

**Івано-Франківський національний технічний
університет нафти і газу**

Кафедра вищої математики

Криштопа Л.І., Савчук Я.І., Яцишин В.Д.

**Диференціальне числення
функцій декількох змінних**

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

2008

Міністерство освіти і науки України

**Івано-Франківський національний технічний
університет нафти і газу**

Кафедра вищої математики

Криштопа Л.І., Савчук Я.І., Яцишин В.Д.

Диференціальне числення функцій декількох змінних

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

Для студентів інженерно-технічних спеціальностей

Івано-Франківськ 2008

Дане видання – власність ІФНТУНГ. Забороняється тиражування та розповсюдження.

МВ

Криштопа Л.І., Савчук Я.І., Яцишин В.Д. Диференціальне числення функцій декількох змінних: Конспект лекцій. – Івано-Франківськ: Факел, 2008.- 88с.

Досить часто в природі та в техніці зустрічаються випадки, коли явища й процеси описуються двома і більше величинами. Отже, мають справу з функціями, в яких незалежних змінних є відповідно дві, три і т. д.. Такі функції називаються функціями декількох змінних і очевидна важливість потреби в їх вивченні.

Пропонований конспект лекцій покликаний допомогти студентам ознайомитись із вузівським курсом диференціального числення функцій декількох змінних, навчитися застосовувати диференціальне числення до важливих практичних задач. Виклад матеріалу ілюструється численними прикладами, зразками їх розв'язування.

Конспект лекцій розрахований на студентів усіх інженерно-технічних спеціальностей вищих технічних навчальних закладів.

Рецензенти:

Заторський Р.А . –кандидат фізико-математичних наук ;
доцент Прикарпатського університету ім. В. Стефаника ;

Гургула С.І. –канд. фізико-математичних наук ; доцент Івано-
Франківського національного технічного університету нафти і газу .

Дане видання – власність ІФНТУНГ. Забороняється тиражування та розповсюдження.

Зміст

Вступ

Лекція 1 Поняття функції декількох змінних, її границя, неперервність та частинні похідні5

1.1 Означення функції декількох змінних5

1.2 Лінії та поверхні рівня7

1.3 Границя функції декількох змінних9

1.4 Неперервність функції декількох змінних12

*1.5 Частинні та повний прирости функції
декількох змінних14*

1.6 Частинні похідні та їх геометричний зміст .15

Лекція 2 Диференційованість функції декількох змінних 21

*2.1 Означення диференційованості, зв'язок з
неперервністю та існуванням частинних
похідних 21*

2.2 Диференціал функції декількох змінних 24

*2.3 Частинні похідні та диференціал складеної функції
..... 29*

2.4 Диференціювання неявних функцій 33

Лекція 3 Деякі застосування частинних похідних ... 39

*3.1 Дотична площина та нормаль до поверхні.
Геометричний зміст диференціала функції двох
змінних 39*

3.2 Скалярне поле. Похідна за напрямком 43

3.3 Градієнт, його властивості 49

<u>Лекція 4</u>	Частинні похідні та диференціали вищих порядків. Формула Тейлора	52
4.1	Частинні похідні вищих порядків	52
4.2	Диференціали вищих порядків	57
4.3	Формула Тейлора для функції двох змінних ...	64
<u>Лекція 5</u>	Екстремуми функцій декількох змінних ...	69
5.1	Локальні екстремуми функцій декількох змінних. Необхідні умови екстремуму	69
5.2	Достатні умови екстремуму	72
5.3	Глобальні екстремуми функцій декількох змінних	77
5.4	Умовний екстремум	82
<u>Література</u>		88

Лекція 1 Поняття функції декількох змінних, її границя, неперервність та частинні похідні

1.1 Означення функції декількох змінних

В природі та в техніці досить часто зустрічаються випадки, коли явища й процеси описуються двома та більше величинами. В цьому можна переконатись наступними простими прикладами.

Приклад 1.1. Площа бічної поверхні кругового конуса з радіусом основи та твірною визначається формулою

Як бачимо, кожній парі значень та відповідає певне значення площі .

Приклад 1.2. Об'єм прямокутного паралелепіпеда з ребрами обчислюється за формулою

В даному випадку кожній впорядкованій трійці значень відповідає певне значення об'єму .

