

Л.Р.Смолувик, А.М.Краснодембський,
К.В.Гресько, В.П.Нісонський, О.М.Витвицька

Дослідження операцій

Конспект лекцій

1. Метод Жордана-Гауса розв'язування СЛАР.

Розглянемо систему m лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (1)$$

Випишемо розширену матрицю системи виду:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Суть методу Жордана-Гауса полягає в тому, щоб звести систему (1) до базисної форми виду

$$\begin{cases} x_1 + \dots + a'_{1,m+1}x_{m+1} + \dots + a'_{1,n}x_n = b'_1, \\ x_2 + \dots + a'_{2,m+1}x_{m+1} + \dots + a'_{2,n}x_n = b'_2, \\ \dots \\ x_m + a'_{m,m+1}x_{m+1} + \dots + a'_{m,n}x_n = b'_m. \end{cases} \quad (2)$$

за допомогою елементарних перетворень рівнянь системи. При цьому змінні $x_1, \dots, x_m$ є базисними, а $x_{m+1}, \dots, x_n$ – вільними. В системі (1) базисним змінним відповідають одиничні базисні вектори:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

З системи (2) визначимо базисні змінні:

$$\begin{cases} x_1 = b'_1 - a'_{1,m+1}x_{m+1} - \dots - a'_{1,n}x_n, \\ x_2 = b'_2 - a'_{2,m+1}x_{m+1} - \dots - a'_{2,n}x_n, \\ \dots \\ x_m = b'_m - a'_{m,m+1}x_{m+1} - \dots - a'_{m,n}x_n. \end{cases} \quad (3)$$

Система (3) задає загальний розв'язок системи (1), де вільні змінні можуть бути довільними числами.

Частинний розв'язок, одержаний з (3) при $x_{m+1} = \dots = x_n = 0$ називається базисним розв'язком. Система може мати декілька базисних розв'язків. Базисний розв'язок, у якого всі змінні невід'ємні, називається допустимим базисним розв'язком.

Алгоритм методу Жордана-Гауса.

1. Вибрати провідний елемент $a_{rs} \neq 0$.
2. Поділити всі елементи провідного рядка на a_{rs} , а всі елементи провідного стовпця замінити нулями.
3. Всі інші елементи розширеної матриці системи знайти за правилом прямокутника: щоб знайти елемент a'_{ij} , треба від елемента a_{ij} відняти добуток коефіцієнтів, які стоять навпроти нього у провідних стовпці і рядку, поділений на провідний елемент, розміщений по діагоналі від елемента a_{ij} ,

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{rj} \cdot a_{is}}{a_{rs}}.$$



4. Щоб виділити наступну базисну змінну, обирати провідним ненульовий елемент у будь-якому порядку (крім r -го) і повторити кроки 1-3.

Базисних змінних вибирають стільки, який ранг системи векторів $A_1, \dots, A_m$.

Зауваження 1.

Якщо в процесі виключень з'явиться рівняння, у якому ліва частина дорівнює нулю, а вільний член відмінний від нуля – це ознака несумісності системи.

Зауваження 2.

Якщо ліва і права частина деякого рівняння перетворюється в нуль, то воно є лінійною комбінацією решти, і його треба виключити з розгляду. Таким чином, в процесі жорданових перетворень (застосовуються як у випадку $m = n$, так і у випадку $m < n$) або встановлюється несумісність системи, або знаходяться її розв'язки.

Приклад.

Розв'язати систему. Скористаємося методом Жордана-Гауса, записуючи все за допомогою таблиць.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 - 8x_2 + 8x_3 + 7x_4 = 3, \\ 2x_1 - 4x_2 + 8x_3 + 8x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 + 8x_4 = 1. \end{cases}$$

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	- 3	2	2	1
3	- 8	8	7	3
2	- 4	8	8	0
2	- 3	10	8	1

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	- 3	2	2	1
0	1	2	1	0
0	2	4	4	- 2
0	3	6	4	- 1

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	0	8	5	1
0	1	2	1	0
0	0	0	2	- 2
0	0	0	1	- 1

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	0	8	0	6
0	1	2	0	1
0	0	0	0	0
0	0	0	1	- 1

x_1, x_2, x_4 – базисні змінні;

x_3 – вільна змінна.

$$\begin{cases} x_1 + 8x_3 = 6, \\ x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_4 = -1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 6 - 8x_3, \\ x_2 = 1 - 2x_3, \\ x_4 = -1. \end{cases}$$

Відповідь: $x_1 = 6 - 8x_3$; $x_2 = 1 - 2x_3$; $x_4 = -1$; $x_3 \in R$.

2. Математичні моделі економічних задач. Різні форми запису задач лінійного програмування. Перехід від однієї форми задач до іншої.

Задачі математичного програмування діляться на:

Лінійні (в яких $f, g_1, \dots, g_n$ - лінійні функції) та нелінійні (у іншому випадку); стохастичні (враховується випадковий характер економічних процесів) і детерміновані (враховують місце усередині значення параметрів, нехтують випадковостями); динамічні (розглядається розвиток економічної системи протягом декількох періодів часу) і статичні (розглядається один).

Розвиток математичного програмування розпочався у 30-х роках з виходом у світ праць радянського вченого Л.В.Канторовича. Лінійне програмування оформилося як окремий розділ прикладної математики в 40-50-х роках ХХ ст.. і вважається повністю дослідженим. Тепер 80% всіх задач оптимізації, що розв'язуються на практиці, є задачами лінійного програмування. За досягнення у цій галузі були присуджені нобелівські премії.

2.1 Лінійне програмування

Лінійне програмування – це наука про методи відшукування найбільших та найменших значень лінійної цільової функції при обмеженнях, що задаються системою лінійних нерівностей (рівнянь, або рівнянь і нерівностей).

Наприклад, задача лінійного програмування може мати вигляд:

$$f = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \rightarrow \max ; \quad (1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (2)$$

Де f – цільова функція, $c_1, c_2, \dots, c_n$ – параметри задачі, $x_1, x_2, \dots, x_n$ – керовані змінні, (2) – системи обмежень.

Кожен розв’язок системи (2) називається **допустимим розв’язком** (або допустимим планом). Допустимий розв’язок, який дає максимум цільової функції, називається оптимальним розв’язком задачі (1), (2).

Зауважимо, що у системі (2) можуть бути нерівності замість деяких або всіх рівностей. Крім цього, можуть задаватися умови на невід’ємність керованих змінних.

Звичайно, математична модель не може врахувати всі особливості операцій. Вона вдала, якщо з одного боку, адекватно відображає суть задачі, з іншого – досить проста для розв’язання.

Математичні моделі дослідження операцій можна класифікувати в залежності від призначення та змісту модельованої операції; сенсу розв’язуваної проблеми; використовованого математичного апарату.

2.2 Постановка задач лінійного програмування

Побудова математичних моделей деяких економічних задач.

Задача про використання сировини.

Для виготовлення двох видів продукції P_1 і P_2 використовуються три види сировини S_1 , S_2 , S_3 .

Дані виробництва наведені у таблиці:

Вид сировини	Кількість одиниць сировини на виготовлення одиниці продукції		Запаси сировини
	P_1	P_2	
S_1	2	5	20
S_2	8	5	40
S_3	5	6	30
Прибуток від одиниці продукції	50	40	

Скласти такий план випуску продукції, щоб при її реалізації одержати максимальний прибуток.

Нехай x_1 - кількість одиниць продукції P_1 , x_2 – продукції P_2 .

Тоді, враховуючи кількість одиниць сировини, що витрачається на виготовлення одиниць продукції, а також запаси сировини, одержимо систему обмежень

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 20, \\ 8x_1 + 5x_2 \leq 40, \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30. \end{cases}$$

Тобто, кількість сировини, що витрачається на виробництво продукції, не повинна перевищувати запасів. Якщо продукція P_j не випускається, то $x_j = 0$, інакше $x_j \geq 0$. Отже, обмеження на змінні додаються такі:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Реалізація x_1 одиниць продукції P_1 дає прибуток $50x_1$, реалізація x_2 одиниць P_2 – $40x_2$, тому сумарний прибуток $f = 50x_1 + 40x_2$.

Отже, математична модель задачі про використання сировини така:

$$f = 50x_1 + 40x_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 20, \\ 8x_1 + 5x_2 \leq 40, \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Зауваження. Задачу про використання сировини можна поширити на випадок n видів продукції і m видів сировини:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0.$$

Задачі про розкрій.

З листового прокату треба вирізати заготовки двох типів B_1 і B_2 для виробництва 60 шт виробів. Для одного виробу треба 3 заготовки типу B_1 і 8 заготовок типу B_2 . Є чотири варіанти A_1, A_2, A_3, A_4 розкрою листа, які задані таблицею.

Заготовка	Варіант розкрою				Потреби
	A_1	A_2	A_3	A_4	
B_1	4	3	2	1	$3 \cdot 60 = 180$
B_2	0	4	6	10	$8 \cdot 60 = 480$
Відходи	12	5	3	0	

Скласти оптимальний план розкрою, тобто вказати, скільки листів розкроювати кожним варіантом, щоб одержати необхідну кількість заготовок кожного типу при мінімальних відходах.

Нехай x_j - кількість листів для розкрою варіантом A_j , $j = 1, 2, 3, 4$. Математична модель задачі

$$f = 12x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 0 \cdot x_4 \rightarrow \min ;$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 180, \\ 0 \cdot x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 10x_4 = 480; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Складніші постановки можуть включати вимоги цілочисельності x_j , відображати наявність листів різного формату, враховувати інші корисні якості.

Узагальнена задача

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min ;$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Задача про складання кормового раціону.

При відгодівлі кожна тварина повинна щоденно стримувати не менше 9 одиниць поживної речовини S_1 , не менше 8 одиниць речовини S_2 і не менше 12 одиниць речовини S_3 . Для складання раціону використовують два види корму P_1 і P_2 . Вміст поживних речовин в кормах і вартість кормів наведено у таблиці.

Поживні речовини	Кількість одиниць поживної речовини в 1 кг корму		Необхідна кількість поживних речовин
	P_1	P_2	
S_1	3	1	9
S_2	1	2	8
S_3	1	6	12
Вартість 1 кг корму	4	6	

Скласти добовий раціон потрібної поживності, причому витрати повинні бути мінімальні.

Максимальний прибуток.

x_1 і x_2 – кількість корму P_1 і P_2 в добовому раціоні.

Математична модель

$$f = 4x_1 + 6x_2 \rightarrow \min ;$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9, \\ x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_1 + 6x_2 \geq 12; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Задачу також можна узагальнити на випадок n кормів і m поживних речовин:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \geq b, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \dots, \quad x_n \geq 0.$$

3. Різні форми запису задач лінійного програмування.
Перехід від однієї форми запису до іншої.

По формі запису серед задач лінійного програмування виділяють: стандартні (або симетричні), канонічні, загальні.

Стандартна задача – це задача дослідження цільової функції на максимум з обмеженнями – нерівностями типу „ $\leq$ ” і невід’ємними змінними. Вона має вигляд:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max ; \quad (1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m; \end{cases} \quad (2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3)$$

Задачу можна подати за допомогою:

$$\text{а) матричного запису: } f = C \cdot X \rightarrow \max ; \quad (1)'$$

$$A \cdot X \leq B ; \quad (2)'$$

$$X \geq 0 ; \quad (3)'$$

$$\text{де } C = (c_1, c_2, \dots, c_n);$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

$$\text{б) векторного запису:} \quad f = C \cdot X \rightarrow \max; \quad (1)''$$

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n \leq B; \quad (2)''$$

$$X \geq 0; \quad (3)''$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}; \quad \dots; \quad A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Канонічна задача – це задача максимізації цільової функції при обмеженнях-рівностях, при чому всі змінні невід’ємні. У канонічній задачі кількість невідомих завжди більша за кількість рівнянь ($n > m$).

Загальний вигляд канонічної задачі:

$$f = C \cdot X \rightarrow \max; \quad (4)$$

$$A \cdot X = B; \quad (5)$$

$$X \geq 0. \quad (6)$$

Частинним випадком канонічної задачі є задача в базисній формі, тобто задача (1)-(3) у якій $B \geq 0$ і матриця системи обмежень A містить одиничну матрицю розмірністю m ($m < n$). Задача має вигляд:

$$f = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max ;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + \bar{a}_{1,m+1} x_{m+1} + \bar{a}_{1,n} x_n = \bar{b}_2, \\ x_2 + \bar{a}_{2,m+1} x_{m+1} + \bar{a}_{2,n} x_n = \bar{b}_2, \\ \dots \\ x_m + \bar{a}_{m,m+1} x_{m+1} + \bar{a}_{m,n} x_n = \bar{b}_m; \\ x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \quad x_n \geq 0; \\ b_1 \geq 0; \quad b_2 \geq 0; \quad b_n \geq 0. \end{array} \right.$$

Загальною задачею лінійного програмування є задача, у якій в систему обмежень входять як рівності так і нерівності, вимога невід'ємності накладається на усі змінні. Стандартна і канонічна задачі входять в клас загальних задач.

Задача має вид:

$$f = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max(\min); \quad (7)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i \in \{1, \dots, m_1\}; \quad (8)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i \in \{m_1 + 1, \dots, m_2\}; \quad (9)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i \in \{m_2 + 1, \dots, m\}; \quad (10)$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, n_1\}, \quad (11)$$

$$x_j \text{ - довільні, } j \in \{n_1 + 1, \dots, n\}. \quad (12)$$

На практиці більшість економічних задач зводяться до побудови стандартних і загальних задач. Однак, основні методи розв'язування розроблені для канонічних задач. Тому виникає потреба перетворювати задачі лінійного програмування з однієї форми в іншу. Задачу мінімізації можна формально замінити на задачу максимізації і навпаки за допомогою рівностей:

$$\max f(x) = - \min(-f(x));$$

$$\min f(x) = - \max(-f(x)).$$

Основним залишається перетворення системи обмежень.

Нерівності (5) множенням лівих і правих частин на (-1) можна перетворити в нерівності (6) і навпаки. Якщо в задачі деяка змінна довільного знаку, то її подають у вигляді різниці двох невід'ємних змінних: $x_k = \overline{x_k} - \underline{x_k}$, де $\overline{x_k} \geq 0$ і $\underline{x_k} \geq 0$. У випадку, коли деяка змінна $x_p \leq 0$, то її заміняють на $\underline{x_p} = -x_p$, де $\underline{x_p} \geq 0$.

Існують такі способи перетворень.

1. Перехід від стандартної до канонічної форми здійснюється шляхом введення додаткових невід'ємних змінних $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ так, щоб система нерівностей перейшла в систему рівнянь:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j + x_{n+1} = b_1, \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j + x_{n+2} = b_2, \\ \dots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j + x_{n+m} = b_m; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n+m.$$

При цьому нова система обмежень буде мати m рівнянь і $(m+n)$ змінних.

Якщо $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, x_{n+1}^*, \dots, x_{n+m}^*)$ є розв'язком канонічної задачі, то $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ є розв'язком стандартної задачі.

2. Перехід від канонічної до стандартної задачі можна здійснити двома способами. Першим – кожен рівність

$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$ замінити однією з нерівностей:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, \\ - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq -b_i; \end{cases} \quad \begin{cases} - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq -b_i, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i. \end{cases}$$

Другий метод полягає у зменшенні кількості невідомих за допомогою методу Жордана-Гаусса: в системі обмежень канонічної задачі перетворимо змінні $x_1, x_2, \dots, x_m$ у базисні. Одержимо систему (13), з якої знайдемо базисні змінні:

$$\begin{cases} x_1 = \bar{b}_1 - \bar{a}_{1,m+1}x_{m+1} - \dots - \bar{a}_{1n}x_n \geq 0, \\ x_2 = \bar{b}_2 - \bar{a}_{2,m+1}x_{m+1} - \dots - \bar{a}_{2n}x_n \geq 0, \\ \dots \\ x_m = \bar{b}_m - \bar{a}_{m,m+1}x_{m+1} - \dots - \bar{a}_{mn}x_n \geq 0; \end{cases} \quad (13)$$

оскільки $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_n \geq 0$, то з останньої системи
ВЗЯВШИ $x_1 = \dots = x_m = 0$ одержимо:

$$\begin{cases} \bar{a}_{1,m+1}x_{m+1} + \dots + \bar{a}_{1n}x_n \leq \bar{b}_1, \\ \bar{a}_{2,m+1}x_{m+1} + \dots + \bar{a}_{2n}x_n \leq \bar{b}_2, \\ \dots \\ \bar{a}_{m,m+1}x_{m+1} + \dots + \bar{a}_{mn}x_n \leq \bar{b}_m. \end{cases}$$

Представивши систему (13) в цільову функцію,
одержимо

$$f = \bar{c}_{m+1}x_{m+1} + \bar{c}_{m+2}x_{m+2} + \dots + \bar{c}_n x_n \rightarrow \max.$$

Таким чином одержали стандартну задачу.

Приклад 1.

Звести до канонічного виду задачу лінійного програмування.

$$\begin{aligned} f &= -4x_1 + 3x_2 - 5x_3 \rightarrow \max; \\ \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -7 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 5; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 8 \end{cases} \end{aligned}$$

Відомо, що $x_1 \geq 0$, $x_3 \leq 0$;

змінні: $\bar{x}_2 \geq 0$, $\bar{x}_2 \geq 0$ і $\bar{x}_3 \geq 0$:

$$\bar{x}_3 = -x_3;$$

$$x_2 = \bar{x}_2 - \bar{x}_2 \geq 0.$$

Крім того, введемо дві додаткові змінні $x_4 \geq 0$ і $x_5 \geq 0$, щоб нерівності перетворити в рівності.

Задача набуде вигляду:

$$f = 4x_1 - 3\bar{x}_2 + 3\bar{x}_2 - 5x_3 \rightarrow \max ;$$

$$\begin{cases} -3x_1 - 2\bar{x}_2 + 2\bar{x}_2 - 3x_3 = 7, \\ 2x_1 - \bar{x}_2 + \bar{x}_2 - 2x_3 - x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3\bar{x}_2 - 3\bar{x}_2 + x_3 + x_5 = 8; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad \bar{x}_2 \geq 0, \quad \bar{x}_2 \geq 0, \quad \bar{x}_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0.$$

Приклад 2.

Звести до стандартного виду задачу лінійного програмування.

$$f = -x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \max ;$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 9; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 4\}.$$

Зменшимо кількість невідомих:

$$\begin{array}{rrrrr} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 9 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 3x_4 = 3, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 3 + x_3 - 3x_4, \\ x_2 = 1 - x_3 + x_4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_4 - x_3 \leq 3, \\ x_3 - x_4 \leq 1; \end{cases}$$

$$f(x) = -(3 + x_3 - 3x_4) + (1 - x_3 + x_4) - x_3 \rightarrow \max.$$

Відповідь: $f(x) = -3x_3 + 4x_4 - 2 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} 3x_4 - x_3 \leq 3, \\ x_3 - x_4 \leq 1; \end{cases}$$

$$x_3 \geq 0; \quad x_4 \geq 0.$$

4. Властивості задачі лінійного програмування

4.1 Опуклі множини

Зведемо деякі поняття з теорії множин.

Розглянемо точки $A_1(x'_1, x'_2)$, $A_2(x''_1, x''_2)$. Точка $A(x_1, x_2)$ лежить на відрізку A_1A_2 , якщо вектори $\overrightarrow{A_1A}$ і $\overrightarrow{A_1A_2}$ колінеарні, тобто їх координати пропорційні:

$$\frac{x_1 - x'_1}{x''_1 - x'_1} = \frac{x_2 - x'_2}{x''_2 - x'_2} = \alpha;$$

$$\begin{cases} x_1 = (1 - \alpha)x'_1 + \alpha x''_1, \\ x_2 = (1 - \alpha)x'_2 + \alpha x''_2; \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x_1 = \alpha_1 x'_1 + \alpha_2 x''_1, \\ x_2 = \alpha_1 x'_2 + \alpha_2 x''_2, \end{cases}$$

$$\text{де } \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad \alpha_1 \geq 0, \quad \alpha_2 \geq 0.$$

Можна записати: $A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$, $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

Означення 1. Точка A , для якої виконується рівність (1) називається опуклою лінійною комбінацією точок A_1 і A_2 . Точки A_1 і A_2 називаються кутовими точками відрізка $A_1 A_2$.

Очевидно, що кутові точки не є лінійними комбінаціями жодних двох точок відрізка.

Зауважимо, що співвідношення (1) правильне незалежно від розмірності простору.

Означення 2. Точка A є опуклою лінійною комбінацією точок $A_1, A_2, \dots, A_n$, n -вимірного простору, якщо існують

числа $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, такі що $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ і

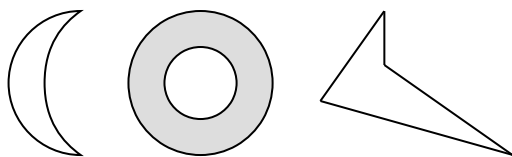
$$A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_n A_n.$$

Означення 3. Множина точок простору називається опуклою, якщо вона разом з довільними своїми двома точками містить і їх довільну опуклу лінійну комбінацію.

Геометрично це означає, що опукла множина разом з довільними своїми двома точками повинна містити і відрізок, що їх з'єднує.

Опуклі множини: відрізок, пряма, півплощина, круг, квадрат, куля, піраміда.

Неопуклі множини: парабола, коло, еліпс, а також:



Твердження 1. Перетин будь-якої кількості опуклих множин є опуклою множиною.

Означення 4. Точка опуклої множини називається кутовою, якщо вона не може бути зображена у вигляді опуклої лінійної комбінації будь-яких двох різних точок цієї множини.

Означення 5.

1) Множина називається відкритою, якщо вона містить тільки свої внутрішні точки. Якщо множина крім внутрішніх містить всі граничні точки, то вона називається замкненою.

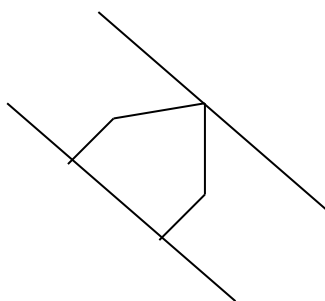
2) Множина називається обмеженою, якщо існує куля скінченного розміру, яка повністю містить цю множину. Інакше множина необмежена.

Означення 6.

1) Опуклим многокутником називається опукла замкнена обмежена множина на площині, яка має скінчене число кутових точок.

2) Кутові точки многокутника називаються його вершинами, а відрізки, що з'єднують дві вершини і утворюють його границю, - сторонами многокутника.

3) Опорною прямою опуклого многокутника називається пряма, яка має з многокутником, розміщеним по один бік від неї, принаймні одну спільну точку.



АВСДЕ – опуклий многокутник;

АЕ, CF – опуклі прямі

Означення 7.

1) Опуклим многогранником називається замкнена обмежена опукла множина n - вимірного простору, яка має скінченне число кутових точок.

2) Кутові точки многогранника називаються вершинами. Многокутники, що обмежують многогранники, називаються гранями. Відрізки, по яких перетинаються грані, називаються ребрами.

3) Опорною площиною многогранника називається площина, яка має з многогранником, розміщеним по один бік від площини, принаймні одну спільну точку.

Твердження 2. Опуклий многокутник (многогранник) є опуклою лінійною комбінацією своїх кутових точок

$$E = \alpha_1 A + \alpha_2 B, \quad \alpha_1 \geq 0, \quad \alpha_2 \geq 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1.$$

$$F = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 B + \alpha_3 C + \alpha_4 D, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1.$$

4.2 Геометричне тлумачення задачі лінійного програмування

Розглянемо симетричну задачу лінійного програмування (тобто з обмеженнями – нерівностями):

$$f = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max ; \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m ; \quad (2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n . \quad (3)$$

Сукупність чисел $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, які задовольняють систему обмежень (2), (3), називають розв'язком системи обмежень або планом.

Якщо існує хоча б один план, то система обмежень називається сумісною, інакше вона несумісна.

Розглянемо задачу (1)-(3) для випадку $n = 2$, тобто задачу з системою обмежень

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2; \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Кожна нерівність цієї системи означає півплощину, тобто опуклу множину. Якщо система сумісна, то перетин цих півплощин є непорожньою множиною, яка також опукла. Координати кожної точки утвореного перетину є розв'язками системи обмежень. Сукупність всіх цих точок називається многокутником розв'язків і позначається Ω .

Наприклад, система обмежень

$$\begin{cases} x - y \geq -1, \\ x - y \leq 1, \\ 0 \leq x \leq 2, \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases} \text{ має зображений многокутник розв'язків.}$$

Многокутник розв'язків може бути точкою, відрізком, променем, многокутником, необмеженим многокутником.

У випадку $n \geq 3$ сукупність розв'язків системи обмежень називається многогранником розв'язків.

Отже, геометрично симетрична (стандартна) задача лінійного програмування полягає у знаходженні такої точки многокутника (многогранника) розв'язків, координати якої надають цільовій функції максимального значення. При цьому допустимими розв'язками є всі точки многогранника розв'язків.

4.3 Властивості розв'язків задачі лінійного програмування

Розглянемо канонічну задачу у векторній формі

$$f = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max ; \quad (1)$$

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n = B, \quad (2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

$$\text{де } A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}; \quad \dots; \quad A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Запис (2) означає, що B є лінійною комбінацією виразів $A_1, \dots, A_n$.

Означення 1. План $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ задачі (2), (3) називається опорним, якщо система векторів-стовпчиків A_j , які відповідають додатним координатам x_j , лінійно незалежна.

Оскільки вектори A_j мають по m координат, то лінійно незалежними можуть бути не більше m шт. координат. Це означає, що в опорному плані є $\leq m$ координат, які строго більші за нуль.

Базисні розв'язки системи (2) з невід'ємними координатами є опорними планами.

Приклад. Перевірити, чи план $X = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}\right)$ є опорним, якщо система обмежень така

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_3 = 0; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

Додатним координатам плану $x_1 = \frac{1}{2}$ і $x_3 = \frac{1}{4}$

відповідають вектори

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо, чи вони лінійно незалежні. Для цього знайдемо ранг матриці

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

тобто визначник $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 2 = -8 \neq 0$.

Отже вектори A_1 і A_3 лінійно незалежні, а план X - опорний.

Означення 2. Опорний план X називається невивродженим, якщо число його додатних координат $=m$, і вивродженим в іншому випадку ($< m$).

У прикладі план $X = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4} \right)$ невивроджений.

Означення 3. Нехай ранг матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

дорівнює m .

Базисом опорного плану називається система з m лінійно незалежних векторів-стовпчиків A_j матриці A , яка

містить всі вектори, що відповідають додатним координатам x_j опорного плану.

У прикладі вектори A_1 і A_3 утворюють базис опорного плану $X = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4} \right)$.

Таким чином, базис не виродженого опорного плану визначається однозначно, а у виродженого їх може бути декілька.

Запишемо задачу (1)-(3) у вигляді

$$f = C \cdot X \rightarrow \max; \quad (4)$$

$$A \cdot X = A_0; \quad (5)$$

$$X \geq 0; \quad (6)$$

і розглянемо основні властивості розв'язків цієї задачі.

Теорема 1. Множина всіх розв'язків системи, (5) опукла, якщо вона не порожня.

Доведемо, що якщо X_1, X_2 – розв'язки задачі (5)-(6), то їх лінійна комбінація опукла: $X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$, $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

Оскільки X_1, X_2 – плани, то $AX_1 = A_0$, $X_1 \geq 0$, $AX_2 = A_0$, $X_2 \geq 0$. Тоді

$$\begin{aligned} AX &= A(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) = \alpha_1 (AX_1) + \alpha_2 (AX_2) = \alpha_1 A_0 + \alpha_2 A_0 = \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2) A_0 = A_0. \end{aligned}$$

Отже, X задовольняє систему (5).

Оскільки, $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$, $X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$, то $X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 \geq 0$, тобто виконується (6).

Опуклу множину планів задачі лінійного програмування позначимо Ω . Можна довести, що Ω буде опуклим многокутником (обмеженим чи необмеженим).

Теорема 2. Якщо цільова функція f має максимум на опуклому многограннику допустимих розв'язків Ω , то він досягається у вершині цього многогранника.

Нехай многогранник Ω обмежений і має скінчене число кутових точок $X_1, X_2, \dots, X_k$. Точку, в якій f має $\max$, позначимо X^* .

Якщо серед вершин X_i , $i = 1, \dots, k$, є хоч одна, в якій f досягає $\max$, то теорема доведена.

Нехай X^* не є кутовою точкою. Тоді $CX^* > CX_i$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Якщо X^* – не кутова, то вона є опуклою лінійною комбінацією кутових, тобто

$$X^* = \sum_{i=1}^k \alpha_i X_i, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1.$$

Тоді

$$CX^* = C \sum_{i=1}^k \alpha_i X_i = \sum_{i=1}^k \alpha_i (CX_i) < \sum_{i=1}^k \alpha_i (CX^*) = CX^*.$$

Отже, $CX^* < CX^*$ – суперечність. Тому X^* – одна з кутових точок Ω .

Отже, екстремум цільової функції досягається в вершині многогранника розв'язків, але не обов'язково у одній точці.

Теорема 3. Якщо цільова функція має максимум більше ніж в одній вершині, многогранника Ω , то цей максимум досягається у будь-якій точці, яка є опуклою лінійною комбінацією цих вершин.

Нехай цільова функція $f = C \cdot X$ досягає $\max$ у вершинах $X_1, \dots, X_q$ многогранника Ω , тобто $CX_i = f_0$, $i = 1, 2, \dots, q$. Тоді для довільної прямої лінійної комбінації цих вершин

$$X = \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_q X_q, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_q = 1$$

маємо:

$$\begin{aligned} f = CX &= C(\alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_q X_q) = \alpha_1 (CX_1) + \dots + \alpha_q (CX_q) = \\ &= \alpha_1 f_0 + \dots + \alpha_q f_0 = (\alpha_1 + \dots + \alpha_q) f_0 = f_0. \end{aligned}$$

Отже, для знаходження $\max f$ досить дослідити всі вершини Ω .

Теорема 4. Вектор X є опорним планом задачі (4)-(6) тоді і лише тоді, коли X є вершиною многогранника розв'язків Ω .

З теореми випливає, що алгебраїчне поняття опорного плану еквівалентне до геометричного поняття вершини многогранника розв'язків.

Наслідок 1. Кожна вершина многогранника Ω має не більше ніж m додатних координат.

За означенням опорного плану, $\epsilon \leq m$ додатних координат.

Наслідок 2. Кожній вершині многогранника Ω відповідає k ($k \leq m$) лінійно-незалежних розв'язків-стовпчиків A_i , $i = 1, \dots, k$.

Це означення опорного плану.

Висновок. Якщо цільова функція f обмежена на Ω , то існує кутова точка Ω (опорний план), в якій досягається $\max$. Тому для розв'язування задач лінійного програмування треба дослідити тільки вершини многогранника (опорні плани) задачі лінійного програмування.

4.4 Графічний метод розв'язування задачі лінійного програмування

В основі графічного методу лежить геометричний зміст задачі лінійного програмування. Застосовується цей метод у випадку $n = 2$, інакше важко будувати многокутник розв'язків.

Нехай задана задача лінійного програмування

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \max(\min); \quad (1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m; \end{cases} \quad (2)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \quad (3)$$

Припустимо, що система (2), (3) сумісна і многокутник розв'язків задачі обмежений. Кожна з нерівностей (2), (3) визначає півплощину з межею $\alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 = b_i$, $i = 1, \dots, m$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.

Перетин цих півплощин визначає многокутник Ω .

Цільова функція при фіксованих значеннях $f = h = \text{const}$ є рівнянням прямої $c_1x_1 + c_2x_2 = h$.

Побудуємо Ω і графік цільової функції при $f = 0$. Тоді задача (1)-(3) означає: знайти вершину многокутника розв'язків, у якій пряма $c_1x_1 + c_2x_2 = h$ є опорною і f при цьому набуває найбільшого (найменшого) розв'язку.

Відомо, що значення цільової функції зростає у напрямку вектора $\vec{n} = (c_1, c_2)$. Тому пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$ пересуваємо паралельно до себе у напрямку $\vec{n}$, поки вона не стане опорною для Ω .

На малюнку пряма (f) стає опорною до Ω в двох точках A і B . Враховуючи напрям $\vec{n}$, одержимо, що максимум досягається в точці B , а мінімум – у точці A .

Тут можливий випадок, коли $\min$ (або $\max$) досягається або у вершині, або на стороні Ω .

Якщо Ω - наближений, то можливі випадки:

1) пряма (f) постійно перетинає багатокутник Ω і ніколи не стає опорною до нього, тоді цільова функція необмежена знизу і зверху:

2) пряма (f) стає стороною до Ω :

f – обмежена зверху і необмежена знизу, A – точка $\max$, мінімум не існує;

f – обмежена знизу і необмежена зверху, B – точка мінімуму, максимуму не існує;

f – обмежена знизу і зверху на AC – максимум, на BD – мінімум.

