

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Івано-Франківський національний технічний
університет нафти і газу

Кафедра вищої математики

А.М. Краснодембський, Л.Д. Мельниченко

МАТЕМАТИЧНЕ

ПРОГРАМУВАННЯ

Методичні вказівки для вивчення дисципліни
„Математичне програмування”

Для студентів спеціальностей
„Економіка підприємства”
„Облік і аудит”
„Фінанси”

Івано-Франківськ
2006

МВ 02070855 – 1818 – 2006

Краснодембський А.М., Мельниченко Л.Д.
„Математичне програмування”: Методичні вказівки
для вивчення дисципліни.— Івано-Франківськ : Факел,
2006. – 48с.

Методичні вказівки для вивчення дисципліни містять рекомендації для проведення практичних занять з дисципліни „Математичне програмування”. Розроблені у відповідності з робочою програмою навчальної дисципліни та навчальним планом підготовки фахівців за спеціальностями „Економіка підприємства”, „Облік і аудит”, Фінанси”

Рецензент: Смолівик Ліана Романівна, кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої математики ІФНТУНГ

Дане видання – власність ІФНТУНГ. Забороняється тиражування та розповсюдження без відома авторів.

Зміст

Передмова

1 Зразок розв'язування задач РГР	5
1.1 Задача 1	5
1.2 Задача 2	7
1.3 Задача 3	8
1.4 Задача 4	12
1.5 Задача 5	14
1.6 Задача 6	16
1.7 Задача 7	20
1.8 Задача 8	22
1.9 Задача 9	23
1.10 Задача 10	25.
2 Варіанти завдань РГР	28
Перелік використаних джерел	48

Передмова

Математичне програмування є галузь прикладної математики, яка виникла з необхідністю розв'язання різноманітних економічних задач. Задачі економічного характеру, особливо в сфері планування виробництва – це екстремальні задачі на відшукування найвигіднішого варіанту. Складність виробництва є така, що простий перебір всіх варіантів неможливий. У зв'язку з цим велике значення мають математичні методи в економіці. Побудова та аналіз математичних моделей економічних процесів вивчаються в курсі математичного програмування.

Методичні вказівки складені на основі робочої програми для студентів спеціальностей ЕКП, ОА, ФН. Метою вказівок є допомога студентам при вивченні курсу математичного програмування і виконанні розрахунково-графічної роботи (РГР).

Зразок розв'язування задач РГР

Задача 1. Розв'язати систему

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -8, \\ 4x_1 - 5x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 9 \end{cases}$$

а) методом Гаусса; б) за правилом Крамера; в) засобами матричного числення.

Розв'язування. Визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 4 & -5 & -3 & -3 \\ 5 & 2 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 & -1 \\ -5 & 7 & -6 & 0 \\ -5 & 1 & -15 & 0 \\ 11 & -2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 7 & -6 \\ -5 & 1 & -15 \\ 11 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -5(-26) - 7 \cdot 145 - 6(-1) = -879 \neq 0$$

Значить, дана система має єдиний розв'язок.

а) Дістанемо:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & -8 \\ 4 & -5 & -3 & -3 & 0 \\ 5 & 2 & -4 & 2 & 9 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & -1 & 2 \\ -5 & 7 & -6 & 0 & -12 \\ -5 & 1 & -15 & 0 & -6 \\ 11 & -2 & 4 & 0 & 13 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & -1 & 2 \\ -5 & 7 & -6 & 0 & -12 \\ 0 & -6 & -9 & 0 & 6 \\ 0 & 67 & -46 & 0 & -67 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & -1 & 2 \\ -5 & 7 & -6 & 0 & -12 \\ 0 & -6 & -9 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -879 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Звідси, слідує:

$$\begin{aligned} -879x_3 &= 0; \quad x_3 = 0; \quad -6x_2 = 6 + 9x_3 = 6; \quad x_2 = -1; \quad -5x_1 = -12 - 7x_2 + 6x_3 = -5; \\ x_1 &= 1; \quad -x_4 = 2 - 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -3; \quad x_4 = 3. \end{aligned}$$

Отже, розв'язком розгляданої системи є

$$x_1 = 1; \quad x_2 = -1; \quad x_3 = 0; \quad x_4 = 3.$$

б) Знаходимо:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 & -1 \\ -8 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & -3 & -3 \\ 9 & 2 & -4 & 2 \end{vmatrix} = -879; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & -1 \\ 1 & -8 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & -3 & -3 \\ 5 & 9 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 879;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -8 & -2 \\ 4 & -5 & 0 & -3 \\ 5 & 2 & 9 & 2 \end{vmatrix} = 0; \Delta_4 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -8 \\ 4 & -5 & -3 & 0 \\ 5 & 2 & -4 & 9 \end{vmatrix} = -2637.$$

Згідно правила Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-879}{-879} = 1; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{879}{-879} = -1; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0}{-879} = 0;$$

$$x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{-2637}{-879} = 3.$$

в) Вводячи матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 4 & -5 & -3 & -3 \\ 5 & 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

дану систему можна записати у вигляді:

$$A \cdot X = B.$$

Маємо:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Обернена матриця

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} є алгебраїчне доповнення відповідного елемента a_{ij} матриці

A .

Оскільки

$$A^{-1} = -\frac{1}{879} \begin{pmatrix} -98 & -26 & -16 & -99 \\ 62 & -145 & 46 & -45 \\ -139 & -1 & 67 & 30 \\ -95 & 208 & 128 & -87 \end{pmatrix},$$

то

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{879} \begin{pmatrix} -98 & -26 & -16 & -99 \\ 62 & -145 & 46 & -45 \\ -139 & -1 & 67 & 30 \\ -95 & 208 & 128 & -87 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Отримаємо:

$$x_1 = 1; \quad x_2 = -1; \quad x_3 = 0; \quad x_4 = 3.$$

Задача 2. Привести основну задачу лінійного програмування з системою обмежень

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 + x_5 = 4, \\ x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 3x_5 = -5, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 - x_5 = 3, \\ 4x_1 - 5x_2 + 6x_3 - 8x_4 + 3x_5 = 5 \end{cases}$$

і лінійною формою

$$F = 9 - 3x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5$$

до основної задачі лінійного програмування з обмеженнями нерівностями.

