину.

Нехай задано довільне рівняння (11.3) і (x_0, y_0, z_0) — будь-який розв'язок цього рівняння, тобто

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \quad (11.4)$$

Віднявши від рівняння (11.3) рівність (11.4), дістанемо

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (11.5)$$

Рівняння (11.5) еквівалентне рівнянню (11.3) і згідно з формулою (11.1) визначає в просторі площину, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (A; B; C)$.

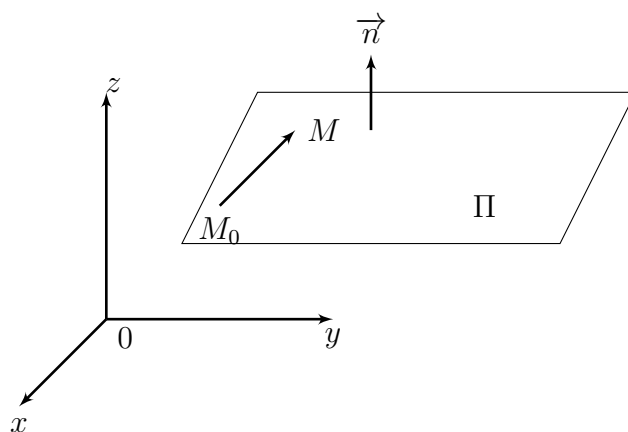


Рисунок 11.1 – Площина через дану точку, перпендикулярна до даного вектора

Отже, рівняння (11.3) також визначає площину. Таким чином, кожне алгебраїчне рівняння першого степеня із змінними x, y і z є рівнянням площини. Дослідимо загальне рівняння площини.

1. Якщо в рівняннях (11.3) $D = 0$, то воно набирає вигляду $Ax + By + Cz = 0$. Це рівняння задовольняє точка $O(0; 0; 0)$. Отже, якщо в загальному рівнянні площини відсутній вільний член, то така площина проходить через початок координат.
2. Якщо $A = 0$, то рівняння (11.3) набирає вигляду $By + Cz + D = 0$ і визначає площину, нормальний вектор якої $\vec{n} = (0; B; C)$ перпендикулярний до осі Ox . Отже, якщо в загальному рівнянні площини коефіцієнт при змінній x дорівнює нулю, то таке рівняння визначає площину, що паралельна осі Ox .

Аналогічно рівняння $Ax + Cz + D = 0$ визначає площину, паралельну осі Oy , а рівняння $Ax + By + C = 0$ — площину, паралельну Oz .

3. Якщо $A = 0, B = 0, C \neq 0, D \neq 0$, то рівняння (11.3) набирає вигляду $Cz + D = 0$ або $z = -\frac{D}{C}$. З випадку 2 випливає, що це рівняння визначає площину, яка паралельна осям Ox та Oy (коефіцієнти при x і y дорівнюють 0), тобто площину, паралельну площині Oxy . Аналогічно площина $By + D = 0$ паралельна площині Oxz , а площина $Ax + D = 0$ паралельна площині Oyz .
4. Якщо в рівнянні (11.3) $A = D = 0$, то площина $By + cz = 0$ проходить через вісь Ox . Справді, згідно з попереднім, при $D = 0$ площина проходить через початок координат, а при $A = 0$ — паралельно осі Ox , отже, проходить через вісь Ox .

Аналогічно площина $Ax + Cz = 0$ проходить через вісь Oy , а площина $Ax + By = 0$ — через вісь Oz .

5. Якщо в рівнянні площини $A = B = D = 0$, то площина $Cz = 0$ або $z = 0$ збігається з площиною Oxy . Аналогічно площина $Ax = 0$ або $x = 0$ збігається з площиною Oyz , а площина $y = 0$ — з площиною Oxz .

Приклад 11.1. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(1; 2; 3)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (-1; -3; 1)$. ☺

Розв'язання. Шукане рівняння знаходимо за формулою (11.1):

$$-1 \cdot (x - 1) + (-3) \cdot (y - 2) + 1 \cdot (z - 3) = 0,$$

$$\text{або } x + 3y - 4z = 0.$$

Приклад 11.2. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(-3; 4; 5)$ перпендикулярно до осі Oy . ☺

Розв'язання. Орт $\vec{j} = (0; 1; 0)$ перпендикулярний до площини, тому його можна розглядати як нормальний вектор. Отже, шукане рівняння має вигляд

$$0 \cdot (x + 3) + 1 \cdot (y - 4) + 0 \cdot (z - 5) = 0 \text{ або } y = 4.$$

Рівняння площини, що проходить через три точки. Рівняння площини у відрізках на осях

Нехай на площині Π задано три точки: $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$, які не лежать на одній прямій. Ці точки однозначно визначають площину. Знайдемо її рівняння.

Візьмемо на площині довільну точку $M(x; y; z)$ і знайдемо вектори

$$\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1), \quad \overrightarrow{M_1M} = (x - x_1; y - y_1; z - z_1),$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

Ці вектори лежать в площині Π , тобто вони компланарні. Оскільки мішаний добуток компланарних векторів дорівнює нулю, то $\overrightarrow{M_1M} \overrightarrow{M_1M_2} \overrightarrow{M_1M_3} = 0$ або

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (11.6)$$

Маємо **рівняння площини, що проходить через три точки**. Зокрема, нехай площина відтинає на осях Ox , Oy , Oz відрізки a , b , c , тобто проходить через точки $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$ і $C(0; 0; c)$. Підставляючи координати цих точок у формулу (11.6) і розкриваючи визначник, дістанемо

$$xbc + yac + zab - abc = 0 \text{ або } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (11.7)$$

Рівняння (11.7) називається **рівнянням площини у відрізках на осях**. Ним зручно користуватись при побудові площини.

Приклад 11.3. Написати загальне рівняння площини, яка проходить через три точки $M_1(1; 2; 3)$, $M_2(-1; 0; 2)$, $M_3(-2; 1; 0)$. ☺

Розв'язання. Підставимо координати точок у рівняння (11.6):

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z - 3 \\ -2 & -2 & -1 \\ -3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

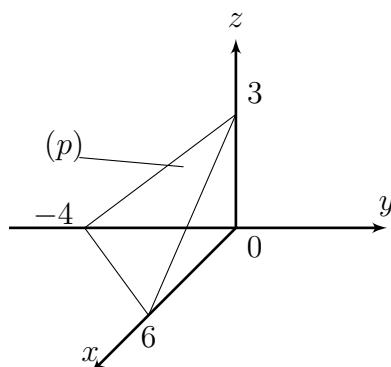


Рисунок 11.2 – Ілюстрація до прикладу 11.4

Розкладемо визначник за елементами першого рядка:

$$(x-1) \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} - (y-2) \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} + (z-3) \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Обчислюючи визначники другого порядку, знаходимо шукане рівняння:

$$(x-1)5 - (y-2)3 + (z-3)(-4) = 0 \text{ або } 5x - 3y - 4z + 13 = 0.$$

Приклад 11.4. Побудувати площину $2x - 3y + 4z - 12 = 0$.



Розв'язання. Запишемо задане рівняння у відрізках на осях. Для цього перенесемо у праву частину вільний член і поділимо на нього обидві частини рівняння:

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{-4} + \frac{z}{3} = 1.$$

Відки $a = 6, b = -4, c = 3$. Знаючи відрізки, які відтинає площина на осях координат, легко побудувати площину 11.2

Нормальне рівняння площини

Положення площини P в просторі можна визначити через нормальний вектор $\vec{n} = \overrightarrow{OA}$, початок якого збігається з початком координат, а кінець знаходиться на площині P . Нехай довжина цього вектора дорівнює p , тобто $p = |\overrightarrow{OA}|$, а кути нахилу цього вектора з осями координат є α, β, γ (рис. 11.3).

Значить p є віддаль площини до початку координат. Якщо через $\vec{n}^0$ позначимо одиничний вектор нормалі $\vec{n} = \overrightarrow{OA}$, то координати $\vec{n}^0$ будуть $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$. Їх називають напрямними косинусами нормального вектора. Візьмемо довільну точку $M(x, y, z)$ на площині P і позначимо радіус-вектор $\overrightarrow{OM}$ через $\vec{r}$. Тоді $\text{пр}_{\vec{n}^0} \vec{r} = p$. Тепер на основі формули (6.2) маємо

$$\text{пр}_{\vec{n}^0} \vec{r} = \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}^0}{|\vec{n}^0|} = \vec{r} \cdot \vec{n}^0,$$

бо $|\vec{n}^0| = 1$. Значить, ми одержимо, що $\vec{r} \cdot \vec{n}^0 = p$ або

$$\vec{r} \cdot \vec{n}^0 - p = 0. \quad (11.8)$$

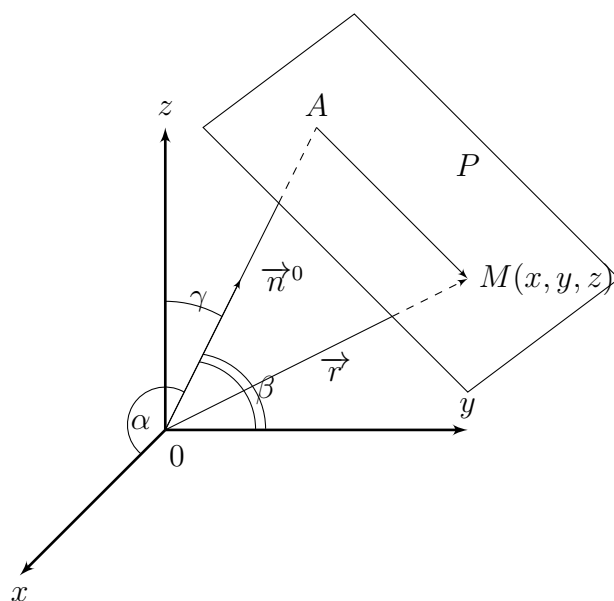


Рисунок 11.3 – Нормальне рівняння площини

Рівняння 11.8 називається нормальним рівнянням площини у векторній формі. Розпишемо рівняння (11.8) у координатній формі, одержимо

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0. \quad (11.9)$$

В цьому рівнянні p віддаль від площини до початку координат і

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (11.10)$$

Щоб загальне рівняння площини привести до нормального вигляду, потрібно загальне рівняння площини помножити на сталий множник μ . Одержимо $\mu Ax + \mu By + \mu Cz + \mu D = 0$, де $\mu A = \cos \alpha$, $\mu B = \cos \beta$, $\mu C = \cos \gamma$, $\mu D = -p$. Піднісши перші три рівності до квадрату і додавши їх, враховуючи (11.10), одержимо

$$\mu^2(A^2 + B^2 + C^2) = 1, \text{ або } \mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (11.11)$$

В формулі (11.11) необхідно брати знак протилежний знаку вільного члена в загальному рівнянні площини, так як $\mu D = -p$, де p — завжди додатне як відстань. Отже, щоб рівняння (11.2) привести до нормального вигляду, треба помножити його на нормувальний множник (11.11).

Вістань від точки до площини

Нехай задано нормальне рівняння площини P :

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$$

і точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ поза площиною. Потрібно обчислити віддаль від точки M_0 до площини P .

Проведемо через точку M_0 площину P_1 паралельну до площини P (мал.46). Нормальне рівняння площини P_1 запишемо так $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p_1 = 0$, де p_1 віддаль площини P_1 від початку координат. Шукана відстань дорівнює $AB = p_1 - p$. Тому що точка

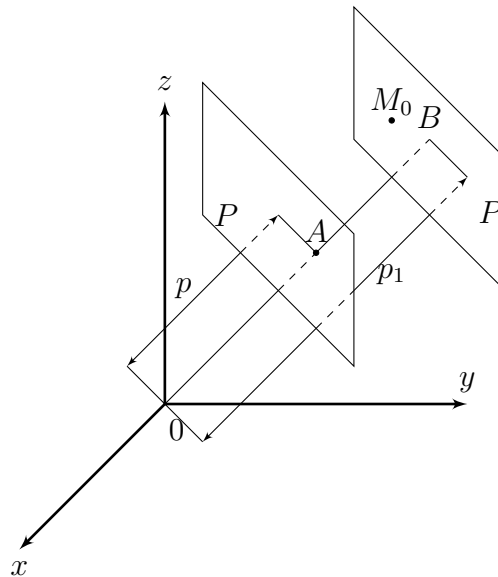


Рисунок 11.4 – Відстань від точки до площини

$M_0(x_0; y_0; z_0)$ знаходиться на площині P_1 , то $x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - p_1 = 0$ і значить $d = p_1 - p = x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - p$. Взагалі

$$d = |x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - p| \quad (11.12)$$

або

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (11.13)$$

Кут між двома площинами. Умови паралельності і перпендикулярності двох площин

Нехай задано дві площини Π_1 і Π_2 відповідно рівняннями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Двогранний кут між площинами вимірюється лінійним кутом, який дорівнює куту між нормальними векторами $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ і $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ цих площин (рис. 11.5). Отже, маємо

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad (11.14)$$

— **формула кута між двома площинами.**

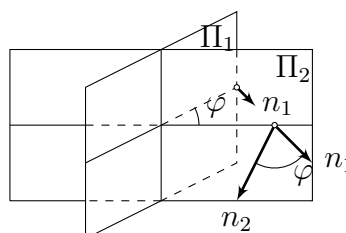


Рисунок 11.5 – Кут між двома площинами

Якщо площини Π_1 і Π_2 перпендикулярні, то скалярний добуток їхніх нормальних векторів дорівнює нулю, тобто рівність

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \quad (11.15)$$

є умовою перпендикулярності площин.

Якщо площини Π_1 і Π_2 паралельні, то координати нормальних векторів пропорційні, тобто умовою паралельності площин є рівність відношень:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \quad (11.16)$$

Приклад 11.5. Знайти кут між площинами $2x + y + 3z - 1 = 0$ і $x + y - z + 5 = 0$. ☺

Розв'язання. За формулою (11.14) маємо

$$\cos \varphi = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1)}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = 0.$$

Отже, дані площини перпендикулярні. ■

Приклад 11.6. Знайти висоту AH піраміди, якщо задано її вершини $A(-1; 2; -1)$, $B(1; 0; 2)$, $C(0; 1; -1)$, $D(2; 0; -1)$. ☺

Розв'язання. За формулою (11.6) знаходимо рівняння площини, що проходить через точки B , C , D :

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 0 & z - 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0,$$

звідки $3x + 6y + 2z - 5 = 0$.

Висоту AH знайдемо як відстань точки $A(-1; 2; -1)$ від площини BCD за формулою (11.13):

$$AH = \frac{3 \cdot (-1) + 6 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) - 5}{\sqrt{3^2 + 6^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{46}}.$$

Відстань між паралельними площинами

Нехай у деякій системі координат дві паралельні площини задані рівняннями:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Тоді $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$. А це означає, що коли обидві частини одного з цих рівнянь двох паралельних площин помножити на коефіцієнт пропорційності перших трьох параметрів, то коефіцієнти при x , y , z в обох рівняннях будуть рівними.

Отже, нехай в деякій прямокутній системі координат дві паралельні площини задані рівняннями:

$$\sigma_1 : Ax + By + Cz + D_1 = 0,$$

$$\sigma_2 : Ax + By + Cz + D_2 = 0.$$

Знайдемо формулу відстані між цими площинами. Відстань між паралельними площинами дорівнює відстані від довільної точки однієї з площин до іншої площини. Нехай точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ належить площині σ_1 , тоді її координати задовольняють рівняння: $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D_1 = 0$ або $Ax_1 + By_1 + Cz_1 = -D_1$.

Обчислимо відстань від точки M_1 до площини σ_2 :

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Але це і є відстань між паралельними площинами σ_1 і σ_2 . Отже, шукана формула має вигляд:

$$d = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Різні види рівнянь прямої в просторі

Якщо пряма задана точкою і напрямним вектором, то її векторне параметричне рівняння (як на площині так і в просторі) має вигляд: $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s}$, де $\vec{r}$ — радіус-вектор змінної точки M прямої; $\vec{r}_0$ — радіус-вектор заданої точки M_0 ; $\vec{s}$ — ненульовий напрямний вектор прямої; t — параметр. Нехай у просторі в прямокутній системі координат задано пряму точкою $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і напрямним вектором $\vec{s} = (m; n; p)$. Візьмемо довільну точку $M(x; y; z)$ цієї прямої (рис. 11.6). Тоді можна отримати такі формули:

1) *параметричні рівняння прямої в просторі:*

$$x = x_0 + mt, \quad y = y_0 + nt, \quad z = z_0 + pt; \quad (11.17)$$

2) *канонічні рівняння прямої в просторі:*

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}; \quad (11.18)$$

3) *рівняння прямої в просторі через дві задані точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$:*

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (11.19)$$

У рівняннях (11.17) - (11.19) одна або дві координати напрямного вектора можуть дорівнювати нулю (випадки $m = n = p = 0$ та $x_2 - x_1 = y_2 - y_1 = z_2 - z_1 = 0$ неможливі, бо за означенням $\vec{s} \neq 0$).

Якщо $m = 0, n \neq 0, p \neq 0$, то напрямний вектор $\vec{s}$ перпендикулярний до осі Ox , тому рівняння

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

визначає пряму, перпендикулярну до осі Ox .

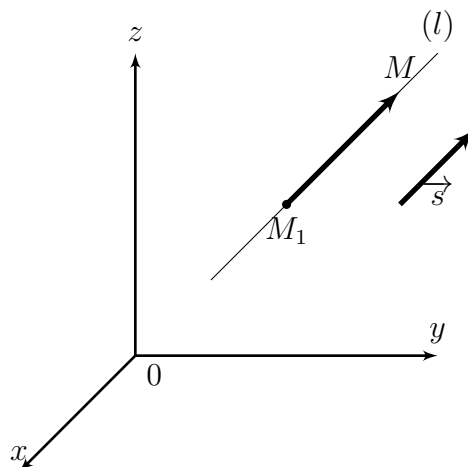


Рисунок 11.6 – Канонічне рівняння прямої

Аналогічно рівняння, в яких лише $n = 0$ або $p = 0$, визначають прямі, перпендикулярні до осі Oy або Oz .

Якщо $m = n = 0, p \neq 0$, або $m = p = 0, n \neq 0$, або $n = p = 0, m \neq 0$, то рівняння (11.18) визначають прямі, відповідно паралельні осям Oz, Oy, Ox .

Розглянемо тепер випадок, коли пряма в просторі задається перетином двох площин. Відомо, що дві непаралельні площини перетинаються по прямій лінії. Отже, система рівнянь двох площин

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \quad (11.20)$$

нормальні вектори яких $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ і $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ не колінеарні, визначає в просторі пряму лінію.

Рівняння (11.20) називаються **загальними рівняннями прямої в просторі**. Щоб від загальних рівнянь (11.20) перейти до канонічних рівнянь (11.18), потрібно знайти точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ на прямій і її напрямний вектор $\vec{s} = (m; n; p)$. Для знаходження точки M_0 одну з її координат, наприклад, $x = x_0$ беруть довільною, а дві інші визначають із системи

$$\begin{cases} B_1y + C_1z = -D_1 - A_1x_0; \\ B_2y + C_2z = -D_2 - A_2x_0. \end{cases} \quad (11.21)$$

Ця система матиме розв'язок за умови, що $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$. Якщо ця умова порушується, то в системі (11.20) довільне значення надають змінній y або змінній z .

Для знаходження напрямного вектора $\vec{s}$ врахуємо, що нормальні вектори $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$ даних площин перпендикулярні до прямої (рис. 11.7). Тому за вектор $\vec{s}$ можна взяти їхній векторний добуток:

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}. \quad (11.22)$$

Приклад 11.7. Звести рівняння прямої

$$\begin{cases} x + y - z - 1 = 0; \\ 2x - y + 3z + 5 = 0 \end{cases}$$

до канонічного вигляду.



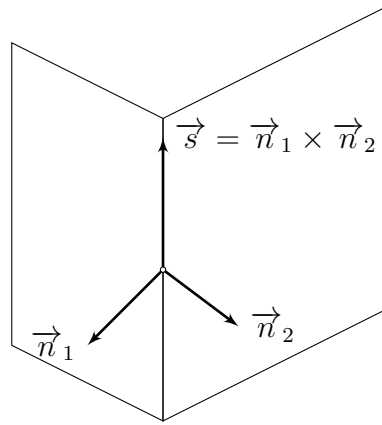


Рисунок 11.7 – Напрямний вектор прямої

Розв'язання. Знайдемо яку-небудь точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ на даній прямій. Для цього покладемо в обох рівняннях $x = 0$ і розв'яжемо систему

$$\begin{cases} y - z - 1 = 0; \\ -y + 3z + 5 = 0, \end{cases}$$

звідки $z = -2$, $y = -1$. Отже, точка $M_0(0; -1; -2)$ належить даній прямій. Напрямний вектор $\vec{s}$ знаходимо за формулою (11.22):

$$\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}.$$

Канонічні рівняння заданої прямої мають вигляд

$$\frac{x}{2} = \frac{y + 1}{-5} = \frac{z + 2}{-3}.$$

Кут між двома прямими. Умови паралельності і перпендикулярності прямих

Нехай прямі l_1 і l_2 задано рівняннями

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}; \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Кут між цими прямими (рис. 11.8) дорівнює куту φ між їхніми напрямними векторами $\vec{s}_1 = (m_1; n_1; p_1)$ і $\vec{s}_2 = (m_2; n_2; p_2)$, тому дістанемо:

1) формулу для кута φ між прямими l_1 і l_2 :

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}; \quad (11.23)$$

2) умову паралельності прямих l_1 і l_2 :

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}; \quad (11.24)$$

3) умову перпендикулярності прямих l_1 і l_2 :

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0. \quad (11.25)$$

4) умова мимобіжності прямих l_1 і l_2 :

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

де точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$ лежить на прямій l_1 , а точка $M_2(x_2; y_2; z_2)$ лежить на прямій l_2 .

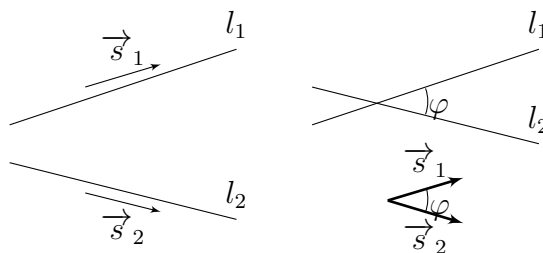


Рисунок 11.8 – Кут між двома прямими

Приклад 11.8. Знайти кут φ між прямими

$$\begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0; \\ 2x - y + 3z + 5 = 0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x = 2t; \\ y = 2 - t; \\ z = -2 + 3t \end{cases}.$$

Розв'язання. За формулами (11.22) і (11.17) знаходимо напрямні вектори даних прямих: $\vec{s}_1 = (2; -8; -4)$ і $\vec{s}_2 = (2; -1; 3)$. Оскільки $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0$, то $\varphi = 90^\circ$. ■

Приклад 11.9. При яких значеннях m_1 і m_2 прямі

$$\frac{x}{m_1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{4} \quad \text{і} \quad \frac{x+1}{-1} = \frac{y+5}{n_2} = \frac{z+3}{-2}$$

паралельні?