Якщо система (2), (3) несумісна, то множина допустимих розв'язків порожня, тому задача оптимального розв'язку не має.

Приклад 1. Задача про використання сировини

$$f = 50x_1 + 40x_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 20, \\ 8x_1 + 5x_2 \leq 40, \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$$

Побудуємо Ω . Для цього зобразимо лінії

$$2x_1 + 5x_2 = 20 \quad (I) \quad \text{Вектор } \vec{n} = (50, 40) \parallel (5, 4)$$

$$8x_1 + 5x_2 = 40 \quad (II)$$

$$5x_1 + 6x_2 = 30 \quad (III)$$

$$x_1 = 0 \quad (IV)$$

$$x_2 = 0 \quad (V)$$

A – точка максимуму. Знайдемо її координати. Оскільки A – точка перетину II і III, то її координати задовольняють систему

$$\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 = 40, \\ 5x_1 + 6x_2 = 30; \end{cases}$$

$$x_2 = \frac{40 - 8x_1}{5} = 8 - \frac{8}{5}x_1; \quad 5x_1 + 6\left(8 - \frac{8}{5}x_1\right) = 30;$$

$$\frac{25 - 48}{5}x_1 = 30 - 48; \quad 23x_1 = 90;$$

$$x_1 = \frac{90}{23}; \quad x_2 = 8 - \frac{8}{5} \cdot \frac{90}{23} = \frac{8(23 - 18)}{23} = \frac{40}{23};$$

Отже, $A\left(\frac{90}{23}, \frac{40}{23}\right) \approx (3,9; 1,7)$.

Відповідь: $f_{\max} = f\left(\frac{90}{23}, \frac{40}{23}\right) = \frac{6100}{23} \approx 265,2$.

Приклад 2. Задача про дієту

$$f = 4x_1 + 6x_2 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9, \\ x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_1 + 6x_2 \geq 12; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$$

Межі Ω : $3x_1 + x_2 = 9;$ (I) Вектор $\vec{n} = (4, 6)$

$x_1 + 2x_2 = 8;$ (II)

$$x_1 + 6x_2 = 12; \quad (III)$$

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 0.$$

A – точка мінімуму функції f , перетин I і II:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 9, \\ x_1 + 2x_2 = 8; \end{cases}$$

$$x_2 = 9 - 3x_1;$$

$$x_1 + 2(9 - 3x_1) = 8;$$

$$- 5x_1 = - 10, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 3.$$

Отже, $A(2,3)$.

Відповідь: $f_{\min} = f(2,3) = 26$.

Треба 2 кг корму P_1 і 3 кг корму P_2 .

Зауваження. За допомогою графічного методу можна розв'язувати задачі лінійного програмування з n змінними і m обмеженнями-рівностями, якщо $n - m = 2$.

Нехай рівняння системи обмежень лінійно незалежні. Тоді методом Жордана-Гаусса можна знайти n базисних змінних, які виражаються через ... змінні. Оскільки $m = n - 2$, то змінних буде дві x_{m+1} і $x_{m+2} = x_n$. Таким чином, всі базисні змінні виражаються через вільні. Тоді підставивши замість базисних змінних у цільову функцію їх вирази через змінні x_{m+1} і x_n , і перейшовши у До нерівностей із двома змінними, одержимо задачу з двома невідомими. Розв'язавши одержану задачу графічно,

одержимо x_{m+1}^* і x_n^* , ... знайдемо розв'язок $X^* = (x_1^*, \dots, x_m^*, x_{m+1}^*, x_n^*)$.

Приклад 3. Розв'язати задачу

$$f = x_1 + 2x_3 - x_5 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 5, \\ x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 2, \\ x_3 - x_4 - x_5 = 1; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \dots, x_5 \geq 0.$$

Тут $n = 5$, $m = 3$, $n - m = 5 - 3 = 2$ умова виконується.

Розв'яжемо систему обмежень. Нехай x_1, x_2, x_3 – базисні

$$\begin{cases} x_1 = 3 - 2x_5 \geq 0, \\ x_2 = 1 - 2x_4 + 2x_5 \geq 0, \\ x_3 = 1 + x_4 - x_5 \geq 0; \end{cases}$$

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	B
1	1	1	1	1	5
0	1	1	1	-1	2
0	0	1	-1	1	1
1	0	0	0	2	3
0	1	1	1	-1	2
0	0	1	-1	1	1
1	0	0	0	2	3
0	1	0	2	-2	1
0	0	1	-1	1	1

Підставимо у f :

$$f = (3 - 2x_5) + 2(1 + x_4 - x_5) + x_5 = 5 + x_4 - 3x_5 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} 2x_5 \leq 3 \\ 2x_4 - 2x_5 \leq 1 \\ -x_4 + x_5 \leq 1 \end{cases}$$

Маємо задачу з двома змінними x_4 і x_5 .

$$\vec{n} = (2, -3) \left\| \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4} \right) \right\|;$$

A – точка мінімуму.

$$A\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right), x_4^* = \frac{1}{2}, x_5^* = \frac{3}{2}, x_1^* = 0, x_2^* = 3, x_3^* = 0.$$

$$f_{\min} = 5 - 2\frac{1}{2} - 3\frac{3}{2} = 6 - \frac{9}{2} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Відповідь: } X^* = \left(0, 3, 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right); f_{\min} = \frac{3}{2}.$$

5. Симплексний метод розв'язування задач лінійного програмування

5.1 Обґрунтування симплекс-методу

Основним методом розв'язування задач лінійного програмування є розроблений у 1949 році американським математиком Д.Данцігом симплекс-метод. Він застосовується для задач у канонічній формі

$$f = C \cdot X \rightarrow \max; \quad (1)$$

$$A \cdot X = B; \quad (2)$$

$$X \geq 0; \quad (3)$$

$$\text{де } C = (c_1, c_2, \dots, c_n); X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Нагадаємо, що з властивостей лінійного програмування випливає: оптимальний план задачі (1)-(3) знаходиться серед опорних планів (вершин многогранника розв'язків), тобто серед таких розв'язків системи (2), (3), додатним координатам яких відповідають лінійно-незалежні стовпці A_j матриці A . Симплексний метод організовує знаходження і перегляд опорних планів у певному порядку. Перехід від одного опорного плану до іншого здійснюється переведенням однієї з небазисних змінних у базисну. При цьому цільова функція не зменшується.

Нехай система (2) є системою у базисній формі. Це означає, що є m базисних змінних (наприклад $x_1, x_2, \dots, x_m$), кожна з яких входить лише в одне рівняння з коефіцієнтом 1 і всі числа $b_i \geq 0, i=1, \dots, m$. Тобто система (2) має вигляд

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + \dots + a_{1,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{1,n}x_n = b'_1, \\ x_2 + \dots + a_{2,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{2,n}x_n = b'_2, \\ \dots \\ x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{m,n}x_n = b'_m; \end{array} \right. \quad (4)$$

$$b'_1 > 0; \quad b'_2 > 0; \quad b'_m > 0.$$

Тоді загальний розв'язок системи (4) такий:

$$x_i = b_i - \sum_{j=m+1}^n a_{ij}x_j, \quad i=1, \dots, m; \quad (5)$$

а базисний розв'язок буде

$$x_i = b_i, \quad i=1, \dots, m; \quad x_{m+1} = \dots = x_n = 0;$$

$$\text{або} \quad (b_1, b_2, \dots, b_m, 0, \dots, 0). \quad (6)$$

Оскільки $b_i \geq 0$, то це опорний план.

Підставимо (5) у цільову функцію (1):

$$\begin{aligned} f &= \sum_{i=1}^n c_i x_i = \sum_{i=1}^m c_i x_i + \sum_{j=m+1}^n c_j x_j = \sum_{i=1}^m c_i \left(b_i - \sum_{j=m+1}^n a_{ij} x_j \right) + \sum_{j=m+1}^n c_j x_j = \\ &= \sum_{i=1}^m c_i b_i - \sum_{j=m+1}^n \left(\sum_{i=1}^m c_i a_{ij} - c_j \right) x_j. \end{aligned}$$

$$\text{Позначимо } f_0 = \sum_{i=1}^m c_i b_i, \quad f_j = \sum_{i=1}^m c_i a_{ij}, \quad j = m+1, \dots, n; \quad (7)$$

$$\Delta_j = f_j - c_j, \quad j = m+1, \dots, n, \quad (8)$$

$$\text{Тоді} \quad f = f_0 - \sum_{j=m+1}^n (f_j - c_j) x_j = f_0 - \sum_{j=m+1}^n \Delta_j x_j. \quad (9)$$

Вираз (8) називається зведеним виразом цільової функції, а числа Δ_j - зведеними коефіцієнтами цільової функції.

Зауваження. З системи (4) випливає, що $\Delta_j = 0$, $j = 1, \dots, m$. Справді, $a_{ij} = 1$ при $i \leq m$, $j \leq m$, $i = j$, тому

$$f_j = \sum_{i=1}^m c_i a_{ij} = c_j, \quad j = 1, \dots, m, \text{ а тоді оцінки базисних змінних}$$

дорівнюють нулеві.

Проаналізуємо зв'язок між величиною цільової функції і вільними змінними.

Випадок 1. Нехай усі координати Δ_j при вільних змінних x_j у функції (8) невід'ємні $\Delta_j \geq 0$, $j = m+1, \dots, n$.

Тоді всяке збільшення вільних змінних x_{m+1} , x_{m+2} , ..., x_n приводить до зменшення функції (8). Тому найбільше значення функція (8) буде мати при $x_{m+1} = \dots = x_n = 0$, тобто у допустимому базисному розв'язку (6). Тоді (6) є оптимальним розв'язком.

Таким чином, умовою оптимальності є умова

$$\Delta_j = f_j - c_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Випадок 2. Серед оцінок Δ_j вільних змінних є принаймні одна від'ємна і при цьому серед коефіцієнтів відповідного їй j -го стовпчика матриці A немає додатних. У цьому випадку функція f є необмеженою в області допустимих розв'язків.

Справді, нехай для деякої $\Delta_s < 0$ і всі $a_{is} \leq 0$, $i = 1, \dots, m$. Розглянемо всі вільні змінні крім x_s рівними нулю і підставимо у (5) і (8). Одержимо

$$x_i = b_i - a_{is}x_s, \quad i = 1, \dots, m; \quad (10)$$

$$f = f_0 - \Delta_s x_s. \quad (11)$$

Оскільки $\Delta_s < 0$, то при збільшенні x_s функція f зростає. Разом з тим з (10) випливає, що усі змінні

$x_i (i=1, \dots, m)$, залежні від x_s , залишаються невід'ємними при довільних як завгодно великих x_s (бо $a_{is} \leq 0$).

Отже, функція f максимуму не має, оптимального плану не існує, хоч є безліч допустимих планів.

Випадок 3. Є вільна змінна x_s з від'ємною оцінкою $\Delta_s < 0$, у якої принаймні один коефіцієнт a_{is} є додатним: $a_{is} > 0$. Тоді можна знайти новий опорний план, для якого значення цільової функції є більшим, якщо розглядуваний опорний план не вироджений.

Справді, як видно з (11), при $\Delta_s < 0$ збільшення x_s приводить до зростання цільової функції f . Збільшення x_s припустиме доти, поки праві частини виразу (10) залишаються невід'ємними при всіх $i=1, \dots, m$. Тобто для $a_{is} > 0$ $x_s \leq \frac{b_i}{a_{is}}$, $i=1, \dots, m$. Максимально можливе значення $x_s = \Theta_{0s}$, при якому забезпечується невід'ємність змінних в (10), визначається з умови

$$\Theta_{0s} = \min_{\substack{1 \leq i \leq m \\ a_{is} > 0}} \frac{b_i}{a_{is}} = \frac{b_r}{a_{rs}}. \quad (12)$$

Для не виродженого опорного плану всі $b_i > 0$, отже $\Theta_{0s} > 0$. Таким чином, беручи

$$x_s = \Theta_{0s} = \frac{b_r}{a_{rs}},$$

ми переведемо вільну змінну x_s у число базисних замість базисної змінної x_r . Для визначення значень решти базисних змінних x_{ir} , $i=1,\dots,m$, $i \neq r$, виконаємо.....

1.0	0	$a_{i,m+1}$	...	a_{1s}	...	a_{in}	b_1
0	0	$a_{i,m+1}$	...	a_{is}	...	a_{in}	b_i
0	0	$a_{r,m+1}$	...	a_{rs}	...	a_{rn}	b_r
0	1	$a_{n,m+1}$	...	a_{ms}	...	a_{nn}	b_m
		Δ_{m+1}	...	Δ_s	...	Δ_n	f_a

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i = b_i - \frac{a_{is}b_r}{a_{rs}}, \quad i=1,\dots,m, \quad i \neq r, \\ x_r = 0, \\ x_s = \frac{b_r}{a_{rs}}, \\ x_j = 0, \quad j=m+1,\dots,n, \quad j \neq s. \end{array} \right. \quad (14)$$

Зауваження. Якщо мінімум відношень $\frac{b_i}{a_{is}}$ досягається у кількох рядках $i=r,q,\dots$, то нульових значень набудуть декілька відповідних змінних $x_r, x_q, \dots$. Нова базисна змінна x_s вводиться замість будь-якої з них, а решта залишаються у базисі. Тоді, одержаний план буде виродженим.

Покажемо, як змінюється цільова функція при переході до нового опорного плану (14). Для цього підставимо (14) в (8) або в (11):

$$f' = f_0 - \Delta_s \frac{b_r}{a_{rs}}. \quad (15)$$

Оскільки $\Delta_s < 0$, $\frac{b_r}{a_{rs}} > 0$, то цільова функція зростає з

f_0 до f' (на величину $\left| \frac{\Delta_s b_r}{a_{rs}} \right|$).

Формула (15) нагадує формулу прямокутника жорданових виключень. Запишемо (8) у виді

$$f + \sum_{j=m+1}^n \Delta_j x_j = f_0. \quad (16)$$

І долучимо це рівняння до системи (4) як таке, що розв'язане відносно невідомої базисної змінної f . При проведенні жорданового перетворення з провідним елементом a_{rs} одержимо перетворені елементи

$$\Delta'_j = \Delta_j - \frac{\Delta_s a_{rj}}{a_{rs}}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (17)$$

Отже, виконавши жорданове перетворення системи (4), розширеної додаванням рядка зведеної цільової функції (16), одержимо новий допустимий базисний рядок (14), для якого значення цільової функції буде більшим.

Щоб вияснити, чи буде новий базисний розв'язок (14) оптимальним, треба проаналізувати оцінки Δ'_j . Якщо випадок 1, то знайдений план є оптимальним, якщо випадок 2, то

оптимального не існує. Якщо випадок 3, то описаний процес продовжують. Оскільки опорних планів $\epsilon \leq C_n^m$, то процес є скінчений.

Якщо в процесі ітерацій з'явиться вироджений план, то перехід до наступного опорного плану відбувається без збільшення значення цільової функції.

Теоретично можливий випадок, коли послідовність вироджених опорних планів починає повторюватись – зациклюватись. У цьому випадку розроблені спеціальні прийоми. На практиці зациклованості майже не буває.

5.2 Алгоритм симплекс-методу

Розглядаємо задачу у базисній формі (1), (4), (3), де $b_i \geq 0, i = 1, \dots, m$.

Умови такої задачі зручно записувати у вигляді симплексної таблиці

i	A	$\tilde{N}A$	B	$\tilde{N}_1$	$\tilde{N}_2$	...	$\tilde{N}_m$	$\tilde{N}_{m+1}$	...	$\tilde{N}_n$
				A_1	A_2	...	A_m	A_{m+1}	...	A_n
1	A_1	c_1	b_1	1	0	...	a_{1n}	$a_{1,m+1}$	...	a_{1n}
2	A_2	c_2	b_2	0	1	...	a_{2n}	$a_{2,m+1}$	...	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$
m	A_m	c_m	b_m	0	0	...	a_{mn}	$a_{m,m+1}$	...	a_{mn}
$m+1$	Δ		f_0	A_1	A_2	...	A_m	A_{m+1}	...	A_n

У $(m+1)$ -му рядку (оціночному) записують числа

$$f_0 = \sum_{i=1}^m c_i b_i, \quad \Delta_j = \sum_{i=1}^m c_i a_{ij} - c_j.$$

У стовпчику $\bar{A}$ (базис) записуються одиничні базисні вектори, у стовпчику $\bar{b}$ – коефіцієнти цільової функції, що відповідають векторам базису, у стовпчику B – значення базисних змінних, у стовпчиках $A_1, A_2, \dots, A_n$ – коефіцієнти a_{ij} системи обмежень. Над позначеннями $A_1, \dots, A_n$ пишуть коефіцієнти цільової функції.

Алгоритм.

1) Заповнюємо симплексну таблицю, знаходимо оцінки Δ_j , значення f_0 .

2) Переглядаємо знаки коефіцієнтів Δ_j . Якщо всі $\Delta_j \geq 0$, то задача розв'язана і базисний розв'язок $(b_1, b_2, \dots, b_m, 0, \dots, 0)$ буде оптимальним, а $f_{\max} = f_0$. Якщо не всі $\Delta_j \geq 0$, переходимо до 3.

3) Серед від'ємних значень $\Delta_j < 0$ знаходимо найбільше по модулю число і відповідний йому стовпчик вибираємо за провідним. Нехай це буде стовпчик з номером s . Якщо в провідному стовпчику всі елементи $a_{is} \leq 0$ ($i = 1, \dots, m$), то маємо випадок 2: цільова функція необмежена $f_{\max} = +\infty$ і розв'язування закінчене. Якщо не всі $a_{is} \leq 0$, то перейти до 4.

4) Для кожного додатного елемента $a_{is} > 0$ s -го (провідного) стовпчика знаходимо відношення $\frac{b_i}{a_{is}}$, вибираємо найменше (тобто знаходимо симплексне

відношення θ_{0s}), і називаємо рядок, де воно досягається, провідним. Нехай це буде рядок з номером r . Елемент a_{rs} на перетині провідного рядка і стовпчика буде провідним.

5) Виконуємо жорданове перетворення таблиці до A_n , від 1-го рядка до $m+1$ -го з провідним елементом a_{rs} і переходимо до кроку 2.

Послідовність операцій 2-5 називається інерцією симплекс-методу.

Зауваження 1. У другій і далі таблицях Δ_j і f_0 можна шукати за правилом як і інші елементи.

Зауваження 2. Якщо на кроці 3 є декілька найбільших по модулю оцінок Δ_j , то в базис включають той вектор, якому відповідає найбільше c_j .

Точнішим є таке правило, якщо не виконується умова оптимальності $\Delta_j \geq 0$, $j=1, \dots, n$, то в базис включають той

вектор, якому відповідає
$$\min_{\substack{j \\ \Delta_j < 0}} \theta_{0s} \Delta_j$$
.

Якщо ж мінімальних оцінок декілька, то беруть вектор Δ_j , якому відповідає максимальне C_j .

Зауваження 3. Якщо в 1 $f \rightarrow \min$, то умовою оптимальності плану є $\Delta_j \leq 0$, $j=1, \dots, n$. Якщо ця умова виконується, то базис включає той вектор, якому відповідає найбільше. Якщо таких кілька то беруть той,

Зауваження

Приклад 1. $f = 4x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 8 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 18 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5$$

Складаємо симплекс-таблицю

$$f_0 = 1 \cdot 6 + (-3) \cdot 8 + 0 \cdot 18 = -18;$$

i	A_j	b_j	θ	4	1	1	-3	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	A_3	1	6	2	-1	1	0	0
2	A_4	-3	8	1	-1	0	1	0
3	A_5	0	18	1	1	0	0	1
$m+1$	Δ		-18	-5	1	0	0	0
1	A_1	4	3	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 1 \cdot 2 - 3 \cdot 1 + 0 \cdot 1 - 4 = -5; \\ \Delta_2 &= 1 \cdot (-1) - 3 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 - 1 = 1; \end{aligned}$$

	A_4	-3	5	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0
3	A_5	0	15	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1
$m+1$	Δ		-3	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	0
1	A_1	4	8	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
2	A_4	-3	10	0	0	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$
3	A_2	1	10	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
$m+1$	Δ		12	0	0	2	0	1

A_4 – провідний

A_2 – провідний

Всі $\Delta_j \geq 0$, тому базисний розв'язок $X^* = (8, 10, 0, 10, 0)$ є оптимальний $f_{\max} = f(X^*) = 12$.

Відповідь: $f_{\max} = f(8, 10, 0, 10, 0) = 12$.

Приклад 2. Розв'язати симплекс-методом

$$f = x_1 - x_2 - 3x_3 \rightarrow \min ;$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 1, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 \geq -2, \\ 3x_1 + x_3 \leq 5; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0; \quad j = 1, \dots, 5.$$

Зведемо задачу до канонічного вигляду

$$f = -x_1 + x_2 + 3x_3 \rightarrow \max ;$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 2, \\ 3x_1 + x_3 + x_6 = 5; \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 6.$$

Складемо симплекс-таблицю

i	A	$\tilde{N}a$	B	-1	1	3	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_4	0	1	2	-1	1	1	0	0
2	A_5	0	2	-4	2	-1	0	1	0
3	A_6	0	5	3	0	1	0	0	1
$m+1$	Δ		0	1	-1	-3	0	0	0
1	A_3	3	1	2	-1	1	1	0	0
2	A_5	0	3	-2	1	0	1	1	0
3	A_6	0	4	1	1	0	-1	0	1
$m+1$	Δ		3	7	-4	0	3	0	0
1	A_3	3	4	0	0	1	2	1	0
2	A_2	1	3	-2	1	0	1	1	0
3	A_6	0	1	3	0	0	-2	-1	1
$m+1$	Δ		15	-1	0	0	7	4	0
1	A_3	3	4	0	0	1	2	1	0
2	A_2	1	$\frac{11}{3}$	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
3	A_1	-1	$\frac{1}{3}$	1	0	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$m+1$	Δ		$\frac{46}{3}$	0	0	0	$\frac{19}{3}$	$\frac{11}{3}$	$\frac{1}{3}$

$$X^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{11}{3}, 4, 0, 0, 0 \right), \quad f_{\max} = \frac{46}{3}, \quad f_{\min} = -\frac{46}{3}.$$

Зауваження 4. Як відмічалось, при переході від виродженого опорного плану до нового опорного плану цільова функція не збільшується. Можливий випадок, коли новий опорний план також вироджений і т.д. тоді можливе зациклення (коли вироджені плани повторюються). Для усунення зациклення і покращення розв'язку використовують таке правило. Якщо на кроці 4 алгоритму симплекс-методу

$\min \frac{b_i}{a_{is}}$ досягається у декількох рядках, то треба вибрати той рядок, для якого буде найменшим відношення елементів наступного стовпчика до провідного. Якщо при цьому відношення виявляється рівним, то беруть відношення іншого стовпчика до провідного і т.д., поки не виявиться однозначно провідний елемент.

Приклад 3. Розв'язати задачу

$$f = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max ;$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ -x_1 + \frac{3}{2}x_2 + x_4 = 9, \\ -x_1 + 5x_2 + x_5 = 30, \\ x_1 + x_2 + x_6 = 12; \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 6. \end{cases}$$

Складаємо таблицю

$$\min \left(\frac{6}{1}, \frac{9}{3/2}, \frac{30}{5}, \frac{12}{1} \right) = 6 \text{ досягається у 1, 2, 3 рядку.}$$

i	A	$\tilde{A}$	B	2	4	0	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_3	0	6	-2	1	1	0	0	0
2	A_4	0	9	-1	$\frac{3}{2}$	0	1	0	0
3	A_5	0	30	-1	5	0	0	1	0
4	A_6	0	12	1	1	0	0	0	1
$m+1$	Δ		0	-2	-4	0	0	0	0
1	A_2	4	6	-2	1	1	0	0	0
2	A_4	0	0	2	0	$-\frac{3}{2}$	1	0	0
3	A_5	0	0	9	0	-5	0	1	0
4	A_6	0	6	3	0	-1	0	0	1

Розглянемо відношення 1-го стовпця до провідного

$$\min \left(\frac{-2}{1}, \frac{-1}{3/2}, \frac{-1}{5} \right) = -2.$$

$m+1$	Δ	24	-10	0	4	0	0	0
1	A_2	4	6	0	$1 - \frac{1}{2}$	1	0	0
2	A_1	2	0	1	$0 - \frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0
3	A_5	0	0	0	$\frac{7}{4}$	$-\frac{9}{2}$	1	0
4	A_6	0	6	0	$\frac{5}{4}$	$-\frac{3}{2}$	0	1
$m+1$	Δ	24	0	0	$-\frac{7}{2}$	5	0	0
1	A_2	4	6	0	1	$0 - \frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	0
2	A_1	2	0	1	0	$0 - \frac{10}{7}$	$\frac{3}{7}$	0
3	A_3	0	0	0	0	$1 - \frac{18}{7}$	$\frac{4}{7}$	0
4	A_6	0	6	0	0	$\frac{12}{7}$	$-\frac{5}{7}$	1
$m+1$	Δ	24	0	0	0	$-\frac{28}{7}$	2	0
1	A_2	4	7	0	1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
2	A_1	2	5	1	0	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$
3	A_3	0	9	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
4	A_4	0	$\frac{7}{2}$	0	0	0	$1 - \frac{5}{12}$	$\frac{7}{12}$
$m+1$	Δ	38	0	0	0	0	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{3}$

Отже, $i=1$

$$\min\left(\frac{0}{2}, \frac{0}{9}, \frac{6}{3}\right) = 0,$$

$i=2$

Поділимо A_3 на A_1

$$\min\left(\frac{-3/2}{2}, \frac{-5}{9}\right) = -\frac{3}{4},$$

$i=2$

(опорний план вироджений)

$$\min\left(\frac{0}{7/4}, \frac{6}{5/4}\right) = 0.$$

$$f_{\max} = 38.$$

Відповідь: $X^* = \left(5, 7, 9, \frac{7}{2}, 0, 0\right)$ – не вироджений оптимальний план.

6. Метод штучного базису (M – метод).

У попередньому розділі доведено, що задачу лінійного програмування можна розв'язати симплекс-методом, якщо вона записана у канонічній формі, всі $b_i \geq 0$ і система обмежень має одиничну матрицю порядку m . Тоді існує початковий опорний план, виходячи з якого за допомогою симплекс-методу знаходиться оптимальний план.

Знаходження початкового опорного плану складає окрему задачу. Деколи побудувати опорний план просто. Наприклад, коли система обмежень має вигляд $AX \leq B$, $B \geq 0$, то введення додаткових змінних $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$ обмеження зводяться до потрібного вигляду і початковим опорним планом буде план $\left(\underset{n}{\underbrace{0, \dots, 0}_n}, b_1, b_2, \dots, b_m \right)$.

Знайти початковий опорний план можна методом Жордана-Гаусса, але тоді треба перебирати кілька допустимих розв'язків.

Багато задач лінійного програмування не містять одиничної матриці. У цьому випадку для розв'язування задач застосовується метод штучного базису, або M – методу.

Розглянемо задачу у канонічній формі

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max; \quad (1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases} \quad (2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad b_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3)$$

де система обмежень не містить одиничної матриці.

До кожної рівності з (2) додамо по одній змінній $x_{n+i} \geq 0$ і розглянемо розширену задачу (M – задачу).

$$F = \sum_{i=1}^m c_i x_i - Mx_{n+1} - \dots - Mx_{n+m} \rightarrow \max ; \quad (4)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m; \end{cases} \quad (5)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n+m, \quad b_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (6)$$

Вважається, що число M є додатним і великим.

Тут $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$ називається штучними змінними. Вектори-стовпчики $A_{n+1}, \dots, A_{n+m}$ є одиничними і утворюють штучний базис.

Система (5)-(6) має базисний розв'язок

$\tilde{X} = \left(\underset{n}{\begin{smallmatrix} 0 & \dots & 0 \end{smallmatrix}}, b_1, \dots, b_m \right)$, який можна взяти за початковий опорний план задачі (4)-(6).

Далі задачу (4)-(6) розв'язують симплекс-методом. Можливі випадки:

1. Знайдемо оптимальний розв'язок задачі (4)-(6) $\tilde{X}^* = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$, у якому всі штучні змінні дорівнюють нулеві. Тоді задача (1)-(3) має оптимальний розв'язок $X^* = (x_1, \dots, x_n)$.

Оскільки $\tilde{X}^*$ і X^* відрізняються останніми m нульовими координатами і $\tilde{X}^*$ – оптимальний план (4)-(6), то X^* – допустимий розв'язок.

Доведемо, що X^* – оптимальний. Нехай це не так. Тоді існує план $X' = (x'_1, \dots, x'_n)$ такий, що $f(X') > f(X^*)$, а тому існує план розширеної задачі $\bar{X} = (x'_1, \dots, x'_n, 0, \dots, 0)$ такий, що $\bar{f}(\bar{X}) = f(X') > f(X^*) = \tilde{f}(\tilde{X}^*)$, тобто $\bar{f}(\bar{X}) > \tilde{f}(\tilde{X}^*)$, що суперечить тому, що X^* – оптимальний план.

2. Оптимальний розв'язок $\tilde{X}^*$ містить хоч одну додатну штучну змінну x_{n+1} . Тоді можна довести, що початкова задача (1)-(3) не має допустимих розв'язків, тому нерозв'язна.

3. M -задача не має розв'язків. Тоді задача (1)-(3) також нерозв'язна (функція f необмежена).

Якщо число M відоме, то задачу (4)-(6) розв'язують звичайним симплекс-методом.

Якщо число M невідоме, то симплекс-метод модернізують. А саме, в симплексній таблиці вводять $(m+2)$ -ий рядок. Коли обчислюють оцінки Δ_j , то вони є лінійними функціями від M , тобто мають вигляд $\Delta_j = a_j M + b_j$. Числа b_j записують в $(m+1)$ -й рядок, а числа a_j – в $(m+2)$ -ий. Ітерацію симплекс-методу проводять по $(m+2)$ -чому рядку за звичайними правилами:

1) всі штучні змінні будуть виведені з базису. У цьому випадку далі перерахунок симплекс-таблиць проводять по $(m+1)$ -му рядку, причому стовпчики із штучними змінними можна не рахувати.

2) Всі числа в $(m+2)$ -му рядку у стовпцях $A_{n+1}, \dots, A_{n+m}$ стануть додатні, хоч не всі штучні змінні виведені з базису. У цьому випадку якщо елемент в $(m+2)$ -му рядку стовпчика B

від'ємний, то вихідна задача (1)-(3) не має розв'язку. Якщо це число дорівнює нулеві, то знайдений опорний план вихідної задачі є виродженим і базис містить принаймні один вектор базису. Тоді знову переходять до $(m+1)$ -го рядка.

Висновок: При розв'язанні канонічної задачі лінійного програмування можливі такі варіанти:

1) матриця A системи обмежень містить одиничну матрицю порядку m . Тоді задачу розв'язують звичайним симплекс-методом;

2) матриця A містить k ($k < m$) різних одиничних стовпчиків. Тоді вводять $m - k$ штучних змінних і розв'язують M -задачу;

3) матриця A не містить одиничних векторів. Треба розв'язувати M -задачу з m штучними змінними.

Зауваження. Якщо в 1) $f \rightarrow \min$, то в M -задачі беремо

$$\tilde{f} = \sum_{i=1}^m c_i x_i - Mx_{n+1} - \dots - Mx_{n+m},$$

де $M > 0$ – велике.

Приклад 1. Розв'язати задачу

$$\begin{aligned} f &= 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 \rightarrow \max; \\ \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3; \end{cases} \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, 4. \end{aligned}$$

Випишемо матрицю системи: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Отже, система обмежень не містить жодного одиничного вектора. Тому введемо дві штучні змінні $x_5 \geq 0$, $x_6 \geq 0$ і розглянемо M -задачу:

$$\tilde{f} = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 - Mx_5 - Mx_6 \rightarrow \max ;$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_6 = 3; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4.$$

Розв'яжемо M -задачу:

i	A	$\tilde{N}a$	B	5	3	4	-1	- M	- M
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	$A_5 - M$	3	1	3	2	2	2	1	0
2	$A_6 - M$	3	2	2	1	1	0	0	1
$m+1$			0	-5	-3	-4	1	0	0
$m+2$			-6	-3	-5	-3	-3	0	0
1	A_2	3	1	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
2	$A_6 - M$	1	$\frac{4}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$		1
$m+1$			3	-4	0	-2	3	1	0
$m+2$			-1	$-\frac{4}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	0
1	A_2	3	$\frac{3}{4}$	0	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$
2	A_1	5	$\frac{3}{4}$	1	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
$m+1$			6	0	0	-3	2	-1	3
$m+2$			0	0	0	0	0	1	1
1	A_3	4	1	0	$\frac{4}{3}$	1	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
2	A_1	5	1	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$m+1$			9	0	4	0	5	$1+M$	$2+M$

Далі, оскільки $M > 0$, то $1 + M > 0$, $2 + M > 0$.