Означення 1.1. Якщо кожній точці із деякої області D , яка є підмножиною евклідового простору , поставлено у відповідність одне єдине дійсне число (E – деяка підмножина множини дійсних чисел), то кажуть, що на множині E задано функцію n змінних і записують

, або ;

називають незалежними змінними або аргументами, множину D – областю визначення або областю існування функції, а множину E – множиною значень функції.

Зауваження 1.1. Інколи зустрічаються випадки, коли точці ставиться у відповідність декілька дійсних чисел . В такому випадку говорять про багатозначні функції

декількох змінних. Надалі ми ці випадки не розглядатимемо.

Зауваження 1.2. Надалі, оскільки не виникатиме порушення загальності міркувань, розглядатимемо функції двох або трьох змінних. Це дасть змогу спростити запис і виклад теорії. Для зручності функцію двох змінних запишуватимемо у вигляді

$$(1.1)$$

а функцію трьох змінних - у вигляді

$$(1.2)$$

Зауваження 1.3. Як правило, під областю визначення функції розумітимемо так звану природню область визначення функції – множину всіх точок , для яких вираз має зміст.

Приклад 1.3. Знайти область визначення функції

Оскільки підкореневий вираз не може бути від'ємним, то областю визначення буде множина всіх точок $M(x, y)$ площини,

для яких

а б о

з а м к н у т и й

к о о р д и н а т и

, тобто
круг з центром в початку
радіусом 2 (рис. 1.1).

Означення 1.2. Для
двох змінних ,

області D , геометричне
для всіх
називатимемо графіком
цієї функції.

Виходячи з цього озна
графіком функції двох змінних буд



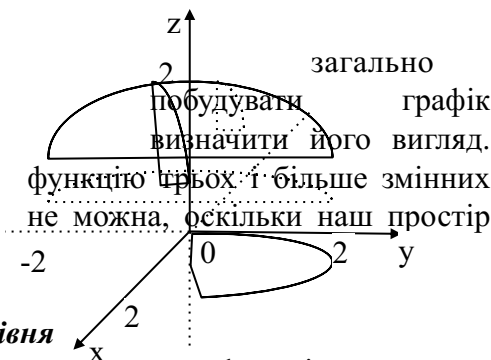
Рисунок 1.1

і м о , щ о
я в п р о с т о р і .

Наприклад, для розглянутої вище функції її
графіком буде верхня півсфера з центром в початку координат і

радіусом $R=2$ (рис. 1.2).

Відзначимо, що в
 му випадку не вдається
 функції двох змінних та
 Також слід зауважити, що
 геометрично зобразити вже
 тривимірний.



1.2 Лінії та поверхні рівня

Більш наочним способом геометричного функції двох
 змінних порівняно з побудовою її графіка. Рисунок 1.2 і допомогою
 ліній однакового рівня.

Нехай функцію $z = f(x, y)$ зображено деякою поверхню. Перетнувши цю поверхню
 площиною $z = c$, отримаємо деяку поверхню. Ортогональна проекція її на площину
 називається лінією рівня функції $z = c$. Зрозуміло, що рівняння лінії рівня в площині

матиме вигляд $f(x, y) = c$.

Надаючи c різних дійсних значень, щоразу діставатимемо на
 площині Oxy різні лінії рівня.

Чим більше побудовано ліній рівня, тим яскравіше можна
 уявити характер зміни функції, а саме, в тій частині області
 визначення функції, де густіше розміщені лінії рівня, функція
 швидше змінюється (частина поверхні крутіша), а там, де лінії
 рівня розміщені рідше, функція змінюється повільніше (частина
 поверхні пологіша).

Приклад 1.4. Для функції $z = 4 - x^2 - y^2$ рівняння ліній рівня
 матимуть вигляд $x^2 + y^2 = 4 - c$.

Очевидно, що це є з центрами в початку радіусами

Отже, лініями функції є ні кола (рис. 1.3).

Як уже лось, функцію трьох змінних зобразити не можна. Разом з тим, множина точок простору, в яких функція трьох змінних приймає певне значення, утворить деяку поверхню, яка називається поверхнею рівня. Таким чином, рівняння поверхні рівня для функції (1.2) матиме вигляд



Рисунок 1.3

Приклад 1.5. Для функції рівняння поверхонь рівня матимуть вигляд

рівняння

$$(1.3)$$

При рівняння (1.3) є р і в н я н н я м го гіперболоїда, при - р і в н я н н я м кругового конуса і при - р і в н я н н я м д в о п о р о ж н и н н о г о гіперболоїда.

