

**Івано-Франківський національний
технічний університет нафти і газу**

Я.І. Савчук

ТЕОРІЯ НЕЧІТКИХ МНОЖИН

Методичний посібник

2004

МВ 02070855–1390–2004

Савчук Я.І. Теорія нечітких множин: Методичний посібник.— Івано-Франківськ: Факел, 2004 – 201 с.

Пропонований методичний посібник розрахований на студентів спеціальності “Автоматизоване управління технологічними процесами”. Його метою є ознайомлення студентів з методиками вивчення немеханістичних систем, які стійко опираються математичному аналізу та моделюванню з застосуванням ЕОМ. Посібник також буде корисним для студентів інших спеціальностей.

Рецензент: д-р техн.наук, професор кафедри
вищої математики ІФНТУНГ В.М.Мойсишин

Дане видання – власність ІФНТУНГ.
Забороняється тиражування та розповсюдження.

ЗМІСТ

1 Вступ.....	5
2 Поняття змінної.....	19
2.1 Означення, приклади.....	19
2.2 Маргінальні та умовні обмеження.....	21
3.3 Взаємодіючі та невзаємодіючі змінні.....	28
3 Нечіткі множини та принцип узагальнення.....	33
3.1 Нечіткі множини та принцип узагальнення.....	33
3.2 Множини рівня нечіткої підмножини універсальної множини.....	38
3.3 Операції над нечіткими множинами.....	40
3.4 Нечіткі відношення.....	45
3.5 Проекції та циліндричні нечіткі множини.....	47
3.6 Принцип узагальнення.....	54
3.7 Нечіткі множини з нечіткими функціями належності.....	61
4 Поняття нечіткої змінної.....	70
4.1 Означення, приклади.....	70
2.2 Маргінальні та умовні обмеження.....	75
3.3 Сепарабельність та невзаємодіючі змінні.....	79
5 Поняття лінгвістичної змінної.....	86
5.1 Означення, приклади.....	86
5.2 Структуровані лінгвістичні змінні.....	93
5.3 Булеві лінгвістичні змінні.....	97
5.4 Графічне зображення лінгвістичної змінної.....	108
6 Лінгвістичні змінні істинності та нечітка логіка.....	110
6.1 Основні поняття.....	110
6.2 Логічні зв'язки в нечіткій логіці.....	114
6.3 Таблиці істинності та лінгвістична апроксимація.....	123
6.4 Значення істинності <i>невідомо</i> та	

<i>не визначено</i>	124
---------------------------	-----

6.5 Складені змінні істинності та розподіл значень істинності.....	131
7 Лінгвістичні ймовірності та усереднення по нечітких множинах.....	141
7.1 Лінгвістичні ймовірності.....	142
7.2 Обчислення з лінгвістичними ймовірностями.....	14
7.3 Усереднення по нечітких множинах.....	7
8 Композиційне правило висновку та наближені міркування.....	152
8.1 Композиційне правило висновку.....	158
8.2 Правило <i>modus ponens</i> як частковий випадок композиційного правила висновку.....	164
8.3 Нечіткі теореми.....	173
8.4 Графічне зображення блок-схемами.....	17
9 Деякі застосування теорії нечітких множин.....	6
9.1 Прийняття рішень та ігри в нечітко визначеній обстановці.....	18
9.2 Нечіткі відношення класифікація та впорядкування.....	6
9.3 Нечіткі автомати.....	18
9.4 Підсумкові зауваження.....	6
Перелік посилань.....	192
	19
	6
	199
	200

1 ВСТУП

Один з фундаментальних принципів сучасної науки полягає в тому, що явище не можна вважати добре зрозумілим до тих пір, поки воно не описується кількісними характеристиками. В 1883 році Лорд Кельвін писав [1]: “В фізичній науці при вивченні будь-якого об’єкту перший і найбільш істотний крок полягає в тому, щоб знайти принципи чисельної оцінки і практичні методи вимірювання деякої якості, притаманної цьому об’єкту. Я часто кажу, що коли ви можете виміряти те, про що говорите, і виразити це в числах, ви уже знаєте дещо про це, але коли ви не можете виміряти це, коли ви не можете виразити це в числах, ваше знання недостатнє і незадовільне: воно може бути початком знання, але ви тільки злегка, подумки, наблизились до наукового поняття питання, про що б не йшла мова”.

З цієї точки зору багато з того, що складає суть наукового знання, можна розглядати як сукупність принципів і методів, необхідних для конструювання математичних моделей різних систем, які дозволяють отримувати кількісну інформацію про їх поведінку. При існуючій повазі до всього точного, строгого та кількісного і зневазі до всього неточного, нестрогого та якісного не дивно, що поява обчислювальних машин викликала поширення кількісних методів на багато областей людського знання. Без сумніву, обчислювальні машини виявились високоефективними при роботі з механістичними системами, тобто системами, поведінка яких визначається законами механіки, фізики, хімії тощо. На жаль, це саме не можна сказати про *гуманістичні* системи, тобто такі, на поведінку яких сильний вплив мають судження, сприйняття чи емоції людини.

Приклади гуманістичних систем: економічні системи, політичні системи, правові системи, загальноосвітні системи і т.д. Сама людина (індивідуум) та її розумові процеси також може розглядатись як гуманістична система.

Гуманістичні системи досить стійко опираються математичному аналізу та моделюванню з застосуванням ЕОМ. Дійсно, багатьма визначається, що використання

обчислювальних машин не пролило багато світла на основні проблеми, які виникають в філософії, психології, літературі, праві, політиці, соціології та в інших гуманітарних областях знань. Обчислювальні машини не істотно нас наблизили до розуміння процесу мислення, за винятком, можливо, деяких прикладів з області штучного інтелекту та суміжних областей.

Можна стверджувати (див. роботи [2], [3]), що неефективність обчислювальних машин у вивченні гуманістичних систем є підтвердженням того, що може бути названим принципом несумісності — принципом, який стверджує, що висока точність несумісна з великою складністю системи. Таким чином, мабуть саме з цієї причини, звичайні методи аналізу систем та моделювання на ЕОМ, які базуються на точній обробці чисельних даних, по суті не здатні охопити величезну складність процесів людського мислення та прийняття рішень. Звідси напрошується висновок про те, що для отримання істотних висновків про поведінку гуманістичних систем доведеться, мабуть, відмовитись від високих стандартів точності та строгості, які ми, як правило, очікуємо при математичному аналізі чітко визначених систем, і терплячіше відноситись до інших підходів, які є наближеними за своєю природою. Цілком можливо, що тільки при використанні таких підходів моделювання на ЕОМ стане дійсно ефективним методом аналізу систем, які настільки складні чи некоректно визначені, що не піддаються звичайному кількісному аналізу.

Жертвуючи точністю перед надзвичайною складністю, природно вивчити можливість використання так званих *лінгвістичних змінних*, тобто змінних, значеннями яких є не числа, а слова чи речення в звичайній чи формальній мові.

Використання слів та речень, а не чисел, мотивується тим, що лінгвістичний опис, як правило, менш конкретний, ніж опис числами. Наприклад, фраза “*Микола молодий*” менш конкретна, ніж фраза “*Миколі 25 років*”. В цьому розумінні слово *молодий* можна розглядати як *лінгвістичне значення* змінної *Вік*, маючи на увазі при цьому, що лінгвістичне значення відіграє таку ж роль, як і числове значення 25, але є менш точним і, відповідно, менш інформативним. Те ж саме можна сказати про лінгвістичні значення *дуже молодий*, *не*

молодий, надзвичайно молодий, не дуже молодий і так далі, якщо їх співставити з числовими значеннями 20, 40, 21, 23.

Якщо значення числової змінної зображають графічно точками на площині, то значення лінгвістичної змінної можна зобразити графічно як площадки з нечітко окресленими границями. Саме завдяки такій інтерпретації — використанню площадок, а не точок — лінгвістичні змінні можуть служити засобом наближеного описання явищ, які настільки складні чи некоректно визначені, що не піддаються точному опису.

Також варто відзначити, що завдяки використанню так званого *принципу узагальнення* більша частина існуючого математичного апарату, який використовується для аналізу систем, може бути пристосована до лінгвістичних змінних. Отже, є можливість розвивати наближене обчислення лінгвістичних змінних, яке, напевне, знайде широке практичне застосування.

Сукупність значень лінгвістичної змінної складає терм-множину цієї змінної. Ця множина може мати, взагалі кажучи, безліч елементів. Наприклад, терм-множину лінгвістичної змінної **Вік** можна записати так

$$T(\text{Вік}) = \text{молодий} + \text{не молодий} + \text{дуже молодий} + \text{не дуже молодий} + \text{дуже дуже молодий} + \dots + \text{старий} + \text{не старий} + \text{дуже старий} + \text{не дуже старий} + \text{не дуже молодий} + \text{і не дуже старий} + \dots + \text{середнього віку} + \text{не середнього віку} + \dots + \text{не старий і не середнього віку} + \dots + \text{надзвичайно старий}.$$

Знак “+” означає тут об’єднання, а не арифметичне додавання. Аналогічно, терм-множину лінгвістичної змінної **Зовнішність** можна записати наступним чином

$$T(\text{Зовнішність}) = \text{прекрасна} + \text{гарненька} + \text{миловидна} + \text{красива} + \text{приваблива} + \text{не прекрасна} + \text{дуже гарненька} + \text{дуже дуже гарненька} + \text{дуже красива} + \text{більш-менш гарненька} + \text{досить гарненька} + \text{досить красива} + \text{безумовно красива}$$

+ не дуже приваблива, але і не дуже
неприваблива + ...

У випадку лінгвістичної змінної **Вік** числова змінна **вік**, яка приймає значення 0, 1, 2, 3, ..., 99, 100, є так званою **базовою змінною**, лінгвістичної змінної **Вік**. При цьому таке, наприклад, лінгвістичне значення, як **молодий**, можна інтерпретувати як назву деякого **нечіткого обмеження** на значення базової змінної. Саме це обмеження ми і вважаємо змістом лінгвістичного значення **молодий**.

Нечітке обмеження на значення базової змінної характеризується **функцією сумісності**, яка кожному значенню базової змінної ставить у відповідність число з відрізка $[0, 1]$, яке символізує сумісність цього значення з нечітким обмеженням. Наприклад, значення функції сумісності таких числових значень змінної **вік**, як 22, 28 та 35 з нечітким обмеженням **молодий**, можуть бути 1, 0, 7 та 0.2 відповідно. В цьому випадку зміст лінгвістичної величини **молодий** можна представити лінією (рис.1.1), яка є графіком функції сумісності лінгвістичного значення **молодий** відносно базової змінної **вік**.

Звична інтерпретація висловлювання “**Микола молодий**” полягає в тому, що Микола належить класу молодих людей. Але, приймаючи до уваги, що клас молодих людей — нечітка множина, тобто не існує різкого переходу від молодості до “не молодості”, твердження про те, що Микола належить класу молодих людей, не відповідає точному математичному означенню поняття “належить”. Концепція лінгвістичної змінної дозволяє обійти цю проблему наступним чином.

Ім'я “**Микола**” розглядається як назва складової лінгвістичної змінної, компонентами якої є лінгвістичні змінні **Вік, Ріст, Вага, Зовнішність** і т.д. Тоді висловлювання “**Микола молодий**” інтерпретується як **рівняння призначення** (рис.1.2)

$$\mathbf{Вік} = \mathbf{молодий},$$

яке призначає значення **молодий** лінгвістичній змінній **Вік**. В

свою чергу, значення *молодий* інтерпретується як назва деякого нечіткого обмеження на базову змінну *вік*, причому зміст цього обмеження визначається його функцією сумісності.

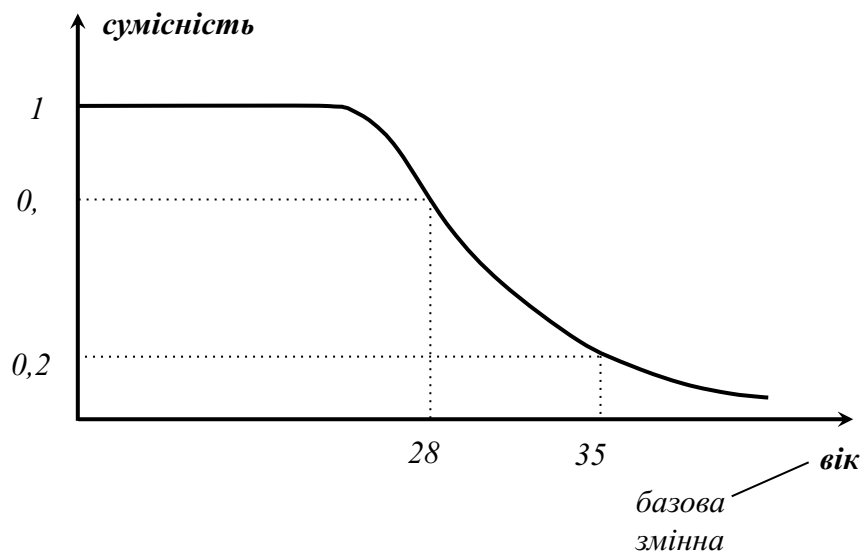


Рисунок 1.1 Функція сумісності для значення *молодий*

Микола

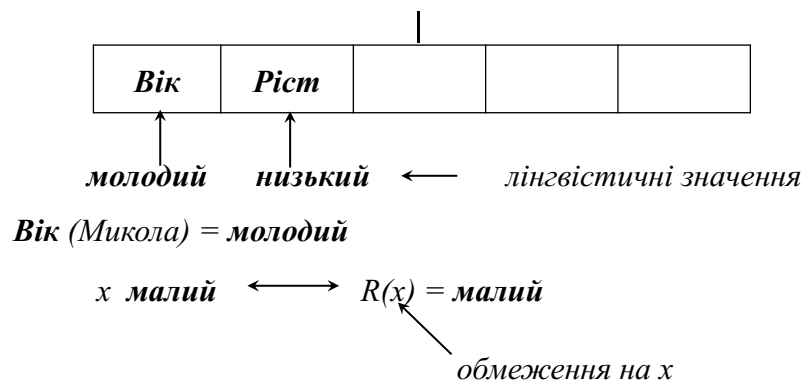


Рисунок 1.2 Призначення лінгвістичних значень характерним ознакам Миколи та x

Для того, щоб краще зрозуміти, що таке лінгвістична змінна, можна розглянути рисунок 1.3, на якому зображена ієрархічна структура зв'язку між лінгвістичною змінною **Вік**, нечіткими обмеженнями, які представляють зміст її значень, і значеннями базової змінної **вік**.

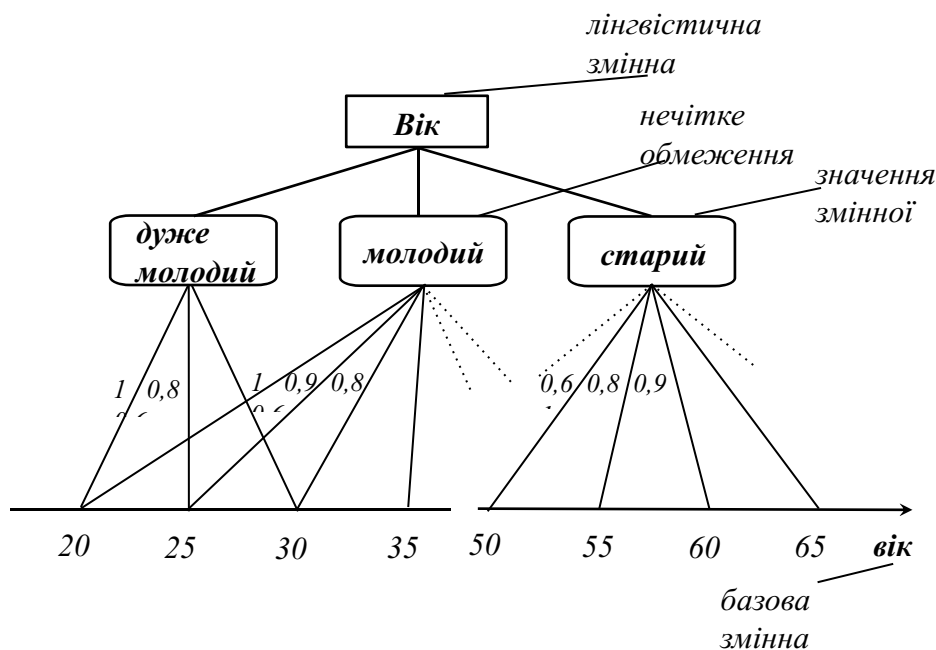


Рисунок 1.3 Ієрархічна структура лінгвістичної змінної

Існує кілька основних аспектів поняття лінгвістичної змінної, які потребують уточнення.

По-перше, важливо усвідомити, що поняття сумісності відрізняється від поняття ймовірності. Так, висловлювання про те, що сумісність, наприклад, числового значення 28 з лінгвістичним значенням **молодий** дорівнює 0,7, не має ніякого відношення до того, що значення змінної **вік** дорівнює 28. Правильна інтерпретація значення сумісності, яке дорівнює 0,7, полягає в тому, що воно є тільки суб'єктивною

мірою того, наскільки вік 28 років відповідає поняттю суб'єкта про слово “*молодий*”. Як ми побачимо надалі, математичні операції, що застосовуються до значень сумісності, відмінні від операцій, що застосовуються до значень ймовірностей, хоча між ними і є деяка аналогія.

По-друге, ми будемо зазвичай припускати, що лінгвістична змінна має *структуру* в тому розумінні, що вона зв'язана з двома правилами: по-перше — *синтаксичне правило* — визначає спосіб породження лінгвістичних значень, які належать терм-множині цієї змінної. При цьому ми будемо зазвичай припускати, що елементи терм-множини породжуються безконтекстною граматикою.

Друге — *семантичне правило* — визначає спосіб обчислення змісту будь-якої лінгвістичної змінної. Відзначимо в зв'язку, що типове значення лінгвістичної змінної, наприклад, *не дуже молодий і не дуже старий*, включає в себе те, що можна було б назвати первинними термами, наприклад, *молодий*, *старий*, зміст яких суб'єктивний і залежить від контексту. Припускається, що зміст таких термів визначений заздалегідь.

Крім первинних термів лінгвістичне значення може включати в себе зв'язки, так як *і*, *або*, ... *ні* і т.д.; заперечення *не*, такі невизначеності, як *дуже більш-менш*, *зовсім*, *безумовно*, *надзвичайно*, *частково* і т.д. Як ми побачимо надалі, зв'язки, невизначеності та заперечення можна трактувати як оператори, які видозмінюють зміст первинних термів особливим, незалежним від контексту чином. Так, якщо функція сумісності лінгвістичного значення *молодий* зображується кривою на рис.1.1, то зміст лінгвістичного значення *дуже молодий* можна отримати піднесенням до квадрату значень функції сумісності лінгвістичного значення *не молодий*. Зміст лінгвістичного значення *не молодий* можна отримати, віднімаючи від 1 значення цієї функції сумісності (рис.1.4). Наведені два правила є частковими випадками більш загального семантичного правила, описаного в §5.

По-третє, коли ми говоримо про лінгвістичну змінну, таку, як *Вік*, відповідна базова змінна *вік* є за своєю природою числовою змінною. В цьому випадку ми можемо визначити зміст лінгвістичного значення, такого, як *молодий*, функцією

сумісності, яка ставить у відповідність кожному значенню базової змінної із відрізка $[0, 1]$ число із проміжку $[0, 1]$, яке представляє сумісність даного віку з поняттям *молодий*.

З іншого боку, для лінгвістичної змінної *Зовнішність* ми не маємо чітко визначеної базової змінної, тобто не знаємо, як виразити степінь краси в формі функції тих чи інших фізичних величин. Ми могли б в цьому випадку приписати кожній жінці із розглядуваної групи степінь належності класу прекрасних жінок, наприклад, Анні — степінь 0.9, Галині — 0.7, Світлані — 0.8 і Вірі — 0.9. Але ці значення функції сумісності базувалися б тільки на наших враженнях, які ми не в стані точно формалізувати.

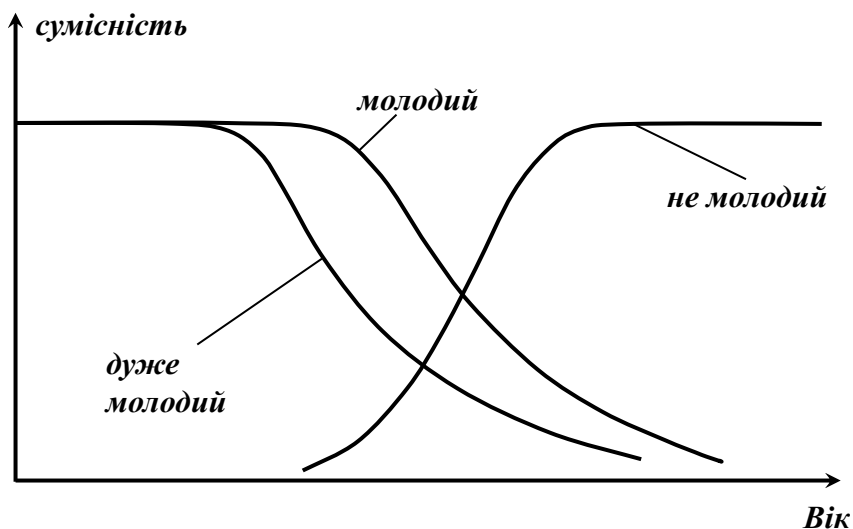


Рисунок 1.4 Функції сумісності значень *молодий*, *не молодий*, *дуже молодий*

Іншими словами, ми визначаємо функцію сумісності не на множині математично точно визначених об'єктів, а на множині позначених деякими символами вражень. Такі

означення мають зміст для людини, але не, в крайньому випадку безпосередньо, для обчислювальної машини.

Як ми побачимо в наступних параграфах, в першому випадку, коли базова змінна — числова за природою, лінгвістичними змінними можна оперувати деяким достатньо точно визначеним способом, а саме шляхом використання принципу узагальнення для нечітких множин. В другому випадку спосіб узагальнення з лінгвістичними змінними носить більш якісний характер. Разом з тим, в обох випадках, в більшій чи меншій мірі, присутні обчислення. Отже, потрібно розуміти, що лінгвістичний підхід не є за своєю природою тільки якісним. Можна сказати, обчислення здійснюються “за кулісами”, а потім вже використовується *лінгвістичне наближення* для перетворення чисел в слова (рисунок 1.5 а, б).

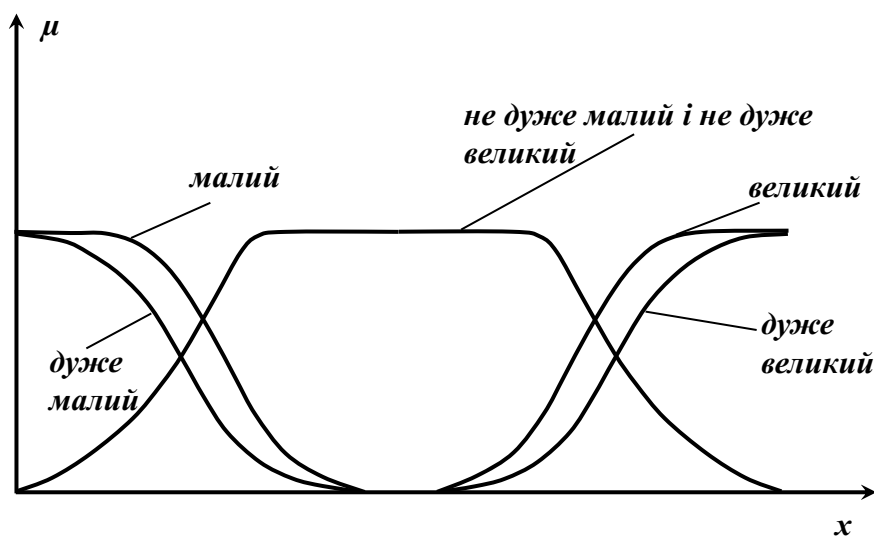


Рисунок 1.5 а. Функція сумісності значень *малый*, *дуже малий*, *великий*, *дуже великий* і *не дуже малий і не дуже великий*

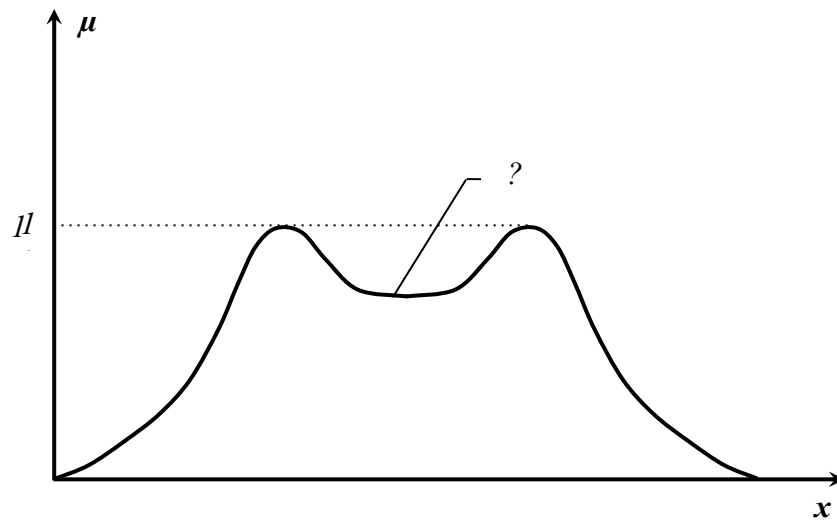


Рисунок 1.5 б. Задача лінгвістичного наближення — це задача знаходження наближеного лінгвістичного опису даної функції сумісності

Особливо важливою областю застосування поняття лінгвістичної змінної є *область наближених міркувань*, тобто міркувань, які не є ні дуже точними, ні дуже неточними. В якості ілюстрації наведемо наступний ланцюг наближених міркувань:

x мале,
 x та y приблизно рівні.
 Значить,
 y більш-менш мале.

Поняття лінгвістичної змінної з'являється в наближених міркуваннях внаслідок тлумачення поняття

Істинність як лінгвістичної змінної, значення якої утворюють таку терм-множину

T (*Істинність*) = *істинний* + *не істинний* + *дуже істинний* + *повністю істинний* + *більш-менш істинний* + *абсолютно істинний* + *істотно істинний* + *неправдивий* + *дуже неправдивий* + *ні істинний, ні неправдивий* + ...

Припускається, що відповідна базова змінна є числом із проміжку , а зміст первинного терму, такого, як *істинний*, ототожнюється з нечітким обмеженням на значення базової змінної. Зазвичай, таке обмеження характеризується функцією сумісності, яка кожному числовому значенню істинності ставить у відповідність число із проміжку . Наприклад, сумісність числового значення істинності 0.7 з лінгвістичним значенням істинності *дуже істинний* може дорівнювати 0.6. Таким чином, у випадку значень істинності функція сумісності є відображенням одиничного інтервалу в себе (дивись рис.6.1).

Тлумачення істинності як лінгвістичної змінної приводить до нечіткої логіки, яка цілком може виявитись кращим наближенням до логіки, що керує прийняттям рішень людиною, ніж класична двозначна логіка. В нечіткій логіці цілком може мати зміст те, що в класичній логіці є недопустимо невизначеним, наприклад:

значенням істинності висловлювання “*Бориспіль близький до Києва*” є *дуже істинно*,

значенням істинності висловлювання “*Біла Церква близько до Києва*” є *досить істинно*.

Значить, значенням істинності висловлювання

“Бориспіль більш-менш близько до Білої Церкви” є більш-менш істинно.

Друга важлива область застосування поняття лінгвістичної змінної — теорія ймовірностей. Якщо ймовірність розглядати як лінгвістичну змінну, то її терм-множина могла б, наприклад, мати наступний вигляд

$$\begin{aligned} T(\text{Ймовірність}) = & \text{правдоподібно} + \text{дуже} \\ & \text{правдоподібно} + \text{неправдоподібно} \\ & + \text{надзвичайно правдоподібно} + \\ & \text{вельми правдоподібно} + \dots + \\ & \text{ймовірно} + \text{неймовірно} + \text{більш-} \\ & \text{менш ймовірно} + \dots \end{aligned}$$

Допустивши використання лінгвістичних значень ймовірності, ми отримуємо можливість відповісти на питання: “Яка ймовірність того, що рівно через тиждень буде теплий день?” наступним чином: *“вельми висока”*, замість, наприклад, “0.8”. Лінгвістична відповідь, взагалі кажучи, більш реалістична, приймаючи до уваги, по-перше, що теплий день — нечітка подія, і, по-друге, що ми ще недостатньо розуміємо динаміку погоди і не можемо робити певних висновків про значення ймовірностей подібних подій.

Детальніше поняття лінгвістичної змінної і її застосування обговорюються в наступних параграфах. Щоб представити поняття лінгвістичної змінної в належній перспективі, ми почнемо виклад з формалізації поняття звичайної (не нечіткої) змінної. Нам буде корисно уподібнити таку змінну до саквояжу з жорсткими стінками (рисунок 2.1) з прикріпленням до нього ярликом. Покласти деякий предмет в саквояж означає приписати відповідній змінній певне значення, а обмежена множина предметів, які можна покласти в саквояж, відповідає підмножині повної множини, яка

містить ті елементи, які можна було б використати в якості значень даної змінної.

Аналогічно *нечітку змінну*, означення якої дано в §4, можна уподібнити саквоюжу не з твердими, а з м'якими стінками (рисунок 4.1). В цьому випадку множина предметів, які можна покласти в цей саквож, є нечіткою за своєю природою і визначається функцією сумісності, яка ставить у відповідність кожному предмету число із проміжку $[0, 1]$, що символізує ступінь легкості, з якою цей предмет можна покласти в саквож. Нехай, наприклад, X є саквож; сумісність пальта з X може дорівнювати 1, тоді як сумісність програвача з X може дорівнювати 0.7.

Як буде показано в §4, істотним при розгляді нечітких змінних є поняття *невзаємодії*, аналогічне поняттю незалежності для випадкових змінних. Необхідність в цьому понятті виникає, коли ми маємо справу з двома чи меншою кількістю нечітких змінних, кожен з яких можна уподібнити відділенню в м'якому саквожі. Нечіткі змінні є взаємодіючими, якщо присвоєння значення одній з них впливає на нечіткі обмеження, які накладаються на інші змінні. Цей випадок можна уподібнити взаємодії між предметами, покладеними в різні відділення саквожу (рисунок 4.3).

Лінгвістична змінна визначається в §5 як змінна, значеннями якої є нечіткі змінні. Користуючись тією ж аналогією, уподібнимо лінгвістичну змінну твердому саквожу, в який можна покласти м'які саквожі з ярликами. На кожному з цих ярликів наведено опис нечіткого обмеження на множину предметів, які можна покласти у відповідний м'який саквож (рисунок 5.2).

Застосування поняття лінгвістичної змінної для опису "*істинності*" розглядається в §6. Описуються методи обчислення лінгвістичних значень істинності для кон'юнкції, диз'юнкції та заперечень і закладаються основи нечіткої логіки.

В §7 поняття лінгвістичної змінної застосовується до ймовірностей і показується, що з лінгвістичними ймовірностями можна проводити обчислення. Але, оскільки

числові значення ймовірностей в сумі повинні дорівнювати 1, а обчислення з лінгвістичними змінними зв'язані з розв'язанням задач нелінійного програмування, і відповідно не такі прості, як обчислення з числовими значеннями ймовірностей.

Так зване *композиційне правило виведення* і його застосування в наближених міркуваннях розглядається в §8. Це правило виведення трактується як процес розв'язання системи *рівнянь призначення у відношеннях*, в яких нечітким обмеженням призначаються лінгвістичні значення. Наприклад, якщо висловлювання “*x — малий*” інтерпретується як призначення лінгвістичного значення **малий** нечіткому обмеженню на *x*, а висловлювання “*x та y приблизно рівні*” інтерпретується як призначення нечіткого відношення **приблизно рівні** нечіткому обмеженню на впорядковану пару (*x, y*), то висновок “*у більш-менш малий*” можна розглядати як лінгвістичне наближення розв'язку наступної системи рівнянь

$$R(x) = \text{малий},$$

$$R(x, y) = \text{приблизно рівні},$$

в якій $R(x)$ та $R(x, y)$ означають обмеження на *x* та (*x, y*) відповідно (рисунок 8.3).

Композиційне правило виведення приводить до *узагальненого правила modus ponens*, причому його можна розглядати як узагальнення відомого правила виведення: якщо *A* істинне та із *A* випливає *B*, то *B* істинне. Параграф закінчується прикладом нечіткої теореми із елементарної геометрії та коротким обговоренням використання нечітких блок-схем для представлення нечітких алгоритмів означення.

В останньому параграфі розглядаються деякі застосування теорії нечітких множин, зокрема, прийняття рішень та ігри в нечітко визначеній обстановці.

2 ПОНЯТТЯ ЗМІННОЇ

2.1 Означення, приклади

Обговорення поняття лінгвістичної змінної в попередньому параграфі мало неформальний характер. Щоб підготувати ґрунт для формального означення, сконцентруємо увагу в цьому параграфі на понятті звичайної (не нечіткої) змінної. Після цього в §3 узагальнимо поняття змінної на випадок нечіткої змінної і означимо лінгвістичну змінну як змінну, значеннями якої є нечіткі змінні. Хоча поняття звичайної (не нечіткої) змінної по суті є елементарним, воно ні в якому випадку не тривіальне.

Надалі нам буде зручно використовувати наступну формалізацію поняття звичайної змінної.

Означення 2.1 Звичайна (не нечітка) змінна характеризується трійкою $(X, U, R(X; u))$, де

X — назва змінної,

U — універсальна множина (скінченна чи нескінченна),

$R(X; u)$ — підмножина множини U , яка представляє собою **обмеження** на значення елементів u , обумовлене назвою X .

Зауваження 2.1 Загальна назва — це назва, єдина для всіх елементів множини. Для простоти часто користуватимемось одним і тим же символом для позначення множини і загальної назви її елементів, покладаючись в суперечливих випадках на контекст.

Зауваження 2.2 В загальноприйнятій термінології $R(X)$ — область значень X . Використання нами терміну **обмеження** пояснюється тією роллю, яку $R(X)$ виконує в випадку нечітких змінних.

Для зручності замість $R(X; u)$ писатимемо скорочено $R(X)$, $R(u)$ або $R(x)$, де x означає загальну назву значень змінної X і називатимемо $R(X)$ просто **обмеженням на U** чи **обмеженням, обумовленим змінною X** .

Крім того, змінній відповідає **рівняння призначення**

або, що еквівалентно,
$$R(x) = \{y \in U \mid (x, y) \in R\} \neq \emptyset, \quad (2.1)$$

або, що еквівалентно,
$$R(x) = \{y \in U \mid (x, y) \in R\} \neq \emptyset. \quad (2.2)$$

Це рівняння відображає те, що змінній x призначено значення y з врахуванням обмеження $R(x)$. Таким чином, рівняння призначення задовольняється тоді і тільки тоді, коли

Приклад 2.1 Проілюструємо сказане на прикладі змінної **вік**. В цьому випадку в якості U можна взяти множину цілих невід'ємних чисел $0, 1, 2, 3, \dots$, а $R(x)$ може бути підмножиною $0, 1, 2, \dots, 100$.

Взагалі, нехай $X_1, \dots, X_n$ — змінні з відповідними універсальними множинами $U_1, \dots, U_n$. Впорядкований набір $X = (X_1, \dots, X_n)$ називатимемо n -арною складовою змінною. Універсальною множиною для X є декартів добуток

$$U = U_1 \times \dots \times U_n, \quad (2.3)$$

а обмеженням $R = (X_1, \dots, X_n) \in n$ -арне відношення в U . Це відношення можна визначити характеристичною

функцією (функцією незалежності)
$$\chi_R(x) = \begin{cases} 1 & \text{якщо } x \in R \\ 0 & \text{інакше} \end{cases},$$

причому
$$R = \{x \in U \mid \chi_R(x) = 1\}. \quad (2.4)$$

а u_i — загальна назва елементів множини U_i , $i = 1, \dots, n$.

Відповідно до цього n -арне рівняння призначення має вигляд

$$R(x) = \{y \in U \mid (x, y) \in R\} \neq \emptyset. \quad (2.5)$$

яке слід розуміти як

$$, \quad (2.6)$$

при обмеженні $R(X_i)$, де $x_i, i = 1, \dots, n$
— загальна назва значень змінної X_i .

Приклад 2.2 Припустимо, що

Припустимо також, що $(x_1$ та x_2 — загальні
назви значень змінних X_1 та X_2) можна визначити так

$$(2.7)$$

2.2 Маргінальні та умовні обмеження

Аналогічно до ймовірностних розподілів, обмеження $R(X_1, \dots, X_n)$, обумовлене набором $(X_1, \dots, X_n)$, індукує *маргінальні* обмеження $R(X_i)$, обумовлені наборами $(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n)$ виду $R(X_i | X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n)$, де послідовність індексів $(1, 2, \dots, n)$ є послідовністю послідовності індексів $(1, 2, \dots, n)$ ²⁾. По суті, $R(X_i | X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n)$ — мінімальне (тобто найбільш “обмежувальне”) обмеження, обумовлене набором $(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n)$, який задовольняє імплікації

¹⁾ Символ $R(X_i)$ вживається в розумінні “дорівнює за означенням”.

²⁾ У випадку бінарного відношення $R(X_1, X_2)$ множини $R(X_1)$ та

$R(X_2)$ називають *областю визначення* та *областю значень* відношення $R(X_1, X_2)$ відповідно. Відзначимо, що відношення $R(X_1, X_2)$ можна розуміти як відповідність або “багатозначну” функцію, яка будь-якому елементу $x \in X_1$ співставляє елементи (значення) $y \in X_2$, такі, що $(x, y) \in R$.

(2.8)

Отже, даний набір $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ є елементом множини M_n обмеження R тоді і тільки тоді, коли існує n -набір $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ з множини I , компоненти якого дорівнюють $x_1, x_2, \dots, x_n$ відповідно. В термінах характеристикних функцій обмежень $R(X_1, \dots, X_n)$ та множини M_n це твердження можна виразити наступною рівністю:

$$R(X_1, \dots, X_n) = \{x \in M_n \mid \exists i_1, \dots, i_n \in I, x_j = x_{i_j} \text{ для } j=1, \dots, n\} \quad (2.9)$$

або більш компактно

$$R(X_1, \dots, X_n) = \bigcup_{i \in I^n} R_i \quad (2.10)$$

де $q' = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ — доповнення послідовності індексів $i_1, i_2, \dots, i_n$ до множини I^n ;

$u_{(q')}$ — доповнення k -набору u до n -набору $u_{(q')}$;

$$u_{(q')} = (u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_n});$$

— операція взяття *sup* по $i \in I^n$ із $u_{(q')}$.