Отже, всі $x_j \geq 0$, тобто розв'язок $\tilde{X}^* = (1, 0, 1, 0, 0, 0)$ є оптимальний для M -задачі.

Відповідь: $f_{\max} = f(1, 0, 1, 0) = 9$.

Приклад 2. Розв'язати задачу

$$f = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 6, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 10, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 14; \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4. \end{cases}$$

Зведемо задачу до канонічного виду:

$$f_1 = -2x_1 + x_2 - 3x_3 + 7x_4 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 6, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 10, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 14; \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5. \end{cases}$$

Матриця: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Має один одиничний вектор, тому треба ввести лише дві штучні змінні $x_6 \geq 0$ і $x_7 \geq 0$ і розглянути M -задачу:

$$\tilde{f} = -2x_1 + x_2 - 3x_3 + 7x_4 - Mx_6 - Mx_7 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 + x_6 = 6, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_7 = 10, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 14; \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 7. \end{cases}$$

i	A	$\tilde{N}a$	B	-2	1	-3	7	0	- M	- M
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
1	A_6	- M	6	1	2	0	3	0	1	0
2	A_6	- M	10	4	-1	1	-1	0	0	1
3	A_5	0	14	-1	3	2	1	1	0	0
$m+1$			0	2	-1	3	-7	0	0	0
$m+2$			-16	-5	-1	-1	-2	0	0	0
1	A_6	- M	$\frac{14}{4}$	0	$\frac{9}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{13}{4}$	0	1	0
2	A_1	-2	$\frac{10}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	0	
3	A_5	0	$\frac{66}{4}$	0	$\frac{11}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{3}{4}$	1	0	
$m+1$			-5	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{13}{2}$	0	0	
$m+2$			$-\frac{14}{4}$	0	$-\frac{9}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{13}{4}$	0	0	
1	A_4	7	$\frac{14}{13}$	0	$\frac{9}{13}$	$-\frac{1}{13}$	1	0	0	
2	A_1	-2	$\frac{36}{13}$	1	$-\frac{1}{13}$	$\frac{3}{13}$	0	0	0	
3	A_5	0	$\frac{204}{13}$	0	$\frac{29}{13}$	$\frac{30}{13}$	0	1	0	
$m+1$			2	0	4	2	0	0	0	

Всё $x_j \geq 0$, томы $X^* = \left(\frac{36}{13}, 0, 0, \frac{14}{13}, \frac{204}{13} \right)$, $f_{\max} = 2$.

7. Двоїсті задачі лінійного програмування. Зв'язок між розв'язками прямої і двоїстих задач. Основні теореми двоїстості.

З кожною задачею лінійного програмування тісно пов'язана інша задача, така, що при розв'язуванні однієї із них одночасно розв'язується і друга. Ці задачі називаються двоїстими (спряженими) задачами.

Розглянемо стандартну задачу

$$\left. \begin{aligned} f &= c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max; \\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m; \end{cases} \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

або у матричній формі

$$f = C \cdot X; \quad A \cdot X \leq B; \quad X \geq 0. \quad (2)$$

Введемо у розгляд m-вим. вектор-рядок

$$\left. \begin{aligned} F &= b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m \rightarrow \min; \\ \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \geq c_2, \\ \dots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \geq c_n; \end{cases} \\ y_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

або у матричній формі

$$f = C \cdot B \rightarrow \min; \quad Y \cdot A \geq C; \quad Y \geq 0. \quad (4)$$

Задача (3) називається двоїстою (спряженою) до задачі (1). Відповідно задача (1) називається прямою у відношенні до задачі (3).

Часто двоїсті задачі мають конкретний економічний зміст. Побудуємо пару двоїстих задач.

Нехай прямою є задача використання сировини: підприємство має m видів сировини, з яких випускає n видів продукції. На одиницю j -тої продукції витрачається a_{ij} одиниць i -тої сировини. Запас i -тої сировини складає b_i одиниць, $i = 1, \dots, m$. Прибуток від реалізації одиниці j -тої продукції дорівнює c_j одиниць, $j = 1, \dots, n$. Треба знайти план $X = (x_1, \dots, x_n)$ випуску продукції, при якому прибуток є максимальним. Математичною моделлю цієї задачі є задача (1).

Економічну інтерпретацію спряженої задачі (3) можна подати так. Нехай задано величини b_i , a_{ij} , c_j , які мають той же зміст, що і у вихідній задачі. Нехай додатково введено ще одну умову: сировину можна направити або на виготовлення продукції або на продаж іншому підприємству. Треба знайти, яку мінімальну ціну треба встановити за одиницю кожного i -того виду сировини ($i = 1, \dots, m$) при умові, що прибуток від реалізації всіх її запасів повинен бути не меншим за прибуток від реалізації продукції, яка може бути вироблена з цієї сировини.

Визначимо через $y_i \geq 0$ шукану ціну одиниці сировини i -того виду. Прибуток, який одержимо від продажу сировини,

необхідної для виготовлення одиниці продукції j -того виду, дорівнює

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} y_i, \quad j = 1, \dots, n.$$

Для того, щоб продаж сировини був не менш вигідним, ніж реалізація виробленої з неї продукції, повинна виконуватись нерівність:

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Побудова двоїстих задач

З порівняння задач (1) і (3) впливають правила побудови двоїстої задачі до задачі (1).

1. Змінних y_i в задачі (3) стільки, скільки обмежень в задачі (1).

2. Задача максимізації переходить у задачу мінімізації.

3. Матриця умов задачі (3) - це транспонована матриця умов задачі (1).

4. Коефіцієнти при невідомих у цільовій функції задачі (3)- це вільні члени з обмежень задачі (1). Обмеження у задачі (3) - це коефіцієнти у цільовій функції прямої задачі (1).

5. Якщо змінна x_j вихідної задачі (1) є невід'ємною, то j -та умова в системі обмежень задачі (3) є нерівністю типу " $\geq$ ". Якщо в (1) змінна x_j довільного знаку, то j -те обмеження в (3) є рівністю. Якщо i -те співвідношення в (1) є рівністю " $\leq$ ", то $y_i \geq 0$, у протилежному випадку " $\geq$ " - змінна y_i може бути довільного знаку.

Описані правила можна подати такою схемою (випадок $f \rightarrow \max$)

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad \leftrightarrow \quad y_i \geq 0;$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad \leftrightarrow \quad \text{на } y_i \text{ умова на знак не накладається;}$$

$$x_j \geq 0 \quad \leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^n a_{ij} y_i \geq c_j;$$

$$\text{Умова на } x_j \quad \leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^n a_{ij} y_i = c_j.$$

не накладається

У вихідній задачі умови можуть бути інші. Наприклад $f \rightarrow \min$, обмеження " $\geq$ ", $x_j \geq 0$. Тоді такі задачі треба звести до одного з таких типів.

Пряма задача	Двоїста задача
1 $f = CX \rightarrow \max;$ $AX \leq B;$ $X \geq 0.$	$F = YB \rightarrow \min;$ $YA \geq C;$ $Y \geq 0.$
2 $f = CX \rightarrow \min;$ $AX \geq B;$ $X \geq 0.$	$F = YB \rightarrow \max;$ $YA \leq C;$ $Y \geq 0.$
3 $f = CX \rightarrow \max;$ $AX = B;$ $X \geq 0.$	$F = YB \rightarrow \min;$ $YA \geq C.$
4 $f = CX \rightarrow \min;$ $AX = B;$ $X \geq 0.$	$F = YB \rightarrow \max;$ $YA \leq C.$

Приклад. Записати двоїсті до заданих

а) $f = 2x_1 + x_2 + 5x_3 \rightarrow \min$; б) $f = 2x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 \rightarrow \max$;

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \leq 4, \\ x_1 - 5x_2 - x_3 \geq 5, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 6; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - x_4 \leq 5, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 6; \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j=1,2,3. \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \leq 0.$$

а) Зведемо задачу до виду 2

$$f = 2x_1 + x_2 + 5x_3 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \geq -4, \\ x_1 - 5x_2 - x_3 \geq 5, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 6; \end{cases}$$

Двоїста: $F = -4y_1 + 5y_2 + 6y_3 \rightarrow \max$;

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 + 2y_3 \leq 2, \\ y_1 - y_2 + 2y_3 \leq 1, \\ y_1 + y_2 + 3y_3 \leq 5, \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0. \end{cases}$$

б) Двоїста: $F = 5y_1 + 6y_2 \rightarrow \min$;

$$\begin{cases} 3y_1 - 2y_2 \geq 2, \\ -4y_1 + y_2 \geq -1, \\ 2y_1 - y_2 \geq 1, \\ -y_1 + 2y_2 = 5; \\ y_1 \geq 0. \end{cases}$$

Зведемо: $x_3 = -x'_3$;

$$f = 2x_1 - x_2 - x'_3 + 5x_4 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - 2x'_3 - x_4 \leq 5, \\ -2x_1 + x_2 + x'_3 + 2x_4 = 6; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \leq 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Тоді} \quad F = 5y_1 + 6y_2 \rightarrow \min; \\ \left\{ \begin{array}{l} 3y_1 - 2y_2 \geq 2, \\ -4y_1 + y_2 \geq -1, \\ -2y_1 + y_2 \leq -11, \\ -y_1 + 2y_2 = 5; \\ y_1 \geq 0. \end{array} \right. \end{aligned}$$

У прикладі б) задачу до основних виразів не зводили, а використали загальну постановку несиметричної двоїстої пари задач. Якщо пряма задача має вигляд

$$\begin{aligned} f = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max; \\ \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i=1, \dots, m_1, \quad m_1 \leq m; \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i=m_1+1, \dots, m. \end{array} \right. \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, n_1, \quad n_1 \leq n. \end{aligned}$$

то двоїста буде такою:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n a_{ij} y_i \leq c_j, \quad i=1, \dots, n_1, \quad n_1 \leq n; \\ \sum_{i=1}^n a_{ij} y_i = c_j, \quad i=n_1+1, \dots, n. \end{array} \right. \\ y_j \geq 0, \quad j=1, \dots, m_1, \quad m_1 \leq m. \end{aligned}$$

Зауваження. Задача, двоїста до двоїстої, є прямою задачею.

Висновок. Потрібно пам'ятати основне:

- 1) умова $x_j \leq 0$ змінюється
- 2) $\max$ відповідає знак " $\leq$ " у обмеженнях,
 $\min$ відповідає знак " $\geq$ " у обмеженнях,
при умові, що змінні ≥ 0 .

Зв'язок між розв'язністю прямої спряженої задачі

Вивчимо зв'язок між прямою і спряженою задачею. Сформулюємо основні властивості стосовно пари симетричних двоїстих задач задачі (1) і (3). Означимо множини допустимих розв'язків задач (1) і (3) відповідно

$$X = \{X | AX \leq B, X \geq 0\}, \quad Y = \{Y | YA \leq C, Y \geq 0\}.$$

Лема 1. Для довільних допустимих планів $X \in X$, $Y \in Y$ прямої і спряженої задачі правильні нерівності

$$CX \leq YB. \quad (5)$$

Оскільки $X \in X$, $Y \in Y$, то $AX \leq B$, $Y \geq 0$. Тоді $YAX \leq YB$.

Аналогічно, з того, що $YA \leq C$, $X \geq 0$ випливає $YAX \geq CX$. Тому

$$CX \leq YAX \leq YB.$$

Доведення для несиметричної пари задач проводиться аналогічно.

Нерівність (5) називається основною нерівністю теорії двоїстості. Її економічний зміст полягає в тому, що при довільному допустимому плані виробництва, X загальна вартість всього виробленого не перевищує сумарної оцінки ресурсів, що відповідає будь-якому допустимому вектору оцінок Y .

Лема 2. Якщо для деяких допустимих планів $X^* \in X$, $Y^* \in Y$ пари двоїстих задач виконується рівність

$$CX^* \leq Y^*B. \quad (6)$$

то вектори X^* і Y^* є оптимальним планами відповідно прямої і спряженої задачі.

Нагадаємо, що вектор X^* оптимальний, тоді і тільки тоді, коли для довільного допустимого вектора X правильна нерівність $CX \leq CX^*$. Нехай X – допустимий розв'язок прямої задачі. Тоді за лемою 1 рівністю (6) маємо:

$$CX \leq Y^* B = CX^*,$$

тобто X^* оптимальний. Аналогічно доводять оптимальність Y^* .

Лема 2 дає критерій оптимальності для задач лінійного програмування. Згідно з цією лемою, якщо серед допустимих розв'язків знайдуться вектори X^* і Y^* , що задовольняють (6), то вони будуть оптимальними розв'язками відповідних задач. З економічної точки зору це означає, що плани виробництва і оцінки ресурсів є оптимальними, якщо вартість всієї продукції і сумарна оцінка ресурсів збігаються.

Перша теорема двоїстості (теорема існування). Якщо пряма і спряжена задача допустимі, то вони мають оптимальні розв'язки, причому значення їх цільових функцій рівні.

Іншими словами, якщо одна з пари двоїстих задач має оптимальний розв'язок, то розв'язна і друга задача, причому значення цільових функцій рівні. Якщо f або F необмежена, то і інша задача не має розв'язку.

Друга теорема двоїстості (теорема про рівновагу). Допустимі розв'язки двоїстих задач $X \in X$, $Y \in Y$ оптимальні тоді і тільки тоді, коли виконуються умови

$$1) (YA - C)X = 0; \quad 2) Y(B - AX) = 0,$$

або в розгорнутому виді

$$1) \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} y_i - c_j \right) x_j = 0, \quad j=1, \dots, n; \quad 2) y_i \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) = 0, \quad i=1, \dots, m.$$

Умови 1) і 2) називаються умовами доповнюючої нежорсткості

1) Достатність

З доведення леми 1: для довільних $X^* \in X$, $Y^* \in Y$

$$CX \leq YAX \leq YB. \quad (7)$$

Нехай умови 1) і 2) виконуються. Тоді в (7) обидві нерівності стануть рівностями, тому $CX = YB$ і за лемою 2 X і Y – оптимальні розв’язки.

2) Необхідність

Нехай одна з умов не виконується, наприклад 2). Оскільки $B - AX \geq 0$ і $Y \geq 0$, то $Y(B - AX) > 0$, а тому з (7) $CX < YB$. Звідси випливає, що принаймні один з розв’язків X або Y не є оптимальним для відповідної задачі.

Аналогічно розглядається невиконання умови 1).

Таким чином, оптимальні розв’язки пари двоїстих задач володіють властивістю ортогональності:

Якщо j -та компонента оптимального вектора X додатна, то j -те обмеження спряженої задачі повинно виконуватись як рівність. Аналогічно якщо додатною є i -та компонента оптимального вектора Y , то i -те обмеження спряженої задачі повинно виконуватись як рівність.

З теореми двоїстості випливають наслідки:

Наслідок 1. Якщо одна з двоїстих задач має оптимальний розв’язок, то і друга має оптимальний розв’язок.

Наслідок 2. Якщо одна з двоїстих задач допустима, а друга ні, то цільова функція прямої задачі необмежена.

Зв’язок між двоїстими виявляється в тому, що при розв’язуванні одної одночасно розв’язується і друга.

Справді, легко бачити, що симплекс-таблиця умовами вихідної задачі включає і умови спряженої задачі. Так, рядки цієї таблиці містять ліві частини обмежень вихідної задачі, стовпчики – ліві частини обмежень спряженої задачі. Елементи стовпчика B є коефіцієнтами вектора обмежень прямої задачі і одночасно оцінками плану спряженої задачі.

Елементи Δ_j $(m+1)$ -го рядка дають оцінки плану вихідної задачі і одночасно коефіцієнти вектора обмежень спряженої задачі. Тому при розв'язуванні двоїстої задачі можна не будувати спеціальну симплекс-таблицю, а розв'язувати її, використовуючи таблицю вихідної задачі.

Оптимальні розв'язки двоїстих задач знаходяться одночасно. Компоненти оптимального розв'язку двоїстої задачі знаходяться в клітинках $(m+1)$ -го рядка останньої таблиці, які відповідають початковому одиничному базису прямої задачі і дорівнюють сумі відповідного елемента цього рядка і c_j .

Приклад. Розв'язати задачу

$$\begin{aligned} f &= x_2 - x_4 - 3x_5 \rightarrow \max ; \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 1, \\ -4x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 2, \\ 3x_2 + x_5 + x_6 = 5; \end{cases} \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, 6 \end{aligned}$$

і спряжену до неї

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array} \right.$$

Запишемо спряжену

$$\begin{aligned} F &= y_1 + 2y_2 + 5y_3 \rightarrow \min ; \\ \begin{cases} y_1 \geq 0, \\ 2y_1 - 4y_2 + 3y_3 \geq 1, \\ y_2 \geq 0, \\ -y_1 + 2y_2 \geq -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Розв'яжемо пряму

i	A_i	$\bar{b}_i$	B	0	1	0	-1	-3	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_1	0	1	1	2	0	-1	1	0
2	A_3	0	2	0	-4	1	2	-1	0
3	A_6	0	5	0	3	0	0	1	1
$m+1$	Δ		0	0	-1	0	1	3	0
1	A_2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
2	A_3	0	4	2	0	1	0	1	0
3	A_6	0	$\frac{7}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
$m+1$	Δ		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$	0

Отже, оптимальний план прямої задачі

$$X^* = \left(0, \frac{1}{2}, 4, 0, 0, -\frac{3}{2} \right) \quad f_{\max} = \frac{1}{2}.$$

Знайдемо оптимальний план двоїстої задачі. Його координати одержимо з $(m+1)$ -го рядка останньої ітерації. Щоб знайти i -ту координату, треба знайти стовпчик, у якому в початковому базисі знаходився вектор з одиничкою у i -тому рядку. З вибраного стовпчика беремо оцінку Δ_j і додаємо до неї відповідне значення коефіцієнта цільової функції c_j .

$$y_1 = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}, \quad y_2 = 0 + 0 = 0, \quad y_3 = 0 + 0 = 0.$$

$$\text{Отже, } Y^* = \left(\frac{1}{2}, 0, 0 \right), \quad F_{\min} = \frac{1}{2}.$$

8. Двоїстий симплекс-метод

Симплекс-метод застосовується для розв'язання задач з невід'ємними правими частинами b_i обмежень і довільними за знаком ознаками Δ_j . Деколи легше знайти базис, який задовольняє ознаку оптимальності (всі $\Delta_j \geq 0$), але не задовольняє умови $b_i \geq 0$. Варіант симплекс-методу, який застосовується для розв'язування таких задач, двоїстим симплекс-методом. З його допомогою розв'язуються задачі лінійного програмування

$$f = CX \rightarrow \max; \quad AX = B; \quad X \geq 0,$$

де матриця A містить одиничний базис і всі $\Delta_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$. При цьому умова $b_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$ не вимагається. Таку задачу називають задачею у двоїстій базисній формі.

Звичайний симплекс-метод, який застосовується до задач в базисній формі, приводить до послідовності еквівалентних задач із зростаючим значенням цільової функції і невід'ємними значеннями b_i , тобто кожний базисний розв'язок є допустимим.

Двоїстий симплекс-метод, який застосовується до задачі у двоїстій базисній формі, призводить до послідовності задач із спадним значенням цільової функції, невід'ємними коефіцієнтами Δ_j і значеннями b_i довільного знаку. Перетворення задач проводиться доти, поки не буде встановлено, що вихідна задача не має допустимого розв'язку, або не буде одержаний допустимий розв'язок (всі $b_i \geq 0$), який є одночасно оптимальним.

Тому звичайний симплекс-метод називають методом послідовного покращення планів, а двоїстий – методом послідовного уточнення планів.

Розглянемо задачу у двоїстій базисній формі. Можливі такі випадки:

Випадок 1. Всі коефіцієнти вектора обмежень невід’ємні: $b_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$. Оскільки всі $\Delta_j \geq 0$, то одержано доступний оптимальний план.

Випадок 2. Є рядок $i = r$, такий, що $b_r < 0$: всі $a_{rj} \geq 0$, $j = 1, \dots, n$. Тоді система обмежень несумісна, тоді задача нерозв’язна.

Випадок 3. Є рядок $i = r$, такий, що $b_r < 0$ і хоч для одного $a_{rj} < 0$, $j = 1, \dots, n$. Нехай $j = s$ таке, що $a_{rs} < 0$ і

$$-\frac{\Delta_s}{a_{rs}} = \min_{a_{rj} < 0} \left\{ -\frac{\Delta_s}{a_{rs}} \right\}.$$

Тоді жорданове перетворення з провідним елементом a_{rs} приводить до еквівалентної задачі у якій, по-перше, оцінки $\Delta_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$, а по-друге значення цільової функції $f'_0 = f_0$, і якщо $\Delta_s = 0$, то $f'_0 < f_0$.

Алгоритм двоїстого симплекс-методу.

1. Перевіряємо знаки b_i . Якщо всі $b_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$, то в стовпчику B записані базисний розв’язок і значення цільової функції, які дають оптимальний розв’язок вихідної задачі. Якщо не всі $b_i \geq 0$, перейти до кроку 2.

2. Серед від’ємних b_i вибираємо найбільше за модулем число b_r і r -тий розв’язок називається провідним.

3. У провідному рядку перевіряємо знаки коефіцієнтів a_{rj} , $j=1, \dots, n$. Якщо всі $a_{rj} \geq 0$, то задача розв'язку не має і немає жодного допустимого. Якщо знайдеться $a_{rj} < 0$, перейти до кроку 4.

4. Серед від'ємних коефіцієнтів a_{rj} провідного рядка вибираємо елемент a_{rs} , для якого

$$-\frac{A_s}{a_{rs}} = \min_{a_{rj} < 0} \left\{ -\frac{A_s}{a_{rs}} \right\} \text{ і називаємо провідним.}$$

5. Виконуємо жорданове перетворення з провідним елементом a_{rs} і переходимо до кроку 1.

У результаті методу оптимальний план прямої задачі додається списком A' базисних змінних і їх значеннями у стовпчику B . Для двоїстої задачі оптимальний план має значення в $m+1$ рядку, в стовпчиках, які відповідають базисним стовпчикам вихідної задачі.

Приклад 1. Розв'язати дану і двоїсту задачу

$$\begin{aligned} f &= x_1 + x_2 + 2x_3 \rightarrow \max ; \\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 - x_2 \geq 4, \\ x_1 + 2x_2 \geq 6; \end{cases} \\ x_j &\geq 0, \quad j=1,2,3. \end{aligned}$$

Запишемо задачу у канонічному вигляді, у кому система обмежень має одиничний базис.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ -x_1 + x_2 + x_4 = -4, \\ -x_1 - 2x_2 + x_5 = -6; \end{cases} \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 5. \end{aligned}$$

Розв'яжемо задачу двоїтим симплекс-методом

i	A	$\tilde{A}$	B	1	1	2	0	0	Всі $\Delta_j \geq 0$ $\max\{ -4 , -6 \} = 6$.
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
1	A_3	2	8	1	1	1	0	0	Провідний рядок $\min\left(\frac{-1}{-1}, \frac{-1}{-2}\right) = \frac{1}{2}$.
2	A_4	0	-4	-1	1	0	1	0	
3	A_5	0	-6	-1	-2	0	0	1	
$m+1$	Δ		16	1	1	0	0	0	
1	A_3	2	5	$\frac{1}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	
2	A_4	0	-7	$-\frac{3}{2}$	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$X = \left(\frac{14}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0\right)$.
3	A_2	1	3	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	
$m+1$	Δ		13	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	
1	A_3	2	$\frac{8}{3}$	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	
2	A_1	1	$\frac{14}{3}$	1	0	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	
3	A_2	1	$\frac{2}{3}$	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	Всі $b_i = 0$
$m+1$			$\frac{32}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	

$$X^* = \left(\frac{14}{3}, \frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right) \quad f_{\max} = \frac{32}{3}.$$

Запишемо двоїсту задачу

$$F = 8y_1 - 4y_2 - 6y_3 \rightarrow \min;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 - y_2 - y_3 \geq 1, \\ y_1 + y_2 - 2y_3 \geq 1, \\ y_1 \geq 2, \\ y_2 \geq 0, \\ y_3 \geq 0. \end{array} \right.$$

Запишемо розв'язок двоїстої

$$F_{\min} = \frac{32}{3}; \quad Y^* = \left(0 + 2, \frac{1}{3} + 0, \frac{5}{3} + 0 \right) = \left(2, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right).$$

$$\text{Відповідь: } f_{\max} = f\left(\frac{14}{3}, \frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3}; \quad F_{\min} = F\left(2, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{32}{3}.$$

Двоїстий симплекс-метод зручно використовується: тоді, коли задача має одиничний базис, але чи є у базисній, або у двоїстій базисній формі, тобто існують від'ємні Δ_j і b_i .

Розв'язання такої задачі складається з двох етапів і спочатку за допомогою двоїстого симплекс-методу виключаються всі від'ємні b_i , потім оптимальний план знаходиться симплекс-методом. Треба лише на першому етапі змінити крок 4 так:

4'. Серед від'ємних коефіцієнтів a_{rs} , для якого

$$\frac{b_r}{a_{rs}} = \max_{a_{rs} < 0} \left\{ - \frac{b_r}{a_{rs}} \right\}.$$

Приклад 2.

$$f = 8x_1 + 2x_2 - 5x_3 \rightarrow \max;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 \geq 3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 2; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 - x_3 \geq -6, \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 \geq -3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 2; \end{array} \right.$$

$$x_j \geq 0, \quad j=1,2,3. \quad x_j = 1,2,3.$$

Зведемо до задачі у базисній формі:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -6, \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_5 = -3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 2; \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 6. \end{cases}$$

Далі двоїтим симплекс-методом

i	A	$\tilde{A}$	B	8	2	-5	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_4	0	-6	1	-2	-1	1	0	0
2	A_5	0	-3	-1	2	-2	0	1	0
3	A_6	0	2	2	1	-1	0	0	1
$m+1$			0	-8	-2	5	0	0	0
1	A_3	-5	6	-1	2	1	-1	0	0
2	A_5	0	9	-3	6	0	-2	1	0
3	A_6	0	8	1	3	0	-1	0	1
$m+1$			-30	-3	-12	0	5	0	0
1	A_3	-5	3	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
2	A_2	2	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0
3	A_6	0	$\frac{7}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	1
$m+1$			-12	-9	0	0	1	2	0
1	A_3	-5	3	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
2	A_2	2	$\frac{11}{5}$	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{5}$
3	A_1	8	$\frac{7}{5}$	1	0	0	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
$m+1$			$\frac{3}{5}$	0	0	0	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{18}{5}$

Провідний

$$\max \left(\frac{-6}{-2}, \frac{-6}{1} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\min \left(\frac{6}{2}, \frac{9}{6}, \frac{2}{3} \right).$$

$$X^* = \left(\frac{7}{5}, \frac{11}{5}, 3 \right); \quad f_{\max} = \frac{3}{5}.$$

Двоїсту задачу: $F = -6y_1 - 3y_2 + 2y_3 \rightarrow \min$;

$$\begin{cases} y_1 - y_2 + 2y_3 \geq 8, \\ 2y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 2, \\ -y_1 - 2y_2 - y_3 \geq -5; \end{cases}$$

$$y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

$$Y^* = \left(1, \frac{1}{5}, \frac{16}{5} \right), \quad F_{\min} = \frac{3}{5}.$$

9. Цілочислове програмування.

Існує доволі широкий клас задач математичного програмування, в економіко-математичних моделях яких одна, декілька або всі змінні мають набувати цілих значень.

Розглянемо задачу цілочислового програмування:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max; \quad (1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m; \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \end{cases} \quad (3)$$

$$x_j - \text{ціле}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Для розв'язування цілочислових задач використовують метод відсікання або, як його ще називають, метод Гоморі.

Цілою частиною числа z називають найбільше ціле число, яке не перевищує z і позначають символом $[z]$.

Наприклад, $\left[\frac{3}{4}\right] = 0$; $[-2.5] = -3$; $[6] = 6$.

Дробовою частиною числа z називають різницю між z і його цілою частиною $[z]$ і позначають символом $\{z\}$.

Наприклад, $\{-2.7\} = 0.3$; $\{-3\} = 0$; $\{5.6\} = 0.6$.

Очевидно, що $\{z\} \geq 0$, причому $\{z\} = 0$, тоді і тільки тоді, коли z – ціле.

У методі Гоморі починають розв'язувати (1)–(4) за допомогою симплекс-методу. Якщо при цьому дістаємо оптимальний розв'язок, координати якого є цілими числами, то розв'язування задачі закінчено. Якщо ж необхідної цілочисловості немає, то будується відсікання, згідно з яким

відсікається знайдений нецілочисловий результат, але в області залишаються усі допустимі точки з цілими координатами.

Нехай в оптимальному плані (1)–(4) є дробові координати. Виберемо ту з них, дробова частина якої найбільша. Нехай це буде координата, що відповідає r -ному рядку таблиці, в якому одержали оптимальний, але не цілочисловий результат.

З допомогою коефіцієнтів цього рядка будемо відсікання $+ \{a_{r1}\}x_1 + \{a_{r2}\}x_2 + \dots + \{a_{rn}\}x_n \geq \{b_r\}$,

яке із введенням додаткової змінної $x_{n+1} \geq 0$ набуває вигляду

$$- \{a_{r1}\}x_1 - \{a_{r2}\}x_2 - \dots - \{a_{rn}\}x_n + x_{n+1} = -\{b_r\}.$$

Додаємо одержане обмеження до останньої симплекс таблиці, розв'язуємо поставлену тепер задачу за допомогою двоїстого симплекс-методу, беремо x_{n+1} змінну за базисну і для неї вводимо додатковий стовпчик.

Якщо в результаті одержаний оптимальний розв'язок ще містить нецілочислові координати, то будемо нові додаткові обмеження по вище описаній схемі для змінної x_{n+2} і процес обчислень продовжуємо до тих пір, доки всі координати оптимального розв'язку не стануть цілочисловими або задача не матиме розв'язку. Останнє має місце тоді, коли в рядку з дробовим b_s усі a_{is} цілі ($i=1,2,\dots,m$).

Приклад.

З допомогою метода відсікань Гоморі знайти повністю цілочисловий оптимальний розв'язок задачі

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \leq 20, \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 19; \\ x_j \geq 0; \quad x_j \in Z, \quad j \in \{1; 2\}. \\ F = 7x_1 + 3x_2 \quad (\max). \end{cases}$$

Введемо дві додаткові змінні $x_3 \geq 0$ і $x_4 \geq 0$ і запишемо вихідну задачу в канонічній формі

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 20, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_4 = 19; \\ x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \quad x_3 \geq 0; \quad x_4 \geq 0. \\ F = 7x_1 + 3x_2 \text{ (max)}. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю задачу симплекс-методом.

Складемо симплекс таблиці:

i	A_i	$\tilde{N}A_i$	A_0	7	3	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4
1	A_3	0	20	5	2	1	0
2	A_4	0	19	4	2	0	1
$m+1$			0	-7	-3	0	0
1	A_1	7	4	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	0
2	A_4	0	3	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{4}{5}$	1
$m+1$			28	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{7}{5}$	0
1	A_1	7	1	1	0	1	-1
2	A_2	3	$\frac{15}{2}$	0	1	-2	$\frac{5}{2}$
$m+1$			$\frac{59}{2}$	0	0	1	$\frac{1}{2}$

$$F_{opt} = \frac{59}{2}; \quad x_1 = 1; \quad x_2 = \frac{15}{2}.$$

Умова оптимальності виконується, бо всі $\Delta_j \geq 0$ ($j=1,2,3,4$). В оптимальному плані задачі є дробова координата $x_2 = \frac{15}{2}$. Змінна x_2 , яка приймає не цілочислове значення знаходиться в другому рядку останньої симплекс-

таблиці. З допомогою коефіцієнтів цього рядка й будується відсікання Гоморі.

$$\{0\}x_1 + \{1\}x_2 + \{-2\}x_3 + \left\{\frac{5}{2}\right\}x_4 \geq \left\{\frac{15}{2}\right\}.$$

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \frac{1}{2}x_4 \geq \frac{1}{2},$$

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 - x_4 + x_5 = -1.$$

Це рівняння додається в останню таблицю для продовження розв'язання.