Розв'язання. З умови (11.24) маємо

$$\frac{m_1}{-1} = \frac{2}{n_2} = \frac{4}{-2}; \quad \frac{m_1}{-1} = -2, \quad \frac{2}{n_2} = -2,$$

звідки $m_1 = 2$, $n_2 = -1$. ■

Кут між прямою і площиною. Умови паралельності і перпендикулярності прямої і площини

Кут між прямою l і площиною Π за означенням є кут між прямою l і її проекцією на площину Π .

Нехай площина Π і пряма l задані рівняннями

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ і } \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Позначимо гострий кут між прямою l (рис. 11.9) і її проекцією l_1 на площину Π через φ , а кут між нормальним вектором $\vec{n} = (A; B; C)$ площини Π і напрямним вектором $\vec{s} = (m; n; p)$ прямої l — через θ . Якщо $\theta \leq 90^\circ$, то $\varphi = 90^\circ - \theta$, тому $\sin \varphi = \cos \theta$; якщо ж $\theta > 90^\circ$, то $\varphi = \theta - 90^\circ$ і $\sin \varphi = -\cos \theta$. Отже, в будь-якому випадку $\sin \varphi = |\cos \theta|$. Але

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{s}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|}$$

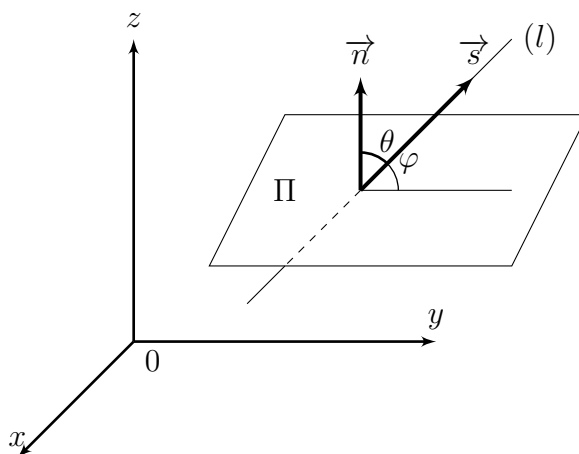


Рисунок 11.9 – Кут між прямою та площиною

тому **кут між прямою і площиною** знаходиться за формулою

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{s}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|} = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \quad (11.26)$$

Якщо пряма l паралельна площині Π , то вектори $\vec{n}$ і $\vec{s}$ перпендикулярні, тому $\vec{n} \cdot \vec{s} = 0$, тобто

$$Am + Bn + Cp = 0 \quad (11.27)$$

— **умова паралельності прямої і площини.**

Якщо пряма l перпендикулярна до площини Π , то вектори $\vec{n}$ і $\vec{s}$ паралельні, тому співвідношення

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p} \quad (11.28)$$

є **умовою перпендикулярності прямої і площини.**

Пряма l лежатиме у площині Π тоді і тільки тоді, коли $\vec{s}$ паралельний до площини Π , а точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ прямої l належить і площині Π , тобто коли виконані наступні умови:

$$\begin{cases} Al + Bm + Cn = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \end{cases}$$

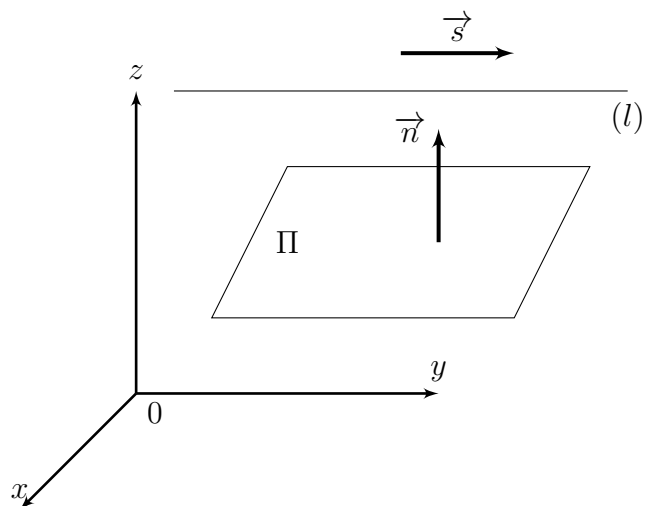


Рисунок 11.10 – Паралельність прямої та площини

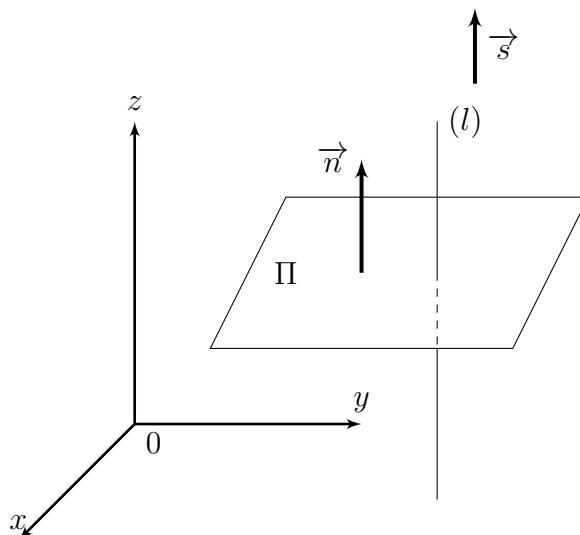


Рисунок 11.11 – Перпендикулярність прямої та площини

Приклад 11.10. Через задану точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ провести пряму l , перпендикулярну до площини Π , заданої рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$. ☺

Розв'язання. Оскільки пряма l перпендикулярна до площини Π , то напрямним вектором прямої l можна взяти нормальний вектор площини Π : (рис. 11.11): $\vec{s} = \vec{n} = (A; B; C)$. Тому згідно з формулою (11.18) рівняння прямої l має вигляд

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}.$$

Відстань від точки до прямої

Якщо у просторі задано точку і пряму, то у випадку, коли точка не належить цій прямій, вони визначають єдину площину, а, отже, у цій площині існує єдиний перпендикуляр, опущений з точки на пряму. Якраз довжина цього перпендикуляра і називається **відстанню від точки до прямої у просторі**. Аналітична постановка задачі буде така. Нехай точка M_0 у прямокутній декартовій системі координат має координати (x_0, y_0, z_0) , а пряма l задана канонічними рівняннями $\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{x-x_2}{a_2} = \frac{x-x_3}{a_3}$.

Необхідно знайти відстань від точки M_0 до прямої l . Якщо H — основа перпендикуляра, опущеного з точки M_0 на пряму l , то згідно з означенням $d(M_0, l) = M_0H$. Візьмемо на прямій l точку M_1 і на векторах $\overrightarrow{M_1M_0}$, $\vec{a}$ (рис. 11.4) побудуємо паралелограм $M_1M_0NN_1$.

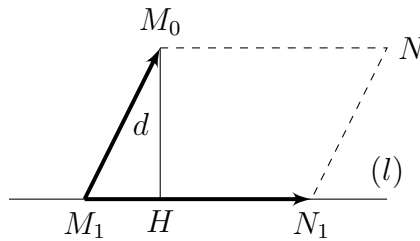


Рисунок 11.12 – Відстань від точки до прямої

Тоді з того, що його площа обчислюється за формулою $S = M_1N_1 \cdot M_0H$, маємо $d(M_0, l) = \frac{S}{|M_1N_1|}$. З другого боку, врахувавши, що $S = |[\overrightarrow{M_1M_0}, \vec{a}]|$, дістаємо, що відстань від точки M_0 до прямої l може бути обчислена за формулою

$$d(M_0, l) = \frac{|[\overrightarrow{M_1M_0}, \vec{a}]|}{|\vec{a}|}$$

або у координатній формі

$$d(M_0, l) = \frac{\sqrt{\left| \begin{vmatrix} y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} \right|^2 + \left| \begin{vmatrix} z_0 - z_1 & x_0 - x_1 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} \right|^2 + \left| \begin{vmatrix} x_0 - x_1 & y_0 - y_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \right|^2}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

Очевидно, що ця формула може бути використана і при інших поданнях прямої. Наприклад, якщо пряма задана як лінія перетину двох площин

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

то будь-який розв'язок цієї системи дасть координати точки на прямій, а вектор

$$\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right)$$

є напрямним вектором цієї прямої.

Відстань між мимобіжними прямими

Якщо ж прямі мимобіжні, то існує єдиний спільний для них перпендикуляр (відрізок з кінцями на цих прямих, перпендикулярний до кожної з них). Якраз довжина спільного перпендикуляра

двох мимобіжних прямих і називається **відстанню між цими прямими**, або, інакше, відстань між двома мимобіжними прямими — це відстань між паралельними площинами, що проходять через ці прямі.

Аналітична постановка задачі така. Нехай у прямокутній декартовій системі координат дві мимобіжні прямі l_1 і l_2 задані своїми канонічними рівняннями:

$$\frac{x - x_1}{a_{11}} = \frac{y - y_1}{a_{12}} = \frac{z - z_1}{a_{13}},$$

$$\frac{x - x_2}{a_{21}} = \frac{y - y_2}{a_{22}} = \frac{z - z_2}{a_{23}},$$

де $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ точки відповідно на прямих l_1 і l_2 , а $\vec{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13})$, $\vec{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23})$ є напрямні вектори цих прямих. Перенесемо вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ у точку M_1 і побудуємо на векторах $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ і $\overrightarrow{M_1M_2}$ паралелепіпед $M_1N_1P_1Q_1M_2N_2P_2Q_2$. Якщо врахувати, що спільний перпендикуляр для прямих l_1 і l_2 є висотою цього паралелепіпеда, то з того, що його об'єм $V = S_{\text{осн.}} \cdot H$, маємо $d(l_1, l_2) = \frac{V}{S_{\text{осн.}}}$.

З другого боку, врахувавши, що об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ і $\overrightarrow{M_1M_2}$, дорівнює абсолютній величині мішаного добутку цих векторів, а площа грані $M_1N_1P_1Q_1$ — модулю векторного добутку векторів $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$, дістаємо, що відстань між прямими l_1 і l_2 може бути обчислена за формулою

$$d(l_1, l_2) = \frac{|\vec{a}_1 \vec{a}_2 \overrightarrow{M_1M_2}|}{|[\vec{a}_1 \vec{a}_2]|}.$$

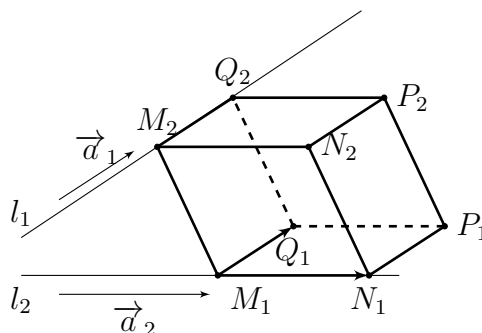


Рисунок 11.13 – Відстань між мимобіжними прямими

або у координатній формі

$$d(l_1, l_2) = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}^2}}.$$

Нехай AB — пряма, на якій міститься спільний перпендикуляр мимобіжних прямих l_1 і l_2 (рис. 11.13), і нехай $M(x, y, z)$ — довільна точка цієї прямої. Тоді оскільки площина, що мстить прямі l_1 і AB , перпендикулярна до площини, породженої векторами $\overrightarrow{M_1N_1}$ і $\overrightarrow{M_1Q_1}$, то вектори $\overrightarrow{M_1M}$, $\vec{a}_1$ і $[\vec{a}_1 \vec{a}_2]$ компланарні, а, отже, їх мішаний добуток дорівнює нулю. Аналогічно, оскільки площина, що мстить прямі l_2 і AB , перпендикулярна до площини, породженої векторами $\overrightarrow{M_2N_2}$ і $\overrightarrow{M_2Q_2}$ ($\overrightarrow{M_2N_2} \parallel \overrightarrow{M_1N_1}$, $\overrightarrow{M_2Q_2} \parallel \overrightarrow{M_1Q_1}$), то вектори $\overrightarrow{M_2M}$, $\vec{a}_2$, $[\vec{a}_1 \vec{a}_2]$ компланарні, а, отже,

їх мішаний добуток теж дорівнює нулю. Таким чином, система рівнянь

$$\begin{cases} \overrightarrow{M_1M} \cdot \vec{a}_1 [\vec{a}_1 \vec{a}_2] = 0, \\ \overrightarrow{M_2M} \cdot \vec{a}_2 [\vec{a}_1 \vec{a}_2] = 0 \end{cases}$$

задає пряму AB , тобто спільний перпендикуляр двох мимобіжних прямих l_1 і l_2 у прямокутній декартовій системі координат визначається цією системою рівнянь.

На завершення покажемо, як можна знаходити відстань між мимобіжними прямими, не користуючись отриманою формулою, точніше, використовуючи тільки елементи векторної алгебри з шкільного підручника.

Нехай потрібно знайти відстань між двома мимобіжними відрізками AB і CD у деякій геометричній фігурі. Можна стверджувати, що на цих відрізках (або їх продовженнях) існують точки M і N такі, що відстань між відрізками дорівнює довжині відрізка MN (гарантом цього є існування єдиного спільного перпендикуляра для двох мимобіжних прямих). Задача буде розв'язана, якщо ми зуміємо подати вектор $\overrightarrow{MN}$ у вигляді $\overrightarrow{MN} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}$ де $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — некопланарні вектори, для яких відомі всі попарні скалярні добутки.

Отже, алгоритм відшукування такий. Записуємо векторну рівність

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DN} \text{ або } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$$

і врахувавши, що пари векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MB}$ і $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DN}$ колінеарні, переписуємо її у вигляді

$$\overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + y\overrightarrow{CD}.$$

Якщо тепер виразити вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BD}$ і $\overrightarrow{CD}$ через вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ та скористатися ортогональністю пар векторів $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{CD}$, то з системи рівнянь

$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \\ \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{CD} = 0, \end{cases}$$

знаходимо x і y , а, отже, і квадрат модуля вектора $\overrightarrow{MN}$.

ТЕМА 12. ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Поняття поверхні другого порядку

Означення 12.1. Поверхнею другого порядку називається множина точок, прямокутні координати яких задовольняють рівняння виду

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + kz + l = 0, \quad (12.1)$$

де принаймні один з коефіцієнтів a, b, c, d, e, f відмінний від нуля. ✓

Рівняння (12.1) називається **загальним рівнянням поверхні другого порядку**.

Поверхня другого порядку як геометричний об'єкт не змінюється, якщо від заданої прямокутної системи координат перейти до іншої. При цьому рівняння (12.1) і рівняння, знайдене після перетворення координат, будуть еквівалентні.

Можна довести, що існує система координат, в якій рівняння (12.1) має найпростіший (або канонічний) вигляд.

До поверхонь другого порядку належать, зокрема, циліндричні та конічні поверхні, поверхні обертання, сфера, еліпсоїд, однопорожнинний та двопорожнинний гіперболоїди, еліптичний та гіперболічний параболоїди. Розглянемо ці поверхні та їхні канонічні рівняння.

Циліндричні поверхні

Циліндричною поверхнею називають поверхню σ , утворену множиною прямих (твірних), які перетинають задану лінію L (напряму) і паралельні заданій прямій l (рис. 12.1). Вивчатимемо лише такі циліндричні поверхні, напрямні яких лежать в одній з координатних площин, а твірні паралельні координатній осі, що перпендикулярна до цієї площини.

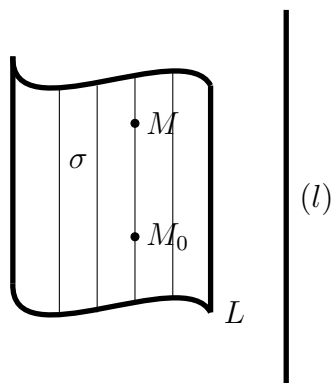


Рисунок 12.1 – Побудова циліндричної поверхні

Розглянемо випадок, коли твірні циліндричної поверхні паралельні осі Oz , а напрямна лежить в площині Oxy . Нехай задано рівняння

$$f(x, y) = 0, \quad (12.2)$$

яке в площині Oxy визначає (рис. 12.2) деяку лінію L — множину точок $M(x; y)$, координати яких задовольняють це рівняння. Дане рівняння задовольняють також координати всіх тих точок $N(x; y; z)$ простору, у яких дві перші координати x і y збігаються з координатами будь-якої точки лінії L , а третя координата z — довільна, тобто тих точок простору, які проєктуються на площину Oxy в точки лінії L .

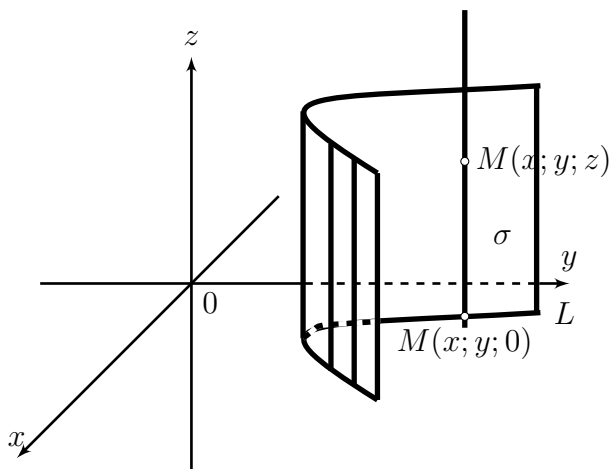


Рисунок 12.2 – Циліндрична поверхня

Всі такі точки лежать на прямій, яка паралельна осі Oz і перетинає лінію L в точці $M(x; y)$. Сукупність таких прямих і є циліндричною поверхнею σ .

Якщо точка не лежить на поверхні σ , то вона не може проектуватися в точку лінії L , тобто координати такої точки рівняння (12.2) не задовольняють. Отже, рівняння (12.2) визначає поверхню σ . Таким чином, рівняння $f(x, y) = 0$ визначає в просторі циліндричну поверхню, твірні якої паралельні осі Oz , а напрямна L в площині Oxy задається тим самим рівнянням $f(x, y) = 0$. Ця сама лінія в просторі $Oxyz$ задається двома рівняннями:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

Аналогічно рівняння $f(x, z) = 0$, в якому відсутня змінна y , визначає в просторі циліндричну поверхню, твірні якої паралельні осі Oy , а напрямна L в площині Oxz задається тим самим рівнянням $f(x, z) = 0$; рівняння $f(y, z) = 0$ визначає в просторі циліндричну поверхню, твірні якої паралельні осі Ox .

Приклад 12.1.

Поверхня, яка визначається рівнянням $x^2 + y^2 = R^2$, є циліндричною і називається прямим круговим циліндром. Її твірні паралельні осі Oz , а напрямною в площині Oxy є коло $x^2 + y^2 = R^2$ (рис. 12.3, а).

Поверхня, яка визначається рівнянням $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, є циліндричною і називається еліптичним циліндром (рис. 12.3, б).

Циліндрична поверхня, яка визначається рівнянням $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, називається гіперболічним циліндром (рис. 12.3, в).

Циліндрична поверхня, яка визначається рівнянням $y^2 = 2px$, називається параболічним циліндром (рис. 12.3, г).

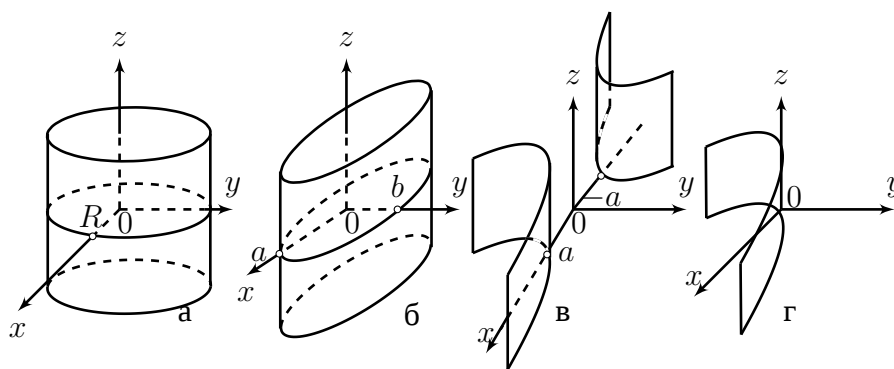


Рисунок 12.3 – Приклади циліндричних поверхонь

Поверхні обертання

Визначення 12.2. Поверхню, утворену обертанням заданої плоскої кривої l навколо заданої прямої (осі обертання), яка лежить в площині кривої l , називають поверхнею обертання.

Нехай лінія l , що лежить в площині Oyz , задана рівняннями

$$\begin{cases} F(Y, Z) = 0; \\ X = 0 \end{cases}$$

(X, Y, Z — змінні координати точок лінії l , а x, y, z — змінні координати точок поверхні).

Розглянемо поверхню, утворену обертанням цієї лінії навколо осі Oz (рис. 12.4), і знайдемо рівняння поверхні обертання.

Проведемо через довільну точку $M(x; y; z)$ поверхні обертання площину, перпендикулярну до осі Oz , і позначимо через K і N точки перетину цієї площини з віссю Oz і лінією l . Оскільки відрізки $|Y|$, KN і KM рівні між собою як радіуси, $KP = y$, $PM = x$, то $Y = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$, крім того, $Z = z$. Оскільки координати точки N задовольняють рівняння $F(Y, Z) = 0$, то, підставляючи в це рівняння

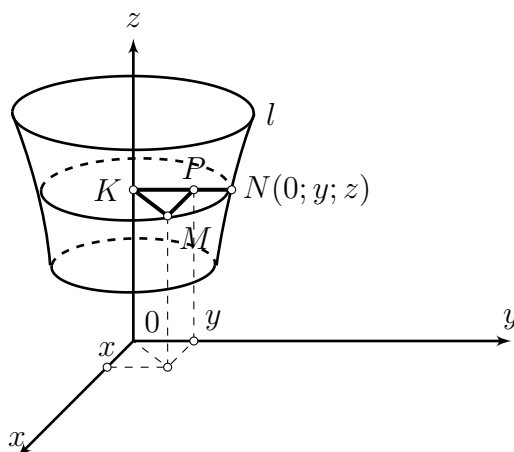


Рисунок 12.4 – Побудова поверхні обертання

замість Y, Z рівні їм величини $\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z$, дістанемо рівняння

$$F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0, \quad (12.3)$$

яке задовольняє довільна точка $M(x; y; z)$ поверхні обертання. Можна показати, що координати точок, які не лежать на цій поверхні, рівняння (12.3) не задовольняють. Отже, рівняння (12.3) є рівнянням поверхні обертання.

Аналогічно можна скласти рівняння поверхонь обертання навколо осей Ox і Oy . Таким чином, щоб дістати рівняння поверхні обертання кривої навколо якої-небудь координатної осі, треба в рівнянні кривої залишити без зміни координату, яка відповідає осі обертання, а другу координату замінити на квадратний корінь із суми квадратів двох інших координат, взятий із знаком $+$ або $-$.