Скрізь в цій роботі символи $\vee$ та $\wedge$ означають операції взяття *max* та *min* відповідно, наприклад, для довільних дійсних чисел a та b маємо

$$, \quad (2.11)$$

Відповідно до цього позначення символ $u_{(q)}$ слід читати як $u_{(q)}$. Оскільки $u_{(q)}$ може приймати тільки два значення 0 або 1, вираз (2.10) означає, що $u_{(q)}$ тоді і тільки тоді, коли існує таке $u_{(q)}$, що

Зауваження 2.3 Існує проста аналогія, яка допомагає зрозуміти зміст змінної та зв'язаних з нею понять. А саме, звичайну (не нечітку) змінну, в розумінні означення 2.1, можна уподібнити саквоюжу з ярликом, який має тверді стінки. В цьому випадку X відповідає назві, яка є на ярлику, U — спискові предмети, які в принципі вміщуються в саквоюжі, а $R(X)$ — частина цього списку, в якій перераховані предмети, що, як правило, поміщаються в саквоюж. Наприклад, такий предмет, як човен, не може бути в списку U , такий предмет, як друкарська машинка, може бути в U , але не може бути в $R(X)$, а такий предмет, як пачка сигарет чи пара черевиків, може бути в $R(X)$.

В такій інтерпретації рівняння призначення

відповідає тому, що предмет u задовольняє обмеженню $R(X)$, тобто знаходиться в списку предметів, які поміщаються в саквоюж X (рисунок 2.1).

Деяка n -арна складова змінна $u_{(q)}$ відповідає саквоюжу з ярликом X , який має n відділень, позначених $X_1, \dots, X_n$, причому перегородки між цими відділеннями можна встановлювати на свій розгляд.

Обмеження відповідає спискові із n наборів предметів, таких, що u_1 можна помістити в відділення X_1 , u_2 — в відділення X_2 , ... та u_n — в відділення X_n одночасно (рисунок 2.2).

При цьому потрібно врахувати, що різні набори цього списку можна зв'язати з різними розташуваннями перегородок між відділеннями.

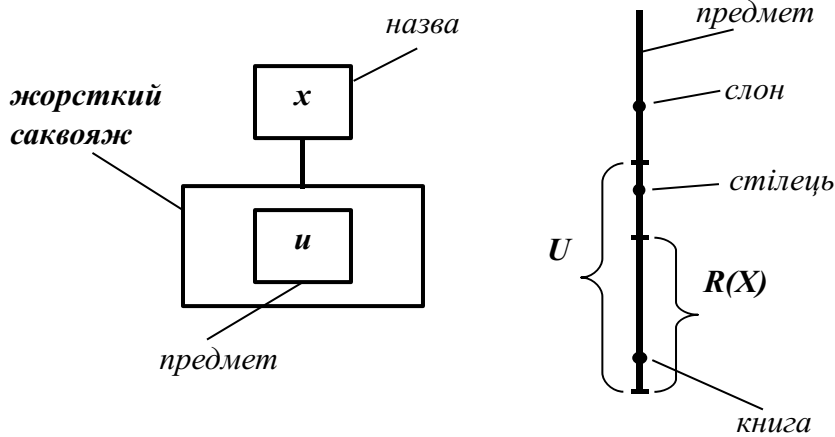


Рисунок 2.1 Ілюстрація аналогії з саквояжем для унарної звичайної (не нечіткої) змінної

Наприклад, якщо $n = 2$, то при заданому положенні перегородок ми можемо помістити пальто в відділення X_1 , а костюм — в відділення X_2 , в той час як при іншому положенні перегородок можемо помістити пальто в відділення X_2 , а коробку з туфлями — в відділення X_1 . В цьому випадку обидві пари (пальто, костюм) та (туфлі, пальто) виявляться в списку

предметів, які вміщуються у саквояж X . В термінах проведеної аналогії із саквояжем n -арне рівняння призначення

відповідає поміщенню предметів u_1 в X_1 , ..., u_n в X_n одночасно при умові, що n -набір предметів $\{u_1, \dots, u_n\}$ є в списку S . Більше того, маргінальне обмеження виду $\sum_{i=1}^n u_i \leq k$ можна інтерпретувати як список k -наборів предметів, які можна вмістити у відділення одночасно при умові, що в інші відділення можна при цьому помістити будь-які з допустимих предметів.

Зауваження 2.4 Слід відзначити, що вираз (2.9) аналогічний виразу для маргінального розподілу ймовірностей, при цьому символ V відповідає операції сумування (або інтегрування). Але цю аналогію не варто розтлумачувати так, що $\{u_1, \dots, u_n\}$ — дійсно маргінальні розподіли ймовірностей.

Праву частину рівняння (2.9) зручно розглядати як характеристичну функцію проекції відношення на S . Таким чином,

$$f(x) = \sum_{u \in S} \chi_{\{u\}}(x), \quad (2.12)$$

або скорочено

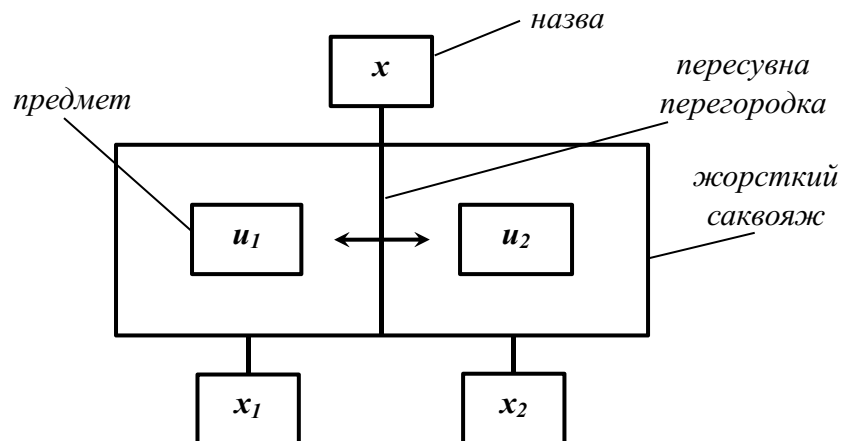


Рисунок 2.2 Аналогія зі саквоюжем для бінарної звичайної (не нечіткої) змінної

де P_q означає операцію проектування на $\mathcal{P}_q$,

Приклад 2.3 Для прикладу 2.2 отримуємо

Приклад 2.4 На рисунку 2.3 наведено обмеження на u_1 та u_2 , індуковані обмеженням $\mathcal{P}$.

Інший спосіб опису проєкцій полягає в наступному. Розглядатимемо обмеження $\mathcal{P}$ як відношення в $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ і нехай $\mathcal{P}_i$ — додаткова до $\mathcal{P}$ послідовність індексів. Нехай $\mathcal{P}_i \rightarrow \mathcal{P}$, чи більш компактно $\mathcal{P}_i \rightarrow \mathcal{P}$, — обмеження в $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ при умові $\mathcal{P}_i \rightarrow \mathcal{P}$. Характеристична функція цього умовного обмеження визначається виразом

$$\chi_{\mathcal{P}_i \rightarrow \mathcal{P}}(u_1, u_2) = \chi_{\mathcal{P}}(u_1, u_2) \chi_{\mathcal{P}_i}(u_1, u_2), \quad (2.13)$$

або скорочено

причому аргументи x_1 та x_2 входять в праву частину цього виразу як параметри. Отже, хоча характеристична функція умовного обмеження чисельно дорівнює характеристичній функції обмеження $R(x_1, x_2)$, вона визначає відношення в

просторі U , а не в $U_1 \times U_2$. Враховуючи (2.9), (2.12) та (2.13), проекцію на U_1 можна записати у вигляді

$$R(x_1) = \{x_2 \in U_2 \mid (x_1, x_2) \in R(x_1, x_2)\}, \quad (2.14)$$

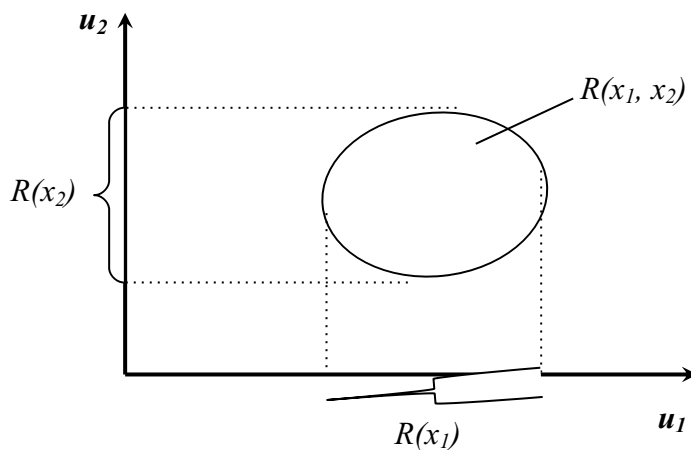


Рисунок 2.3 Маргінальні обмеження, індуковані обмеженням

причому знак $\cup$ означає об'єднання сімейства обмежень

параметрів. Значить, (2.14) де — набір
обмеження в можна виразити як
об'єднання умовних обмежень тобто

$$(2.15)$$

або скорочено

$$.$$

Приклад 2.5 Нехай , і нехай
відношення характеризується наступною матрицею.
(В цій матриці елемент (i, j) дорівнює 1 тоді і тільки тоді, коли
впорядкована пара (i -й елемент із U_1 , j -й елемент із U_2)
належить . По суті, матриця відношення
представляє собою таблицю значень характеристичної функції
 R).

R	3	5	7	9
3	0	0	1	0
5	1	0	1	0
7	1	0	1	1
9	1	0	0	1

В цьому випадку

$$,$$

$$,$$

$$,$$

$$,$$

і, відповідно,

2.3 Взаємодіючі та невзаємодіючі змінні

Основним поняттям, яке нам знадобиться надалі, є поняття *взаємодії* двох чи більшої кількості змінних — поняття, аналогічне поняттю *залежності* випадкових величин. Нехай змінна зв'язана з обмеженням

, яке індукує обмеження на

відповідно. Введемо

Означення 2.2 Змінні називаються *невзаємодіючими при обмеженні* тоді і тільки тоді, коли *сепарабельне*, тобто

$$, \quad (2.16)$$

де для

$$\rightarrow 1, \quad (2.17)$$

тут та доповнення в .
Приклад 2.6 На рисунку 2.4,а дається графічне представлення двох невзаємодіючих змінних X_1 та X_2 , обмеженнями $R(X_1)$ та $R(X_2)$ для яких є інтервали; в цьому випадку є декартів добуток цих інтервалів. На рисунку 2.4,б обмеження — власна підмножина множини і, відповідно, X_1 та X_2 — взаємодіючі змінні. Відзначимо, що в прикладі 2.2 змінні X_1 та X_2 — взаємодіючі.

Як буде показано в §4 в більш загальному випадку,

якщо $X_1, X_2, \dots, X_n$ — незалежні змінні, то n -арне рівняння
 призначення

(2.18)

можна розкласти в послідовність n унарних рівнянь
 призначення

$$\begin{aligned} & \dots, \\ & \dots, \\ & \dots, \end{aligned} \quad (2.19)$$

де π_{X_1} — проекція обмеження на X_1 , причому за означенням 2.2

(2.20)

У випадку взаємодіючих змінних послідовність n унарних рівнянь призначення набуває наступного вигляду (див. також (4.34))

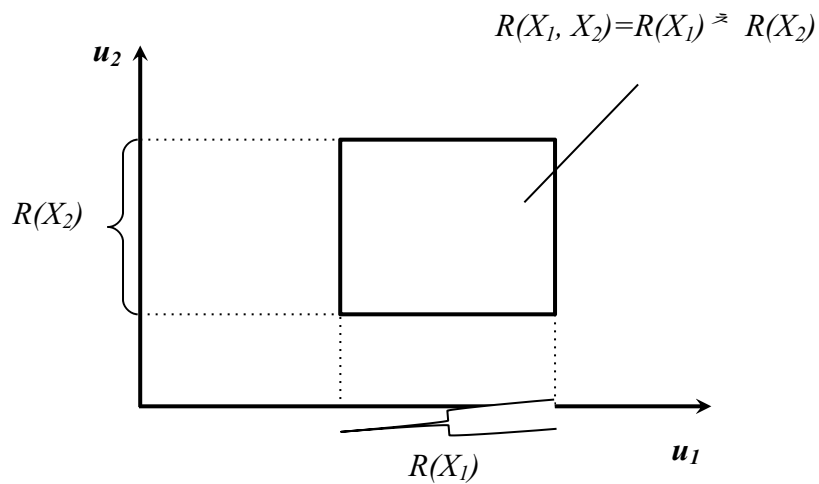


Рисунок 2.4, а X_1 та X_2 — незалежні змінні

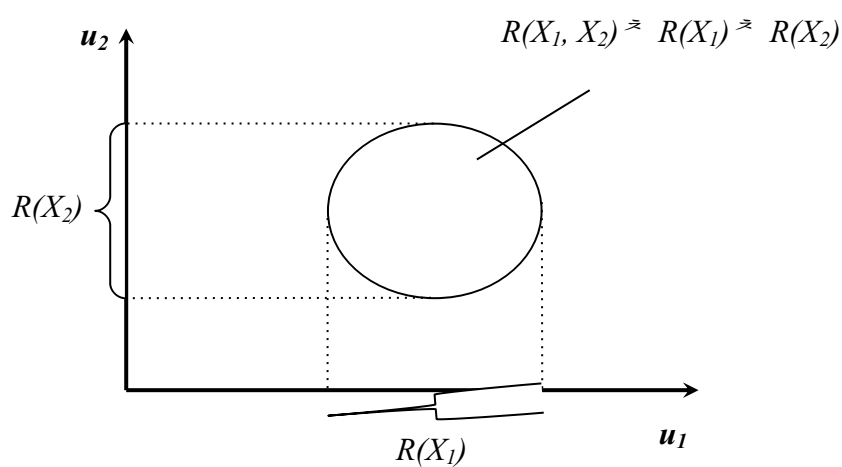


Рисунок 2.4, б X_1 та X_2 — взаємодіючі змінні

$$\begin{aligned} & \dots \\ & \dots \end{aligned} \quad (2.21)$$

де $\dots$ означає індукування обмеження на $\dots$ при даних $\dots$. Характеристичну функцію цього умовного обмеження можна виразити наступним чином (див. (2.13)):

$$\dots \quad (2.22)$$

причому аргументи в правій частині цього виразу виконують роль параметрів.

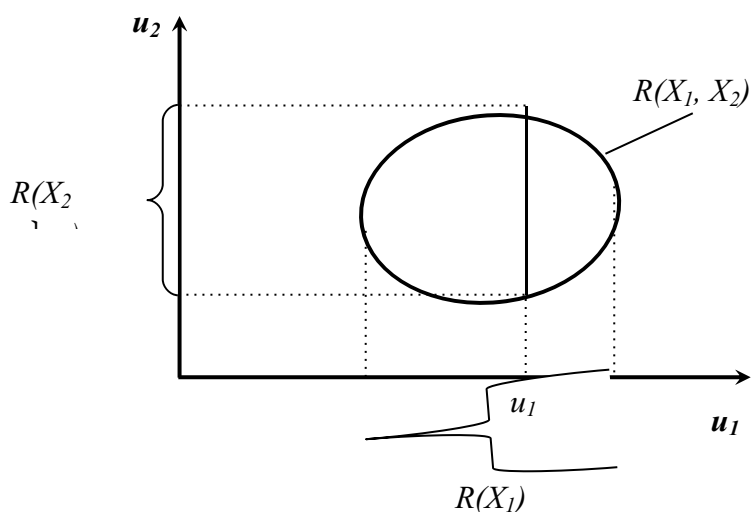


Рисунок 2.5 $R(X_2 \leftarrow u_1)$ — обмеження на u_2 при умові u_1

Зауваження 2.5 Система (2.21) означає, що у випадку взаємодіючих змінних, як тільки змінній X_1 призначено значення u_1 , обмеження на u_2 стає залежним від u_1 . Обмеження на u_3 стає залежним від значень, призначених змінним x_1 та x_2 і, на кінець, обмеження на u_n стає залежним від $u_1, \dots, u_{n-1}$. більше того, із (2.22) випливає, що обмеження на u_i при заданих $u_1, \dots, u_{i-1}$ по суті те саме, що й маргінальне обмеження на $u_1, \dots, u_i$, при умові, що $u_1, \dots, u_{i-1}$ розглядається як параметри. Ілюстрацією цього є рисунок 2.5.

В аналогії із саквоюжем (див. зауваження 2.3) незалежні змінні, якщо перегородки між відділеннями саквяжу, позначеними через $\dots$, не податливі. В цьому випадку те, що вміщене в одному відділенні, не впливає на

предмети, які можна помістити в інші відділення.

Якщо ж перегородки між відділеннями податливі, то змінні стають взаємодіючими в тому розумінні, що поміщення якого-небудь предмета, наприклад u_i в X_i впливає на те, що можна помістити в інші відділення. З цієї точки зору послідовність унарних рівнянь (2.21) є описом того, яким

чином поміщення предметів $u_1, \dots, u_{i-1}$ у відділення впливає на обмеження відділення X_i .

Визначаючи поняття невзаємодії, маргінального обмеження, умовного обмеження і т.д. для звичайних (не нечітких) змінних, ми мали на меті :

а) показати, що поняття, аналогічні поняттям статистичної незалежності, маргінального розподілу, умовного розподілу і т.д. можна застосовувати до не випадкових, не нечітких змінних;

б) отримати основу для введення подібних понять у випадку нечітких змінних.

Перш ніж перейти до цих понять, розглянемо деякі властивості нечітких множин та сформулюємо принцип узагальнення, який гратиме важливу роль в подальшому викладі.

3 НЕЧІТКІ МНОЖИНИ ТА ПРИНЦИП УЗАГАЛЬНЕННЯ

В §4 ми побачимо, що нечітка змінна X відрізняється від змінної в звичайному розумінні (не нечіткої) тим, що їй відповідає деяке обмеження $R(X)$, що представляє собою нечітку підмножину універсальної множини. Тому, перш ніж приступити до обговорення поняття нечіткої змінної, розглянемо деякі характерні властивості нечітких множин та сформулюємо принцип узагальнення, який дозволяє розширити область визначення або відношення в U , включивши поряд із точками з U довільні нечіткі підмножини U .

3.1 Нечіткі множини. Позначення та термінологія

Нечітка підмножина A універсальної множини U характеризується *функцією належності* μ_A , яка ставить у відповідність кожному елементу $x \in U$ число $\mu_A(x)$ з проміжку $[0, 1]$, яке характеризує *ступінь належності* елемента x підмножині A ¹⁾.

Носієм нечіткої множини A називається множина таких точок в U , для яких величина $\mu_A(x)$ додатна.

Висотою нечіткої множини A називається величина $\max_{x \in U} \mu_A(x)$.

Точкою переходу нечіткої множини A називається такий елемент множини U , ступінь належності якого множині A дорівнює 0.5.

Приклад 3.1 Нехай універсальна множина U представляє собою проміжок $[0, 1]$, і змінна u , що приймає значення із цього інтервалу, інтерпретується як “*вік*”.

¹⁾ В більш загальному випадку значеннями $\mu_A(x)$ можуть бути елементи частково впорядкованої множини або нечіткі множини. Останній

випадок детально розглядається в §6.

Нечітку підмножину універсальної множини U , яка позначається терміном “*старий*”, можна визначити функцією належності виду

(3.1)

В цьому прикладі носієм нечіткої множини *старий* є проміжок , висота множини *старий* близька до 1, а точкою переходу є значення .

Щоб спростити представлення нечітких множин, використовуватимемо наступні позначення.

Звичайну (не нечітку) скінченну множину

(3.2)

записуватимемо у вигляді

або , (3.3)

, (3.4)

де знак “+” означає об’єднання, а не арифметичне додавання.

Таким чином, запис (3.3) можна розглядати як представлення множини U у вигляді об’єднання його одно точкових множин.

Узагальнюючи (3.3), нечітку підмножину A універсальної множини U записуватимемо наступним чином

або , (3.5)

$$\mu_A(u_i) = \frac{1}{2}, \quad (3.5)$$

де $\mu_A(u_i)$ — ступінь належності елемента u_i нечіткій множині A . У випадках, коли u_i — числа, може виникнути подвійне трактування запису $\mu_A(u_i)$, зв'язане з неможливістю розрізнити компоненти μ_A та u_i . Щоб уникнути цього, розділятимемо такі значення μ_A та u_i рискою

$$\mu_A(u_i) = \frac{1}{2}, \quad (3.7)$$

або

$$(3.8)$$

Приклад 3.2 Нехай μ_A або в прийнятих позначеннях

$$(3.9)$$

В цьому випадку нечітку підмножину A універсальної множини U можна записати у вигляді

$$\mu_A(u_i) = \frac{1}{2}, \quad (3.10)$$

причому цей запис розуміється цілком однозначно. З іншого боку, якщо

$$\mu_A(u_i) = \frac{1}{2}, \quad (3.11)$$

то, щоб уникнути невизначеностей, A записуємо у вигляді

$$(3.12)$$

Приклад 3.3 Якщо універсальна множина складається з чисел від 1 до 10, тобто

$$(3.13)$$

то її нечітку підмножину, яка позначається словом *декілька*, можна визначити наступним чином:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{якщо } x \text{ належить до } A \\ 0 & \text{інакше} \end{cases} \quad (3.14)$$

Приклад 3.4 У випадку зліченої універсальної множини

$$A = \{1, 2, 3, \dots\} \quad (3.15)$$

нечітку множину, яка позначається словом *малий*, можна записати так

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{якщо } x \leq 1 \\ 0 & \text{інакше} \end{cases} \quad (3.16)$$

Аналогічно до запису (3.3), запис (3.5) можна інтерпретувати як представлення нечіткої множини у вигляді об'єднання складових його нечітких одно точкових множин (або $\mu_A(x) = \max_i \mu_{A_i}(x)$). З означення операції об'єднання нечітких множин (див. (3.34)) випливає, що у випадку, коли $A = \{1, 2, 3, \dots\}$, запис нечіткої множини A можна перетворити наступним чином:

$$\mu_A(x) = \max_i \mu_{A_i}(x) \quad (3.17)$$

Наприклад, запис

$$\mu_A(x) = \max_i \mu_{A_i}(x) \quad (3.18)$$

можна перетворити так:

$$\mu_A(x) = \max_i \mu_{A_i}(x) \quad (3.19)$$

Якщо носій нечіткої множини A має потужність континуума¹⁾, то використовуватимемо такий запис:

$$\mu_A(x) = \max_i \mu_{A_i}(x) \quad (3.20)$$

маючи на увазі, що .

¹⁾ Кажуть, що множина має потужність континуума, якщо можна встановити взаємно однозначну відповідність між нею та множиною дійсних чисел.

Приклад 3.5 Нехай універсальна множина є проміжком , а змінна u , що приймає значення з цього інтервалу, інтерпретується як *вік*. Тоді нечітка підмножина, що визначається словом *старий* (її функція належності задається формулою (3.1)) можна записати так

$$\mu_{\text{старий}}(u) = \begin{cases} 1 - \frac{u}{100}, & 0 \leq u \leq 100 \\ 0, & u > 100 \end{cases} \quad (3.21)$$

Відзначимо, що точкою переходу для цієї нечіткої множини, тобто значенням u , для якого

$$\mu_{\text{старий}}(u) = 0.5, \quad (3.22)$$

є $u=55$.

Будемо казати, що нечітка множина A *нормальна*, якщо її висота дорівнює одиниці, тобто

$$\sup_{u \in U} \mu_A(u) = 1. \quad (3.23)$$

В протилежному випадку нечітка підмножина A *субнормальна*. Наприклад, нечітка множина *старий*, яка визначається формулою (3.21), субнормальна, а нечітка множина *декілька*, яка визначається формулою (3.14), є нормальною. Разом з тим, нечітка підмножина *не мале і не велике* універсальної множини , яка має вигляд

(3.24)

субнормальна. Відзначимо, що субнормальну нечітку множину можна нормувати, поділивши функцію на величину .

Нечітка підмножина універсальної множини U може бути підмножиною іншої нечіткої або звичайної підмножини A ¹⁾ множини A . Більш того, A є підмножиною B або міститься в B тоді і тільки тоді, коли для будь-якого , тобто

(3.25)

Приклад 3.6 Якщо

$$\begin{aligned} & , \\ & , \\ & , \end{aligned} \quad (3.26)$$

то .

3.2 Множини рівня нечіткої підмножини універсальної множини

Множиною α -рівня нечіткої множини A є множина (в звичайному розумінні A_α) всіх таких елементів універсальної множини U , ступінь належності яких нечіткій множині A не менший за α :

$$A_\alpha = \{x \in U \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}. \quad (3.27)$$

Нечітку множину A можна наступним чином розкласти по її множинах рівня ²⁾:

$$\text{або} \quad \mu_A(x) = \max\{\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x)\}, \quad (3.28)$$

$$\mu_A(x) = \min\{\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x)\}, \quad (3.29)$$

¹⁾ Тобто нечіткої підмножини з функцією належності, яка приймає значення 0 або 1.

²⁾ Детальніше розклад (3.28) – (3.29) та його застосування розглядається в роботах [3], [4].

де $\mu_A(x)$ — добуток числа $\mu_{A_1}(x)$ на множину $\mu_{A_2}(x)$ (в розумінні

(3.39)), а $\cup$ — знак об'єднання множин по від 0 до 1.

Розклад (3.28) або (3.29) можна розглядати як результат групування членів виразу (3.5) по підмножинах, кожна з яких відповідає певній множині рівня. Припустимо, наприклад, що нечітка множина A має вигляд

$$(3.30)$$

Тоді, використовуючи (3.17), A можна представити наступним чином

або

$$\mu_A(x) = \max\{\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x)\}, \quad (3.31)$$

тобто в вигляді (3.29) з множинами рівня (див.(3.27))

$$\begin{aligned} & \mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)), \\ & \mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)), \\ & \mu_{A \setminus B}(x) = \max(0, \mu_A(x) - \mu_B(x)), \\ & \mu_{B \setminus A}(x) = \max(0, \mu_B(x) - \mu_A(x)). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Як буде показано в наступних параграфах, розклад по множинах рівня в комбінації з принципом узагальнення зручний для узагальнення різних понять теорії звичайних множин на нечіткі множини. Таке узагальнення лежить в основі багатьох з наведених нижче означень.

3.3 Операції над нечіткими множинами

Наведемо деякі з основних операцій, які можна здійснювати над нечіткими множинами.

1. *Доповнення нечіткої множини A* позначається символом A' (або інколи A^c) і визначається наступним чином

$$\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x). \quad (3.33)$$

Операція доповнення відповідає логічному запереченню. Наприклад, якщо A — назва нечіткої множини, то “не A ” розуміється як A' (див. приклад 3.7).

Об'єднання нечітких множин A та B позначається $A \cup B$ (або, більш звично, $A \vee B$) та визначається наступним чином

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)). \quad (3.34)$$

2. Об'єднання відповідає логічній зв'язці “або”.

Наприклад, якщо A та B — назви нечітких множин, то запис “ A або B ” розуміється як $A+B$.

3. Переріз A та B позначається $A \cap B$ та визначається наступним чином

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)). \quad (3.35)$$

Переріз відповідає логічній зв’язці “і”, тобто

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)). \quad (3.36)$$

Зауваження 3.1 Слід мати на увазі, що

та

— не єдині операції, з допомогою яких можна визначити операції об’єднання та перерізу (це питання детальніше розглядається в [5] та [6]). В зв’язку з цим важливо відзначити, що якщо операція «і» визначається з допомогою операції тип, як в (3.36), то вона є жорсткою в тому розумінні, що в ній недостатньо враховуються функції належності обох множин¹⁾.

В протилежність цьому операція “і”, яка визначається з допомогою арифметичного добутку, як в (3.37), є “м’якою”. Яке з цих двох, а можливо, і інших означень найкраще підходить, залежить від змісту, який вкладається в цю операцію в кожному конкретному випадку.

4. Добуток A і B позначається AB та визначається формулою

$$\mu_{AB}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x). \quad (3.37)$$

Таким чином, ми можемо визначити будь-яку нечітку множину A , де a — додатне число, наступним чином

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \quad (3.38)$$
 Аналогічно, якщо α — будь-яке невід’ємне число,

таке, що $\alpha \leq \mu_A(x)$, то

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \quad (3.3)$$
¹⁾ Крайнім випадком такого означення є переріз нечітких множин

А та В, таких, що $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$, тобто

При цьому для всіх $x \in X$, тобто

функція належності множини В фактично не приймає участі в

цьому означенні.

Частковими випадками операції піднесення в степінь (див.(3.38)) є операція концентрування

$$\text{та операція розтягу} \quad , \quad (3.40)$$

$$\cdot \quad (3.41)$$

Як буде показано в §6, операції концентрування та розтягу корисні в представленні лінгвістичних невизначеностей.

Приклад 3.7 Якщо

$$\quad , \quad (3.42)$$

то

$$\quad , \quad (3.43)$$

5. Якщо $A_1, \dots, A_n$ — нечіткі підмножини універсальної множини U , а $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — невід’ємні вагові коефіцієнти, сума яких дорівнює 1, то випуклою комбінацією нечітких множин $A_1, \dots, A_n$ називається нечітка множина A з функцією належності виду

$$\mu_A(x) = \alpha_1 \mu_{A_1}(x) + \dots + \alpha_n \mu_{A_n}(x), \quad (3.44)$$

де знак “+” означає арифметичне додавання. Поняття випуклої комбінації корисне в представленні таких лінгвістичних невизначеностей, як **істотно, типово** і т.д. [7].

6. Нехай $A_1, \dots, A_n$ — нечіткі підмножини універсальних множин $U_1, \dots, U_n$ відповідно. Декартів добуток цих підмножин позначається $A_1 \times \dots \times A_n$ і визначається як нечітка підмножина множини $U = U_1 \times \dots \times U_n$ з функцією належності

$$\mu_{A_1 \times \dots \times A_n}(x_1, \dots, x_n) = \min(\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_n}(x_n)). \quad (3.45)$$

Таким чином (див.(3.52)),

$$\mu_{A_1 \times \dots \times A_n}(x_1, \dots, x_n) = \min(\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_n}(x_n)). \quad (3.46)$$

Приклад 3.8 Якщо $A_1, \dots, A_n$ — нечіткі підмножини універсальних множин $U_1, \dots, U_n$ відповідно, то

та $B_1, \dots, B_n$ — нечіткі підмножини універсальних множин $V_1, \dots, V_n$ відповідно, то

$$\mu_{A_1 \times \dots \times A_n \times B_1 \times \dots \times B_n}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = \min(\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_n}(x_n), \mu_{B_1}(y_1), \dots, \mu_{B_m}(y_m)). \quad (3.47)$$

7. Оператор збільшення нечіткості використовується зазвичай для перетворення звичайної (не нечіткої) множини в нечітку або для збільшення нечіткості нечіткої множини. Наприклад, результатом дії оператора збільшення нечіткості F на нечітку підмножину A множини U є нечітка підмножина

$F(A; K)$ виду

$$, \quad (3.48)$$

де нечітка множина $K(i)$ є ядром оператора F , тобто результатом дії оператора F на одноточкову множину :

$$; \quad (3.49)$$

— добуток (в розумінні означення (3.39))

числа та нечіткої множини , а — знак об'єднання сімейства нечітких множин. По суті, вираз (3.48) аналогічний інтегральному представленню лінійного оператора, в якому виконує роль імпульсної перехідної функції.

Приклад 3.9 Нехай U , A та визначаються наступним чином

$$U = 1 + 2 + 3 + 4,$$

$$A = 0.8/1 + 0.6/2, \quad (3.50)$$

$$K(1) = 1/1 + 0.4/2,$$

$$K(2) = 1/2 + 0.4/1 + 0.4/3.$$

Тоді

$$\begin{aligned} F(A; K) &= 0.8 (1/1 + 0.4/2) + 0.6 (1/2 + 0.4/1 + 0.4/3) = \\ &= 0.8/1 + 0.6/2 + 0.24/3 \end{aligned} \quad (3.51)$$

Операція збільшення нечіткості виконує важливу роль у визначенні таких лінгвістичних невизначеностей, як *більш-менш*, *злегка*, *дещо*, *багато* і т.д. Наприклад, якщо клас

додатних чисел позначити символами **додатній**, тоді словосполучення **дещо додатній** є назвою нечіткої підмножини множини дійсних чисел, функція належності якої має вигляд, наведений на рисунку 3.1.

В цьому випадку нечітке поняття **дещо** є оператором збільшення нечіткості, який перетворює нечітку множину **додатній** в нечітку множину **дещо додатній**.

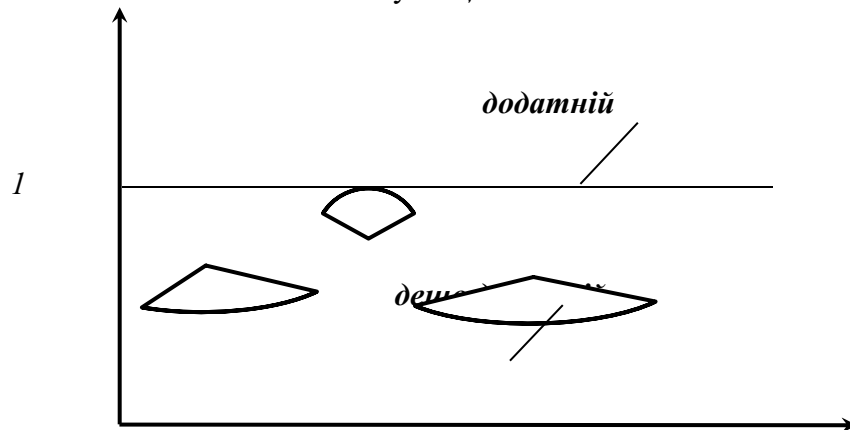


Рисунок 3.1 Функція належності значень **додатній** та **дещо додатній**

Але не завжди можна виразити результат дії оператора збільшення нечіткості в формі (3.48), причому оператор **дещо** якраз і представляє такий випадок. Більш детальне обговорення цього та інших питань, пов'язаних з цим оператором, можна знайти в [7].

4.4 Нечіткі відношення

Якщо U – декартів добуток n універсальних множин $U_1, \dots, U_n$, то n -арне *нечітке відношення* R в U визначається як нечітка підмножина універсальної множини U . Як і в (3.20), R можна представити у вигляді об'єднання складових його нечітких одноточкових множин $\mu_R(u_1, \dots, u_n) / (u_1, \dots, u_n)$, тобто

(3.52)

де μ_R — функція належності нечіткої множини R .

Поширеними прикладами бінарних нечітких відношень є *багато більше ніж, подібний до, має відношення, близько до* і так далі. Наприклад, якщо $\mu_{\text{близько до}}$ то відношення *близько до* можна визначити наступним чином

близько до (3.53)

де α — масштабний коефіцієнт. Аналогічно, якщо $\mu_{\text{багато більше ніж}}$ то відношення *багато більше ніж* можна визначити матрицею відношення

R	1	2	3	4
1	0	0.3	0.8	1
2	0	0	0.3	0.8
3	0	0	0	0.3
4	0	0	0	0

(3.54)

(i, j) -й елемент якої є значення $\mu_R(u_i, u_j)$ для i -го значення u_i та j -го значення u_j .

Якщо R — відношення $U \rightarrow V$ (або, що те саме, відношення в $U \times V$), а S — відношення $V \rightarrow W$, то композицією R та S є нечітке відношення $R \circ S$ і визначається формулою ¹⁾

(3.55)

Якщо U, V та W — скінченні множини, то матриця відношення $R \circ S$ є максимальний добуток ²⁾ матриць відношень R та S . Сказане можна проілюструвати таким прикладом

(3.56)

3.5 Проекції та циліндричні нечіткі множини

Якщо R є n -арним нечітким відношенням в $U_1 \times \dots \times U_n$, то його проекція (тінь) на U_k є k -арне нечітке відношення R_k в U_k , яке визначається наступним чином (пор. з 2.12)

на

¹⁾ Вираз (3.55) визначає *max min* – композицію R та S ; аналогічно визначається *max* – композиція, тільки в ній замість операції мінімізації проводиться арифметичне множення. Детальніше ці композиції

розглядаються в роботі [4].

²⁾ В максімному добутку матриць замість операцій додавання та множення використовуються операції $\neg \downarrow$ та $\neg \uparrow$ відповідно.

$$, \quad (3.57)$$

де q — послідовність індексів ;
 q' — доповнення q ;

,

де верхня грань береться по значеннях всіх тих u_j , які входять в . Слід відзначити, що якщо R — звичайне (не нечітке) відношення, то (3.57) зводиться до (2.9).

Приклад 3.10 Для нечіткого відношення, яке визначається матрицею відношення (3.54), маємо

Зрозуміло, що різні нечіткі відношення в $U_1 \approx \dots \approx U_n$ можуть мати ідентичні проекції на . Разом з тим, для даного нечіткого відношення R_q в існує єдине найбільше ¹⁾ в $U_1 \approx \dots \approx U_n$, проекцією якого на є R_q . Із (3.57) випливає, що функція належності відношення має вигляд

$$(3.58)$$

¹⁾ Тобто відношення, яке містить всі інші відношення, проєкції

яких на R_q дорівнюють R_q .
 при цьому слід врахувати, що рівність (3.58) виконується для
 всіх таких, що i_1 -й, ..., i_k -й аргументи
 дорівнюють відповідно першому, другому, ..., k -му аргументу
 . Звідси випливає, що значення функції в точці
 дорівнює значенню цієї функції в точці , як тільки

Виходячи з цього, називати R_q *циліндричним* відношенням.
 R_q є основою відношення (рис. 3.2).

Припустимо, що R_q є *циліндричним* відношенням в
 , його проєкція на U_1 — *циліндричне*
 продовження відношення

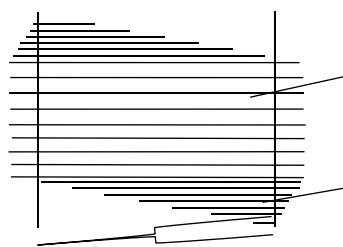
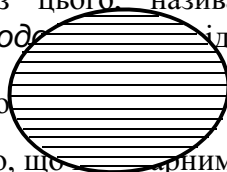


Рисунок 3.2 R_I – основа циліндричної множини

Оскільки R_I — найбільше відношення в X ,
 проекція якого дорівнює R_I , то R_I задовольняє відношенню
 вкладеності

(3.59)

для всіх q і, відповідно,

(3.60)

для довільних i, j (послідовностей індексів із $(1, \dots, n)$).