<i>i</i>	<i>A</i>	<i>Ñá</i>	<i>A</i> ₀	7	3	0	0	0
				<i>A</i> ₁	<i>A</i> ₂	<i>A</i> ₃	<i>A</i> ₄	<i>A</i> ₅
1	<i>A</i> ₁	7	1	1	0	1	-1	0
2	<i>A</i> ₂	3	$\frac{15}{2}$	0	1	-2	$\frac{5}{2}$	0
3	<i>A</i> ₅	0	-1	0	0	0	-1	1
<i>m</i> + 1			$\frac{59}{2}$	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0
1	<i>A</i> ₁	7	2	1	0	1	0	-1
2	<i>A</i> ₂	3	5	0	1	-2	0	$\frac{5}{2}$
3	<i>A</i> ₄	0	1	0	0	0	1	-1
<i>m</i> + 1			29	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$

Розв'язувальний елемент у розширеній (четвертій) симплекс-таблиці ми вибрали використовуючи процедуру двоїстого симплексного методу. З останньої симплекс таблиці ми одержали оптимальний цілочисловий розв'язок даної задачі.

$$x^* = (2; 5; 0; 1; 0), \text{ тобто } x_1 = 2; \quad x_2 = 5.$$

$$F_{opt} = 29.$$

10. Транспортна задача.

10.1 Постановка транспортної задачі.

Загальна постановка транспортної задачі полягає у знаходженні оптимального плану перевезень деякого однорідного вантажу з m пунктів відправлення $A_1, A_2, \dots, A_m$ у n пунктів призначення $B_1, B_2, \dots, B_n$. При цьому критерієм оптимальності є або мінімальна вартість перевезень усього вантажу, або мінімальний час його доставки. Ми розглядатимемо випадок, де критерієм оптимальності є мінімальна вартість перевезень.

Позначимо через x_{ij} ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$) кількість одиниць вантажу, який перевозиться з пункту відправлення A_i в пункт призначення B_j або від i -того постачальника до j -того споживача, через a_i – запаси вантажу в пункті A_i , через b_j – потреби у вантажі в пункті B_j , через c_{ij} – вартість перевезення одиниці вантажу з пункту A_i в пункт B_j .

Тоді математична модель транспортної задачі має вигляд:

$$F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (1)$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} = a_1, \\ x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} = a_2, \\ \dots \\ x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} = a_n; \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} = b_1, \\ x_{12} + x_{22} + \dots + x_{m2} = b_2, \\ \dots \\ x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{mn} = b_n; \end{cases} \quad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0; \quad i \in \{1, \dots, m\}, \quad j \in \{1, \dots, n\}. \quad (4)$$

Якщо в транспортній задачі загальна кількість продукції постачальників дорівнює загальному попиту всіх споживачів,

$$\text{тобто} \quad \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j; \quad (5)$$

то таку транспортну задачу називають закритою або збалансованою.

Якщо $\sum_{i=1}^m a_i \neq \sum_{j=1}^n b_j$, то транспортну задачу називають відкритою або незбалансованою.

Будь-який допустимий (невід'ємний) розв'язок системи обмежень (2), (3) транспортної задачі називають планом транспортної задачі і позначають матрицею $x = (x_{ij})$ ($i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}$). Оптимальним планом транспортної задачі називають матрицю $x^* = (x_{ij}^*)$ ($i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}$), яка задовольняє умови задачі і для якої цільова функція (1) набуває найменшого значення.

Теорема. (Умова існування розв'язку транспортної задачі)

Необхідною і достатньою умовою існування розв'язку транспортної задачі є її закритість (збалансованість), тобто

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j.$$

Метод потенціалів.

Транспортна задача є задачею лінійного програмування, яку можна розв'язати симплекс-методом. Але специфічна структура транспортної задачі дає змогу використовувати для її розв'язання ефективний метод, який повторює по суті, кроки симплекс-алгоритму. Таким є метод потенціалів.

Алгоритм методу розв'язання транспортної задачі складається з таких етапів:

1. Визначення типу транспортної задачі (відкрита чи закрыта).
2. Побудова першого опорного плану транспортної задачі.
3. Перевірка плану транспортної задачі на оптимальність.
4. Якщо умова оптимальності виконується, то маємо оптимальний розв'язок транспортної задачі. Якщо ж умова оптимальності не виконується, необхідно перейти до наступного опорного плану.
5. Новий план знову перевіряємо на оптимальність, тобто повторюємо дії п.3 і т.д.

Розглянемо кожний етап цього алгоритму.

1. Якщо при перевірці збалансованості виявилось, що $\sum_{i=1}^m a_i \neq \sum_{j=1}^n b_j$, то задачу треба звести до закрытого виду, тобто зрівняти поставки і потреби. Робиться це введенням фіктивного постачальника або фіктивного споживача залежно від співвідношення суми $\sum_{i=1}^m a_i$ і $\sum_{j=1}^n b_j$.

Можливі два випадки:

а) Якщо $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$, то водиться під номером $(m+1)$ -ий

фіктивний постачальник із поставкою $a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$.

б) Якщо $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$, то вводиться $(n+1)$ -ий фіктивний

споживач з потребою $b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$. Вартості

перевезення одиниці продукції для фіктивного постачальника A_{m+1} або фіктивного споживача B_{n+1} вважаються рівними нулю.

Такий вибір цих вартостей при поставках не впливає на значення цільової функції F .

2. Забезпечивши закритість розв'язуваної задачі, розпочинаємо будувати початковий опорний план. Із математичної моделі транспортної задачі очевидно, що число змінних x_{ij} дорівнює mn , а число рівнянь $m+n$. Оскільки ми припускаємо, що виконується умова (5), то число лінійно незалежних рівнянь дорівнює $m+n-1$. Тому опорний план може мати не більше ніж $m+n-1$ додатних координат. Якщо цих координат точно $m+n-1$, то план називається не виродженим, якщо ж менше – виродженим. В такому випадку, якщо план вироджений і число заповнених клітинок таблиці транспортної задачі менше $m+n-1$, то необхідно доповнити таблицю до кількості $m+n-1$ заповнених клітинок, ввівши в порожні клітинки об'єм перевезень рівним нулю.

Зручно подавати транспортну задачу і її розв'язування за допомогою транспортної таблиці (матриці перевезень), яка має такий вигляд:

	B_1	B_2	...	B_n	запаси
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
...	...	...	...	...	...
A_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	...	c_{in} x_{in}	a_i
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
потреби	b_1	b_2	...	b_n	

Для побудови опорних планів задачі (1)- (4) використовують такі три методи: північно-західного кута, мінімальної вартості, подвійної переваги.

I. Метод північно-західного кута.

Згідно з цим методом побудову опорного плану починають з заповнення лівої верхньої клітинки таблиці c_{11} , спочатку розподіляють запаси першого постачальника, причому він має спочатку задовольнити якомога повніше потреби першого споживача. Якщо запаси залишаються, то він має задовольнити потреби другого споживача і т.д. закінчують заповнення таблиці в правій нижній клітинці.

II. Метод мінімальної вартості.

Ідея цього методу полягає в тому, що на кожному кроці заповнюють клітинку таблиці, яка має найменшу вартість перевезень одиниці вантажу. Такі дії повторюють до тих пір,

поки не буде розподілено всю продукцію між постачальниками і споживачами.

При користуванні цим методом з розгляду виключаємо рядок, який відповідає постачальнику, запаси якого повністю використано або стовпчик, що відповідає споживачу, потреби якого повністю задоволено.

III. Метод подвійної переваги.

Цей метод застосовується в транспортних задачах з великою кількістю перевезень. Спочатку в кожному рядку позначаємо клітинку з найменшою вартістю знаком V , потім таке саме робимо для кожного стовпчика таблиці. Отримуємо окремі клітинки, що мають дві позначки W , деякі по одній V , а деякі зовсім не мають позначок. Розподіл вантажу починаємо з клітинки з двома позначками W , вибравши з них клітинку з мінімальною вартістю і рухаємося в міру зростання вартості перевезень. Далі заповнюємо клітинки позначені один раз V , а вже потім – непозначені клітинки, користуючись при цьому методом мінімальної вартості.

3. Опорний план перевіряють на оптимальність за допомогою потенціалів α_i і β_j відповідно постачальників і споживачів.

Теорема. (умова оптимальності опорного плану транспортної задачі).

Якщо для деякого опорного плану $x^* = (x_{ij}^*)$ існують числа α_i і β_j , для яких виконуються умови:

$$\beta_j - \alpha_i = c_{ij}, \quad x_{ij} > 0;$$

$$i \quad \beta_j - \alpha_i \leq c_{ij}, \quad x_{ij} = 0,$$

для всіх $i = \overline{1, m}$; та $j = \overline{1, n}$,

то він є оптимальним планом транспортної задачі.

Числа α_i і β_j називаються потенціалами відповідно пунктів відправлення і пунктів призначення.

Алгоритм методу потенціалів

1. Числа α_i і β_j знаходимо із системи рівнянь

$$\beta_j - \alpha_i = c_{ij}, \quad (6)$$

де c_{ij} – вартості, які стоять у заповнених клітинках таблиці умови задачі. Таких рівнянь є $m + n - 1$, а невідомих $m + n$, тобто число рівнянь на одиницю менше числа невідомих, а тому одне з невідомих, наприклад α_1 можна взяти рівним нулю. Усі інші α_i і β_j знаходимо з системи (6).

2. Після цього для вільних клітинок знаходимо числа

$$d_{ij} = \beta_j - \alpha_i - c_{ij}.$$

(7)

Якщо серед цих чисел d_{ij} немає додатних, то одержимо оптимальний план. Випишемо одержаний розв'язок і обчислюємо вартість перевезень.

3. Якщо ж є додатні числа серед обчислених d_{ij} , то переходимо до нового опорного плану. Для цього серед чисел d_{ij} вибирають найбільше і для клітинки, якій воно відповідає, роблять перерахунок вантажу за циклом, тобто заповнюють цю клітинку, зробивши перерозподіл вантажу між клітинками, які пов'язані з нею циклом.

Цикл перерахунку вільної клітинки є замкнута ламана лінія з горизонтальними і вертикальними ланками, що чергуються; одна із вершин ламаної знаходиться у вільній клітинці, а всі інші вершини ламаної знаходяться у базисних клітинках.

4. Послідовно розставляємо „+” і „-“ по чергово у вершинах циклу, починаючи від клітинки, для якої здійснюється перерозподіл.

Серед об'ємів поставок в клітинках із знаком „-“ вибираємо найменше і додаємо це значення до об'ємів поставок в клітинках з знаком „+” та віднімаємо від об'ємів поставок в клітинках зі знаком „-“.

5. Будуємо новий опорний план, який досліджуємо на оптимальність згідно вказаного алгоритму.

Приклад 1.

Знайти опорний план даної транспортної задачі методом північно-західного кута.

	B_1	B_2	B_3	запаси
A_1	4	1	5	18
A_2	2	3	6	10
A_3	5	7	4	20
потреби	25	10	13	48

$$\sum_{i=1}^3 a_i = \sum_{j=1}^3 b_j = 48.$$

Дана транспортна задача
закрита.

В клітинку (1;1) помістимо $x_{11} = \min(18; 25) = 18$.

Вантаж першого постачальника вичерпаний, тому перший рядок виключається з розрахунку. Переходимо до розподілу вантажу другого постачальника. У клітинки (2;1)

помістимо необхідну кількість вантажу $x_{21} = 7$. Попит першого споживача задоволено повністю, перший стовпчик виключається з розрахунку. Залишок вантажу другого постачальника записуємо в клітинку (2;2) $x_{22} = 3$.

Вантаж другого постачальника вичерпаний, другий рядок виключається з розрахунку. Переходимо до розподілу вантажу третього постачальника. З урахуванням потреб другого споживача в клітинку (3;2) поміщаємо необхідну кількість вантажу $x_{32} = 7$. Потреби другого споживача задоволено повністю. У клітинку (3;3) поміщаємо залишок вантажу третього постачальника $x_{33} = 13$. Одержали повний розподіл запасів вантажу.

	B_1	B_2	B_3	запаси
A_1	4 18	1	5	18
A_2	2 7	3 3	6	10
A_3	5	7 7	4 13	20
потреби	25	10	13	48

$$x^* = \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 13 \end{pmatrix}.$$

Заповненими виявилися 5 клітинок, що дорівнює $m + n - 1$, а це означає, що даний план невироджений.

Приклад 2.

Побудувати за правилом подвійної переваги початковий опорний план транспортної задачі.

	B_1	B_2	B_3	B_4	запаси
A_1	5	4	1	2	60
A_2	4	2	6	3	40

A_3	7	3	5	4	35
потреби	40	25	20	50	135

В першому рядку ми помітимо клітинку (1;3) значком V , у якій стоїть найменша вартість. В другому рядку помічаємо клітинку (2;2), у третьому – (3;2). Аналогічно зробимо і в стовпчиках. Таким чином, в клітинках (1;3) і (2;2) буде 2 позначки, тому їх заповнювати будемо першими. Потім заповнюємо клітинки (1;4) і (2;1) з однією позначкою. Далі заповнюємо всі інші клітинки і одержимо таку таблицю:

	B_1	B_2	B_3	B_4	запаси
A_1	5	4	$\begin{matrix} 1 & W \\ 20 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 & V \\ 40 \end{matrix}$	60
A_2	$\begin{matrix} 4 & V \\ 15 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 & W \\ 25 \end{matrix}$	6	3	40
A_3	$\begin{matrix} 7 \\ 25 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 3 & V \end{matrix}$	5	4	35
потреби	40	25	20	50	135

$$x^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 15 & 25 & 0 & 0 \\ 25 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Даний план – невироджений. Число заповнених клітинок буде 6, а це дорівнює $m + n - 1$.

Приклад 3.

У пунктах постачання A_1 , A_2 , A_3 є однорідний вантаж в обсязі 45, 75, 80 одиниць відповідно; цей вантаж треба транспортувати у пункти B_1 , B_2 , B_3 в обсязі відповідно 35, 85, 80 одиниць. Матриця перевезень одиниці вантажу має вигляд

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 4 & 18 & 24 \\ 6 & 30 & 22 \end{pmatrix}.$$

Знайти оптимальний план перевезень, тобто такий план для якого сума транспортних витрат є мінімальною. Позначимо через x_{ij} – кількість одиниць вантажу, який перевозиться з пункту A_i ($i=1,2,3$) в пункт B_j ($j=1,2,3$).

Матриця перевезень транспортної задачі має вигляд:

	B_1	B_2	B_3	запаси
A_1	2 x_{11}	5 x_{12}	7 x_{13}	45
A_2	4 x_{21}	18 x_{22}	24 x_{23}	75
A_3	6 x_{31}	30 x_{32}	22 x_{33}	80
потреби	35	85	80	200

$$\sum_{i=1}^3 a_i = \sum_{j=1}^3 b_j.$$

Дана транспортна задача замкнута.

Математична модель цієї задачі запишеться так:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 45, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 75, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 80, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 35, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 85, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 80. \end{cases} \quad (8)$$

Загальна вартість перевезень є

$$F = 2x_{11} + 5x_{12} + 7x_{13} + 4x_{21} + 18x_{22} + 24x_{23} + 6x_{31} + 30x_{32} + 22x_{33}.$$

Потрібно серед всіх допустимих розв'язків записаної системи обмежень (8) знайти такий, при якому цільова функція F досягає мінімального значення.

Транспортна задача розв'язується симплекс-методом з використанням матриці перевезень.

Спочатку знаходимо опорний план транспортної задачі, наприклад, методом найменшої вартості.

В нашому випадку дістанемо.

Потенц.	2	5	11	запаси
0	2 35	5 10	7	45
-13	4	18 75	24 0	75
-11	6	30	22 80	80
потреби	35	85	80	200

Заповнені (базисні) клітинки відповідають базисним невідомим, а незаповнені (вільні) клітинки – вільним невідомим.

В нас заповнених клітинок 4, а $m + n - 1 = 5$. Отже, опорний план вироджений. У такому разі необхідно заповнити вільну клітинку, помістивши туди нульовий вантаж. Нехай це буде клітинка (2;3). Опорний план став невивірженим. Перевіримо цей план на оптимальність. Потенціали постачальників і споживачів знайдемо, розв'язавши таку систему рівнянь

$$\beta_j - \alpha_i = c_{ij},$$

записаних для всіх заповнених клітинок.

$$\beta_1 - \alpha_1 = 2;$$

$$\beta_2 - \alpha_1 = 5;$$

$$\beta_2 - \alpha_2 = 18;$$

$$\beta_3 - \alpha_2 = 24;$$

$$\beta_2 - \alpha_3 = 22.$$

$$\text{Покладемо } \alpha_1 = 0.$$

Розв'язавши цю систему рівнянь одержимо:

$$\beta_1 = 2; \quad \beta_2 = 5; \quad \alpha_2 = -13; \quad \beta_3 = 11; \quad \alpha_3 = -11.$$

Для вільних клітинок знаходимо числа d_{ij} :

$$d_{ij} = \beta_j - \alpha_i - c_{ij};$$

$$d_{13} = 11 - 0 - 7 = 4;$$

$$d_{21} = 2 + 13 - 4 = 11;$$

$$d_{31} = 2 + 11 - 6 = 7. \quad \text{План не оптимальний, бо є } d_{ij} > 0.$$

$$d_{32} = 5 + 11 - 30 = -14.$$

Серед додатних d_{ij} вибираємо найбільше $d_{21} = 11$. Для клітинки (2;1) якій воно відповідає робимо перерахунок вантажу за циклом і переходимо до нового опорного плану. Для клітинки (2;1) будуємо цикл. Вершині циклу, що знаходиться в цій вільній клітинці запишемо знак „+”, другий „-“ і т.д. серед від'ємних вершин циклу вибираємо ту найменшу, в якій об'єм поставок найменший, тобто $x_{11} = 35$, додаємо найменший у клітинки із знаком „+” і віднімаємо від вантажу і додаємо це значення до об'ємів поставок в клітинках із знаком „-“. Одержуємо новий опорний план, який є не виродженим.

Перевіряємо його на оптимальність.

Потенц.	2	5	11	запаси
0	2	5 4 5	7	45
-13	4 35	18 40	24 0	75
-11	6	30	22 80	80
потреби	35	85	80	200

Знайдемо потенціали постачальників і споживачів, записавши відповідну систему для заповнення клітинок:

$$\beta_2 - \alpha_1 = 5;$$

$$\beta_1 - \alpha_2 = 4;$$

$$\beta_2 - \alpha_2 = 18;$$

$$\beta_3 - \alpha_2 = 24;$$

$$\beta_3 - \alpha_3 = 22.$$

Якщо $\alpha_1 = 0$, то $\beta_2 = 5$; $\beta_1 = -9$; $\alpha_2 = -13$; $\beta_3 = 11$; $\alpha_3 = -11$.

Для вільних клітинок знаходимо числа d_{ij} .

$$d_{11} = -9 - 0 - 2 = -11;$$

$$d_{13} = 11 - 0 - 7 = 4;$$

$$d_{31} = -9 + 11 - 6 = -4. \quad \text{План не оптимальний, бо } d_{13} > 0.$$

$$d_{32} = 5 + 11 - 30 = -14.$$

Для клітинки (1;3) будемо цикл і аналогічно як в попередньому випадку робимо перерахунок вантажу за циклом, тобто заповнюємо цю клітинку, зробивши перерозподіл вантажу між клітинками, які пов'язані з нею циклом. Одержимо новий не вироджений опорний план. Перевіримо цей план на оптимальність.

Потенц.	-9	5	7	запаси
0	2	5 4 5	7 0	45
-13	4 35	18 40	24	75
-15	6	30	22 80	80
потреби	35	85	80	200

Запишемо систему рівнянь для заповнених клітинок, розв'яжемо її і знайдемо потенціали:

$$\beta_2 - \alpha_1 = 5;$$

$$\beta_1 - \alpha_2 = 4;$$

$$\beta_2 - \alpha_2 = 18;$$

$$\beta_3 - \alpha_3 = 22;$$

$$\beta_3 - \alpha_1 = 7.$$

Якщо взяти $\alpha_1 = 0$, то $\beta_2 = 5$; $\beta_1 = -9$; $\alpha_2 = -13$; $\beta_3 = 7$; $\alpha_3 = -15$.

Знайдемо d_{ij} для вільних клітинок:

$$d_{11} = -9 - 0 - 2 = -11;$$

$$d_{23} = 7 + 13 - 24 = -4;$$

$$d_{31} = -9 + 15 - 6 = 0;$$

$$d_{32} = 5 + 15 - 30 = -10.$$

Таким чином, одержаний план є оптимальним.

Він має вигляд

$$x^* = \begin{pmatrix} 0 & 45 & 0 \\ 35 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 80 \end{pmatrix}$$

і йому відповідає мінімальне значення цільової функції:

$$F_{\min} = 225 + 140 + 720 + 1760 = 2845.$$

Приклад 4.

Для будівництва чотирьох об'єктів використовується цегла, яка виготовляється на трьох заводах. Щоденно кожний завод може виготовити 100, 150 і 50 куб.м цегли. Щоденні потреби в цеглі на кожному з об'єктів відповідно дорівнюють 75, 80, 60 і 85 куб.м.

Відомі також тарифи перевезень:

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 20 & 1 \end{pmatrix}.$$

Скласти такий план перевезень цегли до об'єктів, при якому загальна вартість перевезень буде мінімальною.

Матриця перевезень даної задачі має вид:

$$\sum_{i=1}^4 a_i = \sum_{j=1}^4 b_j = 300.$$

	B_1	B_2	B_3	B_4	запаси
A_1	6 x_{11}	7 x_{12}	3 x_{13}	5 x_{14}	100
A_2	1 x_{21}	2 x_{22}	5 x_{23}	6 x_{24}	150
A_3	8 x_{31}	10 x_{32}	20 x_{33}	1 x_{34}	50
потреби	75	80	60	85	300

Транспортна задача є закритою.

де x_{ij} – кількість кубічних метрів цегли, яка перевозиться з i -го заводу ($i=1,2,3$) до j -го об'єкту ($j=1,2,3$).

Математична модель задачі запишеться так:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 100, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 150, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 50, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 75, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 80, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 60, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 85. \end{cases}$$

Загальна вартість перевезень:

$$F = 6x_{11} + 7x_{12} + 3x_{13} + 5x_{14} + x_{21} + 2x_{22} + 5x_{23} + 6x_{24} + 8x_{31} + 10x_{32} + 20x_{33} + x_{34}.$$

Серед усіх допустимих розв'язків системи обмежень знайти такий, при якому цільова функція F мінімізується.

Знайдемо вихідний опорний план цієї задачі методом найменшої вартості.

Потенц.	6	7	3	5	запаси
0	6	7 5	3 60	5 35	100
5	1 75	2 75	5	6	150
4	8	10	20	1 50	50
потреби	75	80	60	85	300

Заповнених базисних кліточок є 6. Опорний план не вироджений. Перевіримо його на оптимальність. Складемо систему для знаходження потенціалів:

$$\begin{cases} \beta_2 - \alpha_1 = 7, \\ \beta_3 - \alpha_1 = 3, \\ \beta_4 - \alpha_1 = 5, \\ \beta_1 - \alpha_2 = 1, \\ \beta_2 - \alpha_2 = 2, \\ \beta_4 - \alpha_3 = 1. \end{cases}$$

Розв'язавши дану систему при умові, що $\alpha_1 = 0$, одержимо $\beta_2 = 7$; $\beta_3 = 3$; $\beta_4 = 5$; $\alpha_2 = 5$; $\alpha_3 = 4$; $\beta_1 = 6$.

Для кожної вільної клітинки обчислимо числа:

$$\begin{aligned} d_{ij} &= \beta_j - \alpha_i - c_{ij}; \\ d_{11} &= 6 - 0 - 6 = 0, \\ d_{23} &= 3 - 5 - 5 = -7, \\ d_{24} &= 5 - 5 - 6 = -6, \\ d_{31} &= 6 - 4 - 8 = -6, \end{aligned}$$

$$d_{32} = 7 - 4 - 10 = -7,$$

$$d_{33} = 3 - 4 - 20 = -21.$$

Серед цих чисел немає додатних, то одержаний план оптимальний.

$$x^* = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 60 & 35 \\ 75 & 75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{pmatrix}.$$

$$F_{\min} = 7 \cdot 5 + 3 \cdot 60 + 5 \cdot 35 + 75 + 2 \cdot 75 + 50 = 665.$$

Приклад 5.

Знайти оптимальний розв'язок транспортної задачі

	B_1	B_2	B_3	запаси
A_1	0	0	8	40
A_2	3	5	1	60
A_3	1	2	4	50
потреби	70	30	20	

$$\sum_{i=1}^m a_i \neq \sum_{j=1}^n b_j.$$

Дана транспортна задача – це задача з неправильним балансом.

Так як $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$, то вводимо B_4 фіктивний споживач із

потребою $B_4 = \sum_{i=1}^3 a_i - \sum_{j=1}^3 b_j = 150 - 120 = 30$. Якщо додано

фіктивного споживача, то в матриці перевезень виникає додатковий стовпчик, вартості перевезень у цих фіктивних клітинках беремо нульовим. Поставлена задача стає закритою.

Матриця перевезень має вид:

	B_1	B_2	B_3	B_4	запаси
A_1	0 x_{11}	0 x_{12}	8 x_{13}	0 x_{14}	40
A_2	3 x_{21}	5 x_{22}	1 x_{23}	0 x_{24}	60
A_3	1 x_{31}	2 x_{32}	4 x_{33}	0 x_{34}	50
потреби	70	30	20	30	150

Математична модель задачі:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 40, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 60, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 50, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 70, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 30, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 20, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 30. \end{cases}$$

Загальна вартість перевезень буде:

$$F = 8x_{13} + 3x_{21} + 5x_{22} + x_{23} + x_{31} + 2x_{32} + 4x_{33} \quad (\min).$$

Методом найменшої вартості знайдемо опорний план:

Потенц.	0	1	-3	-4	запаси
0	0 40	0	8	0	40
-4	3	5 10	1 20	0 30	60
-1	1 30	2 20	4	0	50
потреби	70	30	20	30	150

Знайдений опорний план невивроджений. Перевіримо його на оптимальність. Для цього знайдемо потенціали, склавши систему рівнянь:

$$\beta_j - \alpha_i = c_{ij},$$

для заповнених клітинок.

$$\beta_1 - \alpha_1 = 0,$$

$$\beta_2 - \alpha_2 = 5,$$

$$\beta_3 - \alpha_2 = 1,$$

$$\beta_4 - \alpha_2 = 0,$$

$$\beta_1 - \alpha_3 = 1,$$

$$\beta_2 - \alpha_3 = 2.$$

Якщо покладемо $\alpha_1 = 0$, то система матиме такий розв'язок:
 $\beta_1 = 0$; $\alpha_3 = -1$; $\beta_2 = 1$; $\beta_3 = -3$; $\beta_4 = -4$; $\alpha_2 = -4$.

Для вільних клітинок знайдемо числа.

$$d_{ij} = \beta_j - \alpha_i - c_{ij};$$

$$d_{12} = 1 - 0 - 0 = 1,$$

$$d_{13} = -3 - 0 - 8 = -11,$$

$$d_{14} = -4 - 0 - 0 = -4,$$

$$d_{21} = 0 + 4 - 3 = 1,$$

$$d_{32} = -3 + 1 - 4 = -6$$

$$d_{33} = -4 + 1 - 0 = -3.$$

Одержаний план не оптимальний, бо серед чисел d_{ij} є додатні, а саме $d_{12} = 1$ і $d_{21} = 1$. Завантажимо одну із цих клітинок, а саме (1;2). Побудуємо для неї цикл і зробимо перерахунок вантажу за циклом, тобто заповнюємо цю клітинку, зробивши перерозподіл вантажу між клітинками, які пов'язані з нею циклом. (табл..1).

Переходимо до нового опорного плану.

Потенц.	0	1	-4	-5	запаси
0	0 20	0 20	8	0	40
-4	3	5 10	1 20	0 30	60
-1	1 50	2	4	0	50
потреби	70	30	20	30	150

Запишемо систему $\beta_j - \alpha_i = c_{ij}$, для базисних клітинок:

$$\begin{aligned}\beta_1 - \alpha_1 &= 0, \\ \beta_2 - \alpha_1 &= 0, \\ \beta_2 - \alpha_2 &= 5, \\ \beta_3 - \alpha_2 &= 1, \\ \beta_4 - \alpha_2 &= 0, \\ \beta_1 - \alpha_3 &= 1.\end{aligned}$$

Покладемо $\alpha_1 = 0$.

Розв'язавши систему одержимо: $\beta_1 = 0$; $\beta_2 = 0$; $\beta_3 = -4$; $\beta_4 = -5$; $\alpha_2 = -5$; $\alpha_3 = -1$.

Знайдемо для вільних клітинок числа:

$$\begin{aligned}d_{ij} &= \beta_j - \alpha_i - c_{ij}; \\ d_{13} &= -4 - 0 - 8 = -12, \\ d_{14} &= -5 - 0 - 0 = -5, \\ d_{21} &= 0 + 5 - 3 = 2, \\ d_{32} &= 0 + 1 - 2 = -1, \\ d_{33} &= -4 + 1 - 4 = -7, \\ d_{34} &= -5 + 1 - 0 = -4.\end{aligned}$$

Серед чисел d_{ij} є додатне $d_{21} > 0$. З цієї клітинки будуюмо цикл і робимо перерахунок вантажу по циклу і переходимо до нового опорного плану.

Потенц.	0	1	-2	-3	запаси
0	0 10	0 30	8	0	40
-3	3 10	5	1 20	0 30	60
-1	1 50	2	4	0	50
потреби	70	30	20	30	150

Одержаний план невироджений. Перевіримо цей план на оптимальність.

Система для знаходження потенціала запишеться так:

$$\begin{aligned}\beta_1 - \alpha_1 &= 0, \\ \beta_2 - \alpha_1 &= 0, \\ \beta_1 - \alpha_2 &= 3, \\ \beta_3 - \alpha_2 &= 1, \\ \beta_4 - \alpha_2 &= 0, \\ \beta_1 - \alpha_3 &= 1.\end{aligned}$$

Якщо покладемо $\alpha_1 = 0$, то розв'язок системи буде такий:
 $\beta_1 = 0$; $\beta_2 = 0$; $\beta_3 = -2$; $\beta_4 = -3$; $\alpha_2 = -2$; $\alpha_3 = -1$.

Для вільних клітинок обчислимо числа d_{ij} .

$$\begin{aligned}d_{13} &= -2 - 0 - 8 = -10, \\ d_{14} &= -3 - 0 - 0 = -3, \\ d_{22} &= 0 + 3 - 5 = -2, \\ d_{32} &= 0 + 1 - 2 = -1, \\ d_{33} &= -2 + 1 - 4 = -6, \\ d_{34} &= -3 + 1 - 0 = -2.\end{aligned}$$

Опорний план оптимальний, бо всі $d_{ij} < 0$.

$$x^* = \begin{pmatrix} 10 & 30 & 0 \\ 10 & 0 & 20 \\ 50 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$F_{opt} = 30 + 20 + 50 = 100.$$

11. Матричні ігри

11.1. Вступ в теорію ігор.

Теорія ігор займається вивченням конфліктних ситуацій та розробкою математичних методів вирішення цих ситуацій. Конфліктні ситуації часто виникають в умовах ринкової економіки, тому що колективи (або окремі фізичні особи) часто мають антагоністичні (протилежні) цілі та інтереси.

Характерною особливістю ігрової ситуації є взаємодія інтересів 2-х чи більше сторін, які діють як суперники. Кожна сторона для досягнення цілей старається оптимізувати свої рішення.

Основні ідеї теорій ігор появилися в 1-ій половині 20 століття в працях математиків Е.Бореля, Дж. фон Неймана та економіста О.Моргенштерна.

Кожна гра характеризується наявністю правил (дій гравців, спрямованих на досягнення своєї мети). Учасники гри обирають певну стратегію (лінію поведінки). Гравці мають на меті отримати в результаті певний виграш.

Будемо розглядати ігри з двома гравцями, в якій сумарний виграш одного гравця дорівнює сумарному програшу іншого. Таку гру, коли арифметична сума виграшів (програш вважається виграшем із знаком “-“) дорівнює нулю, називають грою з нульовою сумою. Ситуації, що моделюються такими іграми, є типовими для практичної

діяльності фірм, менеджерів, маркетологів та інших спеціалістів, що діють в умовах ринку.

Таким чином маємо двох гравців A і B , тобто маємо гру двох осіб з нульовою сумою.

Назвемо A_i – можливі стратегії гравця A ; B_j – можливі стратегії гравця B ; $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$. Інтереси кожного гравця можна врахувати з допомогою цільової функції, яка називається функцією виграшу (або функцією платежу).

Нехай $f_1(A_i; B_j)$ – функція виграшу гравця A ;

$f_2(A_i; B_j)$ – функція виграшу гравця B ; $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$.

За умовою, $f_1(A_i; B_j) + f_2(A_i; B_j) \equiv 0$ (гра з нульовою сумою).