1.3 Границя функції

декількох змінних

Введемо спочатку важливе поняття околу точки.

важливе поняття околу

Означення 1.3. Околом (- околом) точки

називатимемо множину всіх точок M , таких що

З цього означення випливає, що на площині - околom точки буде множина всіх тих точок , для

яких , тобто відкритий круг з радіусом

і центром в точці (рис. 1.4),

а в просторі - околom точки

буде множина всіх точок

я к и х

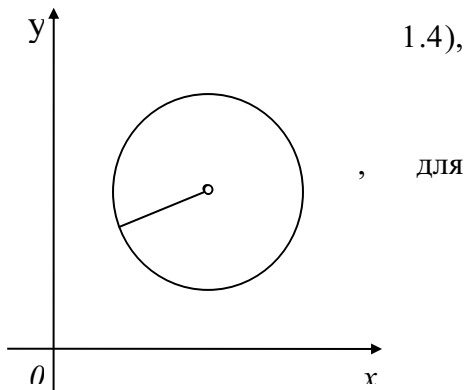


Рисунок 1.4 іа куля з радіусом і центром в точці .

Надалі - окіл точки позначатимемо .

Зауваження 1.4. Якщо з - околу точки викинуто саму точку , то такий окіл називатимемо *проколотим околom* (- *околom*) і позначатимемо .

Означення 1.4. Точка називається *внутрішньою точкою* множини D , якщо вона належить цій множині разом зі своїм деяким околom.

Означення 1.5. Точка називається *межовою точкою* множини D , якщо в будь-якому її проколотому околi є точки, які належать цій множині і є точки, які їй не належать.

Тепер можемо дати означення границі функції в точці.

Означення 1.6. Нехай функція двох змінних $f(x, y)$ визначена в деякій області D , для якої точка (x_0, y_0) є внутрішньою або межевою. Число A називається границею функції $f(x, y)$ в точці (x_0, y_0) при $\rho \rightarrow 0$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що для всіх точок (x, y) має місце нерівність

(1.4)

Це записують таким чином:

(1.5)

Умова $\lim_{\rho \rightarrow 0} f(x, y) = A$ означає $f(x, y) \rightarrow A$ або

, що в свою чергу рівносильне такому:

та $\varepsilon > 0$. Тоді рівність (1.5) можна записати ще й так:

(1.6)

Зауваження 1.5. З наведеного вище означення випливає, що в випадку існування границі функції декількох змінних в точці (x_0, y_0) ми отримуватимемо те саме значення границі, рухаючись до точки (x_0, y_0) вздовж довільної лінії в межах області визначення функції. Відповідно, якщо нам вдасться вказати хоча б дві лінії, рухаючись вздовж яких до точки (x_0, y_0) , ми отримаємо різні значення границь, то звідси випливатиме, що в точці (x_0, y_0) границя функції не існує.

Зауваження 1.6. Всі відомі теореми про границі для функцій однієї змінної узагальнюються на випадок функцій декількох змінних. Доведення цих теорем ми опускаємо,

оскільки вони майже не відрізняються від доведення відповідних теорем для функцій однієї змінної.

Розглянемо приклади.

Приклад 1.6. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$.

Використовуючи властивість границі для добутку функцій, а також першу важливу границю, матимемо:

Приклад 1.7. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$.

З очевидної нерівності $|\tan x| > |x|$ отримуємо

$\frac{1}{x} < \frac{\tan x}{x} < \frac{1}{x}$. Звідси, при $x \rightarrow 0$, отримаємо

.

Оскільки $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \pm \infty$ та $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$, то за теоремою про

границю проміжної функції $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$.

Приклад 1.8. Розглянемо функцію

Вона визначена в усіх точках площини. Покажемо, що ця функція в точці $O(0;0)$ границі не має. Як уже відзначалось, для цього достатньо вказати два напрямки, рухаючись вздовж яких до точки $O(0;0)$, отримуємо різні значення границь. Дійсно,

вздовж прямої маємо , тому й ; а

вздовж прямої маємо , тому й

.

