

Міністерство освіти і науки України

**Івано – Франківський національний технічний
університет нафти і газу**

Кафедра вищої математики

Д.Ф. Лялюк, Л.М. Шегда

Вища математика

ЦІКАВІ КРИВІ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

**Для студентів спеціальності
«Екологія та охорона навколишнього середовища»**

**Івано - Франківськ
2005**

МВ 02070855 – 1588 – 2005

Лялюк Д. Ф., Шегда Л. М. Цікаві криві: Методичні вказівки. – Івано – Франківськ: Факел, 2005. – 49 с.

Розглядаються питання побудови кривих другого і вищих порядків. Рівняння кривих подаються в прямокутних декартових і полярних координатах, в параметричному вигляді. Розроблені у відповідності з робочою програмою навчальної дисципліни та навчальним планом підготовки фахівців за спеціальністю «Екологія та охорона навколишнього середовища». Можуть бути використані студентами денної та заочної форм навчання.

Рецензент канд. техн. наук, доцент кафедри вищої математики ІФНТУНГ Р. Д. Сисак.

Дане видання – власність ІФНТУНГ. Забороняється тиражувати і розповсюджувати.

ЗМІСТ

Вступ	
1 Алгебраїчні криві.....	5
1.1 Криві другого порядку.....	5
1.2 Криві вищих порядків.....	8
2 Криві, задані параметрично.....	10
3 Криві в полярних координатах.....	12
3.1 Приклади рівнянь ліній в полярних координатах.....	12
3.2 Побудова кривих, заданих полярними рівняннями....	15
4 Складання рівняння лінії за її геометричними властивостями.....	23
5 Для тих, кому цікаво знати	27
5.1 Лемніската і рівнобічна гіпербола.....	27
5.2 Кардіоида.....	29
5.3 Епіциклоїди.....	30
5.4 Гіпоциклоїди.....	32
Післямова.....	35
Додаток А - Деякі важливі криві	37
Додаток Б - Гіперболічні функції	42
Додаток В – Обернені гіперболічні функції	43
Додаток Г – Основні елементарні функції	44
Перелік використаних джерел.....	49

ВСТУП

У розмовній мові слово “крива” вживається як прикметник, яким означають те, що відхиляється від прямого. В математиці вживають слово “крива” звичайно в розумінні іменника; під цим словом розуміють криву лінію. Що ж таке крива лінія? Як охопити в одному означенні всі криві, які рисуються на папері олівцем, на дошці крейдою, викреслюються на нічному небі “падаючою зіркою” або ракетою?

Приймемо таке означення: *крива (розуміється лінія) є слід рухомої точки*. Такою точкою в наших прикладах є вістря олівця, гострий край грудки крейди, розжарений метеор, який пронизує верхні шари атмосфери, або ракета. З точки зору цього означення пряма лінія є окремий випадок кривої. Справді, точка яка рухається, може залишати прямолінійний слід, коли вона переходить з одного свого положення в будь-яке інше по найкоротшому шляху.

Якщо точка рухається на площині, зберігаючи незмінною віддаль від якоїсь нерухомої точки тієї ж площини, то вона описує лінію, яку називають колом. На цій властивості кола ґрунтується креслення його циркулем.

Звичайно, читачеві відомо, що точка, яка рухається на площині, залишаючись на рівних віддальях від двох даних точок тієї ж площини, описує пряму. Та мабуть не просто відповісти на запитання, яку криву опише точка, якщо її віддаль до однієї з них у певне число разів перевищує віддаль до іншої точки (наприклад, удвоє). Виявляється, що ця крива – коло.

З прямою і колом читач обізнаний зі школи. Пряма і коло – дві найбільш прості і разом з тим найбільш цікаві за своїми властивостями лінії. Далі розглянемо ще деякі не менш цікаві й важливі криві.

1 Алгебраїчні криві

Означення 1. Крива, яка задається рівнянням $P(x, y) = 0$, де $P(x, y)$ – многочлен від x і y , називається алгебраїчною кривою. Степінь многочлена $P(x, y)$ (за умови, що він не розкладається на множники) називається порядком цієї кривої.

1.1 Криві другого порядку

До кривих другого порядку належать коло, еліпс, гіпербола, парабола.

Коло – множина точок площини, рівновіддалених від даної точки, яка називається центром (рис. 1.1).

Еліпс – множина точок площини, для кожної з яких сума відстаней від двох фіксованих точок F_1 і F_2 , що називаються фокусами, є величиною сталою й більшою за відстань між фокусами (рис. 1.2).

Гіпербола – множина точок площини, для яких модуль різниці відстаней від двох фіксованих точок F_1 і F_2 , що називаються фокусами, є величиною сталою й меншою, ніж відстань між фокусами (рис. 1.3).

Парабола – множина точок площини, рівновіддалених від даної точки F , що називається фокусом і даної прямої (директриси), що не проходить через фокус (рис. 1.4).

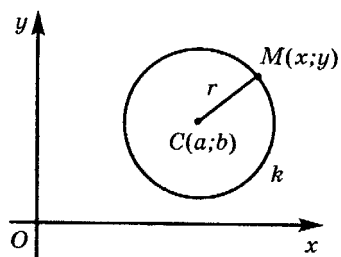


Рисунок 1.1

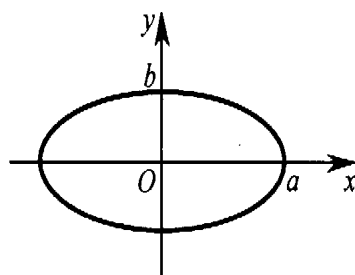


Рисунок 1.2

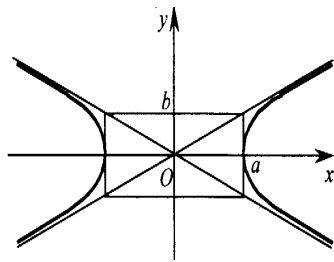


Рисунок 1.3

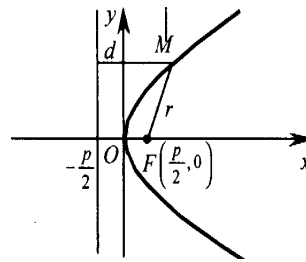


Рисунок 1.4

Кола, еліпси, гіперболи і параболи називаються разом “конічними перерізами”, оскільки їх можна отримати в перерізі поверхні конуса площиною (рис. 1.5).

У прямокутній системі координат на площині ці криві можна задати відповідно рівняннями другого степеня

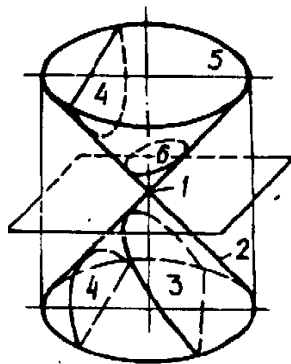


Рисунок 1.5

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2, \quad (1.1)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (1.2)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (1.3)$$

$$y^2 = 2px. \quad (1.4)$$

Ці рівняння називають канонічними (правильними).

Якщо вибрати систему координат інакше, то рівняння кривої може одержатись більш складним. В різних системах

координат для однієї й тієї ж кривої можна отримати рівняння різної складності.

Доводиться, що в будь-якій прямокутній системі координат на площині рівняння кола, еліпса, гіперболи і параболи мають вигляд

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (1.5)$$

де A, B, C, D, E, F – дійсні числа, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Цікаво, що вірним є і обернене твердження.

Теорема. Рівняння (1.5) визначає коло, еліпс, гіперболу або параболу, якщо ліва частина його не розкладається на множники і набуває значень з протилежними знаками.

У випадку, коли ліва частина рівняння (1.5) розкладається на множники, то маємо пару прямих; якщо вона набуває значень з різними знаками, то можемо мати одну точку, одну пряму або порожню множину.

Звідси зрозуміло походження загальної назви для кіл, еліпсів, гіпербол і парабол “криві другого порядку”.

Ця теорема досить зручна для відшукування точкових множин, які задовольняють геометричній умові: *якщо в деякій системі координат ця умова виражається рівнянням другого степеня, значить, шукана множина – коло, еліпс, гіпербола або парабола (залежно від коефіцієнтів).*

Зазначимо, що криві другого порядку досить широко використовуються в різних областях науки і техніки. Наведемо деякі приклади.

1) Відомо, планети сонячної системи рухаються по еліпсах, що мають спільний фокус, в якому знаходиться Сонце (рис. 1.6).

2) Якщо джерело світла помістити у фокусі параболи, то промені, відбившись від параболи, підуть паралельно до її осі (рис. 1.7). На цій властивості ґрунтується будова прожектора.

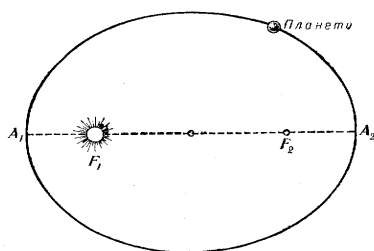


Рисунок 1.6

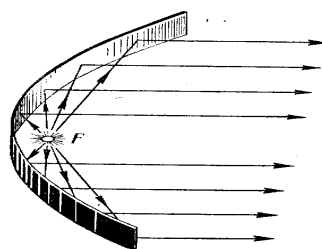


Рисунок 1.7

3) Відомо з механіки, ракета, запущена з поверхні Землі під деяким кутом до горизонту з початковою швидкістю $v_0 = 11,2$ км/с, буде рухатись по параболі, необмежено віддаляючись від поверхні Землі. Якщо початкова швидкість $v_0 > 11,2$ км/с, то ракета необмежено віддаляючись від поверхні Землі, рухатиметься по гіперболі. Нарешті, при початковій швидкості $v_0 < 11,2$ км/с ракета, рухаючись по еліпсу, або впаде знову на Землю, або стане штучним супутником Землі.

1.2 Криві вищих порядків

Звичайно множини точок, які можуть зустрітись нам у геометричних задачах, не обмежуються тільки прямими і кривими другого порядку. Алгебраїчні криві порядку $n > 2$ можуть мати дивний і цікавий вигляд. Розглянемо деякі з них.

Напівкубічна парабола. Крива задається рівнянням $y^2 = x^3$ (рис. 1.8).

Кардіоида – крива, яку описує зафіксована точка кола, що котиться (без ковзання) зовні по нерухомому колу такого ж радіуса.