Тоді очевидно, що $f_1(A_i; B_j) = -f_2(A_i; B_j) = f(A_i; B_j)$.

Таким чином, мета гравця A – максимізувати функцію $f(A_i; B_j)$, а гравця B – мінімізувати її.

Нехай $f(A_i; B_j) = a_{ij}$. Тоді отримаємо матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

i -ті рядки матриці (1) відповідають A_i стратегіям гравця A ; а j -ті стовбці – B_j стратегіям гравця B .

Матриця A називається платіжною (також матрицею гри). Елементом a_{ij} цієї матриці є виграш гравця A , якщо він

вибрав стратегію A_i , а гравець B – стратегію B_j . Відповідно цей же елемент a_{ij} є програшем гравця B . Якщо $a_{ij} < 0$, то гравець A має від’ємний виграш (тобто програш), а гравець B – відповідно від’ємний програш (виграш).

11.2. Чисті стратегії та цілком виражені ігри.

Із багатьох критеріїв, які пропонуються теорією ігор для вибору оптимальних стратегій, найпоширенішим є критерій мінімаксу-максиміну.

Сутність його полягає в наступному.

Нехай гравець A вибирає стратегію A_i . Тоді в найгіршому для себе випадку він отримає виграш, що дорівнює $\min_j a_{ij}$. Якщо навіть гравець B знає його стратегію, гравець A повинен діяти так, щоб максимілізувати свій мінімальний виграш.

Позначимо цей виграш α . Тоді $\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$.

Таку стратегію гравця A називають максимінною. Розмір його гарантованого мінімального виграшу α називають нижньою ціною гри.

Гравець B , який програє суму в розмірі елементів a_{ij} , повинен обрати стратегію, що мінімізує його максимально можливий програш (як би не діяв гравець A). Стратегію гравця B називають мінімаксною. Розмір його програшу позначається β (програш може бути і від’ємний, тоді він отримає виграш). Число β називається верхньою ціною гри, і аналогічні міркування щодо стратегії гравця B дають:

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Оптимальний розв'язок цієї задачі для кожного гравця досягається тоді, коли кожному з них не вигідно змінювати обрану стратегію, оскільки суперник може вибрати у відповідь іншу стратегію, яка дасть йому кращий результат.

Якщо $\alpha = \beta = v$, то гра називається цілком визначеною. Цілком визначені ігри ще називаються іграми з сідловою точкою (або сідловими точками). У такій грі оптимальним для обох гравців є вибір чистих стратегій – максимінної A_{i_0} для гравця A і мінімаксної B_{j_0} для гравця B .

Якщо гра не має сідлової точки, тобто $\alpha \neq \beta$ і $\alpha \leq v \leq \beta$, то максимінно-мінімаксні стратегії не є оптимальними і кожний гравець може покращити свій результат, обираючи якимось чином інші стратегії. Тоді оптимальний розв'язок такої гри знаходять, застосовуючи змішані стратегії, які є певними комбінаціями чистих стратегій.

Ймовірності (або частоти) вибору кожної стратегії задаються відповідними векторами: $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ для гравця A та $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ для гравця B . З самого означення частот (або ймовірностей) випливає, що
$$\sum_i x_i = \sum_j y_j = 1.$$

Розглянемо приклад гри, яка має сідлову точку.

Приклад 1.

Нехай гра двох гравців A і B задана платіжною матрицею:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 3 \\ 7 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Визначити ціну гри та оптимальні стратегії для гравців.

З умови маємо:

$$\left(\begin{array}{ccccc} 5 & 6 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 3 \\ 7 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & -3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \xrightarrow{\min} -2 \\ \longrightarrow -3 \\ \longrightarrow -2 \\ \longrightarrow 1 \\ \longrightarrow -3 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \max \\ \\ \\ \alpha = 1 \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \max \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \begin{array}{ccccc} 7 & 6 & 3 & 1 & 5 \end{array} & & & & \\ & \min \downarrow & \beta = 1 & & \\ & & 1 & & \end{array}$$

Матрицю A можна попередньо спростити. Назвемо чисту стратегію A_{i1} гравця A домінуючою над чистою стратегією A_{i2} , якщо всі елементи рядка, що відповідають стратегії A_{i1} , не менші за відповідні елементи рядка, що відповідають стратегії A_{i2} . В нашій матриці A видно, що елементи 4-го рядка не менші за відповідні елементи 3-го рядка. Тоді третій рядок матриці A можна не враховувати (викреслити).

Тоді будемо мати:

$$\begin{array}{c}
 \left(\begin{array}{ccccc} 5 & 6 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & 0 & 5 \\ 7 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \xrightarrow{\min} \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \begin{array}{l} -2 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \max \\ \\ \alpha = \end{array} 1; \\
 \begin{array}{c} \max \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \begin{array}{ccccc} 7 & 6 & 3 & 1 & 5 \\ \square & \square & \square & \square & \square \end{array} \\ \min \downarrow \quad \beta = \\ 1 \end{array}
 \end{array}$$

Таким чином $\alpha = \beta = 1$.

Отже ціна гри $v = 1$. Сідловим елементом є $a_{44} = 1$, що стоїть на перетині 4-го рядка та 4-го стовпця початкової матриці. Отже, оптимальними чистими стратегіями для гравців є A_4 та B_4 .

Розв'язком гри є: $\{1; A_4; B_4\}$.

11.3. Зведення матричної гри для двох гравців до задачі програмування.

Нехай матрична гра не має сідлової точки. Тоді $\alpha < \beta$. Тоді знаходження розв'язку, особливо платіжної матриці великих розмірів (тобто за великої кількості стратегії для гравців), є досить складною задачею. Таку задачу можна успішно розв'язати методом лінійного програмування, для чого потрібно сформулювати відповідну математичну модель такої задачі.

Сформулюємо задачу таким чином: знайти вектори ймовірностей (або те саме, що вектори частот) $x = (x_1^0, \dots, x_m^0)$ та $y = (y_1^0, \dots, y_n^0)$, які і вказують ймовірності для кожного гравця вибору стратегій (тобто знаходження оптимальних стратегій) та для знаходження ціни гри.

Без доведення зазначимо основну теорему теорії ігор: кожна скінченна гра має розв'язок, який можливий в області змішаних стратегій.

Нехай дано скінченну матричну гру з платіжною матрицею:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Оптимальні стратегії гравців дозволяють отримати вигравш $\alpha \leq \nu \leq \beta$, тоді використання оптимальної змішаної стратегії гравцем A має забезпечувати вигравш, не менший за ціну гри ν (при виборі гравцем B будь-яких стратегій).

Математично така умова має вигляд: $\sum_{i=1}^m a_{ij} x_i^0 \geq \nu; \quad j = \overline{1, n} \quad (2)$

Відповідно використання оптимальної змішаної стратегії гравцем B має забезпечувати йому програш, що не перевищує ν (при будь-якому виборі стратегій гравцем A):

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j^0 \leq \nu; \quad i = \overline{1, m} \quad (3)$$

Співвідношення (2) і (3) використовують для знаходження розв'язку гри.

Якщо x і y – оптимальні стратегії гравців, то число $\nu = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i^0 y_j^0$ є ціною гри.

Можна вважати, що $\nu > 0$. Якщо це не так, то додавши до всіх елементів матриці A константу K , одержимо $\nu > 0$. Це не приведе до зміни оптимальних стратегій, а лише збільшить ціну гри на K .

Поділимо обидві частини (2) і (3) на ν і введемо позначення:

$$\frac{x_i^0}{\nu} = x_i; \quad \frac{y_j^0}{\nu} = y_j; \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Тоді дістанемо співвідношення:

$$a_{ij}x_1 + a_{2j}x_2 + \dots + a_{mj}x_m \geq 1; \quad j = \overline{1, n}; \quad (5)$$

$$a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \dots + a_{in}y_n \leq 1; \quad i = \overline{1, m}; \quad (6)$$

Очевидно, що $\sum_{i=1}^m x_i^0 = \sum_{j=1}^n y_j^0 = 1$ (сума частот = 1).

Тоді, врахувавши (4), одержимо:

$$\sum_{i=1}^m x_i = \frac{1}{\nu}; \quad \sum_{j=1}^n y_j = \frac{1}{\nu}.$$

Гравець A намагається дістати максимальний виграш, а гравець B – мінімальний програш. З цього випливає:

$$F = \sum_{i=1}^m x_i \rightarrow \min; \quad f = \sum_{j=1}^n y_j \rightarrow \max. \quad (7)$$

Враховуючи (5), (6) і (7), одержимо такі задачі лінійного програмування:

$$F = x_1 + x_2 + \dots + x_m \rightarrow \min; \quad (8)$$

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m \geq 1;$$

$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m \geq 1;$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m \geq 1; \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

$$f = y_1 + y_2 + \dots + y_n \rightarrow \max; \quad (9)$$

$$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \leq 1;$$

$$a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \leq 1;$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \dots + a_{mn}y_n \leq 1; \quad y_j \geq 0; \quad j = \overline{1, n}.$$

Якщо знайдені оптимальні розв'язки x^* і y^* задач (8) і (9), то змішані стратегії для гравців і ціна гри знаходиться за формулами:

$$x_i^0 = \nu x_i^*; \quad y_j^0 = \nu y_j^*; \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n};$$

$$\nu = \frac{1}{\max f} = \frac{1}{\min F};$$

x_i^* і y_j^* – відповідно координати векторів x^* та y^* , що є оптимальними розв'язками задач (8) і (9).

Приклад 2.

Розв'язати матричну гру, задану платіжною матрицею:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

Позначимо x_1, x_2, x_3 – змінні для гравця A ; y_1, y_2, y_3 – змінні для гравця B .

Складемо задачу лінійного програмування для кожного гравця:

$$F = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \min;$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 1; \tag{10}$$

$$2x_1 + x_3 \geq 1;$$

$$x_2 \geq 1; \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 3}.$$

$$f = y_1 + y_2 + y_3 \rightarrow \max;$$

$$y_1 + 2y_2 \leq 1; \tag{10}$$

$$y_1 + y_3 \leq 1;$$

$$2y_1 + y_2 \leq 1; \quad y_j \geq 0; \quad j = \overline{1, 3}.$$

Спочатку перевіримо, чи не має матриця A сідлового елемента, тобто чи не має матрична гра розв'язку в чистих стратегіях:

$$\begin{array}{ccc}
 \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{array} \right) & \begin{array}{l} \xrightarrow{\min} \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \left. \begin{array}{l} \xrightarrow{\max} \\ \alpha=0 \end{array} \right\} \mathbf{0}; \\
 \max \downarrow \downarrow \downarrow & & \alpha \neq \beta. \\
 \begin{array}{ccc} 2 & 2 & 1 \\ \square\square & \square\square & \square\square \end{array} & & \\
 \min \downarrow \beta=1 & & \\
 1 & &
 \end{array}$$

Таким чином, гра не має розв'язку в чистих стратегіях, $0 \leq \nu \leq 1$.

Розв'яжемо задачу (10) для гравця B симплексним методом:

$$\begin{aligned}
 f &= y_1 + y_2 + y_3 \rightarrow \max; \\
 x_1 + 2x_2 + x_4 &= 1; \\
 x_1 + x_3 + x_5 &= 1; \\
 2x_1 + x_2 + x_6 &= 1; \\
 y_j &\geq 0.
 \end{aligned}$$

Складемо симплекс-таблиці до задачі (10):

i	A	$\tilde{N}a$	A_0	1	1	1	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_4	0	1	1	2	0	1	0	0
2	A_5	0	1	1	0	1	0	1	0
3	A_6	0	1	2	1	0	0	0	1
$m+1$			0	-1	-1	-1	0	0	0
1	A_4	0	1	1	2	0	1	0	0
2	A_3	1	1	1	0	1	0	1	0
3	A_6	0	1	2	1	0	0	0	1
$m+1$			1	0	-1	0	0	1	0
1	A_2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0
2	A_3	1	1	1	0	1	0	1	0
3	A_6	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	1
$m+1$			$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	0

Маємо оптимальний розв'язок задачі (10):

$$y^* = \left(0; \frac{1}{2}; 1\right); \quad x^* = \left(\frac{1}{2}; 1; 0\right); \quad v = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Тоді } x = \frac{2}{3}x^* = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}; 1; 0\right) = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 0\right);$$

$$y = \frac{2}{3} y^* = \frac{2}{3} \left(0; \frac{1}{2}; 1 \right) = \left(0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right).$$

Перевірка: $\sum x_i^0 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$; $\sum y_j^0 = 0 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$.

Відповідь: ціна гри $v = \frac{2}{3}$; вектори оптимальних

змішаних стратегій – для гравця A : $x = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 0 \right)$; для гравця

$$B$$
: $y = \left(0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right).$

12. Геометричний метод розв'язування.

Лінійні математичні моделі можуть виявитися недостатніми для реальних економічних процесів. Наприклад такі показники, як прибуток, собівартість, капітальні витрати на виробництво та інші нелінійно залежать від обсягу виробництва, витрат ресурсів та робочого часу. Це приводить до необхідності побудови нелінійних економіко-математичних моделей.

Нехай задана функція

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n); \quad X = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Загальною задачею математичного програмування називається задача, в якій потрібно знайти найбільше (або найменше) значення функції f , тобто

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max(\min), \quad (1)$$

у припущенні, що на змінні $x_1, x_2, \dots, x_n$ накладається обмеження

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{cases} \leq \\ = \\ \geq \end{cases} b_i; \quad i = \overline{1, m}. \quad (2)$$

Крім того, в задачах математичного програмування звичайно накладаються обмеження на знаки змінних:

$$x_j \geq 0; \quad j = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Таким чином, маємо задачу (1)–(3).

Система обмежень (2) називається область допустимих розв'язків, або множиною обмежень. Точка $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається допустимим розв'язком задачі (1)–(3). Допустимий розв'язок $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, при якому функція $f(x)$ набуває $\max$ (або $\min$), називають оптимальним розв'язком.

Будемо розглядати задачі, в яких хоча б одна з функцій $f(x)$ або $g_i(x)$ з умов (1), (2) є нелінійною. Це, власне, і буде задачею нелінійного програмування.

Приклад розв'язування задачі нелінійного програмування графічним методом.

Графічний метод є особливо зручним для випадку двох змінних, тобто $x = (x_1, x_2)$. Тоді множину обмежень (2) можна зобразити як множину точок на площині.

Приклад 1.

Знайти максимальне значення функції.

$$f = x_2 - x_1^2 + 6x_1, \quad (4)$$

якщо

$$2x_1 + 3x_2 \leq 24, \quad (5)$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 15,$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 24,$$

$$x_2 \leq 4,$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0. \quad (6)$$

Розв'язання.

Розв'яжемо задачу (4)–(6) графічним методом.

Перетворимо $f(x_1, x_2)$:

$$f = x_2 - (x_1^2 - 6x_1 + 9 - 9) = x_2 - (x_1 - 3)^2 + 9.$$

Лінії рівня функції $f \in f(x) = h = \text{const}$,

тобто

$$x_2 - (x_1 - 3)^2 + 9 = h,$$

або

$$x_2 = (x_1 - 3)^2 - 9 + h. \quad (7)$$

Накреслимо допустиму область, що задається обмеженнями (5) маємо 4-кутник $OABC$.

Накреслимо лінії рівня (7) (тобто параболи) на графіку і знайдемо точку перетину лінії рівня з межею області.

Лінії рівня – параболи, що мають вісь симетрії $x_1 = 3$. Парабола, яка дотикається до 4-кутника $OABC$, виділена червоним кольором.

Очевидно, що вона має вершину точку $E(3;4)$, тоді її графік $x_2 = (x_1 - 3)^2 + 4$.

Тоді маємо: $f(3;4) = 4 - 3^2 + 6 \cdot 3 = 4 - 9 + 18 = 13$;

$$f_{\max} = f(3;4) = 13.$$

Відповідь: $f_{\max} = f(3;4) = 13$.

Приклад 2.

Знайти максимальне і мінімальне значення функції

$$f = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2, \quad (8)$$

якщо

$$2x_1 + 3x_2 \geq 6,$$

$$3x_1 - 2x_2 \leq 18, \quad (9)$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 8,$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0. \quad (10)$$

Розв'язування.

Розв'яжемо задачу (8)–(10).

Лінії рівня функції $f(x_1, x_2)$ є лінії $f(x) = h = \text{const}$, тобто $(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2 = h$ – критичні кола з центром $O(4;3)$.

Накреслимо допустиму область, що задається нерівностями (9)–(10).

Допустимою областю є 5-кутник $ABCDE$.

Вершини: $A(0;2)$, $B(0;4)$;

$$\text{Точка } C: \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 18, \\ -x_1 + 2x_2 = 8; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 13, \\ x_2 = 10,5. \end{cases}$$

Тобто точки: $C(13;10,5)$; $D(6;0)$; $E(3;0)$.

Очевидно, що $f_{\min} = f(4;3)$, бо тоді $f(4;3) = 0$, а менше O функція f бути не може (як сума квадратів). Так як точка O належить області $ABCDE$, то це і є $f_{\min}$ при даних значеннях функції f в області $ABCDE$ буде точка, в якій кола $(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2 = h$ перетинаються з межею області, причому $f = f_{\max}$, коли радіус кола буде найбільший. З геометричних міркувань видно, що радіус кола R буде найбільший, коли $R = O_1C$. Таким чином, точка C і є точкою, в якій $f = f_{\max}$ на області $ABCDE$.

$$\text{Тоді } f_{\max} = f(C) = f(13;10,5) = (13 - 4)^2 + (10,5 - 3)^2 = 137,25.$$

Відповідь: розв'язок задачі (8)–(10):

$$f_{\min} = f(4;3) = 0; \quad f_{\max} = f(13;10,5) = 137,25.$$

13. Нелінійне програмування

Постановка задачі

При розв'язуванні задач оптимального планування (або оптимального управління) доводиться враховувати нелінійний характер взаємозв'язків між економічними показниками. У загальному вигляді нелінійна математична модель має вигляд:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max(\min),$$

при обчисленнях

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) > (<) b_i; \quad i = \overline{1, m},$$

де $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – нелінійні функції.

Звичайно задачу нелінійного програмування (ЗНП) намагаються звести до лінійного вигляду. Проте в такому разі можливі значні похибки. І взагалі, лінеаризація нелінійних процесів є досить складною математичною задачею.

Для задач нелінійного програмування не існує універсального методу розв'язування, тому доводиться застосовувати багато методів та різних обчислювальних алгоритмів. Більшість цих методів та алгоритмів ґрунтуються на теорії диференціального числення. Вибір їх залежить від постановки задачі та конкретної форми запису економіко-економічної моделі.

Слід також зазначити на один важливий момент. У задачах лінійного програмування точка оптимуму (тобто $\max$ або $\min$) завжди була граничною. Для ЗНП така точка може бути як граничною, так і такою, що міститься всередині допустимої області розв'язків (області допустимих планів).

Метод множників Лагранжа.

Розглянемо ЗНП:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &\rightarrow \max(\min), \\ g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \quad i = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (1)$$

де функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – диференційовані.

Ідея методу множників Лагранжа полягає в заміні даної задачі простішою, а саме: на знаходження екстремуму іншої (складнішої) функції, але без обмежень. Ця функція називається функцією Лагранжа і подається у вигляді:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_2 g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m g_m(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

При виконанні умов (1) $L(X, \Lambda) = f(x)$,
де $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$.

Тоді *extr* точки $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ для функції $L(X, \Lambda)$

мають вигляд:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= 0; \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= 0; \\ &\dots \\ \frac{\partial L}{\partial x_n} &= 0; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} &= 0; \\ &\dots \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_m} &= 0. \end{aligned} \right. \quad (2)$$

(2) – це система $n+m$ алгебраїчних рівнянь. З цієї системи знаходимо розв'язок $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ та $\Lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*)$.

Характер екстремуму виражається за допомогою достатніх умов.

Приклад .

Знайти точки екстремуму функції

$$F = 3x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_1 + 1, \quad (3)$$

при умові $x_1^2 + x_2^2 = 4$. (4)

Розв'язання.

Напишемо обчислення (4) в вигляді:

$$x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0. \quad (5)$$

Враховуючи (3) і (5), складемо функцію Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, \lambda_1) = 3x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_1 + 1 + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 4).$$

Запишемо систему (2) для нашої функції Лагранжа:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 6x_1 - 3 + 2\lambda_1 x_1 = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 4x_2 + 2\lambda_1 x_2 = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0. \end{cases} \quad (6)$$

З другого рівняння системи (6) маємо

$$x_2 = 0, \text{ або } \lambda_1 = -2.$$

Якщо $x_2 = 0$:

$$\begin{cases} 6x_1 - 3 + 2\lambda_1 x_1 = 0, \\ x_1^2 = 4; \end{cases}$$

тобто $\begin{cases} x_{1,1} = 2, \\ \lambda_{1,1} = -\frac{9}{4}; \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x_{1,2} = -2, \\ \lambda_{1,2} = -\frac{15}{4}. \end{cases}$

Якщо $\lambda_1 = -2$, то

$$\begin{cases} 6x_1 - 3 - 4x_1 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 = 4. \end{cases}$$

$$\text{звідки} \quad \begin{cases} x_{1,3} = \frac{3}{2}, \\ \lambda_{1,3} = \frac{\sqrt{7}}{2}; \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x_{1,4} = \frac{3}{2}, \\ \lambda_{1,4} = -\frac{\sqrt{7}}{2}. \end{cases}$$

Значить λ_1 можна не враховувати. Таким чином, наша функція Лагранжа (тобто і дана функція f) має 4 стаціонарні точки:

$$x_1^* = (2; 0); \quad x_2^* = (-2; 0); \quad x_3^* = \left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{7}}{2}\right); \quad x_4^* = \left(\frac{3}{2}; -\frac{\sqrt{7}}{2}\right).$$

Для визначення типу екстремуму обчислимо матрицю Гессе $H_f(x^*)$.

$$H_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}.$$

$$\text{У нас: } \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 6; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 4.$$

$$\text{Таким чином, маємо } H_f = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Визначимо знаки мінорів: } M_1 = 6 > 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} > 0.$$

Як відомо, при $M_2 \in$ екстремум функції двох змінних. При $M_1 > 0$ маємо мінімум.

Таким чином, в точках $x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*$ функція f при обмеженні (4) досягає умовного мінімуму.

$$f_{1\min} = f(x_1^*) = 7; \quad f_{2\min} = f(x_2^*) = 19; \quad f_{3\min} = \frac{27}{4}; \quad f_{4\min} = \frac{27}{4}.$$

14. Задачі дробово-лінійного програмування.

Деякі задачі нелінійного програмування можна звести до задач лінійного програмування. Такою є задача дробово-лінійного програмування.

$$f = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = \frac{c_1x_1 + \dots + c_nx_n + c_0}{d_1x_1 + \dots + d_nx_n + d_0} \rightarrow \max(\min); \quad (1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m; \end{cases}$$

(2)

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Нехай область допустимих розв'язків Ω непорожня тобто система (2), (3) сумісна.

Припустимо, що $\varphi_2(x) \neq 0, x \in \Omega$.

Можна вважати, що $\varphi_2(x) > 0$ (інакше знак “-” перенесемо у чисельник).

Введемо нові змінні

$$y_0 = \frac{1}{d_1x_1 + d_2x_2 + \dots + d_nx_n + d_0}; \quad (4)$$

$$y_j = y_0x_j, \quad j = 1, \dots, n. \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{Тоді} \\ f = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = \varphi_1(x) \cdot y_0 = (c_1x_1 + \dots + c_nx_n + c_0)y_0 = \end{aligned} \quad (6)$$

$$= c_1x_1y_0 + \dots + c_nx_ny_0 + c_0y_0 = c_1y_1 + \dots + c_ny_n + c_0y_0 \rightarrow \max(\min).$$

Оскільки $y_0 > 0$ (бо $\varphi_2 > 0$), то з (3) випливає, що

$$y_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (7)$$

Кожне рівняння системи (2) помножимо на

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n - b_1y_0 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n - b_2y_0 = 0, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n - b_my_0 = 0. \end{cases} \quad (8)$$

З умови (4) маємо ще одне обмеження

$$d_1y_1 + d_2y_2 + \dots + d_nx_n + d_0y_0 = 1. \quad (9)$$

Отже, задача (1)-(3) зводиться до задачі лінійного програмування (6)-(9), яку можна розв'язати симплекс-методом.

Приклад 1. Розв'язати задачу

$$f = \frac{2x_1 - x_2}{x_1 + 2x_2 + 1} \rightarrow \max ;$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ 2x_1 + x_2 \leq 6; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Запишемо задачу в канонічному вигляді

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 6. \end{cases}$$

Введемо позначення

$$y = \frac{1}{x_1 + 2x_2 + 1} ;$$

$$y_1 = y_0x_1, \quad y_2 = y_0x_2, \quad y_3 = y_0x_3.$$

Маємо задачу

$$f = 2y_1 - y_2 \rightarrow \max ;$$

$$\begin{cases} y_1 - 2y_2 + y_3 - 2y_0 = 0, \\ 2y_1 + y_2 + y_4 - 6y_0 = 0, \\ y_1 + 2y_2 + y_0 = 1; \end{cases}$$

$$y_i \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, 4.$$

Зведемо до базисної форми, виключивши за допомогою третього рівняння y_0 з першого та другого рівнянь.

$$y_0 = 1 - y_1 - 2y_2;$$

$$\begin{cases} y_1 - 2y_2 + y_3 - 2(1 - y_1 - 2y_2) = 0, \\ 2y_1 + y_2 + y_4 - 6(1 - y_1 - 2y_2) = 0, \\ y_1 + 2y_2 + y_0 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 3y_1 + 2y_2 + y_3 = 2, \\ 8y_1 + 13y_2 + y_4 = 6, \\ y_1 + 2y_2 + y_0 = 1. \end{cases}$$

Розв'яжемо симплекс-методом

i	A_i	$\tilde{b}_i$	A_0	2	-1	0	0	0	Отже,
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
1	A_3	0	2	3	2	1	0	0	$Y^* = \left(\frac{2}{3}, 0, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$
2	A_4	0	6	8	13	0	1	0	
3	A_5	0	1	1	2	0	0	1	$f_{\max} = \frac{4}{3};$
$m+1$	Δ		0	-2	1	0	0	0	
1	A_1	2	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	$y_0 = \frac{1}{3},$
2	A_4	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{23}{3}$	$-\frac{8}{3}$	1	0	
3	A_5	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	1	$x_1 = \frac{y_1}{y_0} = \frac{2/3}{1/3} = 2,$
$m+1$	Δ		$\frac{4}{3}$	0	$\frac{7}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	
									$x_2 = \frac{0}{1/3} = 0,$
									$x_3 = \frac{0}{1/3} = 0,$
									$x_4 = \frac{2/3}{1/3} = 2.$

Отже, $X^* = (2, 0, 0, 2), f_{\max} = \frac{4}{3}.$

Відповідь: $X^* = (2, 0), f_{\max} = \frac{4}{3}.$

Зауваження. Задачу (1)-(3) при $n=2$ можна розв'язати графічно.

Нехай маємо задачу

$$f = \frac{c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_0}{d_1 x_1 + d_2 x_2 + d_0} \rightarrow \text{extr};$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m; \\ x_j \geq 0, \quad j=1,2. \end{cases}$$

Нехай $c_0 = d_0 = 0$. Область допустимих розв'язків є опуклим многокутником. Вияснимо, як поведуть себе лінії рівня

$$\frac{c_1 x_1 + c_2 x_2}{d_1 x_1 + d_2 x_2} = h.$$

Розв'яжемо цю рівність відносно x_2 :

$$\begin{aligned} x_2(c_2 - hd_2) &= hd_1 x_1 - c_1 x_1; \\ x_2 &= \frac{c_1 - hd_1}{hd_2 - c_2} x_1 = kx_1 = \frac{hd_1 - c_1}{c_2 - hd_2} = kx_1. \end{aligned}$$

Маємо пучок прямих $x_2 = kx_1$, де k - довільне число.

Можна довести, що лінії рівня зростають при русі за годинниковою стрілкою при $\Delta = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} = c_1 d_2 - c_2 d_1 > 0$ і проти стрілки годинника при $\Delta < 0$.

Якщо ж $c_0 \neq 0$, $d_0 \neq 0$, то лініями рівня є пучок прямих, що проходять через точку $O(x_1^0, x_2^0)$, де x_1^0 і x_2^0 є розв'язками системи

$$\begin{cases} c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_0 = 0, \\ d_1 x_1 + d_2 x_2 + d_0 = 0. \end{cases}$$

Приклад 2. Розв'язати графічно задачу з прикладу 1.

$$f = \frac{2x_1 - x_2}{x_1 + 2x_2 + 1} \rightarrow \max(\min);$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 6 \end{cases};$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Будуємо область допустимих розв'язків.

Знайдемо центр пучка прямих (ліній рівня):

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 2, \\ x_1 + 2x_2 = -1; \end{cases}$$

$$5x_1 = -1,$$

$$x_1 = -\frac{1}{5},$$

$$x_2 = -\frac{2}{5}.$$

$$O' = \left(-\frac{1}{5}; -\frac{2}{5}\right).$$

Знайдемо $\Delta = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 > 0$, тому значення f

збільшується за годинниковою стрілкою.

A – точка мінімуму $A(0,6)$; B – точка максимуму $B(2,0)$

$$f_{\min} = \frac{2 \cdot 0 - 6}{0 + 2 \cdot 6 + 1} = -\frac{6}{13}, \quad f_{\max} = \frac{2 \cdot 2 - 0}{2 + 0 + 1} = \frac{4}{3}.$$

Відповідь: $f_{\min} = f(0,6) = -\frac{6}{13}, \quad f_{\max} = f(2,0) = \frac{4}{3}.$

15. Задачі опуклого програмування

Опуклі функції

Означення 1. Функція $f(x_1, \dots, x_n)$, яка задана на опуклій множині Ω називається опуклою, якщо для довільних двох точок X_1 і $X_2 \in \Omega$ і довільною λ , $0 \leq \lambda \leq 1$; правильна нерівність

$$F(\lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2) \geq \lambda f(X_1) + (1 - \lambda)f(X_2). \quad (1)$$

Означення 2. Функція $f(x_1, \dots, x_n)$ називається строго опуклою, якщо в умові (1) знак " $\geq$ " замінено на " $>$ " і $0 < \lambda < 1$.

Означення 3. Функція $f(x_1, \dots, x_n)$ називається вгнутою на опуклій множині Ω , якщо для довільних X_1 і $X_2 \in \Omega$ і довільною λ , $0 \leq \lambda \leq 1$

$$F(\lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2) \leq \lambda f(X_1) + (1 - \lambda)f(X_2). \quad (2)$$

Якщо f – опукла функція, то f – вгнута і навпаки.

Лінійна функція $f = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$ є одночасно і опуклою і вгнутою, бо

$$c_1(\lambda \bar{x}_1 + (1 - \lambda)\bar{\bar{x}}_1) + c_n(\lambda \bar{x}_n + (1 - \lambda)\bar{\bar{x}}_n) = \lambda(c_1 \bar{x}_1 + \dots + c_n \bar{x}_1) + (1 - \lambda)(c_1 \bar{\bar{x}}_1 + \dots + c_n \bar{\bar{x}}_1).$$

Формули (1), (2) дають одночасно методи дослідження функції на опуклість. Але часто так досліджувати складно. У ряді випадків дослідження на опуклість спрощується.

Нехай f має неперервні другі частинні похідні. Розглянемо матрицю

$$H_f = \begin{pmatrix} f_{11}(X^o) & f_{12}(X^o) & \dots & f_{1n}(X^o) \\ f_{21}(X^o) & f_{22}(X^o) & \dots & f_{2n}(X^o) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(X^o) & f_{n2}(X^o) & \dots & f_{nn}(X^o) \end{pmatrix},$$

$$\text{де } f_{ij}(X^o) = \left. \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{X=X^o}.$$

Матриця H_f називається матрицею Гессе функції f .

Нехай Ω – опукла множина і $X^o \in \Omega$. Для того, щоб функція f була строгою в деякому околі точки X^o необхідно і досить, щоб в цьому околі були невід’ємні всі головні мінори її матриці H_f . Якщо всі непарні головні мінори від’ємні, а парні – додатні, то функція f строго випукла в околі точки X^o .

Якщо наведені умови опуклості виконуються для всіх $X \in \Omega$, то функція є строго опуклою скрізь на Ω .

Приклад. Вивчити поведінку функції

$$f = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 \quad \text{в околі точки } X^o = (1,1).$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 6x_1 - 2x_2, \quad f_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 6, \quad f_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = -2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = -2x_1 + 2x_2, \quad f_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 2, \quad f_{21} = -2.$$

$$H_f = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} - \text{від } X \text{ не залежить.}$$

$$M_1 = f_{11} = 6 > 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 12 - 4 = 8 > 0.$$

Отже, f строго вгнута для всіх x_1, x_2 .