Приклад 12.2. Знайти рівняння поверхні обертання еліпса $x^2 + 4y^2 = 4, z = 0$ навколо осі Ox . ☺

Розв'язання. У рівнянні еліпса треба залишити без зміни координату x , а замість координати y підставити в рівняння $\pm\sqrt{y^2 + z^2}$:

$$x^2 + 4(y^2 + z^2) = 4 \text{ або } \frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1.$$

Конічні поверхні

Означення 12.3. Конічною поверхнею називається поверхня, утворена множиною прямих, що проходять через задану точку P і перетинають задану лінію L . При цьому лінія L називається напрямною конічної поверхні, точка P — її вершиною, а кожна з прямих, які утворюють конічну поверхню, — твірною. ✓

Нехай напрямна L задана в прямокутній системі координат рівняннями

$$\begin{cases} F_1(X, Y, Z) = 0, \\ F_2(X, Y, Z) = 0, \end{cases} \quad (12.4)$$

а точка $P(x_0; y_0; z_0)$ — вершина конічної поверхні (рис. 12.5). Щоб скласти рівняння конічної поверхні, візьмемо на поверхні довільну точку $M(x; y; z)$ і позначимо точку перетину твірної PM з напрямною L через $N(X; Y; Z)$.

Канонічні рівняння твірних, які проходять через точки N і P , мають вигляд

$$\frac{x - x_0}{X - x_0} = \frac{y - y_0}{Y - y_0} = \frac{z - z_0}{Z - z_0}. \quad (12.5)$$

Виключаючи X, Y і Z з рівнянь (12.4) і (12.5), дістанемо шукане рівняння конічної поверхні.

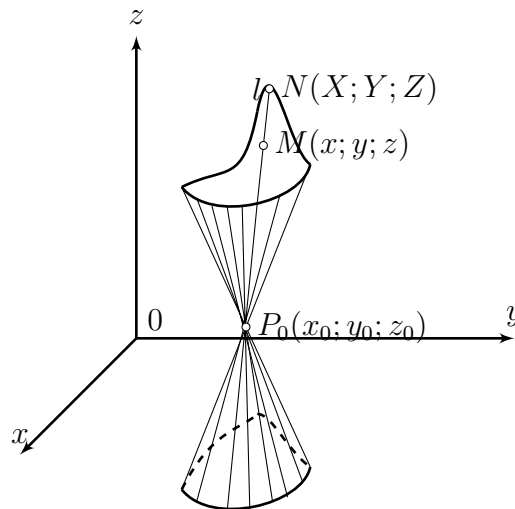


Рисунок 12.5 – Побудова конічної поверхні

Приклад 12.3. Скласти рівняння конічної поверхні з вершиною в точці $O(0; 0; 0)$ і з напрямною L , заданою рівняннями

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1, \quad Z = c.$$

Розв'язання. Нехай $M(x; y; z)$ — довільна точка конічної поверхні, а $N(X; Y; Z)$ — точка перетину твірної OM і лінії L . Канонічні рівняння твірної OM мають вигляд $\frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{z}{Z}$. Оскільки $Z = c$, то

$X = c\frac{x}{z}$, $Y = c\frac{y}{z}$. Підставляючи ці значення X і Y в перше з рівнянь прямої L , дістанемо шукане рівняння: $\frac{c^2x^2}{a^2z^2} + \frac{c^2y^2}{b^2z^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$.

При $a = b$ прямою L є коло $X^2 + Y^2 = a^2$, $Z = c$, а рівняння конічної поверхні має вигляд $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$. Ця поверхня називається **прямим круговим конусом** (рис. 12.6). ■

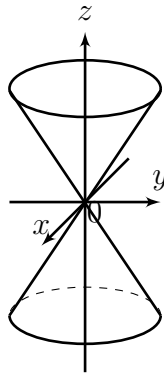


Рисунок 12.6 – Прямий круговий конус

Приклад 12.4. Рівняння конічної поверхні, вершиною якої є точка $O(0;0;0)$, а прямою – еліпс (рис. 12.7)

$$\frac{X^2}{9} + \frac{Z^2}{4} = 1, \quad Y = 5$$

має вигляд

$$\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 0.$$

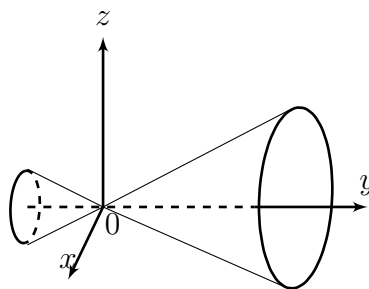


Рисунок 12.7 – Конічна поверхня $\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 0$

Сфера

Визначення 12.4. Сферою називають множину всіх точок простору, рівновіддалених від заданої точки, яка називається центром кола. Відрізок, що сполучає центр сфери з її довільною точкою, називається радіусом сфери. ✓

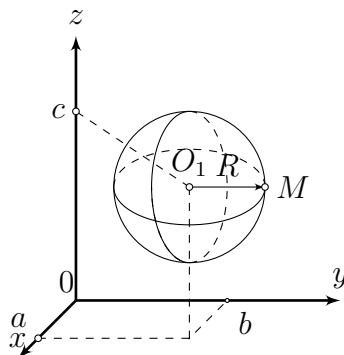


Рисунок 12.8 – Сфера

Візьмемо в просторі прямокутну систему координат $Oxyz$. Щоб скласти рівняння сфери з центром у точці $O_1(a; b; c)$ і радіусом R (рис. 12.8), візьмемо в просторі довільну точку $M(x; y; z)$. Точка M належить сфері тоді і лише тоді, коли $O_1M = R$, або

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = R.$$

Це і є рівняння сфери. Для зручності його записують у такому вигляді:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2. \quad (12.6)$$

Зокрема, якщо центр сфери збігається з початком координат, тобто $a = b = c = 0$, то рівняння такої сфери має вигляд

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Якщо в рівнянні (12.6) розкриємо дужки, то матимемо загальне рівняння сфери

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0, \quad (12.7)$$

де $A = -2a$, $B = -2b$, $C = -2c$, $D = a^2 + b^2 + c^2 - R^2$. Це рівняння має такі властивості.

1. Рівняння (12.7) є рівнянням другого степеня відносно x , y і z , отже, сфера — поверхня другого порядку.
2. Коефіцієнти при x^2 , y^2 , z^2 рівні між собою.
3. У рівнянні відсутні члени з добутками xy , xz , yz .

Проте не всяке рівняння виду (12.7), яке задовольняє умови 1 – 3, зображує сферу.

Приклад 12.5. Знайти центр і радіус сфери, заданої рівнянням

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z - 11 = 0.$$

Розв'язання. Виділяючи повні квадрати по x , y і z , запишемо задане рівняння у вигляді $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$. Отже, точка $O_1(-1; -2; 3)$ – центр сфери і $R = 5$ – її радіус. ■

Приклад 12.6. Рівняння $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z + 15 = 0$ або $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = -1$ не визначає ніякого геометричного об'єкта. ☹

Еліпсоїд

Означення 12.5. Еліпсоїдом називається поверхня, яка в деякій прямокутній системі координат визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (12.8)$$

Рівняння (12.8) називається **канонічним рівнянням еліпсоїда**. Дослідження форми еліпсоїда проведемо методом паралельних перерізів. Для цього розглянемо перерізи даного еліпсоїда площинами, паралельними площині Oxy . Кожна з таких площин визначається рівнянням $z = h$, де h — довільне дійсне число, а лінія, яка утвориться в перерізі, визначається рівняннями

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}; \quad z = h. \quad (12.9)$$

Дослідимо рівняння (12.9) при різних значеннях h .

1. Якщо $|h| > c$, $c > 0$, то $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 0$ і рівняння (12.9) ніякої лінії не визначають, тобто точок перетину площини $z = h$ з еліпсоїдом не існує.
2. Якщо $h = \pm c$, то $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ і лінія (12.9) вироджується в точки $(0; 0; c)$ і $(0; 0; -c)$, тобто площини $z = c$ і $z = -c$ дотикаються до еліпсоїда.
3. Якщо $|h| < c$, то $\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$, де $a_1 = a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$, $b_1 = b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$, тобто площина $z = h$ перетинає еліпсоїд по еліпсу з півосями a_1 і b_1 . При зменшенні h значення a_1 і b_1 збільшуються і досягають своїх найбільших значень при $h = 0$, тобто в перерізі еліпсоїда площиною Oxy матимемо найбільший еліпс з півосями $a_1 = a$, $b_1 = b$.

Аналогічні результати дістанемо, якщо розглядатимемо перерізи еліпсоїда площинами $x = h$ і $y = h$.

Таким чином, розглянуті перерізи дають змогу зобразити еліпсоїд як замкнуту овальну поверхню (рис. 12.9). Величини a , b , c називаються півосями еліпсоїда. Якщо будь-які дві півосі рівні між собою, то тривісний еліпсоїд перетворюється в еліпсоїд обертання, а якщо всі три півосі рівні між собою, — у сферу.

Приклад 12.7. Знайти центр і півосі еліпсоїда, заданого рівнянням

$$3x^2 + 4y^2 + 6z^2 - 6x + 16y - 36z + 37 = 0.$$

Розв'язання. Виділяючи повні квадрати відносно x , y , z , дістанемо

$$3(x - 1)^2 + 4(y + 2)^2 + 6(z - 3)^2 = 36$$

або

$$\frac{(x - 1)^2}{12} + \frac{(y + 2)^2}{9} + \frac{(z - 3)^2}{6} = 1.$$

Отже, даний еліпсоїд має півосі: $a = 2\sqrt{3}$, $b = 3$, $c = \sqrt{6}$; його центр знаходиться в точці $O(1; -2; 3)$.

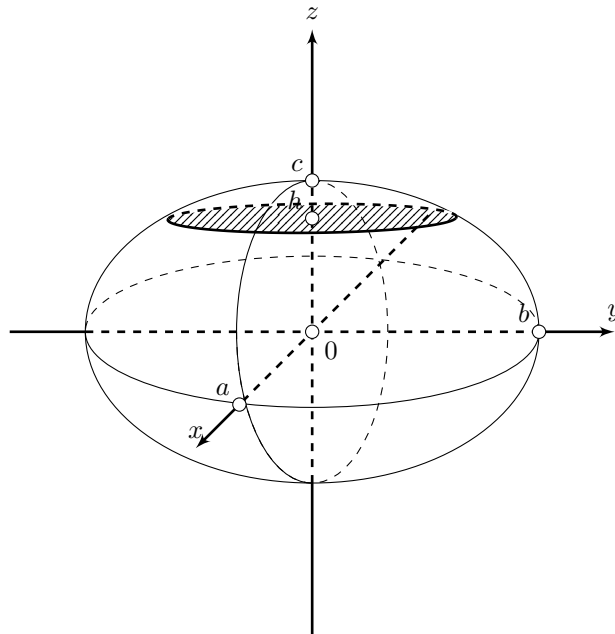


Рисунок 12.9 – Еліпсоїд

Однопорожнинний гіперболоїд

Означення 12.6. Однопорожнинним гіперболоїдом називається поверхня, яка в деякій прямокутній системі координат визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (12.10)$$

Рисунок 12.10 – Однопорожнинний гіперболоїд

Рівняння (12.10) називається **канонічним рівнянням однопорожнинного гіперболоїда**. Досліджують рівняння (12.10), як і в попередньому пункті, методом паралельних перерізів. Перетинаючи однопорожнинний гіперболоїд площинами, паралельними площині Oxy , дістанемо в перерізі еліпси. Якщо поверхню (12.10) перетинати площинами $x = h$ або $y = h$, то в перерізі дістанемо гіперболи.

Детальний аналіз цих перерізів показує, що однопорожнинний гіперболоїд має форму нескінченної трубки, яка необмежено розширюється в обидва боки від найменшого еліпса, по якому однопорожнинний гіперболоїд перетинає площину Oxy (рис. 12.10).

Приклад 12.8. Знайти лінії перетину однопорожнинного гіперболоїда $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$ площинами: а) Oxz ; б) Oxy ; в) $x = 4$. ☺

Розв'язання. а) Лінією перетину площини Oxz з даним гіперболоїдом є гіпербола

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1, \quad y = 0, \quad \text{або} \quad \frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1, \quad y = 0.$$

б) Лінією перетину площини Oxy з даним гіперболоїдом є еліпс:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1, \quad z = 0, \quad \text{або} \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, \quad z = 0.$$

в) Лінія перетину площини $x = 4$ з даним гіперболоїдом є гіпербола:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1, \quad x = 4, \quad \text{або} \quad \frac{y^2}{27} - \frac{z^2}{48} = -1, \quad x = 4.$$

Двopopopожниний гіперболоїд

Означення 12.7. Двopopopожниним гіперболоїдом називається поверхня, яка в деякій прямокутній системі координат визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \quad (12.11)$$

Рівняння (12.11) називається *канонічним рівнянням двopopopожнинного гіперболоїда*.

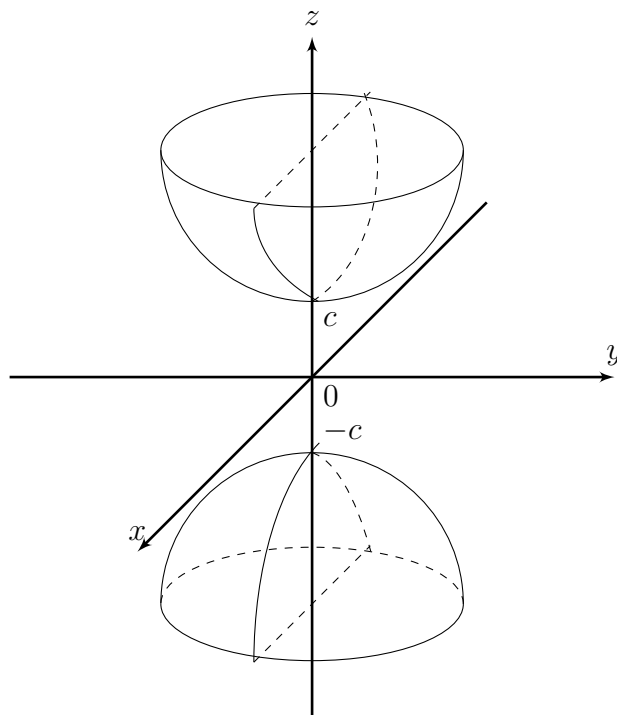


Рисунок 12.11 – Двopopopожнинний гіперболоїд

Метод паралельних перерізів дає змогу зобразити двopopopожнинний гіперболоїд як поверхню, що складається з двох окремих порожнин (звідси назва двopopopожнинний), кожна з яких перетинає вісь Oz і має форму опуклої нескінченної чаші (рис. 12.11).

Приклад 12.9. Скласти рівняння поверхні обертання, утвореної обертанням гіперболи $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1, z = 0$ навколо осі абсцис, і визначити вид поверхні. ☺

Розв'язання. Підставивши в рівняння гіперболи замість y вираз $\pm\sqrt{y^2 + z^2}$, маємо

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2 + z^2}{9} = 1, \text{ або } \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} - \frac{x^2}{4} = -1.$$

Це рівняння двопорожнинного гіперболоїда, який перетинає вісь Ox в точках $(2; 0; 0)$ і $(-2; 0; 0)$. ■

Еліптичний параболоїд

Означення 12.8. Еліптичним параболоїдом називається поверхня, яка в деякій прямокутній системі координат визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z, \quad (12.12)$$

яке є канонічним рівнянням еліптичного параболоїда. ✓

Він має форму нескінченної опуклої чаші (рис. 12.12). Лініями паралельних перерізів еліптичного параболоїда є параболи або еліпси.

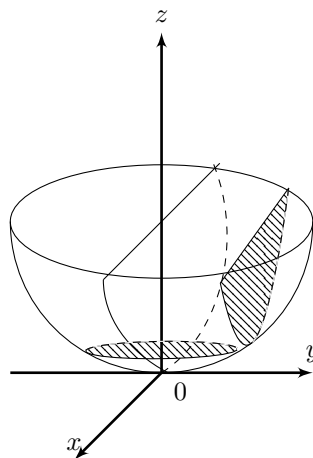


Рисунок 12.12 – Еліптичний параболоїд

Приклад 12.10. Знайти точки перетину еліптичного параболоїда

$$z = \frac{x^2}{4} + y^2$$

з прямою

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-10}{4}.$$

Розв'язання. Запишемо параметричні рівняння даної прямої:

$$x = 2t + 2, \quad y = -t - 1, \quad z = 4t + 10.$$

Підставимо вирази для x, y, z в рівняння параболоїда і знайдемо ті значення параметра, які відповідають точкам перетину:

$$4t + 10 = \frac{(2t + 2)^2}{4} + (-t - 1)^2; \quad 4t + 10 = 2t^2 + 4t + 2; \quad t_1 = -2, \quad t_2 = 2.$$

Підставляючи знайдені значення параметра в параметричні рівняння прямої, знайдемо точки перетину: $M_1(-2; 1; 2)$ і $M_2(6; -3; 18)$. ■

Гіперболічний параболоїд

Визначення 12.9. Гіперболічним параболоїдом називається поверхня, яка в деякій прямокутній системі координат визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z, \quad (12.13)$$

що є канонічним рівнянням гіперболічного параболоїда. Ця поверхня має форму сідла (рис. 12.13).

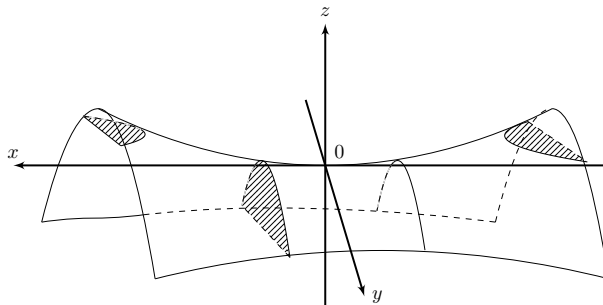


Рисунок 12.13 – Гіперболічний параболоїд

Лініями паралельних перерізів гіперболічного параболоїда є гіперболи або параболи.

Лінійчаті поверхні

Поверхні, твірні яких є прямі лінії, називаються лінійчатыми. Такими поверхнями є циліндричні та конічні поверхні. Розглянемо рівняння однопорожнинного гіперболоїда (12.10) і запишемо його у вигляді

$$\left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) \cdot \left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{x}{a}\right). \quad (12.14)$$

Складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = k \left(1 + \frac{x}{a}\right); \\ \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = \frac{1}{k} \left(1 - \frac{x}{a}\right), \end{cases} \quad (12.15)$$

де k — довільний параметр, відмінний від нуля.

При певному значенні параметра k кожне з рівнянь системи (12.15) визначає площину, а кожна з систем визначає пряму лінію як перетин площин.

Якщо перемножити рівняння (12.15) почленно, то дістанемо рівняння (12.14). Тому довільна точка $(x; y; z)$, що задовольняє систему (12.15), лежить на поверхні (12.14). Це означає, що кожна з прямих (12.15) повністю лежить на поверхні однопорожнинного гіперболоїда (рис. 12.14).

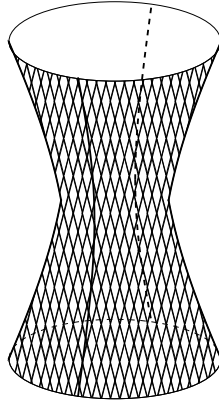


Рисунок 12.14 – Однопорожнинний гіперболоїд

Отже, однопорожнинний гіперболоїд - лінійчата поверхня. Те саме стосується і гіперболічного параболоїда (12.13).

Зазначимо, що однопорожнинні гіперболоїди застосовуються в будівництві. Спорудження різноманітних висотних веж з використанням прямолінійних твірних однопорожнинного гіперболоїда поєднує в собі міцність конструкції і простоту її виконання.

Приклад 12.11. Знайти ті прямолінійні твірні гіперболічного параболоїда $z = \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}$, які проходять через точку $A(4; 2; \frac{7}{9})$. ☺

Розв'язання. Запишемо задане рівняння у вигляді $z = (\frac{x}{3} - \frac{y}{2})(\frac{x}{3} + \frac{y}{2})$. Складемо систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = zk, \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{1}{k}. \end{cases}$$

Підставивши координати точки A в перше рівняння системи, знайдемо $k = \frac{3}{7}$. Отже, пряма

$$\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = \frac{3}{7}z, \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{7}{3}, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 14x - 21y - 18z = 0, \\ 2x - 3y - 14 = 0 \end{cases}$$

є однією з тих твірних заданого параболоїда, яка проходить через точку A . Другу твірну знаходимо аналогічно з системи

$$\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = zk; \\ \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = \frac{1}{k}. \end{cases}$$

Вступ до математичного аналізу

ТЕМА 13. ФУНКЦІЯ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Математична символіка

У курсі вищої математики використовують цілий ряд символів з математичної логіки. Наведемо найуживаніші з них:

$\exists$ — квантор існування (замінює слово „існує“);

$\forall$ — квантор загальності (замінює слово „для всіх“, „для кожного“, „для будь-якого“);

$\Leftrightarrow$ — символ еквівалентності (замінює слово „рівносильно“);

$\Rightarrow$ — символ імплікації (замінює слово „впливає“, „слідuje“, запис $A \Rightarrow B$ означає „якщо A , то B “).

! — символ єдиності (замінює слово „єдиний“).

Множини. Логічні символи

Поняття множини є одним з фундаментальних у математиці. Воно належить до понять, яким не можна дати строге означення, тобто до так званих первісних, які не можна виразити через простіші поняття. Інтуїтивно *множину* розуміють як сукупність (сімейство, набір, зібрання) деяких об'єктів, об'єднаних за певною ознакою чи властивістю.

Прикладами множин може бути множина деталей, з яких складається даний механізм, множина шкіл даного міста, множина зірок певного сузір'я, множина розв'язків даного рівняння, множина всіх цілих чисел тощо.

Об'єкти, з яких складається множина, називаються її *елементами*. Множини позначають великими буквами латинського алфавіту, а їх елементи - малими. Якщо елемент x належить множині X , то пишуть $x \in X$, а запис $x \notin X$ або $x \notin X$ означає, що елемент x не належить множині X .

Множина вважається *заданою*, якщо відома характеристика її елементів, коли про кожний елемент можна сказати, належить він цій множині чи ні. Так, множині цілих чисел належить число 7, але не належить число 0,7.

Множина, яка містить скінченну кількість елементів, називається *скінченною*. Запис $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ означає, що множина A скінченна і містить m елементів. Множина $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, яка містить нескінченну кількість елементів, називається *нескінченною*. Так, множина

слухачів в даній аудиторії — скінченна, а множина трикутників, які можна вписати в дане коло, — нескінченна.

Множина, яка не містить жодного елемента, називається **порожньою** і позначається символом $\emptyset$. Прикладом порожньої множини є множина дійсних коренів рівняння $x^2 + 1 = 0$.