1.4 Неперервність функції декількох змінних

Нехай функція двох змінних визначена в деякій області D . Точка і є внутрішньою або межевою для D .

Означення 1.7. Функція називається неперервною в точці , якщо

$$, \quad (1.7)$$

причому точка прямує до точки довільним чином, залишаючись в області визначення функції.

Якщо функція неперервна в кожній точці деякої області, то вона називається *неперервною* в цій області.

Якщо функція не є неперервною в точці, то вона називається *розривною* в цій точці, а сама точка називається *точкою розриву* даної функції.

Використовуючи означення неперервності функції декількох змінних та відповідні теореми про границі, можна довести, що арифметичні операції над неперервними функціями та побудова складеної функції з неперервних функцій приводять до

неперервних функцій.

Функцію декількох змінних називатимемо *елементарною*, якщо вона є елементарною по кожному зі своїх аргументів.

Сформулюємо без доведення наступну важливу теорему.

Теорема 1.1. Кожна елементарна функція декількох змінних є неперервною в усіх точках своєї області визначення.

Приклад 1.9. Дослідимо на неперервність розглянуту в прикладі 1.8 функцію.

В усіх точках площини, відмінних від початку координат,

$z = \frac{1}{x^2 + y^2}$, тобто є елементарною, а значить, і неперервною. Ми показали, що в точці $O(0;0)$ наша функція не має границі, отже вона не може бути неперервною в цій точці, тобто є розривною.

Разом з тим, $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$ та $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$, тому

$z = \frac{1}{x^2 + y^2}$ та $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$, тобто що в точці $O(0;0)$ задана функція неперервна по кожному зі своїх аргументів.

Отже, на основі щойно розглянутого приклада можемо зробити висновок, що з неперервності функції декількох змінних по кожному зі своїх аргументів в деякій точці ще не випливає неперервність її в цій точці, хоча навпаки, звичайно, вірно.

Для формулювання подальших властивостей неперервних функцій нам потрібні будуть наступні означення.

Означення 1.8. Область називається *відкритою*, якщо всі її точки внутрішні.

Означення 1.9. Область називається *замкнутою*, якщо цій області належать всі її межові точки. Множина всіх межових точок області називається її *межею*.

Означення 1.10. Область на площині (в просторі) називається *обмеженою*, якщо вона повністю міститься в

деякому крузі (деякій кулі).

Означення 1.11. Область називається зв'язною, якщо дві її довільні точки можна з'єднати неперервною лінією, яка повністю належить цій області.

Теорема 1.2. Нехай функція $f(x)$ декількох змінних визначена і неперервна в деякій обмеженій замкнутій області D . Тоді мають місце наступні властивості.

1⁰. D - обмежена в D , тобто існує таке число M , що для всіх $x \in D$ виконується нерівність $|f(x)| \leq M$.

2⁰. Дана функція досягає в D своїх найменшого та найбільшого значень, тобто існують такі точки x_1 та x_2 , що для всіх $x \in D$ виконується нерівність $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$.

3⁰. Якщо область D є ще й зв'язною, то $f(x)$ приймає всі проміжні значення між своїми найменшим та найбільшим, тобто для довільного η існує така точка $x \in D$, що $f(x) = \eta$.

1.5 Частинні та повний прирости функції декількох змінних

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякій відкритій області D . Візьмемо в цій області довільну точку x_0 . Якщо зафіксувати $x_1, x_2, \dots, x_n$, то розглядувана функція $f(x)$ є функцією однієї змінної, а саме функцією від x .

Надамо x довільного приросту Δx так, щоб точка $x_0 + \Delta x$ належала області D . Тоді функція $f(x)$ отримає приріст Δf , який називається

частинним приростом функції Δf по x в точці x_0 і позначають

$$\Delta f_x = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0), \quad (1.8)$$

або

Аналогічно позначають частинний приріст по y в точці y_0 :

$$\Delta f_y = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0). \quad (1.9)$$

Візьмемо ще якусь точку (x_0, y_0) в області D , відмінну від (x_0, y_0) . Різниця значень функції f в точках M та N називається повним приростом функції f і визначається формулою

$$\Delta f = f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0). \quad (1.10)$$

Слід відзначити, що, взагалі кажучи, повний приріст не дорівнює сумі частинних приростів.