Розв'язування. Маємо:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & -2 & 1 & | & 4 \\ 1 & -4 & -3 & 2 & -3 & | & -5 \\ 2 & 1 & 2 & 4 & -1 & | & 3 \\ 4 & -5 & 6 & -8 & 3 & | & 5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & -2 & 1 & | & 4 \\ 10 & -10 & 9 & -4 & 0 & | & 7 \\ 5 & -1 & 6 & 2 & 0 & | & 7 \\ -5 & 1 & -6 & -2 & 0 & | & -7 \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & -2 & 1 & | & 4 \\ 10 & -10 & 9 & -4 & 0 & | & 7 \\ 5 & -1 & 6 & 2 & 0 & | & 7 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & -2 & 1 & | & 4 \\ 5 & -1 & 6 & 2 & 0 & | & 7 \\ 20 & -12 & 21 & 0 & 0 & | & 21 \end{pmatrix}$$

Тому, що

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \\ 21 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -42 \neq 0,$$

то задана система сумісна і її ранг дорівнює 3. Виражаємо в цій системі прийняті базисні невідомі x_3, x_4, x_5 через вільні невідомі x_1, x_2 .

Враховуючи еквівалентність заданої та отриманої системи рівнянь, дістанемо:

$$21x_3 = 21 - 20x_1 + 12x_2; \quad x_3 = 1 - \frac{20}{21}x_1 + \frac{12}{21}x_2;$$

$$2x_4 = 7 - 5x_1 + x_2 - 6x_3 = 1 + \frac{5}{7}x_1 - \frac{17}{7}x_2; \quad x_4 = \frac{1}{2} + \frac{5}{14}x_1 - \frac{17}{14}x_2;$$

$$x_5 = 4 - 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 1 + \frac{32}{21}x_1 - \frac{19}{7}x_2.$$

Лінійна форма

$$F = 8 - \frac{20}{7}x_1 + \frac{33}{7}x_2$$

Отже, система обмежень і лінійна форма основної задачі лінійного програмування з обмеженнями нерівностями відповідно матимуть вигляд:

$$\begin{cases} x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0, \\ 20x_1 - 12x_2 \leq 21, \\ 5x_1 - 17x_2 \geq -7, \\ 32x_1 - 57x_2 \geq -21; \end{cases}$$

$$F = 8 - \frac{20}{7}x_1 + \frac{33}{7}x_2.$$

Задача 3. Для виготовлення різних виробів А і В використовується три види сировини, запаси яких складають відповідно 576, 532, 516 (кг). На виробництво одиниці виробу А витрачається сировини першого виду 8 кг, сировини другого виду 2 кг, сировини третього виду 6 кг. На виробництво одиниці виробу В витрачається сировини першого виду 3 кг, сировини другого виду 7 кг, сировини третього виду 4 кг. Прибуток від реалізації одиниці виробу А становить 4 грн. і одиниці виробу В становить 2 грн. Скласти план

виготовлення виробів А і В, який забезпечить максимальний прибуток від їх реалізації. Розв'язати задачу симплекс-методом і дати її геометричне тлумачення.

Розв'язування. Позначимо через x_1, x_2 кількість одиниць відповідно виробів А, В, призначених для виготовлення.

Згідно з умовами задачі маємо:

$$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 \leq 576, \\ 2x_1 + 7x_2 \leq 532, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 258. \end{cases}$$

Прибуток від реалізації всієї продукції становить

$$F = 4x_1 + 2x_2.$$

Потрібно серед всіх невід'ємних розв'язків приведеної системи обмежень знайти такий, при якому лінійна форма F максимізується.

Симплекс-методом знаходимо оптимальний розв'язок основної задачі лінійного програмування з системою обмежень

$$\begin{cases} x_3 = 576 - (8x_1 + 3x_2), \\ x_4 = 532 - (2x_1 + 7x_2), \\ x_5 = 258 - (3x_1 + 2x_2) \end{cases}$$

і лінійною формулою

$$F' = -(4x_1 + 2x_2)$$

Початкова симплекс таблиця має вигляд

В.нев. Б.нев.		x_1	x_2
F'	0	4	2
x_3	576	8	3
x_4	532	2	7
x_5	258	3	2

У цій таблиці обведено розв'язуючий елемент. Розв'язуючий елемент є додатний, вибраний в стовпчику однієї з вільних невідомих, яка відповідає додатному елементу для F' і рядку однієї з базисних невідомих, яка відповідає мінімальному відношенню вільного члена цієї невідомої до її елемента у вибраному стовпчику вільної невідомої.

Далі маємо:

В.нев. Б.нев.		x_1	x_2
F'	0 -288	4 $-\frac{1}{2}$	2 $-\frac{3}{2}$
x_3	<u>576</u> 72	8 $\lambda = \frac{1}{8}$	<u>3</u> $\frac{3}{8}$
x_4	532 -144	2 $-\frac{1}{4}$	7 $-\frac{3}{4}$
x_5	258 -216	3 $-\frac{3}{8}$	2 $-\frac{9}{8}$

Тут: в нижню частину кожної клітинки рядка, в якому знаходиться розв'язуючий елемент, внесено число, що дорівнює добутку числа верхньої частини цієї клітинки на число λ (λ є обернене число до розв'язуючого елемента); в нижню частину кожної клітинки стовпчика, в якому знаходиться розв'язуючий елемент, внесено число, що дорівнює добутку числа верхньої частини цієї клітинки на число $-\lambda$; в нижню частину кожної іншої клітинки внесено число, що дорівнює добутку підкреслених чисел рядка і стовпчика, в яких знаходиться ця клітинка.

Симплекс-таблиця, що відповідає новому допустимому базисному розв'язку задачі, матиме вигляд:

В.нев. Б.нев.		x_3	x_2
F'	-288	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_1	72	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
x_4	388	$-\frac{1}{4}$	$\frac{25}{4}$
x_5	42	$-\frac{3}{8}$	$\frac{7}{8}$

У кожену клітинку рядка і стовпчика, в яких знаходився розв'язуючий елемент, внесено число нижньої частини цієї клітинки попередньої таблиці; в кожену іншу клітинку внесено число, що дорівнює сумі чисел верхньої і нижньої частини цієї клітинки попередньої таблиці.