Зокрема, якщо взяти $i = j$, то вираз (3.60)
 набуде вигляду

(3.61)

де R_i — проекції R на X_i відповідно, а
 R_{ii} — їхні циліндричні продовження. Але із означення
 декартового добутку (див.(3.45)) випливає, що

(3.62)

звідки випливає

Теорема 3.1 Якщо $R \in n$ -арне нечітке відношення в
 X і R_i — його проекції на X_i , то (див.
 рисунок 3.3)

(3.63)

З допомогою поняття циліндричного продовження можна дати інтуїтивну інтерпретацію композиції нечітких відношень. Припустимо, що R та S — бінарні нечіткі відношення в X та Y відповідно. Нехай R^* та S^* — циліндричні продовження R та S в $X \times Y$. Тоді з означення композиції (див.(3.55)) випливає, що

$$(R \circ S)(x, y) = \max_{z \in X} \min(R(x, z), S(z, y)) \quad (3.64)$$

Якщо R та S такі, що

$$R(x, z) = \min(R(x, y), R(y, z)) \quad \text{на } X \times Y, \quad (3.65)$$

то R^* стає з'єднанням R та S . Основну властивість з'єднання R та S можна сформулювати наступним чином.

Теорема 3.2 Якщо R та S — нечіткі відношення в X та Y відповідно, а $R \circ S$ — з'єднання R та S , то

$$R(x, z) = \min(R(x, y), R(y, z)) \quad \text{на } X \times Y, \quad (3.66)$$

$$S(z, y) = \min(S(x, z), S(x, y)) \quad \text{на } X \times Y. \quad (3.67)$$

Таким чином, R та S можна відновити, знаючи з'єднання R та S .

Доведення Нехай R та S означають функції належності нечітких відношень R та S відповідно. Тоді праві

частини виразів (3.66) та (3.67) можна записати у вигляді

$$, \quad (3.68)$$

$$, \quad (3.69)$$

На основі дистрибутивності та комутативності операцій $\vee$ та $\wedge$ (3.68) і (3.69) можна переписати у вигляді

$$, \quad (3.70)$$

$$. \quad (3.71)$$

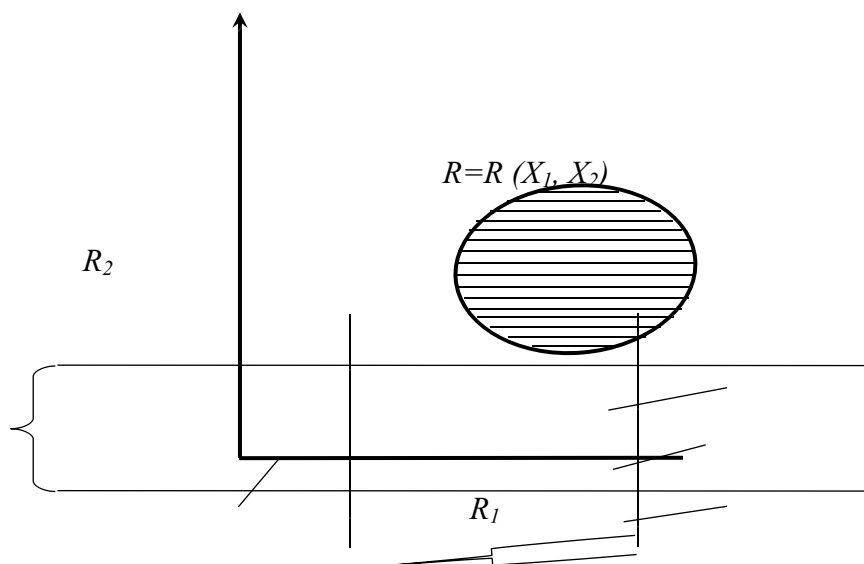


Рисунок 3.3 Декартів добуток та переріз циліндричних множин

Більше того, з означення з'єднання випливає рівність (3.65), отже

$$(3.72)$$

З цієї рівності та означення операції V отримуємо

$$, \quad (3.73)$$

$$. \quad (3.74)$$

Значить,

$$, \quad (3.75)$$

$$, \quad (3.76)$$

що і означає виконання (3.66) та (3.77). Теорема доведена.

Основна властивість проєкцій, яка нам знадобиться в §4, наступна.

Теорема 3.3 Якщо R — нормальне відношення (див. (3.23)), то і кожна з його проєкцій — нормальне відношення.

Доведення Нехай R є n -арне відношення в $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, і нехай π_i — його проєкція (тінь) на A_i , де $i = 1, 2, \dots, n$. Оскільки R нормальне, то, згідно (3.23), маємо

$$, \quad (3.77)$$

або скорочено

З іншого боку, згідно означення (див.(3.57)) маємо

або

Значить, висота дорівнює

$$\quad (3.78)$$

Теорема доведена.

3.6 Принцип узагальнення

Принцип узагальнення для нечітких множин представляє собою, по суті, основну рівність, яка дозволяє розширити область визначення U відображення або відношення, включивши в неї поряд з точками довільні нечіткі підмножини множини U . Отже, припустимо, що f — відображення, а A — нечітка підмножина виду

$$\quad (3.79)$$

Тоді принцип узагальнення стверджує, що

$$. \quad (3.80)$$

Таким чином, образ множини A при відображенні f можна отримати, знаючи образи елементів при цьому відображенні.

Приклад 3.11 Нехай

,

а f — операція піднесення до квадрату.

Нехай *малий* — нечітка підмножина множини U виду

$$. \quad (3.81)$$

Тоді, враховуючи (3.80), маємо ¹⁾

$$. \quad (3.82)$$

Якщо носій підмножини A має потужність континуума, тобто

$$, \quad (3.83)$$

то принцип узагальнення набуде наступного вигляду

$$; \quad (3.84)$$

при цьому необхідно врахувати, що $f(u)$ — точка множини V , а — ступінь належності $f(u)$ нечіткій підмножині $f(A)$ множини V .

В деяких випадках зручно використовувати принцип

узагальнення в іншій формі, яку отримуємо з виразу (3.84) шляхом розкладу A не на одноточкові нечіткі множини, а на відповідні їй множини рівня (див. розклад (3.28)). Таким чином, написавши

$$A = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} A_\alpha, \quad (3.85)$$

де A_α — відповідна A множина α -рівня, отримаємо принцип узагальнення в наступній формі

¹⁾ Зауважимо, що це означення нечіткої множини *малий*² відрізняється від означення (3.38).

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}, \quad (3.86)$$

якщо носій A має потужність континуума, або

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) > \alpha\}, \quad (3.87)$$

якщо або носій множини A — зліченна множина, або множини рівня, які відповідають A , утворюють зліченне сімейство.

Зауваження 3.2 Принцип узагальнення в формі (3.84) дозволяє розширити область визначення U відображення f , включивши в неї поряд з точками довільні нечіткі підмножини множини U . Принцип узагальнення в формі (3.86) дозволяє розширити область визначення відображення, включивши в неї поряд зі звичайними (не нечіткими) підмножинами U

довільні нечіткі підмножини U . Слід відзначити, що вирази (3.84) та (3.86) еквівалентні, оскільки (3.86) випливає з (3.84), якщо перегрупувати члени в розкладі множини A .

Зауваження 3.3 Принцип узагальнення аналогічний принципу суперпозиції для лінійних систем. Відповідно до останнього, якщо L — лінійна система і — вхідні сигнали, то відгуком системи L на довільну лінійну комбінацію

$$, \quad (3.88)$$

де — сталі коефіцієнти, є

$$. \quad (3.89)$$

Істотна різниця між (3.89) та (3.80) полягає в тому, що в (3.80) знак “+” означає об’єднання, а не арифметичну суму, і f не обмежується тільки лінійними відображеннями.

Зауваження 3.4 Слід зауважити, що, коли , то результат застосування принципу узагальнення аналогічний результату утворення n -кратного декартового добутку алгебраїчної системи (U, f) самої на себе. Узагальнення таблиці множення на підмножини чисел наведено на рисунку 3.4.

X	1	2	3	4	$1 \circ 2$	$2 \circ 4$
1	1	2	3	4	$1 \circ 2$	$2 \circ 4$
2	2	4	6	8	$2 \circ 4$	$4 \circ 8$
3	3	6	9	12	$3 \circ 6$	$6 \circ 12$
4	4	8	12	16	$4 \circ 8$	$8 \circ 16$
$1 \circ$	$1 \circ$	$2 \circ$	$3 \circ$	$4 \circ$	$1 \circ 2$	$2 \circ 4$
2	2	4	6	8	$\circ 4$	$\circ 8$

Рисунок 3.4 Узагальнення таблиці множення на множини цілих чисел; $1V2$ означає 1 або 2

В багатьох застосуваннях принципу узагальнення виникає така проблема. Є функція n змінних нечітка множина (відношення) A в X , яка характеризується функцією належності $\mu_A(x)$, де $x \in X$. Безпосередньо застосовуючи в цьому випадку принцип узагальнення (3.84), отримуємо

$$(3.90)$$

але в багатьох випадках нам відома не сама множина A , а її проекції на X_i відповідно (див.(3.57)). В зв'язку з цим виникає питання: який вираз для $\mu_A(x)$ слід використовувати в (3.90)?

В таких випадках, якщо окремо не обумовлено, припускатимемо, що функція належності відношення A має вигляд

$$\mu_A(x, y) = \min\{\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(y)\}, \quad (3.91)$$

де μ_{A_i} — функція належності відношення A_i .

Якщо врахувати рівність (3.45), то рівність (3.91) еквівалентна припущенню про те, що A — декартів добуток своїх проекцій, тобто

$$A = A_1 \times A_2,$$

звідки в свою чергу випливає, що A — найбільша множина, проекції якої на X та Y є відповідно (див.(3.63)).

Приклад 3.12 Припустимо, що як і в прикладі 3.11

та

$$\mu_{A_1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{якщо } x \in \{1, 2\} \\ 0 & \text{інакше} \end{cases}, \quad (3.92)$$

$$\mu_{A_2}(y) = \begin{cases} 1 & \text{якщо } y \in \{1, 2\} \\ 0 & \text{інакше} \end{cases}, \quad (3.93)$$

арифметичний добуток u_1 та u_2 .

Використовуючи (3.91) та застосовуючи принцип узагальнення в формі (3.90), маємо

$$\mu_A(x, y) = \min\{\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(y)\}. \quad (3.94)$$

Таким чином, арифметичний добуток нечітких чисел

приблизно 2 та *приблизно 6* є нечітке число, яке виражається формулою (3.94).

Позначимо символом $*$ деяку бінарну операцію, визначену на U , зі значеннями в V . Так, якщо $x, y \in U$, то

.

Припустимо тепер, що A та B — нечіткі підмножини множин U та V відповідно, причому

(3.95)

Використовуючи принцип узагальнення та припускаючи, що виконується рівність (3.91), операцію $*$ можна узагальнити на нечіткі підмножини множин U та V , визначивши відношення

. (3.96)

Легко перевірити, що у випадку, коли $U = V$ та $A = B$, як в прикладі 3.12, застосування виразу (3.96)

приводить до виразу для $\mu_{A \circ B}(x)$.

Зауваження 3.5 Важливо відзначити, що застосування (3.96) залежить істотно від припущення (3.91), тобто від того, чи справедлива рівність

.

Наслідком цієї рівності є те, що u та v — невзаємодіючі змінні в розумінні означення 2.2. Якщо ж існує обмеження на R , яке виражається відношенням R з функцією належності μ_R , то вираз для $\mu_{A \circ B}(x)$ має вигляд

(3.97)

Зауважимо, що якщо R — звичайне (не нечітке) відношення, то права частина (3.97) міститиме тільки ті члени, які задовольняють відношенню R .

Простою ілюстрацією випадку, в якому u та v — взаємодіючі змінні, є вираз

$$, \quad (3.98)$$

в якому арифметичне додавання позначено знаком “+”, а арифметичне множення — знаком “ $\times$ ”. Якщо x, y, z — невзаємодіючі, то ми можемо застосувати принцип узагальнення в формі (3.96) для обчислення z , де A, B, C — нечіткі підмножини дійсної прямої. З іншого боку, якщо (3.98) переписати у вигляді

то члени u та v — взаємодіючі завдяки наявності в них спільного множника z і, значить,

$$. \quad (3.99)$$

З цього факту можна зробити важливий висновок про те, що добуток нечітких чисел не дистрибутивний, якщо він обчислюється за формулою (3.96). Щоб отримати рівність в (3.99), ми можемо застосувати принцип узагальнення в формі (3.96) до лівої частини (3.99) і повинні застосувати його обов’язково в формі (3.97) до правої частини (3.99).

Зауваження 3.6 Принцип узагальнення можна

застосовувати не тільки до функцій, але також і до відношень, або, що еквівалентно, до предикатів. Ми не зупинятимемось тут на цьому питанні, оскільки застосування принципу узагальнення до відношень не гратиме значної ролі для нас.

3.7 Нечіткі множини з нечіткими функціями належності

Причиною розгляду нечітких множин з нечіткими функціями належності є близький зв'язок, який існує між поняттям лінгвістичної істинності з такими значеннями, як *істинно, цілком істинно, дуже істинно, більш-менш істинно* і так далі, з одного боку, та нечіткими множинами, ступінь належності яким описується такими лінгвістичними термінами, як *низький, середній, високий, дуже низький, не низький і не високий* і т.д. — з другого.

Отже, припустимо, що A — нечітка підмножина універсальної множини U , а значеннями функції належності можуть бути нечіткі підмножини проміжку $[0, 1]$. Щоб відрізнити такі нечіткі підмножини множини від нечітких підмножин, розглянутих раніше, називатимемо їх нечіткими множинами типу 2, а нечіткі множини, функції належності яких є відображеннями $f: U \rightarrow [0, 1]$ — нечіткими множинами типу 1. Введемо більш загальне

Означення 3.1 Нечітка множина є множиною типу n , $n=2, 3, \dots$, якщо значеннями її функції належності є нечіткі множини типу $n-1$. Функція належності нечіткої множини типу 1 приймає значення з проміжку $[0, 1]$.

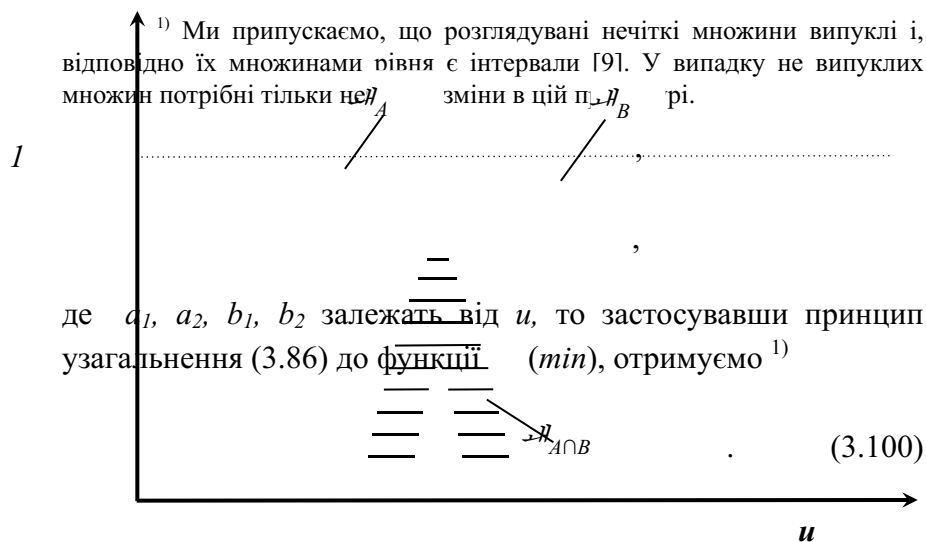
Щоб визначити такі операції, як доповнення, об'єднання, переріз і т.д. для нечітких множин типу 2,

природно використати принцип узагальнення. Для зручності виконаємо це в два етапи: спочатку узагальнимо відповідні означення для множин типу 1 на нечіткі множини з функціями належності, значеннями яких є проміжки, а потім, використовуючи принцип узагальнення в формі множин рівня (3.86), перейдемо від проміжків до нечітких множин ¹⁾.

Нижче цей метод ілюструється на прикладі узагальнення на нечіткі множини типу 2 поняття перерізу, яке визначено вище (див.(3.35)) для нечітких множин типу 1.

Вихідною точкою є вираз для функції належності перетину A та B , де A та B — нечіткі підмножини типу 1 множини U ,

Якщо a_1, a_2 та b_1, b_2 — проміжки в U , а не точки в U , тобто якщо для фіксованого u



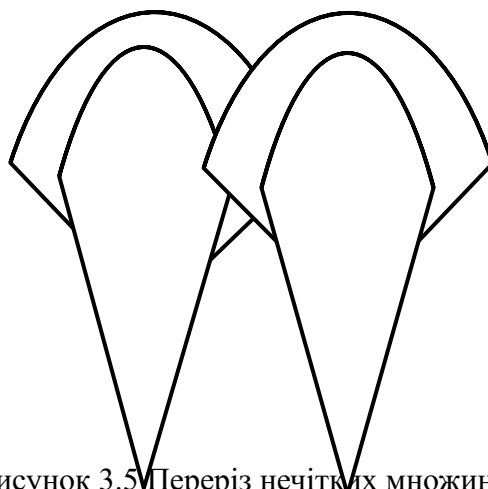
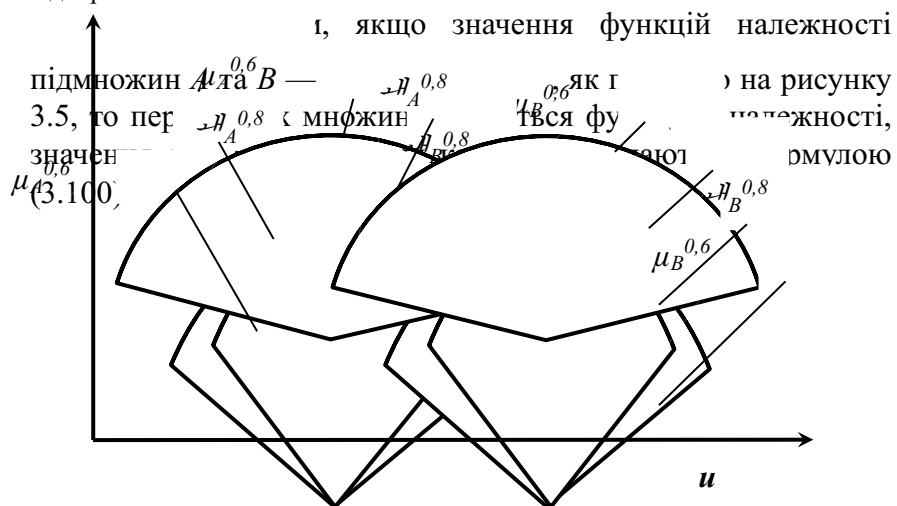


Рисунок 3.5 Переріз нечітких множин, значеннями функцій належності яких є проміжки

¹⁾ Рівність (3.100) можна отримати, використовуючи принцип узагальнення і в формі (3.90), якщо розглядати функцію $\mu_{A \cap B}(u)$ як відображення



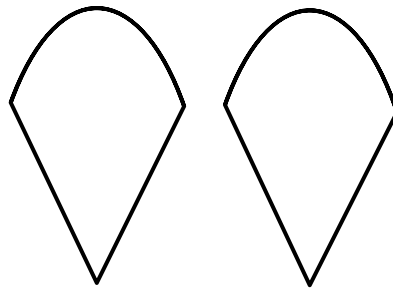


Рисунок 3.6 Множини рівня нечітких функцій належності μ_A та μ_B

Розглянемо тепер випадок, коли для кожного u множини U та V — нечіткі підмножини проміжку $[0, 1]$. Для простоти припустимо, що ці підмножини **випуклі**, тобто множини рівня — проміжки. Іншими словами, припускатимемо, що для кожного u множини U рівня нечітких підмножин A та B описуються функціями належності $\mu_A(u)$ та $\mu_B(u)$, значеннями яких є проміжки (див. рисунок 3.6) ¹⁾.

¹⁾ точне означення функцій μ_A та μ_B наведено нижче (див. (3.101) та (3.102))

Застосовуючи принцип узагальнення в формі (3.86) до множин A та B рівня нечітких підмножин A та B , прийдемо до наступного означення перерізу нечітких множин типу 2.

Означення 3.2 Нехай A та B — нечіткі підмножини типу 2 множини U , такі, що для кожного $u \in U$ множини U та V — випуклі нечіткі підмножини типу 1 проміжку $[0, 1]$, тобто для кожного $u \in U$ множини U рівня нечітких функцій належності $\mu_A(u)$ та $\mu_B(u)$ описуються

функціями належності та , значеннями яких є проміжки.

Позначимо множину рівня нечіткої функції належності перерізу A та B через , причому множини рівня та визначаються для кожного u наступним чином

$$(3.101)$$

$$(3.102)$$

де означає ступінь належності точки нечіткій множині (). Тоді для кожного u маємо

$$(3.103)$$

Іншими словами, множина рівня нечіткої функції належності перерізу A та B є мінімум (в розумінні означення (3.100)) множин рівня нечіткої функції належності підмножин A та B . Використовуючи розклад (3.28), можна виразити у вигляді

$$(3.104)$$

Розглянемо випадок, коли носії нечітких множин , — скінченні множини, тобто та можна представити у вигляді

$$(3.105)$$

$$(3.106)$$

Тут та — ступені належності та множинам

та відповідно. Застосовуючи принцип узагальнення в формі (3.96) до операції $(\min)$, отримаємо потрібний вираз для $\mu_{A \cap B}(u)$ ¹⁾.

$$\mu_{A \cap B}(u) = \min(\mu_A(u), \mu_B(u)) \quad (3.107)$$

Приклад 3.13 Проілюструємо рівність (3.104), припустивши, що в точці u ступені належності u множинам A та B позначаються як *високий* та *середній* відповідно, причому терміни *високий* та *середній* визначаються як нечіткі підмножини множини виразами

$$\mu_A(u) = \begin{cases} 1 & \text{якщо } u \text{ високий} \\ 0 & \text{інакше} \end{cases} \quad (3.108)$$

$$\mu_B(u) = \begin{cases} 1 & \text{якщо } u \text{ середній} \\ 0 & \text{інакше} \end{cases} \quad (3.109)$$

Множини рівня нечітких підмножин *високий* та *середній* виражаються наступним чином

,

¹⁾ Цей вираз можна вивести також із (3.90)

,

,

,

,

отже, множини рівня перерізу A та B мають вигляд

(3.110)

(3.111)

(3.112)

Комбінуючи (3.110), (3.111) та (3.112), отримуємо вираз для нечіткої множини, яка описує ступінь належності точки u перерізу підмножин A та B

(3.113)

що еквівалентно твердженню

(3.114)

Цей самий результат можна отримати коротшим способом, використовуючи рівність (3.107)

(3.115)

Аналогічно можна узагальнити на випадок нечітких множин типу 2 операції доповнення, об'єднання, концентрування і т.д. Це проведено в §6 при обговоренні нечіткої логіки, в якій значення істинності є лінгвістичним за своєю природою.

Зауваження 3.7 Результати, отримані в прикладі 3.13, можна розглядати як частковий випадок загального висновку, який можна отримати із (3.100), про узагальнення нерівності

на випадок нечітких підмножин числової осі. Зокрема, у випадку дійсних чисел a та b маємо

$$\mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = \mu_{A \cap B}(x). \quad (3.116)$$

На основі цієї еквівалентності, враховуючи вираз (3.100), отримуємо для проміжків

$$\mu_A(x) = \frac{x - a}{b - a} \quad \text{та} \quad \mu_B(x) = \frac{b - x}{b - a}. \quad (3.117)$$

Звідси, в свою чергу, випливає

Означення 3.3 Нехай A та B — випуклі нечіткі підмножини числової осі, і нехай μ_A та μ_B — множини рівня цих підмножин відповідно. Тоді узагальнення нерівності на випуклі нечіткі підмножини дійсних чисел виражається ¹⁾ у вигляді

$$\mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = \mu_{A \cap B}(x). \quad (3.118)$$

$$\mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = \mu_{A \cap B}(x), \quad \text{для всіх } x \in \mathbb{R}, \quad (3.119)$$

де множина $A \cap B$ виражається згідно (3.100).

У випадку, розглянутому в прикладі 3.13, легко перевірити, що

$$\mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = \mu_{A \cap B}(x) \quad \text{для всіх } x \in \mathbb{R}. \quad (3.120)$$

¹⁾ Легко перевірити, що відношення $\mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = \mu_{A \cap B}(x)$, визначене в (3.117), є частково впорядкованим.

в розумінні (3.119), звідки ми приходимо до виразу

,

який цілковито узгоджується з (3.114).

4 ПОНЯТТЯ НЕЧІТКОЇ ЗМІННОЇ

4.1 Означення, приклади

Тепер ми можемо узагальнити поняття, введені в §4 на так звані *нечіткі* змінні. Нам буде зручно формалізувати поняття нечіткої змінної аналогічно тому, як це було зроблено в означенні 2.1 поняття звичайної (не нечіткої) змінної.

Означення 4.1 *Нечітка змінна* характеризується трійкою $(X, U, R(X;u))$, де X — назва змінної, U — універсальна множина (скінченна або нескінченна), u — загальна назва елементів множини U , яка представляє собою нечітке **обмеження** на значення змінної, обумовлене X .

Як і у випадку звичайних (не нечітких) змінних, замість $R(X;u)$ писатимемо, як правило, скорочено $R(X)$, $R(u)$ або $R(x)$, де x — загальна назва значень змінної X та називатимемо $R(X;u)$ обмеженням на u або обмеженням, **обумовленим** X .

Необмежена звичайна (не нечітка) змінна u є для X **базовою змінною**.

Рівняння призначення для X має вигляд

(4.1)

і відображає те, що елементу x призначається значення u з врахуванням обмеження $R(X)$.

Той ступінь, з яким задовольняється ця рівність, називатимемо **сумісністю значення** u з $R(X)$ та позначатимемо $s(u)$. За означенням

(4.2)

де — ступінь належності u обмеженню $R(X)$.

Зауваження 4.1 Важливо відзначити, що сумісність значення u не те саме, що ймовірність значення U . Сумісність u з $R(X)$ — це тільки міра того, наскільки значення u задовольняє обмеженню $R(X)$; вона не має ніякого відношення до того, наскільки ймовірне чи неймовірне це значення.

Зауваження 4.2 Використовуючи аналогію зі саквоюжем (див. зауваження 2.1), нечітку змінну можна уподібнити до саквяжу з ярликом, який має м'які стінки. Тоді X — напис на ярлику (назва саквяжу), U — список предметів, які в принципі можна помістити в саквяж, а $R(X)$ — частина цього списку, в якій для кожного предмета u вказане число $c(u)$, що характеризує ступінь легкості, з якою предмет u можна помістити в саквяж X (рисунк 4.1).

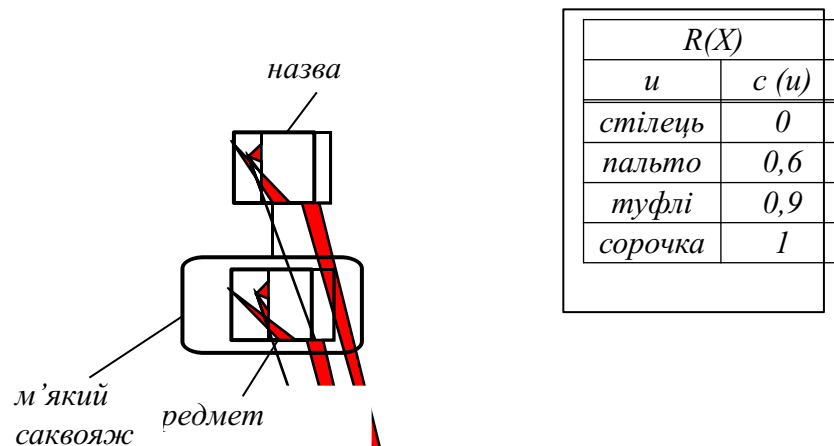


Рисунок 4.1 Аналогія зі саквяжем для унарної нечіткої змінної

Щоб спростити позначення, зручно використовувати один і той самий символ для X та x та зверитись на контекст для вирішення можливих невизначеностей. Наведемо це на прикладі.

Приклад 4.1 Розглянемо нечітку змінну, яка називається *бюджет*. Нехай x , а μ_x визначається наступним чином (див. рисунок 4.2)

$$\mu_x(x) = \begin{cases} 1 & \text{якщо } x \leq 1100 \\ 0 & \text{якщо } x > 1100 \end{cases} \quad (4.3)$$

Тоді в рівнянні призначення

$$\mu_x(x) = 1 \quad (4.4)$$

сумісність значення 1100 з обмеженням $\mu_x(x) \geq 0$ дорівнює 1. $\mu_x(x) = 1$ (4.5)

Як і у випадку звичайних (не нечітких) змінних, якщо $x_1, x_2, \dots, x_n$ — нечіткі змінні в U відповідно, а $\mu_{x_1}, \mu_{x_2}, \dots, \mu_{x_n}$ є n -арною складовою змінною в U . Відповідно до цього в n -арному рівнянні призначення вигляду

$$\mu_{x_1}(x_1) \wedge \mu_{x_2}(x_2) \wedge \dots \wedge \mu_{x_n}(x_n) = \mu_y(y) \quad (4.6)$$

— загальна назва значень змінної X_i , а u_i — загальна назва елементів множини U_i ;

— n -арне нечітке відношення в U , яке представляє собою обмеження, обумовлене змінною y .

Сумісність з визначається так

$$\mu_R(u) = \begin{cases} 1 & \text{if } u \leq 1000 \\ 0.8 & \text{if } 1000 < u < 1100 \\ 0 & \text{if } u \geq 1100 \end{cases} \quad (4.7)$$

де $\mu_R(u)$ — функція належності обмеження

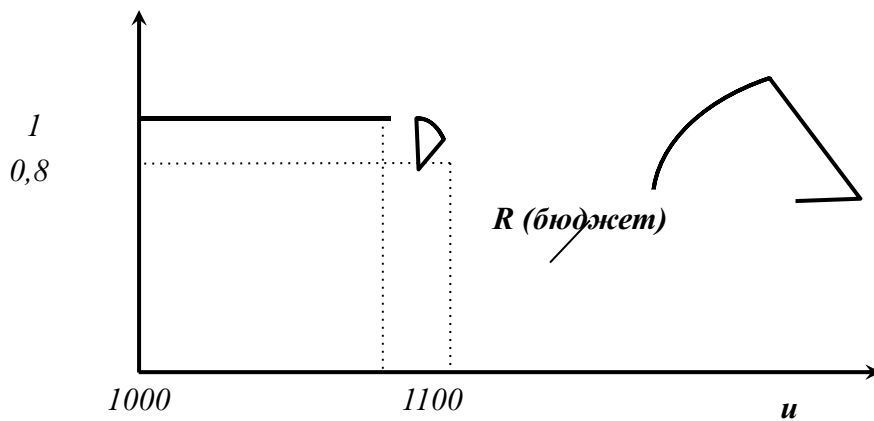


Рисунок 4.2 Функція сумісності нечіткої змінної *бюджет*

Приклад 4.2 Припустимо, що $\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \leq 1000 \\ 0.8 & \text{if } 1000 < x < 1100 \\ 0 & \text{if } x \geq 1100 \end{cases}$,

обмеження на u має вигляд

$$u \leq 1000 + 0.8(u - 1000) \quad (4.8)$$

Тоді сумісність значення u в рівнянні призначення

$$\mu_R(u) = \begin{cases} 1 & \text{if } u \leq 1000 \\ 0.8 & \text{if } 1000 < u < 1100 \\ 0 & \text{if } u \geq 1100 \end{cases} \quad (4.9)$$

дорівнює

$$\mu_R(u) = \begin{cases} 1 & \text{if } u \leq 1000 \\ 0.8 & \text{if } 1000 < u < 1100 \\ 0 & \text{if } u \geq 1100 \end{cases} \quad (4.10)$$

Зауваження 4.3 В аналогії зі саквоюжем (див. зауваження 4.2) n -арну складову нечітку змінну можна уподібнити м'якому саквоюжу X , який має n відділень. Функція сумісності характеризує ступінь легкості, з якою предмети можна помістити у відповідні відділення одночасно (рисунок 4.3).

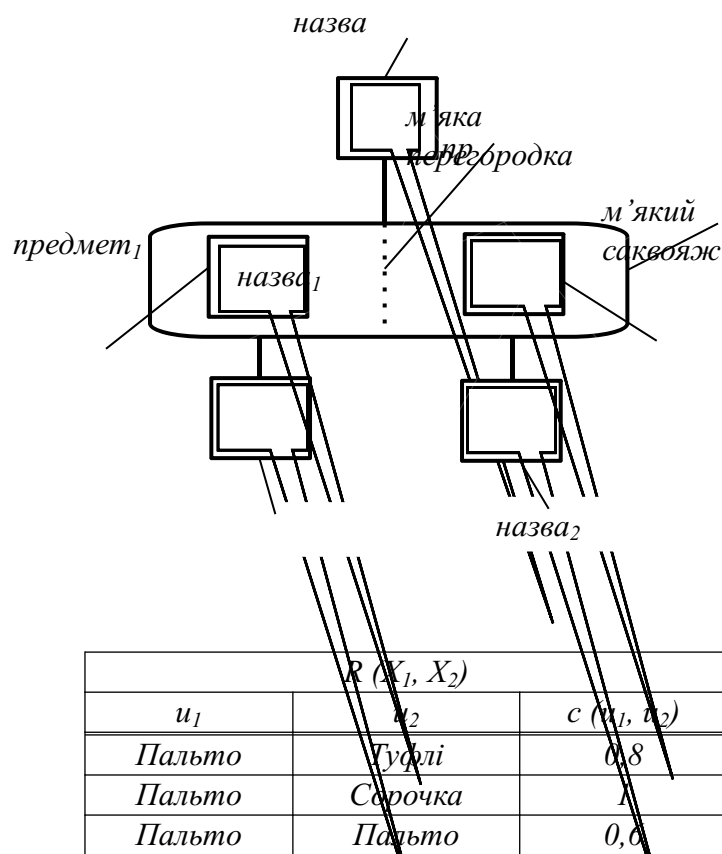


Рисунок 4.3 Аналогія зі саквоюжем для бінарної нечіткої змінної

Основне питання, яке виникає при розгляді n -арного

рівняння призначення, пов'язане з розкладом цього рівняння на послідовність n унарних рівнянь призначення, як в (2.21). У випадку нечітких змінних процес розкладу дещо складніший, і ми займемось ним після того, як визначимо маргінальні та умовні обмеження.

4.2 Маргінальні та умовні обмеження

В §2 поняття маргінального та умовного обмежень були спеціально визначені таким чином, щоб їх можна було узагальнити на випадок нечітких обмежень. Завдяки цьому в більш загальному випадку нечітких змінних ці поняття можна сформулювати майже так, як це було зроблено в §2.

Зауваження 4.4 Як ми уже бачили в наших попередніх обмірковуваннях понять маргінального та умовного обмежень з метою спрощення зручно користуватись наступним позначеннями.

Нехай

(4.11)

— впорядкована підпослідовність послідовності індексів

. Наприклад, при . Впорядковане доповнення підпослідовності позначатимемо

(4.12)

Наприклад, для при матимемо

.

Набір k змінних μ_k позначається через μ_k ,
 μ_k і аналогічно μ_k , (4.13)

(4.14)

Якщо $k=n$, то писатимемо просто

. (4.15)

Надалі ці позначення застосовуються без спеціальних позначень.

Означення 4.2 n -арне обмеження μ_k в μ_k індукує k -арне маргінальне обмеження μ_k , яке визначається як проекція μ_k на μ_k . Використовуючи означення проекції (див.(3.57)) та використовуючи позначення, введені в зауваженні 4.7, функцію належності маргінального обмеження можна записати у вигляді

. (4.16)

Приклад 4.3 Для нечіткої бінарної змінної, визначеної в прикладі 4.2, отримуємо

,

,

.

Приклад 4.4 Припустимо, що

$$\begin{aligned} & \text{причому} \quad \text{— тернарне нечітке відношення в} \\ & \quad \quad \quad (4.17) \end{aligned}$$

Застосовуючи (4.16) до (4.17), отримуємо

$$(4.18)$$

$$(4.19)$$

Означення 4.3 Нехай обмеження на

, і — деякі значення змінних відповідно. Якщо в функції належності обмеження значення змінних взяти рівними, то результуюча функція аргументів, де послідовність індексів є доповненням послідовності, яка визначається як функція *належності умовного обмеження*, або скорочено. Таким чином,

або скорочено

(4.20)

Простота зв'язку між умовним та безумовним обмеженням стає більш ясною, якщо записувати без верхнього індексу. При цьому вираз (4.20) набуде вигляду

або скорочено

(4.21)

Зауваження 4.5 В деяких випадках краще використовувати інше позначення для умовних обмежень.

Наприклад, якщо , то, можливо, простіше писати замість . Це особливо суттєво, коли в якості аргументів з верхніми індексами використовуються числові значення, наприклад, 5 та 2 замість та . В таких випадках, щоб уникнути різночитань, доводиться писати більш детально

або простіше .

Приклад 4.5 В прикладі 4.4 маємо

$$, \quad (4.22)$$

,

а використовуючи (4.16), отримуємо

,

$$, \quad (4.23)$$

.

Відзначимо, що зі значень маргінального та умовного обмежень випливає

Теорема 4.1 Нехай — маргінальне обмеження, індуковане обмеженням , і нехай або, простіше, — умовне обмеження при фіксованих , де та — взаємно доповняльні послідовності індексів. Тоді з (4.16), (4.20) та з означення об'єднання (див.(3.34)) випливає, що

$$, \quad (4.24)$$

де символ означає об'єднання (а не арифметичну суму) по значеннях .

Приклад 4.6 Приймаючи до уваги приклади 4.4. та 4.5, легко переконатись, що

4.3 Сепарабельність та невзаємодіючі змінні

Означення 4.4 n -арне обмеження сепарабельне тоді і тільки тоді, коли його можна зобразити у вигляді декартового добутку унарних обмежень

$$, \quad (4.25)$$

або, що те саме, як переріз циліндричних продовжень (див.(3.62))

$$. \quad (4.26)$$

Слід відзначити, що якщо — нормальне, то нормальні і відповідні маргінальні обмеження (див. теорему 3.3). Звідси випливає, що множини у виразі (4.25) — маргінальні обмеження, індуковані обмеженням . Дійсно, із (4.25) випливає, що

$$(4.27)$$

Тому, використовуючи (3.57), отримуємо

$$. \quad (4.28)$$

Надалі, якщо не обумовлено протилежне, вважатимемо, що обмеження нормальне.