Аналогічним чином визначаються частинні та повний прирости функцій довільної кількості змінних. Наприклад, для функції трьох змінних матимемо:

$$\Delta f_x = f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0),$$

$$\Delta f_y = f(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0),$$

$$\Delta f_z = f(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0).$$

Повернемось до означення неперервності функції. Якщо позначити Δx , Δy , то рівність (1.7) можна переписати так:

або

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad (1.11)$$

Рівність (1.11) дає ще одне означення неперервності.

Аналогічно до (1.11) отримуємо, що функція
неперервна: по аргументу x в точці x_0 , якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$; по
аргументу y в точці y_0 , якщо $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = f(x, y_0)$.

1.6 Частинні похідні та їх геометричний зміст

Нехай функція декількох змінних визначена в деякій відкритій області D .

Означення 1.12. Границю відношення частинного приросту функції по якомусь аргументу в точці (x_0, y_0) до приросту цього аргумента при останньому прямуючому до нуля в випадку існування та скінченності границі називають *частинною похідною* від розглядуваної функції по вказаному аргументу.

Для функції двох змінних частинну похідну по x позначають одним із символів

$$\frac{\partial f}{\partial x}; \quad f'_x; \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Аналогічно частинну похідну по y позначають відповідно

$$\frac{\partial f}{\partial y}; \quad f'_y; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Отже, за означенням 1.12, частинні похідні f'_x та f'_y визначаються такими співвідношеннями:

,

Якщо замість фіксованої точки беруть довільну точку , то частинні похідні відповідно записують та .

Операцію знаходження частинних похідних функції декількох змінних називають її *диференціюванням*.

Зауваження 1.7. Оскільки в означенні частинної похідної функції по якомусь з аргументів всі інші аргументи вважаються сталими, то при диференціюванні даної функції по цьому аргументу треба її диференціювати як функцію цієї однієї змінної, вважаючи решту змінних сталими. Тому правила знаходження частинних похідних функції декількох змінних ті самі, що й правила диференціювання функції однієї змінної.

Приклад 1.10. Знайти частинні похідні функцій:

$$a) \quad ; \quad б) \quad .$$

Р о з в ' я з а н н я

$$a) \quad ,$$

;

$$б) \quad ;$$

;

Зауваження 1.8. Як відомо, для функції однієї змінної неперервність її є необхідною умовою існування похідної в розглядуваній точці. Виявляється, що для функцій декількох змінних це не так. В цьому можна переконатись, розглянувши уже відому нам функцію

Для цієї функції її частинні прирости в точці $O(0;0)$ дорівнюють:

;

Тому існують

,

Але нам відомо (приклад 1.9), що дана функція в точці $O(0;0)$ є розривна.

Відзначимо також, що із неперервності функції в точці ще не випливає існування її частинних похідних в цій точці. Дійсно, наприклад, функція є визначена і неперервна в

усіх точках площини, зокрема і в точці $O(0;0)$, Але в цій точці не існує частинних похідних по жодному з аргументів.

Висновок 1.1. Зі сказаного вище та зауваження 1.8 випливає, що ніякого зв'язку між неперервністю функції декількох змінних в точці та існуванням її частинних похідних в цій точці немає.

З'ясуємо тепер геометричний зміст частинних похідних функції двох змінних.

Нехай
зображена
В області D
визначення
функції
Довільну точку
в області D
визначимо
в точці

Враховуючи зауваження 1.8 та зауваження 1.9, при
похідної по аргументу x функції
змінна y вважається сталою, яка дорівнює
при
є функцією однієї змінної