Якщо нерухоме коло $x^2 + y^2 = a^2$, а точка М рухомого кола, яка описує кардіоїду, в початковий момент співпадає з точкою А (a ; 0) (рис. 1.9), то їй відповідає алгебраїчне рівняння

$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 - 4a^2(x^2 + y^2) = 0. \quad (1.6)$$

Отже, кардіоїда – крива четвертого порядку. Її назва від kardia – серце.

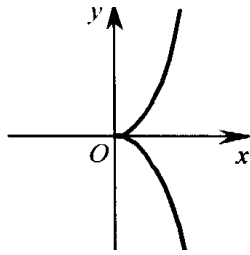


Рисунок 1.8

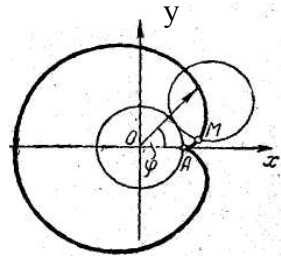


Рисунок 1.9

Астроїда – крива, яку описує фіксована точка кола, що з середини дотикається до нерухомого кола вчетверо більшого радіуса і котиться по ньому без ковзання (рис. 1.10).

Астроїда від “astra” – зірка.

Цій кривій відповідає в деякій прямокутній системі координат алгебраїчне рівняння шостого степеня

$$(x^2 + y^2 - 4r^2)^3 + 108r^2x^2y^2 = 0, \quad (1.7)$$

де $r = a/4$, a – радіус нерухомого кола.

Астроїда – крива шостого порядку.

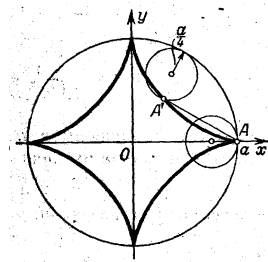


Рисунок 1.10

Рівняння астроїди можна записати у вигляді

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}. \quad (1.8)$$

2 Криві, задані параметрично

Крім задання лінії на площині одним рівнянням, яке зв'язує координати x і y , існує інший спосіб опису лінії – параметричний. Він має свої переваги. При параметричному заданні лінія описується як слід руху точки на площині. Найчастіше застосовується в механіці, де t - час.

Розглянемо вектор з проекціями, які залежать від деякого параметра t

$$r(t) = x(t) \cdot i + y(t) \cdot j. \quad (2.1)$$

Цей вираз можна подати у вигляді

$$x = x(t), \quad y = y(t). \quad (2.2)$$

Якщо змінювати параметр t , то кінець вектора $r(t)$ опише деяку лінію (рис.2.1).

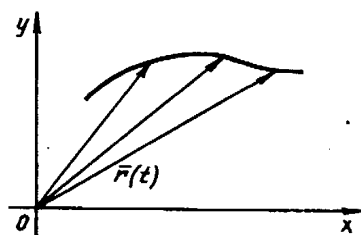


Рисунок 2.1

Рівняння (2.1) називають *векторно-параметричним*, а рівняння (2.2) – *параметричними рівняннями цієї лінії*.

Якщо з (2.2) вилучити параметр t , то одержимо рівняння цієї ж лінії у вигляді $P(x, y) = 0$.

Розглянемо приклади параметричного задання деяких ліній:

Еліпс можна задати рівняннями

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi). \quad (2.3)$$

Справді, поділимо останні рівняння на a і b відповідно, піднесемо до квадрата і додамо. В результаті параметр t вилучимо і здобуте рівняння буде канонічним рівнянням еліпса.

Пара рівнянь (2.3) представляє еліпс як слід руху точки. Саме, коли t зростає від 0 до 2π , точка $(x(t), y(t))$ рухається по еліпсу проти руху годинникової стрілки, виходячи з положення $A(a, 0)$ і повертаючись до нього ж в момент часу $t=2\pi$, тому крива, що описується цією точкою, тобто еліпс, є замкненою.

Очевидно, що параметричні рівняння кола радіуса a з центром в точці $C(0, 0)$ матимуть вигляд

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi). \quad (2.4)$$

Якщо центром кола є точка $C(x_0, y_0)$, то параметричні рівняння кола

$$\begin{cases} x = x_0 + a \cos t, \\ y = y_0 + a \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi). \quad (2.5)$$

Циклоїда - крива, що її описує зафіксована точка кола, яке котиться без ковзання по прямій (рис. 2.2).

Циклоїда - від грецького “циклоїдос” – колоподібний, круглий.

Одному обертові кола відповідає одна арка циклоїди. Другому обертові кола відповідає ще одна арка і т.д.

Якщо коло радіуса a повернулось на кут t , то $x = OP = OB - PB$. Оскільки коло котиться без ковзання, то

$$OB = MB = at, \quad PB = MK = a \sin t.$$

$$\text{Тому } x = at - a \sin t = a(t - \sin t).$$

$$\text{Далі } y = MP = KB = CB - CK = a - a \cos t = a(1 - \cos t).$$

$$\text{Рівняння } \begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad t \in (-\infty; +\infty) \quad (2.6)$$

є параметричними рівняннями циклоїди.

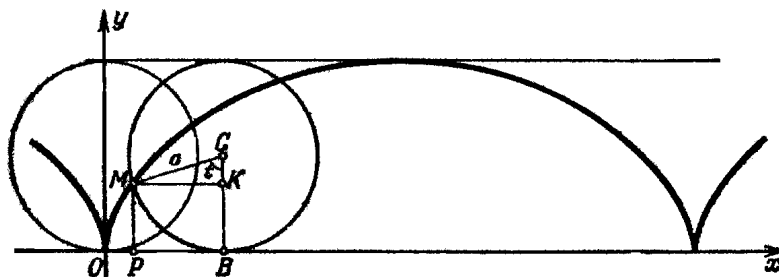


Рисунок 2.2

Якщо t зміниться від 0 до 2π , то точка M опише одну арку циклоїди.

Астроїда. Астроїду можна задати рівняннями:

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi). \quad (2.7)$$

3 Криві в полярних координатах

3.1 Приклади рівнянь ліній в полярних координатах

Для опису деяких ліній замість декартових координат часто зручніше буває використати полярні координати. Якщо полярна вісь співпадає з додатною піввіссю Ox декартової системи координат, то між декартовими координатами $(x; y)$ і полярними координатами $(\rho; \varphi)$ точки P існує простий зв'язок (рис. 3.2)

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi \quad (3.1)$$

і навпаки

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x},$$

(3.2)

де $\rho \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

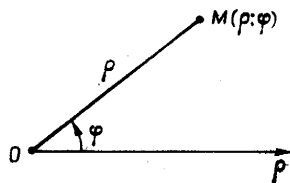


Рисунок 3.1

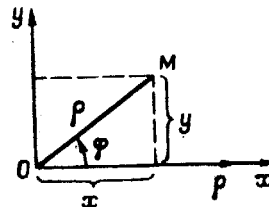


Рисунок 3.2

Промінь. Нехай промінь виходить з полюса і утворює з полярною віссю кут φ_0 (див. рис. 3.1). Тоді його рівняння набуває вигляду

$$\varphi = \varphi_0. \quad (3.3)$$

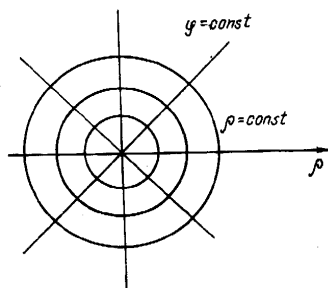


Рисунок 3.3

Коло. Якщо центр кола з радіусом R лежить у полюсі, то полярне рівняння кола

$$\rho = R. \quad (3.4)$$

Останні два рівняння описують координатну сітку (“павутиння”) полярної системи координат ($\varphi = \text{const}$, $\rho = \text{const}$ (рис.3.3)).

Еліпс, гіпербола і парабола. Якщо вибрати полярну систему координат так, що полюс співпадає з фокусом, а за полярну вісь прийняти вісь лінії з напрямом, протилежним до ближньої до цього фокуса директриси, то полярне рівняння, спільне за формою для еліпса, однієї вітки гіперболи і параболи, має вигляд

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}, \quad (3.5)$$

де ρ , φ – полярні координати будь-якої точки лінії, p – фокальний параметр, ε – ексцентриситет (у випадку параболи $\varepsilon=1$).

Спіраль Архімеда – лінія, яка визначається рівнянням

$$\rho = a\varphi, \quad a \in R, \quad a \neq 0, \quad \varphi \geq 0. \quad (3.6)$$

Оскільки $\rho(0) = 0$, $\rho(2\pi) = 2\pi a$, то лінія не замкнена.

Зазначимо, що

$$\Delta\rho = \rho(\varphi + 2\pi) - \rho(\varphi) = (\varphi + 2\pi)a - \varphi a = 2\pi a.$$

Остання різниця не залежить від φ . Отже, маючи виток лінії для $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, можна побудувати всю лінію (рис.3.4).

Логарифмічна спіраль. Це лінія, рівняння якої

$$\rho = ae^{b\varphi}, \quad a \in R, \quad b \in R, \quad a \neq 0. \quad (3.7)$$

Зазначимо, що $\rho(0) = a$. Один з можливих варіантів лінії показано на рис. 3.5.

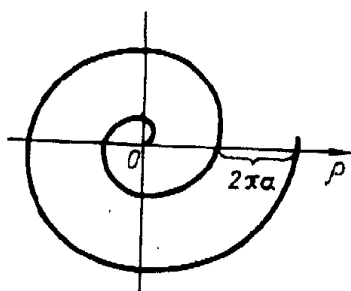


Рисунок 3.4

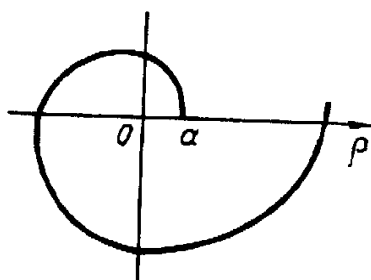


Рисунок 3.5

Логарифмічна спіраль має одну цікаву властивість: якщо обертати її навколо точки O , то складається враження, що спіраль скручується або розкручується.

3.2 Побудова кривих, заданих полярними рівняннями

Зауважимо, що на практиці зручніше користуватися системою полярних координат, в якій полярний радіус ρ може набувати і від'ємні значення. Система полярних координат, в якій полярний радіус ρ може набувати будь-які значення (додатні, від'ємні і рівні нулю) називається узагальненою системою полярних координат. Скористаємось такою системою координат. Тоді точку $M(\rho, \varphi)$ слід будувати так: заданим значенням полярного кута φ будемо вісь, яка проходить через полюс O під кутом φ до полярної осі, при цьому додатній напрям побудованої осі має співпадати з тим напрямом, який мала б полярна вісь, якщо б її повернути проти руху годинникової стрілки на кут φ . На цій осі відкладаємо відрізок довжиною $|\rho|$ від полюса O в додатному напрямі побудованої осі, якщо $\rho > 0$, і у від'ємному – якщо $\rho < 0$.