Приклад 4.7 Матрицю відношення обмеження, наведену нижче, можна зобразити як максмінний добуток вектор-стовпця (унарне відношення) та вектор-рідка (унарне відношення). Звідси випливає, що обмеження, про яке йде мова, сепарабельне.

Приклад 4.8 Обмеження, визначені в прикладах 4.2 та 4.4, не сепарабельні.

Прямим наслідком сепарабельності є

Теорема 4.2 Якщо сепарабельне, то сепарабельне і будь-яке маргінальне обмеження, індуковане обмеженням .

Наслідком співвідношення (4.25) є також

Теорема 4.3 Сепарабельне обмеження є найбільшим ¹⁾ із обмежень, яким відповідають маргінальні обмеження .

Поняття сепарабельності тісно пов'язане з поняттям *невзаємодії* нечітких змінних.

Означення 4.5 Нечіткі змінні називаються *невзаємодіючими* тоді і тільки тоді, коли відношення сепарабельне.

Нагадаємо, що звичайні (не нечіткі) змінні ми називали не взаємодіючими тому (див.(2.18)), що при виконанні рівності

(4.29)

n -арне рівняння призначення

(4.30)

можна подати у вигляді n унарних рівнянь призначення

(4.31)

Наведемо основний наслідок невзаємодії нечітких змінних, частковим випадком якого є розклад (2.19).

Теорема 4.4 Якщо нечіткі змінні невзаємодіючі, то n -арне рівняння призначення (4.30) можна подати у вигляді послідовності n унарних рівнянь призначення (4.31), маючи на увазі, що якщо — сумісність із

¹⁾ Найбільше по відношенню включення, якщо врахувати, що

— нечітка множина в .

, а — сумісність з , то

(4.32)

Доведення З означень сумісності, невзаємодії та сепарабельності отримуємо

. (4.33)

Теорема доведена.

Зауваження 4.6 Продовжуючи аналогію зі саквоюжем (див. зауваження 4.3), невзаємодіючі нечіткі змінні можна уподібнити n окремим м'яким саквояжам з ярликами. Обмеження, зв'язане з саквоюжем X_i , характеризується функцією сумісності. Тоді повна функція сумісності для саквояжів запишеться у вигляді (4.32) (рисунок 4.4).

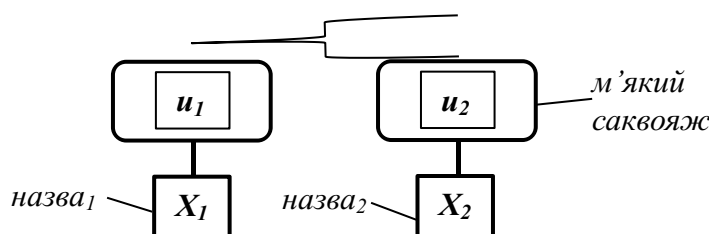


Рисунок 4.4 Аналогія зі саквоюжем для невзаємодіючих змінних

Зауваження 4.7 (див. означення 4.1). Невзаємодія змінних має на увазі відсутність будь-яких обмежень, в яких присутні всі величини, де u_i — базова змінні для X_i . Наприклад, якщо u_i зв'язані обмеженням

то — взаємодіючі змінні, тобто змінні, які не є невзаємодіючими (див. зауваження 3.5).

Якщо — взаємодіючі змінні, то, як і раніше, n -арне рівняння призначення можна подати у вигляді n унарних рівнянь призначення. Але в цьому випадку обмеження на u_i , як правило, залежить від значень змінних

. Тому n рівнянь призначення набувають наступного вигляду (див.(2.21)):

$$(4.34)$$

де — обмеження на u_i при фіксованих (див. означення 4.3).

Приклад 4.9 Розглянемо приклад 4.4 і підставимо . Тоді

$$, \quad (4.35)$$

так що

$$(4.36)$$

Як і у випадку системи (4.31), справедливість системи (4.34) підтверджує

Теорема 4.5 Якщо — взаємодіючі нечіткі змінні при обмеженні , а —

сумісність u_i з умовним обмеженням в (4.34),
то

$$(4.37)$$

де — сумісність з .
Доведення За означенням умовного обмеження (див.
(4.20)) маємо для всіх

$$(4.38)$$

З іншого боку, з означення маргінального обмеження
(див.(4.16)) випливає, що для всіх i та
всіх виконується

$$, \quad (4.39)$$

звідки випливає, що

$$(4.40)$$

Об'єднуючи (4.40) з означенням

$$, \quad (4.41)$$

отримуємо

$$(4.42)$$

Теорема доведена.

На цьому ми завершуємо обговорення деяких
властивостей нечітких змінних, які
мають відношення до поняття

лінгвістичної змінної. В наступному параграфі ми сформулюємо поняття лінгвістичної змінної та розглянемо деякі її властивості.

5 Поняття лінгвістичної змінної

5.1 Означення, приклади

При неформальному обговоренні поняття лінгвістичної змінної в §1 ми сформулювали, що лінгвістична змінна відрізняється від числової змінної тим, що її значеннями є не числа, а слова або речення на природній або формальній мові. Оскільки слова взагалі-то менш точні, ніж числа, то поняття лінгвістичної змінної дає можливість наближено описувати явища, які настільки складні, що не піддаються опису в загальноприйнятих кількісних термінах. Зокрема, нечітку множину, яка представляє собою обмеження, пов'язане зі значеннями нечіткої змінної, можна розглядати як сукупну характеристику різних підкласів елементів універсальної множини. В цьому розумінні роль нечітких множин аналогічна тій ролі, яку виконують слова та речення в звичайній мові. Наприклад, прикметник *гарний* відображає комплекс характеристик зовнішності індивідуума. Цей прикметник можна також розглядати як назву нечіткої множини, яка являє собою обмеження, обумовлене нечіткою змінною *гарний*. З цієї точки зору терміни *дуже гарний*, *негарний*, *надзвичайно гарний*, *цілком гарний* і т.д. — назви нечітких множин, утворених шляхом дії модифікаторів *дуже*, *не*, *надзвичайно*, *цілком* і т.д. на нечітку множину *гарний*. По суті, ці нечіткі множини разом з нечіткою множиною *гарний* виконують роль значень лінгвістичної змінної *Зовнішність*.

Важливим аспектом поняття лінгвістичної змінної є те, що ця змінна вищого порядку, ніж нечітка змінна, в тому розумінні, що значеннями лінгвістичної змінної є нечіткі змінні. Наприклад, значеннями лінгвістичної змінної *Вік* можуть бути: *молодий*, *немолодий*, *старий*, *дуже старий*, *не молодий і не старий*, *цілком старий* і т.д. Кожне з цих значень є назвою нечіткої змінної. Якщо *X* — назва нечіткої змінної, то обмеження, обумовлене цією назвою, можна трактувати як зміст такої змінної *X*. Наприклад, якщо обмеження, обумовлене змінною *старий*, являє собою нечітку підмножину множини

вигляду

, (5.1)

то нечітку множину можна вважати змістом нечіткої змінної *старий* (рисунок 5.1).

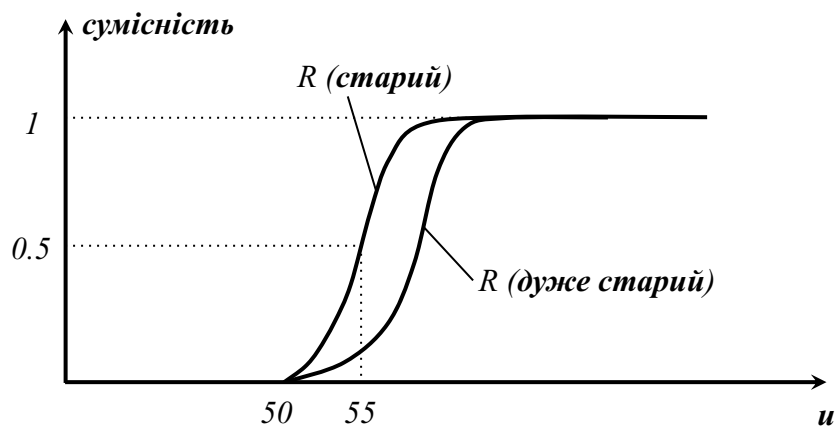


Рисунок 5.1 Функція сумісності для значень *старий* та *дуже старий*

Інший важливий аспект поняття лінгвістичної змінної полягає в тому, що лінгвістичній змінній відповідають два правила:

- 1) *синтаксичне правило*, яке може бути задане в формі граматики, що породжує назву значень змінної;
- 2) *семантичне правило*, яке визначає алгоритмічну процедуру для обчислення змісту кожного значення.

Ці правила складають істотну частину назви *структури* лінгвістичної змінної ¹⁾.

¹⁾ В першу чергу саме семантичне правило відрізняє лінгвістичну змінну від більш поширеного поняття синтаксичної змінної.

Оскільки лінгвістична змінна — змінна більш високого порядку, ніж нечітка змінна, то її опис повинен бути складнішим за наведений в означенні 4.1 опис нечіткої змінної.

Означення 5.1 Лінгвістична змінна характеризується набором $(X, T(X), U, G, M)$, в якому X — назва змінної; $T(X)$ (або просто T) означає терм-множину змінної X , тобто множину назв *лінгвістичних значень* змінної X , причому кожне з таких значень, причому кожне з таких значень є нечіткою змінною X зі значеннями з універсальної множини U з базовою змінною u ; G — *синтаксичне правило* (яке має зазвичай форму граматики), що породжує назви X значень змінної X , а M — *семантичне правило*, яке ставить у відповідність кожній нечіткій змінній зміст $M(X)$, тобто нечітку підмножину $M(X)$ універсальної множини U . Конкретна назва X , породжена синтаксичним правилом G , називається *термом*. Терм, який складається з одного слова або декількох слів, що завжди фігурують разом, називається *атомарним термом*. Терм, який складається з одного або більше атомарних термів, називається *складеним термом*. Конкатенація деяких компонент складеного терму ¹⁾ є *підтермом*. Якщо $X_1, X_2, \dots$ — терми, то T можна подати у вигляді об'єднання

$$\dots \quad (5.2)$$

При необхідності явно вказувати на те, що T був породжений граматикою G , писатимемо $T(G)$.

Зміст $M(X)$ терму X визначається як обмеження $R(X)$ на базову змінну u , обумовлене нечіткою змінною X

$$\dots \quad (5.3)$$

¹⁾ Тобто результат приписування один до другого ланцюгів — компонент складового терму.

маючи на увазі, що $R(X)$ і, отже, $M(x)$ можна розглядати як нечітку підмножину множини U , яка має назву X . Зв'язок між X , її лінгвістичним значенням та базовою змінною ілюструється рисунком 1.3.

Зауваження 5.1 Для того, щоб уникнути великої кількості символів, доцільно присвоювати кілька значень деяким символам, які зустрічаються в означенні, покладаючись при цьому на контекст для розв'язання можливих невизначеностей. Зокрема:

- а) символ X ми часто використовуватимемо для позначення як назви самої змінної, так і загальної назви значень. Аналогічно, X означатиме як загальну назву значень змінної, так і назву самої змінної;
- б) користуватимемося одним і тим же символом для позначення множини та його назви. Наприклад, символи X , $M(X)$ та $R(X)$ будуть взаємозамінюючими, хоча, строго кажучи, X — назва $M(X)$ (або $R(X)$) не те саме, що нечітка множина $M(X)$. Іншими словами, коли ми кажемо, що терм T (наприклад, *молодий*) є значення змінної X (наприклад, **Вік**), то маємо на увазі, що дійсне значення $M(X)$, а X — просто назва цього значення.

Приклад 5.1 Розглянемо лінгвістичну змінну **Вік**,

тобто $X = \mathbf{Вік}$, і нехай . Лінгвістичним значенням змінної **Вік** може бути, наприклад, *старий*, причому значення *старий* є атомарним термом. Іншим значенням може бути *дуже старий*, тобто складений терм, в якому *старий* — атомарний терм, а *дуже* та *старий* — підтерми.

Значення *більш-менш молодий* змінної **Вік** — складений терм, в якому терм *молодий* — атомарний, а *більш-менш* — підтерм. Терм-множину змінної **Вік** можна записати наступним чином

$$\begin{aligned} T(\mathbf{Вік}) = & \text{старий} + \text{дуже старий} + \text{не старий} + \\ & + \text{більш-менш молодий} + \text{цілком молодий} + \\ & + \text{не дуже старий} + \text{не дуже молодий} + \dots \end{aligned} \quad (5.4)$$

Тут кожний терм є назвою нечіткої змінної в універсальній множині U . Обмеження, обумовлене термом, наприклад $R(\text{старий})$, є змістом лінгвістичного значення *старий*. Таким чином, якщо $R(\text{старий})$ визначається згідно (5.1), то зміст лінгвістичного значення *старий* визначається виразом

$$R(\text{старий}) = \{x \in U \mid \text{старий}(x) = 1\}, \quad (5.5)$$

або простіше (див. зауваження 5.1)

$$R(\text{старий}) = \{x \in U \mid \text{старий}(x) = 1\}. \quad (5.6)$$

Аналогічним чином зміст такого лінгвістичного значення, як *дуже старий*, можна виразити так (див. рисунок 5.1)

$$(5.7)$$

Рівняння призначення у випадку лінгвістичної змінної набуває вигляду

$$(5.8)$$

звідки випливає, що зміст, призначений термові X , виражається рівністю

$$M(X) = \{x \in U \mid \text{старий}(x) = 1\}. \quad (5.9)$$

Іншими словами, зміст терму X отримується шляхом застосування семантичного правила M до значення терму X , призначеному згідно правої частини рівняння (5.8). Більше того, з означення 5.1 (рівність 5.3) випливає, що $M(X)$ ідентична обмеженню, обумовленому термом X .

Зауваження 5.2 Відповідно до зауваження 5.1 рівняння призначення зазвичай записуватиметься у вигляді

$$, \quad (5.10)$$

а не в формі (5.8). Наприклад, якщо $X = \mathbf{Вік}$, а *старий* — терм в $T(X)$, то ми запишемо

$$\mathbf{Вік} = \textit{старий}, \quad (5.11)$$

Розуміючи це так, що *старий* — обмеження на значення базової змінної u , яке визначається (5.1) — призначається лінгвістичною змінною $\mathbf{Вік}$. Важливо відзначити, що знак рівності в (5.10) не означає симетричне відношення, як у випадку арифметичної рівності. Наприклад, безглуздо записувати (5.11) у вигляді

$$\textit{старий} = \mathbf{Вік}.$$

Щоб проілюструвати поняття лінгвістичної змінної, розглянемо спочатку простий приклад, в якому $T(X)$ містить тільки невелику кількість термів, а синтаксичне та семантичне правила тривіальні.

Приклад 5.2 Розглянемо лінгвістичну змінну $\mathbf{Число}$, скінченна терм-множина якої має вигляд

$$T(\mathbf{Число}) = \textit{небагато} + \textit{декілька} + \textit{багато}, \quad (5.12)$$

де кожний терм являє собою обмеження на значення базової змінної u в універсальній множині

$$. \quad (5.13)$$

Припускається, що ці обмеження — нечіткі підмножини множини U і визначаються вони наступним чином

$$, \quad (5.14)$$

$$, \quad (5.15)$$

$$. \quad (5.16)$$

Таким чином,

(5.17)

і аналогічно для інших термів. Зміст рівності (5.17) полягає в тому, що **небагато** є назвою нечіткої змінної, яка є значенням лінгвістичної змінної **Число**. Зміст лінгвістичного значення **небагато** або, що є те саме, обмеження, обумовлене цим термом, є нечітка підмножина універсальної змінної U і визначається правою частиною рівності (5.17).

Щоб призначити таке значення, як **небагато**, лінгвістичній змінній **Число**, ми запишемо

Число = **небагато**. (5.18)

Приклад 5.3 В даному випадку припускаємо, що маємо справу зі складеною лінгвістичною змінною ¹⁾ (X, Y) , якій покладена у відповідність базова змінна (u, v) , яка приймає значення із універсальної множини , де

(5.19)

(5.20)

причому . (5.21)

Крім того, ми припускаємо, що терм-множина змінної (X, Y) складається тільки з двох термів

$T = \text{приблизно рівні} + \text{більш-менш рівні}$, (5.22)

де **приблизно рівні** та **більш-менш рівні** — назви бінарних нечітких відношень, визначених матрицями

$$, \quad (5.23)$$

¹⁾ Детальніше складені лінгвістичні змінні розглядаються в §6 в зв'язку з лінгвістичними змінними істинності

$$. \quad (5.24)$$

В цих матрицях відношення $\sim$ -ий елемент є значення сумісності пари (X, Y) з розглядуваним обмеженням. Наприклад, елемент 0.6 в матриці *приблизно рівні*, який дорівнює 0.6 , є значенням сумісності впорядкованої пари (X, Y) з бінарним відношенням *приблизно рівні*.

Щоб призначити значення, наприклад, *приблизно рівні* лінгвістичній змінній (X, Y) , ми запишемо

$$(X, Y) = \text{приблизно рівні}, \quad (5.25)$$

де, як і в (5.18), мається на увазі, що в якості значення змінної (X, Y) призначається бінарне нечітке відношення *приблизно рівні*, яке є бінарним обмеженням на значення базової змінної в універсальній множині (5.20).

Зауваження 5.3 Використовуючи аналогію зі саквоюжем (див. зауваження 4.2), лінгвістичну змінну в розумінні означення 5.1 можна уподібнити жорсткому саквоюжу, в який можна уміщати м'які саквоюжі, як показано на рисунку 5.2. М'який саквоюж відповідає нечіткій змінній, яка є лінгвістичним значенням змінної X , а X виконує роль ярлика на м'якому саквоюжі.

5.2 Структуровані лінгвістичні змінні

В розглянутих вище прикладах терм-множина складалась тільки з невеликої кількості термів, так що доцільніше було просто перерахувати елементи терм-множини $T(X)$ і встановити пряму відповідність між кожним елементом та його змістом. В більш загальному випадку, однак, кількість елементів в $T(X)$ може бути нескінченною; і тоді як для породження елементів множини $T(X)$, так і для обчислення їх змісту необхідно застосовувати алгоритм, а не просто процедуру перегляду елементів терм-множини.

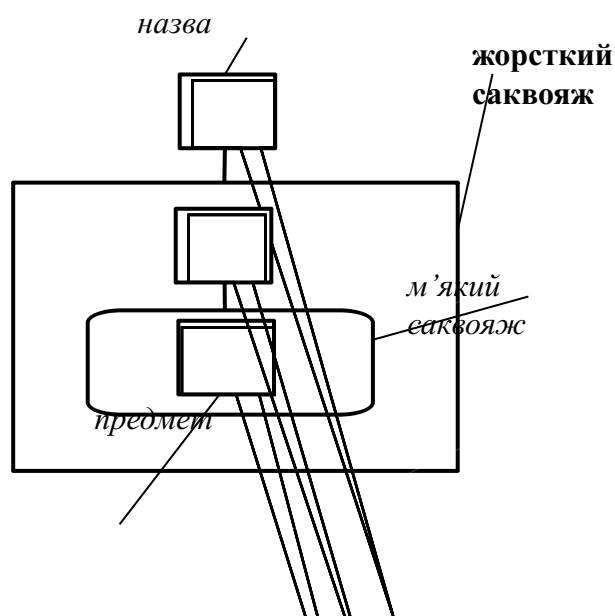


Рисунок 5.2 Аналогія зі саквояжем для лінгвістичної змінної

Говоритимемо, що лінгвістична змінна X структурована, якщо її терм-множину $T(X)$ і функцію M , яка ставить у відповідність кожному елементу терм-множини його зміст, можна задати алгоритмічно. Із цих міркувань синтаксичне та семантичне правила, зв'язані зі структурованою лінгвістичною змінною, можна розглядати як

алгоритмічні процедури для породження елементів множини $T(X)$ і обчислення змісту кожного терму в $T(X)$ відповідно. Надалі, якщо не обумовлено протилежне, вважатимемо, що розглядувані лінгвістичні змінні є структурованими.

Приклад 5.4 В якості дуже простої ілюстрації тієї ролі, яку виконують синтаксичне і семантичне правила у випадку структурованої лінгвістичної змінної, розглянемо змінну **Вік**, елементами терм-множини якої є терми типу *старий*, *дуже старий*, *дуже дуже старий*, *дуже дуже дуже старий* і т.д. таким чином, терм-множину змінної **Вік** можна записати у вигляді

$$T(\mathbf{Вік}) = \text{старий} + \text{дуже старий} + \text{дуже дуже старий} + \text{дуже дуже дуже старий} + \dots \quad (5.26)$$

В цьому простому випадку легко перевірити, що кожний терм множини $T(\mathbf{Вік})$ має вигляд *старий* або *дуже дуже ... дуже старий*. Щоб вивести це правило в більш загальному вигляді, поступимо наступним чином.

Нехай x означає конкатенацію символічних ланцюгів x та y , наприклад $x = \text{дуже}$, $y = \text{старий}$, $xy = \text{дуже старий}$. Якщо A та B — множини ланцюгів, наприклад

$$A = \text{старий}, \quad B = \text{дуже старий} \quad (5.27)$$

$$A = \text{дуже старий}, \quad B = \text{дуже дуже старий} \quad (5.28)$$

де x_i та y_j — символічні ланцюги, то конкатенація A та B позначається AB і визначається як множина ланцюгів виду

$$x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_n y_n \quad (5.29)$$

Наприклад, якщо $A = \text{дуже}$ і $B = \text{старий} + \text{дуже старий}$, то

$$\begin{aligned} \text{дуже (старий + дуже старий)} &= \\ &= \text{дуже старий} + \text{дуже дуже старий}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Використовуючи ці позначення, дане представлення для $T(\mathbf{Вік})$ можна розглядати як розв'язок рівняння¹⁾

$$T = \text{старий} + \text{дуже } T, \quad (5.31)$$

яке означає, що множина T складається з терму *старий* і термів, що складається зі слова *дуже* і деякого терму із T .

Рівняння (5.31) можна розв'язувати ітеративним способом, використовуючи рекурентне співвідношення

(5.32)

¹⁾ Розв'язок рівняння (5.31) можна подати у вигляді представлення T адекватне представленню (5.34), де ϵ — нульовий ланцюг. Це і, взявши пусту множину ϵ в якості початкового значення

(5.33)

і розв'язок рівняння (5.31) має вигляд

(5.34)

Для розглядуваного прикладу синтаксичне правило виражається рівнянням (5.31) та його розв'язком (5.34). Еквівалентним чином синтаксичне правило можна охарактеризувати наступною системою підстановок:

, (5.35)

, (5.36)

для якої (5.31) виконує роль алгебраїчного представлення. В цьому випадку терм в T може бути породжений з допомогою стандартної процедури, яка включає в себе послідовне застосування правил (5.35) та (5.36), починаючи з символу T . Таким чином, якщо T замінити на *дуже*, і потім T в *дуже* T замінити на *старий*, ми отримуємо терм *дуже старий*. Аналогічно терм *дуже дуже дуже старий* можна отримати із T з допомогою наступного ланцюга підстановок:

(5.37)

Повертаючись до семантичного правила для змінної Вік, відзначимо, що для обчислення змісту такого терму, як *дуже ... дуже старий* потрібно знати зміст терму *старий* та модифікатора *дуже*. Терм *старий* виконує роль первинного терму, тобто терму, зміст якого повинен бути заданий заздалегідь для того, щоб можна було обчислювати зміст складених термів в T . Що стосується модифікатора *дуже*, то він діє як лінгвістична невизначеність, тобто модифікатор змісту наступного за ним терму. Якщо в якості дуже простого наближення ми припустимо, що модифікатор *дуже* діє як оператор концентрування (див.(3.40)), то

(5.38)

Отже, семантичне правило для змінної **Вік** можна записати у вигляді

, (5.39)

де n — кількість входжень слова *дуже* в терм *дуже... дуже старий*, — зміст терму *дуже... дуже старий*. Далі, якщо визначити первинний терм *старий* за формулою

то отримаємо (5.40)

(5.41)

Це рівняння виражає в явному вигляді семантичне правило для обчислення змісту складених термів, утворених за формулою (5.31), якщо відомі зміст первинного терму *старий* та зміст невизначеності *дуже*.

5.3 Булеві лінгвістичні змінні

Лінгвістична змінна, розглянута в прикладі 5.4, є частковим випадком того, що можна було б назвати *булевою лінгвістичною змінною*. Зазвичай такій змінній відповідає скінченна кількість первинних термів, скінченна кількість невизначеностей, сполучники *і* та *або* і заперечення *не*. Наприклад, терм-множина булевої змінної **Вік** може мати вигляд

$$\begin{aligned}
 T(\text{Вік}) = & \text{молодий} + \text{старий} + \text{не молодий} + \\
 & + \text{не старий} + \text{дуже молодий} + \text{дуже дуже молодий} + \\
 & + \text{не дуже молодий} + \text{не дуже старий} + \\
 & + \text{цілком молодий} + \text{більш-менш старий} + \\
 & + \text{надзвичайно старий} + \dots
 \end{aligned}
 \tag{5.42}$$

Більш формально булеву лінгвістичну змінну можна визначити наступним чином.

Означення 5.2 *Булевою лінгвістичною змінною* називається така лінгвістична змінна, терми X якої є булевими виразами в змінних виду X_P , hX_P , X або hX , де h — лінгвістична невизначеність, X_P — первинний терм та hX — назва нечіткої множини, яка є результатом дії h на X .

Наприклад, у випадку лінгвістичної змінної **Вік**, терм-

множина якої визначається співвідношенням (5.42), терм *не дуже молодий і не дуже старий* має вигляд (5.9), де

$$\text{та} \quad \text{. Аналогічно, у}$$

випадку терму *дуже дуже молодий*, та

Булеві лінгвістичні змінні особливо зручні, оскільки багато з досвіду в поводженні з булевими виразами можна перенести на змінні цього типу. Щоб проілюструвати це, розглянемо простий приклад, в якому приймають участь два первинних терми та одна невизначеність.

Приклад 5.5 Нехай **Вік** — булева лінгвістична змінна з терм-множиною виду

$$\begin{aligned} T(\text{Вік}) = & \text{молодий} + \text{не молодий} + \text{старий} + \\ & + \text{не старий} + \text{дуже молодий} + \text{не молодий} \\ & + \text{і не старий} + \text{молодий або старий} + \\ & + \text{молодий або (не дуже молодий і не} \\ & \text{дуже старий)} + \dots \end{aligned} \quad (5.43)$$

Якщо ототожнити сполучник *і* з операцією перерізу, *або* — з операцією об'єднання, заперечення *не* — з операцією взяття доповнення і модифікатор *дуже* — з операцією концентрування (див.(5.38)), то неважко виписати зміст типового значення змінної **Вік**. Наприклад

$$\begin{aligned} M(\text{не молодий}) &= \text{молодий}, \\ M(\text{не дуже молодий}) &= (\text{молодий}^2), \\ M(\text{не дуже молодий і не дуже старий}) &= \\ &= (\text{молодий}^2) \quad (\text{старий}^2), \\ M(\text{молодий або старий}) &= \text{молодий} \quad \text{старий}. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Ці рівняння виражають, по суті справи, зміст складеного терму як функцію змісту складових його первинних термів. Так, якщо терми *молодий* та *старий*

визначити у вигляді

$$, \quad (5.45)$$

то (див. рисунок 5.3)

$$, \quad (5.46)$$

$$(5.47)$$

Лінгвістична змінна, розглянута в цьому прикладі, включає в себе тільки один тип невизначеності, а саме невизначеність *дуже*. В загальному ж випадку булевій змінній може відповідати скінченна кількість невизначеностей, як, наприклад, в (5.42). Однак якщо операції, які відповідають лінгвістичним невизначеностям, визначені, то процедура обчислення змісту складеного терму залишається такою ж.

Питання про підхоже ставлення до тієї чи іншої невизначеності, наприклад, *більш-менш*, *цілком* або *суттєво* ні в якому випадку не є простим ¹⁾. В деяких контекстах дію невизначеності *більш-менш* можна наближено виразити наступним чином (див. (3.41))

$$. \quad (5.48)$$

Наприклад, якщо $X = \text{старий}$ і терм *старий* визначається виразом (5.46), то

$$. \quad (5.49)$$

В багатьох випадках, разом з тим, невизначеність *більш-менш* діє як оператор збільшення нечіткості, згідно

формули (3.48),

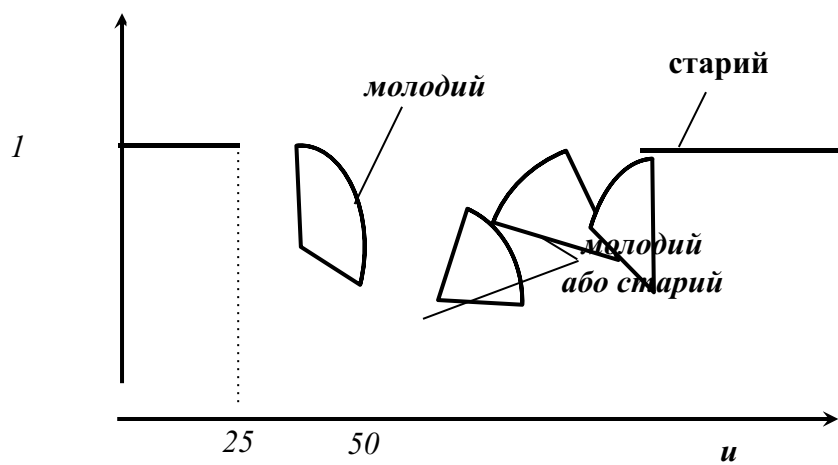


Рисунок 5.3 Функція сумісності для значення молодий або старий

¹⁾ Лінгвістичні невизначеності з точки зору теорії нечітких множин детальніше розглядаються в роботі [10].
а не як оператор розтягу. Припустимо для ілюстрації, що зміст первинного терму *недавно* визначається виразом

(5.50)

і що терм *більш-менш недавно* визначається як результат дії оператора збільшення нечіткості F на терм *недавно*, тобто

, (5.51)

де ядро K оператора F визначається наступним чином

,
, (5.52)

.

Підставивши значення K в (3.48), отримаємо зміст терму *більш-менш недавно*, тобто

(5.53)

З іншого боку, якщо припустити, що невизначеність *більш-менш* є оператором розтягу, то ми отримаємо

(5.54)

Таким чином, якщо б цей член виконував важливу роль в означенні терму *більш-менш* *недавно*, то наближення невизначеності *більш-менш* оператором розтягу не було б добрим.

Приклад 5.6 Можна перевірити, що терм-множина в прикладі 5.5 породжується контекстно-вільною граматикою G_1 , в якій нетермінальні символи (синтаксичні категорії) позначаються через $\langle \text{символ} \rangle$ тобто

тим часом, як множина термінальних символів (компоненти термів в T) виражається у вигляді

то система підстановок P має вигляд

108

Систему P можна подати і алгебраїчно у вигляді наступної системи рівнянь

$$\begin{aligned} & , \\ & , \\ & , \end{aligned} \quad (5.58)$$

Розв'язком цієї системи рівнянь відносно T є терм-множина T , яка описується виразом (5.43). Аналогічно, розв'язками системи (5.58) відносно Σ є множини термів, які складають синтаксичні категорії, що позначаються через Σ_i відповідно. Розв'язок системи (5.58) можна отримати ітеративно, як у випадку рівняння (5.31), використовуючи рекурентне співвідношення

$$\Sigma_i = \Sigma_{i-1} \cup \{ \text{терми} \} \quad (5.59)$$

та

де Σ — набір нетермінальних символів системи (5.58), f — відображення, яке визначається системою рівнянь (5.58), Σ_i — пуста множина, а Σ_{i-1} — i -та ітерація для Σ . Розв'язок системи (5.58), який являє собою нерухому точку відображення f , має вигляд Σ . Однак для всіх i виконується

$$\Sigma_i \subseteq \Sigma \quad (5.60)$$

тобто кожна компонента набору в лівій частині (5.60) є підмножиною відповідної компоненти в правій частині (5.60). Зміст виразу (5.60) полягає тоді в тому, що ітерація по i породжує все більше і більше термів в кожній із синтаксичних категорій Σ_i .

В більш загальноприйнятій процедурі терм t в T ,

наприклад, *не дуже молодий і не дуже старий* породжується граматикою G шляхом послідовних заміन (підстановок) з використанням системи P , причому кожний ланцюг підстановки починається з T і закінчується термом, породженим граматикою G . Наприклад, ланцюг підстановок для терму *не дуже молодий і не дуже старий* має вигляд (див. також приклад 5.5)

(5.61)

Цей ланцюг можна отримати, використовуючи синтаксичне дерево (рисунок 5.4), яке зображує структуру терму *не дуже молодий і не дуже старий* з використанням синтаксичних категорій . По суті, описана процедура породження термів в T граматикою G складає синтаксичне правило для змінної **Вік**.

Семантичне правило для змінної **Вік** індукується описаним вище синтаксичним правилом, в тому розумінні, що зміст терму в T частково визначається його синтаксичним деревом. Зокрема, кожному правилу підстановки в (5.57) ставиться у відповідність деяке відношення між нечіткими множинами, позначеними відповідними термінальними та нетермінальними символами. Результуюча двоїста система підстановок та зв'язаних з нею рівнянь має вигляд

, (5.62)

, (5.63)

, (5.64)

, (5.65)

, (5.66)

, (5.67)

, (5.68)

$$\cdot \quad (5.74)$$

відповідного алгоритму граматичного розбору для G , внаслідок чого отримуємо синтаксичне дерево того типу, що наведене на рисунку 5.5. Кінцевим вершинам цього синтаксичного дерева відповідають: 1) первинні терми, зміст яких визначається апіорі, 2) назви модифікаторів (тобто невизначеностей, сполучників, заперечень і т.д.) та 3) маркери, такі, як дужки, які полегшують граматичний розбір.

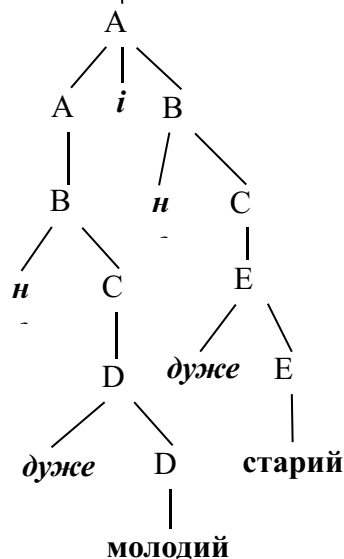


Рисунок 5.4 Синтаксичне дерево для значення **не дуже молодий і не дуже старий**

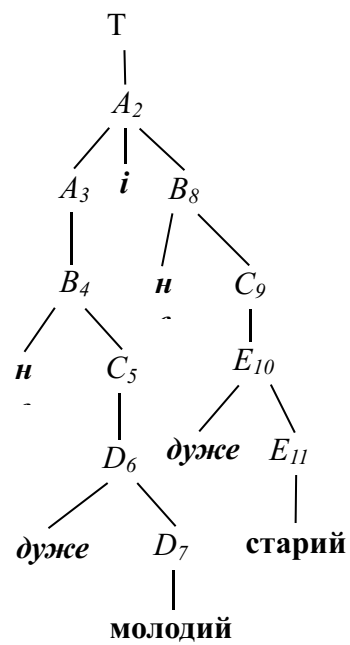


Рисунок 5.5 Обчислення змісту значення не дуже молодий і не дуже старий

2. Спочатку первинним термам, які відповідають кінцевим вершинам дерева (рисунок 5.4), призначається їх зміст, а потім з допомогою рівнянь (5.62) — (5.74) обчислюється зміст найближчих до них не термінальних символів. Після цього дерево урізають так, щоб обчислені термінальні символи виявились кінцевими вершинами піддерева, яке залишилось. Цей процес повторюється доти, поки не буде обчислений зміст терму, який відповідає кореню вихідного синтаксичного дерева.

Застосовуючи цю процедуру до синтаксичного дерева, наведеного на рисунку 5.5, ми спочатку приписуємо термам молодий і старий зміст, виражений формулами (5.45) та (5.46). Потім, використовуючи (5.73) та (5.74), знаходимо

та (5.75)

.

(5.76)

Далі, із (5.71) та (5.72) отримуємо

та (5.77)

$$\dots \quad (5.78)$$

Дотримуючись цієї процедури, отримуємо

$$\dots \quad (5.79)$$

$$\dots \quad (5.80)$$

$$\dots \quad (5.81)$$

$$\dots \quad (5.82)$$

$$\dots \quad (5.83)$$

$$\dots \quad (5.84)$$

і, отже

що узгоджується з раніше отриманим виразом (5.44).

Основне призначенні описаної вище процедури полягає в тому, щоб пов'язати зміст складеного терму зі змістом складових його первинних термів за допомогою системи рівнянь, яка визначається граматикою, що породжує терми в T . У випадку булевої лінгвістичної змінної прикладу 5.5 це зробити досить просто. В загальному випадку природа невизначеностей в лінгвістичній змінній та її граматика можуть бути такими, що обчислення змісту значень змінної виявиться далеко не простою проблемою.

5.4 Графічне зображення лінгвістичної змінної

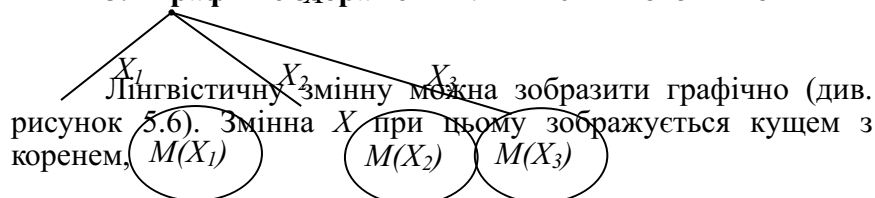


Рисунок 5.6 Зображення лінгвістичної змінної графічно

(див. рисунок 5.6), позначеним X , і ребрами, позначеними назвами значень змінної X , тобто $X_1, X_2, \dots$. Об'єкт, приписаний ребру X_i , є зміст значення X_i . Наприклад, у випадку змінної **Вік**, ребра можна позначити як *молодий*, *старий*, *дуже старий* і т.д., а зміст кожної такої назви можна зобразити у вигляді графіка функції належності нечіткої множини, яка є змістом цієї назви (рисунок 5.7). Важливо відзначити, що у випадку структурованої лінгвістичної змінної як назви ребер, так і назви приписаних до них об'єктів породжуються алгоритмічно синтаксичним та семантичним правилами, які відповідають цій змінній.