Означення 13.1. Нехай задано дві множини A і B . Якщо кожен елемент множини A є елементом множини B , то множину A називають підмножиною множини B і пишуть $A \subset B$ або $B \supset A$ („ A міститься в B “ або „ B містить A “).

Наприклад, множина натуральних чисел є підмножиною цілих чисел. Очевидно, що кожна множина є своєю підмножиною і порожня множина є підмножиною будь-якої множини.

Означення 13.2. Якщо множини A і B містять одні і ті самі елементи, тобто $A \subset B$ і $B \subset A$, то їх називають рівними і пишуть $A = B$.

Визначимо деякі операції, які можна виконувати над множинами.

Означення 13.3. Множину C , яка містить елементи, кожен з яких належить множині A або множині B , називають об'єднанням (сумою) множин A , B і позначають $C = A \cup B$. Отже,

$$a \in A \cup B \Leftrightarrow a \in A \text{ або } a \in B.$$

Означення 13.4. Множину D , що складається з елементів, кожен з яких одночасно належить множинам A і B , називають перерізом (добутком) множин A і B і позначають $D = A \cap B$. Отже,

$$a \in A \cap B \Leftrightarrow a \in B \text{ і } a \in A.$$

Означення 13.5. Множину E , що складається з елементів, кожен з яких належить множині A і не належить множині B , називають різницею множин A і B і позначають $E = A \setminus B$. Отже,

$$a \in A \setminus B \Leftrightarrow a \in A \text{ і } a \notin B.$$

Приклад 13.1. Наприклад, якщо $A = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$, $B = \{-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 1\}$, то $C = A \cup B = \{-2; -1; -\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 1; 2\}$, $D = A \cap B = \{0; 1\}$, $E = A \setminus B = \{-2; -1; 2\}$. ☺

Нехай $P(x)$ — деяка властивість числа x , тоді запис $\{x | P(x)\}$ означає множину всіх тих чисел x , для яких виконується властивість $P(x)$. Наприклад, $\{x | x^2 - 1 = 0\} = \{-1; 1\}$, $\{x | x < 1, x > 5\} = \emptyset$.

Множина дійсних чисел

У курсі вищої математики часто використовують множини, елементи яких є числа. Такі множини називаються числовими. Назвемо деякі з них.

Приклади числових множин:

1. множина натуральних чисел $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$.
2. множина цілих невід'ємних чисел $\mathbb{Z}_0 = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$.
3. множина цілих чисел $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n, \dots\}$.
4. множина раціональних чисел $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} | p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$.
5. множина дійсних чисел $\mathbb{R} = \{x | x = a, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots\}$, де $a \in \mathbb{Z}$, α_i - цифри між 0, 1, 2, ..., 9.

Зауважимо, що

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Дійсні числа також діляться на раціональні та ірраціональні. Всяке раціональне число є цілим числом або скінченним чи періодичним десятковим дробом. Ірраціональні числа — це нескінченні неперіодичні десяткові дробы.

Не вдаючись до теорії дійсних чисел, зазначимо, що на множині дійсних чисел завжди виконуються операції додавання, віднімання, множення і ділення (крім ділення на 0). Корінь непарного степеня з довільного дійсного числа має одне дійсне значення. Корінь парного степеня з додатного числа має два дійсні значення, які відрізняються лише знаком. Корінь парного степеня з від'ємного числа на множині дійсних чисел змісту не має.

Дійсні числа зображають точками на координатній осі або числовій прямій. Таким чином, між множиною дійсних чисел і множиною всіх точок прямої можна встановити взаємно однозначну відповідність. Це означає, що кожному числу $x \in \mathbb{R}$ відповідає певна точка прямої і, навпаки, кожній точці прямої відповідає певне число.

Нехай $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Можливі такі числові проміжки: $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$, $(a, b) = \{x | a < x < b\}$, $[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$, $(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$, $(-\infty, b) = \{x | x < b\}$, $[a, +\infty) = \{x | a \leq x\}$, $(-\infty, b] = \{x | x \leq b\}$.

Зауважимо, що арифметичні операції над $\pm\infty$ неприпустимі.

Нехай x_0 — довільна точка з $\mathbb{R}$. Околом точки x_0 називають довільний інтервал (α, β) , що містить точку x_0 , тобто $\alpha < x_0 < \beta$.

Визначення 13.6. Інтервал $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ називають ε -околом точки x_0 , причому точка x_0 називається центром околу, а число ε — радіусом околу. ✓

Визначення 13.7. Модулем дійсного числа x називають число $|x|$, яке визначається за формулою

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{якщо } x > 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \\ -x, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

Геометрично $|x|$ визначає відстань від початку відріку 0 до точки відповідної числу x на числовій осі.

Властивості модуля:

1. $a = b \Rightarrow |a| = |b|$.
2. $\forall x \in \mathbb{R} |x| \geq 0$.
3. $\forall x \in \mathbb{R} x \leq |x|$.
4. $\forall x \in \mathbb{R} |x| = |-x|$.
5. $\forall x, y \in \mathbb{R} |x + y| \leq |x| + |y|$.
6. $\forall x, y \in \mathbb{R} |x - y| \geq |x| - |y|$.
7. $\forall x, y \in \mathbb{R} |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.
8. $\forall x, y \in \mathbb{R} \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, y \neq 0$.
9. Якщо $a \geq 0$, то $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$.
10. Якщо $a \geq 0$, то $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ або $x \geq a$.

Зауважимо, що ε -окіл точки x_0 записують часто так: $|x - x_0| < \varepsilon$.

Поняття та основні властивості функції. Графік функції

Визначення 13.8. Якщо кожному числу x з деякої множини X за певним правилом поставлене у відповідність єдине число y , то кажуть, що y є функцією від x і пишуть $y = f(x)$. Змінна x називається незалежною змінною або аргументом, а y — залежною змінною (функцією). ✓

Визначення 13.9. Множина X , на якій визначена функція, називається областю визначення функції. Її позначають $D(f)$. ✓

Визначення 13.10. Множина Y усіх чисел y таких, що $y = f(x)$ для всіх $x \in X$ називається множиною значень функції, тобто $Y = \{y | y = f(x) \forall x \in X\}$. Її позначають $E(f)$. ✓

Якщо одному значенню аргумента відповідає не одне, а кілька значень y або навіть нескінченна множина значень y , то функцію називають **багатозначною**.

Основні способи задання функції: аналітичний, графічний, табличний, словесний.

При **аналітичному** способі відповідність між функцією та аргументом задається формулою (аналітичним виразом), де зазначено, які дії слід виконати над значеннями аргументу та сталими числами, щоб дістати відповідне значення функції.

При **графічному** способі задання функції $y = f(x)$ відповідність між x та y задають графіком — множиною точок (x, y) площини, прямокутні координати яких задовольняють рівність $y = f(x)$.

Табличний спосіб полягає в тому, що відповідність між x та y задається у вигляді таблиці.

Словесний спосіб полягає у заданні функції за допомогою слів. Наприклад, $[x]$ — ціла частина числа x .

Зауважимо, що аналітичний спосіб, у свою чергу, ділиться на **явне** та **неявне** задання функції. Під **неявним заданням** функції розуміють її задання у вигляді рівняння $F(x, y) = 0$, нерозв'язаного відносно залежної змінної y (наприклад $e^x - x + y^2 - \cos y = 0$).

Якщо функція задана рівнянням $y = f(x)$, розв'язаним відносно залежної змінної y , то кажуть, що функція **задана у явній формі або що є явною**.

Класифікація елементарних функцій

Основними елементарними функціями називаються такі:

1. Степенева функція $y = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Область визначення і графіки цієї функції залежать від значення α (рис. 13.1, а-е).

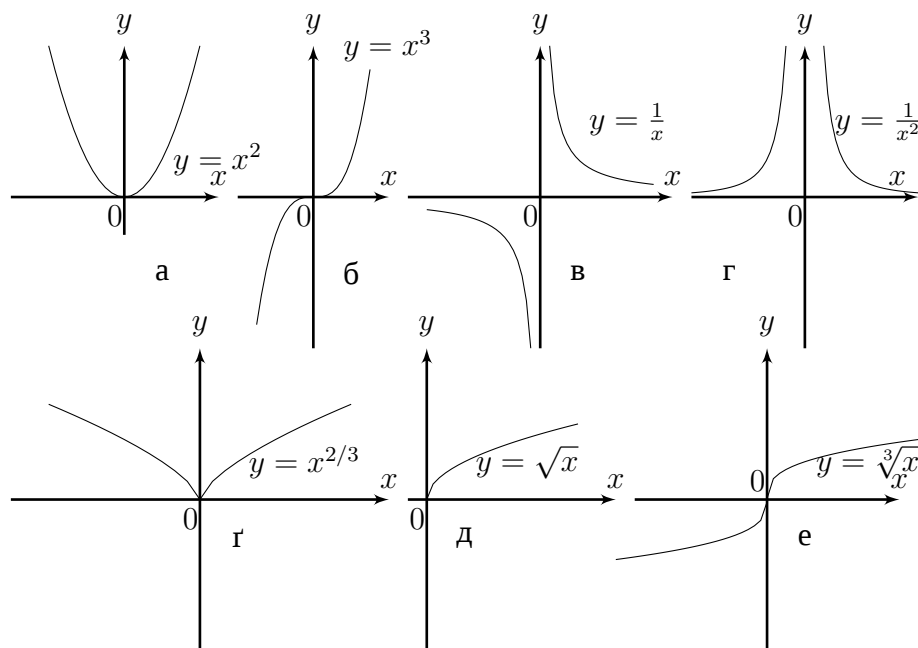


Рисунок 13.1 – Степенева функція

2. Показникова функція $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$. (рис. 13.2).

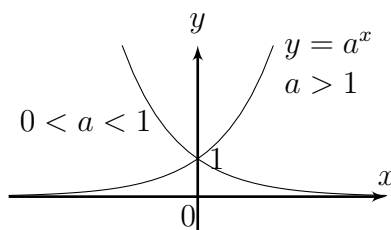


Рисунок 13.2 – Показникова функція

3. Логарифмічна функція $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ (рис. 13.3).

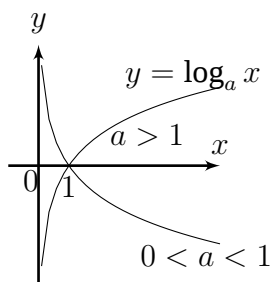


Рисунок 13.3 – Логарифмічна функція

4. Тригонометричні функції: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ (рис. 13.4, а-г).

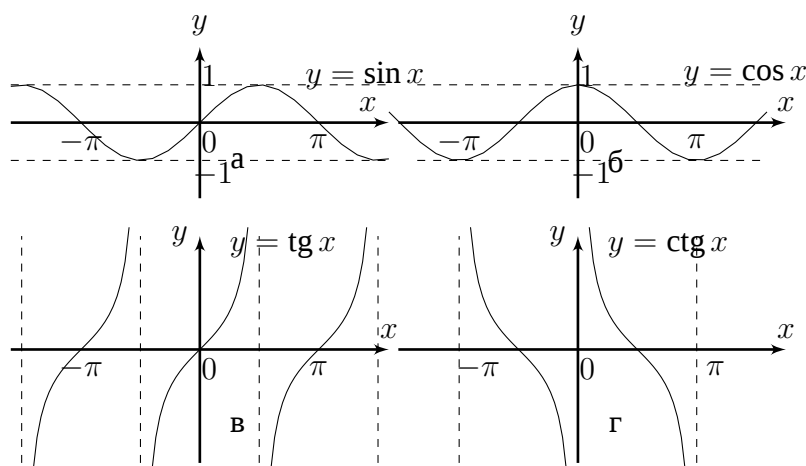


Рисунок 13.4 – Тригонометричні функції

5. Обернені тригонометричні функції: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctg x$, $y = \text{arcctg} x$ (рис. 13.5, а-г).

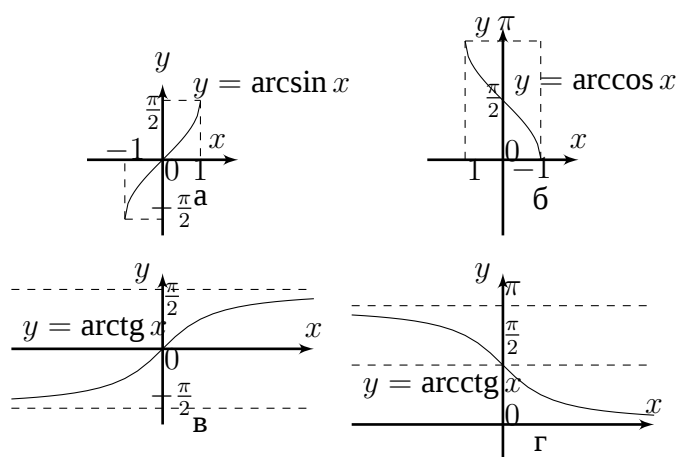


Рисунок 13.5 – Обернені тригонометричні функції

Графіки основних елементарних функцій треба пам'ятати. Перетворюючи їх, можна дістати графіки багатьох інших функцій. Нехай графік функції $y = f(x)$ відомий, розглянемо деякі перетворення цього графіка.

1. Графік функції $y = f(x) + b$ дістанемо з графіка функції $y = f(x)$ паралельним перенесенням останнього вздовж осі Oy на величину, що дорівнює b (рис. 13.6, а).
2. Графік функції $y = f(x+a)$ дістаємо з графіка функції $y = f(x)$ паралельним перенесенням останнього вздовж осі Ox на величину, що дорівнює a (рис. 13.6, б).
3. Графік функції $y = cf(x)$, $c \neq 0$ (рис. 13.6, в) дістаємо з графіка функції $y = f(x)$, при $0 < c < 1$ за допомогою стискування в $\frac{1}{c}$ разів ординат останнього, а при $c > 1$ за допомогою розтягування в c разів його ординат із збереженням відповідних абсцис. Якщо $-\infty < c < 0$, то графік $y = cf(x)$ є дзеркальним відображенням графіка $y = -cf(x)$ відносно осі Ox (відповідно до випадків $-1 < c < 0$ і $c < -1$).
4. Графік функції $y = f(kx)$, $k \neq 0$ дістаємо з графіка функції $y = f(x)$ при $0 < k < 1$ збільшенням в k разів абсцис його точок, а при $1 < k < +\infty$ зменшенням в k разів абсцис його точок із збереженням їхніх ординат.

(рис. 13.6, г).

Якщо $-\infty < k < 0$, то графік $y = f(kx)$ є дзеркальним відображенням графіка $f(-kx)$ відносно осі Oy .

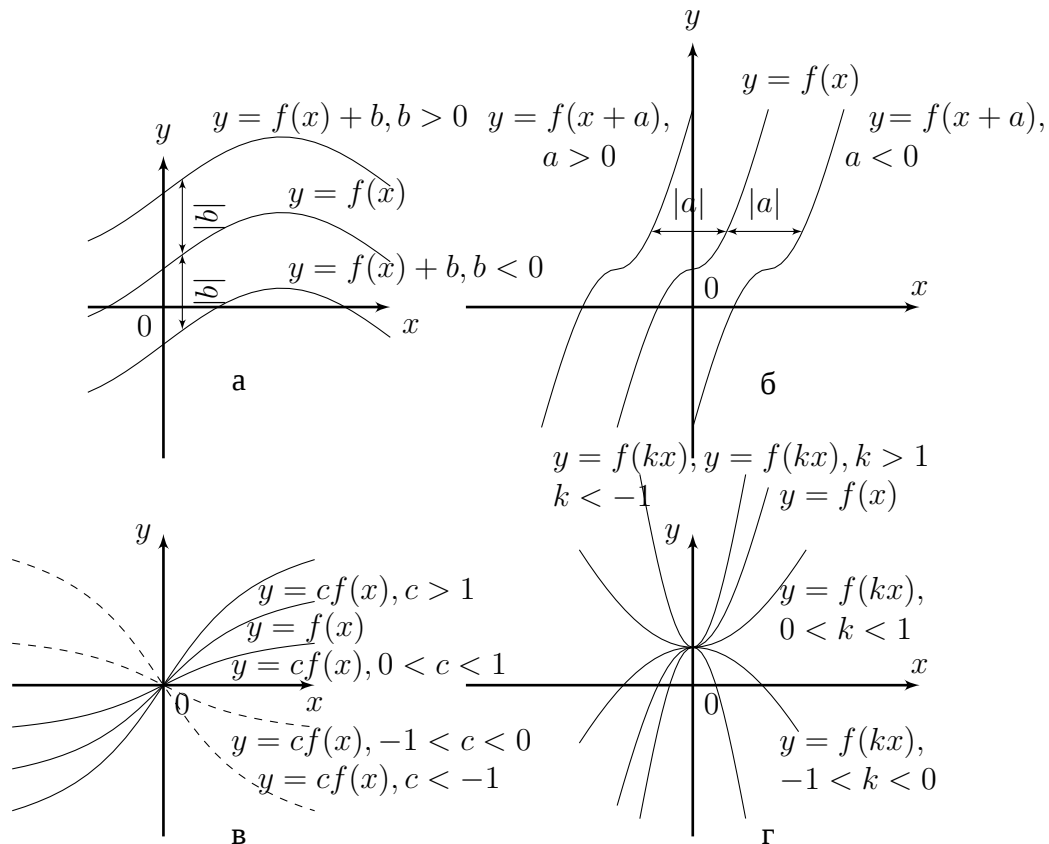


Рисунок 13.6 – Перетворення графіків функцій

Введемо арифметичні операції над функціями. Нехай функція $y = f(x)$ визначена на множині A , а $\varphi(x)$ — на множині B , причому переріз цих множин $C = A \cap B \neq \emptyset$. Тоді на множині C можна визначити суму функцій $f(x) + \varphi(x)$. Значення суми в точці $x = x_0 \in C$ — це число, яке дорівнює сумі $f(x_0) + \varphi(x_0)$. Аналогічно можна визначити різницю $f(x) - \varphi(x)$, добуток $f(x)\varphi(x)$ та частку $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ цих функцій (останню за умови, що $\varphi(x) \neq 0, \forall x \in C$).

Над функціями виконують і так звану операцію суперпозиції, або накладання. Нехай функція $y = f(u)$ визначена на множині A , а функція $u = \varphi(x)$ — на множині B , причому для кожного значення $x \in B$ відповідне значення $u = \varphi(x) \in A$. Тоді на множині B визначена функція $f(\varphi(x))$, яку називають **складеною функцією від x** , або **суперпозицією заданих функцій**, або **функцією від функцій**.

Змінну $u = \varphi(x)$ функції $y = f(u)$ називають **проміжним аргументом**, або **внутрішньою функцією**, а змінну $y = f(u)$ **зовнішньою функцією**.

Наприклад, функція $y = \sqrt[3]{\sin x}$ є суперпозицією двох основних елементарних функцій — степеневі та тригонометричної: $y = \sqrt[3]{u}$, $u \in [-1; 1]$, $u = \sin x$, $x \in (-\infty; +\infty)$. Складені функції можна утворювати за допомогою суперпозиції не тільки двох, а й більшої кількості функцій.

Наприклад, функцію $y = 2^{\sin x^3}$ можна розглядати як суперпозицію трьох функцій:

$$y = 2^u, \quad u \in [-1, 1], \quad u = \sin v, \quad v \in (-\infty, +\infty),$$

$$v = x^3, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

Основні елементарні функції, а також функції, утворені за допомогою формул, в яких над основними елементарними функціями виконується лише скінченне число арифметичних операцій (додавання, віднімання, множення, ділення) і суперпозицій, називаються елементарними.

Так, функція $y = \arccos \frac{1}{x} + \frac{5x^2-1}{\sin x}$ є елементарною функцією, а функції

$$y = \begin{cases} x^2, & -\infty < x \leq 1, \\ 2x + 1, & 1 < x < +\infty, \end{cases} \quad y = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

не є елементарними. Неелементарними є також функції $n!$, $\operatorname{sign} x$, $[x]$, $\{x\}$.

Елементарні функції поділяють на такі класи.

1. Функція виду $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$, де $n \in \mathbb{Z}_0$, $a_0, a_1, \dots, a_n$ — дійсні числа — коефіцієнти ($a_0 \neq 0$), називається **цілою раціональною функцією, або многочленом (поліномом) степеня n** . Многочлен першого степеня називається також **лінійною функцією**, а другого — **квадратичною**.

2. Функція, що є відношенням двох многочленів

$$R(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m},$$

називається **дробовою раціональною функцією, або раціональним дробом**. Сукупність многочленів і раціональних дробів утворює **клас раціональних функцій**.

3. Функція, утворена за допомогою скінченного числа суперпозицій та арифметичних операцій над раціональними функціями і над степеневими функціями з дробовими показниками і яка не є раціональною, називається **ірраціональною функцією**.

Наприклад, функції $y = \sqrt{\frac{2x+1}{x^3+1}}$; $y = \sqrt{x} + 5$ — ірраціональні.

4. Елементарна функція, яка не належить до раціональних або ірраціональних, називається **трансцендентною функцією**. Це, наприклад, функції $y = \sin x$, $y = 2^x + x$, $y = \lg x$, $y = \operatorname{arctg} x$ тощо.

Обмежені функції

Функцію $f(x)$, визначену на множині A , називають **обмеженою** на цій множині, коли існує таке число $M > 0$, що для всіх $x \in A$ виконується нерівність $|f(x)| \leq M$. Таким чином, значення обмеженої функції не виходять за межі відрізка $[-M; M]$. Тому її графік лежить між прямими $y = -M$ та $y = M$ (рис. 13.7). Наприклад, функції $y = \sin x$ та $y = \cos x$ обмежені на всій числовій осі, бо $|\sin x| \leq 1$, $|\cos x| \leq 1$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

Якщо для функцій $f(x)$ або $\varphi(x)$, визначених на множині A , існує таке число N , що виконується нерівність $f(x) \leq N$ або $\varphi(x) \geq N$, то функцію $f(x)$ називають обмеженою зверху, а $\varphi(x)$ — обмеженою знизу. Наприклад, функція $y = a^x$ на інтервалі $(-\infty; +\infty)$ обмежена знизу прямою $y = 0$, але не обмежена зверху; функція $y = -x^2 + 4x - 3$ (рис. 13.8) обмежена зверху прямою $y = 1$, але не обмежена знизу; функція $y = \frac{1}{x}$ — необмежена. Розглядаючи обмеженість функції $f(x)$, ми тим самим характеризуємо множину значень цієї функції.