Якщо точка M має координати $+\rho$ і φ : $M(+\rho, \varphi)$, то вона має також і координати $-\rho$ і $\varphi + \pi$: $M(-\rho, \varphi + \pi)$, оскільки кут $\varphi + \pi$ характеризує напрям полярного радіуса, протилежного тому, що відповідає кутові φ .

При цьому зазначимо, що якою б з цих двох систем полярних координат ми не користувались, завжди парі чисел ρ і φ відповідає на площині одна точка.

Задача 1. Побудувати криву $\rho = a \cos 2\varphi$, $a > 0$ і знайти її рівняння в прямокутній системі координат.

Розв'язання. Надаватимемо значень полярному кутові φ від $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$ через проміжки $\alpha = \pi/8$ і обчислимо відповідні значення ρ (табл. 3.1).

Таблиця 3.1 – Значення функції $\rho = a \cos 2\varphi$

φ	2φ	$\rho = a \cos 2\varphi$	φ	2φ	$\rho = a \cos 2\varphi$
-----------	------------	--------------------------	-----------	------------	--------------------------

0	0	a	$9\pi/8$	$9\pi/4$	$a\sqrt{2}/2$
$\pi/8$	$\pi/4$	$a\sqrt{2}/2$	$5\pi/4$	$5\pi/2$	0
$\pi/4$	$\pi/2$	0	$11\pi/8$	$11\pi/4$	$-a\sqrt{2}/2$
$3\pi/8$	$3\pi/4$	$-a\sqrt{2}/2$	$3\pi/2$	3π	$-a$
$\pi/2$	π	$-a$	$13\pi/8$	$13\pi/4$	$-a\sqrt{2}/2$
$5\pi/8$	$5\pi/4$	$-a\sqrt{2}/2$	$7\pi/4$	$7\pi/2$	0
$3\pi/4$	$3\pi/2$	0	$15\pi/8$	$15\pi/4$	$a\sqrt{2}/2$
$7\pi/8$	$7\pi/4$	$a\sqrt{2}/2$	2π	4π	a
π	2π	a			

Візьмемо довільний відрізок за одиницю масштабу. За значеннями ρ і φ з таблиці нанесемо точки, що відповідають кожній парі чисел ρ і φ , і з'єднаємо їх плавною лінією. Етапи побудови кривої показано на рис. 3.6 – 3.13.

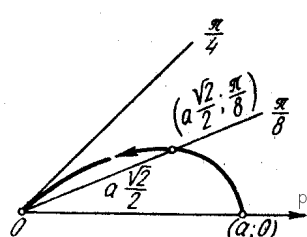


Рисунок 3.6

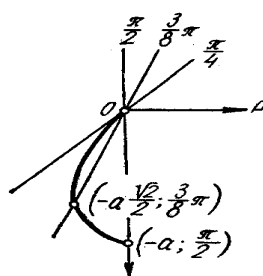


Рисунок 3.7

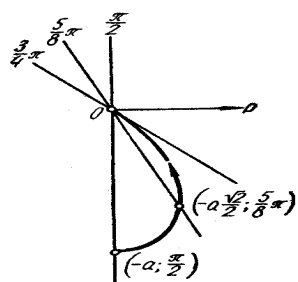


Рисунок 3.8

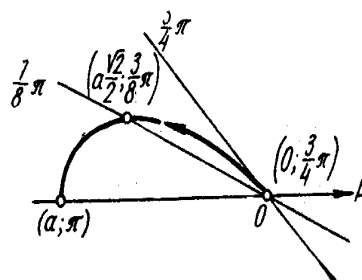


Рисунок 3.9

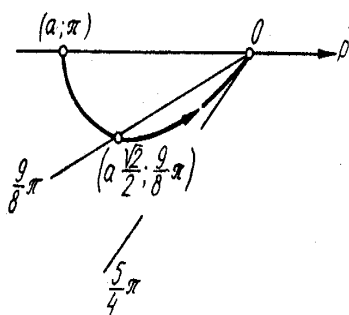


Рисунок 3.10

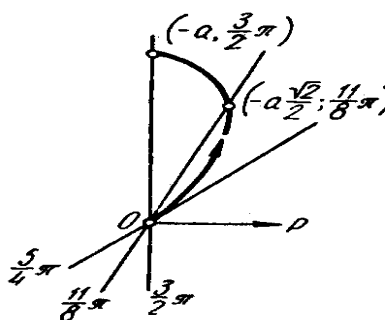


Рисунок 3.11

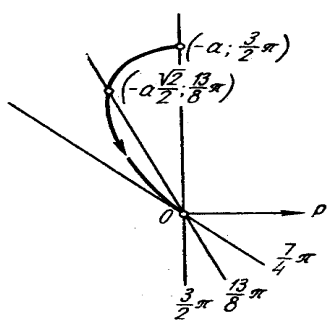


Рисунок 3.12

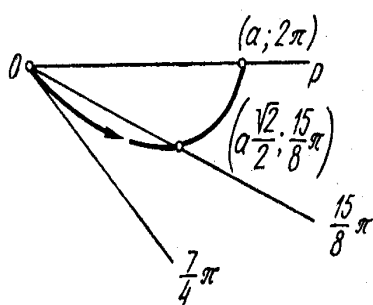


Рисунок 3.13

На рис. 3.14 криві, побудовані на різних етапах, з'єднані в одну. Одержана крива називається чотирипелюстковою трояндою.

Знайдемо рівняння чотирипелюсткової троянди в прямокутній системі координат, початок якої співпадає з полюсом полярної системи координат, а дійсна піввісь Ox - з полярною віссю.

Оскільки $\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$, то рівняння чотирипелюсткової троянди набуває вигляду $\rho = a(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$. Якщо врахувати при цьому формули переходу (3.2), то отримаємо

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}. \text{ Звідси}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} (x^2 + y^2) = a(x^2 - y^2).$$

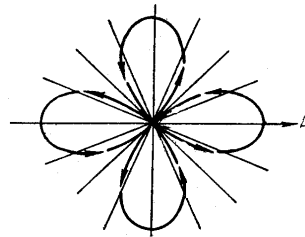


Рисунок 3.14

Піднесемо обидві частини останньої рівності до квадрата. Після елементарних перетворень рівняння чотирипелюсткової троянди в прямокутних декартових координатах матиме вигляд

$$(x^2 + y^2)^3 = a^2(x^2 - y^2)^2. \quad (3.8)$$

Отже, чотирипелюсткова троянда – крива шостого порядку. Дану криву можна задати параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos 2t \cdot \cos t, \\ y = a \cdot \cos 2t \cdot \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi). \quad (3.9)$$

Задача 2. Побудувати криву $\rho = 4 \cos 3\varphi$.

Розв'язання. Кутові φ надамо значень від $\varphi=0$ до $\varphi=\pi$ через проміжки $\alpha = \pi/12$ і обчислимо відповідні значення ρ (табл. 3.2).

Таблиця 3.2 – Значення функції $\rho = 4 \cos 3\varphi$

φ	3φ	$\rho = 4 \cos 3\varphi$
0	0	4
$\pi/12$	$\pi/4$	$2\sqrt{2}$
$\pi/6$	$\pi/2$	0
$\pi/4$	$3\pi/4$	$-2\sqrt{2}$
$\pi/3$	π	-4
$5\pi/12$	$5\pi/4$	$-2\sqrt{2}$
$\pi/2$	$3\pi/2$	0
$7\pi/12$	$7\pi/4$	$2\sqrt{2}$
$2\pi/3$	2π	4
$3\pi/4$	$9\pi/4$	$2\sqrt{2}$
$5\pi/6$	$5\pi/2$	0
$11\pi/12$	$11\pi/4$	$-2\sqrt{2}$
π	3π	-4

Побудуємо точки з координатами (ρ, φ) і сполучимо їх плавною лінією.

Поетапну побудову кривої показано на рис. 3.15 – 3.18. Точки кривої для значень $\pi \leq \varphi \leq 2\pi$ (рис. 3.17, 3.18) співпадають з побудованими на рис. 3.15, 3.16. Крива, що відповідає рівнянню $\rho = 4 \cos 3\varphi$, зображена на рис. 3.19. Її називають трипелюстковою трояндою.

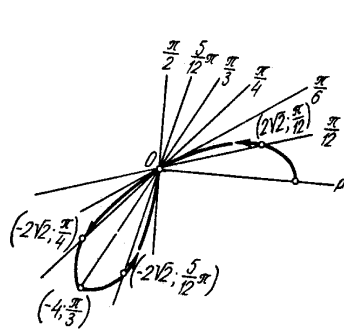


Рисунок 3.15

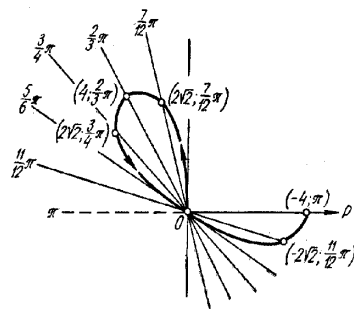


Рисунок 3.16

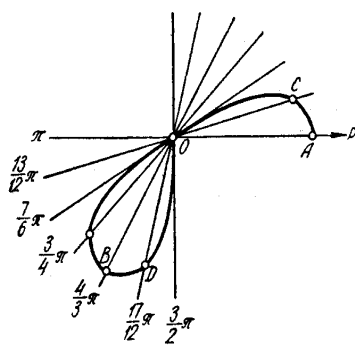


Рисунок 3.17

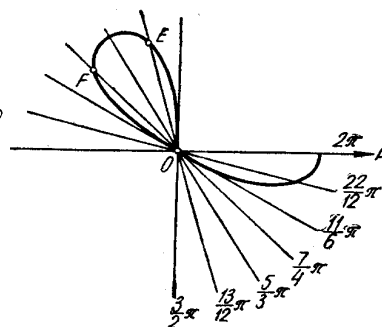
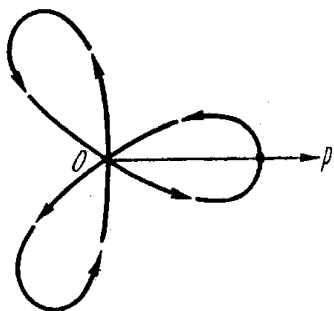


Рисунок 3.18



Перейдемо до
прямокутних координат.
Спершу скористаємось
відомою формулою
 $\cos 3\varphi = 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi$.
Рівняння кривої
матиме вигляд
 $\rho = 4(4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi)$.