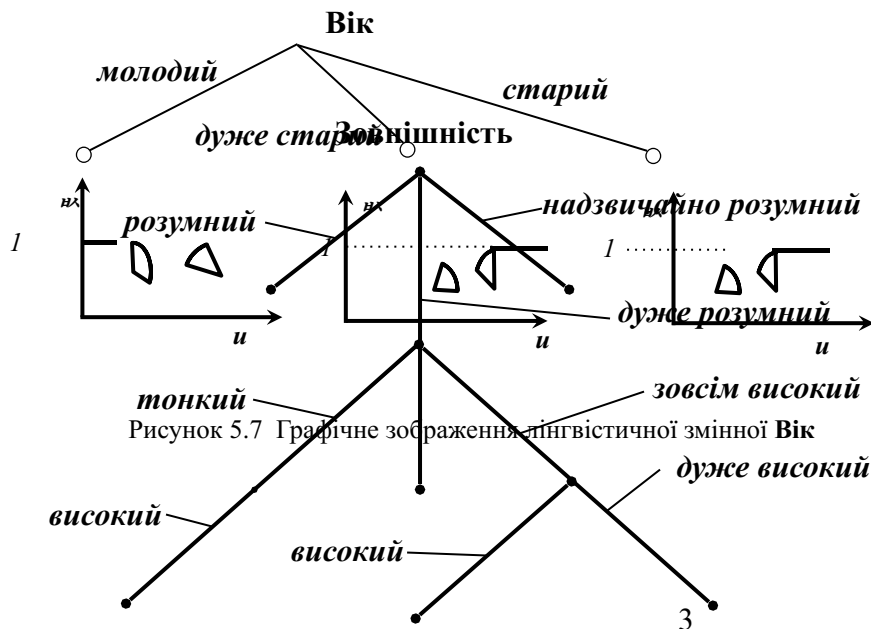


Рисунок 5.7 Графічне зображення лінгвістичної змінної Вік

Рисунок 5.8 Зображення лінгвістичної змінної **Зовнішність** з допомогою дерева

В більш загальному випадку граф лінгвістичної змінної може мати вигляд не окремого куща, а більш складного дерева (див. рисунок 5.8). При цьому назва значення змінної породжується шляхом послідовного приписування (конкатенації) назв ребер, що складають ланцюг, який з'єднує з коренем відповідну цьому значенню кінцеву вершину дерева.

Наприклад, для дерева, зображеного на рисунку 5.8, складеною назвою, яка відповідає ланцюгу від вузла 3 до кореня дерева, є **дуже високий, зовсім товстий, дуже розумний**.

Цим ми завершуємо обговорення основних аспектів поняття лінгвістичної змінної. В наступних параграфах ми концентруємо нашу увагу на деяких застосуваннях цього поняття.

6 Лінгвістичні змінні істинності та нечітка логіка

6.1 Основні поняття

В повсякденних розмовах ми часто характеризуємо ступінь істинності твердження за допомогою таких виразів, як *дуже вірно*, *цілковито вірно*, *більш-менш вірно*, *хибно*, *абсолютно хибно* і т.д. Схожість між цими виразами і значеннями лінгвістичної змінної наводить на думку про те, що в ситуаціях, коли істинність або хибність твердження визначені недостатньо добре, може виявитись доцільним трактувати **істинність** як лінгвістичну змінну, для якої **істинно** та **хибно** — тільки два первинних терми в терм-множині цієї змінної, а не пара крайніх точок в множині значень істинності. Таку змінну називатимемо *лінгвістичною змінною істинності*, а її значення — *лінгвістичним значеннями істинності*.

Трактування істинності як лінгвістичної змінної призводить до *нечіткої лінгвістичної логіки*, або просто до *нечіткої логіки*, яка зовсім відмінна від звичайної двозначної або навіть багатозначної логіки. Ця нечітка логіка є основою того, що можна було б назвати *наближеними міркуваннями*, тобто видом міркувань, в яких значення істинності і правила виведення є нечіткими, а не точними. Наближені міркування багато в чому подібні міркуванням, якими користуються люди в некоректно визначених або таких, що не піддаються кількісному опису, ситуаціях. Дійсно, цілком можливо, що багато, якщо не більшість людських міркувань за своєю природою наближені, а не точні.

Надалі користуватимемось терміном *висловлювання* для позначення тверджень виду: “ x є A ”, де x — назва предмету, а A — назва нечіткої підмножини універсальної множини U , наприклад, “*Микола — молодий*”, “*X — малий*”, “*яблуко — червоне*” і т.д. Якщо інтерпретувати X як нечіткий предикат, то твердження “ x є A ” можна перефразувати як “ x є A ”.

має властивість A ". Еквівалентне цьому висловлювання " $\mu_A(u)$ " можна інтерпретувати як рівняння призначення, в якому лінгвістичній змінній, що позначає яку-небудь властивість елемента u призначається в якості значення нечітка множини A , наприклад 1)

Микола — молодий $\neg$ **Вік** (*Микола*) = *молодий*;

X — малий $\neg$ **Величина** (X) = *малий*;

Яблуко — червоне $\neg$ **Колір** (*яблуко*) = *червоний*.

Припускаємо, що висловлюванню типу " $\mu_A(u)$ " відповідають дві нечіткі підмножини: 1) $M(A)$ — зміст A , тобто нечітка підмножина з назвою A універсальної множини U та 2) *значення істинності* твердження " $\mu_A(u)$ " або просто *значення істинності* A , яке позначається як μ_A і визначається як можливо нечітка підмножина універсальної множини значень істинності V . У випадку двозначної логіки

(μ_A істинно, μ_A хибно). Надалі, якщо не буде обумовлене протилежне, припускаємо, що $\mu_A \in [0, 1]$.

Значення істинності, яке є числом в $[0, 1]$, наприклад, μ_A , називатимемо *числовим значенням істинності*. Числові значення істинності виконують роль значень базової змінної для лінгвістичної змінної **Істинність**. Лінгвістичне значення змінної **Істинність** називатимемо *лінгвістичними значеннями істинності*. Більш точно припускаємо, що **Істинність** — назва булевої *лінгвістичної змінної*, для якої первинним є терм *істинний*, а терм *хибний* визначається не як заперечення терму *істинний*, а як його дзеркальне відображення відносно точки 0.5 в $[0, 1]$ 2).

¹⁾ Точніше, нечіткий предикат можна розглядати як еквівалент функції належності нечіткої множини. Щоб спростити термінологію, вважатимемо A та μ_A одним і тим самим нечітким предикатом.

²⁾ Як буде видно надалі (див. (6.11)), визначення значення *хибний*

як дзеркального відображення значення *істинний* є наслідком визначення значення *хибний* як значення істинності висловлювання *не А* при умові, що значення істинності висловлювання *А* є *істинний*.

Зазвичай припускаємо, що терм-множина змінної **Істинність** має вигляд

$$\begin{aligned}
 T(\text{Істинність}) = & \text{істинний} + \text{не істинний} + \\
 & + \text{дуже істинний} + \text{більш-менш істинний} + \\
 & + \text{дуже дуже істинний} + \text{суттєво істинний} + \\
 & + \text{дуже (не істинний)} + \text{не дуже істинний} + \dots + \\
 & + \text{хибний} + \text{не хибний} + \text{дуже хибний} + \dots + \\
 & + \text{не дуже істинний і не дуже хибний} + \dots, \quad (6.1)
 \end{aligned}$$

де терми є назвами значень істинності.

Припускається, що зміст первинного терму *істинний* є нечіткою підмножиною інтервалу з функцією належності, показаної на рисунку 6.1. Більш точно терм *істинний* слід розглядати як назву нечіткої змінної, обмеженням для якої є нечітка множина, зображена на рисунку 6.1.

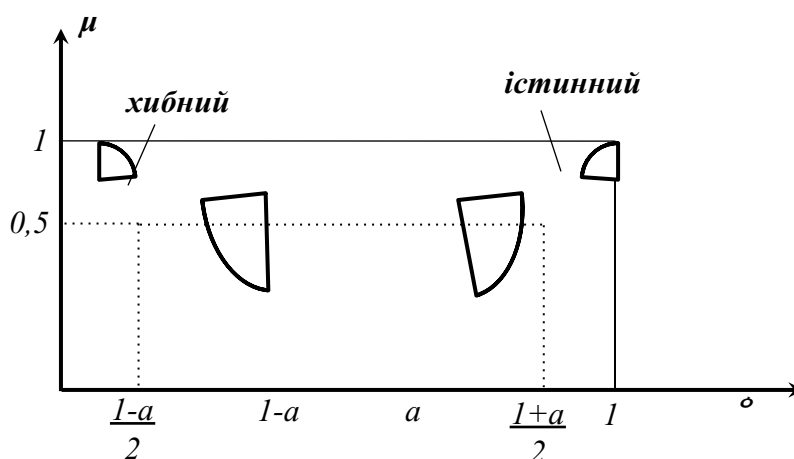


Рисунок 6.1 Функції сумісності для лінгвістичних значень істинності *істинний* та *хибний*

Одне із можливих наближень функції належності значення *істинний* визначається виразом

$$(6.2)$$

Тут точка є точкою переходу. Відзначимо також, що носієм нечіткої множини *істинний* є проміжок . Відповідно для терму *хибний* маємо (див.рис.6.1)

В деяких випадках простіше вважати, що терм **істинний** є підмножиною скінченної універсальної множини значень істинності

$$, \quad (6.3)$$

а не одиничного проміжку . При такому припущенні нечітку множину **істинний** можна визначити, наприклад, так

$$\mathbf{істинний} = 0.5 / 0.7 + 0.7 / 0.8 + 0.9 / 0.9 + 1 / 1 ,$$

де така пара, як, наприклад, 0.5/.07 означає, що сумісність значення істинності 0.7 з термом істинний дорівнює 0.5.

В подальшому викладі ми будемо цікавитись головним чином співвідношеннями виду

$$\begin{aligned} (u \text{ — лінгвістичне значення булевої лінгвістичної змінної } X) = \\ = \text{ лінгвістичне значення булевої лінгвістичної змінної } J, \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} (\text{Микола — } \mathbf{високий і темний і гарний}) = \\ = \mathbf{не дуже істинний і не дуже хибний}, \end{aligned}$$

де **високий і темний і гарний** — лінгвістичне значення змінної X **Зовнішність**, а **не дуже істинний і не дуже хибний** — лінгвістичне значення змінної істинності J . Скорочено (6.4) записуватимемо у вигляді

,

де X — лінгвістичне значення змінної X , а T — лінгвістичне значення змінної J .

Далі припустимо, що X_1 , X_2 та $X_1 * X_2$, де $*$ означає бінарну зв'язку, — лінгвістичні значення змінної X зі значеннями істинності $v(X_1)$, $v(X_2)$ та $v(X_1 * X_2)$ відповідно. Основне питання, яке виникає в зв'язку з цим, полягає в наступному: чи можна виразити $v(X_1 * X_2)$ як функцію $v(X_1)$ та

$\nu(X_2)$, тобто чи можна писати

$$, \quad (6.5)$$

де $*$ означає бінарну зв'язку, відповідну лінгвістичній змінній істинності J ¹⁾. Саме це питання лежить в основі подальшого викладу.

6.2 Логічні зв'язки в нечіткій логіці

Щоб закласти основу для нечіткої логіки, необхідно розширити зміст таких логічних операцій, як заперечення, диз'юнкція, кон'юнкція та імплікація стосовно висловлювань, які мають

¹⁾ З алгебраїчної точки зору ν можна розглядати як гомоморфне (тобто взаємно неперервне) відображення $T(X) \cong T(J)$, де $T(X)$, $T(J)$ — терм-множини відповідних змінних, а $*$ означає операцію в множині $T(J)$, індуковану операцією $*$.

не числові, а лінгвістичні значення істинності. Іншими словами, ми повинні вміти обчислювати значення істинності висловлювання $A \text{ і } B$, знаючи лінгвістичні значення істинності висловлювань A та B .

При розгляді цієї проблеми корисно мати на увазі, що якщо A — нечітка підмножина універсальної множини, та

, то два наступні твердження еквівалентні:

- 1) ступінь належності елемента u нечіткій множині A є
- $$; \quad (6.6)$$

- 2) значення істинності нечіткого предиката A є

Таким чином, питання “Що є значенням істинності висловлювання $A \text{ і } B$, якщо задані лінгвістичні значення істинності A та B ?” аналогічне питанню, яке ми задали в §3:

“Який ступінь належності елемента u множині , якщо задані ступені належності елемента u множинам A та B ?”.

ЩОБ ВІДПОВІСТИ НА ОСТАННЄ ПИТАННЯ, МИ ВИКОРИСТОВУВАЛИ ПРИНЦИП УЗАГАЛЬНЕННЯ.

ДОТРИМУВАТИМЕМОСЬ ТІЄЇ Ж ПРОЦЕДУРИ ДЛЯ
УЗАГАЛЬНЕННЯ ЗМІСТУ ЗАПЕРЕЧЕННЯ НЕ, А ТАКОЖ
ЗВ'ЯЗОК І, АБО СТОСОВНО ЛІНГВІСТИЧНИХ ЗНАЧЕНЬ
ІСТИННОСТІ.

Зокрема, якщо a — точка в U , яка являє собою значення істинності висловлювання “ A ” (або просто A), де u — елемент універсальної множини U , та значення істинності висловлювання **не** A (або $\neg A$) визначається виразом

$$v_{\neg A}(a) = 1 - v_A(a). \quad (6.7)$$

Припустимо тепер, що A — не точка в U , а нечітка множина проміжку $[0, 1]$, яка має вигляд

$$A = \{ \langle a, v_a \rangle \mid a \in [0, 1], v_a \in [0, 1] \}, \quad (6.8)$$

де v_i — точки в $[0, 1]$, а v_a — їх ступені належності множині A . Тоді, застосовуючи принцип узагальнення (3.80) до (6.7), отримаємо вираз для $v_{\neg A}(a)$ як нечіткої підмножини проміжку $[0, 1]$, тобто

$$v_{\neg A}(a) = 1 - v_A(a). \quad (6.9)$$

Зокрема, якщо значення істинності A є **істинно**, тобто

$$v_A(a) = 1, \quad (6.10)$$

то значення істинності **хибно** можна записати у вигляді

$$v_{\neg A}(a) = 0. \quad (6.11)$$

Наприклад, якщо

$$, \quad (6.12)$$

то значення істинності висловлювання *не А* має вигляд

.

Зауваження 6.1 Слід відзначити, що якщо

$$, \quad (6.13)$$

то згідно (3.33), маємо

$$. \quad (6.14)$$

Однак, якщо

$$, \quad (6.15)$$

то

$$. \quad (6.16)$$

Те саме відноситься і до лінгвістичних невизначеностей. Наприклад, згідно означення невизначеності *дуже* (див. (5.38)),

$$. \quad (6.17)$$

З іншого боку, значення істинності висловлювання *дуже А* дорівнює

$$. \quad (6.18)$$

Перейдемо до бінарних зв'язок. Нехай та — лінгвістичні значення істинності висловлювань *А* та *В* відповідно. Для простоти користуватимемось тими ж позначеннями, що і у випадку, коли та — точки в

$$\text{замість } \quad , \quad (6.19)$$

$$\text{замість } \quad , \quad (6.20)$$

$$\text{замість } \quad , \quad (6.21)$$

$$\text{замість } \quad , \quad (6.22)$$

маючи при цьому на увазі, що у випадку, коли $\quad$ та $\quad$ — точки в $\quad$, операції $\quad$ та $\quad$ зводяться до операцій *min* (кон'юнкція) та *max* (диз'юнкція) та віднімання від 1 відповідно.

Далі, якщо $\quad$ та $\quad$ — лінгвістичні значення істинності, задані виразами

$$\quad , \quad (6.23)$$

$$\quad , \quad (6.24)$$

де v_i та w_i — точки в $\quad$, а $\quad$ та $\quad$ — відповідні їм ступені належності множинам A та B , то, застосовуючи принцип узагальнення до $v(A \text{ і } B)$, отримуємо

$$(6.25)$$

Таким чином, значенням істинності висловлювання A і B є нечітка підмножина проміжку $\quad$, носій якої складається із точок виду

,

з відповідними ступенями належності. Відзначимо, що вираз (6.25) еквівалентний виразу (3.107) для функції належності перерізу нечітких множин, які мають нечіткі функції належності.

Приклад 6.1 Припустимо, що

$$i \quad (6.26)$$

$$(6.27)$$

Тоді, використовуючи (6.25), отримуємо

$$(6.28)$$

Аналогічно для значення істинності висловлювання A або B отримуємо

$$(6.29)$$

Значення істинності висловлювання залежить від того, як визначена зв'язка для числових значень істинності. Так, якщо для випадку, коли та — точки в , ми візьмемо (див.(8.24))

$$, \quad (6.30)$$

і, застосувавши принцип узагальнення, отримаємо (див. зауваження 3.5)

(6.31)

для випадку, коли та — нечіткі підмножини проміжку.

Зауваження 6.2 Важливо чітко розуміти різницю між зв'язкою *и* в термі, наприклад, *істинний і не дуже істинний* та символом $\wedge$ у висловлюванні *істинний не істинний*. В першому випадку нас цікавить зміст терму *істинний і не істинний*, і зв'язка *і* визначається відношенням

$$M(\text{істинний і не істинний}) = M(\text{істинний}) \wedge M(\text{не істинний}), \quad (6.32)$$

де $M(A)$ — зміст терму A (див. означення 5.1). А у випадку терму *істинний не істинний* нас в основному цікавить значення істинності висловлювання *істинний не істинний*, яке отримуємо з рівності (див.(6.19))

$$. \quad (6.33)$$

Таким чином, в (6.32) символ $\wedge$ означає операцію перерізу нечітких множин, а в (6.33) символ $\neg$ означає операцію кон'юнкції. Проілюструємо цю різницю на простому прикладі. Нехай V та Q — нечіткі підмножини множини V , які визначаються наступним чином

$$, \quad (6.34)$$

$$. \quad (6.35)$$

Тоді

$$, \quad (6.36)$$

тим часом, як

$$. \quad (6.37)$$

Відзначимо, що така ж різниця має місце і у випадку заперечення *не* та операції $\neg$, як вказувалось у зауваженні 6.1.

Зауваження 6.3 Слід відзначити, що, застосовуючи принцип узагальнення (3.96) до обчислення значень

та $\neg$, ми мовчазно припускали, що $\neg$ та $\neg$ — невзаємодіючі нечіткі змінні в розумінні зауваження 3.5. Якщо

та $\neg$ — взаємодіючі змінні, то необхідно застосовувати принцип узагальнення не в формі (3.96), а у формі (3.97). Цікаво відзначити, що питання про можливу взаємодію між $\neg$ та $\neg$ виникає навіть в тому випадку, коли $\neg$ та $\neg$ — точки в $\mathcal{L}$, а не нечіткі змінні.

Зауваження 6.4 Застосовуючи принцип узагальнення з метою визначення операцій $\neg$ стосовно лінгвістичних значень істинності, ми, по суті, розглядаємо нечітку логіку як узагальнення багатозначної логіки. В такому випадку можна розглядати класичну тризначну логіку як узагальнення двозначної логіки (див.(6.64)).

Наведені вище вирази для $\neg$, $\neg$, $\neg$ стають яснішими, якщо ми спочатку розкладемо $\neg$ та $\neg$ по множинах рівня і потім застосуємо принцип узагальнення у формі множин рівня (див.(3.86)) до операцій $\neg$. Це дає нам просте правило обчислення значень істинності (див. рисунок 6.2). нехай проміжки $\neg$ та $\neg$ є множинами $\neg$ -рівня для $\neg$ та $\neg$. Тоді, використовуючи узагальнення операцій $\neg$ на проміжки (див.(3.100))

$$\neg, \quad (6.38)$$

$$\neg, \quad (6.39)$$

$$\neg, \quad (6.40)$$

можна легко знайти множини α -рівня для $v(A)$, $v(B)$ та $v(A \wedge B)$. Після того, як ці множини рівня знайдені, легко визначити $v(A \vee B)$, $v(A \rightarrow B)$ та $v(A \leftrightarrow B)$, змінюючи α від 0 до 1.

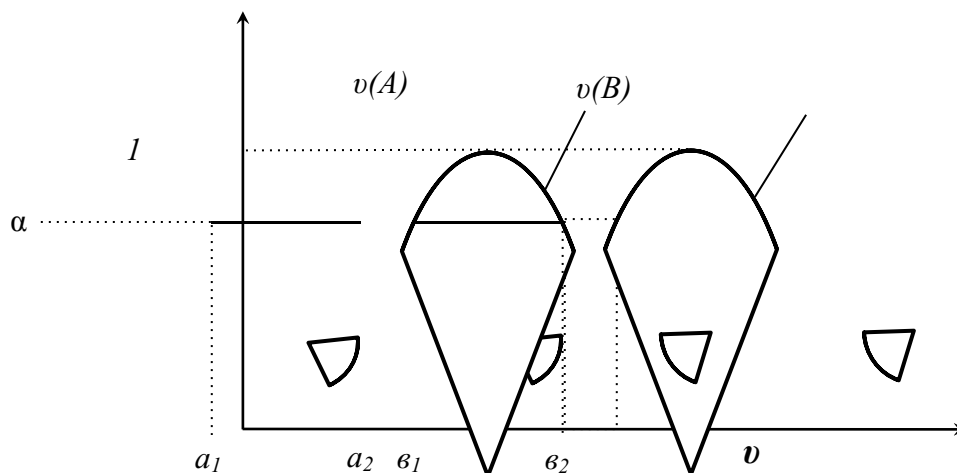


Рисунок 6.2 Множини рівня значень істинності висловлювань A та B

В якості простої ілюстрації розглянемо означення кон'юнкції лінгвістичних значень істинності

та $v(A \wedge B)$, функції належності яких мають вигляд, як наведено на рисунку 6.1.

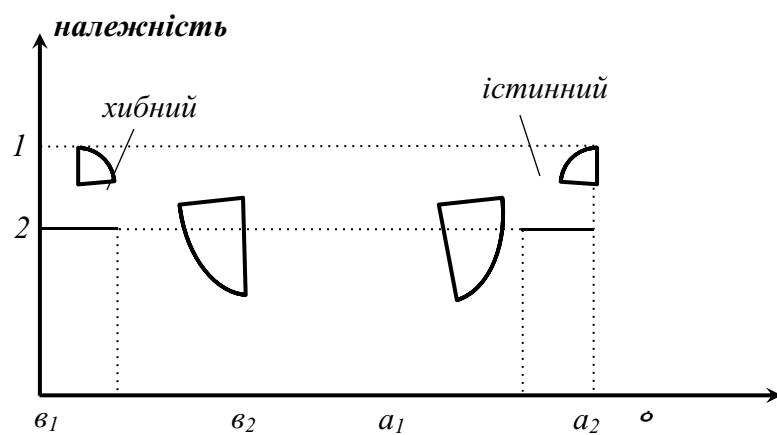


Рисунок 6.3 Обчислення значень істинності кон'юнкції значень *істинний* та *хибний*

Із рисунку 6.3 видно, що для всіх значень виконується

$$, \quad (6.41)$$

звідки випливає, що (див. (3.118))

$$\cdot \quad (6.42)$$

таким чином, знаючи тільки форму функцій належності значень *істинний* та *хибний*, можна зробити висновок, що

$$\text{істинний} \quad \text{хибний} = \text{хибний}, \quad (6.43)$$

що узгоджується з (6.25).

6.3 Таблиці істинності та лінгвістична апроксимація

В двозначній, тризначній і взагалі, n -значній логіках бінарні зв'язки зазвичай визначаються таблицею значень істинності висловлювань $A \text{ і } B$, $A \text{ або } B$ або в термінах значень істинності висловлювань A та B .

Оскільки в нечіткій логіці кількість значень істинності, взагалі кажучи, нескінченна, операції не можна визначити табулюванням. Разом з тим, можна при бажанні протабулювати, наприклад, операцію для деякої скінченної множини значень істинності, яка викликає цікавість, наприклад: *істинний, не істинний, хибний, дуже істинний, дуже (не істинний), більш-менш істинний* і т.д. Якщо кожний елемент i -го рядка такої таблиці відповідає, наприклад, значенню *не істинний*, кожний елемент j -го стовпця — значенню *більш-менш істинний*, то

$$\begin{aligned} & \text{-ий елемент} = \\ & = \text{значення елемента } i\text{-го рядка (} \quad \text{не істинний)} \\ & \quad \text{значення } j\text{-го стовпця (} \quad \text{більш-менш істинний)}. \end{aligned} \quad (6.44)$$

При заданому визначенні первинного терму *істинний* та визначеннях модифікаторів *не* та *більш-менш* можна обчислити праву частину виразу (6.44)

$$\text{не істинний} \quad \text{більш-менш істинний}, \quad (6.45)$$

використовуючи (6.25). Однак важкість полягає в тому, що в більшості випадків результатом обчислення буде нечітка підмножина універсальної множини значень істинності, яка може не відповідати жодному зі значень істинності в терм-множині змінної **Істинність**. Таким чином, якщо ми бажаємо мати таблицю лінгвістичних значень істинності, нам доведеться задовольнятися наближеним значенням -го елемента таблиці, тобто виразу (елемент *i*-го рядка елемент *j*-го стовпця). Таке наближення називатимемо *лінгвістичним наближенням* (див. рисунок 1.5).

Припустимо для ілюстрації, що універсальна множина значень істинності має вигляд

$$i \text{ що} \quad (6.46)$$

$$\text{істинний} = 0.7/0.8 + 1/0.9 + 1/1, \quad (6.47)$$

$$\text{більш менш істинний} = 0.5/0.6 + 0.7/0.7 + 1/0.8 + 1/0.9 + 1/1, \quad (6.48)$$

$$\text{майже істинний} = 0.6/0.8 + 1/0.9 + 0.6/1. \quad (6.49)$$

Припустимо, що в таблиці істинності для зв'язки V *i*-му рядку відповідає значення *більш-менш істинний*, а *j*-му стовпцю — *майже істинний*. Тоді для -го елемента таблиці отримуємо

$$\begin{aligned} &\text{більш-менш істинний } V \text{ майже істинний} = \\ &= (0.5/0.6 + 0.7/0.7 + 1/0.8 + 1/0.9 + 1/1) V \end{aligned}$$

$$V(0.6/0.8 + 1/0.9 + 0.6/1) = 1/0.8 + 1/0.9 + 1/1. \quad (6.50)$$

Тепер видно, що права частина (6.50) наближено дорівнює значенню **істинний**, визначеному виразом (6.47). Отже, в таблиці істинності для зв'язки V лінгвістичним наближенням -го елемента буде значення **істинний**.

6.4 Значення істинності *невідомо та не визначено*

Серед можливих значень істинності лінгвістичної змінної **Істинність** два значення привертають особливу увагу, а саме пуста множина та одиничний проміжок, які відповідають найменшому та найбільшому елементам (по відношенню включення) решітки нечітких підмножин проміжку. Важливість саме таких значень істинності обумовлена тим, що їх можна інтерпретувати як значення істинності **не визначено** та **невідомо** відповідно. Для зручності позначатимемо ці значення істинності символами та ?, розуміючи при цьому, що та ? визначаються виразами

(6.51)

та

універсальна множина значень істинності =

$$= = . \quad (6.52)$$

Значення **невідомо** та **не визначено**, які інтерпретуються як ступені належності, використовуються також в представленні нечітких множин типу 1. В цьому випадку є три можливості вираження ступеня належності точки u в U : 1) число із проміжку ; 2) (**не визначено**); 3) ? (**невідомо**).

Розглянемо простий приклад. Нехай

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{якщо } x \text{ парне} \\ 0 & \text{якщо } x \text{ непарне} \end{cases} \quad (6.53)$$

Візьмемо нечітку підмножину множини U виду

$$A = \{x \in U \mid \mu_A(x) > 0\} \quad (6.54)$$

В цьому випадку ступінь належності елемента c множині A є *невідомо*, а ступінь належності d є *не визначено*. В більш загальному випадку A може бути

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{якщо } x \text{ парне} \\ 0.8 & \text{якщо } x = d \\ 0 & \text{якщо } x \text{ непарне} \end{cases} \quad (6.55)$$

де мається на увазі, що ступінь належності елемента c множині A частково невідомий, причому член $0.8?c$ інтерпретується наступним чином

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{якщо } x \text{ парне} \\ 0.8 & \text{якщо } x = d \\ 0 & \text{якщо } x \text{ непарне} \end{cases} \quad (6.56)$$

Важливо чітко розуміти різницю між 0 та 1. Коли ми кажемо, що ступінь належності точки u множині A , то маємо на увазі, що функція належності μ_A не визначена в точці u . Припустимо, наприклад, що U — множина дійсних чисел, а μ_A — функція, визначена на множині цілих чисел, причому $\mu_A(x) = 1$, якщо x — парне, і $\mu_A(x) = 0$, якщо x — непарне. Тоді ступінь належності числа u множині A , а не 0. З іншого боку, якщо μ_A була визначена на множині дійсних чисел і $\mu_A(x) = 1$ тоді і тільки тоді, коли x — парне число, то ступінь належності числа 1.5 множині A дорівнював би 0.

Оскільки ми вміємо обчислювати значення істинності висловлювань $A \text{ і } B$, $A \text{ або } B$ та $A \text{ не } B$ за заданими лінгвістичними значеннями істинності висловлювань A та B , неважко обчислити і значення $v(A \text{ і } B)$, $v(A \text{ або } B)$, $v(\text{не } B)$,

коли $v(B) = ?$. Припустимо, наприклад, що

$$\dots \quad (6.57)$$

$$\dots \quad (6.58)$$

Застосовуючи принцип узагальнення, як і в (6.25), отримаємо

$$\dots, \quad (6.59)$$

де

$$\dots \quad (6.60)$$

Після спрощення (6.59) зводиться до виразу

$$\dots \quad (6.61)$$

Іншими словами, значенням істинності висловлювання $A \text{ і } B$, де $v(B) = \text{невідомо}$, є нечітка підмножина проміжку $[0, 1]$, ступінь належності якому точки w дорівнює $v(A)$ (функції належності A) на проміжку $[0, 1]$.

Аналогічно знаходимо, що значення істинності висловлювання $A \text{ або } B$ виражається наступним чином

$$\dots \quad (6.62)$$

Слід відзначити, що вирази (6.61) та (6.62) легко отримати з допомогою описаної вище графічної процедури (див.(6.38) і далі). Приклад, який це ілюструє, показаний на рисунку 6.4¹⁾.

Повертаючись до випадку , знаходимо

(6.63)

1)

і аналогічно для .

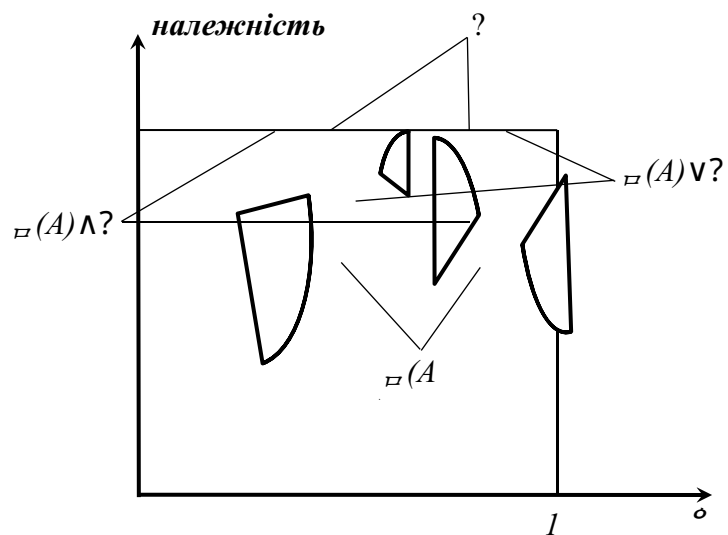


Рисунок 6.4 Кон'юнкція та диз'юнкція значень істинності висловлювання A зі значенням істинності *невідомо* (=?)

Повчально прослідкувати, що відбувається з наведеними вище співвідношеннями, коли ми застосовуємо їх до часткового випадку двозначної логіки, тобто до випадку, коли універсальна множина має вигляд

$$\text{або в більш звичному вигляді} \quad , \quad (6.64)$$

$$, \quad (6.65)$$

де T означає *істинний*, а F — *хибний*. Оскільки , ми можемо ототожнити значення істинності *невідомо* зі значенням *істинний або хибний*, тобто

$$? = T + F. \quad (6.66)$$

Результуюча логіка має чотири значення істинності та

і є узагальненням двозначної логіки в розумінні зауваження 6.4.

Оскільки універсальна множина значень істинності складається тільки з двох елементів, доцільно побудувати таблиці істинності для операцій в цій чотиризначній логіці безпосередньо, тобто без використання загальних формул (6.25), (6.29) та (6.31). Наприклад, застосовуючи принцип узагальнення до операції , отримуємо

$$, \quad (6.67)$$

$$, \quad (6.68)$$

$$, \quad (6.69)$$

(6.70)

тому розширена таблиця істинності для операції має наступний вигляд (див. таблицю 6.1).

ЯК І СЛІД БУЛО ОЧІКУВАТИ, ЦІ ТАБЛИЦІ УЗГОДЖУЮТЬСЯ З ТАБЛИЦЯМИ ІСТИННОСТІ ДЛЯ ОПЕРАЦІЙ ТА $\vee$ В ЗВИЧАЙНІЙ ТРИЗНАЧНІЙ ЛОГІЦІ.

Таблиця 6.1

$\wedge$	$\ominus$	T	F	$T + F$
$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$
T	$\ominus$	T	F	$T + F$
F	$\ominus$	F	F	F
$T + F$	$\ominus$	$T + F$	F	$T + F$

Викинувши з цієї таблиці елементи $\ominus$, отримуємо таблицю 6.2.

Таблиця 6.2

$\wedge$	T	F	$T + F$
T	T	F	$T + F$
F	F	F	F
$T + F$	$T + F$	F	$T + F$

Аналогічно, для операції $\vee$ отримуємо таблицю 6.3.

Таблиця 6.3

$\vee$	T	F	$T + F$
--------	-----	-----	---------

T	T	T	T
F	T	F	$T + F$
$T + F$	T	$T + F$	$T + F$

ОПИСАНИЙ ВИЩЕ ПІДХІД ДЕЩО ПРОЛИВАЄ СВІТЛО НА ОЗНАЧЕННЯ ОПЕРАЦІЇ В ДВОЗНАЧНІЙ ЛОГІЦІ — В ДЕЯКІЙ МІРІ СПІРНЕ ПИТАННЯ, ЯКЕ МОТИВУВАЛО РОЗВИТОК МОДАЛЬНОЇ ЛОГІКИ, . ЗОКРЕМА, ЗАМІСТЬ ЗАГАЛЬНОПРИЙНЯТОГО ОЗНАЧЕННЯ ЗВ'ЯЗКИ МИ МОЖЕМО ВИЗНАЧИТИ ЇЇ ЯК ЗВ'ЯЗКУ В ТРИЗНАЧНІЙ ЛОГІЦІ З ДОПОМОГОЮ НЕПОВНОЇ ТАБЛИЦІ ІСТИННОСТІ (ТАБЛИЦЯ 6.4),

ТАБЛИЦЯ 6.4

$\Rightarrow$	T	F	$T + F$
T	T	F	
F			T

ЯКА ВІДОБРАЖАЄ ІНТУЇТИВНО ЗРОЗУМІЛУ ІДЕЮ ПРО ТЕ, ЩО ЯКЩО ІСТИННО І А ХИБНО, ТО ЗНАЧЕННЯ ІСТИННОСТІ ВИСЛОВЛЮВАННЯ В НЕВІДОМО. ТЕПЕР МОЖНА ПОСТАВИТИ ЗАПИТАННЯ: ЯК ТРЕБА ЗАПОВНИТИ КЛІТИНИ В ТАБЛИЦІ 6.4, ЩОБ В РЕЗУЛЬТАТІ ЗАСТОСУВАННЯ ПРИНЦИПУ УЗАГАЛЬНЕННЯ ОТРИМАТИ ЗНАЧЕННЯ (2,3)-ГО ЕЛЕМЕНТА, ЯКЕ ДОРІВНЮЄ T ?. ТАКИМ ЧИНОМ, ПОЗНАЧАЮЧИ НЕВІДОМІ (2,1)-Й ТА (2,2)-Й ЕЛЕМЕНТИ ЧЕРЕЗ X ТА Y ВІДПОВІДНО, МИ ПОВИННІ ОТРИМАТИ

$$, \quad (6.71)$$

ЗВІДКИ З НЕОБХІДНІСТЮ ВИПЛИВАЄ, ЩО

$$. \quad (6.72)$$

НА ЦЬОМУ ШЛЯХУ МИ ПРИХОДИМО ДО ЗВИЧАЙНОГО
ОЗНАЧЕННЯ ЗВ'ЯЗКИ В ДВОЗНАЧНІЙ ЛОГІЦІ У ВИГЛЯДІ
НАСТУПНОЇ ТАБЛИЦІ ІСТИННОСТІ

$\Rightarrow$	T	F
T	T	F
F	T	F

ЯК ПОКАЗУЄ РОЗГЛЯНУТИЙ ВИЩЕ ПРИКЛАД, ПОНЯТТЯ
ЗНАЧЕННЯ ІСТИННОСТІ **НЕВІДОМО** В ПОЄДНАННІ З ПРИНЦИПОМ
УЗАГАЛЬНЕННЯ ДОПОМАГАЄ ЗРОЗУМІТИ ДЕЯКІ З ПОНЯТЬ ТА
СПІВВІДНОШЕНЬ ЗВИЧАЙНИХ ДВОЗНАЧНОЇ ТА ТРИЗНАЧНОЇ ЛОГІК.
ЦІ ЛОГІКИ, ЗВИЧАЙНО, МОЖНА РОЗГЛЯДАТИ ЯК ВИРОДЖЕНІ
ВИПАДКИ НЕЧІТКОЇ ЛОГІКИ, В ЯКІЙ ЗНАЧЕННЯМ ІСТИННОСТІ
НЕВІДОМО Є УВЕСЬ ОДИНИЧНИЙ ПРОМІЖОК, А НЕ МНОЖИНА $0 + 1$.

6.5 СКЛАДЕНІ ЗМІННІ ІСТИННОСТІ ТА РОЗПОДІЛ ЗНАЧЕНЬ ІСТИННОСТІ

ВИЩЕ МИ ОБМЕЖИЛИСЬ РОЗГЛЯДОМ УНАРНИХ В
РОЗУМІННІ ОЗНАЧЕННЯ 2.1 ЛІНГВІСТИЧНИХ ЗМІННИХ
ІСТИННОСТІ. НИЖЧЕ ВИЗНАЧИМО ПОНЯТТЯ СКЛАДЕНОЇ ЗМІННОЇ
ІСТИННОСТІ ТА КОРОТКО ЗУПИНИМОСЬ НА ДЕЯКИХ ЙОГО
ВЛАСТИВОСТЯХ.