Екстремуми опуклих функцій

Основною властивістю опуклих функцій є те, що їх локальний екстремум є одночасно і глобальним. Сформулюємо точно ці результати.

1. Якщо $f(x)$ – (опукла) вгнута функція, задана на замкненій опуклій множині Ω , то всякий локальний мінімум (максимум) функції f на області Ω є глобальним.

2. Якщо глобальний мінімум (максимум) досягається у двох різних точках, то він досягається у кожній точці відрізка, що з'єднує дані точки.

3. Якщо $f(x)$ – строго (опукла) вгнута функція, то її глобальний мінімум (максимум) на опуклій множині Ω досягається в єдиній точці.

4. Нехай $f(x)$ – (опукла) вгнута на опуклій множині Ω , f – має неперервні похідні першого порядку всередині Ω . Нехай X^0 – стаціонарна точка f . Тоді f досягає в точці X^0 глобального мінімуму (максимуму).

Ці результати дають змогу розв'язувати задачі нелінійного програмування у випадку коли f – (опукла) вгнута, множина допустимих розв'язків Ω опукла. Якщо при цьому f має неперервні частинні похідні першого порядку в Ω , то для знаходження мінімуму (максимуму) досить знайти стаціонарну точку функції f .

Теорема Куна-Таккера

Розглянемо задачу опуклого програмування з обмеженнями-нерівностями виду

$$f = f(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \max; \quad (1)$$

$$\begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n) \geq 0, \\ \dots \\ g_m(x_1, \dots, x_n) \geq 0; \end{cases} \quad (2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3)$$

де функції $f, g_1, \dots, g_m$ – опуклі вверху.

Нехай задача (1)-(3) задовольняє умову регулярності Слейтера: існує хоч одна точка $X = (x_1, \dots, x_n)$, в якій

$$g_i(X) > 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Метод множників Лагранжа можна поширити і на задачі (1)-(3), де обмеження задані нерівностями.

Означення. Функцією Лагранжа задачі (1)-(3) називають

$$F(X, \lambda^o) = F(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(X) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(X). \quad (4)$$

Означення. Точка $F(X^o, \lambda^o) = F(x_1^o, \dots, x_n^o, \lambda_1^o, \dots, \lambda_m^o)$ називається сідловою точкою Лагранжа F , якщо для всіх

$$F(X, \lambda^o) = F(X^o, \lambda^o) = F(X^o, \lambda). \quad (5)$$

Теорема Куна-Таккера. Нехай задача (1)-(3) задовольняє умову регулярності Слейтера, функції $f, g_1, \dots, g_m$ є опуклими вверху. Вектор X є оптимальним розв'язком задачі (1)-(3) тоді і тільки тоді, коли існує такий вектор $\lambda^o \geq 0$, що (X^o, λ^o) є сідловою точкою функції Лагранжа (4).

Отже, задача опуклого програмування (1)-(3) зводиться до задачі знаходження сідловин точок функції Лагранжа. Грубо кажучи, треба знайти точки, в яких функція Лагранжа досягає

максимуму по x_j і мінімуму по λ_j . Ця задача називається задачею максимінілізації і може бути записана так:

$$\max_{X \geq 0} \min_{\Lambda \geq 0} F(X, \Lambda) = \max_{\Lambda \geq 0} \min_{X \geq 0} F(X, \Lambda) = L(X^o, \Lambda^o).$$

Якщо функції $f, g_1, \dots, g_m$ диференційовані, то можна довести, що необхідними і додатними умовами того, що (X^o, Λ^o) – сідлова, є такі:

$$1) \left. \frac{\partial F}{\partial x_j} \right|_{(X^o, \Lambda^o)} \leq 0, \quad x_j^o \left. \frac{\partial F}{\partial x_j} \right|_{(X^o, \Lambda^o)} = 0, \quad x_j^o \geq 0, \quad j = 1, \dots, n; \quad (6)$$

$$2) \left. \frac{\partial F}{\partial \lambda_j} \right|_{(X^o, \Lambda^o)} \geq 0, \quad \lambda_j^o \left. \frac{\partial F}{\partial \lambda_j} \right|_{(X^o, \Lambda^o)} = 0, \quad \lambda_j^o \geq 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (7)$$

Зауваження. Ці умови називаються локальними умовами Куна-Таккера і (властивість ортогональності) пари двоїстих задач лінійного програмування. По аналогії і у НП говорять про двоїсті задачі, причому одна з них

$$\min_{\Lambda \geq 0} F(X, \Lambda) \rightarrow \max,$$

друга:

$$\max_{X \in \Omega} F(X, \Lambda) \rightarrow \min,$$

де Ω – множина допустимих розв'язків визначена системою (2), (3).

Використовуючи ці результати, можна розглянути задачі НП у найзагальнішому вигляді:

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \max;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g_1(X) \geq b_1, \\ \dots \\ g_k(X) \geq b_k, \\ g_{k+1}(X) = b_{k+1}, \\ \dots \\ g_r(X) = b_r, \\ g_{r+1}(X) \leq b_{r+1}, \\ \dots \\ g_m(X) \leq b_m; \end{array} \right.$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Зведемо всі обмеження до одного типу:

$$\left\{ \begin{array}{l} g_i(X) - b_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, k, \\ b_i - g_i(X) = 0, \quad i = k+1, \dots, r, \\ b_i - g_i(X) \geq 0, \quad i = r+1, \dots, m. \end{array} \right.$$

Складемо функцію Лагранжа

$$F(X, \Lambda) = f(X) + \sum_{i=1}^k \lambda_i (g_i(X) - b_i) + \sum_{i=k+1}^r \lambda_i (b_i - g_i(X)) + \sum_{i=r+1}^m \lambda_i (b_i - g_i(X)).$$

Знайдемо її частинні похідні:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} - \sum_{i=k+1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, n;$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_i} = g_i(X) - b_i, \quad i = 1, \dots, k; \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda_i} = b_i - g_i(X), \quad i = k+1, \dots, m.$$

У цьому випадку умови теореми Куна-Таккера формулюються так. Нехай $f, g_1, \dots, g_m$ - диференційовані функції. Для того, щоб вектор X^0 був оптимальним розв'язком задачі необхідно, щоб існував вектор $\Lambda^0 \geq 0$, що виконуються умови:

$$1) \frac{\partial F(X^o, A^o)}{\partial x_j} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad \sum_{j=1}^n x_j^0 \frac{\partial F(X^o, A^o)}{\partial x_j} = 0;$$

$$2) \frac{\partial F(X^o, A^o)}{\partial \lambda_i} = 0, \quad i = k+1, \dots, r;$$

$$3) \frac{\partial F(X^o, A^o)}{\partial \lambda_i} \geq 0, \quad \text{причому якщо } \frac{\partial F(X^o, A^o)}{\partial \lambda_i} > 0, \text{ то } \lambda_i^o = 0,$$

$i = 1, \dots, k, r+1, \dots, m$.

Якщо точка (X^o, A^o) задовольняє ці умови, функція f є опуклою вверх, $g_1, \dots, g_k$ – опуклі вверх, $g_{k+1}, \dots, g_m$ – опуклі вниз, то (X^o, A^o) є сідловою точкою функції Лагранжа F , а X^o є оптимальним розв’язком задачі НП.

16. Елементи динамічного програмування

У задачах лінійного і нелінійного програмування економічний процес вважався стаціонарним (не залежним від часу). Насправді економіка динамічна, тому щоб повніше відобразити економічні процеси, треба шукати розв’язки не для одного проміжку часу, а на протязі кількох етапів. Наприклад, планувати роботу підприємства краще не на рік, а по місяцях, враховуючи результати попереднього місяця.

Тому виникають задачі динамічного проектування, тобто – багато задач, у яких на кожному етапі приймаються оптимальні рішення. Ці рішення визначають оптимальну стратегію поведінки. Причому рішення на кожному етапі приймається виходячи з інтересів усієї задачі, тому вони можуть не бути оптимальними в рамках одного етапу.

Розглянемо метод розв’язання задач динамічного програмування на прикладі задачі про оптимальний розподіл капіталовкладень (або ресурсів).

Нехай у два підприємства $\check{I}_1$ і $\check{I}_2$ вкладають капіталовкладення x . Тому відомо, що прибуток від $\check{I}_1$ буде $g(x)$, від $\check{I}_2$ – $h(x)$. Якщо сумарна кількість капіталовкладень K , $x, \check{I}_2$ то сумарний прибуток буде

$$F(x) = g(x) + h(k - x).$$

Він має бути максимальним: $F_1(k) = \max_{0 \leq x \leq k} [g(x) + h(k - x)]$.

Нехай залишок капіталовкладень після першого етапу на першому підприємстві Π_1 становитиме ax , $0 \leq a < 1$, а на другому $b(k - x)$, де $0 \leq b < 1$. Тоді прибуток за другий етап складе

$$F_1(ax + b(k - x)).$$

Сумарний максимальний прибуток за два етапи буде

$$F_2(k) = \max_{0 \leq x \leq k} [g(x) + h(k - x) + F_1(ax + b(k - x))].$$

Якщо $F_3(k)$ - максимальний прибуток за три етапи, то

$$F_3(k) = \max_{0 \leq x \leq k} [g(x) + h(k - x) + F_2(ax + b(k - x))].$$

Аналогічно для n етапів одержимо

$$F_n(k) = \max_{0 \leq x \leq k} [g(x) + h(k - x) + F_{n-1}(ax + b(k - x))], \quad (1)$$

де F_{n-1} – найбільший прибуток за попередні $(n - 1)$ етапів.

Одержали рекурентне співвідношення, яке називається функціональним рівнянням Беллмона.

Рівняння (1) означає, що максимальний прибуток виробництва від n -етапного процесу одержується – як максимум суми прибутків від першого етапу і $(n - 1)$ наступних етапів при умові, що залишені після першого етапу ресурси протягом наступних $(n - 1)$ етапів використовуються найкращим чином.

Рівняння (1) є математичним виразом принципу Беллмана: якщо деяка послідовність розв'язків оптимальна, то окремі наступні розв'язки оптимальні по відношенню до попередніх.

У відповідності з принципом Беллмана задачу розв'язують, починаючи з останнього етапу. Потому переходять до розв'язання попереднього етапу, відкидаючи можливості альтернативи, які протирічать вибраному розв'язку.

Пропонуємо розв'язання задачі динамічного програмування за допомогою принципу Беллмана на прикладі.

Приклад 1. Розподілити капіталовкладення $K=200$ тис. грн. чотирьом підприємствам, якщо відомі їх функції приросту випуску продукції $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$, $g_4(x)$, задані для деяких значень x таблицею.

Загальний приріст випуску продукції має бути максимальний.

Капіталовкладення k , тис. грн	Приріст випуску продукції (прибуток)			
	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$
0	0	0	0	0
50	25	30	36	28
100	60	70	64	56
150	100	90	95	110
200	140	122	130	142

Позначимо $F_n(k)$, $n=1,2,3,4$, максимальний приріст випуску продукції при розподілі капіталовкладень x тис. грн. відповідно між першим, двома першими, трьома першими, чотирма заводами.

Функ. рівняння буде

$$F_n(k) = \max_{0 \leq x \leq k} [g_n(x) + F_{n-1}(k-x)],$$

Оскільки $F_1(k) = g_1(k)$, то

$$F_1(0) = g_1(0) = 0,$$

$$\begin{aligned}
F_1(50) &= g_1(50) = 25, \\
F_1(100) &= g_1(100) = 60, \\
F_1(150) &= g_1(150) = 100, \\
F_1(200) &= g_1(200) = 140.
\end{aligned}$$

$$\text{Оскільки } F_2(k) = \max_{0 \leq x \leq k} [g_2(x) + F_1(k - x)], \text{ то } F_2(0) = 0$$

$$F_2(50) = \max [g_2(50) + F_1(50 - 50), g_2(0) + F_1(50 - 0)] = \max [30 + 0, 0 + 25] = 30;$$

$$\begin{aligned}
F_2(100) &= \max [g_2(100) + F_1(0), g_2(50) + F_1(50), g_2(0) + F_1(100)] = \\
&= \max [70 + 0, 30 + 25, 0 + 60] = 70;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2(150) &= \max [g_2(150) + F_1(0), g_2(100) + F_1(50), g_2(50) + F_1(100), g_2(0) + F_1(150)] = \\
&= \max [90 + 0, 70 + 25, 30 + 60, 0 + 100] = 100;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2(200) &= \max [g_2(200) + F_1(0), g_2(150) + F_1(50), g_2(100) + F_1(100), \\
&g_2(50) + F_1(150), g_2(0) + F_1(200)] = \\
&= \max [122 + 0, 90 + 25, 70 + 60, 30 + 100, 0 + 140] = 140;
\end{aligned}$$

$$\text{Оскільки } F_3(k) = \max_{0 \leq x \leq k} [g_3(x) + F_2(k - x)], \text{ то } F_3(0) = 0$$

$$F_3(50) = \max [g_3(50) + F_2(0), g_3(0) + F_2(50)] = \max [36 + 0, 0 + 30] = 36;$$

$$\begin{aligned}
F_3(100) &= \max [g_3(100) + F_2(0), g_3(50) + F_2(50), g_3(0) + F_2(100)] = \\
&= \max [64 + 0, 36 + 30, 0 + 70] = 70;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_3(150) &= \max [g_3(150) + F_2(0), g_3(100) + F_2(50), g_3(50) + F_2(100), g_3(0) + F_2(150)] = \\
&= \max [95 + 0, 64 + 30, 36 + 70, 0 + 100] = 106;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_3(200) &= \max [g_3(200) + F_2(0), g_3(150) + F_2(50), g_3(100) + F_2(100), \\
&g_3(50) + F_2(150), g_3(0) + F_2(200)] = \\
&= \max [130 + 0, 95 + 30, 64 + 70, 36 + 100, 0 + 140] = 140
\end{aligned}$$

$$\text{Оскільки } F_4(k) = \max_{0 \leq x \leq k} [g_4(x) + F_3(k - x)], \text{ то } F_4(0) = 0$$

$$F_4(50) = \max[g_4(50) + F_3(0), g_4(0) + F_3(50)] = \max[28 + 0, 0 + 36] = 36;$$

$$F_4(100) = \max[g_4(100) + F_3(0), g_4(50) + F_3(50), g_4(0) + F_3(100)] = \\ = \max[56 + 0, 28 + 36, 0 + 70] = 70;$$

$$F_4(150) = \max[g_4(150) + F_3(0), g_4(100) + F_3(50), g_4(50) + F_3(100), g_4(0) + F_3(150)] = \\ = \max[110 + 0, 56 + 36, 28 + 70, 0 + 106] = 110;$$

$$F_4(200) = \max[g_4(200) + F_3(0), g_4(150) + F_3(50), g_4(100) + F_3(100), \\ g_4(50) + F_3(150), g_4(0) + F_3(200)] = \\ = \max[142 + 0, 110 + 36, 56 + 70, 28 + 106, 0 + 140] = 146.$$

Дані одержані занесемо у таблицю

Капіталовкладення, k	$K_1(k)$	$K_2(k)$	$K_3(k)$	$K_4(k)$
50	25	30	36	36
100	60	70	70	70
150	100	100	106	110
200	140	140	140	146

За таблицею максимальний приріст випуску продукції 146 тис. грн. при капіталовкладенні 200 тис. грн.. він досягається, якщо (дивись підкреслення) четвертому заводу надати 150 тис. грн., а трьом першим 50 тис. грн.; 50 тис. грн. розподіляються такб всі 50 тис. грн. третьому, а двом першим нічого.

Відповідь: 1-му – 0;

2-му – 0;

3-му – 50 тис. грн.;

4-му – 150 тис. грн..

При цьому максимальний приріст продукції складе 146 одиниць.

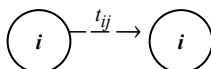
17. Елементи сіткового планування

Поняття про сіткове планування

Сіткове планування використовують у тих галузях, які пов'язані з плануванням, аналізом і здійсненням великої кількості операцій.

17.1 У сітковому плануванні розглядаються об'єкти двох видів: події і операції. Подія – це початок або завершення деякої роботи. Операція – сама робота. Подія – результат операцій.

Використаємо зображення



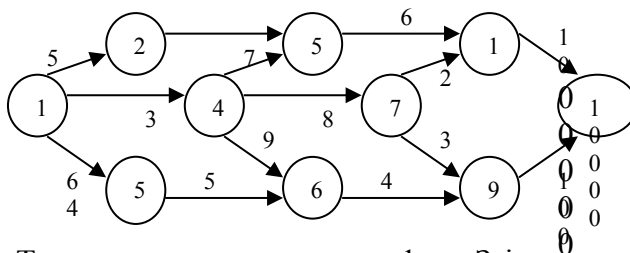

 події. Подія  передуює  або  слідує за 

Тривалість роботи $i - j$ дорівнює t_{ij} .

Нехай при плануванні деякої розробки виділено 15 робіт, причому для кожної вказано попередню і наступну події та тривалість кожної роботи

Робота		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
Події	Попередня	1	1	1	2	3	3	4	4	4	5	6	7	7
	Наступна	2	3	4	5	4	6	5	6	7	8	9	8	9
Тривалість		5	4	3	1	3	5	7	9	8	6	4	2	3

За таблицею будуюмо сітковий графік послідовного виконання робіт і вказуємо тривалості робіт:

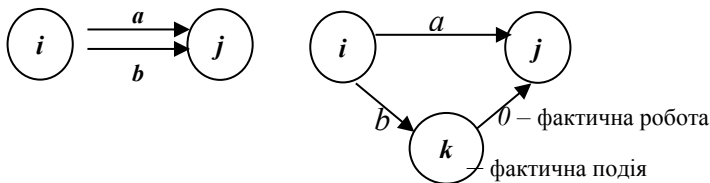


Така схема називається графом. Згідно з математичною теорією графів, повинні виконуватись умови:

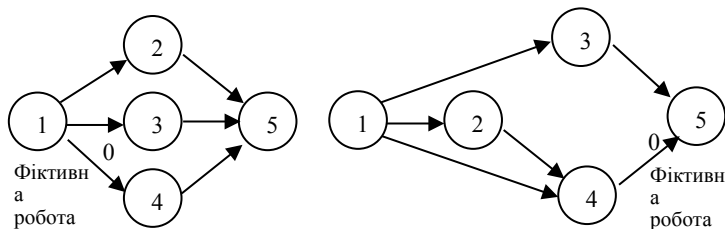
- 1) всі стрілки, які з'єднують початковий кружок, виходять з нього;
- 2) всі стрілки, які з'єднують останній кружок, входять в нього;
- 3) у проміжних кружків є і вхідні, і вихідні стрілки.

Правило побудови сіткового графіка:

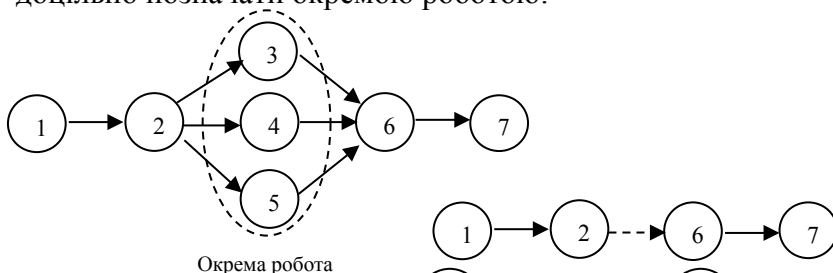
1. Дві послідовні події мають з'єднуватися тільки однією стрілкою. Якщо є дві паралельні роботи, то вводиться фіктивна подія і фіктивна робота тривалістю 0:



2. У сітковому графіку не повинно бути звисань, тобто всі події (крім першої і останньої) повинні мати і вхідні, і вихідні стрілки. Якщо такого немає, то їх з'єднують з початковою або кінцевою подією фіктивною роботою тривалістю 0 – наприклад:



3. Групу робіт, що складають підсистему всіх робіт, доцільно позначати окремою роботою:



4. Якщо $i < j$, то подія i передуює події j

Приклад. Скласти граф, якщо задані вершини і відстані між вершинами

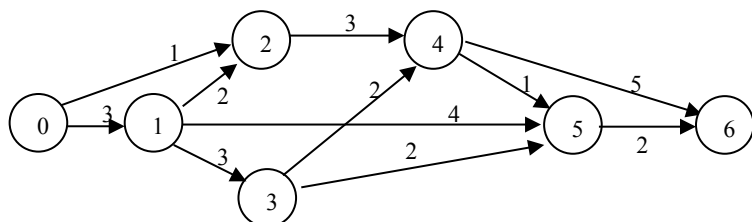
Вершини	Попередня	0	0	1	1	1	2	3	3	4	4	5
---------	-----------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

	Наступна	1	2	2	3	5	4	4	5	5	6	6
	Відстані	3	1	2	3	4	3	2	2	1	5	2

Спочатку вибираємо подію, яка не є наступною для жодної, це **(0)**. Вона складає 1-й рівень. Далі беремо ті, що виходять з **(0)**. Це **(1)** і **(2)**. З них вибираємо ті, що не містять вхідних стрілок з розглянутих кружків. Для **(2)** є вхідна з **(1)**, тому **(2)** відкладаємо. Залишається **(1)**, що складає другий рівень.

Беремо ті, що виходять з **(1)**. Це **(2)**, **(3)**, **(5)**. Оскільки з **(2)** і **(3)** немає вихідних в **(0)**, **(1)**, **(2)**, **(3)**, **(5)** то вони входять у третій рівень **(5)**. В третій рівень не входить, бо в **(5)** є вхідний з **(3)**.

Беремо ті, що виходять з **(2)** і **(3)**. З **(2)** виходить **(4)**, з **(3)** – **(4)** і **(5)**. Але **(5)** виключаємо. Тому у четвертому рівні є **(4)**.



З **(4)** виходить **(5)** і **(6)**, але **(6)** виключаємо. У 5-му рівні **(5)**. На 6-му – **(6)** додаємо зв'язки **(0)** – **(2)**, **(1)** – **(5)**, **(3)** → **(5)**, **(4)** → **(6)**.

Одержимо орієнтований граф.

17.2 Алгоритм пошуку найкоротшого шляху мережі

Часто потрібно визначити найкоротший шлях між містами, найменшу тривалість послідовності робіт тощо. Розглянемо алгоритм пошуку найкоротшого шляху на попередньому прикладі.

У алгоритмі перегляд вершин проводиться в послідовності зменшення їх номерів. Біля кружка записуємо найкоротшу довжину шляху від нього до кінцевого кружка. Найкоротший шлях позначаємо подвійною стрілкою.

Рухаємось від кружка з останнього рівня, тобто від $\textcircled{6}$. Ставимо 0 біля $\textcircled{6}$, бо звідси відраховуємо шлях.

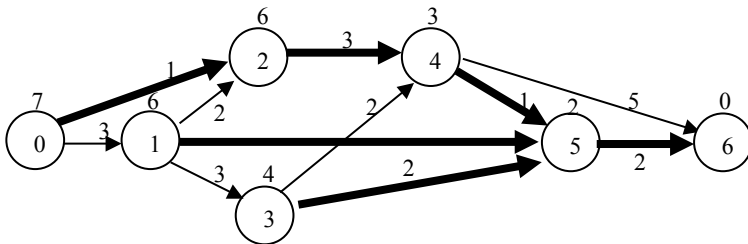
Переходимо до кружків у 5-му рівні. Такий один $\textcircled{5}$ тому шлях єдиний. Позначимо $\textcircled{5} \Rightarrow \textcircled{6}$ і відстань 2.

Переходимо до кружків у 4-му рівні, це $\textcircled{4}$.

Є два переходи до останнього:

$\textcircled{4} \rightarrow \textcircled{6}$ з відстанню 5 і $\textcircled{4} \rightarrow \textcircled{5} \rightarrow \textcircled{6}$ з відстанню $1+2=3$.

Коротший другий. Тому відмічаємо $\textcircled{4} \Rightarrow \textcircled{5}$.



Далі з 3-го рівня, тобто, до $\textcircled{2}$ і $\textcircled{3}$.

Шлях до $\textcircled{6}$ може бути такий:

$\textcircled{2} \rightarrow \textcircled{4} \rightarrow \textcircled{5} \rightarrow \textcircled{6}$ з відстанню $3+3=6$; тому при $\textcircled{2} \Rightarrow \textcircled{4}$.

По $\textcircled{3}$ шляхів два:



$\rightarrow \rightarrow \rightarrow$ з відстанню $2+3=5$;

$(3) \rightarrow (5) \rightarrow (6)$ з відстанню $2+2=4$.

Найменше 4, тому позначаємо $(2) \Rightarrow (4)$.

Переходимо до 2-го рівня, тобто до (2) .

З (1) до (6) є такі шляхи:

$(1) \rightarrow (2) \rightarrow (4) \rightarrow (5) \rightarrow (6)$ з відстанню $2+6=8$;

$(1) \rightarrow (5) \rightarrow (6)$ з відстанню $4+2=6$;

$(3) \rightarrow (4) \rightarrow (5) \rightarrow (6)$ з відстанню $3+4=7$.

Найкоротший другий, тому позначимо $(2) \Rightarrow (4)$.

Переходимо на 1-й рівень. До (6) є шляхи:

$(0) \rightarrow (2) \rightarrow (4) \rightarrow (5) \rightarrow (6)$ з відстанню $1+6=7$;

$(0) \rightarrow (1) \rightarrow (5) \rightarrow (6)$ з відстанню $3+6=9$.

Найкоротший 1-й, тому $(2) \Rightarrow (4)$.

Отже, найкоротший шлях $(0) \rightarrow (2) \rightarrow (4) \rightarrow (5) \rightarrow (6)$, а найменша відстань – 7.

Зауваження. Якщо функція завантаження вказує вартості перевезень, то знайдемо найменшу вартість та шлях перевезень (ще один метод розв'язання транспортної задачі).

1. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Жордана-Гаусса.

$$\begin{array}{ll} 1. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 16 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 ; \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -13 \end{cases} & 2. \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 11 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -14 ; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 5 \end{cases} \\ 3. \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 13 ; \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \end{cases} & 4. \begin{cases} -x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 11 ; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 11 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
5. \left\{ \begin{array}{l} -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -5 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 19 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 5 \end{array} \right. & 6. \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 5 \\ 6x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 47 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 15 \end{array} \right. \\
7. \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 7 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = -19 \end{array} \right. & 8. \left\{ \begin{array}{l} -2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 10 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 12 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = -1 \end{array} \right. \\
9. \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 13 \\ -3x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 26 \end{array} \right. & 10. \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 13 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 17 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 11 \end{array} \right. \\
11. \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 9 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 5 \end{array} \right. & 12. \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 16 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{array} \right. \\
13. \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 29 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 22 \end{array} \right. & 14. \left\{ \begin{array}{l} -x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 3 \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 20 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 22 \end{array} \right.
\end{array}$$

;

$$15. \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 4 \\ x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 3x_4 - x_5 = 61 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1 \end{array} \right. ; 16.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 4 \\ x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 3x_4 - x_5 = 61 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1 \end{array} \right. ;$$

$$17. \begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 21 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 47; \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 + x_5 = 27 \end{cases} \quad 18.$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = -2 \\ 5x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 14; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 7 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + 3x_5 = 13 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 6; \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8 \end{cases} \quad 20.$$

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + x_5 = 37 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 - 4x_5 = 17; \\ -x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + 3x_5 = -4 \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - 4x_5 = -12 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 21; \\ -3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 6x_5 = -13 \end{cases} \quad 22.$$

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 5x_5 = -14 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 21; \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 3 \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 + 2x_5 = -10 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 8; \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 14 \end{cases} \quad 24.$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 21 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = -4; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 4x_5 = 9 \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 8 \end{cases}$$

2. Цілочислове лінійне програмування.

Розв'язати задачі лінійного програмування за умови, що змінні x_1, x_2, x_3 – не від'ємні цілі числа.

$$1. f = -x_1 + 3x_2 + x_3 \rightarrow \max; \quad 2. f = 2x_1 - 3x_2 - x_3 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 \leq 13, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 \leq 6, \\ 2x_1 + 2x_3 \leq 11; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 6, \\ 3x_1 + 2x_3 \leq 11, \\ 4x_1 + 6x_2 \leq 13; \end{cases}$$

$$3. f = 3x_1 - x_2 + 2x_3 \rightarrow \max; \quad 4. f = -4x_1 - x_2 + 2x_3 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_3 \leq 11, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 14, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 7; \end{cases}$$

$$5. f = 4x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \max ;$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_3 \leq 13, \\ 2x_1 + 3x_3 \leq 7, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 \geq -6; \end{cases}$$

$$7. f = x_1 + 4x_2 - x_3 \rightarrow \max ;$$

$$\begin{cases} 6x_2 + 2x_3 \leq 13, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 \geq -5, \\ 3x_1 + 4x_3 \leq 10; \end{cases}$$

$$9. f = 2x_1 + 3x_2 - x_3 \rightarrow \max ;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 \leq 11, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 \geq -6, \\ 3x_2 + 4x_3 \leq 13; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_3 \geq 13, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 \geq -6, \\ 3x_2 + 2x_3 \leq 10; \end{cases}$$

$$6. f = -x_1 + 2x_2 - 4x_3 \rightarrow \min ;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_3 \leq 7, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 \leq 6, \\ 3x_1 + 3x_2 \leq 13; \end{cases}$$

$$8. f = -3x_1 + 4x_2 - x_3 \rightarrow \min ;$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_3 \leq 13, \\ 6x_1 + 3x_2 \leq 11, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 6; \end{cases}$$

$$10. f = 3x_1 - 4x_2 - x_3 \rightarrow \min ;$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 \leq 5, \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 14, \\ 2x_1 + 3x_3 \leq 14; \end{cases}$$

$$11. f = 3x_1 + x_2 - 3x_3 \rightarrow \max ; \quad 12. f = 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 \rightarrow \min ;$$

$$\begin{cases} 2x_2 + 2x_3 \leq 13, \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 \geq -8, \\ 6x_1 + 3x_3 \leq 13; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_3 \leq 14, \\ 2x_1 + 6x_2 \leq 11, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 7; \end{cases}$$

$$13. f = -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \rightarrow \max ; \quad 14. f = 3x_1 - 2x_2 - x_3 \rightarrow \min ;$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \leq 13, \\ 4x_1 + 3x_3 \leq 11; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 13, \\ 4x_1 + 3x_3 \leq 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 6; \end{cases}$$

$$15. f = 4x_1 - 2x_2 + x_3 \rightarrow \max ; \quad 16. f = -x_1 - 3x_2 + 2x_3 \rightarrow \min ;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 6x_1 + 2x_2 \leq 11, \\ 4x_2 + 3x_3 \leq 13, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 3; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 - 3x_3 \geq -7, \\ 3x_2 + 4x_3 \leq 11, \\ 2x_1 + 2x_3 \leq 11; \end{array} \right.$$

17. $f = -2x_1 + 4x_2 + x_3 \rightarrow \max$; 18. $f = -2x_1 - 4x_2 + x_3 \rightarrow \min$;

$$\left\{ \begin{array}{l} 5x_1 + 4x_2 \leq 14, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 5, \\ 2x_1 + 3x_3 \leq 14; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 - x_2 - 2x_3 \geq -4, \\ 3x_1 + 4x_3 \leq 10, \\ 6x_2 + 3x_3 \leq 13; \end{array} \right.$$

18. $f = -2x_1 - 4x_2 + x_3 \rightarrow \min$; 19. $f = -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$;

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x_1 - x_2 - 2x_3 \geq -4, \\ 3x_1 + 4x_3 \leq 10, \\ 6x_2 + 3x_3 \leq 13; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 6x_2 \leq 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 7, \\ 2x_1 + 3x_3 \leq 14; \end{array} \right.$$

19. $f = -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$; 20. $f = -3x_1 - 2x_2 + 2x_3 \rightarrow \min$;

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 6x_2 \leq 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 7, \\ 2x_1 + 3x_3 \leq 14; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 - 3x_3 \geq -6, \\ 2x_2 + 3x_3 \leq 11, \\ 6x_1 + 4x_3 \leq 13; \end{array} \right.$$

21. $f = 2x_1 - 3x_2 + x_3 \rightarrow \max$; 22. $f = -4x_1 - x_2 + 2x_3 \rightarrow \min$;

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + 4x_2 \leq 13, \\ x_2 + 2x_3 \leq 11, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 7; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 2x_3 \leq 7, \\ 3x_2 + 3x_3 \leq 13, \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 \geq -6; \end{array} \right.$$

23. $f = 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 \rightarrow \max$; 24. $f = -3x_1 + x_2 - 2x_3 \rightarrow \min$;

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x_2 + 2x_3 \leq 14, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 \geq -7, \\ 6x_1 + x_3 \leq 11; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 7, \\ 2x_2 + 6x_3 \leq 11, \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 14; \end{array} \right.$$