Рисунок 3.19

З використанням формул (3.2) отримаємо

$$(x^2 + y^2)^2 = 4x(x^2 - 3y^2). \quad (3.10)$$

Це алгебраїчна крива четвертого порядку.

Зауваження. Можна поступити іншим чином. Оскільки функція $\rho = 4 \cos 3\varphi$ періодична з періодом $T = \frac{2\pi}{3}$, то побудуємо лінію, що відповідає зміні кута φ в межах від 0 до $2\pi/3$, скориставшись даними таблиці. Потім, враховуючи періодичність, побудувати всю лінію.

Криві, які визначаються рівняннями

$$\rho = a \cdot \sin k\varphi \text{ та } \rho = a \cdot \cos k\varphi, \quad (3.11)$$

де a і k – сталі величини ($a > 0, k \in \mathbb{N}$), називаються *трояндами*. Якщо k – парне число, то крива має $2k$ пелюсток; якщо ж k – непарне число, то крива має k пелюсток.

Наприклад, крива, що визначається рівнянням $\rho = a \cdot \sin 2\varphi$, має чотири пелюстки, а крива $\rho = a \cdot \sin 3\varphi$ – три пелюстки.

Задача 3. Побудувати криву, задану рівнянням $x^6 = 4(x^4 - y^4)$.

Розв'язання. Оскільки заміна x на $(-x)$ і y на $(-y)$ не змінює рівняння кривої, то крива симетрична відносно координатних осей. Тому досить побудувати криву лише в першій чверті, а потім, зважаючи на симетрію, побудувати її в інших трьох чвертях.

Перейдемо до полярних координат. Помістимо полюс початок прямокутної системи координат, а полярну вісь сумістимо з додатною піввіссю абсцис. Скористаємось формулами переходу (3.1). Рівняння даної кривої в полярних координатах матиме вигляд

$$\rho = \frac{2\sqrt{\cos 2\varphi}}{\cos^3 \varphi}. \quad (3.12)$$

Полярний радіус ρ може набувати лише дійсних значень, тому повинна задовольнятися умова $\cos 2\varphi \geq 0$. Це значить, що кут 2φ повинен задовольняти умовам

$$0 \leq 2\varphi \leq \frac{\pi}{2} \text{ або } \frac{3\pi}{2} \leq 2\varphi \leq 2\pi.$$

З самого початку ми встановили, що досить побудувати криву в першій

чверті, тому будемо розглядати значення 2φ , що задовольняє умові $0 \leq 2\varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Для побудови кривої в першій чверті кутові

φ надаємо значення від $\varphi = 0$ до $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Ескіз кривої подано на рис. 3.20.

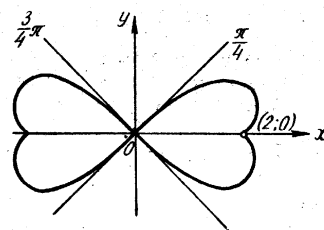


Рисунок 3.20

4 Складання рівняння лінії за її геометричними властивостями

Скласти рівняння лінії на площині у вибраній системі координат – це значить скласти таке рівняння з двома змінними, яке задовольняють координати будь-якої точки, що лежить на цій лінії, і не задовольняють координати точки, що не лежить на цій лінії.

Для виведення рівняння лінії поступають так:

1) вибирають на площині систему координат;

2) на лінії, рівняння якої складаємо, беруть довільну точку з біжучими координатами. Координати цієї точки x і y , якщо рівняння лінії шукаємо в прямокутних координатах, або ρ і φ , якщо рівняння шукаємо в полярних координатах.

Виходячи із заданої властивості точок, що лежать на лінії, складають рівняння, яке зв'язує координати довільної точки з деякими сталими величинами, даними в задачі.

Задача 1. Скласти рівняння прямої лінії в полярних координатах.

Розв'язання. Помістимо полюс полярної системи координат в початок прямокутної системи координат, а полярну вісь сумістимо з додатньою піввіссю Ox (рис. 4.1). Візьмемо рівняння прямої в нормальному виді

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0.$$

Підставимо в це рівняння значення x і y за формулами (3.1), отримаємо

$$\rho(\cos \varphi \cos \alpha + \sin \varphi \sin \alpha) - p = 0.$$

або. Звідси

(4.1).

У цьому рівнянні сталими величинами є p і α ; величини ρ і φ – змінні.

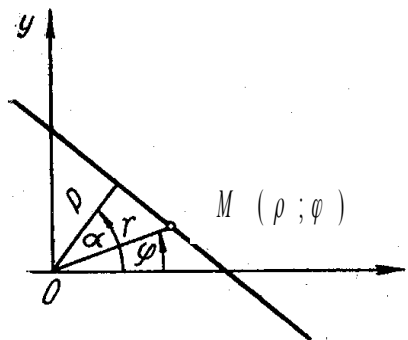


Рисунок 4.1

Задача 2. Скласти рівняння кола, яке проходить через полюс системи координат, центр якого C лежить на полярній осі, а радіус рівний R (рис. 4.2), і знайти рівняння цього кола в прямокутних координатах.

$A(\rho; \varphi)$ *Розв'язання.* Візьмемо на колі довільну точку $A(\rho, \varphi)$ і з'єднаємо її з точкою B – кінцем діаметра. Кут $\angle OAB$ – прямий, а тому з прямокутного $\triangle AOB$ маємо $\rho = 2R \cos \varphi$. (4.2)

Це й буде шукане рівняння.

Рисунок 4.2

Перейдемо до прямокутних координат. Використаємо формули переходу (3.2), отримаємо

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2Rx}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Звідси $x^2 + y^2 - 2Rx = 0$. (4.3)

Задача 3. Знайти рівняння кола з радіусом рівним R , яке проходить через полюс, центр C якого лежить на прямій, що проходить через полюс і перпендикулярна до полярної осі (рис. 4.3).

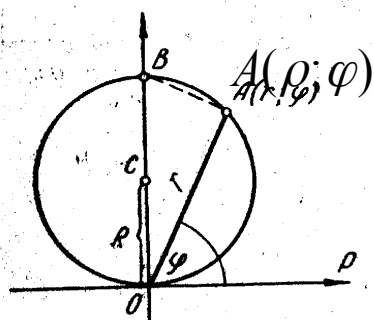


Рисунок 4.3

Розв'язання. Як у попередній задачі з прямокутного маємо. Тоді рівняння цього кола в прямокутних координатах буде

$$(4.4)$$

Задача 4. Скласти рівняння кривої, яку описує точка M на площині так, що лишається незмінним добуток p віддалей цієї точки до двох певних точок A і B тієї ж площини. Вважати відстань між точками $AB=2a$ і $p=a^2$.

Розв'язання. Вивід рівняння здійснимо в прямокутних координатах. Нехай вісь Ox йде по прямій AB вправо, початок координат помістимо по середині відрізка AB , а вісь Oy напрямимо вгору по перпендикуляру до Ox .

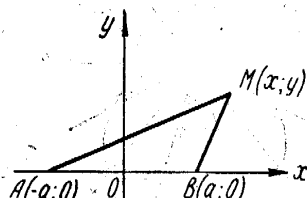


Рисунок 4.4

Оскільки за умовою $AB=2a$, то $A(-a, 0)$; $B(a, 0)$. Виберемо на кривій довільну точку $M(x, y)$ (рис. 4.4).

Згідно з умовою задачі $AM \cdot BM = a^2$, де

$$AM = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}, \quad BM = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}.$$

$$\text{Отже, } \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = a^2.$$

Піднесемо обидві частини цього рівняння до квадрата:

$$(x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2 x^2 = a^4.$$

Після відповідного спрощення отримуємо рівняння шуканої кривої

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2) \quad (4.5)$$

Перейдемо до полярних координат. Помістимо полюс полярної системи координат в початок прямокутної, а полярну вісь сумістимо з додатною піввіссю Ох. Підставимо в рівняння (4.5) значення x і y із формул (3.1), отримаємо

$\rho^4 = 2a^2 \rho^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$, а звідси після простих перетворень отримаємо полярне рівняння кривої

$$\rho = a\sqrt{2\cos 2\varphi}. \quad (4.6)$$

Щоб побудувати цю криву, треба скласти таблицю значень ρ за відомими значеннями φ . При цьому треба мати на увазі, що полярний радіус може набувати тільки дійсних значень. Тому крива не може розміщуватися у тих секторах, де полярний радіус має уявні значення, тобто значення φ від $\varphi = \frac{\pi}{4}$ до $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ і від $\varphi = \frac{5\pi}{4}$ до $\varphi = \frac{7\pi}{4}$. На рис. 4.5 ці сектори заштриховані. Шукана крива зображена на рис. 4.6. Її називають лемніскатою Бернуллі (лемніската по-грецьки – “стрічкова”).

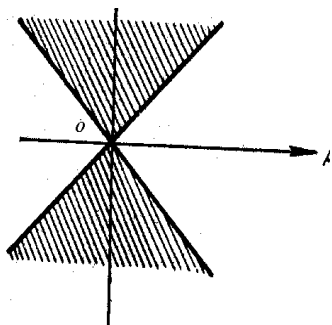


Рисунок 4.5

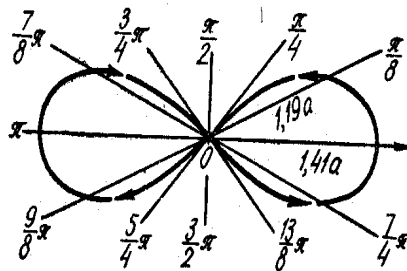


Рисунок 4.6

5 Для тих, кому цікаво знати

5.1 Лемніската і рівнобічна гіпербола

Існує цікавий зв'язок між лемнісатою і рівнобічною гіперболою. На рис. 5.1 зображена лемніката: $F_1 F_2 = 2a$; $p = MF_1 \cdot MF_2 = a^2$. Будемо з точки O проводити різні промені і відмічати на них точки перетину з лемнісатою.