ОТЖЕ, НЕХАЙ

(6.73)

ОЗНАЧАЄ П-АРНУ СКЛАДЕНУ ЛІНГВІСТИЧНУ ЗМІННУ ІСТИННОСТІ,

ДЕ — УНАРНА ЛІНГВІСТИЧНА ЗМІННА ІСТИННОСТІ З
ТЕРМ-МНОЖИНОЮ T , УНІВЕРСАЛЬНОЮ МНОЖИНОЮ V_1 ТА
БАЗОВОЮ ЗМІННОЮ V_1 (ДИВ. ОЗНАЧЕННЯ 5.1). ДЛЯ СПРОЩЕННЯ
ІНОДІ КОРИСТУВАТИМЕМОСЬ СИМВОЛОМ J_1 ДЛЯ ПОЗНАЧЕННЯ ЯК

НАЗВИ І-ОЇ ЗМІННОЇ В (6.73), ТАК І ЗАГАЛЬНОЇ НАЗВИ ЗНАЧЕНЬ ІСТИННОСТІ ЗМІННОЇ J_1 . КРІМ ТОГО, ПРИПУСКАТИМЕМО, ЩО $T_1 =$

$T_2 = \dots = T_N$ І $V_1 = V_2 = \dots = V_N =$. ЯКЩО РОЗГЛЯДАТИ J ЯК СКЛАДЕНУ ЗМІННУ, КОМПОНЕНТИ ЯКОЇ — ЗМІННІ $J_1, \dots, J_N$ — ПРИЙМАЮТЬ ЗНАЧЕННЯ ІЗ ВІДПОВІДНИХ МНОЖИН $T_1 = T_2 = \dots = T_N$, ТО $J \in \Pi$ -АРНОЮ ЗВИЧАЙНОЮ (НЕ НЕЧІТКОЮ) ЗМІННОЮ (ДИВ.(2.3) І ДАЛІ). ТАКИМ ЧИНОМ, ОБМЕЖЕННЯ $R(J)$, ОБУМОВЛЕНЕ ЗМІННОЮ J , Є ЗВИЧАЙНЕ (НЕ НЕЧІТКЕ) ВІДНОШЕННЯ В ДЕКАРТОВОМУ

ДОБУТКУ , ЯКИЙ МОЖНА ПОДАТИ ЯК НЕВПОРЯДКОВАНИЙ ПЕРЕЛІК НАБОРІВ ВИДУ

$$R(J) = (\text{ІСТИННИЙ, ДУЖЕ ІСТИННИЙ, ХИБНИЙ,} \\ \dots, \\ \text{ЦІЛКОМ ІСТИННИЙ}) + (\text{ЦІЛКОМ} \\ \text{ІСТИННИЙ,} \\ \text{ІСТИННИЙ, ДУЖЕ ІСТИННИЙ,} \dots, \\ \text{ДУЖЕ ІСТИННИЙ}) + (\text{ІСТИННИЙ,} \\ \text{ІСТИННИЙ, БІЛЬШ-МЕНШ ІСТИННИЙ,} \dots, \\ \text{ІСТИННИЙ}) + \dots \quad (6.74)$$

НАБОРИ З Π ТЕРМІВ В $R(J)$ НАЗИВАТИМЕМО СПИСКАМИ ПРИЗНАЧЕНИХ ЗНАЧЕНЬ ІСТИННОСТІ, ОСКІЛЬКИ КОЖНИЙ ТАКИЙ НАБІР МОЖНА ІНТЕРПРЕТУВАТИ ЯК РЕЗУЛЬТАТ ПРИЗНАЧЕННЯ ЗНАЧЕНЬ ІСТИННОСТІ СПИСКУ ВИСЛОВЛЮВАНЬ $A_1, \dots, A_\Pi$, ПРИЧОМУ

(6.75)

ЯВЛЯЄ СОБОЮ СКЛАДЕНЕ ВИСЛОВЛЮВАННЯ. ЯКЩО, НАПРИКЛАД,

(АНДРІЙ ВИСОКИЙ, ПЕТРО ТЕМНОВОЛОСИЙ, АННА ДУЖЕ ГАРНЕНЬКА),

ТО ТРІЙКА ЗНАЧЕНЬ В $R(J)$ ВИДУ (ДУЖЕ ІСТИННИЙ, ІСТИННИЙ,

ДУЖЕ ІСТИННИЙ) ВІДПОВІДАЄ НАСТУПНИМ РІВНЯННЯМ ПРИЗНАЧЕННЯ

$$V(\text{АНДРІЙ ВИСОКИЙ}) = \text{ДУЖЕ ІСТИННО}, \quad (6.76)$$

$$V(\text{ПЕТРО ТЕМНОВОЛОСИЙ}) = \text{ІСТИННО}, \quad (6.77)$$

$$V(\text{АННА ДУЖЕ ГАРНЕНЬКА}) = \text{ДУЖЕ ІСТИННО}. \quad (6.78)$$

БАЗУЮЧИСЬ НА ЦІЙ ІНТЕРПРЕТАЦІЇ НАБОРІВ В $R(J)$, МИ ЧАСТО НАЗИВАТИМЕМО $R(J)$ РОЗПОДІЛОМ ЗНАЧЕНЬ ІСТИННОСТІ.

ВІДПОВІДНО ДО ЦЬОГО ОБМЕЖЕННЯ , ОБУМОВЛЕНЕ

К-АРНОЮ ЗМІННОЮ , ДЕ —

ПІДПОСЛІДОВНІСТЬ ПОСЛІДОВНОСТІ ІНДЕКСІВ , НАЗИВАТИМЕМО МАРГІНАЛЬНИМ РОЗПОДІЛОМ ЗНАЧЕНЬ

ІСТИННОСТІ, ІНДУКОВАНИМ РОЗПОДІЛОМ (ДИВ.(2.8)).

ДАЛІ, ВИКОРИСТОВУЮЧИ ПОЗНАЧЕННЯ, ПРИЙНЯТІ В §2 (ДИВ. ТАКОЖ ЗАУВАЖЕННЯ 4.4), СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ

ТА

СКОРОЧЕНО МОЖНА ВИРАЗИТИ ФОРМУЛОЮ

$$, \quad (6.79)$$

ДЕ P_Q ОЗНАЧАЄ ОПЕРАЦІЮ ПРОЕКТУВАННЯ НА ДЕКАРТІВ ДОБУТОК .

ПРИКЛАД 6.2 ПРИПУСТИМО, ЩО $R(J)$ МАЄ ВИГЛЯД

$$\begin{aligned} &= (\text{ІСТИННИЙ, ЦІЛКОМ ІСТИННИЙ, ДУЖЕ ІСТИННИЙ}) + \\ &+ (\text{ДУЖЕ ІСТИННИЙ, ІСТИННИЙ, ДУЖЕ ДУЖЕ ІСТИННИЙ}) + \\ &+ (\text{ІСТИННИЙ, ХИБНИЙ, ЦІЛКОМ ІСТИННИЙ}) + \end{aligned}$$

+ (ХИБНИЙ, ХИБНИЙ, ДУЖЕ ІСТИННИЙ). (6.80)

ЩОБ ОТРИМАТИ , ВИКРЕСЛИМО КОМПОНЕНТУ J_3
В КОЖНІЙ ТРІЙЦІ І ОТРИМАЄМО

= (ІСТИННИЙ, ЦІЛКОМ ІСТИННИЙ) +
+ (ДУЖЕ ІСТИННИЙ, ІСТИННИЙ) +
+ (ІСТИННИЙ, ХИБНИЙ) + (ХИБНИЙ, ХИБНИЙ).
(6.81)

АНАЛОГІЧНИМ ЧИНОМ, ВИКРЕСЛЮЮЧИ КОМПОНЕНТИ J_2 В
, ОТРИМАЄМО

$R(J_1) = \text{ІСТИННИЙ} + \text{ДУЖЕ ІСТИННИЙ} + \text{ХИБНИЙ}$. (6.82)

ЯКЩО РОЗГЛЯДАТИ J ЯК П-АРНУ ЗВИЧАЙНУ (НЕ НЕЧІТКУ)
ЗМІННУ, ЗНАЧЕННЯМИ ЯКОЇ Є ЛІНГВІСТИЧНІ ЗНАЧЕННЯ
ІСТИННОСТІ, ТО ДЛЯ ВИПАДКУ ЛІНГВІСТИЧНИХ ЗМІННИХ
ІСТИННОСТІ ОЗНАЧЕННЯ НЕВЗАЄМОДІЇ (ОЗНАЧЕННЯ 2.2)
НАБУДЕ НАСТУПНОГО ВИГЛЯДУ

ОЗНАЧЕННЯ 6.1 КОМПОНЕНТИ П-АРНОЇ ЛІНГВІСТИЧНОЇ
ЗМІННОЇ ІСТИННОСТІ Є -НЕВЗАЄМОДІЮЧИМИ (
ОЗНАЧАЄ “ЛІНГВІСТИЧНИЙ”) ТОДІ І ТІЛЬКИ ТОДІ, КОЛИ РОЗПОДІЛ
ЗНАЧЕНЬ ІСТИННОСТІ СЕПАРАБЕЛЬНИЙ В ТОМУ
РОЗУМІННІ, ЩО

. (6.83)

ЗМІСТ ЦЬОГО ОЗНАЧЕННЯ В ТОМУ, ЩО ЯКЩО Є
-НЕВЗАЄМОДІЮЧИМИ ЗМІННИМИ, ТО ПРИЗНАЧЕННЯ
КОНКРЕТНИХ ЛІНГВІСТИЧНИХ ЗНАЧЕНЬ ІСТИННОСТІ ЗМІННИМ
НЕ ВПЛИВАЄ НЕ ЗНАЧЕННЯ ІСТИННОСТІ, ЯКІ МОЖУТЬ

БУТИ ПРИЗНАЧЕНІ ДОДАТКОВИМ КОМПОНЕНТАМ В ,
ТОБТО КОМПОНЕНТАМ .

ПЕРШ, НІЖ ІЛЮСТРУВАТИ ПОНЯТТЯ -НЕВЗАЄМОДІЇ НА ПРИКЛАДАХ, ВИЗНАЧИМО ІНШИЙ ТИП НЕВЗАЄМОДІЇ, ЯКИЙ НАЗИВАТИМЕМО -НЕВЗАЄМОДІЄЮ (ОЗНАЧАЄ БАЗОВУ ЗМІННУ).

Означення 6.2 Компоненти n -арної лінгвістичної змінної істинності є -*невзаємодіючими* тоді і тільки тоді, коли відповідні їм базові змінні — невзаємодіючі в розумінні означення 2.2, тобто змінні не зв'язані загальними обмеженнями.

ЩОБ ПРОІЛЮСТРУВАТИ ВИЗНАЧЕНІ ВИЩЕ ПОНЯТТЯ НЕВЗАЄМОДІЇ, РОЗГЛЯНЕМО ДЕКІЛЬКА ПРОСТИХ ПРИКЛАДІВ.

Приклад 6.3 Для розподілу значень істинності в прикладі 6.2 маємо

$$\begin{aligned} R(J_1) &= \text{істинний} + \text{дуже істинний} + \text{хибний}, \\ R(J_2) &= \text{цілком істинний} + \text{істинний} + \text{хибний}, \quad (6.84) \\ R(J_3) &= \text{дуже істинний} + \text{дуже дуже істинний} + \\ &\quad + \text{цілком істинний} \end{aligned}$$

і, таким чином,

$$\begin{aligned} R(J_1) \approx R(J_2) \approx R(J_3) &= (\text{істинний, цілком істинний, дуже істинний}) + (\text{дуже істинний, цілком істинний, дуже істинний}) + \\ &\quad + (\text{хибний, хиби́й, цілком істинний}) \rightarrow \\ &\rightarrow R(J_1, J_2, J_3), \end{aligned} \quad (6.85)$$

звідки випливає, що $R(J_1, J_2, J_3)$ — не сепарабельне і, отже, J_1, J_2, J_3 є -взаємодіючими змінними.

Приклад 6.4 Розглянемо складне висловлювання виду

(A , $\text{не } A$) і припустимо для простоти, що $T(J) = \text{істинний} + \text{хибний}$. З точки зору (6.11), якщо значення істинності висловлювання A є *істинно*, то значення істинності висловлювання $\text{не } A$ є *хибно*, і навпаки. Отже, розподіл значень істинності для розглядуваного висловлювання повинен мати вигляд

$$R(J_1, J_2) = (\text{істинний}, \text{хибний}) + (\text{хибний}, \text{істинний}). \quad (6.86)$$

Цей розподіл індукує маргінальні розподіли

$$R(J_1) = R(J_2) = \text{істинний} + \text{хибний}. \quad (6.87)$$

Далі,

$$\begin{aligned} R(J_1) \approx R(J_2) &= (\text{істинний} + \text{хибний}) \circ \\ &\circ (\text{істинний} + \text{хибний}) = (\text{істинний}, \text{істинний}) + \\ &+ (\text{істинний}, \text{хибний}) + (\text{хибний}, \text{істинний}) + \\ &+ (\text{хибний}, \text{хибний}), \end{aligned} \quad (6.88)$$

і оскільки

$$R(J_1, J_2) \dashv \approx R(J_1) \approx R(J_2),$$

то звідси випливає, що J_1 та J_2 є -взаємодіючими змінними.

Приклад 6.5 Приклад, розглянутий вище, можна використати і в якості ілюстрації -взаємодії. Зокрема, незалежно від значень істинності, призначених висловлюванням A та $\text{не } A$, з означення заперечення *не* (див. (3.33)) випливає, що базові змінні v_1 та v_2 зв'язані між собою рівнянням

$$. \quad (6.89)$$

Іншими словами, у випадку складеного висловлювання виду

$(A, \text{не } A)$ сума числових значень істинності висловлювань A та $\text{не } A$ повинна дорівнювати одиниці.

Зауваження 6.5 Слід відзначити, що в прикладі 6.5 - взаємодія є наслідком того, що висловлювання A_2 зав'язане з висловлюванням A_1 запереченням. Взагалі ж $J_1, \dots, J_n$ можуть бути -взаємодіючими змінними, не будучи - взаємодіючими.

Корисне застосування поняття взаємодії зв'язане зі значенням істинності **невідомо** (див.(6.12)). Беручи для простоти

, припустимо, що

$$\text{Петро живе в Івано-Франківську}, \quad (6.90)$$

$$\text{Петро живе у Львові}, \quad (6.91)$$

причому одне і тільки одне з цих висловлювань істинне. Звідси випливає, що хоча одне значення істинності

висловлювань A_1 та A_2 є **невідомо** (), тобто

$$(6.92)$$

вони зв'язані між собою співвідношеннями

$$, \quad (6.93)$$

$$. \quad (6.94)$$

Розподіл значень істинності для співвідношень (6.90) та (6.91)

можна розглядати як розв'язок системи рівнянь

$$, \quad (6.95)$$

$$. \quad (6.96)$$

Цей розв'язок має вигляд

$$R(J_1, J_2) = (T, F) + (F, T). \quad (6.97)$$

Відзначимо, що з (6.97) випливає

$$(6.98)$$

$$(6.99)$$

що узгоджується з (6.92). Відзначимо також, що J_1 та J_2 є - взаємодіючими змінними в розумінні означення 6.8, де

Далі, якщо A_1 та A_2 замінити на

$$\text{Петро жив у Івано-Франківську}, \quad (6.100)$$

$$\text{Петро жив у Львові} \quad (6.101)$$

і припустити, що як A_1 , так і A_2 можуть бути істинними, то ми і надалі матимемо

$$(6.102)$$

$$(6.103)$$

але рівняння зв'язку набуде вигляду

$$\cdot \quad (6.104)$$

В цьому випадку розподіл значень істинності є розв'язком рівняння (6.104) та має вигляд

$$R(J_1, J_2) = (\text{істинний, істинний}) + \\ + (\text{істинний, хибний}) + (\text{хибний, істинний}). \quad (6.105)$$

Важливий висновок, який можна зробити з розглянутих вище прикладів, полягає в тому, що в деяких випадках розподіл значень істинності може бути заданий в неявному вигляді, наприклад, як розв'язок системи рівнянь, а не як список впорядкованих наборів n значень істинності. Як правило, це буває в тому випадку, коли лінгвістичні значення призначаються не кожному висловлюванню A_i в $A = (A_1, \dots, A_n)$, а булевим виразам, які містять дві або більшу кількість компонент A .

Слід також відзначити, що розподіл значень істинності можуть бути вкладеними. Наприклад, у випадку унарного висловлювання ми можемо мати вкладену послідовність висловлювань виду

$$\begin{aligned} &\ll \ll \ll \text{Віра дуже дуже розумна} \gg \text{ —} \\ &\text{— дуже істинно} \gg \text{ — істинно} \gg \end{aligned} \quad (6.106)$$

ОБМЕЖЕННЯ, ІНДУКОВАНІ ВИСЛОВЛЮВАННЯМИ ТАКОГО ТИПУ, МОЖНА ОБЧИСЛЮВАТИ НАСТУПНИМ ЧИНОМ.

Нехай базовою змінною в (6.106) є $KI^{(1)}$, і нехай $R_o(KI)$ означає обмеження на змінну KI . Тоді висловлювання « *Віра дуже дуже розумна* » означає, що

$$R_o(KI) = \text{дуже дуже розумна}. \quad (6.107)$$

Далі, твердження « « *Віра дуже дуже розумна* » — *дуже істинно* » означає, що значення ступеня належності Віри нечіткій множині $R_o(KI)$ є *дуже істинно* (див.(6.6)). Нехай $R_o(KI)$ означає функцію належності нечіткої множини *дуже істинно* (див.(6.17)), і нехай $R_1(KI)$ означає функцію

¹⁾ KI — так званий коефіцієнт інтелектуальності, який визначається за спеціальною системою тестів (див., наприклад, [1]).
належності $R_o(KI)$. Розглядатимемо $R_1(KI)$ як відображення: $R_1(KI): KI \rightarrow [0,1]$, і нехай $R_2(KI)$ означає обернене відображення. Тоді $R_1(KI)$ індукує нечітку множину $R_1(KI)$, яка визначається рівністю

$$R_1(KI) = \begin{cases} 1 & \text{якщо « Віра дуже дуже розумна » — дуже істинно} \\ 0 & \text{інакше} \end{cases} \quad (6.108)$$

причому $R_1(KI)$ можна обчислювати за допомогою принципу узагальнення в формі (3.80). Нечітка множина $R_1(KI)$ являє собою обмеження на (KI) , індуковане висловлюванням « « *Віра дуже дуже розумна* » — *дуже істинно* » — *істинно* », можна виразити наступним чином:

$$R_2(KI) = \begin{cases} 1 & \text{якщо « Віра дуже дуже розумна » — істинно} \\ 0 & \text{інакше} \end{cases} \quad (6.109)$$

де $R_I(KI)$ означає відношення, обернене до $R_I(KI)$ — функції належності обмеження $R_I(KI)$, яке має вигляд (6.108). Таким чином, ми отримали спосіб обчислення обмеження, індукованого вкладеною послідовністю висловлювань типу (6.106).

Основна ідея викладеного вище методу полягає в тому, що висловлювання виду « A є T », де A — нечіткий предикат і T — лінгвістичне значення істинності, видозмінює обмеження, пов'язане з A , у відповідності до виразу

,

де A' — функція, обернена до функції належності A , A' — обмеження, індуковане висловлюванням « A є T ».

7 ЛІНГВІСТИЧНІ ЙМОВІРНОСТІ ТА УСЕРЕДНЕННЯ ПО НЕЧІТКИХ МНОЖИНАХ

В класичному теоретико-ймовірносному підході подія A визначається як елемент $\mathcal{A}$ -поля $\mathcal{A}$ підмножин простору елементарних подій Ω . Так, якщо P — нормована міра над вимірним простором $(\Omega, \mathcal{A})$, то ймовірність $P(A)$ події A визначається як міра множини A і є числом із проміжку $[0, 1]$.

Існує багато реальних проблем, в яких порушується одне або більше припущень, неявно присутніх в наведеному вище означенні. По-перше, часто буває погано визначена сама подія A , як, наприклад, в запитанні, “Яка ймовірність того, що завтра буде *теплий день*?” В цьому випадку *теплий день* — нечітка подія в тому розумінні, що не існує різкої грані між її появою і не появою. Як показано в [1], таку подію можна охарактеризувати як нечітку підмножину $\mathcal{A}$ простору елементарних подій Ω з вимірною функцією належності μ_A .

По-друге, якщо навіть A — цілком визначена звичайна (не нечітка) подія, її ймовірність $P(A)$ може бути визначена погано. Наприклад, на запитання “Яка ймовірність того, що через місяць середня ціна на акції фірми “Доу Джонс” буде вищою?” було б, мабуть, нерозумно однозначно відповісти числом, наприклад, 0.7. В цьому випадку невизначена відповідь типу “цілком ймовірно” більше відповідала б нашому нечіткому розумінню динаміки цін на акції і, отже, більш реалістично, хоча й менш точно, характеризувала б розглядувану ймовірність.

Обмеження, обумовлені припущенням про те, що A — цілком визначена подія, можна усунути по крайній мірі частково, якщо припустити, що A може бути нечіткою подією, як це було зроблено в [2]. Наступний і, можливо, більш важливий крок, який можна здійснити з метою зробити теорію ймовірностей застосовною до погано визначених ситуацій, полягає в припущенні того, що ймовірність P може бути лінгвістичною змінною в розумінні означення, даного в §6.

Нижче ми викладемо в загальних рисах, яким чином це можна зробити та дослідимо деякі елементарні наслідки, які випливають з того, що ймовірність P — лінгвістична змінна.

7.1 Лінгвістичні ймовірності

Щоб спростити виклад, розглядатимемо змінну X зі скінченною універсальною множиною

$$U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}. \quad (7.1)$$

Крім того, припускати, що обмеження, обумовлене X , співпадає з U . Іншими словами, довільна точка в U може бути вибрана в якості значення змінної X .

Кожному елементу u_i , $i=1, \dots, n$, ми покладемо у відповідність лінгвістичну ймовірність G_i , яка є булевою лінгвістичною змінною в розумінні означення 5.9

, — базова змінна для G_i . Для визначеності припустимо, що універсальна множина V , яка відповідає G_i , являє собою або одиничний проміжок $[0, 1]$, або скінченну множину

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}. \quad (7.2)$$

Вживатимемо G в якості загальної назви змінної G_i типова терм-множина для G має такий вигляд

$$\begin{aligned} T(G) = & \text{правдоподібно} + \text{не правдоподібно} + \\ & + \text{неправдоподібно} + \text{дуже правдоподібно} + \\ & + \text{більш-менш правдоподібно} + \\ & + \text{дуже неправдоподібно} + \dots + \text{ймовірно} + \\ & + \text{неймовірно} + \text{дуже ймовірно} + \\ & + \text{ні дуже ймовірно ні дуже неймовірно} + \dots \\ & + \text{близько до } 0 + \text{близько до } 0.1 + \dots \\ & + \text{близько до } 1 + \dots + \text{дуже близько до } 0 + \\ & + \text{дуже близько до } 0.1 + \dots, \end{aligned} \quad (7.3)$$

де терми *правдоподібно*, *ймовірно* та *близько до* виконують

роль первинних термів.

Вважатимемо, що функція належності нечіткої множини **правдоподібно** має такий же вигляд, що і функція належності нечіт $\neg$ (див.(6.2)), а функція належності неч **не правдоподібно** **правдоподібно** та **неправдоподібно** визначимо наступним чином

$$\mu_{\text{неправдоподібно}}(p) = 1 - \mu_{\text{правдоподібно}}(p), \quad (7.4)$$

$$\mu_{\text{дуже правдоподібно}}(p) = \mu_{\text{правдоподібно}}(p)^2, \quad (7.5)$$

де p — загальна назва змінних p_i .

Приклад 7.1 Графічний приклад змісту, який приписується термам **правдоподібно**, **не правдоподібно**, **дуже правдоподібно** та **неправдоподібно** наведений на рисунку 7.1.

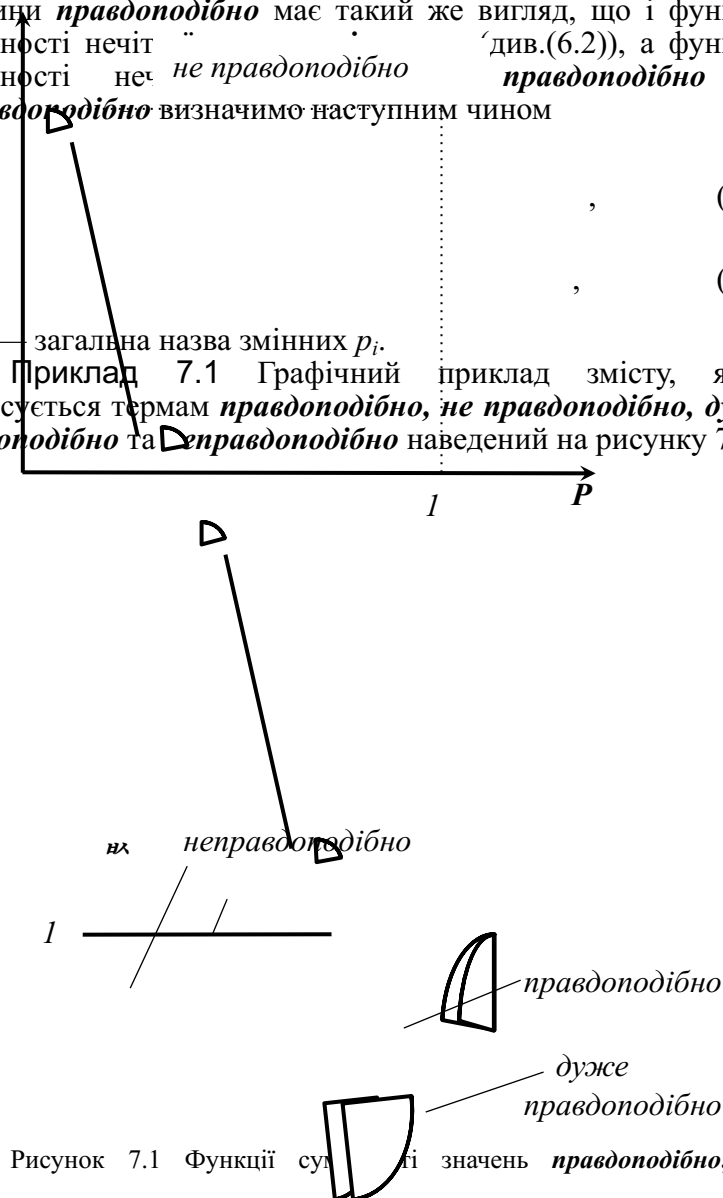


Рисунок 7.1 Функції су... ті значень **правдоподібно**, **не**

правдоподібно, неправдоподібно і дуже правдоподібно

Числовий вираз первинного терму правдоподібно має вигляд

$$\text{правдоподібно} = 0.5/0.6 + 0.7/0.7 + 0.9/0.8 + 1/0.9 + 1/1, \quad (7.6)$$

звідки

$$\begin{aligned} \text{не правдоподібно} = & 1/(0 + 0.1 + 0.2 + 0.3 + 0.4 + 0.5) + \\ & + 0.5/0.6 + 0.3/0.7 + 0.1/0.8, \end{aligned} \quad (7.7)$$

$$\begin{aligned} \text{неправдоподібно} = & 1/0 + 1/0.1 + 0.9/0.2 + \\ & + 0.7/0.3 + 0.5/0.4, \end{aligned} \quad (7.8)$$

$$\begin{aligned} \text{дуже правдоподібно} = & 0.25/0.6 + 0.49/0.7 + \\ & + 0.81/0.8 + 1/0.9 + 1/1. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Припускаємо, що терм *ймовірно* більш менш синонімічний терму *правдоподібно*. Терм *близько до*, де — число із проміжку, записуватимемо скорочено “”, вважаючи, що — “найкращий приклад” нечіткої множини “”. Маючи це на увазі, можна записати

$$\text{правдоподібно} \quad \text{близько до} \quad 1 \quad \text{“1”}, \quad (7.10)$$

$$\text{малоймовірно} \quad \text{близько до} \quad 0 \quad \text{“0”}, \quad (7.11)$$

$$\text{близько до} \quad 0.8 \quad \text{“0.8”} = 0.6/0.7 + 1/0.8 + 0.6/0.9, \quad (7.12)$$

звідки випливає, що

$$\begin{aligned} \text{дуже близько до} \quad 0.8 \quad \text{дуже} \quad \text{“0.8”} = & (\text{“0.8”})^2 \quad (\text{в розумінні} \\ (5.38)) = & 0.36/0.7 + 1/0.8 + 0.36/0.9, \end{aligned}$$

Терм в $T(I)$ позначатимемо через P_j або P_{ij} у випадку,

коли подвійний індекс необхідний. Так, якщо P_4 **дуже правдоподібно**, то P_{43} означає, що терм **дуже правдоподібно** призначений в якості значення лінгвістичної змінної Γ_3 .

Введемо n -арну лінгвістичну змінну, яка являє собою список значень лінгвістичних ймовірностей, відповідних X . Саму змінну X називатимемо при цьому **лінгвістичною випадковою змінною**. За аналогією з розподілами значень істинності (див.6.74) сукупність списків значень лінгвістичних ймовірностей називатимемо **розподілом лінгвістичних ймовірностей**.

Призначення змінній Γ_i значення P_j можна виразити рівністю

$$\Gamma_i = P_j, \quad (7.13)$$

де Γ_i використовується як загальна назва нечітких змінних, які складають Γ_i . Наприклад, можна записати

$$\Gamma_3 = P_4 = \text{дуже правдоподібно}, \quad (7.14)$$

де **дуже правдоподібно** можна ототожнити з P_{43} (тобто зі значенням P_4 , призначеним змінній P_3).

Важлива властивість лінгвістичних ймовірностей полягає в тому, що вони є n -взаємодіючими в розумінні означення 6.2. Взаємодія між P_i є наслідком обмеження (+ означає арифметичну суму)

$$P_i + P_j \leq 1, \quad (7.15)$$

в якому p_i — базові змінні (тобто числові ймовірності), зв'язані з P_i .

Конкретніше, нехай Γ_i означає нечітке n -арне відношення в X , яке представляє (7.15).

Нехай, крім того, Γ_i означає обмеження на значення змінної p_i . Тоді обмеження, обумовлене n -арною нечіткою

змінною () можна записати у вигляді

$$, \quad (7.16)$$

звідки випливає, що без обмеження (7.15) нечіткі змінні були б не взаємодіючими.

Приклад 7.2 Припустимо, що

$$P_1 = \text{правдоподібно} = 0.5/0.8 + 0.8/0.9 + 1/1, \quad (7.17)$$

$$P_2 = \text{неправдоподібно} = 1/0 + 0.8/0.1 + 0.5/0.2. \quad (7.18)$$

Тоді

$$\begin{aligned} & \text{правдоподібно} \approx \text{неправдоподібно} = \\ & = (0.5/0.8 + 0.8/0.9 + 1/1) \approx (1/0 + 0.8/0.1 + 0.5/0.2) = \\ & = 0.5/(0.8 \ 0) + 0.8/(0.9 \ 0) + 1/(1 \ 0) + 0.5/(0.8 \ 0.1) + \\ & + 0.8/(0.9 \ 0.1) + 0.8/(1 \ 0.1) + 0.5/(0.8 \ 0.2) + \\ & + 0.5/(0.9 \ 0.2) + 0.5/(1 \ 0.2). \end{aligned} \quad (7.19)$$

Що стосується відношення , то його можна виразити у вигляді

$$, \quad (7.20)$$

і, утворюючи переріз (7.19) та (7.20), отримуємо

$$1/(1 \ 0) + 0.8/(0.9 \ 1) + 0.5/(0.8 \ 0.2), \quad (7.21)$$

тобто вираз для обмеження, обумовленого складеною змінною . Зрозуміло, що складається з тих членів

виразу для μ , які задовольняють обмеженню (7.15).
Зауваження 7.1 Слід відзначити, що обмеження
 виду (7.21) є нормальним обмеженням (див.(3.23)).
 Це справедливо також і в більш загальному випадку, коли P_i
 мають вигляд

$$P_i = \begin{pmatrix} p_{i1} & p_{i2} & \dots & p_{in} \end{pmatrix}, \quad (7.22)$$

і $p_{ij} \geq 0$. Зауважимо, що в прикладі 7.2 ми маємо

$$P_i = \begin{pmatrix} p_i & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.23)$$

$$P_i = \begin{pmatrix} 0 & p_i & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.24)$$

$$P_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & p_i \end{pmatrix}. \quad (7.25)$$

7.2 Обчислення з лінгвістичними ймовірностями

В багатьох застосуваннях теорії ймовірностей,
 наприклад, при обчисленні середніх значень, дисперсій і т.д.,
 часто зустрічаються лінійні комбінації виду (+ арифметична
 сума)

$$\sum_{i=1}^n a_i p_i, \quad (7.26)$$

де a_i — дійсні числа, а p_i — значення ймовірностей із
 проміжку $[0, 1]$. Якщо p_i — числа з проміжку $[0, 1]$, то
 обчислення значення комбінації $\sum$ при заданих a_i та p_i не
 складає труднощів. Але воно стає непростим, якщо
 розглядувані ймовірності є лінгвістичними за своєю
 природою, тобто коли

$$P_i = \begin{pmatrix} p_{i1} & p_{i2} & \dots & p_{in} \end{pmatrix}, \quad (7.27)$$

де P_i — таке лінгвістичне значення ймовірностей, як
правдоподібно, неправдоподібно, дуже правдоподібно,

близько до і так далі. Відповідно, Z — не дійсне число, як в

(7.26), а нечітка підмножина дійсної осі, причому функція належності підмножини Z залежить від функцій належності P_i .

В припущенні, що нечіткі змінні — невзаємодіючі (не враховуючи обмеження (7.15)), обмеження, обумовлене набором (), набуває вигляду (див.(7.16))

$$. \quad (7.28)$$

Нехай — функція належності обмеження, і нехай — функція належності обмеження. Тоді, застосовуючи принцип узагальнення (3.90) до (7.26), можна виразити Z у вигляді нечіткої множини (+ арифметична сума)

$$, \quad (7.29)$$

яку з врахуванням (7.28) можна записати як

$$, \quad (7.30)$$

розуміючи при цьому, що p_i в (7.30) задовольняють обмеженню

$$. \quad (7.31)$$

Таким чином, ми можемо представити лінійну комбінація значень лінгвістичних ймовірностей нечіткою підмножиною дійсної осі.

Вираз для Z можна записати іншим, більш зручним для

обчислення, способом. Так, нехай f означає функцію належності множини Z , причому $f(x) = 1$. Тоді з (7.80) випливає, що

$$(7.32)$$

при обмеженнях

$$(7.33)$$

$$(7.34)$$

В цьому випадку обчислення Z зводиться до розв'язання задачі нелінійного програмування з лінійними обмеженнями. Більш точно цю задачу можна сформулювати наступним чином максимізувати z при наступних обмеженнях (+ арифметична сума)

$$(7.35)$$

Приклад 7.3 Проілюструємо викладене вище наступним простим прикладом. Припустимо, що

$$P_1 = \text{правдоподібно}, \quad (7.36)$$

$$P_2 = \text{неправдоподібно}, \quad (7.37)$$

де

$$i \quad \text{правдоподібно} = \quad (7.38)$$

$$\text{неправдоподібно} = \text{правдоподібно}. \quad (7.39)$$

Тоді (див.(7.5))

$$. \quad (7.40)$$

Припустимо, що ми хочемо обчислити математичне сподівання (+ арифметична сума) виду

$$Z = \text{правдоподібно} + \text{неправдоподібно}. \quad (7.41)$$

Використовуючи (7.23), отримуємо

$$(7.42)$$

при обмеженнях

$$(7.43)$$

Тепер, з врахуванням (7.40), якщо , маємо

$$, \quad (7.44)$$

і, отже, (7.42) зводиться до

(7.45)

або, в більш явній формі,

(7.46)

З цього результату випливає, що нечіткість нашого знання ймовірності p_i приводить до відповідної нечіткості математичного сподівання (див. рисунок 7.2)

Якщо припустити, що універсальною множиною значень ймовірності є $V = 0 + 0.1 + 0.2 + \dots + 0.9 + 1$, то вираз для Z можна отримати безпосередньо, використовуючи принцип узагальнення в формі (3.97). В якості ілюстрації припустимо, що

$$P_1 = "0.3" = 0.8/0.2 + 1/0.3 + 0.6/0.4, \quad (7.47)$$

$$P_2 = "0.7" = 0.8/0.6 + 1/0.7 + 0.6/0.8, \quad (7.48)$$

$$Z = \frac{0.8}{0.2 \cdot 0.6 + 1 \cdot 0.7 + 0.6 \cdot 0.8} = 0.49, \quad (7.49)$$

де символ $\frac{a}{b}$ означає арифметичну суму і використовується для уникнення плутанини зі знаком об'єднання.

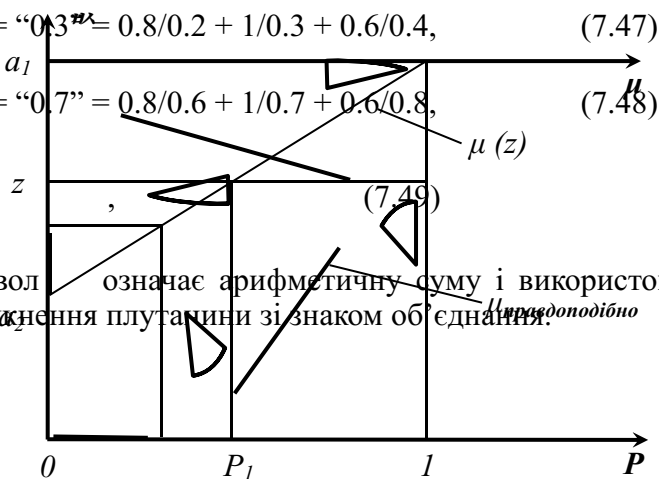


Рисунок 7.2 Обчислення лінгвістичного значення змінної $a_1p_1+a_2p_2$

Підставляючи (7.47) та (7.48) в (7.49), отримуємо

(7.50)

Розкриваючи дужки в правій частині (7.50), слід мати на увазі обмеження , яке означає, що член виду

(7.51)

зводиться до

(7.52)

Таким чином, ми отримуємо

(7.53)

тобто вираз для Z як нечіткої підмножини дійсної осі

7.3 Усереднення по нечітких множинах

Відправною точкою попереднього викладу було припущення про те, що кожному елементу u_i скінченної ¹⁾ універсальної множини U ставиться у відповідність значення P_i лінгвістичної ймовірності, яка є компонентою списку значень лінгвістичних ймовірностей

В даному контексті нечітка підмножина A множини U виконує роль нечіткої події. Нехай $\mu_A(u_i)$ — ступінь належності u_i підмножині A . Тоді якщо P_i — звичайні ймовірності p_i , то ймовірність $P(A)$ події A визначається як (див. (7.53)) (+ означає арифметичну суму)

¹⁾ Припущення про те, що U — скінченна множина, робиться виключно з метою спрощення викладу. Взагалі ж U може бути зліченною множиною або континуумом.

$$. \quad (7.54)$$

Природно узагальнити це означення на лінгвістичні ймовірності, визначивши лінгвістичну ймовірність ¹⁾ події A як

$$, \quad (7.55)$$

розуміючи при цьому праву частину виразу (7.55) як лінійну форму типу (7.27). В зв'язку з виразом (7.55) необхідно відзначити, що з обмеження

$$(7.56)$$

на розглядувані ймовірності та того, що

$$,$$

впливає, що $P(A)$ — нечітка підмножина проміжку .
Приклад 7.4 Проілюструємо сказане простим прикладом. Припустимо, що

$$, \quad (7.57)$$

$$, \quad (7.58)$$

$$“0.3” = 0.6/0.2 + 1/0.3 + 0.6/0.4, \quad (7.59)$$

$$“0.6” = 0.6/0.5 + 1/0.6 + 0.6/0.7, \quad (7.60)$$

$$“0.1” = 0.6/0 + 1/0.1 + 0.6/0.2. \quad (7.61)$$

¹⁾ Слід відзначити, що вираз (7.55) визначає $P(A)$ як нечітку підмножину проміжку $[0, 1]$. В загальному випадку для того, щоб виразити $P(A)$ як значення лінгвістичної ймовірності, потрібна лінгвістична апроксимація.