Монотонні функції

Нехай функція $f(x)$ визначена на множині A . Якщо для двох довільних різних значень x_1 і x_2 аргументу, взятих із множини A , з нерівності $x_1 < x_2$ випливає, що:

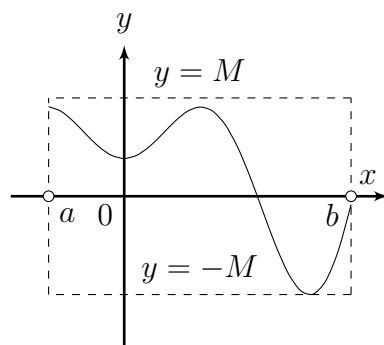


Рисунок 13.7 – Обмежена функція

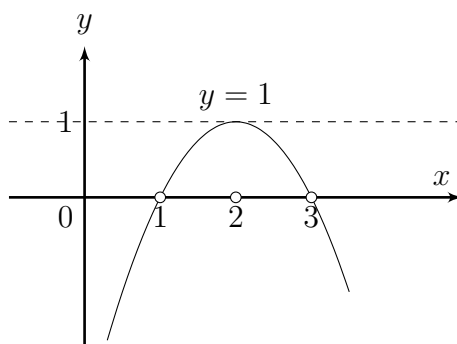


Рисунок 13.8 – Графік функції $y = -x^2 + 4x - 3$

- 1) $f(x_1) < f(x_2)$, то функція називається **зростаючою**;
- 2) $f(x_1) \leq f(x_2)$, то функція називається **неспадною**;
- 3) $f(x_1) > f(x_2)$, то функція називається **спадною**;
- 4) $f(x_1) \geq f(x_2)$, то функція називається **незростаючою**.

Наприклад, функція $y = a^x$ (рис. 13.2) є зростаючою при $a > 1$ і спадною при $0 < a < 1$ на інтервалі $(-\infty; +\infty)$; функція $y = -x^2 + 4x - 3$ (рис. 13.8) є зростаючою на інтервалі $(-\infty; 2)$ і спадною на інтервалі $(2; +\infty)$. Зростаючі, незростаючі, спадні й неспадні функції на множині A називаються **монотонними** на цій множині, а зростаючі і спадні — **строго монотонними**.

Нехай функція не є монотонною в усій своїй області визначення, але цю область можна розбити на деяке (скінченне чи нескінченне) число проміжків, які не перетинаються і на кожному з яких функція монотонна. Такі проміжки називаються проміжками монотонності функції.

Так, функція $y = x^2$ не є монотонною на всій числовій осі, але має два проміжки монотонності: $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$; на першому з них функція спадає, а на другому — зростає.

Функції $y = \sin x$ і $y = \cos x$ мають нескінченну кількість проміжків монотонності.

Парні і непарні функції

Нехай функція $f(x)$ визначена на множині A точок осі Ox , розміщених симетрично відносно точки $x = 0$, тобто якщо $x \in A$, то й $-x \in A$.

Визначення 13.11. Функцію $f(x)$ називають **парною**, якщо $f(-x) = f(x)$, $x \in A$, і **непарною**, якщо $f(-x) = -f(x)$, $x \in A$. ✓

Приклад 13.2. Функція $y = \frac{1}{x+2}$ не є парною і не є непарною, бо її область визначення не симетрична відносно точки $x = 0$: в точці $x = 2$ функція визначена, а в точці $x = -2$ — не визначена. ☺

Приклад 13.3. Функція $y = \frac{2x^2+x}{x}$ має область визначення $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, симетричну відносно точки $x = 0$, але не є ні парною, ні непарною, бо

$$f(-x) = \frac{2(-x)^2 + (-x)}{-x} = -\frac{2x^2 - x}{x}; \quad -f(x) = -\frac{2x^2 + x}{x};$$

$$f(-x) \neq f(x); \quad f(-x) \neq -f(x).$$

Приклад 13.4. Область визначення функції $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-3}$ симетрична відносно точки $x = 0$ ($x \neq \pm\sqrt{3}$), і ця функція парна, бо

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 + 1}{(-x)^2 - 3} = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 3}.$$

Приклад 13.5. Функції $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ — непарні, а $y = \cos x$ — парна. ☺

Графік парної функції симетричний відносно осі Oy , а непарної — відносно початку координат. Крім того, якщо парна чи непарна функція має певну властивість для додатних значень x , то можна визначити відповідну властивість для від'ємних значень x . Наприклад, якщо для $x > 0$ парна функція зростає, то для $x < 0$ ця функція спадає.

Періодичні функції

Означення 13.12. Функція $f(x)$, визначена на всій числовій прямій, називається періодичною, якщо існує таке число T , що $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+T) = f(x)$. Число T називається періодом функції. ✓

Якщо T — період функції, то її періодами є також числа kT , де k дорівнює $\pm 1, \pm 2, \dots$. Найменший з додатних періодів функції, якщо такий існує, називається основним періодом функції.

Ми визначили періодичну функцію, задану на всій числовій прямій. Більш загальним є таке означення.

Функція $f(x)$, визначена на множині X , називається періодичною на цій множині, якщо існує таке число $T \neq 0$, що $x+T \in X$ і $f(x+T) = f(x)$, $x \in X$.

З означення випливає, що для побудови графіка періодичної з періодом T функції досить побудувати її графік на довільному проміжку довжини T , а потім продовжити цей графік на всю область визначення, повторюючи його через кожний проміжок довжини T .

Приклад 13.6. 1. Основним періодом функцій $y = \sin x$, $y = \cos x$, є число $T = 2\pi$.
 2. Функції $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$ мають основний період $T = \pi$.
 3. Періодом функції $y = C$ (C – стала) є довільне, відмінне від нуля число; ця функція не має основного періоду. ☺

Приклад 13.7. Знайти період функції $y = \sin(ax + b)$, $x \in (-\infty; +\infty)$. ☺

Розв'язання. Якщо ця функція періодична, то існує таке число $T \neq 0$, що

$$\sin(ax + b) = \sin(a(x + T) + b),$$

звідки

$$2\pi n + ax + b = ax + aT + b, \quad T = \frac{2\pi n}{a}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Отже, основним періодом даної функції є число $T = \frac{2\pi}{|a|}$. ■

Періодичні функції відіграють важливу роль для математичного опису періодичних явищ, що спостерігаються в природі. Характерною особливістю цих явищ є періодичне повторення їх через певні проміжки часу. Прикладами можуть бути рух маятника навколо осі, рух небесних тіл (планети рухаються по еліптичних орбітах), робота майже всіх машин і механізмів пов'язана з періодичним рухом (рух поршнів, шатунів тощо).

Неявно задані функції

Означення 13.13. Якщо функція задана рівнянням $y = f(x)$, розв'язаним відносно залежної змінної y , то кажуть, що функція задана у явній формі або є явною. ✓

Означення 13.14. Під неявним заданням функції розуміють задання функції у вигляді рівняння $F(x, y) = 0$, не розв'язаного відносно залежної змінної. ✓

Це рівняння задає функцію лише тоді, коли множина впорядкованих пар чисел (x, y) , які є розв'язком даного рівняння, така, що будь-якому числу x_0 у цій множині відповідає не більше однієї пари (x_0, y_0) з першим елементом x_0 . Так, рівняння $2x + 3y - 1 = 0$ задає функцію, а рівняння $x^2 + y^2 = 4$ не задає, бо значенню $x_0 = \sqrt{3}$ відповідає дві пари чисел: $(\sqrt{3}, 1)$, $(\sqrt{3}, -1)$. Довільну явно задану функцію $y = f(x)$ можна записати як неявно задану рівнянням $f(x) - y = 0$, але не навпаки. Наприклад, функцію $e^{xy} - x + y = 0$ явно записати не можна, бо це рівняння не можна розв'язати відносно y . Тому неявна форма запису функції більш загальна, ніж явна. Неявно задану функцію називають неявною.

Зауважимо, що терміни „явна функція“ і „неявна функція“ характеризують не природу функції, а аналітичний спосіб її задання.

Обернені функції

Нехай задана функція $y = f(x)$ з областю визначення X і множиною значень Y . Функція $f(x)$ кожному значенню $x_0 \in X$ ставить у відповідність єдине значення $y_0 \in Y$. При цьому може виявитись, що різним значенням аргументу x_1 і x_2 відповідає одне й те саме значення функції y_1 . Тому додатково вимагатимемо, щоб функція $f(x)$ різним значенням x ставила у відповідність різні значення y . Тоді кожному значенню $y \in Y$ відповідатиме єдине значення $x \in X$, тобто можна визначити функцію $x = \varphi(y)$ з областю визначення Y і множиною значень X . Ця функція називається **оберненою функцією до даної**. Отже, функція $x = \varphi(y)$ є **оберненою до функції** $y = f(x)$, якщо:

- 1) областю визначення функції φ є множина значень функції f ;
- 2) множина значень функції φ є областю визначення функції f ;
- 3) кожному значенню змінної $y \in Y$ відповідає єдине значення змінної $x \in X$.

З цього випливає, що кожна з двох функцій $y = f(x)$ і $x = \varphi(y)$ може бути названа прямою або оберненою, тобто ці функції взаємно обернені.

Щоб знайти функцію $x = \varphi(y)$, обернену до функції $y = f(x)$, достатньо розв'язати рівняння $f(x) = y$ відносно змінної x (якщо це можливо). Оскільки кожна точка $(x; y)$ кривої $y = f(x)$ є одночасно точкою кривої $x = \varphi(y)$, то графіки взаємно обернених функцій $y = f(x)$ і $x = \varphi(y)$ збігаються. Якщо ж додатково вимагати, щоб, як звичайно, незалежна змінна позначалась через x , а залежна — через y , то замість функції $x = \varphi(y)$ матимемо функцію $y = \varphi(x)$. Це означає, що кожна точка $M_1(x_0; y_0)$ кривої $y = f(x)$ стане точкою $M_2(x_0; y_0)$ кривої $y = \varphi(x)$. Оскільки в системі координат Oxy точки M_1 і M_2 симетричні відносно прямої $y = x$, то графіки взаємно обернених функцій $y = f(x)$ і $y = \varphi(x)$ симетричні відносно бісектриси першого і третього координатних кутів (рис. 13.9).

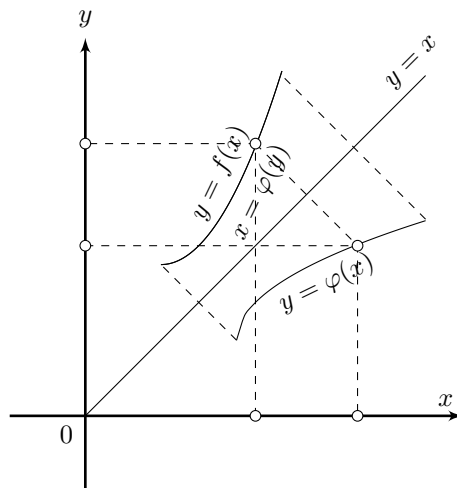


Рисунок 13.9 – Обернена функція

З означення оберненої функції випливає, що функція $y = \varphi(x)$, $x \in X$, $y \in Y$ має обернену тоді і тільки тоді, коли ця функція задає взаємно однозначну відповідність між множинами X і Y . Таку властивість мають, зокрема, зростаючі функції, оскільки для них $(x_1 < x_2) \Leftrightarrow (y_1 < y_2)$, і спадні функції, тому що для них $(x_1 < x_2) \Leftrightarrow (y_1 > y_2)$. Звідси випливає, що будь-яка строго монотонна функція має обернену функцію. При цьому, якщо пряма функція строго зростає (спадає), то обернена їй функція також строго зростає (спадає).

Приклад 13.8. Функція $y = 2x - 1$ має обернену функцію $y = \frac{x+1}{2}$.



Параметрично задані функції

Нехай задано дві функції

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), \quad (13.1)$$

однієї незалежної змінної t , визначені на одному й тому самому проміжку. Якщо функція $x = \varphi(t)$ строго монотонна, то згідно з попереднім пунктом вона має обернену функцію $t = \Phi(x)$. Тому змінну y можна розглядати як складену функцію від x : $y = \psi(\Phi(x))$.

Задання функціональної залежності між x і y у вигляді двох функцій (13.1) називають **параметричним заданням функцій**. Допоміжна змінна t при цьому називається параметром. Всяка параметрично задана функція (13.1) визначає на площині Oxy деяку криву, проте не всяка параметрично задана крива визначає функцію.

Приклад 13.9. Рівняння $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, $t \in [0; \pi]$ визначають функцію, оскільки змінна $x = R \cos t$, $t \in [0; \pi]$ строго монотонна. Задана функція визначає півколо $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, розміщене у верхній півплощині, тому що при $0 \leq t < \pi$ значення $y = R \sin t \geq 0$. ☺

Приклад 13.10.

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

задає параметричне рівняння еліпса з центром у початку координат та осями a та b . ☺

ТЕМА 14. ГРАНИЦЯ ЧИСЛОВОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ

Поняття про числову послідовність

Поняття числової послідовності відоме з шкільного курсу алгебри та геометрії. Зокрема, числовими послідовностями є арифметична прогресія, геометрична прогресія, послідовність периметрів і площ правильних n -кутників, вписаних у коло, послідовність площ поверхонь та об'ємів правильних n -гранних призм, вписаних в циліндр, тощо.

Сформулюємо означення числової послідовності в загальному вигляді.

Означення 14.1. Якщо кожному натуральному числу $n \in \mathbb{N}$ за певним правилом ставиться у відповідність число x_n , то множину чисел $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ називають числовою послідовністю (або коротко послідовністю) і позначають символом $\{x_n\}$.

Окремі числа $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ називають членами або елементами послідовності: x_1 — перший член послідовності, x_2 — другий і т. д., x_n — n -ий, або загальний член послідовності. ✓

За означенням послідовність містить нескінченну кількість членів, причому будь-які два з них відрізняються, принаймні, номерами. Отже, елементи x_n і x_m при $n \neq m$ вважаються різними, хоча як числа вони можуть бути рівні між собою. Якщо всі елементи послідовності $\{x_n\}$ дорівнюють одному й тому самому числу, то її називають **сталою**.

Геометрично послідовність зображається на числовій осі у вигляді послідовності точок, координати яких дорівнюють відповідним членам послідовності. Можна також зображати послідовність точками координатної площини Oxy , відкладаючи на осі Ox номери членів послідовності, а на осі Oy — відповідні члени.

Послідовність **вважається заданою**, якщо вказано спосіб знаходження її загального члена. Найчастіше послідовність задається формулою її загального члена.

Очевидно, що всяка функція $y = f(n)$, задана на множині натуральних чисел $\mathbb{N}$, визначає деяку числову послідовність $\{y_n\}$ з загальним членом $y_n = f(n)$.

Числові послідовності можна задавати також **рекурентним** (від латинського *recurrens* — зворотний) способом. Суть його полягає в тому, що задають кілька членів послідовності і вказують правило, за яким можна знайти наступний її член.

Іноді числові послідовності задають словесним описом. Зазначимо, що в загальному випадку задача написання формули загального члена послідовності не розв'язується, тобто не можна стверджувати, що для довільної послідовності можна знайти формулу її загального члена.

Приклад 14.1. Записати перші п'ять членів послідовності, заданої її загальним членом: а) $x_n = \frac{2n+1}{n}$; б) $y_n = \frac{n+(-1)^n n}{n}$. ☺

Розв'язання. Підставляючи у формулу n -го члена послідовно числа 1, 2, 3, 4, 5, дістанемо:

$$а) \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots\} = \left\{3, \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \frac{11}{5}, \dots\right\};$$

$$б) \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, \dots\} = \{0, 2, 0, 2, 0, \dots\}.$$

Приклад 14.2. Записати перші п'ять членів послідовності $\{a_n\}$, заданої рекурентним співвідношенням $a_n = \frac{3a_{n-1} - a_{n-2}}{3}$, де $n = 3, 4, \dots$, якщо $a_1 = 1, a_2 = 2$. ☺

Розв'язання. Згідно з рекурентною формулою маємо $a_3 = \frac{3a_2 - a_1}{3} = \frac{5}{3}$, $a_4 = \frac{3a_3 - a_2}{3} = 1$, $a_5 = \frac{3a_4 - a_3}{3} = \frac{4}{9}$, отже,

$$\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots\} = \left\{1, 2, \frac{5}{3}, 1, \frac{4}{9}, \dots\right\}.$$

Приклад 14.3. Евклід довів, що множина простих чисел

$$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \dots\}$$

нескінченна, тобто прості числа утворюють послідовність. Формула загального члена цієї послідовності досі не знайдена і навіть невідомо, чи така формула існує. ☺

Границя числової послідовності.

Нехай змінна x_n перебігає значення послідовності $\{x_n\}$, тобто є дискретною змінною.

Означення 14.2. Число x_0 називається границею послідовності $\{x_n\}$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N = N(\varepsilon)$, що при всіх $n > N$ виконується нерівність

$$|x_n - x_0| < \varepsilon. \quad (14.1)$$

Якщо число x_0 є границею послідовності $\{x_n\}$, то пишуть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, або $\lim x_n = x_0$, $x_n \rightarrow x_0$, і кажуть, що послідовність $\{x_n\}$, або змінна x_n , має границю, яка дорівнює числу x_0 або прямує до x_0 . Коротко означення границі можна записати так:

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N \Rightarrow |x_n - x_0| < \varepsilon) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0.$$

Послідовність, яка має границю x_0 , називається **збіжною до x_0** (або просто **збіжною**). Послідовність, яка не є збіжною, називається **розбіжною**.

Розглянемо **геометричний зміст границі послідовності**. Нерівність (14.1) рівносильна нерівностям $-\varepsilon < x_n - x_0 < \varepsilon$, або $x_0 - \varepsilon < x_n < x_0 + \varepsilon$, які показують, що елемент x_n знаходиться в ε -околі точки x_0 (рис. 14.1). Тому означення границі геометрично можна сформулювати так: число x_0 називається границею послідовності $\{x_n\}$, якщо для довільного ε -околу точки x_0 існує такий номер $N = N(\varepsilon)$, що всі значення x_n , для яких $n > N$, попадають в цей окіл. Поза цим околom може залишитися хіба що скінченна кількість членів послідовності $\{x_n\}$.

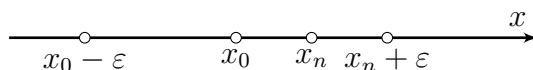


Рисунок 14.1 – Геометричний зміст границі послідовності

Приклад 14.4. Відомо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{(-1)^n}{n^2}\right) = 2$. Нехай $\varepsilon = 0,01$. Скільки членів послідовності x_n лежить поза околom $(2 - 0,01; 2 + 0,01) = (1,99; 2,01)$? ☺

Розв'язання. Оскільки $|x_n - 2| = \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$, то нерівність $|x_n - 2| < 0,01$ виконуватиметься при $\frac{1}{n^2} < 0,01$, звідки $n > 10$. Отже, поза околom $(1,99; 2,01)$ знаходиться лише 10 членів даної послідовності.

Геометрично це означає, що всі члени послідовності $\{x_n\}$ при $n > 10$ знаходяться від точки 2 на відстані, яка менша від 0,01. На рисунку це зобразити не можна, бо точки 1,99; 2,01 – кінці околу і нескінченна кількість точок x_n , де $n > 10$, які лежать в цьому околi, практично зливаються в одну точку. ■

Приклад 14.5. Довести, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+3} = 1$. ☺

Розв'язання. Нехай $\{x_n\} = \left\{\frac{2n-1}{2n+3}\right\}$, тоді $|x_n - 1| = \left|\frac{2n-1}{2n+3} - 1\right| = \frac{4}{2n+3}$. Задамо довільне число $\varepsilon > 0$. Нерівність $|x_n - 1| < \varepsilon$ виконуватиметься, якщо $\frac{4}{2n+3} < \varepsilon$, звідки $n > \frac{2}{\varepsilon} - \frac{3}{2}$. Позначимо через N найбільше ціле число, яке не перевищує $\frac{2}{\varepsilon} - \frac{3}{2}$: $N = \left[\frac{2}{\varepsilon} - \frac{3}{2}\right]$. Тоді при всіх $n > N$ матимемо $|x_n - 1| < \varepsilon$. Це означає, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+3} = 1$. ■

Приклад 14.6. Довести, що послідовність $\{\cos \pi n\}$ розбіжна. ☺

Розв'язання. Задана послідовність має вигляд $-1, +1, -1, +1, \dots, (-1)^n, \dots$. Вона не має границі, тому що поза довільним ε -околом ($0 < \varepsilon < 1$) будь-якої точки числової осі міститься нескінченна кількість членів даної послідовності. ■

Приклад 14.7. Довести, що послідовність, яка задана загальним членом

$$x_n = \begin{cases} \frac{n+1}{n}, & n = 1, 3, 5, \dots \\ \frac{1}{n}, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

не має границі. ☺

Розв'язання. Знайдемо кілька початкових членів послідовності і зобразимо їх схематично на числовій прямій (рис. 14.2). Для цієї послідовності характерним є те, що при достатньо великих k значення x_{2k} з парними номерами як завгодно мало відрізняються від нуля, а значення x_{2k+1} з непарними номерами як завгодно мало відрізняються від одиниці.

За означенням число x_0 буде границею послідовності, якщо в будь-якому ε -околі точки x_0 знаходиться нескінченна, а за околом – скінченна множина її членів. У даному випадку в довільному ε -околі ($0 < \varepsilon < 1$) нуля міститься нескінченна множина членів послідовності з парними номерами, а за цим околом знаходиться нескінченна множина її членів з непарними номерами. Це значить, що число 0 не буде границею заданої послідовності. Аналогічно переконуємось, що границею не може бути і число 1. Отже, задана послідовність розбіжна. ■

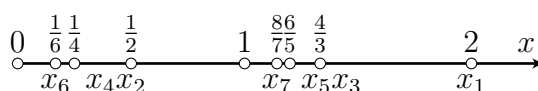


Рисунок 14.2 – Ілюстрація до прикладу 14.7

Нескінченно великі змінні величини

Якщо для довільного числа $M > 0$ існує таке значення n' , починаючи з якого всі наступні значення члени послідовності x_n задовольняють нерівність $|x_n| > M$, то кажуть, що **послідовність x_n прямує до нескінченності** і пишуть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ або $x_n \rightarrow \infty$. Якщо $x_n \rightarrow \infty$, то її називають **нескінченно великою величиною**. Коротко означення нескінченно великої величини можна записати так:

$$(\forall M > 0 \exists n' \in \mathbb{N} : \forall n > n' \Rightarrow |x_n| > M) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty.$$

Додатна і від'ємна нескінченно великі змінні величини відповідно визначаються так:

$$(\forall M > 0 \exists n' \in \mathbb{N} : \forall n > n' \Rightarrow x_n > M) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty;$$

$$(\forall M > 0 \exists n' \in \mathbb{N} : \forall n > n' \Rightarrow x_n < -M) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty.$$

- Приклад 14.8.** 1. Послідовність $\{x_n\} = n! = \{1, 2, 6, 24, 120, \dots\}$ – нескінченно велика величина, яка прямує до плюс нескінченності: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.
2. Послідовність $\{y_n\} = \{-n^3\} = \{-1, -8, -27, \dots\}$ є нескінченно великою величиною, що прямує до мінус нескінченності: $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty$.
3. Послідовність $\{z_n\} = \{n^2 \cos \pi n\} = \{-1, 4, -9, \dots\}$ є нескінченно великою величиною, у якій необмежено зростає модуль, тому $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$.
4. Послідовність $\{t_n\} = \{0, 2, 0, 4, 0, 6, \dots\}$ не є нескінченно великою величиною, бо для довільного числа M не існує числа $n' \in \mathbb{N}$ такого, щоб при $n > n'$ виконувалась нерівність $t_n > M$. ☺

Звертаємо увагу на те, що вираз „ x_n прямує до нескінченності,“ може викликати неправильне уявлення, що x_n прямує до якогось числа, в той час як насправді x_n нікуди не прямує, а лише змінюється так, що $|x_n|$ переростає в будь-яке велике додатне число. Говорячи про нескінченно велику величину, мають на увазі величину, яка нескінченно зростає, тобто суть нескінченно великої величини зовсім не в її величині або розмірах, а в характері її зміни.