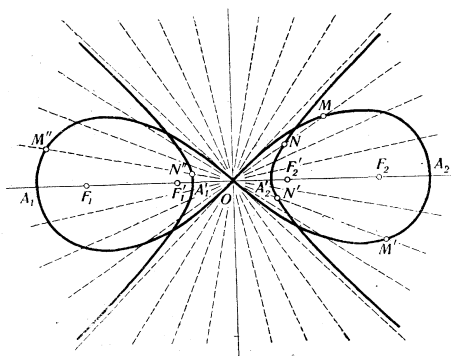


Рисунок 5.1

Візьмемо будь який промінь, що перетинає лемнісату в точці M . Відкладемо на цьому промені від точки O відрізок $ON = 1/OM$. Якщо таку побудову проробити для кожного променя, то точки N , відповідні точкам M лемніскати, всі розмістяться на рівнобічній гіперболі з фокусами F'_1 і F'_2 таких, що $OF'_1 = \frac{1}{OF_1}$ і $OF'_2 = \frac{1}{OF_2}$.

Коли величину незмінного добутку p взяти іншу ($p \neq a^2$), то лемніската змінить свій вигляд. Якщо $p < a^2$, то лемніската складається з двох овалів, з яких один має всередині точку F_1 , а другий – точку F_2 (рис. 5.2).

У випадку $a^2 < p < 2a^2$ лемніската має вигляд бісквіта (рис. 5.3).

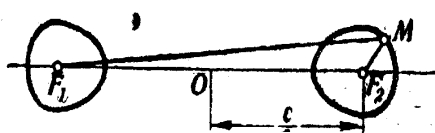


Рисунок 5.2

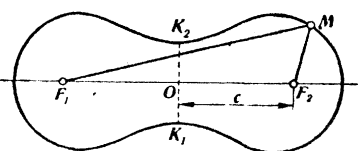


Рисунок 5.3

Коли p мало відрізняється від a^2 , то “талія бісквіта” K_1K_2 дуже вузька і вигляд кривої близький до “лежачої вісімки”. Коли ж p мало відрізняється від $2a^2$, то “бісквіт” майже не має “талії”, а при $p \geq 2a^2$ талія зовсім зникає і лемніската набуває вигляду овала (рис. 5.4; тут для порівняння зображені також інші лемніскати).

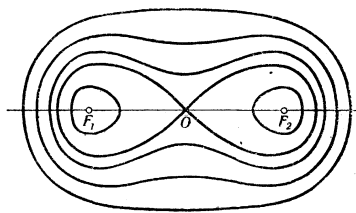


Рисунок 5.4

5.2 Кардіоїда

Цікаву властивість має кардіоїда. Якщо з'єднати будь-яку точку M кардіоїди з її загостренням M_0 (рис. 5.5), то завжди відрізок хорди KM дорівнюватиме діаметру рухомого кола. Звідси випливає побудова кардіоїди: побудуємо коло радіуса a і візьмемо на ньому довільну точку M_0 (рис.5.6). Через точку M_0 проведемо в'язку променів (на нашому рисунку зображено 7 променів; чим більше взяти променів, тим точнішою вийде крива). Від точок перетину променів з колом відкладемо вздовж кожного променя в обидва боки відрізки, рівні діаметру. Геометричним місцем одержаних таким чином точок буде крива, зображена контурною лінією. Частина її, розміщена справа від прямої AB , на основі вище сказаного, є дугою кардіоїди. Читачеві пропонується довести, що ліва (штрихована) частина контурної лінії доповнює цю дугу до повної кардіоїди.

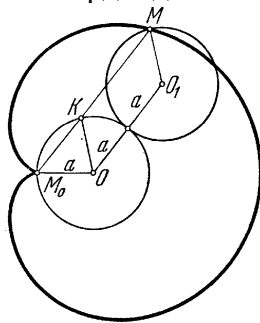


Рисунок 5.5

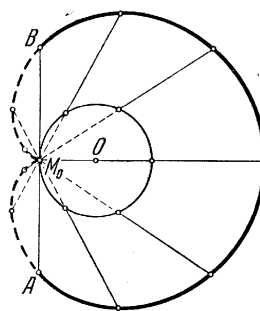


Рисунок 5.6

5.3 Епіциклоїди

Епіциклоїда (“підциклоїда”) – крива, яку описує зафіксована точка кола, що котиться без ковзання по нерухомому колу зовні.

Нехай радіус рухомого кола a ; нерухоме коло $x^2 + y^2 = b^2$ з радіусом b , а точка M в початковий момент займає положення $A(b; 0)$ (рис.5.7), то епіциклоїді, яку при цьому опише точка M , відповідають параметричні рівняння

$$\begin{cases} x = (a+b)\cos t - a \cos \frac{a+b}{a}t, \\ y = (a+b)\sin t - a \sin \frac{a+b}{a}t, \end{cases} \quad t \in [0; \infty). \quad (5.1)$$

Залежно від співвідношення між радіусами нерухомого і рухомого (напрямого і твірного) кіл будемо отримувати різні, хоча й споріднені, криві (епіциклоїди).

В окремому випадку $b = a$ відповідна крива – уже відома нам кардіоїда (рис.1.9). Із співвідношень (5.1) отримаємо відповідні їй параметричні рівняння

$$\begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t), \\ y = a(2\sin t - \sin 2t), \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi). \quad (5.2)$$

Якщо радіус нерухомого кола в два рази більший від радіуса рухомого ($b=2a$), то одержимо криву з двома загостреннями (рис. 5.8).

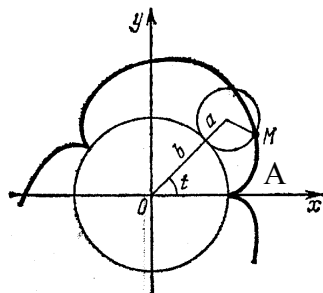


Рисунок 5.7

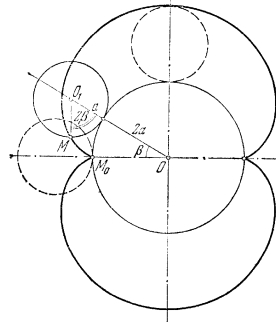


Рисунок 5.8

У випадку, коли нерухомий радіус більший від рухомого в три, чотири або шість разів ($b=3a$; $b=4a$; $b=6a$), отримуватимемо криві, зображені відповідно на рис 5.9. Із співвідношень (5.1) можна записати відповідні їм параметричні рівняння.

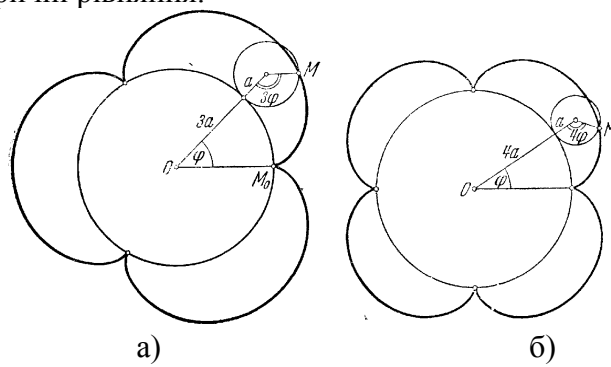


Рисунок 5.9

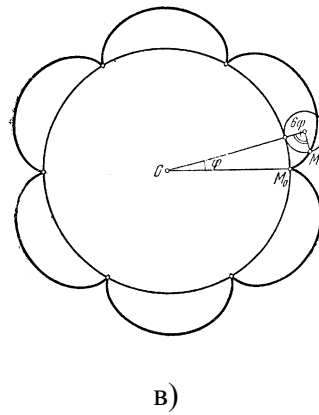


Рисунок 5.9

5.4 Гіпоциклоїди

Гіпоциклоїда (“надциклоїда”) – крива, що описується зафіксованою точкою кола, яке котиться без ковзання всередині іншого нерухомого кола (рис. 5.10).

Нехай радіус рухомого кола a ; нерухоме коло $\delta^2 + \phi^2 = b^2$ з радіусом b , а точка M в початковий момент співпадає з точкою $A(b;0)$ (рис. 5.11), то гіпоциклоїди, яку опише точка M , відповідають параметричні рівняння

$$\begin{cases} x = (b - a)\cos t + a \cos \frac{b-a}{a}t, \\ y = (b - a)\sin t - a \sin \frac{b-a}{a}t, \end{cases} t \in [0; \infty). \quad (5.3)$$

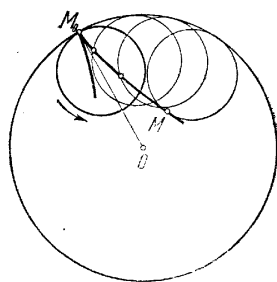


Рисунок 5.10

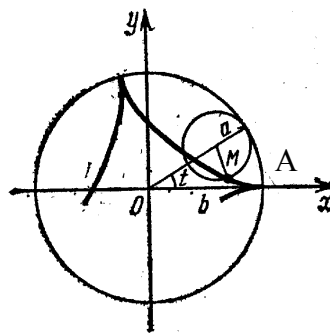


Рисунок 5.11

Залежно від співвідношення між радіусами нерухомого і рухомого кіл будемо отримувати різні криві (гіпоциклоїди).

Якщо радіус рухомого кола буде в два, три, чотири, взагалі в n разів менший від радіуса нерухомого кола, то будемо мати криві з двома, трьома, чотирма, взагалі з n загостреннями.

На рис.5.12 зображені відповідно гіпоциклоїди з двома, трьома, чотирма і шістьма загостреннями.

Пропонуємо читачеві побудувати гіпоциклоїду з двома загостреннями: ви отримаєте цікавий результат.

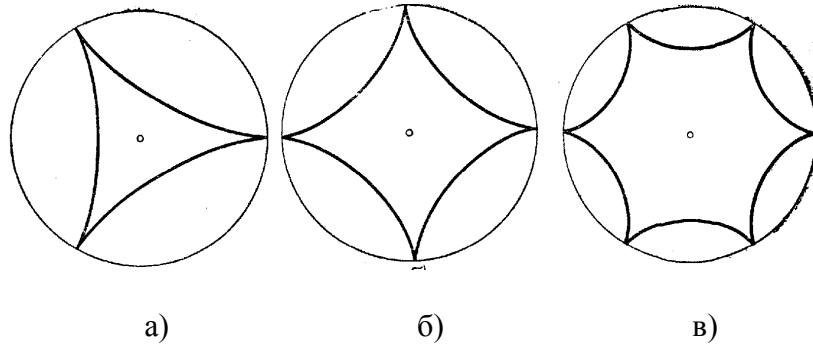


Рисунок 5.12

У випадку $b=4a$ ця крива співпадає з уже відомою астроїдою (рис.1.10), параметричні рівняння якої випливають із рівнянь (5.3).