Тоді (арифметична сума)

$$\begin{aligned} P(A) = & 0.4(0.6/0.2 + 1/0.3 + 0.6/0.4) \\ & (0.6/0.5 + 1/0.6 + 0.6/0.7) \\ & 0.8(0.6/0 + 1/0.1 + 0.6/0.2) \end{aligned} \quad (7.62)$$

при обмеженні

$$. \quad (7.63)$$

Вибираючи такі члени в (7.62), які задовольняють (7.63), отримуємо ($\otimes$ означає звичайне множення)

$$\begin{aligned} P(A) = & 0.6/(0.4 \otimes 0.2 \quad 1 \otimes 0.6 \quad 0.8 \otimes 0.2) + \\ & + 0.6/(0.4 \otimes 0.2 \quad 1 \otimes 0.7 \quad 0.8 \otimes 0.1) + \\ & + 0.6/(0.4 \otimes 0.3 \quad 1 \otimes 0.5 \quad 0.6 \otimes 0.2) + \\ & + 1/(0.4 \otimes 0.3 \quad 1 \otimes 0.6 \quad 0.8 \otimes 0.1) + \\ & + 0.6/(0.4 \otimes 0.3 \quad 1 \otimes 0.7 \quad 0.8 \otimes 0) + \\ & + 0.6/(0.4 \otimes 0.4 \quad 1 \otimes 0.5 \quad 0.8 \otimes 0.1) + \\ & + 0.6/(0.4 \otimes 0.4 \quad 1 \otimes 0.6 \quad 0.8 \otimes 0), \end{aligned} \quad (7.64)$$

звідки

$$P(A) = 0.6/(0.84 + 0.86 + 0.78 + 0.82 + 0.74) + 1/0.8. \quad (7.65)$$

Вираз (7.65) можна грубо апроксимувати рівністю

$$P(A) = "0.8". \quad (7.66)$$

Лінгвістичну ймовірність нечіткої події, виражену формулою (7.55), можна розглядати як частковий випадок більш загального поняття, а саме *лінгвістичного середнього*, або, що те саме, *лінгвістичного математичного сподівання* функції (визначеної на U) по нечіткій підмножині множини U . Конкретніше, нехай f — визначена на U функція, яка приймає дійсні значення нехай A — нечітка підмножина множини U , і нехай

— лінгвістичні ймовірності, відповідні . Тоді *лінгвістичне середнє* функції f по A позначається як

і визначається наступним чином (+ арифметична сума)

$$. \quad (7.67)$$

Розглянемо наступний конкретний приклад виразу (7.67).

Припустимо, що люди з іменами вибираються відповідно до лінгвістичних ймовірностей , де P_i — обмеження на p_i , . Припустимо, що на u_i накладається штраф в розмірі , зменшеному пропорційно ступеня належності u_i класу A . Тоді лінгвістичний середній (очікуваний) розмір штрафу виражається формулою (7.67).

Зауваження 7.2 Відзначимо, що (7.67), по суті, є лінійною комбінацією виду (7.27), де

$$. \quad (7.68)$$

таким чином, щоб обчислити (7.67), можна використати метод, описаний раніше для обчислення лінійних форм в

лінгвістичних ймовірностях. Зокрема, слід відзначити, що у випадку, коли , права частина (7.67) має вигляд

$$, \quad (7.69)$$

і зводиться до .

Крім виразу для вираз (7.67) містить в собі в якості часткових випадків і вираз для інших типів середніх, які зустрічаються в різних застосуваннях. Серед них існують два типи, які можна розглядати як вироджені форми (7.67) і які часто зустрічаються в багатьох задачах, що викликають практичний інтерес. Нижче ми коротко зупинимось на цих типах середніх і для зручності сформулюємо їх означення в формі відповідей на питання.

Питання 7.1 Яка кількість елементів в даній нечіткій множині A ?

Очевидно, це питання поставлене некоректно, оскільки у випадку нечіткої множини не існує чіткої межі між належністю та неналежністю елемента множині. Разом з тим поняття *потужності* нечіткої множини , яке визначається як

$$, \quad (7.70)$$

є природним узагальненням поняття кількості елементів A .

Для ілюстрації припустимо, що U — універсальна множина жителів у місті, а A — нечітка множина безробітних в цьому місті. Якщо інтерпретувати як ступінь належності людини u_i класові безробітних (наприклад, $=0.5$, якщо u_i зайнятий половину робочого часу і шукає роботу

з повним робочим днем), то можна інтерпретувати як *еквівалентну кількість повністю безробітних*.

Питання 7.2 Припустимо, що f — функція, яка набуває дійсних значень і визначена на U . Яке середнє значення f на

нечіткій підмножині A множини U ?

Користуватимемось тими ж позначеннями, що й у виразі (7.67). Нехай $\bar{f}_A$ означає середнє значення функції f на A . Якщо A була звичайною (не нечіткою) множиною, то виражалось би формулою

$$\bar{f}_A = \frac{1}{|A|} \sum_{i \in A} f(i), \quad (7.71)$$

де $\sum_{i \in A}$ означає сумування по тих i , які належать A , а $|A|$ — кількість цих елементів. Щоб узагальнити (7.71) на нечіткі множини, зауважимо, що (7.71) можна переписати так

$$\bar{f}_A = \frac{1}{|A|} \sum_{i \in U} f(i) \chi_A(i), \quad (7.72)$$

де χ_A — характеристична функція множини A . Тоді (7.72) можна прийняти в якості означення $\bar{f}_A$ для нечіткої множини A , якщо інтерпретувати $\chi_A(i)$ як ступінь належності i до множини A . При цьому ми приходимо до виразу для $\bar{f}_A$, який можна розглядати як частковий випадок виразу (7.67).

Проілюструємо (7.72) наступним прикладом. Припустимо, що U — повна множина жителів у місті та A — нечітка підмножина молодих жителів крім того, припустимо,

що y_i — заробіток жителя i . Тоді середній заробіток молодих жителів міста виражається формулою (7.72).

Зауваження 7.3 Оскільки вираз для μ_A є лінійною формою змінних x_i , то потужність нечіткої множини типу 2 (див. означення 3.1) можна легко підрахувати методом, яким ми користувались раніше для обчислення $P(A)$. У випадку μ_A , однак, ми маємо справу з відношенням лінійних форм, і, отже, обчислення μ_A для нечітких множин типу 2 представляє собою більш важку задачу.

Метою попереднього викладу було показати, що поняття лінгвістичної змінної є основою для визначення ймовірностей і в поєднанні з принципом узагальнення може бути використане для обчислення лінійних комбінацій таких ймовірностей. Ми не будемо більше зупинятись на цьому питанні і в подальшому викладі звернемо увагу на основне правило виведення в нечіткій логіці.

8 КОМПОЗИЦІЙНЕ ПРАВИЛО ВИСНОВКУ ТА НАБЛИЖЕНІ МІРКУВАННЯ

Основним правилом висновку в традиційній логіці є правило *modus ponens*, згідно якого ми можемо судити про істинність висловлювання B на основі істинності висловлювання A та імплікації $A \rightarrow B$. Наприклад, якщо A — висловлювання “Микола в лікарні”, B — висловлювання “Микола хворий”, то якщо істинне висловлювання “Микола в лікарні”, то також істинне висловлювання “Микола хворий”.

В багатьох звичних міркуваннях, однак, правило *modus ponens* використовується не в точній, а в наближеній формі. Так, зазвичай ми знаємо, що A істинно, і що $A \rightarrow B$, де A є, в деякій мірі, наближення B . Тоді з A та $A \rightarrow B$ ми можемо зробити висновок про те, що B наближено істинно.

Нижче ми окреслимо спосіб формалізації наближених міркувань, побудованих на поняттях, введених в попередніх параграфах. Однак, на відміну від традиційної логіки, нашим основним інструментом буде не правило *modus ponens*, а так зване композиційне правило висновку, дуже частковим випадком якого є правило *modus ponens*.

8.1 Композиційне правило висновку

Композиційне правило висновку — це всього лише узагальнення наступної знайомої процедури. Звертаючись до рисунку 8.1 припустимо, що A є крива $y = f(x)$ і задане значення a . Тоді з того, що $a = f(x)$ та $y = f(x)$ ми можемо зробити висновок, що $x = f^{-1}(a)$.

Узагальнимо тепер цей процес, припустивши, що a —

проміжок, а — функція, значеннями якої є проміжки, як на рисунку 8.2. В цьому випадку, щоб знайти проміжок, що відповідає проміжку a , ми спочатку побудуємо циліндричну множину з основою a (див.(3.58)) та знайдемо її переріз I з кривою, значеннями якої є проміжки. Потім спроектуємо цей переріз на вісь OY і отримаємо потрібне значення y у вигляді проміжку b .

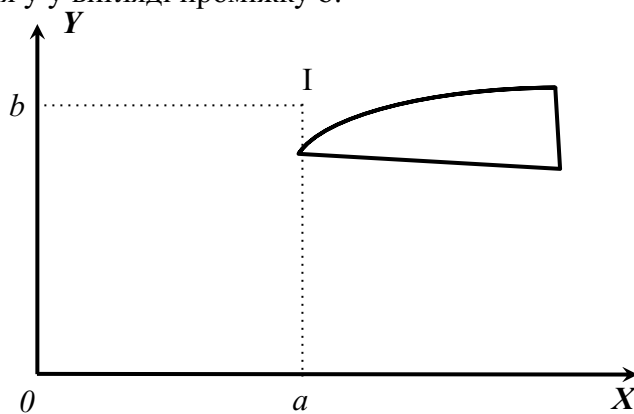


Рисунок 8.1 Виведення $y = b$ з передумов $x = a$ та $y = f(x)$

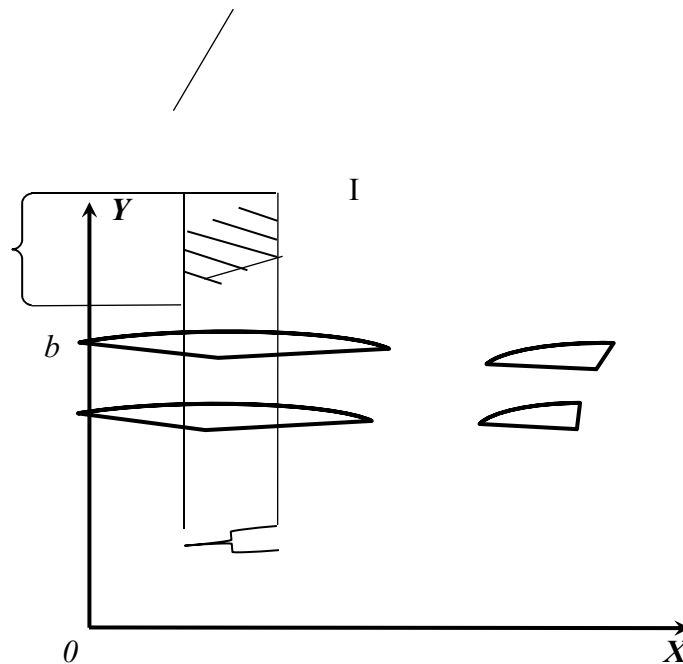


Рисунок 8.2 Ілюстрація композиційного правила висновку у випадку змінних зі значеннями – проміжками

Щоб просунутись ще на один крок на шляху узагальнення, припустимо, що A — нечітка підмножина осі OX , а F — нечітке відношення в . Знову утворюючи циліндричну нечітку множину з основою A та її переріз з нечітким відношенням F (див. рисунок 8.3), ми отримаємо нечітку множину , яка є аналогом точки перерізу I на рисунку 8.1. Проектуючи потім цю множину на вісь OY , отримаємо значення y в вигляді нечіткої підмножини осі OY .

Таким чином, з того, що та — нечітка підмножина осі OX , ми отримуємо значення y в вигляді нечіткої підмножини B на осі OY .

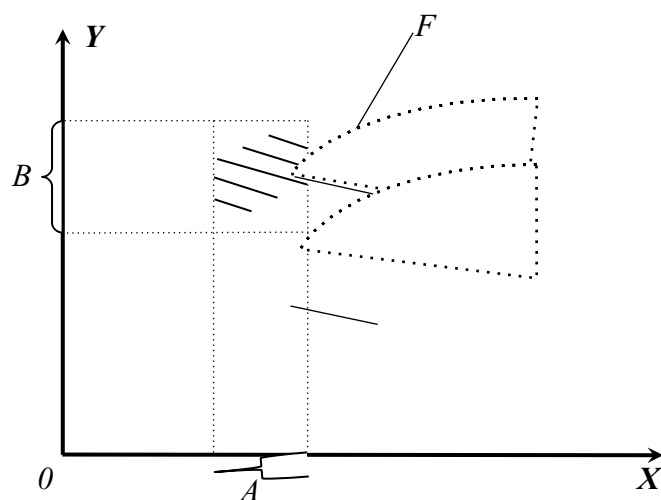


Рисунок 8.3 Ілюстрація композиційного правила виведення для нечітких змінних

Конкретніше, нехай μ_A та μ_B означають функції належності множин A , B , F та B відповідно. Тоді за означенням множини A (див. (3.58))

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{якщо } x \in A \\ 0 & \text{інакше} \end{cases} \quad (8.1)$$

$$\mu_B(y) = \begin{cases} 1 & \text{якщо } y \in B \\ 0 & \text{інакше} \end{cases} \quad (8.2)$$

Проектуючи множину F на вісь OY , отримуємо з (8.2) та (3.57)

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in X} \mu_F(x, y) \quad (8.3)$$

тобто вираз для функції належності проекції (тіні) на вісь OU . Порівнюючи цей вираз з означенням композиції A та F (див.(3.55)), бачимо, що множину B можна представити у вигляді

$$B = \{x \in U \mid \exists y \in V, (x, y) \in A \wedge (y, x) \in F\}, \quad (8.4)$$

де знак $\circ$ означає операцію композиції. Як стверджується в §3, якщо нечіткі множини A та F мають скінченні носії, то операція композиції зводиться до максимінного добутку матриць.

Приклад 8.1 Припустимо, що A та F мають вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 \\ 0.5 & 0.4 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.5 \\ 0.3 & 0.2 \end{pmatrix} \quad (8.5)$$

та

$$B = \{x \in U \mid \exists y \in V, (x, y) \in A \wedge (y, x) \in F\} \quad (8.6)$$

Виражаючи A та F з допомогою матриць та утворюючи матричний добуток (8.4), отримуємо

$$B = \begin{pmatrix} 0.56 & 0.32 \\ 0.35 & 0.20 \end{pmatrix} \quad (8.7)$$

Вищевикладені зауваження та приклади допомагають обґрунтувати наступне правило висновку.

Правило 8.1 Нехай U та V — дві універсальні множини з базовими змінними u та v відповідно. Нехай $R(u)$, $R(u, v)$ та $R(v)$ означають обмеження на u , (u, v) та v відповідно і представляють собою нечіткі відношення в U , $U \times V$ та V . Нехай A та F — нечіткі підмножини множин U та V . Тоді **композиційне правило висновку** стверджує, що розв'язок рівнянь призначення

$$u = \{x \in U \mid \exists y \in V, (x, y) \in A \wedge (y, x) \in F\} \quad (8.8)$$

має вигляд (8.9)

(8.10)

де — композиція A та F . В цьому розумінні ми можемо *зробити висновок* із того, що та

В якості простої ілюстрації застосування цього правила припустимо, що

(8.11)

$A = \text{малий} = 1/1 + 0.6/2 + 0.2/3$ (8.12)

та

$F = \text{приблизно рівні} =$

(8.13)

Іншими словами, A — унарне нечітке відношення в U , назване *малий*, F — бінарне нечітке відношення в , назване *приблизно рівні*.

Рівняння призначення в цьому випадку мають вигляд

малий, (8.14)

приблизно рівні, (8.15)

і, отже

$\text{малий} \text{ приблизно рівні} =$

(8.16)

що можна апроксимувати наступним чином

$$\text{більш-менш малий}, \quad (8.17)$$

якщо терм *більш-менш* визначається як оператор збільшення нечіткості (див.(3.48)), де

$$\begin{aligned} K(1) &= 1/1 + 0.7/2, \\ K(2) &= 1/2 + 0.7/3, \\ K(3) &= 1/3 + 0.7/4, \\ K(4) &= 1/4. \end{aligned} \quad (8.18)$$

Зауважимо, що застосування цього оператора до $\{1, 2, 3, 4\}$ дає

$$\{1/1, 1/2, 1/3, 1/4\} \quad (8.19)$$

в якості апроксимації набору

Отже, використовуючи композиційне правило висновку, ми отримали, що якщо *малий* та *приблизно рівні*, то

$$i \text{ точно} \quad (8.20)$$

$$\text{більш-менш малий} \text{ — в якості лінгвістичного наближення.} \quad (8.21)$$

Словами цей наближений висновок можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} u \text{ — } \text{малий} & \quad \text{передумова} \\ u \text{ і } v \text{ — } \underline{\text{приблизно рівні}} & \quad \text{передумова} \\ v \text{ — } \text{більш-менш малий} & \quad \text{наближений висновок} \end{aligned} \quad (8.22)$$

Основна ідея цього схематично описаного методу полягає в наступному. Кожний факт або передумова записується у вигляді рівняння призначення у відношеннях, які містять одне або більшу кількість обмежень на базові змінні. Ці рівняння розв'язуються відносно бажаних обмежень з допомогою композиції нечітких відношень. Одержані розв'язки і являють собою висновок із даного набору передумов.

8.2 Правило *modus ponens* як частковий випадок композиційного правила висновку

Як ми побачимо нижче, правило *modus ponens* можна розглядати як частковий випадок композиційного правила висновку. Щоб встановити цей зв'язок, ми спочатку узагальнимо поняття матеріальної імплікації з пропозиційних змінних на нечіткі множини.

В традиційній логіці матеріальна імплікація визначається як логічна зв'язка для пропозиційних змінних. Так, якщо A та B — пропозиційні змінні, то таблиця істинності для $A \rightarrow B$, або, що еквівалентно, **ЯКЩО A , ТО B** , записується у наступному вигляді (див .таблицю 6.4)

Таблиця 8.1

	B	
A	T	F
T	T	F
T	T	T

В звичайних ситуаціях, однак, вираз **ЯКЩО A , ТО B** вживається в ситуаціях, коли A та

B — нечіткі множини (або нечіткі предикати), а не пропозиційні змінні. Наприклад, у випадку висловлювання ЯКЩО *Микола хворий*, ТО *Микола капризний*, яке можна скорочено записати як *хворий капризний, хворий та капризний*, по суті — назви нечітких множин.

Те ж саме вірно по відношенню до висловлювання ЯКЩО *яблуко червоне*, ТО *яблуко стигле*, де *червоне* та *стигле* виконують ролі нечітких множин.

Щоб узагальнити поняття матеріальної імплікації на нечіткі множини, припустимо, що U та V — дві можливо різні універсальні множини, а A , B та C — нечіткі підмножини U , V та V відповідно. Спочатку визначимо зміст висловлювання ЯКЩО A , ТО B , ІНАКШЕ C , а потім визначимо ЯКЩО A , ТО B як частковий випадок висловлювання ЯКЩО A , ТО B , ІНАКШЕ C .

Означення 8.1 Висловлювання ЯКЩО A , ТО B , ІНАКШЕ C є бінарне нечітке відношення в , яке визначається наступним чином

$$\text{ЯКЩО } A, \text{ ТО } B, \text{ ІНАКШЕ } C = \dots \quad (8.23)$$

Тобто, якщо A , B , C — унарні нечіткі відношення в U , V та V , то ЯКЩО A , ТО B , ІНАКШЕ C — бінарне нечітке відношення в , яке є об'єднанням декартового добутку A та B (див. (3.45)) та декартового добутку заперечення A та C .

Далі, висловлювання ЯКЩО A , ТО B можна розглядати як частковий випадок висловлювання ЯКЩО A , ТО B , ІНАКШЕ C в припущенні, що C — повна множина V . Таким чином,

$$\begin{aligned} \text{ЯКЩО } A, \text{ ТО } B &= \text{ЯКЩО } A, \text{ ТО } B, \text{ ІНАКШЕ } V = \\ &= \dots \end{aligned} \quad (8.24)$$

По суті, це рівнозначно інтерпретації висловлювання **ЯКЩО A , ТО B** висловлюванням **ЯКЩО A , ТО B , ІНАКШЕ *байдуже***.

Корисно зауважити, що в термінах матриць A , B та C рівність (8.23) можна виразити як суму попарних добутків, які містять A і B (та A і C) у вигляді вектор-стовпця та вектор-рядка відповідно. Наприклад,

$$\text{ЯКЩО } A, \text{ ТО } B, \text{ ІНАКШЕ } C = \dots \quad (8.25)$$

Приклад 8.2 Проілюструємо (8.23) та (8.24) наступним прикладом. Припустимо, що

$$U = V = 1 + 2 + 3, \quad (8.26)$$

$$A = \text{малий} = 1/1 + 0.4/2, \quad (8.27)$$

$$B = \text{великий} = 0.4/2 + 1/3, \quad (8.28)$$

$$C = \text{не великий} = 1/1 + 0.6/2. \quad (8.29)$$

Тоді

$$\text{ЯКЩО } A, \text{ ТО } B, \text{ ІНАКШЕ } C =$$

$$(8.30)$$

що можна представити у вигляді матриці відношення

$$\text{ЯКЩО } A, \text{ ТО } B, \text{ ІНАКШЕ } C \quad . \quad (8.31)$$

Аналогічно

$$\text{ЯКЩО } A, \text{ ТО } B =$$

$$=$$

або

$$\text{ЯКЩО } A, \text{ ТО } B \quad . \quad (8.32)$$

Зауваження 8.1 Слід відзначити, що в означенні висловлювання $\text{ЯКЩО } A, \text{ ТО } B$ ми неявно припускали, що A та B — невзаємодіючі в тому розумінні, що не існує обмеження, яке містить одночасно базові змінні u та v . Цього не буде у випадку звичайного (не нечіткого) висловлювання $\text{ЯКЩО } \quad , \text{ ТО } \quad ,$ яке можна виразити як $\text{ЯКЩО } \quad , \text{ ТО } \quad$ при виконанні обмеження $\quad$. Якщо позначити це відношення через $\quad$, то відношення, яке представляє розглядуване висловлювання, матиме вигляд

$$\text{ЯКЩО } \quad , \text{ ТО } \quad . \quad (8.33)$$

Зауваження 8.2 В означенні відношення $\quad$ ми

вважали, що **ЯКЩО A , ТО B** є частковим випадком висловлювання **ЯКЩО A , ТО B , ІНАКШЕ C** при $C = V$. Якщо візьмемо (порожня множина), а не V , то права частина (8.23) зведеться до декартового добутку, який можна інтерпретувати як **A СПАРЕНЕ З B** (а не **A ВИПЛИВАЄ B**).

Так, за означенням

$$A \text{ СПАРЕНЕ З } B \quad (8.34)$$

і, отже,

$$A \text{ СПАРЕНЕ З } B \text{ плюс } \text{СПАРЕНЕ З } V \quad (8.35)$$

В загальному випадку вираз виду

$$(8.36)$$

описується словами наступним чином

$$A_1 \text{ СПАРЕНЕ З } B_1 \text{ плюс } \dots \text{ плюс } A_n \text{ СПАРЕНЕ З } B_n. \quad (8.37)$$

Слід зауважити, що вираз типу (8.37) можна використати для представлення нечіткого графіка як об'єднання нечітких точок (див. рисунок 8.4). Наприклад, нечіткий графік G можна представити у вигляді

$$, \quad (8.38)$$

де u_i та v_i — точки в U та V відповідно, а “ u_i ” та “ v_i ”, $i = 1, \dots, n$, представляють собою нечіткі множини з назвами *близько до u_i* та *близько до v_i* (див.(7.12)).

Зауваження 8.3 *Зв'язок між виразами (8.24) та загальноприйнятим означенням матеріальної імплікації*

стає зрозумілішим, якщо врахувати, що

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)), \quad (8.39)$$

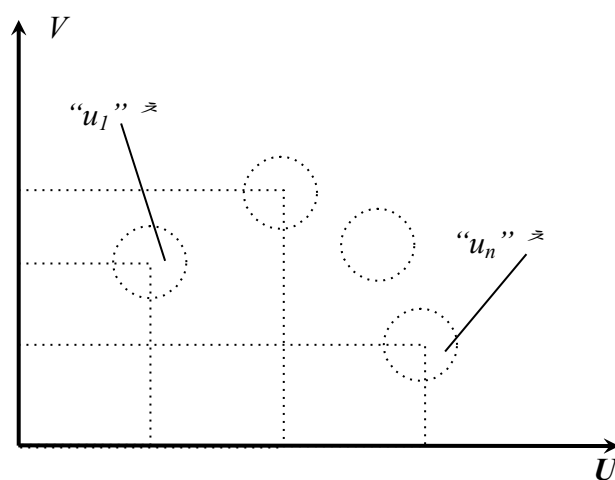


Рисунок 8.4 Зображення нечіткого графіка як об'єднання нечітких точок

і, отже, вираз (8.24) можна переписати у вигляді

$$\text{ЯКЩО } A, \text{ ТО } B =$$

$$= \quad (8.40)$$

Далі, якщо A — звичайна (не нечітка) підмножина U , то

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{якщо } x \in A \\ 0 & \text{якщо } x \notin A \end{cases}, \quad (8.41)$$

$$\text{і, отже, } \text{ЯКЩО } A, \text{ ТО } B = \mu_B(x). \quad (8.42)$$

Цей вираз аналогічний по формі відомому виразу для
у випадку пропозиційних змінних, а саме

$$. \quad (8.43)$$

Переходячи до розгляду зв'язку між правилом *modus ponens* та композиційним правилом висновку, визначимо спочатку *узагальнене правило modus ponens*.

Означення 8.2 Нехай A_1 , A_2 та B — нечіткі підмножини множин U , U та V відповідно. Припустимо, що значення A_1 призначено обмеженню , а відношення (визначене за формулою (8.24)) призначено обмеженню , тобто

$$, \quad (8.44)$$

$$. \quad (8.45)$$

Як було показано раніше, ці рівняння призначення у відношеннях можна розв'язати відносно обмеження на v наступним чином

$$. \quad (8.46)$$

Вираз цього висновку у формі

$$A_1 \quad \text{передумова} \quad (8.47)$$

$$\quad \text{імплікація} \quad (8.48)$$

$$\quad \text{висновок} \quad (8.49)$$

і складає формулювання *узагальненого правила modus ponens*.

Зауваження 8.4 Наведене формулювання відрізняється від традиційного формулювання правила *modus*

modus в двох відношеннях по-перше, тут допускається, що A_1 , A_2 та B — нечіткі множини, по-друге, A_1 необов'язково ідентичне A_2 . Щоб розглянути випадок, коли $A_1 = A_2 = A$ і A — нечітка множина, підставимо вираз для $\mu_A(x)$ в рівняння (8.46). Тоді отримаємо

$$\mu_A(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_A(x)\} \quad (8.50)$$

де замість позначень рядок та стовпець вживаються позначення r та c відповідно добуток матриць розуміється як максимумний добуток.

Далі, оскільки A — звичайна (не нечітка) множина, то

$$\mu_A(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_A(x)\} \quad (8.51)$$

і, оскільки A — нормальна множина (див.(3.23)), то

$$\mu_A(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_A(x)\} \quad (8.52)$$

Отже,

$$\mu_A(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_A(x)\} \quad (8.53)$$

що є у відповідності з висновком, який отримується за правилом modus ponens.

Приклад 8.3 Проілюструємо (8.49) простим прикладом. Припустимо, що

$$\mu_A(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_A(x)\} \quad (8.54)$$

$$A_2 = \text{малий} = 1/1 + 0.4/2 \quad (8.55)$$

$$A_1 = \text{більш-менш малий} = 1/1 + 0.4/2 + 0.2/3 \quad (8.56)$$

$$B = \text{великий} = 0.4/2 + 1/3. \quad (8.57)$$

Тоді (див.(8.32))

$$i \quad \begin{array}{l} \text{малий} \quad \text{великий} = \\ \text{більш-менш малий} \quad (\text{малий} \quad \text{великий}) = \end{array} \quad (8.58)$$

$$, \quad (8.59)$$

грубим наближенням якої може бути **більш-менш великий**.
Таким чином, в розглядуваному випадку узагальнене правило
modus ponens дає

$$\begin{array}{ll} u \text{ більш-менш малий} & \text{передумова} \\ \text{якщо } u \text{ — } \underline{\text{малий}}, \text{ то } v \text{ — } \underline{\text{великий}} & \text{імплікація} \quad (8.60) \\ v \text{ — } \underline{\text{більш-менш великий}} & \text{наближений висновок} \end{array}$$

Зауваження 8.5 Внаслідок означення у вигляді

ступінь належності точки нечіткій множині буде
високим, якщо малий ступінь належності u множині A . Це
призводить до того, що якщо A — нечітка множина, то
множини та перекриваються, причому висновок
із передумов A та є не B , а ¹⁾

$$, \quad (8.61)$$

де член з'являється у зв'язку з цим перекриттям.
Щоб уникнути цього явища, можливо, доведеться

визначити способом, при якому відрізняються числові значення істинності з проміжку і таке значення істинності, як *невідомо* (див.(6.52)). Слід відзначити також, що для висловлювання A СПАРЕНИЙ З B (див.(8.34)), ми маємо

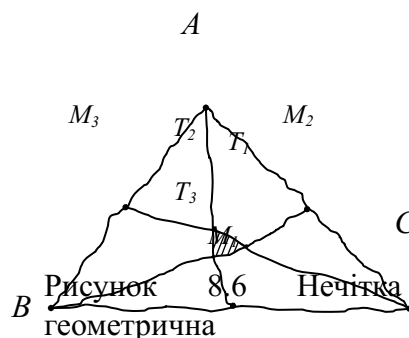
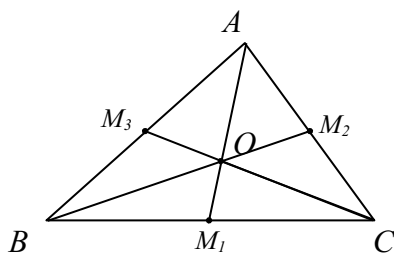
$$\begin{aligned} &^1) \text{ Ми припускаємо, що } A \text{ — нормальна, так що } A_r A_c = 1. \\ &A \text{ (} A \text{ СПАРЕНИЙ З } B \text{)} = B, \end{aligned} \quad (8.62)$$

якщо A — нормальна нечітка множина.

8.3 Нечіткі теореми

Під нечіткою теоремою чи твердженням ми розуміємо твердження загального виду **ЯКЩО A , ТО B** , значенням істинності якого є **істинний** в наближеному розумінні, і яке можна вивести із системи аксіом з допомогою наближених міркувань, елементарної геометрії, наприклад, шляхом повторного застосування правила *modus ponens* або аналогічних правил.

В якості неформальної ілюстрації поняття нечіткої теореми розглянемо теорему елементарної геометрії, яка стверджує, що якщо M_1, M_2, M_3 — середини сторін трикутника (див. рисунок 8.5), то прямі AM_1, BM_2, CM_3 перетинаються в одній точці.



Нечітку модифікацію цієї теореми можна подати наступним чином.

Нечітка теорема 8.1 Нехай AB , BC та CA — приблизно прямі лінії, які утворюють приблизно рівносторонній трикутник з вершинами A , B , C (див.рис.8.6). Нехай M_1 , M_2 та M_3 — приблизно середини сторін BC , CA та AB відповідно. Тоді приблизно прямі лінії AM_1 , BM_2 , CM_3 утворюють приблизно трикутник $T_1T_2T_3$, який *більш-менш (більш-менш малий)* відносно трикутника ABC .

Перш ніж приступити до “доведення” цієї нечіткої теореми, ми повинні уточнити зміст виразів *приблизно пряма лінія*, *приблизно середина* і т.д. Під *приблизно прямою лінією* AB ми розумітимемо будь-яку криву, що проходить через точки A та B , таку, що відстань від будь-якої точки кривої до прямої лінії AB мала по відношенню до довжини відрізка AB . Якщо звернутись до рисунку 8.7, то сказане означає, що ми призначаємо лінгвістичне значення *малий* відстані d , інтерпретуючи d як нечітку змінну.

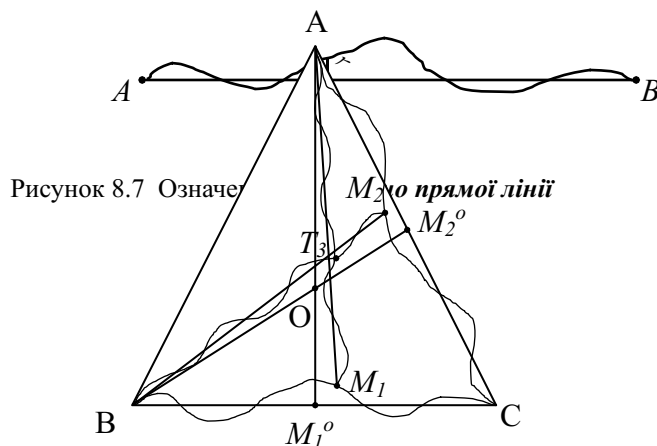


Рисунок 8.8 Ілюстрація наближеного доведення нечіткої теореми

Нехай $(AB)^o$ означає відрізок AB . Тоді під приблизно середньою точкою AB ми розуміємо точку на AB , відстань від якої до — середини $(AB)^o$ — *мала*.

Повернемося до формулювання нечіткої теореми.

Нехай O — перетин прямих ліній та (рисунок 8.8). Оскільки припускається, що M_1 — приблизно середина BC , то відстань від M_1 до *мала*. Отже, відстань від будь-якої точки на до *мала*. Далі, так як відстань від будь-якої точки на AM_1 до *мала*, то відстань від будь-якої точки на AM_1 до *більш-менш мала*.

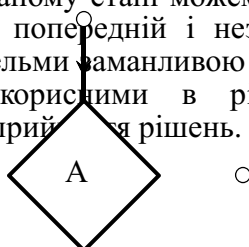
Ті ж самі міркування застосуємо до відстані від точок на BM_2 до . Потім, беручи до уваги, що кут між

та дорівнює приблизно 120° , робимо висновок, що відстань від точки перетину ліній AM_1 та BM_2 до точки O (*більш-менш*)² *мала* (тобто *більш-менш (більш-менш мала)*). Звідси випливає, що відстань між будь-якою вершиною трикутника $T_1T_2T_3$ і точкою O (*більш-менш*)² *мала*. Саме в цьому розумінні трикутник $T_1T_2T_3$ (*більш-менш*)² *малий* по відношенню до трикутника ABC .

Наведене вище міркування є наближеним і якісним за

своєю природою. В якості вихідної точки в ньому використовується той факт, що прямі AM_1 , BM_2 та CM_3 перетинаються в точці O , а міркування спираються на якісне уявлення про неперервність. Зрозуміло, що “доведення” було б довшим і складнішим, якщо б нам довелося починати з основних аксіом евклідової геометрії, а не з теореми, яка була нам відправною точкою.

Те, що ми на даному етапі можемо сказати про нечіткі теореми, має вельми попередній і незавершений характер. Разом з тим, вони є вельми заманливою областю досліджень і можуть виявитись корисними в різного типу погано визначених процесах прийняття рішень.



8.4 Графічне зображення блок-схемами

○

Як відзначалось в роботі [1], при описі та реалізації нечітких алгоритмів часто буває дуже зручно визначати відношення між змінними і присвоювати їх конкретні значення з допомогою блок-схем.

Надалі ми не торкатимемось багатьох складних питань, пов'язаних з описом та реалізацією нечітких алгоритмів. Наша мета — лише зрозуміти роль, яку відіграють блоки розв'язків стосовно не до звичайних (не нечітких), а нечітких предикатів, зв'язавши їх з призначенням обмежень на базові змінні.

В звичайній блок-схемі блок розв'язку типу A на рисунку 8.9 відповідає одномісному ¹⁾ предикату $A(x)$. Так, перехід від точки 1 в точку 2 означає, що $A(x)$ — **істинне**, в той час, як перехід із точки 1 в точку 3 означає, що $A(x)$ — **хибне**.

3

ТАК

2

Рисунок 8.9 Нечіткий блок розв'язку

¹⁾ Для простоти ми не розглядатимемо блоки розв'язку з більш, ніж одним входом і двома виходами.

Поняття, введені в попередніх параграфах, є основою узагальнення поняття блоку розв'язків стосовно до нечітких множин (або предикатів). Зокрема, маючи на увазі рисунок 8.9, припустимо, що A — нечітка підмножина множини U , і що питання, яке відповідає блоку розв'язку, має вигляд “Чи є x A ?”, наприклад, “чи є x *малим*?”, де x — загальна назва вхідної змінної. Блок-схеми з блоками розв'язку такого типу називатимемо *нечіткими блок-схемами*.