25. $f = x_1 - 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$;

$$\begin{cases} 3x_2 + 6x_3 \leq 11, \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 13, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 7; \end{cases}$$

3. Умовний екстремум. Метод множників Лагранжа.
Дослідити на умовний екстремум функції при даних обмеженнях.

$$1. \quad F = \frac{1}{x_1} + \frac{2}{x_2} + 2x_3^2 + 6x_3x_4 - 3x_4^2 - 2, \quad \frac{2}{x_1^2} + \frac{8}{x_2^2} = 1,$$

$$2x_3 - x_4 = 6;$$

$$2. \quad F = \ln x_1x_2 + x_3 + 2x_4 + 2, \quad x_1^3 + 2x_1x_2 + 8x_2^3 = 0, \quad x_3^2 + 2x_4^2 = 3;$$

$$3. \quad F = \frac{2}{x_1} + \frac{1}{x_2} - 2x_3^2 + 3x_3x_4 + 3x_4^2 + 1, \quad \frac{8}{x_1^2} + \frac{2}{x_2^2} = 1,$$

$$x_3 - 2x_4 = 4;$$

$$4. \quad F = \ln x_1 x_3 - 6x_2 + 3x_4 - 1, \quad 8x_1^3 - 4x_1 x_3 + x_3^3 = 0,$$

$$2x_2^2 + x_4^2 = 3;$$

$$5. \quad F = 3x_1^2 + \frac{1}{x_2} + 6x_1 x_3 + 2x_3^2 + \frac{2}{x_4} - 1, \quad 2x_1 + x_3 = 3, \quad \frac{2}{x_2^2} + \frac{8}{x_4^2} = 4;$$

$$6. \quad F = \ln x_2 x_3 + 2x_1 + x_4 + 1, \quad 8x_2^3 + 8x_2 x_3 + x_3^3 = 0, \quad 2x_1^2 + x_4^2 = 27;$$

$$7. \quad F = 2x_1^2 + 6x_1 x_2 - 3x_2^2 + \frac{2}{x_3} + \frac{1}{x_4} - 3, \quad 2x_1 - x_2 = 6,$$

$$\frac{8}{x_3^2} + \frac{2}{x_4^2} = 1;$$

$$8. \quad F = \ln x_1 x_4 - x_2 - 2x_3 - 2, \quad x_1^3 - 4x_1 x_4 + 8x_4^3 = 0,$$

$$x_2^2 + 2x_3^2 = 48;$$

$$9. \quad F = -2x_1^2 + \frac{1}{x_2} + \frac{2}{x_3} + 3x_1 x_4 + 3x_4^2 + 2, \quad x_1 - 2x_4 = 4,$$

$$\frac{2}{x_2^2} + \frac{8}{x_3^2} = 1;$$

$$10. \quad F = \ln x_3 x_4 - 2x_1 - x_2 + 3, \quad 27x_3^3 + 18x_3 x_4 + x_4^3 = 0,$$

$$2x_1^2 + x_2^2 = 12;$$

$$11. \quad F = -\frac{2}{x_1} + x_2^2 + 3x_2 x_3 - 3x_2^3 + \frac{3}{x_4} - 5, \quad -\frac{4}{x_1^2} + \frac{3}{x_4^2} = 2,$$

$$-2x_2 + 3x_3 = 6;$$

$$12. \quad F = \ln x_1 x_2 - 3x_3 + 6x_4 - 3, \quad 27x_1^3 - 54x_1 x_2 + x_2^3 = 0,$$

$$x_3^2 - 2x_4^2 = 12;$$

$$13. \quad F = -3x_1^2 + \frac{2}{x_2} + \frac{1}{x_3} - 4x_1x_4 + x_4^2 + 4, \quad 3x_1 - x_4 = -4,$$

$$\frac{3}{x_2^2} - \frac{3}{x_3^2} = 1;$$

$$14. \quad F = \ln x_2x_4 + 6x_1 - 3x_3 - 4, \quad 8x_2^3 + 16x_2x_4 + x_4^3 = 0, \\ 2x_1^2 + x_3^2 = 12;$$

$$15. \quad F = 3x_1^2 + 5x_1x_2 + x_2^2 + \frac{2}{x_3} - \frac{2}{x_4} + 3, \quad 3x_1 + 2x_2 = 5,$$

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{4}{x_2^2} = \frac{1}{20};$$

$$16. \quad F = \ln x_1x_3 - 6x_2 - 3x_4 + 2, \quad 8x_1^3 - 16x_1x_3 + x_3^3 = 0, \\ 2x_2^2 + x_4^2 = 3;$$

$$17. \quad F = -\frac{2}{x_1} + 2x_2^2 + 6x_2x_4 + \frac{3}{x_3} - 3x_4^2 - 2, \quad -\frac{4}{x_1^2} + \frac{3}{x_3^2} = 8,$$

$$2x_2 - x_4 = 3;$$

$$18. \quad F = \ln x_1x_4 - 6x_2 + 3x_3 - 1, \quad 8x_1^3 + 16x_1x_4 + x_4^3 = 0, \\ 2x_2^2 + x_3^2 = 3;$$

$$19. \quad F = \frac{3}{x_1} - 2x_2^2 + 3x_2x_3 + 2x_3^2 - \frac{2}{x_4} + 1, \quad -\frac{9}{x_1^2} + \frac{1}{x_4^2} = 3,$$

$$x_2 - 2x_3 = -4;$$

$$20. \quad F = \ln x_2x_3 + x_1 + 3x_4 - 4, \quad 8x_2^3 - 8x_2x_3 + x_3^3 = 0, \\ x_1^2 + 3x_4^2 = 16;$$

$$21. \quad F = 3x_1^2 + 6x_1x_3 + \frac{2}{x_2} + 2x_3^2 - \frac{1}{x_4} + 4, \quad 2x_1 + x_3 = 3,$$

$$\frac{8}{x_2^2} + \frac{2}{x_4^2} = 1;$$

$$22. \quad F = \ln x_2x_4 - x_1 - 3x_3 + 5, \quad 8x_2^3 + 8x_2x_4 + x_4^3 = 0, \quad x_1^2 + 3x_3^2 = 16;$$

$$23. \quad F = x_1^2 + 3x_1x_4 + \frac{1}{x_2} + \frac{2}{x_3} - 3x_4^2 - 2, \quad -2x_1 + 3x_4 = 1,$$

$$\frac{1}{x_2^2} + \frac{4}{x_3^2} = 2;$$

$$24. \quad F = \ln x_3x_4 + 4x_1 - x_2 - 3, \quad 8x_3^3 - 4x_3x_4 + x_4^3 = 0, \quad 4x_1^2 + x_2^2 = 5;$$

$$25. \quad F = -3x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 + \frac{3}{x_3} - \frac{1}{x_4} + 3, \quad 3x_1 - x_2 = 2,$$

$$\frac{1}{x_3^2} - \frac{1}{x_4^2} = 4.$$

4. 1.

$a_j \backslash b_j$	200	150	300	210	240
180	7	4	9	1	5
350	2	2	5	8	4
260	6	3	1	5	2
190	1	8	9	3	9
120	4	6	3	2	7

2.

$a_j \backslash b_j$	170	250	290	190	150
120	6	3	8	2	4
200	1	3	4	7	3
190	5	2	2	4	1
310	2	7	5	2	8
230	3	5	2	3	6

3.

$a_j \setminus b_j$	290	270	180	200	200
360	5	2	7	3	3
190	2	4	3	6	2
200	4	1	3	3	2
170	3	6	4	1	7
220	2	4	1	4	5

4.

$a_j \setminus b_j$	200	150	300	210	240
230	4	1	6	4	2
240	3	5	2	5	1
190	3	2	4	2	3
170	4	5	3	2	6
220	1	3	2	5	4

5.

$a_j \setminus b_j$	120	240	190	170	160
200	3	2	5	5	1
140	4	6	1	4	2
160	2	3	5	1	4
250	5	4	2	3	5
130	3	2	4	2	4

6.

$a_j \setminus b_j$	200	270	240	190	300
260	2	3	4	6	2
180	5	7	2	3	3
320	1	4	6	2	5
250	6	3	1	4	4
190	2	6	3	1	3

7.

$a_j \setminus b_j$	220	190	280	170	240
210	1	4	3	7	3
320	6	8	3	2	4
220	2	5	7	3	6
160	7	2	2	5	3
190	4	2	5	8	1

8.

$a_j \setminus b_j$	180	270	28\10	230	160
260	2	5	2	8	4
170	7	9	4	1	5
180	3	6	8	4	7
210	8	1	3	6	2
230	5	3	6	9	2

9.

$a_j \setminus b_j$	260	230	280	190	180
340	3	6	1	9	5
210	8	10	5	2	6
210	4	7	9	5	8
180	9	2	4	7	1
200	6	4	7	10	3

10.

$a_j \setminus b_j$	200	240	160	290	160
210	4	7	2	10	6
190	9	11	6	3	7
220	5	8	10	6	9
210	10	3	5	8	2
220	7	5	8	11	4

11.

$a_j \backslash b_j$	180	210	300	220	170	240
210	4	1	7	4	3	6
340	9	5	2	6	1	4
520	6	2	4	1	8	3
250	3	7	9	2	5	2

12.

$a_j \backslash b_j$	300	280	210	190	240	180
300	3	2	6	3	2	5
480	8	4	3	5	2	3
260	5	1	3	2	7	2
360	2	6	8	1	4	3

13.

$a_j \backslash b_j$	190	140	250	230	200	220
310	2	3	5	2	1	4
220	7	3	4	4	3	2
230	4	2	2	3	6	1
470	1	5	7	2	3	4

14.

$a_j \backslash b_j$	290	190	280	170	250	200
320	1	4	4	1	2	3
400	6	2	5	3	4	1
250	3	3	1	4	5	2
410	2	4	6	3	2	5

15.

$a_j \backslash b_j$	230	240	180	200	170	210
290	2	3	1	8	7	4
420	4	1	5	4	3	2

240	2	7	1	5	3	3
280	3	2	9	4	3	6

16.

$a_j \setminus b_j$	250	210	260	220	300	160
340						
390	7	6	8	3	2	4
260	5	5	2	4	7	2
410	4	7	3	5	4	6

17.

$a_j \setminus b_j$	200	160	300	160	180	230
300	4	2	1	5	3	2
410	3	6	4	1	2	4
290	5	3	5	4	3	3
230	4	4	3	2	1	5

18.

$a_j \setminus b_j$	180	280	270	210	270	190
400	3	1	2	5	4	2
280	4	2	3	1	3	2
330	3	4	4	2	2	4
390	5	1	5	4	2	3

19.

$a_j \setminus b_j$	230	160	190	200	210	240
450	8	6	4	5	6	4
230	5	7	3	4	6	5
240	4	4	8	7	5	3

310	6	5	9	3	4	5
-----	---	---	---	---	---	---

20.

$a_j \setminus b_j$	200	250	180	200	300	250
240	7	5	5	4	6	6
420	4	6	4	7	3	2
390	5	3	7	5	5	6
330	3	4	5	6	2	3

21.

$a_j \setminus b_j$	380	330	260	430
240	2	5	6	4
270	3	1	4	2
190	6	4	3	1
320	5	3	2	5
150	2	6	1	4
230	3	5	4	2

22.

$a_j \setminus b_j$	290	420	470	390
240	8	3	4	1
290	2	6	6	3
210	5	7	2	4
360	1	3	4	8
210	6	5	4	4
260	3	2	3	6

23.

$a_j \setminus b_j$	210	330	290	500
---------------------	-----	-----	-----	-----

240	4	1	6	3
210	3	3	2	7
170	7	4	2	3
320	5	1	3	4
170	4	2	2	6
220	3	3	4	2

24.

$a_j \setminus b_j$	420	370	530	290
200	9	4	3	6
280	5	3	8	4
200	6	6	2	3
330	4	2	3	5
250	6	8	4	7
350	2	4	5	5

25.

$a_j \setminus b_j$	370	400	250	350
270	3	6	5	7
190	3	2	6	5
230	1	4	1	7
180	4	5	3	1
190	4	4	5	2
310	2	5	3	4

5. Розв'язати задачі квадратичного програмування, використовуючи симплексний метод:

1. $f = -2x_1 + 8x_2 - x_1^2 - x_2^2 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ -x_1 + x_2 \geq -8; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

2. $f = -x_1^2 - x_2^2 + 10x_1 + 15x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 13 \\ 2x_1 + x_2 \leq 10; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

3. $f = -x_1^2 - 4x_2^2 + 2x_1 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \leq 80 \\ 2x_1 + x_2 \leq 34; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

4. $f = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 \rightarrow \min;$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 6;$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, 2, 3\}.$$

5. $f = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 + 2x_2 \leq 6 \end{cases};$$

 $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$
6. $f = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_2 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 + 2x_2 \leq 4 \end{cases};$$

 $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$
7. $f = 32x_1 + 120x_2 - 4x_1^2 - 15x_2^2 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 20 \\ 2x_1 - x_2 \leq 8 \end{cases};$$

 $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$
8. $f = 9x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_1 - 4x_2 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 10 \end{cases};$$

 $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$
9. $f = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 8x_1 - 2x_2 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 + 2x_2 \leq 6 \end{cases};$$

 $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$
10. $f = -2x_1^2 - x_2^2 + x_1 - 4x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ -x_1 + x_2 \geq -4 \end{cases};$$

 $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$
11. $f = -2x_1^2 - 2x_2^2 + 5x_1 + 8x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \end{cases};$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

12. $f = x_1 + 4x_2 + x_1x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ 3x_1 + x_2 \leq 15 \end{cases};$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

13. $f = -x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 18 \\ x_2 \leq 12 \\ x_1 + 2x_3 \leq 14 \end{cases};$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, 2, 3\}.$$

14. $f = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 6x_2 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 7 \\ x_1 \leq 5 \end{cases};$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 > 0.$$

15. $f = 4x_1^2 + 9x_2^2 + 8x_1 + 4 \rightarrow \min;$

$$x_1 + 2x_2 \leq 2;$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

16. $f = 10x_1 + 20x_2 + x_1x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} 8 - x_2 \geq 0 \\ 10 - x_1 - x_2 \geq 0 \end{cases};$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

17. $f = 5x_1 + 2x_2 - x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 15, \\ x_1 + 2x_2 = 8; \end{cases};$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

$$18. \quad f = 32x_1 + 120x_2 - 4x_1^2 - 3x_2^2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 20, \\ 2x_1 - x_2 = 8; \end{cases};$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

$$19. \quad f = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 - 4x_2 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 20, \\ x_1 + x_2 \geq 8; \end{cases};$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

$$20. \quad f = x_1 + 3x_2 - 2x_1^2 - 3x_2^2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 12, \\ x_1 + x_2 \geq 6; \end{cases};$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

$$21. \quad f = 3x_1 + 8x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 8, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 20; \end{cases};$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

$$22. \quad f = 8x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_1^2 - 2x_2^2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 16, \\ 3x_2 + 4x_3 \leq 20; \end{cases};$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

$$23. \quad f = 8x_1 + x_2 - x_1^2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 16, \\ x_1 + 5x_2 = 20; \end{cases};$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

$$24. \quad f = 15x_1 + 8x_2 - x_1^2 + x_1x_2 - 3x_2^2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 15, \\ x_1 + 2x_2 \leq 10; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

25. $f = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 18; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

6. Розв'язати наведені задачі лінійного програмування симплекс-методом.

1. $z = 5x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 5 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 \geq -3 \end{cases};$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

2. $z = x_1 - 3x_2 + x_3 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 \leq -2 \\ 2x_2 + 4x_3 \leq 7 \end{cases};$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

3. $z = -x_1 - x_2 + 3x_3 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - 2x_3 \geq -2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 8 \end{cases};$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

4. $z = -x_1 - 2x_2 + 2x_3 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \end{cases};$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

5. $z = x_1 + 3x_2 + 9x_3 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 10 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 \geq -2 \end{cases};$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

6. $z = x_1 + 3x_2 - 3x_3 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 \geq 2 \\ -x_2 - 2x_3 \geq -6 \end{cases};$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

7. $z = x_1 + 3x_2 + 9x_3 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 10 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 \geq -2 \end{cases};$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

8. $z = 3x_1 - 2x_2 - x_3 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \end{cases};$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

9. $z = 2x_1 - x_2 - 3x_3 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 \leq 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ -x_1 + 6x_2 \leq -4 \end{cases};$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

10. $z = -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_4 = -5 \\ 2x_2 + x_3 \leq 4 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 \geq -8 \end{cases};$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}.$$

11. $z = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 \leq 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ -2x_1 + 2x_3 \geq -4 \end{cases};$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

12. $z = x_1 + 2x_2 - 3x_3 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 4 \\ 2x_1 + 3x_3 \leq 6 \\ x_1 + x_3 \leq 2 \end{cases};$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

13. $z = 2x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 1 \\ -x_2 - x_3 \geq -2 \\ x_1 + x_3 \leq 2 \end{cases};$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

14. $z = -2x_1 - 3x_2 + x_3 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 40 \end{cases};$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

15. $z = x_1 - 5x_2 - x_3 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 3 \\ 2x_1 + x_3 = 4 \end{cases};$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

16. $z = 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 8 \end{cases};$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

17. $z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 8 \end{cases};$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

18. $z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 10 \end{cases};$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

19. $z = 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 3x_4 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 8 \end{cases};$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}.$$

20. $z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 8 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 10 \end{cases};$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

21. $z = x_1 + 5x_2 + 3x_3 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases};$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

22. $z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 7 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 8 \end{cases};$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}.$$

23. $z = 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases};$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

24. $z = -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases};$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

25. $z = x_1 + x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \end{cases},$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,2}.$$

7. Сіткове планування.

1. Скласти сітковий графік виконання комплексу робіт.
2. Побудувати критичний шлях і знайти, за який найкоротший час можна виконати роботи.
3. Визначити ранній і пізній терміни настання подій в рамках знайденого часу.

1.

Робота	Події	Тривалість
А	1-2	5
Б	1-3	8
В	1-4	4
Г	4-5	7
Д	4-3	3
Е	3-5	9
Є	3-7	10
Ж	3-6	5
З	2-6	6
И	6-9	8
І	5-8	6
Ї	7-9	10
Й	7-6	4
К	7-8	5
Л	8-9	4

2.

Робота	Події	Тривалість
А	1-2	4
Б	1-3	5
В	1-4	8
Г	2-5	7
Д	2-4	3
Е	4-5	9
Є	4-6	10
Ж	4-7	5
З	3-7	6
И	5-8	6
І	6-8	5
Ї	6-9	10
Й	6-7	4
К	7-9	8
Л	8-9	4

3.

Робота	Події	Тривалість
А	1-2	5
Б	1-7	10
В	1-3	8
Г	1-4	6
Д	2-7	12
Е	7-8	13
Є	7-6	5
Ж	4-3	5
З	4-5	7
И	3-6	8
І	6-8	11
Ї	6-10	15
Й	6-9	12
К	6-5	5
Л	5-9	6
М	9-10	8
Н	8-10	6

4.

Робота	Події	Тривалість
А	1-2	3
Б	1-7	8
В	1-3	6
Г	1-4	4
Д	2-7	10
Е	7-8	11
Є	7-6	3
Ж	4-3	3
З	4-5	5
И	3-6	6
І	6-8	9
Ї	6-10	13
Й	6-9	10
К	6-5	3
Л	5-9	4
М	9-10	6
Н	8-10	4

5.

Робота	Події	Тривалість
А	1-2	3
Б	1-3	9
В	1-4	4
Г	4-6	6
Д	3-6	4
Е	3-7	11
Є	3-5	10
Ж	2-5	7
З	2-3	3
И	6-9	9
І	7-6	3
Ї	7-9	11
Й	7-8	3
К	5-8	6
Л	8-9	4

6.

Робота	Події	Тривалість
А	1-2	9
Б	1-3	4
В	1-4	3
Г	2-7	11
Д	2-5	10
Е	2-6	4
Є	3-6	6
Ж	4-2	3
З	4-5	8
И	5-8	6
І	6-9	9
Ї	7-6	3
Й	7-8	4
К	7-9	11
Л	8-9	3

7.

Робота	Події	Тривалість
А	1-2	4
Б	1-3	9
В	1-4	5
Г	1-7	11
Д	4-3	4
Е	4-5	6
Є	3-6	7
Ж	2-7	13
З	7-8	14
И	7-6	4
І	6-5	4
Ї	6-8	12
Й	6-10	16
К	6-9	13
Л	5-9	5
М	8-10	6
Н	9-10	8

8.

Робота	Події	Тривалість
А	1-2	8
Б	1-3	13
В	1-4	9
Г	1-7	15
Д	3-6	11
Е	4-3	8
Є	4-5	10
Ж	2-7	17
З	7-8	18
И	7-6	8
І	6-5	8
Ї	6-8	16
Й	6-9	17
К	6-10	20
Л	5-9	9
М	9-10	10
Н	8-10	12

9.

Робота	Події	Тривалість
А	1-2	4
Б	1-3	10
В	1-4	8
Г	2-3	5
Д	2-5	6
Е	4-7	5
Є	4-8	6
Ж	4-3	4
З	3-7	10
И	5-7	9
І	5-6	7
Ї	7-6	3
Й	6-9	4
К	7-9	8
Л	8-9	5

10.

Робота	Події	Тривалість
А	1-2	5
Б	1-3	11
В	1-4	9
Г	2-6	6
Д	2-3	5
Е	3-5	10
Є	4-3	4
Ж	4-5	5
З	4-7	6
И	7-9	5
І	6-5	9
Ї	6-8	7
Й	5-8	3
К	8-9	4
Л	5-9	8

11.

Робота	Події	Тривалість
А	1-2	5
Б	1-3	8
В	1-4	6
Г	1-5	10
Д	4-3	5
Е	4-7	7
Є	2-5	12
Ж	3-6	8
З	5-6	5
И	5-8	13
І	6-8	11
Ї	6-10	15
Й	6-9	12
К	6-7	5
Л	7-9	6
М	8-10	6
Н	9-10	8

12.

Робота	Події	Тривалість
А	1-2	4
Б	1-3	9
В	1-4	7
Г	1-5	5
Д	2-3	11
Е	3-6	12
Є	3-7	4
Ж	4-7	7
З	5-4	4
И	5-8	6
І	7-6	10
Ї	7-10	14
Й	7-9	11
К	7-8	4
Л	6-10	5
М	8-9	5
Н	9-10	7

13.

Робота	Події	Тривалість
А	1-2	8
Б	1-3	11
В	1-4	3
Г	2-7	6
Д	2-6	5
Е	2-3	3
Є	3-6	10
Ж	4-3	5
З	4-5	6
И	5-8	7
І	5-6	9
Ї	7-9	5
Й	6-9	8
К	6-8	4
Л	8-9	4

14.

Робота	Події	Тривалість
А	1-2	9
Б	1-3	11
В	1-4	5
Г	2-5	7
Д	2-6	6
Е	2-3	5
Є	3-6	12
Ж	4-7	7
З	4-3	6
И	5-9	6
І	6-9	10
Ї	6-8	5
Й	7-6	11
К	7-8	8
Л	8-9	5

15.

Робота	Події	Тривалість
А	1-2	5
Б	1-3	7
В	1-4	4
Г	1-7	11
Д	2-5	6
Е	2-3	4
Є	3-6	7
Ж	4-7	13
З	5-8	5
И	6-5	4
І	7-6	4
Ї	7-9	14
Й	6-9	12
К	6-10	16
Л	6-8	13
М	8-10	7
Н	9-10	5

16.

Робота	Події	Тривалість
А	1-2	7
Б	1-3	9
В	1-4	11
Г	1-5	6
Д	2-6	8
Е	2-3	6
Є	5-4	13
Ж	3-7	9
З	4-8	14
И	4-7	6
І	6-9	7
Ї	7-8	12
Й	7-10	16
К	7-9	13
Л	7-6	6
М	8-10	7
Н	9-10	9

17.

Робота	Події	Тривалість
А	1-2	3
Б	1-3	9
В	1-4	4
Г	2-6	8
Д	3-6	11
Е	3-7	12
Є	3-5	5
Ж	4-3	6
З	4-5	6
И	5-9	7
І	6-8	7
Ї	7-6	5
Й	7-8	6
К	7-9	10
Л	8-9	5

18.

Робота	Події	Тривалість
А	1-2	7
Б	1-3	10
В	1-4	7
Г	4-5	6
Д	4-3	6
Е	3-5	5
Є	3-7	11
Ж	3-6	10
З	2-6	9
И	6-8	7
І	7-8	6
Ї	7-9	11
Й	7-6	5
К	5-9	7
Л	8-9	5

19.

Робота	Події	Тривалість
А	1-2	6
Б	1-3	8
В	1-4	15
Г	3-4	12
Д	3-5	6
Е	2-4	11
Є	2-6	13
Ж	4-6	5
З	5-4	5
И	6-9	12
І	6-10	10
Ї	4-8	8
Й	5-7	7
К	8-7	5
Л	7-10	6
М	8-10	8
Н	9-10	5

20.

Робота	Події	Тривалість
А	1-2	6
Б	1-3	15
В	1-4	8
Г	2-6	13
Д	2-3	11
Е	4-3	12
Є	4-5	6
Ж	3-6	5
З	3-7	8
И	5-3	5
І	6-9	12
Ї	6-10	10
Й	5-8	7
К	7-8	5
Л	7-10	8
М	8-10	6
Н	9-10	5

21.

Робота	Події	Тривалість
А	1-2	6
Б	1-3	7
В	1-4	10
Г	2-5	9
Д	3-7	8
Е	3-4	7
Є	4-7	7
Ж	4-6	12
З	4-5	11
И	7-9	10
І	6-9	12
Ї	6-5	6
Й	6-8	7
К	5-8	8
Л	8-9	6

22.

Робота	Події	Тривалість
А	1-2	4
Б	1-3	6
В	1-4	9
Г	2-7	7
Д	3-5	7
Е	3-4	6
Є	4-5	6
Ж	4-6	12
З	4-7	10
И	6-7	6
І	6-8	7
Ї	6-9	12
Й	5-9	9
К	7-8	8
Л	8-9	4

23.

Робота	Події	Тривалість
А	1-2	6
Б	1-3	4
В	1-6	13
Г	2-6	10
Д	2-4	4
Е	3-5	11
Є	3-6	9
Ж	4-9	5
З	4-6	3
И	6-7	6
І	6-5	3
Ї	5-8	10
Й	5-10	8
К	7-9	3
Л	7-10	6
М	8-10	3
Н	9-10	4

24.

Робота	Події	Тривалість
А	1-2	10
Б	1-3	8
В	1-5	17
Г	3-6	15
Д	2-4	8
Е	2-5	14
Є	3-5	13
Ж	4-5	7
З	4-9	9
И	5-6	7
І	5-8	10
Ї	6-10	12
Й	6-7	14
К	8-9	7
Л	7-10	7
М	8-10	10
Н	9-10	8

25.

Робота	Події	Тривалість
А	1-2	4
Б	1-3	10
В	1-4	8
Г	2-6	6
Д	2-3	5
Е	3-5	10
Є	4-5	5
Ж	4-7	6
З	6-3	4
И	6-5	9
І	6-8	7
Ї	5-7	5
Й	5-9	8
К	7-9	5
Л	8-9	4

8. Розв'язати графічно задачі дробово-лінійного програмування.

$$1. \quad f = \frac{3x_1 - x_2}{x_1 + x_2} \rightarrow \max ;$$

$$\begin{cases} 9x_1 + 6x_2 \leq 54, \\ -2x_1 + 9x_2 \geq 19, ; \\ -3x_1 + 10x_2 \leq 54; \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$2. \quad f = \frac{x_1 - 2x_2}{x_1 + 5x_2} \rightarrow \max ;$$

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \leq 4, \\ -x_1 + 2x_2 \geq 2, ; \\ x_1 + x_2 \leq 13; \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$3. \quad f = \frac{x_1 + 2x_2 - 1}{3x_1 - x_2 + 4} \rightarrow \max ;$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 8, \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 27, \\ x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 + 2x_2 \geq 6; \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$4. \quad f = \frac{x_1 - 2x_2 + 6}{x_1 + x_2 + 3} \rightarrow \max ;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 8, \\ x_2 \leq 10, ; \\ x_1 - x_2 \leq 8; \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$5. \quad f = \frac{x_1 + 2x_2}{3x_1 + 2x_2} \rightarrow \max ;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 + 8x_2 \leq 8, ; \\ x_1 \geq 1; \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$6. \quad f = \frac{-x_1 + 3x_2 - 6}{x_1 + x_2 + 2} \rightarrow \min ;$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 6, \\ x_1 + 3x_2 \geq 9, ; \\ x_1 \geq 2; \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$7. \quad f = \frac{5x_1 - x_2 + 4}{x_1 + 2x_2 + 3} \rightarrow \max ;$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 6, \\ -3x_1 + x_2 \leq 3, ; \\ x_1 + x_2 \leq 7; \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$8. \quad f = \frac{x_1 - x_2 + 1}{2x_1 + x_2 + 4} \rightarrow \max ;$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq -4, \\ x_1 + x_2 \leq 10, ; \\ x_1 - 4x_2 \leq -8; \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$9. \quad f = \frac{2x_1 - x_2}{x_1 + 2} \rightarrow \max ;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 5, \\ 2x_1 - x_2 \geq 1, ; \\ x_1 - x_2 \leq 1; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

$$10. \quad f = \frac{4x_1 + 2x_2}{x_1 + x_2 + 1} \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \leq 9, \quad ; \\ 3x_1 - x_2 \leq 15; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

$$11. \quad f = \frac{x_1 - 2x_2 + 6}{x_1 + x_2 + 3} \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \leq -3, \\ x_2 \leq 6, \quad ; \\ x_1 - x_2 \leq 8; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

$$12. \quad f = \frac{3x_1 + 4x_2 + 7}{2x_1 + x_2 + 2} \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_1 + 2x_2 \leq 10, \quad ; \\ x_1 - x_2 \leq 5; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

$$13. \quad f = \frac{x_1 - 2x_2}{3x_1 + x_2 + 2} \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 7, \\ -x_1 + 4x_2 \leq 5, \quad ; \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 17; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

$$14. \quad f = \frac{-x_1 + 3x_2 - 6}{x_1 + x_2 + 2} \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 9, \\ x_1 - x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 2, \\ 0 \leq x_1 \leq 10; \end{cases}$$

$$15. \quad f = \frac{x_1 - x_2 + 2}{3x_1 + 2x_2 + 4} \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 4, \\ -2x_1 + 5x_2 \leq 10; \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$16. \quad f = \frac{3x_1 - 3x_2 + 9}{3x_1 + x_2 + 1} \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 4, \\ -x_1 + 4x_2 \geq 4; \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$17. \quad f = \frac{2x_1 + x_2}{x_1 + x_2} \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 11, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 8, \quad ; \\ -x_1 + 3x_2 + x_5 = 9; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 5\}. \end{cases}$$

$$18. \quad f = \frac{x_1 - x_2 + x_3}{2x_1 + x_2 + 1} \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 4; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, 2, 3\}. \end{cases}$$

$$19. \quad f = \frac{2x_1 - 3x_2}{3x_1 + x_2} \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 6; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 4\}. \end{cases}$$

$$20. \quad f = \frac{2x_1 - x_2}{x_1 + 2x_2 + 1} \rightarrow \max; \\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 6; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 4\}. \end{cases}$$

$$21. \quad f = \frac{x_1 - 2x_2}{x_2 + 3} \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ x_1 - 4x_2 \leq 2, \\ x_1 - x_2 \leq 5; \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$22. \quad f = \frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 - x_2} \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ x_1 - 4x_2 \leq 2, \\ x_1 - x_2 \leq 5; \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$23. \quad f = \frac{3x_1 - x_2}{x_1 + x_2} \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 7, \\ 3x_1 - x_2 + x_5 = 11; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 5\}. \end{cases}$$

24. $f = \frac{-2x_1 + x_2}{x_1 + 2x_2 + 1} \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 6; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, 2, 3\}. \end{cases}$$
25. $f = \frac{-2x_1 - x_2 + x_3}{3x_2 + x_3} \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 6; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 4\}. \end{cases}$$
26. $f = \frac{2x_1 + 3x_2 - x_3}{x_1 + x_3} \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1, \quad ; \\ x_1 + x_2 + x_5 = 2; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 5\}. \end{cases}$$

9. Побудувати двоїсті задачі до даних.