Якщо $b=3a$, то маємо гіпоциклоїду, яку називають *кривою Штейнера* (рис.5.12). Їй відповідають параметричні рівняння

$$\begin{cases} x = a(2\cos t + \cos 2t), \\ y = a(2\sin t + \sin 2t), \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi). \quad (5.4)$$

Алгебраїчне рівняння кривої має вигляд

$$(x^2 + y^2 + 9a^2)^2 + 8ax(3y^2 - x^2) - 108a^4 = 0. \quad (5.5)$$

Крива Штейнера – алгебраїчна крива четвертого порядку.

Післямова

Розглянуті криві відомі людству вже більше 20 віків. Основні властивості еліпсів, гіпербол і парабол описані в праці «Конічні перерізи» старогрецького математика Апполонія Пергського, який жив майже водночас з Евклідом (III ст. до н. е.).

Вивченням траєкторій складних кругових рухів з допомогою складних циклоїдних кривих в міру нагромадження астрономічних спостережень обростало все більшим числом поправок до того часу, поки відомий німецький астроном і математик Йоганн Кеплер (1571 – 1630) не встановив, що траєкторії планет з великою точністю – еліпси, в одному з фокусів яких знаходиться Сонце.

Циклоїду, наприклад використовували вчені XVII ст. при розробці прийомів дослідження кривих ліній, - тих прийомів, які привели до відкриття диференціального та інтегрального числень. Вона стала одним із «наріжних каменів», на яких Ньютон, Лейбніц і їх перші послідовники випробували нові математичні методи. Циклоїда виявилась нерозривно зв'язаною з одним із найбільш цікавих періодів в історії математики.

У наші часи циклоїдальні криві використовуються в багатьох технічних розрахунках. Знання цих кривих полегшує вивчення деталей машин. Властивості циклоїдних кривих використовують при побудові профілів зубів шестерень і в багатьох інших питаннях. Зокрема, різноманітні застосування в техніці має кардіоїда. У вигляді кардіоїди виготовляють ексцентрики, кулачки для машин. Її використовують при кресленні зубчатих коліс, а також в оптичній техніці. З чисто прикладної точки зору ці криві заслуговують на серйозну увагу.

Розглянуті лінії можна спостерігати в рослинному світі. Наприклад, насіння в головці соняшника викладене за

спіраллю Архімеда, листя латаття має форму кардіоїди, форма пелюсток окремих квітів близька до лемніскати. Ціла наука – біоніка – вивчає будову організмів, рослин для створення машин, приладів, механізмів, певні дані яких близькі до характеристик згаданих біологічних об'єктів.

Завершуємо короткий огляд про цікаві й важливі криві. Ми розглянули лише деякі з них і ні в якій мірі не вичерпали їх властивостей. А скільки ще кривих не попало в нашу книжечку.

Наша мета полягала в тому, щоб зацікавити студента деякими фактами з неосяжної скарбниці математичних знань, допомогти йому у питаннях визначення і побудови цілого ряду кривих.

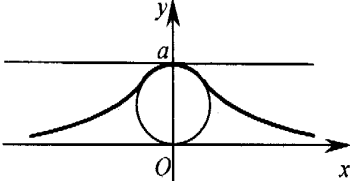
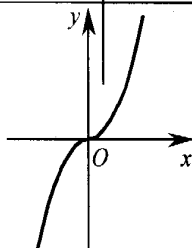
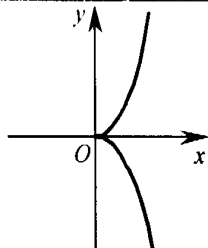
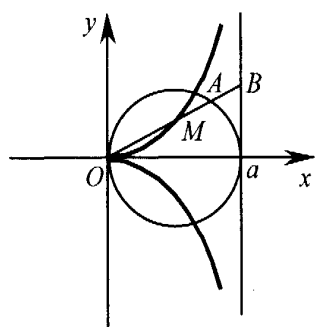
На завершення подаємо таблиці, що ілюструють основний текст (Додаток А) і такі, що доповнюють його (Додатки Б,В,Г), які можна використати при розв'язуванні багатьох різноманітних практичних задач.

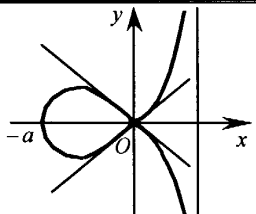
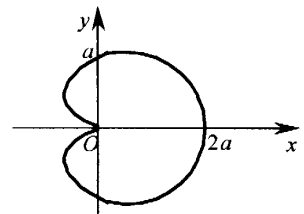
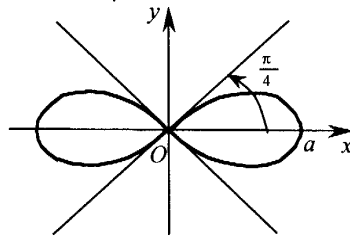
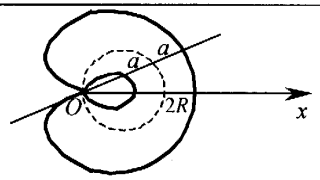
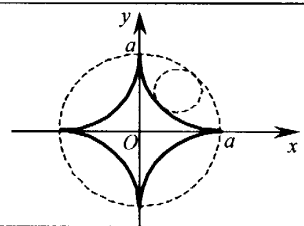
Читач, який захоче розширити набуті ним тут відомості, може звернутись до книжки польського математика Г.Штейнгауза [7] або до більш докладної книжки популяризатора математичної науки Г.М. Бермана [1].

Додаток А
Деякі важливі криві

	Назва, рівняння	Графік
1	2	3
Алгебраїчні криві другого порядку		
1	Еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$ $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t. \end{cases}$	
2	Гіпербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;$ $\begin{cases} x = a \operatorname{ch} t, \\ y = b \operatorname{sh} t \end{cases} \text{ (для} \\ \text{правої гілки)}$	
3	Парабола $y^2 = 2px$	
Алгебраїчні криві третього порядку		
4	Декартів лист $x^3 + y^3 - 3axy = 0;$ $\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3}, \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3}. \end{cases}$	

Продовження додатка А

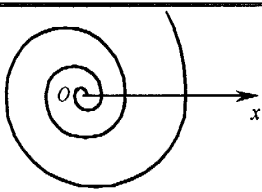
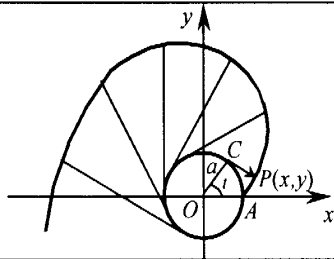
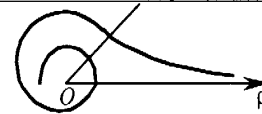
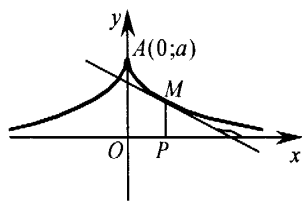
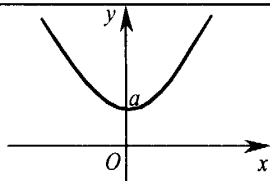
1	2	3
5	Локон Аньєзі (верз'єра) $y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}.$	
6	Кубічна парабола $y = x^3.$	
7	Напівкубічна парабола $y = x^{\frac{3}{2}}.$	
8	Цисоїда Диоклеса $y^2 = \frac{x^3}{a-x};$ $\begin{cases} x = \frac{at^2}{1+t^2}, \\ y = \frac{at^3}{1+t^2}; \end{cases}$ $\rho = \frac{a \sin^2 \varphi}{\cos \varphi}.$	

1	2	3
9	Строфоїда $y^2 = x^2 \frac{a+x}{a-x};$ $\rho = -\frac{a \cos 2\varphi}{\cos \varphi}.$	
Алгебраїчні криві четвертого і вищих порядків		
10	Кардіоїда $(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = 4a(x^2 + y^2);$ $\rho = a(1 + \cos \varphi).$	
11	Лемніската Бернуллі $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2);$ $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi.$	
12	Завиток Паскаля $(x^2 + y^2 - 2Rx)^2 = a^2(x^2 + y^2);$ $\rho = 2R \cos \varphi + a.$	
13	Гіпоциклоїда (астроїда) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}};$ $\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t. \end{cases}$	

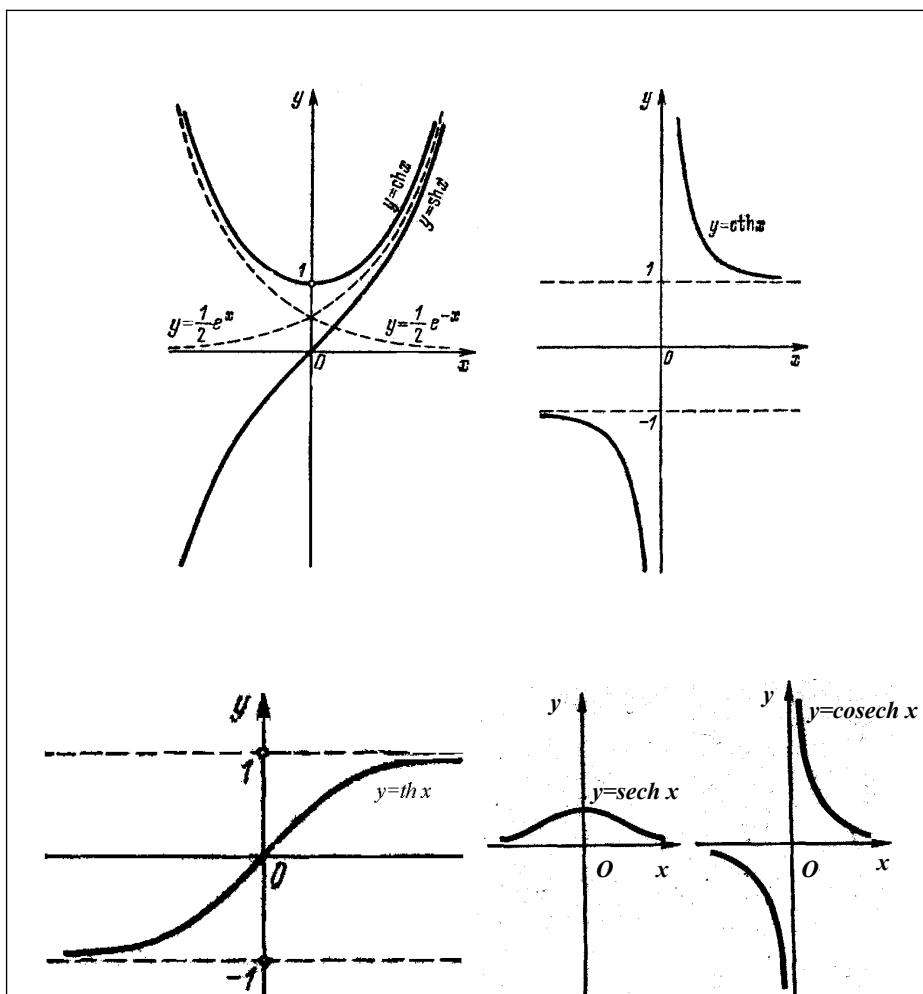
Продовження додатка А
Продовження додатка А

1	2	3
14	Трипелюсткова троянда $\rho = a \sin 3\varphi$ ($\rho \geq 0$).	
15	Чотирипелюсткова троянда $\rho = a \sin 2\varphi $.	
Трансцендентні криві		
16	Циклоїда $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$	
17	Спіраль Архімеда $\rho = a\varphi$ ($\rho \geq 0$).	
18	Гіперболічна спіраль $\rho = \frac{a}{\varphi}$ ($\rho > 0$).	