Якщо відповіддю є просто ТАК, то ми призначаємо обмеженню на x значення A , тобто вважаємо

$$\mu_A(x) = 1 \quad \text{якщо } x \in A, \quad (8.63)$$

і переводимо x із 1 в 2.
З іншого боку, якщо відповіддю є НІ, ми вважаємо

$$\mu_A(x) = 0 \quad \text{якщо } x \notin A, \quad (8.64)$$

і переводимо x із 1 в 3.
Якщо, наприклад, A — *малий*, то рівняння (8.63) набуде вигляду

малий. (8.65)

Якщо відповіддю є *ТАК/*, де , то ми переводимо x в точку 2, зробивши висновок, що ступінь належності x множині A дорівнює . Крім цього, ми переводимо x в точку 3, зробивши висновок, що ступінь належності x множині дорівнює .

Якщо ступінь належності набуває лінгвістичних, а не числових значень, то ми представляємо ці значення як лінгвістичні значення істинності. В цих випадках типовими будуть відповіді типу *ТАК/істинно*, *ТАК/дуже істинно*, *ТАК/більш-менш істинно* і т.д. Як і раніше, припускати, що ступінь належності x множині A дорівнює , де — лінгвістичне значення істинності, і переводитимемо x в точку 3, зробивши висновок, що ступінь належності x множині дорівнює .

Якщо маємо ланцюг блоків розв'язків, як на рисунку 8.10, то послідовність відповідей *ТАК* переведе x із точки 1 в точку $(n+1)$, і результатом її буде те, що обмеженню $R(x)$ дано в якості значення переріз множин . Таким чином, в цьому випадку

$$, \quad (8.66)$$

де символ означає переріз нечітких множин (див. також рисунок 8.11).

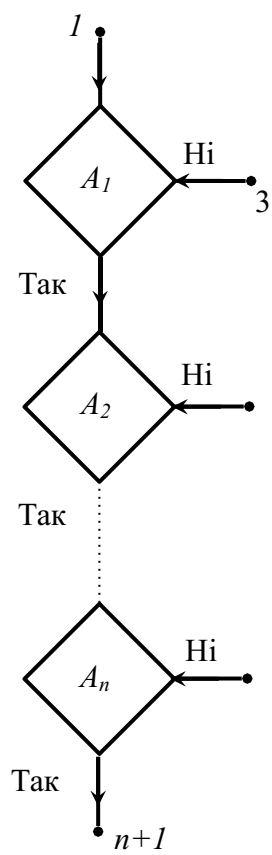


Рисунок 8.10 Послідовне з'єднання блоків розв'язку

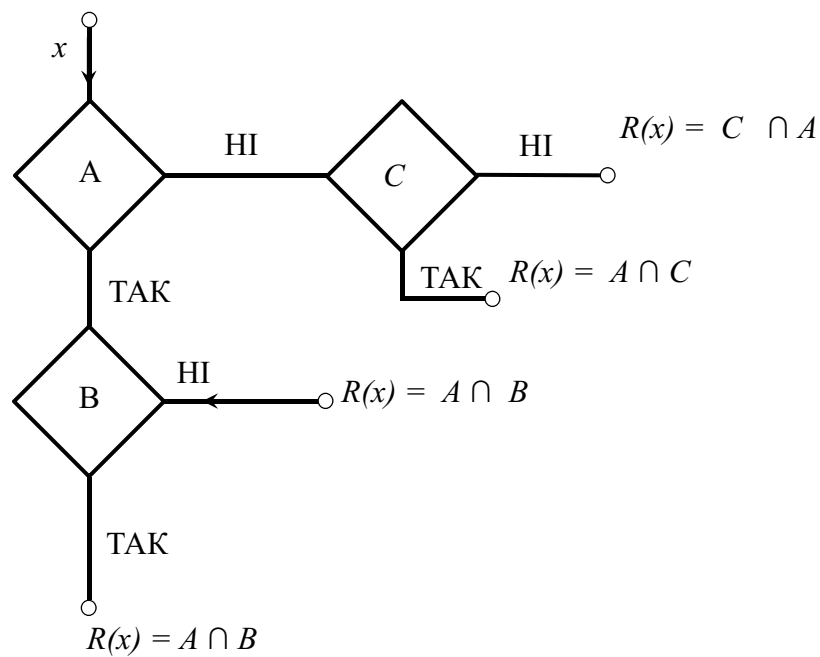


Рисунок 8.11 Обмеження, які відповідають різним виходам нечіткої блок-схеми

Для ілюстрації припустимо, що $x = \text{Микола}$, $A_1 = \text{високий}$ та $A_2 = \text{товстий}$. Тоді, якщо відповіддю на питання “чи Микола високий?” є ТАК, і відповіддю на питання “чи Микола товстий?” є ТАК, то обмеження, обумовлене змінною *Микола*, виражається у вигляді

$$R(\text{Микола}) = \text{високий} \quad \text{товстий}. \quad (8.67)$$

Слід відзначити, що “Микола” — по суті справи, назва бінарної лінгвістичної змінної, яка має дві компоненти **Висота** та **Вага**. Таким чином, вираз (8.67) еквівалентний рівнянням призначення

$$\text{Висота} = \text{високий}, \quad (8.68)$$

$$\text{Вага} = \text{товстий}. \quad (8.69)$$

Із (8.66) випливає, що послідовне з’єднання блоків розв’язку відповідає перерізу нечітких множин (або, що еквівалентно, кон’юнкції нечітких предикатів), зв’язаних з ними. У випадку звичайних (не нечітких) множин об’єднання можна зобразити схемою, наведеною на рисунку 8.12. Зрозуміло, що при розташуванні блоків розв’язку перехід із 1 в 2 означає, що

$$, \quad (8.70)$$

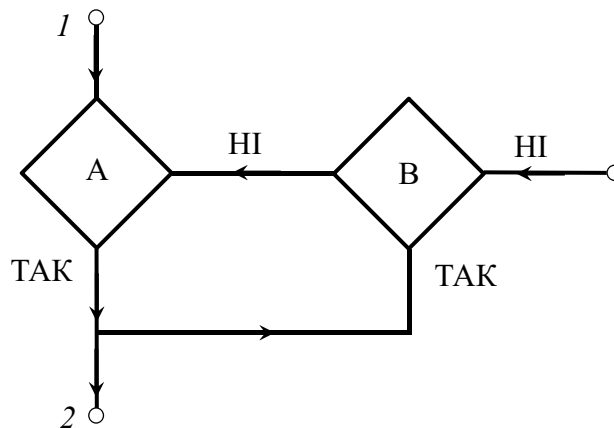


Рисунок 8.12 Графічне зображення диз’юнкції нечітких предикатів

а оскільки

$$, \quad (8.71)$$

то (8.70) можна переписати в наступному вигляді

$$, \quad (8.72)$$

оскільки

$$, \quad (8.73)$$

$$. \quad (8.74)$$

Така ж схема не дасть об'єднання нечітких множин, оскільки для таких множин рівність

$$, \quad (8.75)$$

взагалі кажучи, не виконується. Разом з тим, ми можемо погодитись інтерпретувати блок-схему на рисунку 8.12 як схему, що відповідає об'єднанню множин A та B . Завдяки цьому ми можемо і надалі мати справу зі знайомими нам блок-схемами, які містять звичайні (не нечіткі) блоки розв'язку. Блок-схема, наведена на рисунку 8.14, ілюструє використання цього погодження у визначенні поняття *Хіпі*.

Погодження, описані вище, можна використати для зображення в графічній формі призначення лінгвістичного значення лінгвістичній змінній. Особливо корисне в цьому зв'язку послідовне з'єднання блоків розв'язку, яке відповідає послідовності *уточнюючих питань*, призначених для звуження області можливих значень змінної. Для ілюстрації припустимо, що $x = \text{Микола}$ і (див. рисунок 8.13)

$$A_1 = \text{високий}$$

$$A_2 = \text{дуже високий},$$

$$A_3 = \text{дуже дуже високий}, \quad (8.76)$$

$$A_4 = \text{надзвичайно високий}.$$

Якщо відповідь на перше питання — ТАК, то

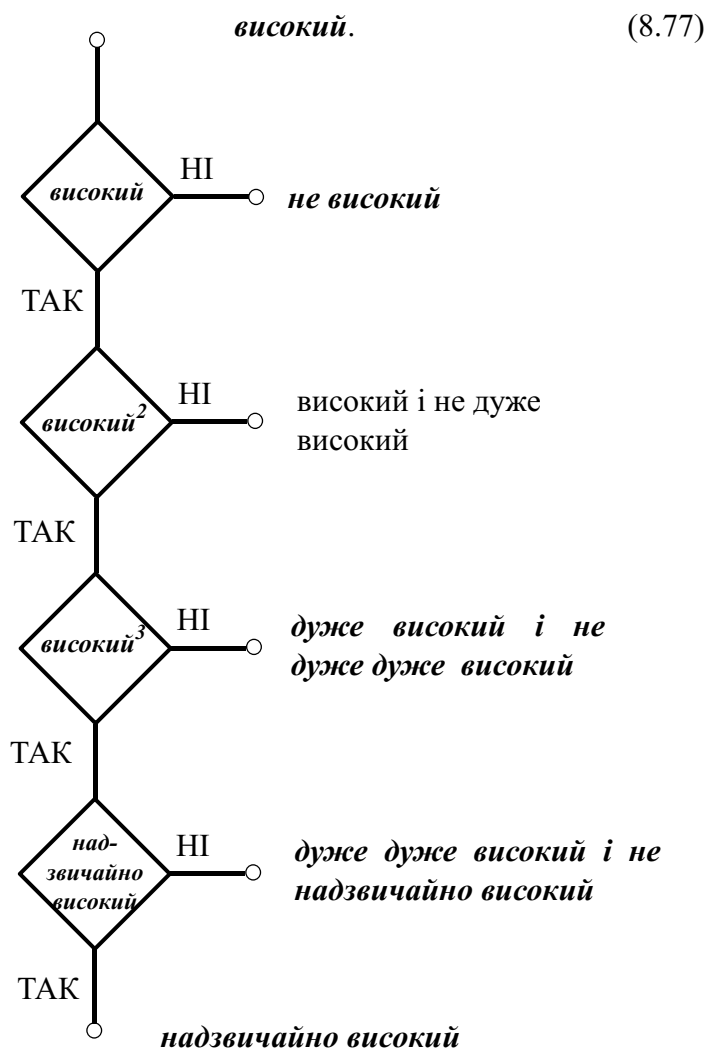


Рисунок 8.13 Застосування послідовного з'єднання блоків розв'язку.

Якщо відповідь на друге питання — ТАК, а на третє питання — НІ, то

$$R(\text{Микола}) = \text{дуже високий і не дуже високий}, \quad (8.78)$$

Тобто значення висоти *Миколи* знаходиться між значеннями дуже високий і не дуже високий.

При наявності механізму, такого, як у випадку уточнюючих питань, для призначення змінним лінгвістичних значень поетапно, а не за один крок, нечіткі блок-схеми можуть виявитись вельми корисними для алгоритмічних визначень нечітких понять.

Основна ідея при цьому полягає в тому, щоб визначити складне або нове нечітке поняття за допомогою більш простих або більш знайомих понять. Оскільки нечітке поняття можна розглядати як назву деякої нечіткої множини, то ця ідея означає, фактично, розклад нечіткої множини на комбінацію більш простих нечітких множин.

Проілюструємо це наступним прикладом. Припустимо для ілюстрації, що ми бажаємо визначити термін *Хіпі*, який можна розглядати як назву нечіткої підмножини повної

множини всіх людей. Для цього скористаємось нечіткою блок-схемою, наведеною на рисунку 8.14. По суті, ця схема визначає нечітку множину *Хіпі* в термінах нечітких множин, які мають назви *Довговолосий*, *Лисий*, *Бритий*, *Робота* та *Наркотики*. Більш точно вона визначає нечітку множину *Хіпі* як (+ об'єднання)

$$\begin{aligned} \text{Хіпі} = & (\text{Довговолосий} + \text{Лисий} + \text{Бритий}) \\ & \text{Наркотики} \quad \text{Робота}. \end{aligned} \quad (8.79)$$

¹⁾ Звичайно, це дуже спрощене визначення слід розуміти тільки як ілюстрацію, яка не претендує на строгість, повноту та реалістичність.

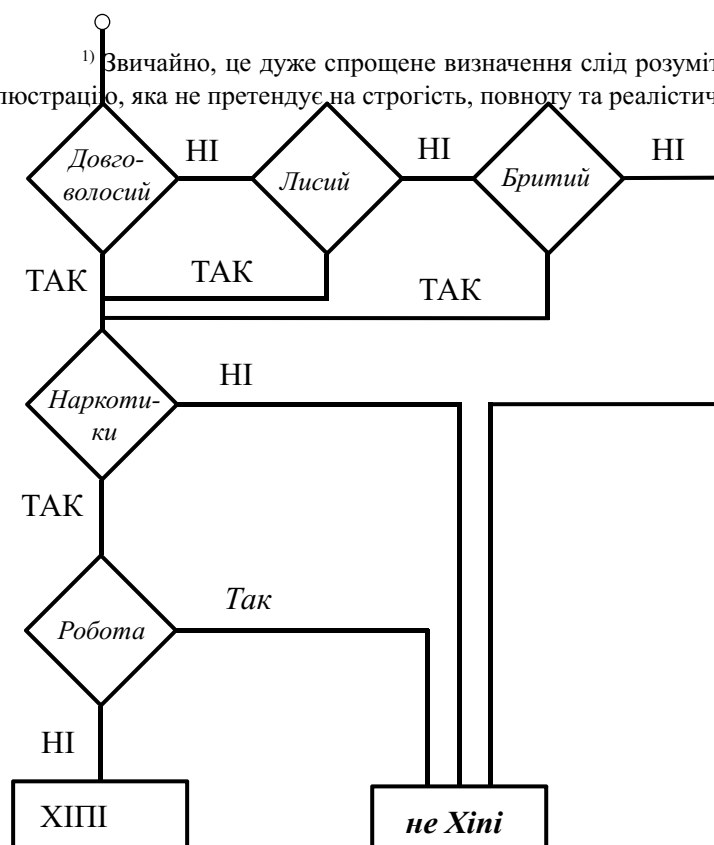


Рисунок 8.14 Алгоритмічне визначення поняття *Xіпі*, представлене в формі нечіткої блок – схеми

Припустимо, що ми ставимо наступні питання і отримуємо вказані відповіді

Чи довге волосся у x ? — ТАК

Чи має x роботу? — НІ

Чи вживає x наркотики? — ТАК.

Тоді ми накладаємо на змінну x обмеження

$$R(x) = \text{Довговолосий} \quad \text{Робота} \quad \text{Наркотики}, \quad (8.79)$$

і, оскільки це обмеження знаходиться в правій частині виразу (8.79), ми робимо висновок, що x — *Xіпі*.

Модифікуючи нечіткі множини, які входять в означення *Xіпі* з допомогою таких невизначеностей, **як дуже, більшим, надзвичайно** і т.д. та допускаючи відповіді ТАК/ або НІ/ , де — числове або лінгвістичне значення істинності, можна отримати означення *Xіпі*, яке точніше відображає наше розуміння цього поняття. Більше того, ми можемо використати м'яке *i* (див. зауваження 3.1) та допустити тим самим деяку взаємодію між характеристиками, які визначають *Xіпі*. І, наприкінці, ми можемо розглядати блоки розв'язку з багатьма входами і виходами. Таким чином, поняття, таке, як

$Xipi$ можна визначити як завжди повно в термінах складених понять, кожне з яких, в свою чергу, можна визначити алгоритмічно. Використовуючи нечітку блок-схему для визначення такого нечіткого поняття, як $Xipi$, ми, по суті, розкладаємо висловлювання загального вигляду

$$\begin{aligned} v(u \in \text{лінгвістичне значення булевої} \\ \text{лінгвістичної змінної } X) = \\ = \text{лінгвістичне значення булевої} \\ \text{лінгвістичної змінної } J \end{aligned} \quad (8.80)$$

на рівняння призначення значень істинності такого ж вигляду, але які містять більш прості або більш знайомі змінні в лівій частині.

9 ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ НЕЧІТКИХ МНОЖИН

9.1 ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ ТА ІГРИ В НЕЧІТКО ВИЗНАЧЕНІЙ ОБСТАНОВЦІ

Нечітко визначеною обстановкою називається наближений опис реальної ситуації на мові нечітких множин. Задача прийняття рішень в нечітко визначеній обстановці була вперше сформульована і піддана аналізу Беллманом і Заде .

Множина допустимих виборів у цій задачі описується нечіткою множиною A в деякому повному класі виборів. Для заданої функції значення $f(x)$ описує результат вибору конкретного елемента з X без врахування допустимості чи недопустимості цього вибору. Мета прийняття рішення описується нечіткою множиною C в повному класі виходів Y . При такому розумінні мети її можна описати нечіткою множиною C_X в повному класі виборів X , яка є прообразом нечіткої множини мети C при відображенні $f^{1)}$.

¹⁾ Прообразом A нечіткої множини B при відображенні $f: X \rightarrow Y$ називається нечітка множина з функцією належності виду
при всіх . Образ нечіткої множини A при відображенні f описується функцією належності виду

де .

Розв'язок задачі виконання нечіткої мети визначається при цьому як переріз нечітких множин виборів та мети. Іншими

словами, розв'язком є максимальна (по включенню) нечітка множина D в X , така, що

1. (допустимість розв'язку),
2. (виконання нечіткої мети),

де — образ D при відображенні f .

Цей розв'язок можна розглядати як нечітко сформульовану інструкцію, виконання якої забезпечує виконання нечітко визначеної мети. Нечіткість отриманого розв'язку є наслідком нечіткості вихідної задачі. При такому представленні розв'язку залишається невизначеність, пов'язана зі способом виконання одержаної нечіткої інструкції. Така невизначеність виникає, наприклад, коли виконати інструкцію означає вибрати конкретне значення x . Різні, але не єдино можливі способи розв'язання цієї невизначеності пропонуються в роботі . В роботі поняття нечіткого розв'язку використовується для аналізу динамічної задачі прийняття рішень в нечітко визначеній обстановці.

Більш загальною є задача (див. роботу) прийняття рішень, в якій результат конкретного вибору елемента оцінюється не значенням функції $f(x)$, як в , а нечіткою множиною B_X в Y (повний клас виходів) з функцією належності . Нечітка мета прийняття рішення описується, як і раніше, нечіткою множиною C в Y .

За аналогією з , розв'язком цієї задачі називається максимальна (за включенням) нечітка множина D в X , така, що

1. (допустимість розв'язку),
2. (виконання мети),

де — образ множини D в Y при нечіткому відображенні , яке описується функцією належності . Дамо

наступне

Означення 9.1 Прообразом нечіткої множини C при нечіткому відображенні називається максимальна (за включенням) нечітка множина C_X , така, що

$$\mu_{C_X}(x) = \sup\{\mu_C(y) \mid y \in X, f(y) = x\}. \quad (9.1)$$

З означення розв'язку одержуємо

$$\mu_{C_X}(x) = \sup\{\mu_C(y) \mid y \in X, f(y) = x\}. \quad (9.2)$$

Знаходження розв'язку зводиться, таким чином, до знаходження чіткої множини C_X . Введемо множини

$$C_X = \{x \in X \mid \mu_{C_X}(x) > 0\}. \quad (9.3)$$

Можна показати, що у введених позначеннях нечітка множина C_X описується функцією належності

$$\mu_{C_X}(x) = \sup\{\mu_C(y) \mid y \in X, f(y) = x\}. \quad (9.4)$$

Звідси та з означення розв'язку випливає, що розв'язком сформульованої загальної задачі прийняття рішень є нечітка множина D з функцією належності виду

(9.5)

Описаний вище підхід до задач прийняття рішень можна застосувати для аналізу ігор в нечітко визначеній обстановці. Формулюється така гра наступним чином.

Нехай X та Y — множини елементів, які можуть вибирати гравці 1 та 2 відповідно (повні множини виборів). Допустимі вибори (стратегії) гравців 1 та 2 описуються нечіткими множинами в X та Y відповідно з функціями належності та . Задані функції f_1, f_2

, причому значення є оцінка гравцем i ситуації без урахування допустимості чи недопустимості виборів x та y . Мета гравця i описується нечіткою множиною C_i в R^l з функцією належності

. Слід зауважити, що мета, поставлена гравцем, може виявитись погано обумовленою або взагалі несумісною з його можливостями (наприклад, з множиною його стратегій). Нижче це питання розглядається дещо детальніше.

За аналогією з розглянутою вище задачею прийняття рішень метою гравця i можна вважати нечітку множину в з функцією належності

. (9.6)

Образом цієї нечіткої множини при відображенні f_i є задана нечітка множина мети гравця i .

Введемо нечіткі множини D_1 та D_2 в , визначивши їх функції належності наступним чином

(9.7)

Якщо способом виконання нечіткої інструкції вважати вибір такого значення x , для якого відповідна функція належності набуває максимального значення (припускаючи, що таке значення існує), то можна більш точно сформулювати мету кожного з гравців в розглядуваній грі. Можна вважати, що гравець i ($i = 1, 2$) прагне досягнути, по можливості, більшого значення функції U_i . Розглядувана ігрова ситуація формулюється при цьому звичайним чином X та Y — множини стратегій гравців, U_1 та U_2 — їхні функції виграшів. Зауважимо, що якщо прийняти інший спосіб виконання нечітких інструкцій, то і формулювання гри виявиться іншим.

Якщо гравець покладається цілком на свої можливості, то природною є його орієнтація на отримання найбільшого гарантованого виграшу. При цьому важливу роль виконує існуюча в його розпорядженні інформація про інтереси та обмеження гравця 2, від якої істотно залежить величина найбільшого гарантованого виграшу. Якщо, наприклад, гравець 1 має можливість першим вибрати свою стратегію і повідомити цей вибір гравцю 2, то найбільший гарантований виграш гравця 1 дорівнює

. (9.8)

Наявність в цьому виразі множини $Y(x)$, яка залежить від x , відображає ступінь інформованості гравця 1 про інтереси та

обмеження гравця 2.

Якщо величина M_1 надто мала, то це означає, що мета, якої прагне досягти гравець 1, надто завищена (з урахуванням його можливостей). В зв'язку з цим, природно, виникає така задача. Нехай задана нечітка мета гравця 1 з функцією належності μ_1 . Якою повинна бути нечітка множина його стратегій, яка гарантує цьому гравцеві (при заданій інформованості про гравця 2) виконання мети зі ступенем, не меншим деякого заданого числа α ? Іншими словами, якою повинна бути функція μ_1 , що описує нечітку множину стратегій гравця 1, щоб

$$\mu_1(x) \geq \alpha \quad (9.9)$$

Має зміст і обернена задача: задана нечітка множина стратегій гравця 1. Якої мети гравець 1 може гарантовано досягти зі ступенем, не меншим α ? Детальніше такі задачі розглядаються в роботі [10].

За аналогією з антагоністичними можна також ввести ігри з протилежними цілями в нечітко визначеній обстановці.

Означення 9.2 *Грою з протилежними цілями в нечітко визначеній обстановці* називається гра, в якій функції належності нечітких цілей гравців та функції f_i , $i=1, 2$, такі, що

$$f_1(x, y) + f_2(x, y) = 0 \quad (9.10)$$

Використовуючи введені вище позначення, пару x^o, y^o назовемо

ситуацією рівноваги гри, якщо для довільних $x, y \in X$ та $z \in Y$ виконуються нерівності

(9.11)

Зауважимо, що це означення спирається на прийнятий вище спосіб виконання нечітких інструкцій. Деякі властивості ситуацій рівноваги в таких іграх розглянуто в § 10.

9.2 Нечіткі відношення класифікація та впорядкування

Нечітке відношення R в універсальній множині U визначається як нечітка підмножина декартового добутку $U \times U$. Деякі властивості нечітких відношень та операцій над ними описані в § 2. Тут ми коротко викладемо дві задачі, які базуються на використанні нечітких відношень: задачу класифікації та задачу впорядкування.

Розглянемо спочатку задачу класифікації. Нехай маємо набір X фотографічних портретів всіх членів кількох сімей. Потрібно розділити цей набір на групи так, щоб у кожній групі опинились портрети членів тільки однієї сім'ї. Нехай $f_I(x, y)$ — функція належності нечіткого бінарного відношення “схожість” на заданому наборі фотографій. Для кожної пари фотографій x та y значення $f_I(x, y)$ є суб'єктивна оцінка людиною ступеня подібності x та y . Це нечітке відношення можна розглядати як свого роду “експериментальні дані”, які відображають розуміння людиною поняття “схожість” в даній задачі. Наступний етап — використання цих даних для потрібної класифікації фотографій.

Зауважимо, що нечітке відношення $f_I(x, y)$ володіє властивостями рефлексивності та симетричності. Воно

називається одно кроковим відношенням в тому розумінні, що описує результати тільки попарного порівняння портретів один з одним. Для $f_1(x,y)$ вводиться n -крокове відношення $f_1(x,y)$ наступним чином

$$. \quad (9.12)$$

Це відношення є n -арною композицією вихідного “експериментального” відношення $f_1(x,y)$ і являє собою в деякому розумінні його уточнення. Неважко показати, що для довільних виконується ланцюг нерівностей

$$, \quad (9.13)$$

з якого випливає, зокрема, що для довільних послідовність має границю при . Таким чином, існує граничне відношення схожості, яке визначається рівністю

$$. \quad (9.14)$$

Це граничне відношення є кінцевим результатом обробки результатів нечітких вимірів і наступним чином використовується для класифікації.

Для довільного числа вводиться звичайне (не нечітке) відношення

$$. \quad (9.15)$$

Неважко показати, що є відношення еквівалентності в X для довільного , тобто для довільних виконуються звичайні аксіоми еквівалентності

- а) ,
- б) ,

в)
 Зауважимо, що $\sim$ є наслідком того, що граничне нечітке відношення $\sim$ має властивість

яке називають властивістю транзитивності нечіткого відношення, причому вихідне відношення $\sim$ цією властивістю не володіє.

Кінцевим етапом алгоритму класифікації є розбиття множини X на класи еквівалентності по отриманому відношенню $\sim$.

Вибір величини порогу α в цьому алгоритмі здійснюється виходячи з умов вихідної задачі. В наведеному вище прикладі з фотографіями цей вибір здійснювали наступним чином. Нехай маємо набір з 20 фотографій представників 3 сімей. Тоді величину α вибирають так, щоб в результаті реалізації алгоритму класифікації отримати 3 класи еквівалентності по відношенню $\sim$.

Перейдемо тепер до задачі впорядкування елементів множини, в якій задано нечітке відношення (наприклад, відношення переваги). Будь-яку задачу прийняття рішень можна сформулювати як задачу відшукування максимального елемента в множині альтернатив із заданим в ній відношенням переваги. Однак, в багатьох реальних ситуаціях в множині альтернатив можна вказати тільки нечітке відношення переваги, тобто вказати для кожної пари альтернатив x та y тільки ступені, з якими виконуються переваги $x \succ y$ та $y \succ x$. В таких випадках задача прийняття рішень стає невизначеною, оскільки незрозуміло, що таке максимальний елемент для нечіткого відношення переваги. Способи розкриття цієї невизначеності зводяться до того, що для кожного з розглядуваних типів нечітких відношень будується деяка функція, і елементи множини впорядковуються по відповідних їх значеннях цієї функції.

Нехай $\mu(x, y)$ — функція належності бінарного

нечіткого відношення в множині X (наприклад, відношення нестрогої переваги). Припустимо, що розглядається задача впорядкування елементів скінченної множини. Здійснимо це впорядкування за значеннями наступної функції

$$f(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i(x), \quad (9.16)$$

де $f_i(x)$ – функція

$$f_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \text{ є елементом множини } A_i \\ 0, & \text{інакше} \end{cases} \quad (9.17)$$

Для обчислення значень функції зручно користуватись наступною рівністю

$$f_i(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f_{ij}(x), \quad (9.18)$$

По відношенню до цього впорядкування максимальним в множині T є елемент x , такий, що

$$f(x) \geq f(y) \quad \forall y \in T. \quad (9.19)$$

Проілюструємо ще одну задачу впорядкування наступним прикладом.

Приклад 9.1 Потрібно вирішити, хто з дітей старший син (x_1), молодший син (x_2) чи дочка (x_3) найбільше подібна на батька (z). Задані “результати вимірювань” x_1 та x_2 , взяті окремо, подібні на батька зі ступенями 0.8 та 0.5 відповідно x_2 та x_3 , взяті окремо, подібні на батька зі ступенями 0.4 та 0.7 відповідно x_1 та x_3 , взяті окремо, подібні на батька зі ступенями 0.5 та 0.3 відповідно.

ТАКИМ ЧИНОМ, В ЦІЙ ЗАДАЧІ, НА ВІДМІНУ ВІД ПОПЕРЕДНЬОЇ, Є СТАНДАРТНИЙ ЕЛЕМЕНТ (ШАБЛОН)

ДЛЯ ВПОРЯДКОВАНОЇ МНОЖИНИ T , ТОБТО ЕЛЕМЕНТ, ЯКИЙ МАЄ ВЛАСТИВОСТІ, ЗАГАЛЬНІ ДЛЯ ВСІХ ЕЛЕМЕНТІВ ЦІЄЇ МНОЖИНИ. ІНШИМИ СЛОВАМИ, ЯКЩО μ — НЕЧІТКЕ ВІДНОШЕННЯ В T (НАПРИКЛАД, ВІДНОШЕННЯ СХОЖОСТІ), ТО

$$\mu(x, y) = \inf_{z \in T} \max\{\mu(x, z), \mu(z, y)\}. \quad (9.20)$$

ПРИ НАЯВНОСТІ СТАНДАРТНОГО ЕЛЕМЕНТА ДЛЯ КОЖНОЇ ПАРИ ЕЛЕМЕНТІВ x ТА y МНОЖИНИ T ЗАДАЮТЬСЯ ВЕЛИЧИНИ $\mu(x, z)$ І $\mu(z, y)$, ТОБТО СТУПЕНІ ВІДНОШЕННЯ (НАПРИКЛАД, СХОЖОСТІ) x ТА y , ВЗЯТИХ ОКРЕМО, ДО z . ВПОРЯДКУВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ МНОЖИНИ T З ТАКИМ ЧИНОМ ЗАДАНИМ НЕЧІТКИМ ВІДНОШЕННЯМ ПРОПОНУЄТЬСЯ ЗДІЙСНЮВАТИ У ВІДПОВІДНОСТІ ЗІ ЗНАЧЕННЯМИ ФУНКЦІЇ

$$\mu(x, y) = \inf_{z \in T} \max\{\mu(x, z), \mu(z, y)\}. \quad (9.21)$$

МАКСИМАЛЬНИМ μ В РОЗУМІННІ ЦЬОГО ВПОРЯДКУВАННЯ Є ЕЛЕМЕНТ x , ТАКИЙ, ЩО

$$\mu(x, y) = \inf_{z \in T} \max\{\mu(x, z), \mu(z, y)\}. \quad (9.22)$$

ДЛЯ ЗАДАЧІ ПРО СХОЖІСТЬ БАТЬКА ТА ДІТЕЙ ЗНАЧЕННЯ ЦІЄЇ ФУНКЦІЇ ТАКІ

звідки робимо висновок, що найбільше подібний на батька старший син (x_1), потім — дочка (x_3) і молодший син (x_2).

Зауваження 9.1 Запропоновані способи впорядкування слід розглядати тільки як в тій чи іншій мірі прийнятні чи розумні, але аж ніяк не єдині способи. Справа в тому, що самі розглядувані задачі є нечітко визначеними за своєю природою і говорити про їх однозначний розв'язок, мабуть, немає змісту.

9.3 Нечіткі автомати

Ще однією областю застосування мови нечітких множин є так звані нечіткі автомати та їх використання для моделювання самоосвітніх систем в задачах розпізнавання образів, управління і т.д. Ми обмежимося описом нечітких автоматів, які базуються на двох означеннях композиції нечітких відношень.

Означення 9.3 *Скінчений нечіткий автомат* описується набором (I, V, Q, f, g) , в якому

I — НЕПОРОЖНЯ ЗВИЧАЙНА (НЕ НЕЧІТКА) МНОЖИНА (ЗНАЧЕННЯ ВХОДУ),

V — непорожня звичайна множина (значення виходу),

Q — непорожня звичайна множина (внутрішні стани),

f — функція належності нечіткої множини в декартовому добутку , тобто відображення

g — функція належності нечіткої множини в декартовому добутку , тобто відображення .

Зміст функції f , наприклад, можна пояснити наступним чином. Нехай A — нечітка множина в , яка описує можливі (допустимі) переходи зі стану в стан для різних значень входу. Тоді — функція належності цієї

множини. Нехай, наприклад, $\mu_A(x)$, $\mu_B(x)$,
 $\mu_C(x)$. Тоді величина $\mu_A(x)$ є ступінь належності
 трійки (x, y, z) нечіткій множині A або ступінь можливості
 переходу (або просто ступінь переходу) автомата зі стану q_i
 або q_j в стан q_k , якщо значення входу
 або x . Іншими словами,

$$\mu_A(x) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \mu_{A_i}(x), \quad (9.23)$$

де k — цілочисельний параметр (“дискретний час”).

Якщо, наприклад, $\mu_A(x) = 1$, то це означає, що
 даний перехід точно можливий. Якщо ж $\mu_A(x) = 0$, то
 даний перехід точно неможливий. В проміжному випадку
 можна ввести пару чисел (порогів) α і β
 керуватись наступним

- 1) перехід x точно можливий, якщо $\mu_A(x) \geq \alpha$,
- 2) перехід x точно неможливий, якщо $\mu_A(x) \leq \beta$,
- 3) можливість переходу x не визначена, якщо $\alpha < \mu_A(x) < \beta$.

Нехай $x = (x_1, x_2, \dots, x_j)$ — послідовність значень входу довжиною
 j , тобто послідовність виду $x = (x_1, x_2, \dots, x_j)$. Тоді
 $\mu_A(x)$ — ступінь переходу зі стану q_i або q_j в
 стан q_k або q_l внаслідок дії послідовності значень
 входу x . Таким чином,
 отримуємо

Для того, щоб виразити функцію $\mu_{A \circ B}$ через задану нечітку функцію переходів автомата, можна скористатись одним з наступних означень композиції $\circ$ нечітких відношень B та A

Означення 9.4

Означення 9.5

Користуючись, наприклад, означенням 9.4, отримуємо

Частковими випадками так званого нечіткого автомата є детерміновані і не детерміновані автомати. Наприклад, якщо множина A є не нечіткою, а звичайною множиною, тобто функція f набуває тільки значень 0 або 1, причому так, що можливий тільки єдиний перехід з даного стану, то відповідний автомат є детермінованим. Аналогічним чином в рамках введеного вище означення нечіткого автомата можна описати і не детермінований автомат.

9.4 Підсумкові зауваження

В цьому та попередніх параграфах ми приділяли основну увагу розвитку понять, які лежать в основі так званого *лінгвістичного підходу* до аналізу складних або погано визначених систем і процесів прийняття рішень. Істотні відмінності цього підходу від звичайних кількісних методів системного аналізу породжують багато питань і

проблем, які є новими за своєю природою, і розв'язок яких вимагає тому великого об'єму додаткових досліджень та експериментування. Це відноситься, зокрема, до основних аспектів поняття лінгвістичної змінної, на якому ми тільки коротко зупинились в нашому викладі лінгвістичних наближень, представлення лінгвістичних невизначеностей, нечислових базових змінних, - та -взаємодій, нечітких теорем, лінгвістичних імовірнісних розподілів, нечітких блок-схем та ін.

Незважаючи на те, що лінгвістичний підхід є, по суті, відмовою від існуючих позицій в науковому дослідженні, він цілком може виявитись кроком в потрібному напрямку, тобто в напрямку меншого захоплення точним кількісним аналізом і більшого допуску важливої ролі неточності в мисленні та сприйняттях людини. Приймаючи цей напрямок, ми зможемо більше просунутись в розумінні поведінки гуманістичних систем, ніж це можливо в рамках традиційних методів.

Перелік посилань

- 1 Thomson W., Popular Lectures and Addresses, McMillan and Co., London, 1891.
- 2 Zadeh L.A., Fuzzy Languages and Their Relation to Human and Machine Intelligence, Proc. of Inter. Conference on Man and Computer, Boardeaux, France, pp. 130-165, S.Karger, Basel, 1972.
- 3 Заде Л.А., Основы нового подхода к анализу сложных систем и процессов принятия решений; в сб. «Математика сегодня», «Знание», 1974, стр. 5-49.
- 4 Zadeh L.A., Similarity Relations and Fussy Orderings, Inf. Sci., 3, pp.177-200, 1971
- 5 Bellman R.E. and Zadeh L.A., Decision-Making an a Fussy Enviroment, Management Science, 17, pp.B-141-B-164, 1970.

- 6 Bellman R.E. and Giertz M., On the Analytic Formalism of the Theory of Fuzzy Sets, Inf. Sci., 5, pp.149-156, 1973.
- 7 Zadeh L.A., Fuzzy – Set – Theoretic Interpretation of Linguistic Hedges, Jour.of Cybernetics, 2, pp.4-34, 1972.
- 8 Hopcroft J.E. and Ullman J.D., Formal Languages and Their Relations to Automata, Addison – Wesley, Reading, Mass., 1969.
- 9 Aho A.V. and Ullman J.D., The Theory of Parsing, Translation and Compiling, Prentice – Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1973.
- 10 Rescher N., Many – Valued Logic, Mc.Graw – Hill Book Co., New York, 1969.
- 11 Hughes G.E. and Cresswell M.J., An Introduction to Modal Logic, Methuen, London, 1968.
- 12 Barkan R., Functional Calculus of First Order Based on Strict Implication, Jour. Symbolic Logic, 11, pp.1-16, 1946.
- 13 Айзенк Г., Проверьте свои способности, «Мир», М., 1972.
- 14 Zadeh L.A. Probability Measures of Fuzzy Events, Jour. Math. Analysis and Appl., 23, pp.421-427, 1968.
- 15 Zadeh L.A., Fuzzy Algorithms, Inf. Control, 12, pp.94-102, 1968.
- 16 Орловский С.А., Об одной задаче принятия решений в нечетко определенной обстановке, в сб. «Вопросы прикладной математики», вып.1, Иркутск, 1976.
- 17 Орловский С.А., Игры в нечетко определенной обстановке, ЖВМ и МФ, 16, №6, 1976.
- 18 Семенцов Г.Н., Чигур І.І., Шавранський М.В., Борин В.С. Фазі-Логіка в системі контролю. Навчальний посібник.
- 19 Семенцов Г.Н., Чигур І.І., Шавранський М.В., Борин В.С. Фазі-Логіка в системі керування.
- 20 Tilli Thomas: Automatisierung mit Fuzzy – Logic: mit 3 Tabellen / Thomas Tilli. – München: Franzis, 1992, 256с.
- 21 Александр Леонов: Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzy TECH. Санкт – Петербург, „БХВ-Петербург”, 2003, 716с.