Користуючись означеннями, можна показати, що сума нескінченно великої величини і величини обмеженої є величина нескінченно велика. Символічно це записують так: $C + \infty = +\infty$.

Сума двох нескінченно великих величин одного знака є нескінченно велика величина: $\infty + \infty = \infty$.

На відміну від цього сума двох нескінченно великих величин різних знаків не завжди буде нескінченно великою величиною, тому ця сума називається невизначеністю виду $\infty - \infty$.

Добуток двох нескінченно великих величин є величиною нескінченно великою: $\infty \cdot \infty = \infty$.

Добуток нескінченно великої величини на величину, що більша за абсолютним значенням деякого додатного числа, також є нескінченно велика величина.

Частка двох нескінченно великих величин не завжди є нескінченно великою величиною, тому дробовий вираз, чисельник і знаменник якого нескінченно великі змінні величини, називають невизначеністю виду $\frac{\infty}{\infty}$.

Таким чином, з виразами ∞ , $+\infty$ і $-\infty$ не можна поводитись як з числами, бо це не числа, а лише символи, які характеризують певну змінну величину.

ТЕМА 15. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

Границя функції в точці

Припустимо, що незалежна змінна x має границю x_0 . Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі X точки x_0 , крім, можливо, самої точки x_0 .

Означення 15.1. Число A називають границею функції $y = f(x)$ в точці x_0 (або при $x \rightarrow x_0$), якщо для довільної збіжної до x_0 послідовності $\{x_n\}$, де $x_n \in X$, $x_n \neq x_0$, послідовність $\{f(x_n)\}$ має границю, яка дорівнює числу A , і записують

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A. \quad (15.1)$$

✓

Отже, якщо для довільних збіжних до x_0 послідовностей $\{x_n\}$ існує одна і та сама границя $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$, то ця границя і буде границею функції $f(x)$ в точці x_0 .

Якщо ж для деякої хоча б однієї послідовності $\{x'_n\}$, $x'_n \neq x_0$, збіжної до x_0 , послідовність $\{f(x'_n)\}$ границі не має, то функція $\{f(x)\}$ не має границі в точці x_0 .

Аналогічно функція $f(x)$ не має границі в точці x_0 , якщо для двох різних, збіжних до x_0 , послідовностей $\{x'_n\}$ і $\{x''_n\}$ відповідні послідовності $\{f(x'_n)\}$ і $\{f(x''_n)\}$ мають різні границі.

Функція $f(x)$ може мати в точці x_0 тільки одну границю. Це випливає з того, що кожна змінна може мати лише одну границю.

Приклад 15.1. Функція $f(x) = x$ в будь-якій точці x_0 числової прямої має границю, яка дорівнює x_0 , тому що послідовності $\{x_n\}$ і $\{f(x_n)\}$ збігаються:
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$. ☺

Приклад 15.2. Функція $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ (рис. 15.1), визначена для всіх $x \neq 0$, в точці $x = 0$ границі не має. ☹

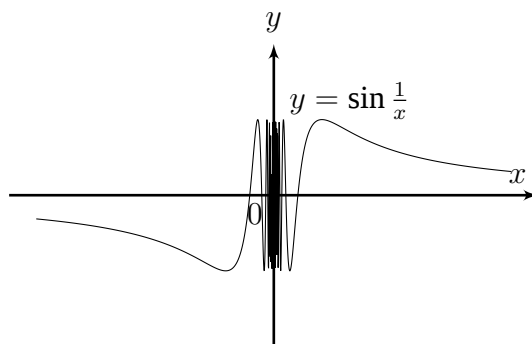


Рисунок 15.1 – Графік функції $y = \sin \frac{1}{x}$

Розв'язання. Дійсно, візьмемо дві збіжні до 0 послідовності значень аргументу:

$$\{x'_n\} = \left\{ \frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{3\pi}, \dots, \frac{1}{n\pi}, \dots \right\},$$

$$\{x''_n\} = \left\{ \frac{2}{\pi}, \frac{2}{5\pi}, \frac{2}{9\pi}, \dots, \frac{2}{(4n-3)\pi}, \dots \right\}.$$

Очевидно, $x'_n \rightarrow 0$, $x''_n \rightarrow 0$ і $x'_n \neq 0$, $x''_n \neq 0$.

Знайдемо відповідні послідовності значень функції:

$$\{f(x'_n)\} = \{\sin n\pi\} = \{0, 0, \dots, 0, \dots\},$$

$$\{f(x''_n)\} = \left\{ \sin \frac{(4n-3)\pi}{2} \right\} = \left\{ \sin \left(-\frac{3\pi}{2} \right) \right\} = \{1, 1, \dots, 1, \dots\},$$

звідки $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x''_n) = 1$. Отже, для двох різних збіжних до нуля послідовностей значень аргументу послідовності відповідних значень функції мають різні границі. Це означає, що $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ не існує. ■

Геометричний зміст границі функції: співвідношення $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ означає, що для всіх точок x досить близьких до точки x_0 відповідні значення функції як завгодно мало відрізняються від точки A .

З цим пов'язане друге означення границі.

Означення 15.2. Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі X точки x_0 , крім, можливо, самої точки x_0 . Число A називається границею функції в точці x_0 , якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх $x \in X$, які задовольняють нерівність $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. ✓

Це означення коротко можна записати так:

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

Геометрично це ілюструється так: число A є границею функції $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, якщо для довільного ε -околу точки A знайдеться δ -окіл точки x_0 такий, що коли значення аргументу x взяти з множини $(x_0 - \delta; x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$, то відповідні значення функції $f(x)$ лежатимуть в ε -околі точки A (рис. 15.2).

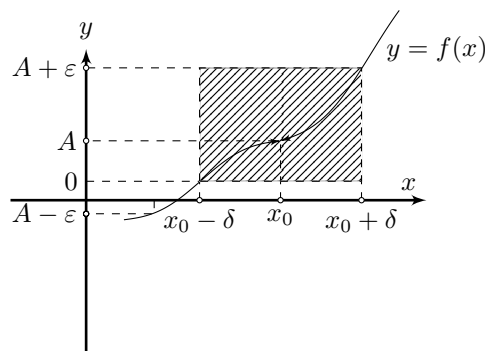


Рисунок 15.2 – Геометричний зміст означення границі функції у точці

Перше означення границі функції базується на понятті границі послідовності, тому його називають означенням на „мові послідовностей“ або означенням границі за Гейне. Друге означення називають означенням „на мові $\varepsilon - \delta$ “, або означенням границі за Коші. Можна показати, що ці означення еквівалентні.

Приклад 15.3. Довести, що $\lim_{x \rightarrow 1} (3x + 2) = 5$. ☺

Розв'язання. Нехай $y = 3x + 2$ і задано довільне $\varepsilon > 0$. Знайдемо $\delta > 0$ таке, що для всіх x , які задовольняють нерівності $0 < |x - 1| < \delta$, виконується нерівність $|y - 5| < \varepsilon$. Для виконання цієї нерівності необхідно, щоб $|3x + 2 - 5| < \varepsilon$, або $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{3}$, звідси $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$. Якщо тепер для довільного $\varepsilon > 0$ і знайденого δ взяти значення x , що задовольняють нерівності $|x - 1| < \delta$, то

$$|x - 1| < \delta \Rightarrow |x - 1| < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow |3x + 2 - 5| < \varepsilon \Rightarrow |y - 5| < \varepsilon.$$

У наведених вище означеннях границі $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ вважалось, що x прямує до x_0 довільним способом: залишаючись меншим від x_0 (зліва від x_0), більшим від x_0 (справа від x_0) чи коливаючись навколо x_0 , тобто $x \rightarrow x_0$, набуваючи значень то менших, то більших від x_0

(то зліва, то справа від x_0), як амплітуда затихаючих коливань маятника. Проте трапляється, що спосіб наближення аргументу x до x_0 суттєво впливає на значення границі функції. Тому доцільно ввести поняття односторонніх границь.

Означення 15.3. Нехай функція $y = f(x)$ (рис. 15.3) визначена в деякому околі точки x_0 . Число A називається *границею функції $y = f(x)$ зліва* (або *лівою границею*) в точці x_0 , якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що при $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. ✓

Означення 15.4. Число B називається *границею функції $y = f(x)$ справа* (або *правою границею*) в точці x_0 , якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що при $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ виконується нерівність $|f(x) - B| < \varepsilon$. ✓

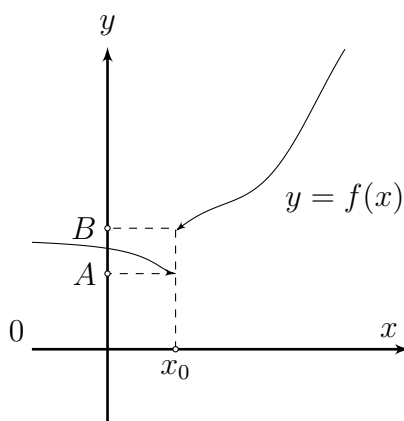


Рисунок 15.3 – Права і ліва границя функції

Ліву і праву границі функції (рис. 15.3) називають односторонніми границями і позначають так:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) = A.$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0) = B.$$

Якщо $x_0 = 0$, то записують

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = f(-0) = A.$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = f(+0) = B.$$

Якщо функція $y = f(x)$ визначена на проміжку $(a; b)$, то в точці a може мати зміст лише число $f(a + 0)$, а в точці b — лише число $f(b - 0)$.

Умова $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0)$ є необхідною і достатньою для існування границі функції $y = f(x)$ в точці x_0 :

$$(f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = A) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A. \quad (15.2)$$

Приклад 15.4. Нехай $f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & x < 0; \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$ тоді

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = +1.$$

Приклад 15.5. Якщо $\varphi(x) = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$ (рис. 15.4), то $\varphi(1+0) = 0$, $\varphi(1-0) = 1$. ☺

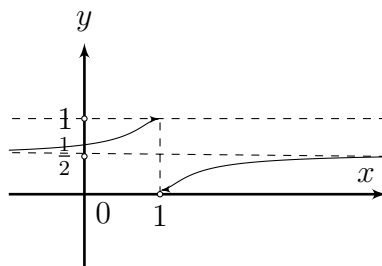


Рисунок 15.4 – Графік функції $\varphi(x) = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$

Границя функції на нескінченності. Нескінченно велика функція

Ми розглянули поняття границі функції в скінченній точці x_0 . Досліджуючи функції, визначені на нескінченних проміжках, часто доводиться вивчати поведінку цих функцій при як завгодно великих за модулем значеннях аргументу x , тобто при $x \rightarrow \infty$.

Означення 15.5. Нехай функція $y = f(x)$ визначена на проміжку $(-\infty; +\infty)$. Число A називають границею функції $y = f(x)$ при $x \rightarrow \infty$ і пишуть $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $M = M(\varepsilon) > 0$, що при $|x| > M$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. ✓

Коротко це означення можна записати так:

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 : |x| > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A.$$

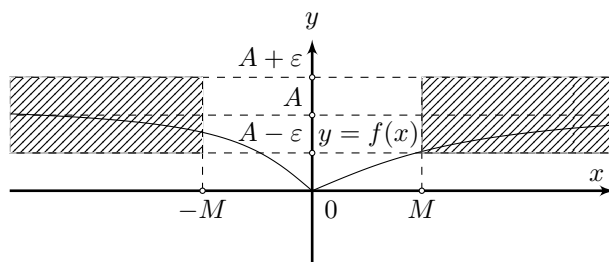


Рисунок 15.5 – Границя функції на нескінченності

Геометричний зміст цього означення (рис. 15.5) такий: для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $M > 0$, що при $x \in (-\infty; -M)$ або при $x \in (M; +\infty)$ відповідні значення функції

$f(x)$ попадають в ε -окіл точки A , тобто відповідні точки графіка цієї функції лежать у смузі, обмеженій прямими $y = A + \varepsilon$ і $y = A - \varepsilon$.

Знаючи зміст символів $x \rightarrow +\infty$ і $x \rightarrow -\infty$, легко сформулювати означення границі функції для випадків, коли $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = B$ (рис. 15.6) та $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = C$ (рис. 15.7).

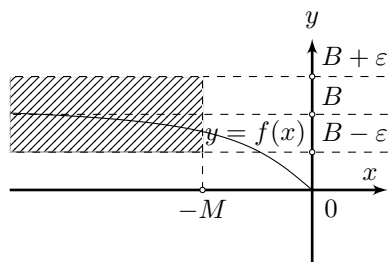


Рисунок 15.6 – Границя функції на $-\infty$

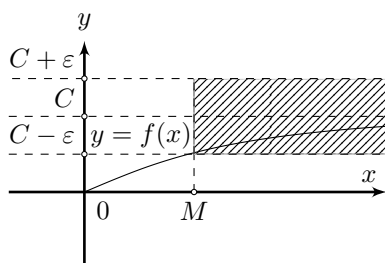


Рисунок 15.7 – Границя функції на $+\infty$

Досі розглядалися випадки, коли функція мала границею деяке число. Розглянемо тепер випадок, коли границею функції є нескінченність.

Означення 15.6. Функція $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ називається нескінченно великою (має границю ∞), якщо вона визначена в деякому околі точки x_0 , крім, можливо, самої точки x_0 і для довільного числа $M > 0$ існує таке число $\delta = \delta(M) > 0$, що для всіх x , які задовольняють нерівності $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x)| > M$. Позначення: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ або $f(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow x_0$. ✓

Геометрично це означає: яким би великим не було задане число $M > 0$, точки графіка функції $y = f(x)$, крім, можливо, точки $(x_0; f(x_0))$, лежать зовні смуги, обмеженої прямими $y = M$ і $y = -M$, якщо значення x взяті з δ -околу точки x_0 (рис. 15.8).

Якщо $f(x)$ прямує до нескінченності при $x \rightarrow x_0$ і при цьому набуває лише додатних (рис. 15.9) або лише від'ємних значень (рис. 15.10), то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ або $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

Означення 15.7. Функцію $f(x)$, задану на всій числовій прямій, при $x \rightarrow \infty$ називають нескінченно великою і пишуть $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, якщо для довільного числа $M > 0$ можна знайти таке число $N = N(M) > 0$, що для всіх x , які задовольняють нерівність $|x| > N$, виконується нерівність $|f(x)| > M$. ✓

Зокрема, функція $f(x)$ є нескінченно великою при $x \rightarrow +\infty$, якщо $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Очевидно, всяка нескінченно велика функція в околі точки x_0 є необмеженою в цьому околі. Обернене твердження неправильне: не всяка необмежена функція є нескінченно великою.

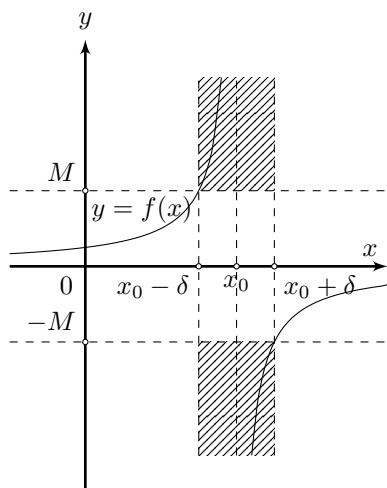


Рисунок 15.8 – Нескінченно велика функція

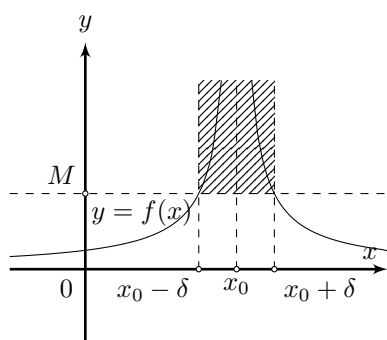


Рисунок 15.9 – Додатна нескінченно велика функція

Проте якщо функція $f(x)$ має скінченну границю A при $x \rightarrow x_0$, то ця функція обмежена при $x \rightarrow x_0$. Справді, з означення випливає, що при $x \rightarrow x_0$ $|f(x) - A| < \varepsilon$, або $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$, звідки $|f(x)| < |A| + \varepsilon$, а це й означає, що функція $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ обмежена. Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq 0$, то при $x \rightarrow x_0$ буде обмеженою також функція $\frac{1}{f(x)}$. Обернене твердження неправильне: не всяка обмежена функція має скінченну границю.

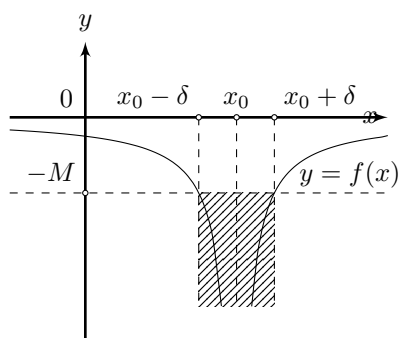


Рисунок 15.10 – Від’ємна нескінченно велика функція

Нескінченно малі величини. Їхні властивості

Означення 15.8. Нескінченно малою величиною називається послідовність, границя якої дорівнює нулю. ✓

Зокрема, функція $\alpha(x)$ називається нескінченно малою величиною (або нескінченно малою функцією) при $x \rightarrow x_0$ або $x \rightarrow \infty$, якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ або $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = 0$.

Можна дати еквівалентне означення на „мові $\varepsilon - \delta$ “: функція $\alpha(x)$ називається нескінченно малою при $x \rightarrow x_0$ ($x \rightarrow \infty$), якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$ ($M > 0$) таке, що для всіх x , які задовольняють нерівність $|x - x_0| < \delta$ ($|x| > M$), виконується нерівність $|\alpha(x)| < \varepsilon$. Аналогічні означення нескінченно малої величини $\alpha(x)$ при $x \rightarrow x_0 + 0$, $x \rightarrow x_0 - 0$ і при $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow +\infty$: в усіх цих випадках $\alpha(x) \rightarrow 0$.

Приклад 15.6. Функція $y = (x - 2)^4$ є нескінченно малою величиною (рис. 15.11) при $x \rightarrow 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2)^4 = 0.$$

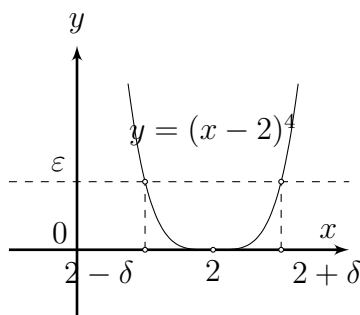


Рисунок 15.11 – Графік функції $y = (x - 2)^4$

Приклад 15.7. Функція $y = \frac{1}{x-1}$ є нескінченно малою величиною при $x \rightarrow \infty$: $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$ (рис. 15.12). ☺

Розглянемо основні властивості нескінченно малих величин.

1. Для того, щоб число A було границею функції $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, необхідно і достатньо, щоб різниця $f(x) - A$ була нескінченно малою величиною, тобто

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x),$$

$$\text{де } \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0.$$

ОБЗЕРЖЕННЯ. Нехай $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, тоді

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Це означає, що величина $\alpha(x) = f(x) - A$ є нескінченно малою. Навпаки, нехай $f(x) = A + \alpha(x)$, де $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$, тоді

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow$$

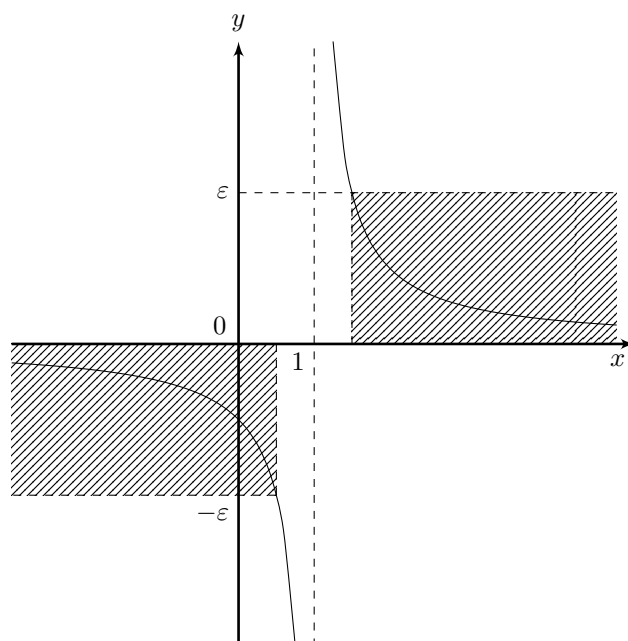


Рисунок 15.12 – Графік функції $y = \frac{1}{x-1}$

$$\Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A. \quad \square$$

2. Якщо функція $\alpha(x)$ — нескінченно мала величина при $x \rightarrow x_0$ ($\alpha \neq 0$), то функція $\frac{1}{\alpha(x)}$ є нескінченно великою величиною при $x \rightarrow x_0$, і навпаки, якщо функція $\beta(x)$ — нескінченно велика величина при $x \rightarrow x_0$, то $\frac{1}{\beta(x)}$ є нескінченно малою величиною при $x \rightarrow x_0$.

ДОВЕДЕННЯ. Нехай $\alpha(x)$ при $x \rightarrow x_0$ є нескінченно малою величиною, тоді

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{1}{\alpha(x)} \right| > M = \frac{1}{\varepsilon},$$

тобто функція $\frac{1}{\alpha(x)}$ є нескінченно великою при $x \rightarrow x_0$. Аналогічно доводиться обернене твердження. $\square$

3. Сума скінченного числа нескінченно малих величин є величина нескінченно мала.

ДОВЕДЕННЯ. Нехай $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$ — нескінченно малі величини при $x \rightarrow x_0$. Це означає, що для довільного числа $\varepsilon > 0$ існують числа $\delta_1 > 0$ і $\delta_2 > 0$ такі, що для всіх значень x з околу $0 < |x - x_0| < \delta_1$ виконується нерівність $|\alpha_1(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, а для значень x з околу $0 < |x - x_0| < \delta_2$ справедлива нерівність $|\alpha_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, тоді у меншому з цих околів виконуються обидві нерівності $|\alpha_1(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|\alpha_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Отже, в цьому околі $|\alpha_1(x) + \alpha_2(x)| \leq |\alpha_1(x)| + |\alpha_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, тобто сума $\alpha_1(x) + \alpha_2(x)$ двох нескінченно малих функцій є функція нескінченно мала. Аналогічне доведення для довільного скінченного числа нескінченно малих, $\square$

4. Добуток обмеженої функції на нескінченно малу є величина нескінченно мала.