1. $f = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4, \\ 3x_1 + x_2 \geq 4, \\ x_1 + 5x_2 \geq 4, \\ 0 \leq x_1 \leq 3, \\ 0 \leq x_2 \leq 3. \end{cases}$$

2. $f = x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \geq 3, \\ x_1 - x_3 \leq 4; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, 2\}.$$

$$3. \quad f = x_1 - 2x_2 + 5x_3 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 18, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 20, \\ 5x_1 - 2x_2 + 6x_3 \geq 19; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, 2, 3\}. \end{cases}$$

$$4. \quad f = 6x_1 - x_2 + 3x_3 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + 5x_3 \leq 15, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 16, \\ 6x_1 + 5x_2 - 8x_3 \leq 12; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, 2, 3\}. \end{cases}$$

$$5. \quad f = 2x_1 + 5x_2 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 4, \\ -x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 + 2x_2 \leq 14, \\ -x_1 + 3x_2 \geq 5; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, 2\}. \end{cases}$$

$$6. \quad f = 7x_1 + x_2 - x_4 + 2x_5 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 + x_5 \leq -1, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 5x_5 \leq 3, \\ 5x_2 + 5x_3 - 6x_5 = 2; \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0. \end{cases}$$

$$7. \quad f = 6x_1 + 8x_2 + x_3 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 3, \\ x_1 + 2x_2 \leq 4; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, 2, 3\}. \end{cases}$$

$$8. \quad f = 27x_1 + 10x_2 + 15x_3 + 28x_4 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 2, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 5; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 4\}. \end{cases}$$

9. $f = 6x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 5x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 4\}. \end{cases}$$

10. $f = -5x_1 + x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ -5x_1 + x_2 + x_4 = 5, \\ x_1 - 4x_2 + x_5 = 1; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 5\}. \end{cases}$$

11. $f = x_1 + 3x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 2; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 5\}. \end{cases}$$

12. $f = 2x_1 + 5x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 9, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_5 = 12; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 5\}. \end{cases}$$

13. $f = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + 6x_2 + x_4 = 12, \\ x_1 + x_5 = 2; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 5\}. \end{cases}$$

14. $f = -2x_1 + 8x_2 \rightarrow \max ;$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 0, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_5 = 3; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 5\}. \end{cases}$$
15. $f = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \rightarrow \max ;$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 13, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 24, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 18; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, 2, 3\}. \end{cases}$$
16. $f = 4x_1 + x_2 - 4x_3 \rightarrow \max ;$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 12, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 13, \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 \leq 11; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, 2, 3\}. \end{cases}$$
17. $f = 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \min ;$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 4\}. \end{cases}$$
18. $f = 2x_1 + 5x_2 \rightarrow \min ;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 10, \\ x_1 + x_5 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_6 = 5; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 6\}. \end{cases}$$
19. $f = x_1 - 5x_2 \rightarrow \min ;$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \leq 9, \\ 2x_1 + x_2 \geq 10, \\ -x_1 + 4x_2 \geq 2; \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

20. $f = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 6, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 9, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 11; \\ x_1 \geq 0, \quad x_3 \geq 0. \end{cases}$$

21. $f = 2x_1 + 7x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \leq 14, \\ x_1 + x_2 \leq 8; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, 2\}. \end{cases}$$

22. $f = -2x_1 - 3x_2 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ x_1 + x_2 \geq 6; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, 2\}. \end{cases}$$

23. $f = -2x_1 + x_2 + 5x_3 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 12, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 18; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 4\}. \end{cases}$$

24. $f = 4x_1 + 24x_2 + 20x_3 + 6x_4 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 2, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 \geq 5; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 4\}. \end{cases}$$

25. $f = 4x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 6x_4 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + 3x_4 \leq 30, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 20; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 4\}. \end{cases}$$

10. Розв'язати з допомогою методу штучного базису задачі.

1. $f = x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 10x_4 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 14x_2 + 10x_3 - 10x_4 = 11; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 4\}. \end{cases}$$

2. $f = 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 5; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 4\}. \end{cases}$$

3. $f = -2x_1 - 3x_2 + x_3 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 11, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 13; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, 2, 3\}. \end{cases}$$

4. $f = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 6, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 \leq 4, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 8; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, 2, 3\}. \end{cases}$$

5. $f = 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} 10x_1 + 14x_2 + x_3 - 10x_4 = 24, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 4\}.$$

$$6. \quad f = 3x_1 + x_2 + 4x_3 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 18, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 \geq 10, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 3; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, 2, 3\}. \end{cases}$$

$$7. \quad f = -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} -x_1 - 6x_2 + x_3 - x_4 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 4\}. \end{cases}$$

$$8. \quad f = x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 2; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 4\}. \end{cases}$$

$$9. \quad f = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 9, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 8, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 7; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, 2, 3\}. \end{cases}$$

$$10. \quad f = 12x_1 + 27x_2 + 6x_3 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 14, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 6, \\ 6x_1 + 9x_2 + 2x_3 \geq 22; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, 2, 3\}. \end{cases}$$

$$11. \quad f = 3x_1 + x_2 - 2x_3 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, 2, 3\}.$$

$$12. \quad f = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 \leq 20, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 10, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 4\}. \end{cases}$$

$$13. \quad f = x_1 + 4x_2 + x_3 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 11; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, 2, 3\}. \end{cases}$$

$$14. \quad f = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 6; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 4\}. \end{cases}$$

$$15. \quad f = 2x_1 + 4x_2 + 20x_3 - 5x_4 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 8; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 4\}. \end{cases}$$

$$16. \quad f = -x_1 + x_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \leq 3, \\ -2x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 1; \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$17. \quad f = 8x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 - 6x_5 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 16, \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_5 = 20; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 5\}. \end{cases}$$

18. $f = -2x_1 + x_2 \rightarrow \max ;$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_5 = 2; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 5\} . \end{cases}$$
19. $f = -x_1 + 2x_2 + x_4 \rightarrow \max ;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 4\} . \end{cases}$$
20. $f = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \max ;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 8, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, 2, 3\} . \end{cases}$$
21. $f = -2x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \min ;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - 2x_3 \leq 5, \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 3; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, 2, 3\} . \end{cases}$$
22. $f = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \rightarrow \min ;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \leq 2, \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 11, \\ 3x_1 - x_2 + 6x_3 = 23; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, 2, 3\} . \end{cases}$$
23. $f = -x_1 - x_2 \rightarrow \min ;$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 - x_4 = 1, \\ -x_1 + 5x_2 + x_5 = 10; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 5\}.$$

$$24. \quad f = 8x_1 - 6x_2 - 5x_3 + 2x_4 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 16, \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 20; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 4\}. \end{cases}$$

$$25. \quad f = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 \leq 20, \\ -2x_1 + 4x_3 \geq 3, \\ 5x_1 + 3x_2 \geq 14; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, 2\}. \end{cases}$$

$$1. \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 7 & 3 \\ 7 & 5 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$2. \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 & -2 & 2 \\ -1 & 6 & -4 & 5 & 0 \end{pmatrix};$$

$$3. \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix};$$

$$4. \quad \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix};$$

$$5. \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix};$$

$$6. \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 & 6 \\ 6 & 3 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix};$$

7. $\begin{pmatrix} -1 & 8 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$; 8. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 2 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;
9. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 10. $\begin{pmatrix} 8 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$;
11. $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; 12. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$;
13. $\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$; 14. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 8 \\ 8 & -2 \\ 0 & 7 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$;
15. $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 3 \\ 4 & 4 \\ 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; 16. $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 7 \\ 6 & 6 \\ 8 & 6 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$;
17. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; 18. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;
19. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$; 20. $\begin{pmatrix} 5 & 9 & 4 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & 5 & 7 & 5 \end{pmatrix}$;
21. $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & -2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$; 22. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;
23. $\begin{pmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 5 \\ 8 & 3 & 6 \end{pmatrix}$; 24. $\begin{pmatrix} -1 & -5 & -2 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 \end{pmatrix}$;

$$25. \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \\ 5 & 0 & 6 \end{pmatrix};$$

12. Подати в симетричній формі (стандартній) формі задачі лінійного програмування.

$$1. \quad f = 7x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 9x_5 \rightarrow \max ;$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 9, \\ 3x_1 - x_2 + x_5 = 12; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 5\}. \end{cases}$$

$$2. \quad f = 2x_1 + x_2 + 8x_3 \rightarrow \max ;$$

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 + 2x_3 = 12, \\ 6x_1 + 5x_3 - x_4 = 30; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 4\}. \end{cases}$$

$$3. \quad f = 2x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 \rightarrow \max ;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ 7x_1 - 5x_2 + \frac{1}{2}x_3 + 5x_4 = 12; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 4\}. \end{cases}$$

4. $f = x_3 - x_5 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_3 - x_4 - 2x_5 = 3, \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + 4x_5 = 6, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + x_5 = 15; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 5\}. \end{cases}$$

5. $f = -3x_1 - x_2 + 4x_4 + x_6 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_4 = 13, \\ x_1 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_4 + x_6 = 26; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 6\}. \end{cases}$$

6. $f = 2x_4 + 3x_6 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 4, \\ x_2 + x_4 + x_6 = 5, \\ x_3 + x_4 + x_6 = 8, \\ x_4 + x_5 + 3x_6 = 9; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 6\}. \end{cases}$$

7. $f = -2x_1 - x_2 + x_3 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 6x_3 \leq 12, \\ 3x_1 + 5x_2 - 13x_3 = 14, \\ -3x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leq 18; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, 2, 3\}. \end{cases}$$

8. $f = 4x_1 - x_2 + 3x_3 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_3 \leq 16, \\ 6x_1 - 2x_2 - x_3 \geq 6; \\ x_1 \geq 0. \end{cases}$$

9. $f = 3x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 8, \\ -4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5; \\ x_1 \geq 0, \quad x_3 \geq 0. \end{cases}$$

10. $f = 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 6x_3 \geq 3, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 6, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 \leq 24; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, 2, 3\}. \end{cases}$$

11. $f = -x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 8; \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0. \end{cases}$$

12. $f = x_1 - 5x_2 + 16x_3 - 5x_4 - x_5 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 4, \\ x_1 + 2x_3 + x_5 = 10; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 5\}. \end{cases}$$

13. $f = -x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 9; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 4\}. \end{cases}$$

14. $f = x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 7x_5 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 3x_5 = 2, \\ \frac{1}{4}x_1 - x_3 + \frac{1}{4}x_4 + x_5 = 3, \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_4 + x_5 = 6; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 5\}. \end{cases}$$

15. $f = 42x_1 + 17x_2 + 29x_3 + 36x_4 + 4x_5 \rightarrow \min ;$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 + 2x_5 = 200, \\ x_1 + x_2 = 250, \\ x_2 + 2x_4 + x_5 = 200; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 5\}. \end{cases}$$

16. $f = 2x_1 + 3x_2 - x_3 \rightarrow \max ;$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 8, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 5; \\ x_1 \geq 0, \quad x_3 \geq 0. \end{cases}$$

17. $f = 2x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \max ;$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 \leq 5, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \geq 6; \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

18. $f = x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \max ;$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 5; \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

19. $f = 2x_1 - x_2 + 3x_3 \rightarrow \min ;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 4, \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 = 8; \\ x_1 \geq 0. \end{cases}$$

20. $f = -4x_1 + 3x_2 - 5x_3 \rightarrow \min ;$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -7, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 8; \\ x_1 \geq 0, \quad x_3 \geq 0. \end{cases}$$

22. $f = x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 \geq 2, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \leq 3; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, 2, 3, 4\}. \end{cases}$$

23. $f = 4x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 + x_3 + x_4 = 8, \\ -5x_1 + x_3 + x_5 = 5; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 5\}. \end{cases}$$

24. $f = x_1 - x_3 + 5x_5 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_5 = 7, \\ x_1 - x_4 + x_5 = 1, \\ -x_1 - x_3 + 3x_5 = 4; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 5\}. \end{cases}$$

25. $f = x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 - \frac{1}{2}x_2 + 2x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 9; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 4\}. \end{cases}$$

13. Подати в симетричній формі (стандартній) формі задачі лінійного програмування.

1. $f = 7x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 9x_5 \rightarrow \max ;$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 9, \\ 3x_1 - x_2 + x_5 = 12; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 5\}. \end{cases}$$

2. $f = 2x_1 + x_2 + 8x_3 \rightarrow \max ;$

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 + 2x_3 = 12, \\ 6x_1 + 5x_3 - x_4 = 30; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 4\}. \end{cases}$$

3. $f = 2x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 \rightarrow \max ;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ 7x_1 - 5x_2 + \frac{1}{2}x_3 + 5x_4 = 12; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 4\}. \end{cases}$$

4. $f = x_3 - x_5 \rightarrow \min ;$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_3 - x_4 - 2x_5 = 3, \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + 4x_5 = 6, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + x_5 = 15; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 5\}. \end{cases}$$

5. $f = -3x_1 - x_2 + 4x_4 + x_6 \rightarrow \min$;

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_4 = 13, \\ x_1 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_4 + x_6 = 26; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 6\}. \end{cases}$$

6. $f = 2x_4 + 3x_6 \rightarrow \max$;

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_4 = 13, \\ x_1 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_4 + x_6 = 26; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 6\}. \end{cases}$$

7. $f = -2x_1 - x_2 + x_3 \rightarrow \min$;

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 6x_3 \leq 12, \\ 3x_1 + 5x_2 - 13x_3 = 14, \\ -3x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leq 18; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, 2, 3\}. \end{cases}$$

8. $f = 4x_1 - x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$;

$$\begin{cases} 4x_1 + x_3 \leq 16, \\ 6x_1 - 2x_2 - x_3 \geq 6; \\ x_1 \geq 0. \end{cases}$$

9. $f = 3x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \min$;

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 8, \\ -4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5; \\ x_1 \geq 0, \quad x_3 \geq 0. \end{cases}$$

10. $f = 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 6x_3 \geq 3, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 6, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 \leq 24; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, 2, 3\}. \end{cases}$$

11. $f = -x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 8; \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0. \end{cases}$$

12. $f = x_1 - 5x_2 + 16x_3 - 5x_4 - x_5 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 4, \\ x_1 + 2x_3 + x_5 = 10; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 5\}. \end{cases}$$

13. $f = -x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 9; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 4\}. \end{cases}$$

14. $f = x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 7x_5 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 3x_5 = 2, \\ \frac{1}{4}x_1 - x_3 + \frac{1}{4}x_4 + x_5 = 3, \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_4 + x_5 = 6; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 5\}. \end{cases}$$

15. $f = 42x_1 + 17x_2 + 29x_3 + 36x_4 + 4x_5 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 + 2x_5 = 200, \\ x_1 + x_2 = 250, \\ x_2 + 2x_4 + x_5 = 200; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 5\}. \end{cases}$$

16. $f = 2x_1 + 3x_2 - x_3 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 8, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 5; \\ x_1 \geq 0, \quad x_3 \geq 0. \end{cases}$$

17. $f = 2x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 \leq 5, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \geq 6; \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

18. $f = x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 5; \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

19. $f = 2x_1 - x_2 + 3x_3 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 4, \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 = 8; \\ x_1 \geq 0. \end{cases}$$

20. $f = -4x_1 + 3x_2 - 5x_3 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 4, \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 = 8; \\ x_1 \geq 0, \quad x_3 \geq 0. \end{cases}$$

22. $f = x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 \geq 2, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \leq 3; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, 2, 3, 4\}. \end{cases}$$

23. $f = 4x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 + x_3 + x_4 = 8, \\ -5x_1 + x_3 + x_5 = 5; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 5\}. \end{cases}$$

24. $f = x_1 - x_3 + 5x_5 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_5 = 7, \\ x_1 - x_4 + x_5 = 1, \\ -x_1 - x_3 + 3x_5 = 4; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 5\}. \end{cases}$$

25. $f = x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 - \frac{1}{2}x_2 + 2x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 9; \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 4\}. \end{cases}$$

14. Виробничому об'єднанню, що складається з чотирьох підприємств P_1, P_2, P_3, P_4 виділено для початкового розподілу суму засобів в розмірі S_0 . Вважається, що засоби виділені підприємству в розмірі x_k (1,4) на початковий період, дають прибуток $I_k(x_k)$ (дивись свій варіант задачі). Визначити оптимальний розподіл засобів x_k підприємствам P_k .

1. $S_0 = 100(20)$

x	I_1	I_2	I_3	I_4
0	0	0	0	0
20	4	3	5	2
40	7	6	7	4
60	9	8	9	7
80	11	11	12	10
100	12	13	14	12

2. $S_0 = 150(30)$

x	I_1	I_2	I_3	I_4
0	0	0	0	0
30	7	6	5	4
60	9	8	7	6
90	12	11	10	9
120	14	13	12	12

150	15	14	13	14
-----	----	----	----	----

3. $S_0 = 125(25)$

x	I_1	I_2	I_3	I_4
0	0	0	0	0
25	3	5	4	2
50	6	7	6	5
75	8	10	9	8
100	11	12	10	10
125	13	14	12	11

4. $S_0 = 75(15)$

x	I_1	I_2	I_3	I_4
0	0	0	0	0
15	2	3	1	4
30	5	6	4	7
45	8	9	7	9
60	11	12	10	11
75	13	14	12	13

5. $S_0 = 50(10)$

x	I_1	I_2	I_3	I_4
0	0	0	0	0
10	2	1	3	4
20	4	3	5	7
30	7	6	8	9
40	10	8	10	12
50	12	11	13	14

6. $S_0 = 175(35)$

x	I_1	I_2	I_3	I_4
0	0	0	0	0

35	3	5	2	4
70	7	8	6	7
105	11	12	9	10
140	13	15	13	12
175	15	17	16	15

7. $S_0 = ()$

x	I_1	I_2	I_3	I_4
0	0	0	0	0
30	5	4	3	6
60	8	7	6	9
90	11	10	10	12
120	14	13	12	16
150	17	15	15	18

8. $S_0 = ()$

x	I_1	I_2	I_3	I_4
0	0	0	0	0
15	3	2	1	4
30	6	5	4	9
45	10	8	7	12
60	13	11	10	16
75	15	14	13	18

9. $S_0 = 50(10)$

x	I_1	I_2	I_3	I_4
0	0	0	0	0
10	2	4	3	5
20	6	7	8	7
30	9	10	10	9
40	13	14	12	13
50	17	16	15	14

10. $S_0=100(20)$

x	I_1	I_2	I_3	I_4
0	0	0	0	0
20	5	4	2	3
40	8	7	6	8
60	12	11	10	11
80	15	14	14	13
100	17	16	15	15

11. $S_0=125(25)$

x	I_1	I_2	I_3	I_4
0	0	0	0	0
25	4	3	5	6
50	8	7	9	10
75	12	11	13	14
100	16	15	17	16
125	19	18	20	18

12. $S_0=25(5)$

x	I_1	I_2	I_3	I_4
0	0	0	0	0
5	1	3	2	1
10	4	6	7	5
15	7	8	9	7
20	10	11	12	11
25	14	13	15	12

13. $S_0=150(30)$

x	I_1	I_2	I_3	I_4
0	0	0	0	0
30	2	1	4	3

60	4	3	5	6
90	7	6	7	8
120	10	9	8	11
150	14	13	12	14

14. $S_0 = 75(15)$

x	I_1	I_2	I_3	I_4
0	0	0	0	0
15	3	4	1	2
30	5	6	4	5
45	7	9	8	7
60	10	12	11	11
75	12	14	13	12

15. $S_0 = 50(10)$

x	I_1	I_2	I_3	I_4
0	0	0	0	0
10	1	2	4	3
20	3	4	7	5
30	5	6	9	7
40	8	9	10	9
50	11	12	13	12

16. $S_0 = 175(35)$

x	I_1	I_2	I_3	I_4
0	0	0	0	0
35	5	3	4	5
70	9	8	7	10
105	13	14	11	15
140	17	16	15	18
175	20	19	18	21

17. $S_0 = 100(20)$

x	I_1	I_2	I_3	I_4
0	0	0	0	0
20	4	3	5	4
40	7	6	8	8
60	10	90	10	11
80	13	12	14	13
100	17	16	18	17

18. $S_0 = 125(25)$

x	I_1	I_2	I_3	I_4
0	0	0	0	0
25	5	6	4	3
50	8	9	7	6
75	11	12	10	9
100	13	14	12	12
125	15	16	14	15

19. $S_0 = 25(5)$

x	I_1	I_2	I_3	I_4
0	0	0	0	0
5	1	3	2	1
10	4	5	4	3
15	6	7	8	7
20	9	8	10	9
25	11	10	12	13

20. $S_0 = 75(15)$

x	I_1	I_2	I_3	I_4
0	0	0	0	0
15	3	2	1	4
30	6	5	4	6
45	8	7	7	9

60	11	10	9	12
75	14	13	12	15

21. $S_0 = 50(10)$

x	I_1	I_2	I_3	I_4
0	0	0	0	0
10	5	3	4	2
20	7	6	7	6
30	9	10	11	9
40	12	13	14	13
50	15	14	16	17

22. $S_0 = 100(20)$

x	I_1	I_2	I_3	I_4
0	0	0	0	0
20	6	4	5	3
40	8	7	8	7
60	11	10	12	11
80	14	13	15	14
100	18	17	17	16

23. $S_0 = 125(25)$

x	I_1	I_2	I_3	I_4
0	0	0	0	0
25	4	5	3	6
50	8	9	7	10
75	11	12	11	13
100	14	15	14	16
125	18	17	15	18

24. $S_0 = 150(30)$

x	I_1	I_2	I_3	I_4
0	0	0	0	0

30	3	2	4	3
60	7	6	8	9
90	10	9	11	10
120	14	13	15	15
150	17	18	17	18

25. $S_0 = 100(20)$

x	I_1	I_2	I_3	I_4
0	0	0	0	0
20	8	6	7	5
40	10	9	11	8
60	12	13	14	11
80	15	14	16	14
100	18	17	19	17

15. Записати двоїсту задачу до поставленої задачі лінійного програмування. Розв'язати одну із задач симплекс-методом і визначити оптимальний план іншої задачі.

1. $z = -30x_1 + 10x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 \geq -2 \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 3 \end{cases};$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

2. $z = 4x_1 + 3x_2 + x_3 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 5 \end{cases};$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

3. $z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 50 \\ 3x_1 + x_3 \geq 15 \\ x_1 + 4x_2 \leq 40 \end{cases};$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

4. $z = -3x_1 - 4x_2 - 5x_3 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \geq -4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 6 \end{cases};$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

5. $z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ x_1 + x_2 = 6 \\ 2x_1 + x_2 \geq 10 \end{cases};$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

6. $z = 5x_1 + 2x_2 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 8 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 20; \\ 3x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$7. \quad z = 5x_1 + 12x_2 - 4x_3 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8; \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

$$8. \quad z = -x_1 + x_2 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \leq 4 \\ x_1 + 2x_2 \geq 2; \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$9. \quad z = 5x_1 + 6x_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 + x_2 \geq 3; \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$10. \quad z = 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_3 \geq 1 \\ -x_1 + 5x_2 \leq 1; \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 9 \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

$$11. \quad z = 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 1; \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

$$12. \quad z = x_1 + 2x_2 - 3x_3 \rightarrow \min ;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 4 \end{cases} ;$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

$$13. \quad z = x_1 + x_2 \rightarrow \max ;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ 3x_1 + x_2 = 6 \end{cases} ;$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,2}.$$

$$14. \quad z = 10x_1 + 40x_2 \rightarrow \min ;$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \geq 18 \\ x_1 + 2x_2 \geq 20 \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 25 \end{cases} ;$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

$$15. \quad z = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max ;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 12 \\ -3x_1 + 2x_2 \leq -4 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \end{cases} ;$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

$$16. \quad z = x_1 + 2x_2 + 5x_3 \rightarrow \min ;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 12 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 20 \end{cases} ;$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

$$17. \quad z = x_1 + 5x_2 + 3x_3 \rightarrow \max ;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 = 4 \end{cases} ;$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

$$18. \quad z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \rightarrow \min ;$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = -3 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = -2 \end{cases},$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

19. $z = 9x_1 + 8x_2 + 10x_3 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 6 \end{cases},$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

20. $z = -x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq -2 \end{cases},$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

21. $z = 8x_1 + 8x_2 + x_3 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 3 \end{cases},$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

22. $z = -x_1 + 4x_2 + x_3 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases},$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

23. $z = 14x_1 + 15x_2 - 24x_3 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 - 4x_3 \geq 1 \\ -2x_1 - 3x_2 + 6x_3 \leq -3 \end{cases},$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

24. $z = x_1 + 8x_2 + 10x_3 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases},$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

25. $z = x_1 - x_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 8 \\ x_1 - 2x_2 \leq 6 \\ -x_1 + 2x_2 \leq -2 \\ -x_1 - 2x_2 \leq -2 \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,2} \end{cases}.$$

15. Графічним методом визначити оптимальні плани задач лінійного програмування.

1. $f = x_1 + 2x_2 \rightarrow \min(\max);$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_2 \geq 1 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}.$$

2. $f = x_1 + 3x_2 \rightarrow \min(\max);$

$$\left\{ \begin{array}{l} 10x_1 + 3x_2 \geq 30 \\ -x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_2 \geq 2 \\ x_1 \geq 0 \end{array} \right. .$$

3. $f = x_1 - 2x_2 \rightarrow \min;$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 - 2x_2 \geq 0 \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right. .$$

4. $f = x_1 + 2x_2 \rightarrow \min(\max);$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ -x_1 + 3x_2 \leq 10 \\ x_1 + 4x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right. .$$

5. $f = 2x_1 - 4x_2 \rightarrow \min(\max);$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 \leq 11 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ -2x_1 + 4x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right. .$$

6. $f = x_1 - 3x_2 \rightarrow \min(\max);$

$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 \geq 30 \\ x_1 - x_2 \geq 4 \\ -x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}.$$

7. $f = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \min(\max);$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 20 \\ -x_1 + 4x_2 \leq 20 \\ x_1 \geq 5 \\ x_2 \geq 5 \end{cases}.$$

8. $f = x_1 + x_2 \rightarrow \min(\max);$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}.$$

9. $f = x_1 + 2x_2 \rightarrow \min(\max);$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 10 \\ -x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 = 5 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}.$$

10. $f = 4x_1 + 3x_2 \rightarrow \min(\max);$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ -x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}.$$

11. $f = 3x_1 - 2x_2 \rightarrow \min(\max);$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 3x_1 + 4x_2 \geq -12 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}.$$

12. $f = 3x_1 + x_2 \rightarrow \min(\max);$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1 \geq 2 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}.$$

13. $f = -x_1 - 2x_2 \rightarrow \min(\max);$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ -x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}.$$

14. $f = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min(\max);$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9 \\ x_1 + 5x_2 \geq 10 \\ 4x_1 - 2x_2 \geq -8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}.$$

15. $f = -3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} 7x_1 - x_2 \geq 0 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 6 \\ x_1 - 4x_2 \leq 0 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}.$$

16. $f = 2x_1 - x_2 \rightarrow \min(\max);$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ -2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 - 3x_2 \leq 0 \\ x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}.$$

17. $f = -x_1 + x_2 \rightarrow \min(\max);$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ -4x_1 + x_2 \geq -8 \\ x_1 - 2x_2 \leq 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}.$$

18. $f = 3x_1 + 3x_2 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq -6 \\ 4x_1 + 6x_2 \leq 24 \\ x_1 + x_2 \geq -4 \\ -3 \leq x_1 \leq 2 \end{cases}.$$

19. $f = -3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 7 \\ 0 \leq x_1 \leq 6 \\ 0 \leq x_2 \leq 5 \end{cases}.$$

20. $f = -3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 7 \\ 0 \leq x_1 \leq 6 \\ 0 \leq x_2 \leq 5 \end{cases}.$$

21. $f = 2x_1 - x_2 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}.$$

22. $f = 4x_1 + 2x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ -x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ 2x_1 - x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}.$$

23. $f = -3x_1 - 2x_2 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}.$$

24. $f = -x_1 - 2x_2 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ 2x_1 - x_2 \geq -1 \\ x_1 - x_2 \leq 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}.$$

25. $f = x_1 + 3x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_2 \leq 4 \end{cases}.$$

16. Графічний метод розв'язування задач нелінійного програмування. Графічним методом знайти глобальні екстремуми нелінійної функції в області, визначеній нерівностями (в усіх варіантах вважати $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$).

1. $f = (x_1 - 8)^2 + (x_2 - 7)^2$;

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + x_2 \leq 10; \end{cases}$$

$$2. \quad f = 3(x_1 - 10)^2 + 6(x_2 - 11)^2;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 14, \\ x_1 + x_2 \leq 9,5, \\ x_1 + 3x_2 \geq 4; \end{cases}$$

$$3. \quad f = (x_1 - 9)^2 + (x_2 - 8)^2;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_1 + x_2 \leq 7, \\ 2x_1 + x_2 \leq 11; \end{cases}$$

$$4. \quad f = 3(x_1 - 9)^2 + 5(x_2 - 14)^2;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 12, \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 5, \\ x_1 + x_2 \leq 8,5; \end{cases}$$

$$5. \quad f = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 5)^2;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ 2x_1 + x_2 \leq 8; \end{cases}$$

$$6. \quad f = 2(x_1 - 7)^2 + 3(x_2 - 12)^2;$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \leq 30, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 4, \\ x_1 + x_2 \leq 7,5; \end{cases}$$

$$7. \quad f = (x_1 - 7)^2 + (x_2 - 6)^2;$$

$$\begin{cases} 0,5x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + x_2 \leq 10; \end{cases}$$

$$8. \quad f = (x_1 - 7)^2 + 6(x_2 - 9)^2;$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 15, \\ x_1 + 2x_2 \geq 1, \\ x_1 + x_2 \leq 6,5; \end{cases}$$

$$9. \quad f = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 9)^2;$$

$$\begin{cases} x_1 + 0,5x_2 \geq 1, \\ x_1 + x_2 \leq 8, \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 27; \end{cases}$$

$$10. \quad f = 3(x_1 - 8)^2 + 7(x_2 - 10)^2;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 8, \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 3, \\ x_1 + x_2 \leq 5,5; \end{cases}$$

$$11. \quad f = (x_1 - 10)^2 + (x_2 - 12)^2;$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 3, \\ x_1 + x_2 \leq 11, \\ 7x_1 + 3x_2 \leq 49; \end{cases}$$

$$12. \quad f = 4(x_1 - 7)^2 + 7(x_2 - 10)^2;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 12, \\ x_1 + x_2 \leq 7,5, \\ 0,5x_1 + 2x_2 \geq 1; \end{cases}$$

$$13. \quad f = (x_1 - 9)^2 + (x_2 - 10)^2;$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 12, \\ 2x_1 + x_2 \leq 16; \end{cases}$$

$$14. \quad f = 2(x_1 - 11)^2 + 5(x_2 - 13)^2;$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 \leq 49, \\ x_1 + 2x_2 \geq 3, \\ x_1 + x_2 \leq 11; \end{cases}$$

$$15. \quad f = 4(x_1 - 8)^2 + 6(x_2 - 12)^2;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 16, \\ 2x_1 + x_2 \geq 4, \\ x_1 + x_2 \leq 10; \end{cases}$$

$$16. \quad f = (x_1 - 7)^2 + (x_2 - 9)^2;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \geq 3, \\ x_1 + x_2 \leq 5,5, \\ 2x_1 + x_2 \leq 8; \end{cases}$$

$$17. \quad f = 4(x_1 - 6)^2 + 5(x_2 - 10)^2;$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leq 27, \\ x_1 + 0,5x_2 \geq 1, \\ x_1 + x_2 \leq 8; \end{cases}$$

$$18. \quad f = (x_1 - 8)^2 + (x_2 - 14)^2;$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 5, \\ x_1 + x_2 \leq 8,5, \\ 2x_1 + x_2 \leq 12; \end{cases}$$

$$19. \quad f = 3(x_1 - 10)^2 + 6(x_2 - 11)^2;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 12, \\ x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ 2x_1 + x_2 \leq 16; \end{cases}$$

$$20. \quad f = (x_1 - 8)^2 + (x_2 - 10)^2;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 9, \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 35; \end{cases}$$

$$21. \quad f = 3(x_1 - 7)^2 + 3(x_2 - 6)^2;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5, \\ 2x_1 + x_2 \geq 2, \\ 2x_1 + x_2 \leq 8; \end{cases}$$

$$22. \quad f = 5(x_1 - 9)^2 + 7(x_2 - 11)^2;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 9, \\ x_1 + x_2 \geq 2, \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 36; \end{cases}$$

$$23. \quad f = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 8)^2;$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 1, \\ x_1 + x_2 \leq 6,5, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 15; \end{cases}$$

$$24. \quad f = (x_1 - 9)^2 + (x_2 - 12)^2;$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 4, \\ x_1 + x_2 \leq 9,5, \\ 2x_1 + x_2 \leq 14; \end{cases}$$

$$25. \quad f = 3(x_1 - 8)^2 + 5(x_2 - 9)^2;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 11, \\ x_1 + x_2 \leq 7, \\ x_1 + x_2 \geq 1; \end{cases}$$