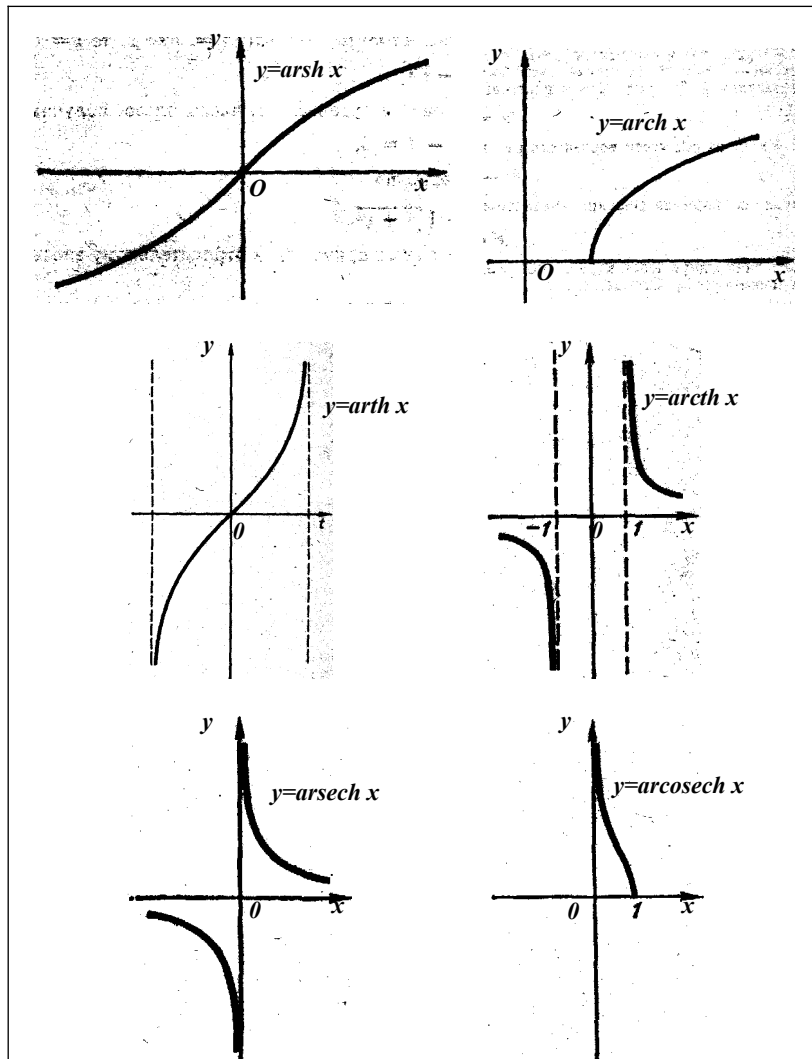
Продовження додатка А

1	2	3
19	Логарифмічна спіраль $\rho = e^{a\varphi}$.	
20	Евольвента (розгортка) кола $\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t), \\ y = a(\sin t - t \cos t). \end{cases}$	
21	Жезл $\rho = \frac{a}{\sqrt{\varphi}}$.	
22	Трактриса $x = a \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y} + \sqrt{a^2 - y^2};$ $\begin{cases} x = a \left(\ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t \right), \\ y = a \sin t. \end{cases}$	
23	Ланцюгова лінія $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}.$	