ДОВЕДЕННЯ. Нехай функція $f(x)$ обмежена при $x \rightarrow x_0$, а $\alpha(x)$ — нескінченно мала. Тоді для деякого числа $M > 0$ існує таке число $\delta_1 > 0$, що для значень x з околу $0 < |x - x_0| < \delta_1$ виконується нерівність $|f(x)| \leq M$. Крім того, для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta_2 > 0$, що для всіх значень x з околу $0 < |x - x_0| < \delta_2$ виконується нерівність $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$. Для меншого з цих околів маємо

$$|f(x)\alpha(x)| = |f(x)| \cdot |\alpha(x)| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

а це означає, що добуток $f(x) \cdot \alpha(x)$ при $x \rightarrow x_0$ є нескінченно малою функцією. $\square$

5. Частка від ділення нескінченно малої величини на функцію, яка має відмінну від нуля границю, є величина нескінченно мала.

ДОВЕДЕННЯ. Доведення цієї властивості аналогічне попередньому. $\square$

Зауваження 15.1. Частка від ділення двох нескінченно малих величин у загальному випадку не є нескінченно малою величиною.

Величини $\alpha_1(x) = x$, $\alpha_2(x) = 2x$, $\alpha_3(x) = x^3$ — нескінченно малі при $x \rightarrow 0$ тому, що $\lim_{x \rightarrow 0} \alpha_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \alpha_2(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \alpha_3(x) = 0$. Маємо

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_3(x)} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha_3(x)}{\alpha_2(x)} = \frac{1}{2}.$$

тобто границя відношення двох нескінченно малих величин може дорівнювати деякому числу, нескінченності або нулю. У зв'язку з цим відношення двох нескінченно малих величин називають невизначеністю виду $\frac{0}{0}$. Не саме стоїть добуток нескінченно малої величини на нескінченно велику величину. Такий добуток називають невизначеністю виду $0 \cdot \infty$. $\square$

Основні теореми про границі

У попередніх прикладах ми бачили, що знаходження границі функції на основі означення досить громіздке. Справді, при обчисленні границі $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ спочатку треба взяти яку-небудь збіжну до x_0 послідовність $\{x_n\}$ значень аргументу і визначити послідовність відповідних значень функції $\{f(x_n)\}$. Знайшовши число $A = \lim_{x_n \rightarrow x_0} f(x_n)$, ще треба впевнитись, що $f(x) \rightarrow A$ і тоді, коли $x \rightarrow x_0$ довільним способом.

Наведемо теореми, які значно полегшують знаходження границі функції. Формулювання і доведення цих теорем для випадків, коли $x_n \rightarrow \infty$ та $x_n \rightarrow x_0$, аналогічні.

Теорема 15.1 (про границю суми, добутку і частки).

Якщо кожна з функцій $f(x)$ та $\varphi(x)$ має скінченну границю в точці x_0 , то в цій точці також існують границі функцій $f(x) \pm \varphi(x)$, $f(x)\varphi(x)$, $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ (остання за умови, що $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) \neq 0$) і виконуються формули:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x); \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)}.$$

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = B$, тоді за властивістю 1 нескінченно малих:

$$f(x) = A + \alpha_1(x), \quad \varphi(x) = B + \alpha_2(x), \quad \text{де } \alpha_1(x) \rightarrow 0, \quad \alpha_2(x) \rightarrow 0,$$

при $x \rightarrow x_0$. Звідси маємо

$$f(x) \pm \varphi(x) = A \pm B \pm (\alpha_1(x) + \alpha_2(x)); \quad (15.3)$$

$$f(x) \cdot \varphi(x) = A \cdot B + (A\alpha_2(x) + B\alpha_1(x) + \alpha_1(x)\alpha_2(x)); \quad (15.4)$$

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A}{B} + \frac{B\alpha_1(x) - A\alpha_2(x)}{B^2 + B\alpha_2(x)}, \quad (15.5)$$

За властивостями 3–5 нескінченно малих вирази в квадратних дужках є величини нескінченно малі при $x \rightarrow x_0$, тому, застосувавши до рівностей (15.3), (15.4), (15.5) ще раз властивість 1 нескінченно малих, дістанемо відповідні формули. $\square$

Зауважимо, що доведена теорема справджується для алгебраїчної суми та добутку будь-якого скінченного числа функцій, які мають границю в точці.

Наслідок 1.

Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ існує, то виконуються рівності:

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow x_0} cf(x) = c \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad c \in R;$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^n = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^n, \quad \text{зокрема,}$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n, \quad n \in N.$$

$\square$

Приклад 15.8. Обчислити $\lim_{x \rightarrow 2} (5x^2 - 13x + 5)$.

$\odot$

Розв'язання. Використовуючи теорему про границю суми і наслідки 1 – 3, маємо

$$\lim_{x \rightarrow 2} (5x^2 - 13x + 5) = 5 \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 13 \lim_{x \rightarrow 2} x + 5 \lim_{x \rightarrow 2} 1 = -1.$$

Приклад 15.9. Обчислити $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+1}{2x-1}$.



Розв'язання. За теоремою про границю частки дістанемо $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+1}{2x-1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2+1)}{\lim_{x \rightarrow 1} (2x-1)} = 2$. ■

Теорема 15.2 (про границю проміжної функції).

Нехай в деякому околі точки x_0 , крім, можливо, самої точки x_0 , визначені функції $\varphi(x)$, $f(x)$ і $\psi(x)$ і виконуються нерівності $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$. Тоді, якщо функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ мають в точці x_0 одну й ту саму границю

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = A, \quad (15.6)$$

то таку саму границю має функція $f(x)$: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$. ★

ДОЗВЕДЕННЯ. з рівностей (15.6) випливає, що для довільного числа $\varepsilon > 0$ існують два околи точки x_0 , в одному з яких виконуються нерівності $-\varepsilon < \varphi(x) - A < \varepsilon$, а в другому — нерівності $-\varepsilon \leq \psi(x) - A \leq \varepsilon$. З нерівностей $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ знаходимо, що $\varphi(x) - A < f(x) - A < \psi(x) - A$, тому в меншому з околів виконуються нерівності $-\varepsilon < \varphi(x) - A \leq f(x) - A \leq \psi(x) - A < \varepsilon$. Звідси $-\varepsilon < f(x) - A < \varepsilon$, тобто $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$. □

Теорема 15.3 (про граничний перехід у нерівностях).

Якщо в деякому околі точки x_0 , крім, можливо, самої точки x_0 , виконується нерівність $f(x) \geq 0$ і існує границя $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$, то $b \geq 0$. ★

ДОЗВЕДЕННЯ. Припустимо, що $b < 0$, тоді при $x \rightarrow x_0$ маємо $|f(x) - b| \geq |b| > 0$, тому $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - b] \neq 0$, тобто $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq b$. Це суперечить умові теореми. Отже, $b \geq 0$. □

Наслідок 2.

Якщо в деякому околі точки x_0 , крім, можливо, самої точки x_0 , виконується нерівність $f(x) \geq \varphi(x)$ і існують $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$. □

Теорема 15.4 (про границю монотонної функції).

Якщо функція $f(x)$ монотонна і обмежена при $x < x_0$ або при $x > x_0$, то існує відповідно її ліва границя $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$ або її права границя $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$. ★

ТЕМА 16. ОБЧИСЛЕННЯ ГРАНИЦЬ ФУНКЦІЙ

Перша важлива границя

Доведемо, що

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (16.1)$$

Візьмемо круг радіуса 1 (рис. 16.1) і позначимо радіанну міру кута AOD через x , $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

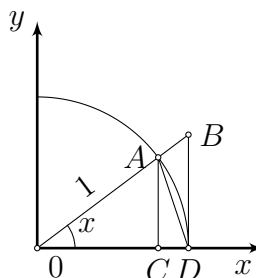


Рисунок 16.1 – Ілюстрація до першої важливої границі

Порівнюючи площі $\triangle AOD$, $\triangle BOD$ і кругового сектора AOD , дістанемо

$$S_{\triangle AOD} < S_{\text{сект} AOD} < S_{\triangle BOD},$$

звідки

$$\frac{1}{2} AC \cdot OD < \frac{1}{2} OD^2 \cdot x < \frac{1}{2} OD \cdot BD$$

або

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x.$$

Розділивши останні нерівності на $\frac{1}{2} \sin x > 0$, дістанемо

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \text{ або } 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Оскільки $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$ і $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$, то за теоремою 15.2

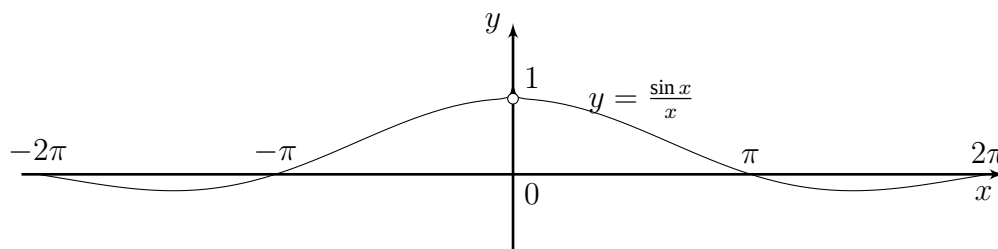
$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (16.2)$$

Нехай тепер $x < 0$. Розглянемо функцію $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ (рис. 16.2).

Оскільки $f(x) = f(-x)$, то

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin(-x)}{-x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (16.3)$$

З рівностей (16.2) і (16.3) дістанемо формулу (16.1), яка досить часто використовується при обчисленні границь. Тому її називають першою важливою границею.

Рисунок 16.2 – Графік функції $y = \frac{\sin x}{x}$

Приклад 16.1. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x}$, $k \neq 0$.



Розв'язання. Зведемо цю границю до першої важливої границі, поділивши та помноживши дріб на k :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k \sin kx}{kx} = k \lim_{kx \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{kx} = k.$$

Приклад 16.2. Обчислити границю функції: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (x - \frac{\pi}{2}) \operatorname{tg} x$.



Розв'язання.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{tg} x &= \left| \begin{matrix} y = x - \frac{\pi}{2} \\ x = y + \frac{\pi}{2} \end{matrix} \right| = \lim_{y \rightarrow 0} y \operatorname{tg} \left(y + \frac{\pi}{2}\right) = - \lim_{y \rightarrow 0} y \cdot \operatorname{ctg} y = \\ &= - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} \cos y = -1. \end{aligned}$$



Число e . Натуральні логарифми

Розглянемо дві послідовності:

$$\{x_n\} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, n \geq 1 \right\} \text{ і } \{y_n\} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, n \geq 1 \right\}.$$

Покажемо, що вони мають такі властивості:

1) $x_n < y_n$, $n > 1$;

2) змінна x_n строго зростає;

3) змінна y_n строго спадає.

Справді, оскільки $y_n = x_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = x_n + \frac{x_n}{n} > x_n$, то властивість 1) справедлива.

Властивості 2) і 3) доводяться за допомогою нерівності Коші:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n},$$

де $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset [0, +\infty)$, $n \in \mathbb{N}$.

Застосуємо цю нерівність до числової множини, яка містить число 1, а також n чисел $1 + \frac{1}{n}$:

$$1, 1 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}, \dots, 1 + \frac{1}{n},$$

де $n \in \mathbb{N}$. Дістанемо

$$\begin{aligned} \sqrt[n+1]{1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} &< \frac{1 + n\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \\ &< \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \end{aligned}$$

звідки і випливає властивість 2).

Аналогічно для доведення твердження 3) досить застосувати нерівність Коші до числової множини, яка містить 1 і n чисел $1 - \frac{1}{n}$, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$.

З властивостей 1) - 3) маємо

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} < y_{n+1} < y_n < \dots < y_2 < y_1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отже, змінна x_n зростаюча і обмежена зверху. Тому за теоремою 15.4 про границю монотонної функції вона має границю, яку позначають буквою e (це позначення, як і позначення числа π , належить Л. Ейлеру);

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \quad (16.4)$$

Змінна y_n спадає і обмежена знизу, тому границя $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ також існує. Оскільки $y_n = x_n + \frac{x_n}{n}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = e$.

Таким чином,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e,$$

причому

$$\forall n \in \mathbb{N} : \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Друга важлива границя

Доведемо, що

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \quad (16.5)$$

Спочатку покажемо, що

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \quad (16.6)$$

Нехай $x \geq 1$ і $[x] = n$, тоді $n \leq x < n+1$; тому справедливі нерівності

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}; \quad \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}. \quad (16.7)$$

Якщо $x \rightarrow +\infty$, то $n \rightarrow \infty$, тому за формулою (16.4) маємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = e \cdot 1 = e.$$

Застосувавши до нерівності (16.7) теорему 2 (п. 3.7), дістанемо формулу (16.6). Тепер доведемо, що

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \quad (16.8)$$

Нехай $x < -1$. Введемо змінну $y = -x$, тоді

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} = \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y}{y-1}\right)^y = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^y = \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^{y-1} \cdot \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right) = e \cdot 1 = e. \end{aligned}$$

Об'єднавши випадки (16.6) і (16.8), дістанемо формулу (16.5). Поклавши $x = \frac{1}{y}$, маємо

$$\lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e. \quad (16.9)$$

Рівності (16.5) та (16.9) називають другою важливою границею і широко використовують при обчисленні границь.

Зауваження 16.1. При обчисленні границь, пов'язаних з числом e , часто застосовують таке твердження: якщо існують границі $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$,

$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$, причому $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, то існує також границя $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{\varphi(x)}$, яка обчислюється за формулою

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{\varphi(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\right)^{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)}. \quad (16.10)$$

□

Порівняння нескінченно малих функцій. Еквівалентні нескінченно малі функції

Дві нескінченно малі функції порівнюються між собою за допомогою дослідження їхнього відношення. Нехай $\alpha_1(x)$ та $\alpha_2(x)$ — нескінченно малі функції при $x \rightarrow x_0$, тобто

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_1(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_2(x) = 0.$$

Введемо такі означення:

- 1) функції $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$ називаються нескінченно малими одного порядку при $x \rightarrow x_0$, якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = A \neq 0, A \in \mathbb{R}.$$

- 2) функція $\alpha_1(x)$ називається нескінченно малою вищого порядку, ніж $\alpha(x)$ при $x \rightarrow x_0$, якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 0;$$

- 3) функція $\alpha_1(x)$ називається нескінченно малою нижчого порядку, ніж $\alpha_2(x)$ при $x \rightarrow x_0$, якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} \infty;$$

- 4) функція $\alpha_1(x)$ називається нескінченно малою k -го порядку відносно $\alpha_2(x)$ при $x \rightarrow x_0$, якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = A \neq 0, A \in \mathbb{R};$$

- 5) нескінченно малі функції $\alpha_1(x)$ та $\alpha_2(x)$ називаються непорівнянними при $x \rightarrow x_0$, якщо в точці x_0 не існує границі їхнього відношення.

Введені означення охоплюють усі випадки, які можуть трапитись при порівнянні двох нескінченно малих функцій в околі точки x_0 . Такі самі правила порівняння нескінченно малих при $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow +\infty$ та при $x \rightarrow x_0 \pm 0$. Аналогічно порівнюються нескінченно великі величини.

Приклад 16.3. Функції $\alpha_1(x) = x$, $\alpha_2(x) = \sin 5x$ нескінченно малі одного порядку при $x \rightarrow 0$, тому що

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 5x} = \frac{1}{5}.$$

Приклад 16.4. Функція $\alpha_1(x) = x^2$ при $x \rightarrow 0$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж функція $\alpha_2(x) = \operatorname{tg} x$, тому що

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 0.$$

Очевидно, функція $\alpha_2(x) = \operatorname{tg} x$ при $x \rightarrow 0$ нескінченно малою нижчого порядку, ніж $\alpha_1(x) = x^2$. ☺

Серед нескінченно малих функцій одного порядку особливу роль відіграють так звані еквівалентні нескінченно малі.

Означення 16.1. Функції $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$, нескінченно малі при $x \rightarrow x_0$, називаються еквівалентними нескінченно малими, якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 1.$$

Еквівалентність позначається так: $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x)$. ✓

Розглянемо деякі властивості еквівалентних нескінченно малих функцій.

Теорема 16.1.

Нескінченно малі $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$ еквівалентні при $x \rightarrow x_0$ тоді і тільки тоді, коли різниця $\alpha_1(x) - \alpha_2(x)$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж кожна з функцій $\alpha_1(x)$ та $\alpha_2(x)$. ★

Доведення. Нехай $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x)$ при $x \rightarrow x_0$, тобто

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 1,$$

тоді

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)}{\alpha_1(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(1 - \frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)} \right) = 1 - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)} = 0.$$

Аналогічно $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)}{\alpha_2(x)} = 0$. Отже, різниця $\alpha_1(x) - \alpha_2(x)$ при $x \rightarrow x_0$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж $\alpha_1(x)$ та $\alpha_2(x)$.

Нехай тепер, навпаки, відомо, що різниця $\alpha_1(x) - \alpha_2(x)$ при $x \rightarrow x_0$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж $\alpha_1(x)$ та $\alpha_2(x)$, тобто $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)}{\alpha_1(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)}{\alpha_2(x)} = 0$.

Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)}{\alpha_1(x)} = 0$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(1 - \frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)} \right) = 0$, звідки $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 1$, тобто $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x)$ при $x \rightarrow x_0$. Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)}{\alpha_2(x)} = 0$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} - 1 \right) = 0$, звідки $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 1$, тобто $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x)$ при $x \rightarrow x_0$.

Теорема 16.2.

Нехай $\alpha_1(x) \sim \alpha_1^*(x)$, $\alpha_2(x) \sim \alpha_2^*(x)$ при $x \rightarrow x_0$. Якщо існує $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}$, то існує $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1^*(x)}{\alpha_2^*(x)}$ і ці границі рівні між собою. ★

Доведення. Маємо

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_1^*(x)} \cdot \frac{\alpha_1^*(x)}{\alpha_2^*(x)} \cdot \frac{\alpha_2^*(x)}{\alpha_2(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_1^*(x)} \times \\ &\times \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1^*(x)}{\alpha_2^*(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_2^*(x)}{\alpha_2(x)} = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1^*(x)}{\alpha_2^*(x)} \cdot 1 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1^*(x)}{\alpha_2^*(x)}. \quad \square \end{aligned}$$

Ця теорема дає змогу при знаходженні границі відношення двох заданих нескінченно малих функцій кожен з них (або тільки одну) замінити іншою нескінченно малою, яка еквівалентна заданій. Часто зустрічаються, наприклад, такі еквівалентні нескінченно малі величини:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &\sim \alpha, \alpha \rightarrow 0, & e^\alpha - 1 &\sim \alpha, \alpha \rightarrow 0, \\ \operatorname{tg} \alpha &\sim \alpha, \alpha \rightarrow 0, & a^\alpha - 1 &\sim \alpha \ln a, \alpha \rightarrow 0, \\ \arcsin \alpha &\sim \alpha, \alpha \rightarrow 0, & \log_a(1 + \alpha) &\sim \alpha \log_a e, \alpha \rightarrow 0, \\ \operatorname{arctg} \alpha &\sim \alpha, \alpha \rightarrow 0, & \ln(1 + \alpha) &\sim \alpha, \alpha \rightarrow 0, \\ 1 - \cos \alpha &\sim \frac{\alpha^2}{2}, \alpha \rightarrow 0, & (1 + \alpha)^k - 1 &\sim k\alpha, \alpha \rightarrow 0, k > 0. \end{aligned}$$

Приклад 16.5. Обчислити границю функції, використовуючи еквівалентні нескін-

ченно малі величини:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\operatorname{tg} 4x}.$$

Враховуючи, що $\sin 7x \sim 7x$, $\operatorname{tg} 4x \sim 4x$ при $x \rightarrow 0$, отримуємо:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\operatorname{tg} 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{4x} = \frac{7}{4}.$$

Зазначимо, що ці еквівалентності досить просто дістати за допомогою правила Лопітала.

Теорема 16.3.

Сума скінченного числа нескінченно малих функцій різних порядків еквівалентна доданку нижчого порядку. ★

ДОВЕДЕННЯ. Доведемо теорему для двох функцій. Нехай $\alpha_1(x) \rightarrow 0$ і $\alpha_2(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_0$, причому $\alpha_1(x)$ — нескінченно мала функція вищого порядку, ніж $\alpha_2(x)$ при $x \rightarrow x_0$, тобто $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 0$, тоді

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x) + \alpha_2(x)}{\alpha_2(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} + 1 = 0 + 1 = 1,$$

отже,

$$\alpha_1(x) + \alpha_2(x) \sim \alpha_2(x), \quad x \rightarrow x_0.$$

У найпростіших випадках знаходження границі $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ зводиться до підстановки у функцію $f(x)$ граничного значення аргументу. Але часто така підстановка призводить до невизначених виразів типу: $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, 0^0 , ∞^0 , 1^∞ .

Розглянемо такі випадки:

- невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$ задана відношенням двох многочленів:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x - 1}{3x^4 - x^2 + 10x - 5} &= \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4(1 + \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^4})}{x^4(3 - \frac{1}{x^2} + \frac{10}{x^3} - \frac{5}{x^4})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^4}}{3 - \frac{1}{x^2} + \frac{10}{x^3} - \frac{5}{x^4}} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

- невизначеність виду $\frac{0}{0}$ задана відношенням двох многочленів:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 + 3x - 4} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + 3x + 2)}{(x-1)(x+4)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x+4} = \frac{6}{5}.$$

У цьому прикладі ми скористалися тим, що $x = 1$ є розв'язком рівнянь $x^2 + 3x - 4 = 0$ та $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$. За теоремою В'єта рівняння $x^2 + 3x - 4 = 0$ має корені $x = 1$ та $x = -4$. Щодо многочлена $x^3 + 2x^2 - x - 2$, то щоб розкласти його на множники скористаємося алгоритмом ділення многочленів.

$$\frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^3 - 1x^2} \Big| \frac{x - 1}{x^2 + 3x + 2}$$

$$\frac{3x^2 - x - 2}{3x^2 - 3x}$$

$$\frac{2x - 2}{2x - 2}$$

$$\frac{2x - 2}{0}$$

Звідси, отримуємо, що $x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x^2 + 3x + 2)$.

- невизначеність виду $\frac{0}{0}$ задана ірраціональними виразами:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x^2 + 5} - 3)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)}{(x - 2)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5 - 9}{(x - 2)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 5} + 3} = \frac{4}{3 + 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Наведемо ще один приклад, але цього разу вже з кубічною ірраціональністю.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8 + x^2} - 2}{x^2} = \left| \begin{array}{l} y^3 = 8 + x^2 \\ x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 2 \end{array} \right| = \lim_{y \rightarrow 2} \frac{y - 2}{y^3 - 8} = \lim_{y \rightarrow 2} \frac{1}{y^2 + 2y + 4} = \frac{1}{12}.$$

- невизначеність виду $\infty - \infty$ задана ірраціональними виразами:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2x} - x)(\sqrt{x^2 + 2x} + x)}{(\sqrt{x^2 + 2x} + x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1} = 1.$$

- невизначеність виду $\frac{0}{0}$ задана виразами, що містять тригонометричні функції:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 1 \right)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos x} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{4 \left(\frac{x}{2} \right)^2} = \frac{1}{2}.$$

ТЕМА 17. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

З поняттям границі функції тісно пов'язане інше важливе поняття математичного аналізу — поняття неперервності функції.