Продовжуючи симплекс-процес, одержимо:

В.нев. Б.нев.		x_3	x_2
F'	-288 -24	$-\frac{1}{2}$ $\frac{3}{14}$	$\frac{1}{2}$ $-\frac{4}{7}$
x_1	72 -18	$\frac{1}{8}$ $\frac{9}{56}$	$\frac{3}{8}$ $-\frac{3}{7}$
x_4	388 -300	$-\frac{1}{4}$ $\frac{75}{28}$	$\frac{25}{4}$ $-\frac{50}{7}$
x_5	<u>42</u> 48	$\frac{3}{8}$ $-\frac{3}{7}$	$\frac{7}{8}$ $\lambda = \frac{8}{7}$

В.нев. Б.нев.		x_3	x_5
F'	-312	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{4}{7}$
x_1	54	$\frac{2}{7}$	$-\frac{3}{7}$
x_4	88	$\frac{17}{7}$	$-\frac{50}{7}$
x_2	48	$-\frac{3}{7}$	$\frac{8}{7}$

Отже, система значень $x_1 = 54$, $x_2 = 48$, $x_3 = 0$, $x_4 = 88$, $x_5 = 0$ утворює оптимальний розв'язок розглядуваної основної задачі лінійного програмування, причому $F'_{opt} = -312$.

В прямокутній системі координат $x_1 O x_2$ зображаємо область допустимих розв'язків вказаної системи нерівностей:

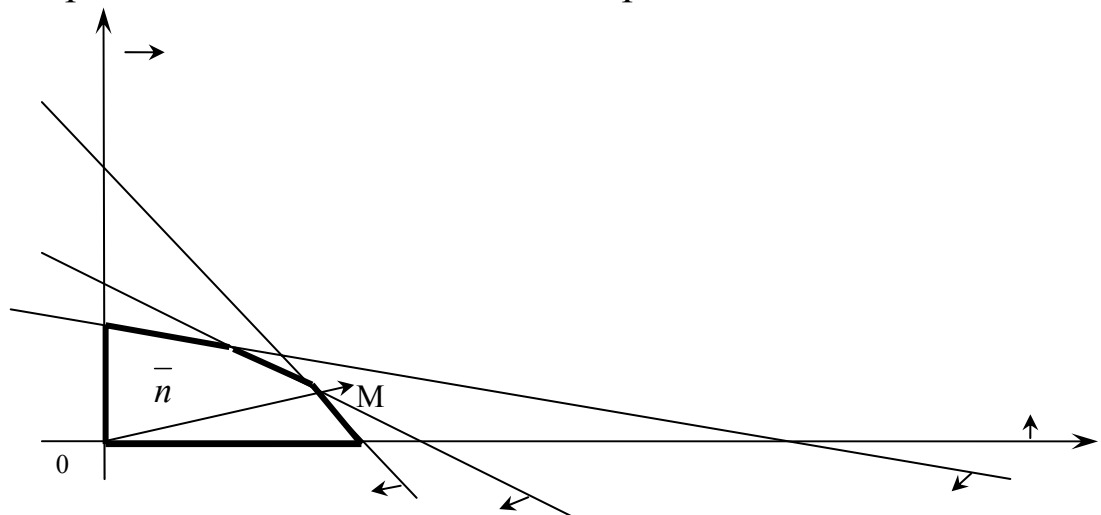


Рисунок 3.1

Вектор

$$\vec{n} = 20(4\vec{i} + 2\vec{j})$$

є перпендикулярний до сімейства прямих

$$4x_1 + 2x_2 = C \quad (C - \text{довільне число})$$

і вказує напрям збільшення лінійної форми F .

Значить, оптимальний розв'язок розгляданої задачі лінійного програмування визначається точкою $M(54,48)$, тобто $x_1 = 54$, $x_2 = 48$, причому $F_{\max} = 312$.

Для отримання максимального прибутку від реалізації всієї продукції підприємству слід виготовити 54 одиниці виробу А і 48 одиниць виробу В, причому цей прибуток становить 312 грн.

Зауваження. Можливі і інші способи складання таблиць симплекс-методу.

Задача 4. Визначити оптимальний розв'язок основної задачі лінійного програмування з системою обмежень

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 7, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 9, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 5x_5 = -6 \end{cases}$$

і лінійною формою

$$F = 8 - 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5$$

Розв'язування. Вводимо допоміжні невідомі

$$\begin{cases} y_1 = 7 - (5x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 2x_5), \\ y_2 = 9 - (3x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 2x_4 - 3x_5), \\ y_3 = 6 - (-x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5) \end{cases}$$

і допоміжну лінійну форму

$$f = y_1 + y_2 + y_3 = 22 - (7x_1 - 8x_2 + 10x_3 + 5x_4).$$

Застосовуючи симплекс-метод (спочатку мінімізуємо лінійну форму f), одержуємо:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
F	8 $\frac{27}{5}$	2 $-\frac{9}{5}$	-3 $\frac{12}{5}$	3 $-\frac{3}{5}$	-1 $\frac{6}{5}$	-1 $\frac{9}{5}$
f	22 -18	7 -6	-8 8	10 <u>-2</u>	5 4	0 6
y_1	7 $-\frac{18}{5}$	5 $-\frac{6}{5}$	-2 $\frac{8}{5}$	2 $-\frac{2}{5}$	3 $\frac{4}{5}$	-2 $\frac{6}{5}$
y_2	<u>9</u> $\frac{9}{5}$	<u>3</u> $\frac{3}{5}$	<u>-4</u> $-\frac{4}{5}$	5 $\lambda = \frac{1}{5}$	<u>-2</u> $-\frac{2}{5}$	<u>-3</u> $-\frac{3}{5}$
y_3	6 $-\frac{27}{5}$	-1 $-\frac{9}{5}$	-2 $\frac{12}{5}$	3 $-\frac{3}{5}$	4 $\frac{6}{5}$	5 $\frac{9}{5}$