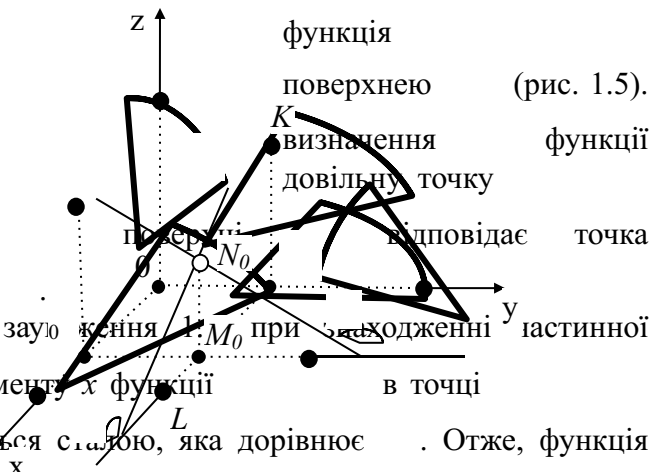


Рисунок 1.5

Геометричним образом цієї функції є лінія перетину
поверхні
площиною

. На рисунку 1.5 це лінія KN_0L . Похідна
функції
в точці
означає тангенс кута
дотична до кривої KN_0L в точці N_0 , з додатним напрямком осі Ox .
Очевидно, що

Отже, зі сказаного вище та з останньої рівності випливає

такий геометричний зміст частинної похідної по x функції
 $\frac{\partial z}{\partial x}$: частинна похідна по x функції $z = z(x, y)$ в точці
 (x_0, y_0) дорівнює тангенсу кута між додатним напрямком осі
 Ox і дотичною, проведеною в точці N_0 до
кривої KN_0L .

Якщо для функції $z = z(x, y)$ взяти y і провести
міркування, аналогічні до вище проведених, то отримаємо
наступний геометричний зміст частинної похідної по y функції
 $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точці (x_0, y_0) : частинна похідна по y функції
 $z = z(x, y)$ в точці (x_0, y_0) дорівнює тангенсу кута між
додатним напрямком осі Oy і дотичною, проведеною в точці
 N_0 до кривої, яка утвориться при перетині
поверхні $z = z(x, y)$ площиною, яка проходить через точку N_0 і
паралельна площині yOz .

Лекція 2 Диференційованість функції декількох змінних

2.1 Означення диференційованості, зв'язок з неперервністю та існуванням частинних похідних

Нехай функція двох змінних визначена в деякій області D , для якої точка є внутрішньою. Надамо аргументам x та y в даній точці приростів Δx та Δy , одночасно не рівних нулю, так, щоб точка належала області D .

Означення 2.1. Функція називається диференційованою в точці, якщо її повний приріст в цій точці можна подати у вигляді

$$\Delta z = \Delta z_{\text{линій}} + o(\rho), \quad (2.1)$$

де A та B не залежать від приростів Δx та Δy , а $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ та $\rho \rightarrow 0$ - нескінченно малі функції при $\rho \rightarrow 0$ та $\rho > 0$, тобто

$$\Delta z_{\text{линій}} = A \Delta x + B \Delta y. \quad (2.2)$$

Приклад 2.1. Для функції повний приріст в довільній точці можна записати так:

Легко бачити, що повний приріст для заданої функції записано в формі (2.1) з $A = \frac{\partial z}{\partial x}$, $B = \frac{\partial z}{\partial y}$, $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, які задовольняють всім умовам в означенні 2.1. Отже, наша функція диференційована в усіх точках площини.

Нижченаведені теореми стосуватимуться зв'язку диференційованості з неперервністю та існуванням частинних похідних.

Теорема 2.1. Якщо функція f диференційована в точці M_0 , то вона неперервна в цій точці.

Д о в е д е н н я. Згідно означення 2.1 для повного приросту функції f в точці M_0 має місце рівність (2.1). Кожний з чотирьох доданків правої частини цієї рівності є нескінченно малою функцією при $\rho \rightarrow 0$ та $\theta \rightarrow 0$, значить, і їхня сума – нескінченно мала функція при $\rho \rightarrow 0$ та $\theta \rightarrow 0$, тобто

Ця рівність означає неперервність нашої функції в точці M_0 .

Теорему доведено.

Зауваження 2.1. Як випливає з цієї теореми, неперервність функції в точці є необхідною умовою диференційованості в цій точці. Ми нижче переконаємось, що неперервність не є достатньою умовою диференційованості.