Неперервність функції в точці. Точки розриву

Нехай функція $f(x)$ визначена в точці x_0 і в деякому околі цієї точки.

Означення 17.1. Функція $f(x)$ називається неперервною в точці x_0 , якщо границя функції і її значення в цій точці рівні, тобто

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (17.1)$$

✓

Якщо порівняти це означення з означенням границі функції $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, то при означенні границі функції число x_0 могло й не належати області визначення функції, а якщо число x_0 належало області визначення, то значення функції $f(x_0)$ у цій точці могло й не збігатися з границею A .

Таким чином, функція $f(x)$ буде неперервною в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:

- 1) функція визначена в точці x_0 і в деякому околі цієї точки;
- 2) існує границя $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$;
- 3) границя функції $f(x)$ в точці x_0 і значення функції в цій точці x_0 збігаються, тобто виконується рівність (17.1).

Оскільки $x_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} x$, то формулу (17.1) можна записати у вигляді

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right) = f(x_0). \quad (17.2)$$

Формула (17.2) виражає правило граничного переходу: при знаходженні границі неперервної функції $f(x)$ можна перейти до границі під знаком функції, тобто у функцію $f(x)$ замість аргументу x підставити значення $x_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} x$.

Геометричний зміст поняття неперервності відповідає геометричному змісту границі (17.1): точки графіка функції $y = f(x)$ як завгодно близькі до точки $(x_0; f(x_0))$, якщо їхні абсциси достатньо мало відрізняються від числа x_0 .

Можна дати ще одне означення неперервності функції, опираючись на поняття приростів аргументу і функції.

Нехай числа x_0 та x належать області визначення функції $y = f(x)$. Різниця $x - x_0$ називається приростом аргументу в точці x_0 і позначається через Δx : $\Delta x = x - x_0$.

Різниця відповідних значень функції $f(x) - f(x_0)$ називається приростом функції в точці x_0 і позначається через Δy :

$$\Delta y = \Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Очевидно, приріст Δx може бути додатним або від'ємним числом, приріст Δy — довільним числом. Запишемо рівність (17.1) в нових позначеннях, для чого перенесемо в ній значення $f(x_0)$ в ліву частину і внесемо його під знак границі. Оскільки умови $x \rightarrow x_0$ і $x - x_0 \rightarrow 0$ — однакові, то рівність (17.1) набуває вигляду

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \text{ або } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0. \quad (17.3)$$

Рівність (17.3) і є ще одним означенням неперервності функції, яке можна сформулювати так.

Означення 17.2. Функція $f(x)$, визначена в околі точки x_0 , називається неперервною в точці x_0 , якщо її приріст в цій точці є нескінченно малою функцією при $\Delta x \rightarrow 0$.

✓

Часто зустрічається поняття односторонньої неперервності. Функція $f(x)$ називається **неперервною в точці x_0 зліва**, якщо для деякого $\varepsilon > 0$ вона визначена на півінтервалі $(x_0 - \varepsilon; x_0]$ і $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$; якщо функція $f(x)$ визначена на півінтервалі $[x_0; x_0 + \varepsilon)$ і $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$, то функція називається **неперервною в точці x_0 справа**.

Використовуючи ці поняття, можна сказати, що функція $f(x)$ буде неперервною в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли вона визначена в деякому околі точки x_0 і

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0). \quad (17.4)$$

Якщо хоча б одна з цих умов не виконується, то функція називається **розривною в точці x_0** , а сама точка x_0 називається **точкою розриву функції**.

Класифікація точок розриву

Означення 17.3. Якщо для функції існують скінченні границі $\exists \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) \neq \infty$ та $\exists \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0) \neq \infty$, причому не всі числа $f(x_0)$, $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ рівні між собою, то розрив у точці x_0 називають розривом першого роду, а точку x_0 — точкою розриву першого роду. Зокрема, якщо $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$, то розрив у точці x_0 називають усувним, а точку x_0 — точкою усувного розриву. ✓

Для такого розриву досить перевизначити функцію $f(x)$ у точці x_0 , поклавши $f(x_0) = f(x_0 \pm 0)$, щоб дістати функцію, неперервну в цій точці.

Означення 17.4. Величину $\delta = \left| \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) \right|$ називають стрибком функції у точці x_0 . ✓

Означення 17.5. Якщо хоча б одна з односторонніх границь у (17.4) не існує або дорівнює нескінченності, то розрив у точці x_0 називається розривом другого роду, а сама точка — точкою розриву другого роду. ✓

Приклад 17.1. Функція $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ не визначена у точці $x = 0$, але має у цій точці границю, тому точка $x = 0$ — точка усувного розриву, тобто функція

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

— неперервна у точці $x = 0$ (рис. 16.2). ☺

Приклад 17.2. Функція $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & x < 2, \\ -1, & x \geq 2 \end{cases}$ має у точці $x = 2$ розрив першого роду (рис. 17.1), бо

$$\lim_{x \rightarrow 2 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2 - 0} (4 - x^2) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+0} -1 = -1.$$

Стрибок у точці $x = 2$ рівний $\delta = |-1 - 0| = 1$.

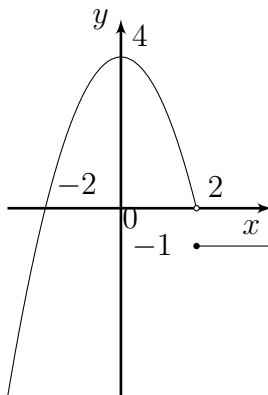


Рисунок 17.1 – Розрив першого роду

Приклад 17.3. Функція $y(x) = \frac{1}{x-1}$ має у точці $x = 1$ розрив другого роду (рис. 15.12), бо $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{x-1} = +\infty$, і $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{x-1} = -\infty$.



Основні теореми про неперервні функції

Наведемо формулювання декількох теорем, які описують властивості неперервних функцій. Зокрема, наступне твердження стосується неперервності суми, добутку, частки і різниці двох функцій.

Теорема 17.1

Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ — неперервні у точці x_0 , то у цій точці неперервними є функції $f(x) \pm \varphi(x)$, $f(x) \cdot \varphi(x)$, $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ (остання за умови, що $\varphi(x_0) \neq 0$).



ДОЗВЕДЕННЯ. Оскільки неперервні в точці x_0 функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ мають границі, що дорівнюють $f(x_0)$ і $\varphi(x_0)$, то за теоремою 15.про границю суми, добутку, частки границі функцій $f(x) \pm \varphi(x)$, $f(x) \cdot \varphi(x)$, $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ існують і відповідно дорівнюють $f(x_0) \pm \varphi(x_0)$, $f(x_0) \cdot \varphi(x_0)$, $\frac{f(x_0)}{\varphi(x_0)}$. Але ці величини дорівнюють значенням відповідних функцій. Отже, функції $f(x) \pm \varphi(x)$, $f(x) \cdot \varphi(x)$, $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ за першим означенням неперервності є неперервними в точці x_0 . Доведена теорема справедлива для алгебраїчної суми та добутку довільної скінченної кількості неперервних в точці x_0 функцій. □

Теорема 17.2 (про неперервність складеної функції).

Якщо функція $u = \varphi(x)$ неперервна у точці x_0 , а функція $y = f(u)$ — неперервна у точці $u_0 = f(x_0)$, то складена функція $y = f(\varphi(x))$ неперервна у точці x_0 .



ДОВЕДЕННЯ. Для доведення теореми досить встановити, що $\lim_{x \rightarrow x_0} f(\varphi(x)) = f(\varphi(x_0))$. Оскільки функція $u = \varphi(x)$ за умовою неперервна в точці x_0 , то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) = u_0,$$

тобто при $x \rightarrow x_0$ значення функції $u \rightarrow u_0$. Тому внаслідок неперервності функції $f(u)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(\varphi(x)) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = f(u_0) = f(\varphi(x_0)).$$

Як відомо, елементарною називається така функція, яку можна задати однією формулою, яка містить скінченне число арифметичних дій і суперпозицій основних елементарних функцій.

Теорема 17.3.

Кожна елементарна функція неперервна у кожній точці, в якій вона визначена. ★

Означення 17.6. Якщо функція неперервна у кожній точці інтервалу (a, b) , то вона називається неперервною на цьому інтервалі. ✓

Означення 17.7. Функція називається неперервною на відрізку $[a, b]$, якщо вона неперервна на інтервалі (a, b) і, крім того, неперервна справа у точці a і зліва у точці b . ✓

Приклад 17.4. Функція

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & x < 2, \\ -1, & x \geq 2 \end{cases}$$

— неперервна на $(-\infty, 2)$ та $[2, +\infty)$ (рис. 17.1). У точці $x = 2$ вона неперервна справа. ☺

Теорема Больцано-Коші та Вейєрштраса

Неперервні на відрізку функції мають ряд важливих властивостей.

Теорема 17.4 (перша теорема Больцано-Коші).

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку на $[a, b]$ і на його кінцях приймає значення різних знаків ($f(a) \cdot f(b) < 0$), то в середині відрізка $[a, b]$ знайдеться хоча б одна точка $x = c$, в якій функція дорівнює нулю $f(c) = 0$, $a < c < b$. ★

Геометричний зміст цієї теореми такий: неперервна крива при переході з однієї півплощини в іншу, межею між якими є вісь абсцис Ox , перетинає цю вісь.

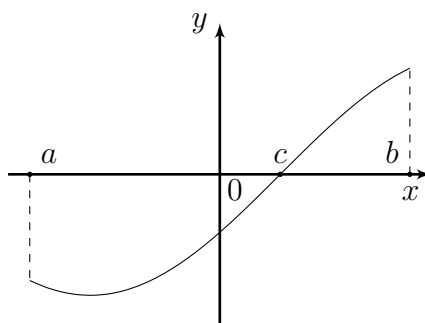


Рисунок 17.2 – Геометричний зміст першої теореми Больцано-Коші

Теорема 17.5 (друга теорема Больцано-Коші).

Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і набуває на його кінцях різних значень: $f(a) = A$, $f(b) = B$, $A \neq B$. Тоді для довільного числа $\mu \in (A, B)$ знайдеться таке число $c \in (a, b)$, що $f(c) = \mu$. ★

Отже, неперервна функція при переході від одного значення до іншого набуває також всіх проміжних значень.

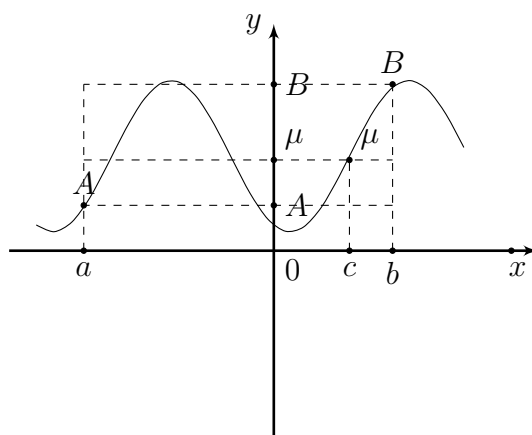


Рисунок 17.3 – Геометричний зміст другої теореми Больцано-Коші

Теорема 17.6 (перша теорема Вейєрштраса).

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то вона обмежена на ньому. ★

Теорема 17.7 (друга теорема Вейєрштраса).

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то серед її значень на цьому відрізку існує найбільше та найменше значення. ★

Отже, неперервна на відрізку $[a, b]$ функція $f(x)$ досягає на ньому найбільшого та найменшого значення: $m = \min_{a \leq x \leq b} f(x)$, $M = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$.

Приклад 17.5. Функція $y = \sin \frac{1}{x}$ має у точці $x = 0$ розрив другого роду, бо жодна з односторонніх границь не існує цій точці (рис. 15.1). ☺

Предметний покажчик

- $\Leftrightarrow$, 109
- $\Rightarrow$, 109
- $\exists$, 109
- $\forall$, 109
- ε -окіл точки, 111
- n -вимірний
 - вектор, 36
 - простір, 36
- алгебраїчне доповнення, 10, 11
- аналітична геометрія, 49
- аргумент, 112
- базис
 - на прямій, 26
 - ортонормований, 27
 - у просторі, 26
- базисні вектори, 26
- вектор, 25
 - довжина, 25, 29, 41
 - координати, 29
 - кінець, 25
 - модуль, 25
 - напряма, 25
 - напрямні косинуси, 29
 - нульовий, 25
 - одичинний, 25
 - початок, 25
- векторний добуток, 42
 - властивості, 43, 44
 - геометричний зміст, 44
- визначник
 - n -порядку, 11
 - бічна діагональ, 7
 - властивості, 8, 12
 - головна діагональ, 7
 - другого порядку, 7
 - елемент, 7
 - матриці, 14
 - порядок, 11
 - правило Саррюса, 8
 - правило трикутників, 8
 - третього порядку, 7
- властивості лінійних операцій над векторами, 26
- властивості лінійної залежності, 37
- властивості проєкцій, 31
- відстань
 - від точки до площини, 84
 - від точки до прямої, 57
 - від точки до прямої у просторі, 93
 - між мимобіжними прямими, 87, 93, 94
- вільний член, 20
- вісь
 - абсцис, 27
 - аплікат, 27
 - координат, 27
 - ординат, 27
- графік функції
 - $y = cf(x)$, 114
 - $y = f(kx)$, 114
 - $y = f(x) + b$, 114
 - $y = f(x + a)$, 114
- гіпербола, 69
 - асимптота, 70
 - властивості, 70
 - директриса, 72
 - дійсна вісь, 71
 - ексцентриситет, 71
 - полярне рівняння, 76
 - спряжена, 71
 - уявна вісь, 71
 - фокуси, 69
 - центр, 71
- гіперболічний параболоїд, 106
 - канонічне рівняння, 106
- двопорожнинний гіперболоїд, 104
 - канонічне рівняння, 104
- детермінант, 7
- добутком вектора на число, 26
- добуток двох матриць, 16
- добуток матриці на число, 15
- додавання матриць, 15
- друга важлива границя, 140
- еквівалентні нескінченно малі, 142

- властивості, 143
- еквівалентність, 109
- еліпс, 66
 - велика вісь, 67
 - властивості, 67
 - директриса, 68
 - ексцентриситет, 68
 - мала вісь, 67
 - параметричне рівняння, 76
 - полярне рівняння, 76
 - фокальний радіус, 68
 - фокуси, 66
- еліпсоїд, 102
 - канонічне рівняння, 102
- еліптичний параболоїд, 105
 - канонічне рівняння, 105
- еліс
 - канонічне рівняння, 67
- квантор загальності, 109
- квантор існування, 109
- коло, 63
 - параметричне рівняння, 76
 - полярне рівняння, 76
 - рівняння, 63
 - загальне, 64
 - канонічне, 64
- колінеарні вектори, 25, 30
- компланарні вектори, 25
- композиція функцій, 115
- конус
 - круговий, 100
- кут
 - між векторами, 41
 - між вектором і віссю, 31
 - між двома площинами, 85
 - між прямими, 59, 60
 - між прямими у просторі, 89
 - між прямою і площиною, 91
- ліва трійка векторів, 28
- лінійна комбінація, 26
- лінійно залежні вектори, 36
- лінійно незалежні вектори, 36
- лінія
 - Вівіані, 79
 - алгебраїчна, 50
 - гвинтова, 78
 - другого порядку, 62
 - рівняння, 49
 - векторне, 51
 - параметричне, 51
 - трансцендентна, 50
- лінія у просторі, 78
- матриця, 14
 - рядок, 14
 - стовпець, 14
 - діагональна, 14
 - елемент, 14
 - квадратна, 14
 - нульова, 14
 - обернена, 17
 - одинична, 14
 - порядок, 14
 - ранг, 18
 - розмір, 14
 - розширена, 23
- метод
 - Жордана-Гауса, 20
 - Крамера, 22
 - виключення невідомих, 20
 - елементарних перетворень матриці, 19
 - матричний, 23
 - обвідних мінорів, 19
 - паралельних перерізів, 102
- множина, 109
 - елемент, 109
 - нескінченна, 110
 - порожня, 110
 - скінченна, 109
- множина значень, 112
- модуль числа, 111
 - властивості, 112
- мінор, 10, 11
 - матриці, 18
- мішаний добуток, 46
 - властивості, 46
 - геометричний зміст, 47
- незалежна змінна, 112
- непорівнянні нескінченно малі, 142
- нескінченно велика величина, 125
- нескінченно мала, 133
 - вищого порядку, 142
 - властивості, 133
 - нижчого порядку, 142
 - порядку k , 142
- нескінченні малі одного порядку, 142
- нормувальний множник, 56
- об'єднання множин, 110
- область визначення, 112
- однопорожнинний гіперболоїд, 103, 107
 - канонічне рівняння, 103

- окіл точки, 111
- орт, 25
- парабола, 74
 - директриса, 74
 - канонічне рівняння, 75
 - полярне рівняння, 77
 - фокус, 74
- паралельне перенесення осей, 33
- переріз множин, 110
- перша важлива границя, 138
- площина
 - загальне рівняння, 80
 - нормальне рівняння, 84
 - нормальний вектор, 80
 - рівняння у відрізках на осях, 82
 - рівняння через три точки, 82
- поверхня, 77
 - алгебраїчна, 77
 - другого порядку, 95
 - конічна, 99
 - лінійчата, 106
 - обертання, 97
 - порядок, 77
 - рівняння, 77, 95
 - трансцендентна, 77
 - циліндрична, 96
- поворот осей, 34
- полюс, 32
- полярна вісь, 32
- полярний кут, 32
- полярний радіус, 32
- полярні координати точки, 32
- порівняння нескінченно малих, 142
- послідовність, 122
 - границя, 123
 - геометричний зміст, 123
 - збіжна, 123
 - розбіжна, 123
 - член, 122
- початок координат, 27
- права трійка векторів, 28
- проекція
 - вектора на вісь, 31
 - точки на вісь, 31
- протилежні вектори, 25
- пряма
 - векторне параметричне рівняння, 53
 - загальне рівняння, 58
 - канонічне рівняння, 53
 - кутовий коефіцієнт, 53
 - напрямний вектор, 52
 - нормальне рівняння, 55
 - параметричні рівняння, 53
 - рівняння з кутовим коефіцієнтом, 53
 - рівняння у відрізках на осях, 54
 - рівняння через дві точки, 54
- пряма у просторі
 - загальні рівняння, 87
 - канонічне рівняння, 87
 - параметричні рівняння, 87
 - рівняння через дві точки, 87
- підмножина, 110
- радіус-вектор, 27
- розклад вектора за базисом, 26
- рівні вектори, 25, 30
- рівні множини, 110
- рівність матриць, 14
- різниця векторів, 25
- різниця матриць, 15
- різниця множин, 110
- система координат
 - декартова, 27
 - полярна, 32
 - прямокутна
 - ліва, 28
 - права, 28
 - прямокутна декартова, 28
 - сферична, 35
 - циліндрична, 35
- система лінійних рівнянь, 20
 - визначена, 20
 - невизначена, 20
 - несумісна, 20
 - однорідна, 20
 - розв'язок, 20
 - східчаста, 21
- скалярний добуток, 38
 - властивості, 39, 40
 - геометричний зміст, 38
 - механічний зміст, 38
- сума векторів, 25
 - правило паралелограма, 25
 - правило трикутника, 25
- суперпозиція функцій, 115
- сфера, 101
 - рівняння, 101
- теорема
 - Кронекера-Капеллі, 24
 - про границю монотонної функції, 138
 - про границю проміжної функції, 137

- про границю суми, добутку і частки, 136
- про граничний перехід у нерівностях, 137
- про розклад вектора за базисом, 26
- про розклад визначника за рядком, 10
- про існування оберненої матриці, 17
- узгоджені матриці, 15
- умова
 - мимобіжності прямих у просторі, 89
 - паралельності площин, 85
 - паралельності прямих, 59, 60
 - паралельності прямих у просторі, 89
 - паралельності прямої і площини, 91
 - перпендикулярності векторів, 41
 - перпендикулярності площин, 85
 - перпендикулярності прямих, 59, 60
 - перпендикулярності прямих у просторі, 89
 - перпендикулярності прямої і площини, 92
- формули Крамера, 23
- функція, 112
 - багатозначна, 112
 - границя
 - геометричний зміст, 127
 - границя в точці, 126, 127
 - границя на нескінченності, 130
 - геометричний зміст, 130
 - дробово-раціональна, 116
 - елементарна, 113
 - зростаюча, 117
 - логарифмічна, 113
 - ліва границя, 129
 - монотонна, 117
 - незростаюча, 117
 - непарна, 118
 - нескінченно велика, 131, 132
 - неспадна, 117
 - неявне задання, 113
 - неявно задана, 120
 - обернена, 120
 - обмежена, 116
 - обмежена зверху, 116
 - обмежена знизу, 116
 - параметрично задана, 121
 - парна, 118
 - період, 119
 - періодична, 119
 - показникова, 113
 - права границя, 129
 - раціональна, 116
 - складена, 115
 - спадна, 117
 - спосіб задання, 112
 - аналітичний, 112
 - графічний, 112
 - словесний, 112
 - табличний, 112
 - степенева, 113
 - строго монотонна, 117
 - трансцендентна, 116
 - ціла раціональна, 115
 - явне задання, 113
 - явно задана, 120
 - ірраціональна, 116
- функції
 - обернені тригонометричні, 113
 - тригонометричні, 113
- циліндр
 - гіперболічний, 97
 - еліптичний, 97
 - круговий, 97
 - параболічний, 97
- число e , 140
- єдиність, 109
- імплікація, 109

ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика. – К.: А.С.К., 2003. – 648 с.
2. Овчинников П. П., Яремчук Ф. П., Михайленко В. М. Вища математика. – К.: Техніка, 2000. – 592 с.
3. Кованцов М. І. Диференціальна геометрія. – К.: Вища школа, 1973. – 276 с.
4. Пак В. В., Косенко Ю. Л. Вища математика: Підручник. – К.: Либідь, 1996. – 440 с.
5. Шкіль М. І. Математичний аналіз. Ч.ІІ. – К.: Вища школа, 1995. – 512 с.
6. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Том 2. — М.: Наука, 1978. – 456 с.
7. Шипачев В. С. Высшая математика. — М.: Высш. шк., 1991.- 479 с.
8. Кудрявцев Л. Д. Математический анализ. Т.І. — М.: Высш. шк., 1970. – 688 с.
9. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. Т.І. – М.: Гостехиздат, 1955. – 696 с.
10. Кудрявцев В. Ф., Демидович Б. П. Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 1989. – 656 с.