		x_1	x_2	x_4	x_5
F	$\frac{13}{5}$ $-\frac{17}{95}$	$\frac{1}{5}$ $-\frac{1}{19}$	$-\frac{3}{5}$ $\frac{2}{95}$	$\frac{1}{5}$ $-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$ $\frac{4}{95}$
f	4 $-\frac{17}{19}$	1 $-\frac{5}{19}$	0 $\frac{2}{19}$	9 -1	6 $\frac{4}{19}$
y_1	$\frac{17}{5}$ $\frac{17}{19}$	$\frac{19}{5}$ $\lambda = \frac{5}{19}$	$-\frac{2}{5}$ $-\frac{2}{19}$	$\frac{19}{5}$ 1	$-\frac{4}{5}$ $-\frac{4}{19}$
x_3	$\frac{9}{5}$ $-\frac{51}{95}$	$\frac{3}{5}$ $-\frac{3}{19}$	$-\frac{4}{5}$ $\frac{6}{95}$	$-\frac{2}{5}$ $-\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$ $\frac{12}{95}$
y_3	$\frac{3}{5}$ $\frac{238}{95}$	$-\frac{14}{5}$ $\frac{14}{19}$	$\frac{2}{5}$ $-\frac{28}{95}$	$\frac{26}{5}$ $\frac{14}{5}$	$\frac{34}{5}$ $-\frac{56}{95}$

		x_2	x_4	x_5
F	$\frac{46}{19}$ $-\frac{8}{19}$	$-\frac{11}{19}$ $-\frac{16}{19 \cdot 59}$	0 $-\frac{64}{59}$	$\frac{16}{19}$ $-\frac{8}{59}$
f	$\frac{59}{19}$ $-\frac{59}{19}$	$\frac{2}{19}$ $-\frac{2}{19}$	8 -8	$\frac{118}{19}$ -1
x_1	$\frac{17}{19}$ $\frac{2}{19}$	$-\frac{2}{19}$ $\frac{4}{19 \cdot 59}$	1 $\frac{16}{59}$	$-\frac{4}{19}$ $\frac{2}{59}$
x_3	$\frac{24}{19}$ $\frac{9}{38}$	$-\frac{14}{19}$ $\frac{9}{19 \cdot 59}$	-1 $\frac{36}{59}$	$-\frac{9}{19}$ $\frac{9}{118}$
y_3	$\frac{59}{19}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{2}{19}$ $\frac{1}{59}$	$\frac{8}{76}$ $\frac{76}{59}$	$\frac{118}{19}$ $\lambda = \frac{19}{118}$

		x_2	x_4
F	2	$-\frac{35}{59}$	$-\frac{64}{59}$
x_1	1	$-\frac{6}{59}$	$\frac{75}{59}$
x_3	$\frac{3}{2}$	$-\frac{43}{59}$	$-\frac{23}{59}$
x_5	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{59}$	$\frac{76}{59}$

Система значень $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{3}{2}$, $x_4 = 0$, $x_5 = \frac{1}{2}$ дає оптимальний розв'язок даної основної задачі лінійного програмування, притому $F_{opt.} = 2$.

Задача 5. Знайти двоїтим симплекс-методом оптимальний розв'язок задачі лінійного програмування з системою обмежень

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \geq 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 7 \end{cases}$$

і мінімізованою серед всіх невід'ємних розв'язків цієї системи лінійною формою

$$F = 6 + 2x_1 + x_2 + 4x_3.$$

Розв'язування. За означенням двоїстою до заданої задачі лінійного програмування є задача лінійного програмування з системою обмежень

$$\begin{cases} 5y_1 + 4y_2 \leq 2, \\ -2y_1 + 3y_2 \leq 1, \\ 3y_1 - y_2 \leq 4 \end{cases}$$

і максимізованою серед всіх невід'ємних розв'язків цієї системи лінійною формою

$$F^* = 6 + 8y_1 + 7y_2.$$

Використовуючи додаткові невідомі, вихідну і двоїсту задачі лінійного програмування приводимо до основних задач лінійного програмування:

$$\begin{cases} U_1 = -8 + (5x_1 - 2x_2 + 3x_3), \\ U_2 = -7 + (4x_1 + 3x_2 - x_3), \end{cases}$$

$$F = 6 + (2x_1 + x_2 + 4x_3);$$

$$\begin{cases} V_1 = 2 - (5y_1 + 4y_2), \\ V_2 = 1 - (-2y_1 + 3y_2), \\ V_3 = 4 - (3y_1 - y_2); \end{cases}$$

$$F_1^* = -6 - (8y_1 + 7y_2).$$

Між невідомими вказаної пари основних задач лінійного програмування встановимо відповідність:

$$\begin{array}{ccccc} x_1, & x_2, & x_3; & U_1, & U_2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ V_1, & V_2, & V_3; & y_1, & y_2. \end{array}$$

Розв'язуючи двоїсту задачу симплекс-методом, одержимо:

		y_1	y_2
F_1^*	-6 $\frac{16}{5}$	8 $-\frac{8}{5}$	7 $-\frac{32}{5}$
V_1	$\frac{2}{5}$ $\frac{2}{5}$	5 $\lambda = \frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$ $\frac{4}{5}$
V_2	1 $\frac{4}{5}$	-2 $\frac{2}{5}$	3 $\frac{8}{5}$
V_3	4 $-\frac{6}{5}$	3 $-\frac{3}{5}$	-1 $-\frac{12}{5}$

		V_1	y_2
F_1^*	$-\frac{46}{5}$ $-\frac{27}{115}$	$-\frac{8}{5}$ $-\frac{6}{115}$	$\frac{3}{5}$ $-\frac{3}{23}$
y_1	$\frac{2}{5}$ $-\frac{36}{115}$	$\frac{1}{5}$ $-\frac{8}{115}$	$\frac{4}{5}$ $-\frac{4}{23}$
V_2	$\frac{9}{5}$ $\frac{9}{23}$	$\frac{2}{5}$ $\frac{2}{23}$	$\frac{23}{5}$ $\lambda = \frac{5}{23}$
V_3	$\frac{14}{5}$ $\frac{153}{115}$	$-\frac{3}{5}$ $\frac{34}{115}$	$-\frac{17}{5}$ $\frac{17}{23}$

		V_1	V_2
F_1^*	$-\frac{217}{23}$	$-\frac{38}{23}$	$-\frac{3}{23}$
y_1	$\frac{2}{23}$	$\frac{3}{23}$	$-\frac{4}{23}$
y_2	$\frac{9}{23}$	$\frac{2}{23}$	$\frac{5}{23}$
V_3	$\frac{95}{23}$	$-\frac{7}{23}$	$\frac{17}{23}$

Маємо: $y_1 = \frac{2}{23}$, $y_2 = \frac{9}{23}$, $F_{\max.}^* = -\frac{217}{23}$.