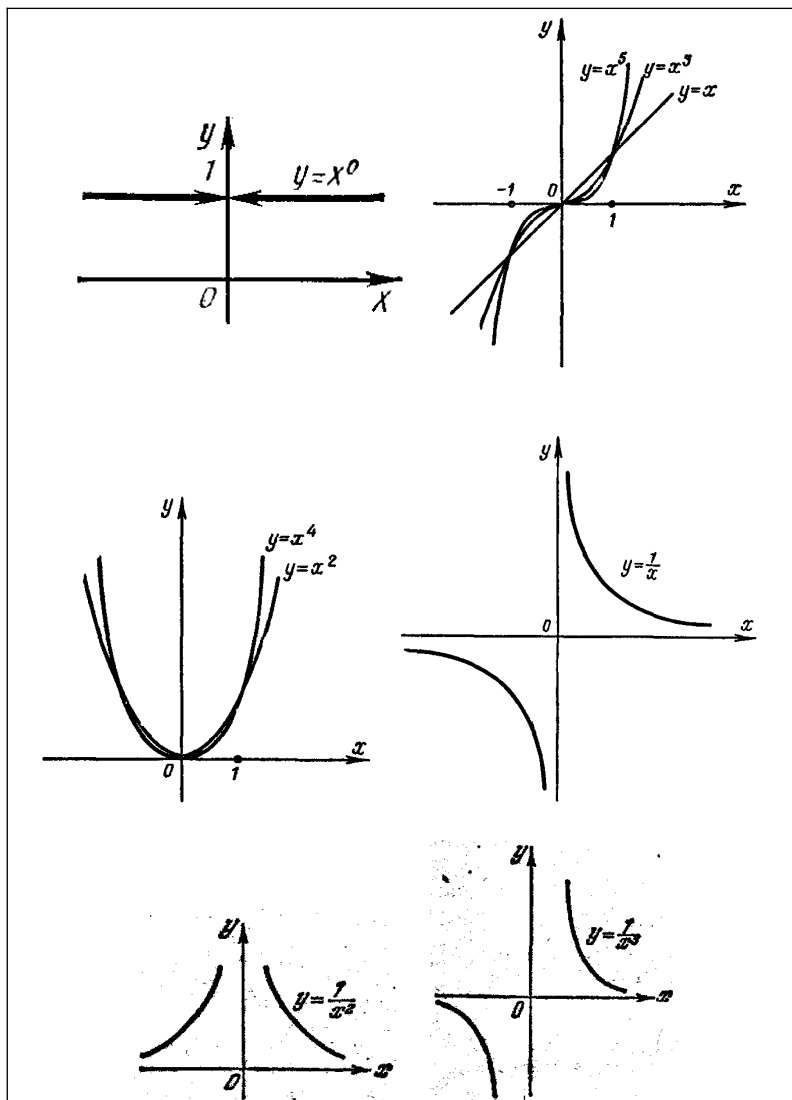
Додаток Б Гіперболічні функції



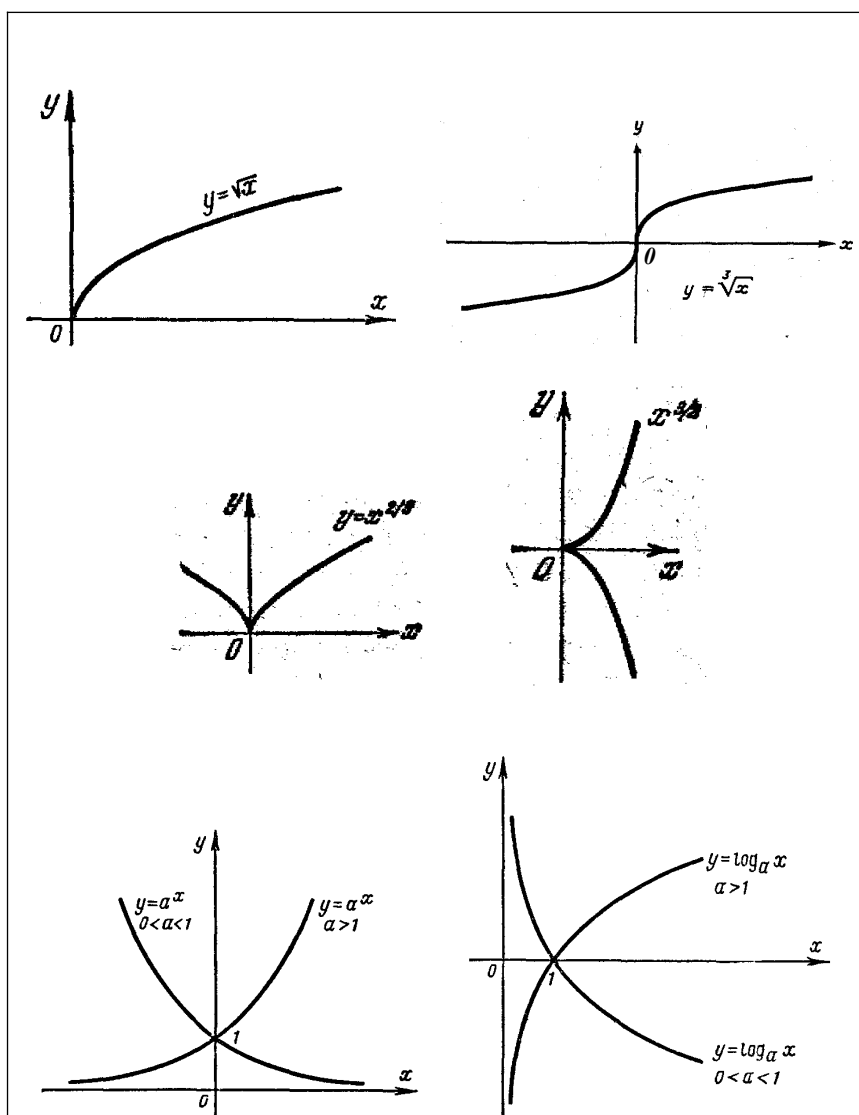
Додаток В
Обернені гіперболічні функції



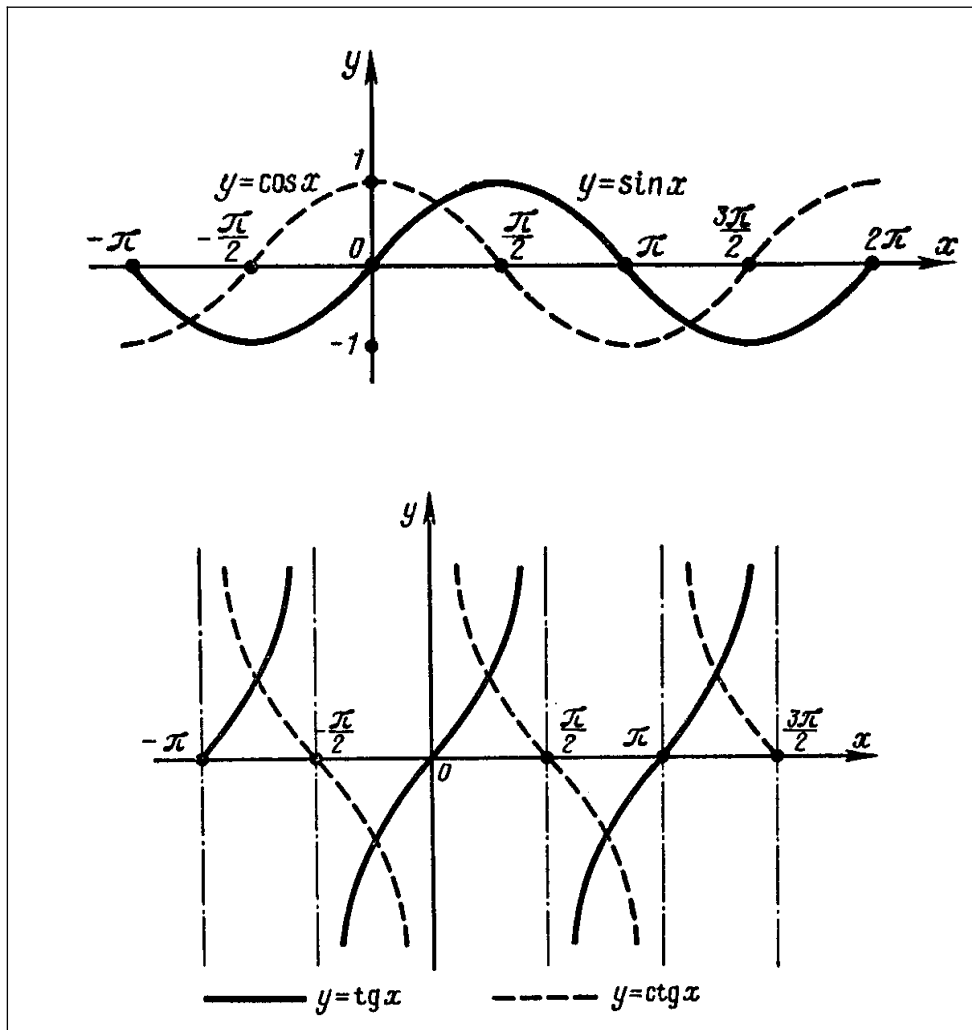
Додаток Г
Основні елементарні функції



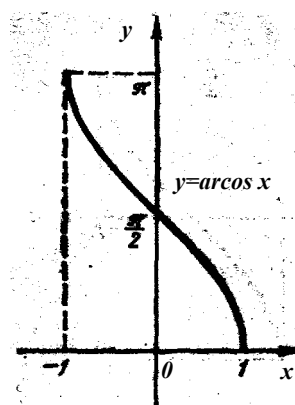
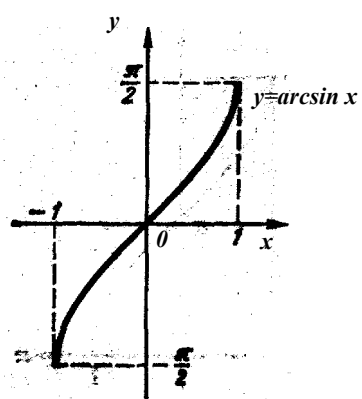
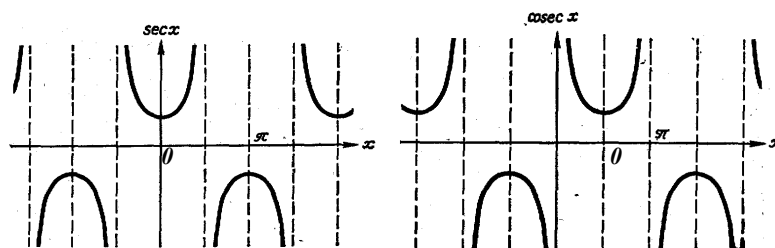
Продовження додатка Г



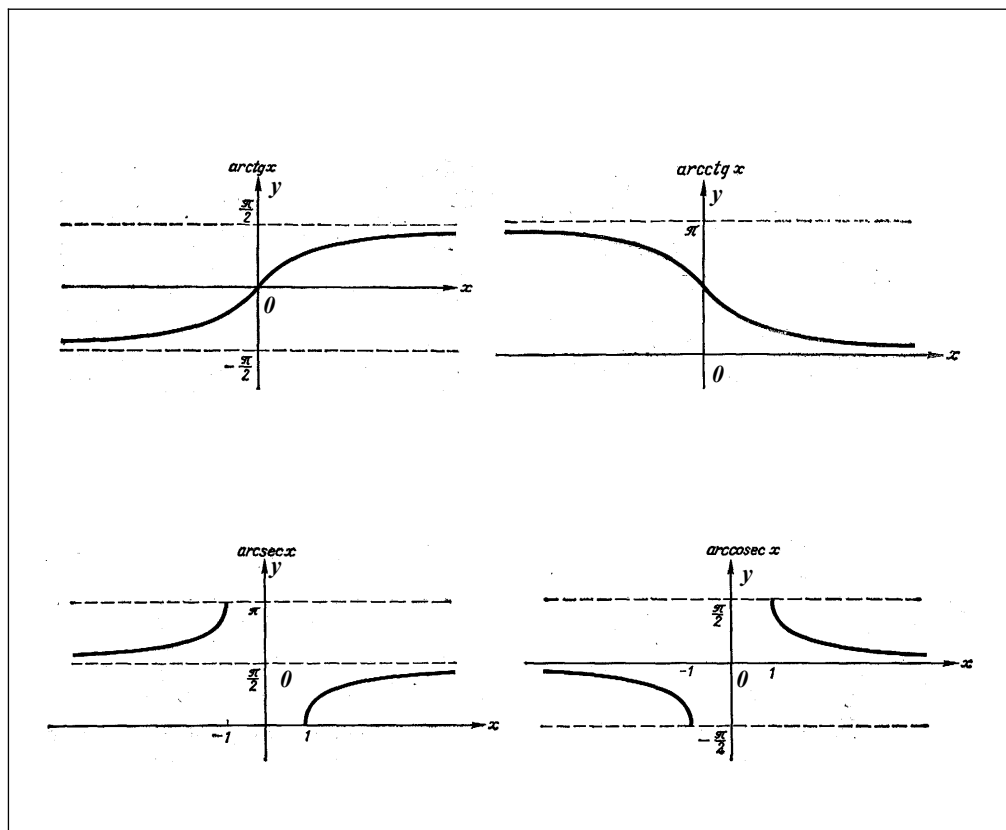
Продовження додатка Г



Продовження додатка Г



Продовження додатка Г



Перелік використаних джерел

1. Берман Г.М. Циклоида. – М.: «Наука», 1980.–115 с.
2. Бородин О.І., Бугай А.С. Біографічний словник діячів у галузі математики. – К.: «Радянська школа», 1973. – 550 с.
3. Васильев Н.В., Гутенмахер В.Л. Прямые и кривые. – М.: «Наука», 1978. – 160 с.
4. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике.-Харьков: ХОТКЗГУ им. А. М. Горького, 1973.- 204 с.
5. Пак В.В., Носенко Ю.Л. Вища математика . – К.: «Либідь», 1996. – 440 с.
6. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеева Г.М. та ін. Вища математика у прикладах та задачах.Ч.2. – Харків: ХНУРЕ, 2002. – 440с.
7. Штейнгауз Г. Математический калейдоскоп. – М.: «Гостехиздат», 1950. – 150 с.
8. Липман Берс. Математический анализ. – М.: «Высшая математика», 1975. – 520с.

МВ

Лялюк Д. Ф., Шегда Л. М. Цікаві криві: Методичні вказівки. – Івано – Франківськ: Факел, 2005. – 49 с.

Розглядаються питання побудови кривих другого і вищих порядків. Рівняння кривих подаються в прямокутних декартових і полярних координатах, в параметричному вигляді. Розроблені у відповідності з робочою програмою навчальної дисципліни та навчальним планом підготовки фахівців за спеціальністю «Екологія та охорона навколишнього середовища». Можуть бути використані студентами денної та заочної форм навчання.

Рецензент канд. техн. наук, доцент кафедри вищої математики ІФНТУНГ Р. Д. Сисак.

Голова експертно – рецензійної комісії інституту фундаментальних дисциплін П. Д. Романко

Завідувач кафедри вищої математики В. М. Мойсишин

Нормоконтролер О. Г. Гургула

Коректор Н. Ф. Будуйкевич

Заступник директора НТБ з комп'ютеризації В. В. Бабійчук

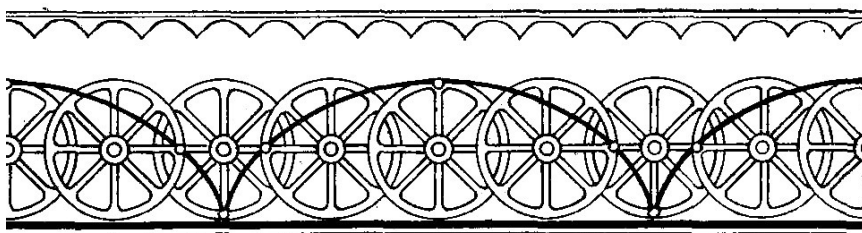
Дане видання – власність ІФНТУНГ. Забороняється тиражувати і розповсюджувати.

**Івано – Франківський національний технічний
університет нафти і газу**

Д.Ф. Лялюк, Л.М. Шегда

Вища математика

ЦІКАВІ КРИВІ



МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

2005