Згідно з двоїстим симплекс-методом і врахуванням введеної відповідності невідомих, оптимальна симплекс-таблиця вихідної задачі отримується з оптимальної симплекс-таблиці двоїстої задачі транспонуванням (заміни рядків стовпчиками) і зміною знаків всіх її елементів на протилежні.

Отже, оптимальна симплекс-таблиця вихідної задачі матиме вигляд:

		U_1	U_2	U_3
F	$\frac{217}{23}$	$-\frac{2}{23}$	$-\frac{9}{23}$	$-\frac{95}{23}$
x_1	$\frac{38}{23}$	$-\frac{3}{23}$	$-\frac{2}{23}$	$\frac{7}{23}$
x_2	$\frac{3}{23}$	$\frac{4}{23}$	$-\frac{5}{23}$	$-\frac{17}{23}$

Значення $x_1 = \frac{38}{23}$, $x_2 = \frac{3}{23}$, $x_3 = 0$ складають оптимальний розв'язок заданої задачі лінійного програмування, причому $F_{\min} = \frac{217}{13}$.

Задача 6. Визначити оптимальний розв'язок транспортної задачі, заданої таблицею

П.пр. П.в.	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси
A_1	28	22	16	19	42	140
A_2	4	9	2	8	18	200
A_3	45	32	7	21	34	160
Потреби	55	120	75	120	130	500

Розв'язування. Матриця перевезень даної транспортної задачі має вигляд:

П.пр. П.в.	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси
A_1	28 x_{11}	22 x_{12}	16 x_{13}	19 x_{14}	42 x_{15}	140
A_2	4 x_{21}	9 x_{22}	2 x_{23}	8 x_{24}	18 x_{25}	200
A_3	45 x_{31}	32 x_{32}	7 x_{33}	21 x_{34}	34 x_{35}	160
Потреби	55	120	75	120	130	500

Запишемо:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 140, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 200, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 160, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 55, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 120, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 75, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 120, \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} = 130. \end{cases}$$

Загальна вартість перевезень

$$F = 28x_{11} + 22x_{12} + 16x_{13} + 19x_{14} + 42x_{15} + 4x_{21} + 9x_{22} + 2x_{23} + 8x_{24} + 18x_{25} + \\ + 45x_{31} + 32x_{32} + 7x_{33} + 21x_{34} + 34x_{35}$$

Потрібно серед усіх допустимих розв'язків записаної системи обмежень знайти такий, при якому лінійна форма F мінімізується.

Транспортна задача розв'язується симплекс-методом з використанням матриці перевезень.

Спочатку знаходимо вихідний базисний план транспортної задачі, наприклад, методом найменшої вартості. Цей метод полягає у послідовному заповненні клітинки з найменшою вартістю попередньої матриці перевезень найбільш можливим значенням (може бути і нуль) та переході до наступної матриці перевезень, отриманої з попередньої матриці перевезень тимчасовим вилученням рядка або стовпчика з повністю використаним значенням відповідного пункту відправлення або призначення (сума рядків і стовпчиків наступної матриці перевезень в порівнянні з попередньою матрицею перевезень зменшується тільки на одиницю).

У нашому випадку, одержимо:

П.пр. П.в.	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси
A_1	28 90	22 90	16	19 50	42	140
A_2	4 55	9	2 75	8 70	18	200
A_3	45	32 30	7	21	34 130	160
Потреби	55	120	75	120	130	500

Заповнені (базисні) клітинки відповідають базисним невідомим, незаповнені (вільні) клітинки відповідають вільним невідомим розглядуваної системи обмежень (кількість заповнених клітинок дорівнює сумі пунктів відправлення та призначення матриці перевезень, зменшеній на одиницю).

Система значень $x_{11}=0$, $x_{12}=90$, $x_{13}=0$, $x_{14}=50$, $x_{15}=0$, $x_{21}=55$, $x_{22}=0$, $x_{23}=75$, $x_{24}=70$, $x_{25}=0$, $x_{31}=0$, $x_{32}=30$, $x_{33}=0$, $x_{34}=0$, $x_{35}=130$ дає вихідний базисний план заданої транспортної задачі.

Застосовуючи метод потенціалів, матимемо:

Пот.	15	22	13	19	24	
0	28 +	22 90	16 +	19 50	42 +	140
-11	4 55	9 -	2 75	8 70	18 +	200
10	45 +	32 30	7 -	21 -	34 130	160
	55	120	75	120	130	500

Сума потенціалів довільного пункту відправлення і довільного пункту призначення дорівнює відповідній вартості базисної клітинки (одному з потенціалів слід надати будь-яке значення, наприклад, нуль). Знак плюс (мінус) у вільній клітинці означає невід'ємність (від'ємність) різниці вартості та суми відповідних потенціалів, тобто вказує на невід'ємний (від'ємний) коефіцієнт відповідної вільної невідомої у виразі лінійної форми F . В матриці перевезень пунктиром зображено цикл перерахунку вільної клітинки x_{33} , що має знак мінус. Цикл перерахунку вільної клітинки є замкнута ламана лінія з горизонтальними і вертикальними ланками, які чергуються; одна з вершин ламаної знаходиться в даній вільній клітинці (їй приписують знак плюс), а всі вершини ламаної знаходяться в базисних клітинках (їм приписують знак плюс і мінус так, щоб вони чергувались по всіх вершинах ламаної). Надаючи вільній невідомій x_{33} значення, яке дорівнює

найменшому з усіх значень базисних невідомих, що відповідають від'ємним вершинам циклу перерахунку вільної клітинки x_{33} , тобто значення 30, і, компенсуючи це значення по всьому циклу перерахунку вільної клітинки x_{33} (віднімаємо вказане значення від значень всіх базисних невідомих, що відповідають від'ємним вершинам розглядуваного циклу, додаємо вказане значення всіх базисних невідомих, що відповідають додатним вершинам розглядуваного циклу, залишаємо значення всіх інших невідомих без змін), отримаємо новий базисний план заданої транспортної задачі (невідома x_{33} переходить в число базисних невідомих, невідома x_{32} переходить в число вільних невідомих).

Продовжуючи метод потенціалів для заданої транспортної задачі, одержимо:

Пот.	15	22	13	19	40	
0	28 +	22 120	16 +	19 20	42 +	140
-11	4 45	9 -	2 45	8 100	18 -	200
-6	45 +	32 30	7 30	21 +	34 130	160
	55	120	75	120	130	500

Пот.	17	22	15	19	24	
0	28 +	22 20	16 +	19 120	42 +	140
-13	4 55	9 100	2 45	8 +	18 -	200
-8	45 +	32 +	7 30	21 +	34 130	160
	55	120	75	120	130	500

Пот.	17	22	4	19	31	
0	28 +	22 20	16 +	19 120	42 +	140
-13	4 55	9 100	2 +	8 +	18 45	200
3	45 +	32 +	7 75	21 -	34 85	160
	55	120	75	120	130	500

Пот.	17	22	5	19	31	
0	28 +	22 105	16 +	19 35	42 +	140
-13	4 55	9 15	2 +	8 +	18 130	200
2	45 +	32 +	7 75	21 85	34 +	160
	55	120	75	120	130	500

Система значень $x_{11} = 0$, $x_{12} = 105$, $x_{13} = 0$, $x_{14} = 35$, $x_{15} = 0$, $x_{21} = 55$, $x_{22} = 15$, $x_{23} = 0$, $x_{24} = 0$, $x_{25} = 130$, $x_{31} = 0$, $x_{32} = 0$, $x_{33} = 75$, $x_{34} = 85$, $x_{35} = 0$ утворює оптимальний план перевезень заданої транспортної задачі, причому загальна вартість перевезень становить 7980.

Задача 7. Знайти методом Гоморі оптимальний розв'язок цілочисельної задачі лінійного програмування з системою обмежень

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \leq 26, \\ x_1 + 4x_2 \leq 22 \end{cases}$$

і максимізованою серед всіх невід'ємних, цілочисельних розв'язків цієї системи лінійною формою

$$F = 5 + 3x_1 + 8x_2.$$

Розв'язування. Знаходимо оптимальний розв'язок основної задачі лінійного програмування з системою обмежень

$$\begin{cases} x_3 = 26 - (7x_1 + 2x_2), \\ x_4 = 22 - (x_1 + 4x_2) \end{cases}$$

і лінійною формою

$$F' = -5 - (3x_1 + 8x_2).$$

Використовуючи симплекс метод, матимемо:

		x_1	x_2
F'	-5 -44	3 -2	8 -2
x_3	26 -11	7 $-\frac{1}{2}$	2 $-\frac{1}{2}$
x_4	$\frac{22}{11}$ $\frac{2}{2}$	$\frac{1}{1}$ $\frac{1}{4}$	4 $\lambda = \frac{1}{4}$

		x_1	x_4
F'	-49 $-\frac{30}{13}$	1 $-\frac{2}{13}$	-2 $\frac{1}{13}$
x_3	$\frac{15}{30}$ $\frac{13}{13}$	$\frac{13}{2}$ $\lambda = \frac{2}{13}$	$-\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{13}$
x_2	$\frac{11}{2}$ $-\frac{15}{26}$	$\frac{1}{4}$ $-\frac{1}{26}$	$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{52}$

		x_3	x_4
F'	$-\frac{667}{13}$	$-\frac{2}{13}$	$-\frac{25}{13}$
x_1	$\frac{30}{13}$	$\frac{2}{13}$	$-\frac{1}{13}$
x_2	$\frac{64}{13}$	$-\frac{1}{26}$	$\frac{7}{26}$

Згідно з отриманою оптимальною симплекс-таблицею

$$x_1 = \frac{30}{13} - \frac{2}{13}x_3 + \frac{1}{13}x_4$$

При умові невід'ємності та цілочисельності невідомих x_1, x_3, x_4 , слідує:

$$\frac{30}{13} - \frac{2}{13}x_3 + \frac{1}{13}x_4 \equiv 0; \quad \frac{2}{13}x_3 - \frac{1}{13}x_4 \equiv \frac{30}{13}; \quad \left\{ \frac{2}{13} \right\} x_3 + \left\{ -\frac{1}{13} \right\} x_4 \equiv \left\{ \frac{30}{13} \right\};$$

$$\frac{2}{13}x_3 + \frac{12}{13}x_4 \equiv \frac{4}{13}; \quad \frac{2}{13}x_3 + \frac{12}{13}x_4 \geq \frac{4}{13}.$$

Вводимо додаткову невідому

$$x_5 = \frac{2}{13}x_3 + \frac{12}{13}x_4 - \frac{4}{13} = 4 - \frac{14}{13}x_1 - \frac{4}{13}x_2 + \frac{264}{13} - \frac{12}{13}x_1 - \frac{48}{13}x_2 - \frac{4}{13} = 24 - 2x_1 - 4x_2.$$

Далі знаходимо оптимальний розв'язок основної задачі лінійного програмування з системою обмежень

$$\begin{cases} x_3 = 26 - (7x_1 + 2x_2), \\ x_4 = 22 - (x_1 + 4x_2), \\ x_5 = 24 - (2x_1 + 4x_2) \end{cases}$$

і лінійною формою

$$F' = -5 - (3x_1 + 8x_2).$$

З допомогою симплекс-методу одержуємо:

		x_1	x_2
F'	-5 -44	3 -2	8 -2
x_3	26 -11	7 $-\frac{1}{2}$	2 $-\frac{1}{2}$
x_4	$\frac{22}{2}$ $\frac{11}{2}$	$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$	4 $\lambda = \frac{1}{4}$
x_5	24 -22	2 -1	4 -1

		x_1	x_4
F'	-49 -2	1 -1	-2 1
x_3	15 -13	$\frac{13}{2}$ $-\frac{13}{2}$	$-\frac{1}{2}$ $\frac{13}{2}$
x_2	$\frac{11}{2}$ $-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$ $-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$
x_5	$\frac{2}{2}$ 2	1 $\lambda = 1$	$-\frac{1}{2}$ -1

		x_5	x_4
F'	-51	-1	-1
x_3	2	$-\frac{13}{2}$	6
x_2	5	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
x_1	2	1	-1

Значення $x_1 = 2$, $x_2 = 5$ є оптимальний розв'язок заданої цілочисельної задачі лінійного програмування, причому $F_{opt.} = 51$.

Задача 8. Методом множників Лагранжа знайти умовний мінімум функції

$$F(x) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2$$

при умові

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 6 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 1 = 0. \end{cases}$$

Розв'язування. Задана задача є задачею квадратичного і опуклого програмування.

Розглянемо допоміжну функцію

$$f(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + \lambda_1(3x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 6) + \lambda_2(3x_1 + 2x_2 - x_3 + 1)$$

(λ_1, λ_2 - множники Лагранжа).

Отримуємо:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 6x_1 + 3\lambda_1 + 3\lambda_2; \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 8x_2 - 4\lambda_1 + 2\lambda_2; \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = 4x_3 + 5\lambda_1 - \lambda_2;$$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda_1} = 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 6; \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda_2} = 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 1$$

Функція $F(x)$ має умовний мінімум в точці, координати якої задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ 4x_2 - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ 4x_3 + 5\lambda_1 - \lambda_2 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 6 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 1 = 0. \end{cases}$$

Виключаючи з цієї системи допоміжні множники λ_1, λ_2 , приходимо до системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

З отриманої системи знаходимо:

$$x_1 = \frac{10}{57}, \quad x_2 = -\frac{41}{114}, \quad x_3 = \frac{46}{57}.$$

Отже, дана функція $F(x)$ має умовний мінімум при $x_1 = \frac{10}{57}$,
 $x_2 = -\frac{41}{114}$, $x_3 = \frac{46}{57}$, причому $F_{\min} = \frac{109}{57}$.

Задача 9. Скласти оптимальний план розподілу додаткових капіталовкладень на реконструкцію і модернізацію п'ятьох споріднених підприємств, забезпечуючий приріст випуску продукції, згідно з даними таблиці

Капіталовкладення (тис.грн)	Приріст випуску продукції (тис.грн)				
	Підприємства				
	I	II	III	IV	V
50	33	44	40	34	41
100	69	72	75	68	73
150	97	107	103	99	115
200	143	158	146	137	152

Розв'язання. Позначимо через $g_k(x)$ ($k=1,2,3,4,5$) приріст випуску продукції на k -му підприємстві при капіталовкладенні x (тис.грн) і через $F_k(x)$ ($k=1,2,3,4,5$) максимальний загальний приріст випуску продукції при розподілі капіталовкладень x (тис.грн) між першим, двома першими, трьома першими, чотирма першими, п'ятьма підприємствами.

Основне функціональне рівняння матиме вигляд:

$$F_k(x) = \max_{0 \leq y \leq x} [g_k(y) + F_{k-1}(x-y)] \quad (k=2,3,4,5).$$

З метою орієнтації будемо надавати y значення кратні 50 в спадному порядку.

Оскільки

$$F_2(x) = \max_{0 \leq y \leq x} [g_2(y) + F_1(x-y)],$$

то

$$F_2(50) = \max\{44, 33\} = 44; \quad F_2(100) = \max\{72, 77, 69\} = 77, \\ F_2(150) = \max\{107, 105, 113, 97\} = 113; \quad F_2(200) = \max\{158, 140, 141, 141, 143\} = 158.$$

Оскільки

$$F_3(x) = \max_{0 \leq y \leq x} [g_3(y) + F_2(x - y)],$$

то

$$F_3(50) = \max\{40, 44\} = 44; \quad F_3(100) = \max\{75, 84, 77\} = 84; \\ F_3(150) = \max\{103, 119, 117, 113\} = 119; \quad F_3(200) = \max\{146, 147, 152, 153, 158\} = 158.$$

Оскільки

$$F_4(x) = \max_{0 \leq y \leq x} [g_4(y) + F_3(x - y)],$$

то

$$F_4(50) = \max\{34, 44\} = 44; \quad F_4(100) = \max\{68, 78, 84\} = 84; \\ F_4(150) = \max\{99, 112, 118, 119\} = 119; \quad F_4(200) = \max\{137, 143, 152, 153, 158\} = 158.$$

Оскільки

$$F_5(x) = \max_{0 \leq y \leq x} [g_5(y) + F_4(x - y)],$$

то

$$F_5(50) = \max\{41, 44\} = 44; \quad F_5(100) = \max\{73, 85, 84\} = 85; \\ F_5(150) = \max\{115, 117, 125, 119\} = 125; \quad F_5(200) = \max\{152, 159, 157, 160, 158\} = 160.$$

Отримані результати внесемо в таблицю

Капіталовкладення (тис.грн)	Підприємства				
	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
50	33	44	44	44	44
100	69	77	84	85	85
150	97	113	119	119	125
200	143	158	158	158	160

Наведена таблиця вказує, що максимальний загальний приріст випуску є 160 (тис.грн) при капіталовкладенні 200 (тис.грн).

Маємо:

$$F_5(200) = g_5(50) + F_4(150); \quad F_4(150) = g_4(0) + F_3(150); \quad F_3(150) = g_3(100) + F_2(50); \\ F_2(50) = g_2(50) + g_1(0).$$

Отже, для одержання максимального загального приросту випуску продукції капіталовкладення в об'ємі 200 тис.грн потрібно розподілити між другим (50 тис.грн), третім (100 тис.грн) і п'ятим (50 тис.грн) підприємствами, причому цей приріст становить 160 тис.грн.

Задача 10. Визначити оптимальні змішані стратегії двох гравців для матричної гри двох партнерів з нульовою сумою, заданої матрицею виграшів першого гравця

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Розв'язування. Розглянемо матричну гру двох партнерів з нульовою сумою, для якої матриця виграшів першого гравця матиме вигляд:

$$A' = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(до всіх елементів матриці A додано число $\alpha = 2$).

Відповідною парою взаємно двоїстих задач лінійного програмування є задача лінійного програмування з системою обмежень

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 1, \\ 4x_2 + 2x_3 \geq 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 1, \\ x_1 + 3x_3 \geq 1 \end{cases}$$

та мінімізованою серед всіх невід'ємних розв'язків цієї системи лінійною формою

$$F = x_1 + x_2 + x_3$$

і задача лінійного програмування з системою обмежень

$$\begin{cases} 5y_1 + 2y_3 + y_4 \leq 1, \\ 3y_1 + 4y_2 + y_3 \leq 1, \\ y_1 + 2y_2 + y_3 + 3y_4 \leq 1 \end{cases}$$

та максимізованою серед всіх невід'ємних розв'язків цієї системи лінійною формою

$$F^* = y_1 + y_2 + y_3 + y_4.$$

Маємо:

$$\begin{cases} U_1 = -1 + (5x_1 + 3x_2 + x_3), \\ U_2 = -1 + (4x_2 + 2x_3), \\ U_3 = -1 + (2x_1 + x_2 + x_3), \\ U_4 = -1 + (x_1 + 3x_3), \end{cases}$$

$$F = x_1 + x_2 + x_3;$$

$$\begin{cases} V_1 = 1 - (5y_1 + 2y_3 + y_4), \\ V_2 = 1 - (3y_1 + 4y_2 + y_3), \\ V_3 = 1 - (y_1 + 2y_2 + y_3 + 3y_4), \end{cases}$$

$$F_1^* = -(y_1 + y_2 + y_3 + y_4).$$

Між невідомими цієї пари основних задач лінійного програмування встановимо відповідність

$$\begin{array}{ccccccc} x_1, & x_2, & x_3; & U_1, & U_2, U_3, & U_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ V_1, & V_2, & V_3; & y_1, & y_2, y_3, & y_4. \end{array}$$

За допомогою симплекс-методу знаходимо:

		y_1	y_2	y_3	y_4
F_1^*	0 $-\frac{1}{2}$	1 $-\frac{5}{2}$	1 0	1 $-\frac{1}{2}$	1 $-\frac{1}{2}$
V_1	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$ $\frac{5}{2}$	$\frac{0}{0}$	2 $\lambda = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$
V_2	1 $-\frac{1}{2}$	3 $-\frac{5}{2}$	4 0	1 $-\frac{1}{2}$	0 $-\frac{1}{2}$
V_3	1 $-\frac{1}{2}$	1 $-\frac{5}{2}$	2 0	1 $-\frac{1}{2}$	3 $-\frac{1}{2}$

		y_1	y_2	V_1	y_4
F_1^*	$-\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{8}$	$-\frac{3}{2}$ $-\frac{1}{8}$	1 $-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$ $\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{8}$
y_3	$\frac{1}{2}$ 0	$\frac{5}{2}$ 0	0 0	$\frac{1}{2}$ 0	$\frac{1}{2}$ 0
V_2	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{8}$	4 $\lambda = \frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{8}$
V_3	$\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{2}$ $-\frac{1}{4}$	2 $-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$	$\frac{5}{2}$ $\frac{1}{4}$

		y_1	V_2	V_1	y_4
F_1^*	$-\frac{5}{8}$ $-\frac{5}{88}$	$-\frac{13}{8}$ $\frac{35}{88}$	$-\frac{1}{4}$ $\frac{5}{44}$	$-\frac{3}{8}$ $\frac{5}{88}$	$\frac{5}{8}$ $-\frac{5}{22}$
y_3	$\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{22}$	$\frac{5}{2}$ $\frac{7}{22}$	0 $\frac{1}{11}$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{22}$	$\frac{1}{2}$ $-\frac{2}{11}$
y_2	$\frac{1}{8}$ $\frac{1}{88}$	$\frac{1}{8}$ $-\frac{7}{88}$	$\frac{1}{4}$ $-\frac{1}{44}$	$-\frac{1}{8}$ $-\frac{1}{88}$	$-\frac{1}{8}$ $\frac{1}{22}$
V_3	$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{11}$	$-\frac{7}{4}$ $-\frac{7}{11}$	$-\frac{1}{2}$ $-\frac{2}{11}$	$-\frac{1}{4}$ $-\frac{1}{11}$	$\frac{11}{4}$ $\lambda = \frac{4}{11}$

		y_1	V_2	V_1	V_3
F_1^*	$-\frac{15}{22}$	$-\frac{27}{22}$	$-\frac{3}{22}$	$-\frac{7}{22}$	$-\frac{5}{22}$
y_3	$\frac{5}{11}$	$\frac{31}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{6}{11}$	$-\frac{2}{11}$
y_2	$\frac{3}{22}$	$\frac{1}{22}$	$\frac{5}{22}$	$-\frac{3}{22}$	$\frac{1}{22}$
y_4	$\frac{1}{11}$	$-\frac{7}{11}$	$-\frac{2}{11}$	$-\frac{1}{11}$	$\frac{4}{11}$

Звідси слідує:

$$x_1 = \frac{7}{22}, x_2 = \frac{3}{22}, x_3 = \frac{5}{22}, F = \frac{15}{22}; y_1 = 0, y_2 = \frac{3}{22}, y_3 = \frac{5}{11}, y_4 = \frac{1}{11},$$

$$F^* = \frac{15}{22}; V' = \frac{22}{15}.$$

Значить, $\bar{X} = \left(\frac{7}{15}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right)$, $\bar{Y} = \left(0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{15}\right)$ є оптимальні змішані

стратегії відповідно першого, другого гравців для заданої матричної гри двох партнерів з нульовою сумою, причому ціна цієї гри $V = V' - \alpha = -\frac{8}{15}$.