Теорема 2.2. Якщо функція f диференційована в точці M_0 , то в цій точці існують частинні похідні функції, причому

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(M_0 + \Delta x_i) - f(M_0)}{\Delta x_i}, \quad (2.3)$$

Д о в е д е н н я. Для нашої функції f в точці M_0 виконується рівність (2.1). Покладемо в цій рівності $\Delta x_i = \rho \delta_i$, а $\theta = 0$. Тоді повний приріст Δf співпадає з частинним приростом Δf_i і рівність (2.1) набуде такого вигляду:

Розділивши обидві частини останньої рівності на Δx , матимемо:

З врахуванням (2.2) ми бачимо, що існує $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Але за означенням $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$. Це означає, що існує

Якщо ж в рівності (2.1) покласти $\Delta x = x - x_0$, а $\Delta y = y - y_0$, то отримаємо:

Розділивши обидві частини цієї рівності на Δx і перейшовши до границі при $\Delta x \rightarrow 0$, дістанемо

Теорему доведено.

Зауваження 2.2. З останньої теореми випливає, що необхідною умовою диференційованості функції декількох змінних в точці є існування усіх частинних похідних в цій точці. Відзначимо, що для функції однієї змінної існування її похідної в точці є необхідною і достатньою умовою диференційованості функції в цій точці. Але для диференційованості функції декількох змінних в точці існування усіх її частинних похідних в цій точці не є достатньою умовою. Це випливає з наступних міркувань.

В зауваженні 1.8 ми вказали функцію

яка в точці $O(0;0)$ має частинні похідні, але разом з тим розривна в цій точці, тому, відповідно до теореми 2.1, не може бути диференційованою в точці $O(0;0)$.

Зауваження 2.3. Як видно з попередніх міркувань, ніякого зв'язку між неперервністю функції декількох змінних в точці та існуванням частинних похідних в цій точці немає.

Теорема 2.3. Якщо функція $f(x, y)$ в околі точки (x_0, y_0) має частинні похідні і ці частинні похідні є неперервними функціями в точці (x_0, y_0) , то функція диференційована в даній точці.

Д о в е д е н н я. Повний приріст функції в точці (x_0, y_0) можемо записати так:

$$(2.4)$$

Вираз у перших дужках – приріст в точці x_0 функції однієї змінної $f(x)$, а вираз в других дужках є приростом в точці y_0 функції однієї змінної $f(y)$. Відповідно до умови теореми функції $f(x)$ та $f(y)$ мають відповідно похідні (це частинні похідні від функції $f(x, y)$) в деяких околах точок x_0 та y_0 . Тому за теоремою Лагранжа ці прирости можна записати так:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (2.5)$$

де h та x_0 - якісь числа з інтервала $(0;1)$.

Розглянемо функції

$$f(x) = x^2 \quad (2.6)$$

Оскільки обидві частинні похідні $f'(x)$ та $f''(x)$ є неперервними функціями в точці x_0 , то

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Рівності (2.6) можемо переписати так:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Тоді, з врахуванням (2.5), повний приріст (2.4) запишеться наступним чином:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|) \quad (2.7)$$

Значить, відповідно до означення 2.1, функція диференційована в точці x_0 .
Теорему доведено.

2.2 Диференціал функції декількох змінних

Нехай функція $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ диференційована в точці $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$.

. Тоді її повний приріст в цій точці можна

записати у вигляді (2.7)

Означення 2.2. Вираз

(2.8)

називається *повним диференціалом* функції

в точці

Відзначимо, що, крім записаного позначення часто повний диференціал позначають

Якщо - довільна точка області D , в якій функція диференційована, то повний диференціал в цій точці запишуватимемо

(2.9)

Зауваження 2.4. Якщо покласти за означенням , то повний диференціал в довільній точці запишеться у вигляді

(2.10)

або

(2.11)

Розглянемо приклади.

Приклад 2.2. Знайти повний диференціал функції

в точці

Р о з в ' я з а н н я

В прикладі 1.10 а) ми знайшли частинні похідні заданої функції. Значення їх в заданій точці дорівнюватимуть:

Тоді, відповідно до (2.10), шуканий диференціал в заданій точці буде таким:

***Зауваження 2.5.** Як бачимо з (2.11), повний диференціал функції двох змінних дорівнює сумі добутків частинних похідних по кожному з аргументів на диференціали цих аргументів. Так само визначається повний диференціал функції більшої кількості аргументів. Зокрема, повний диференціал для функції трьох змінних у випадку її диференційованості виглядатиме так:*

$$(2.12)$$

Приклад 2.3. Знайти повний диференціал функції

Р о з в ' я з а н н я

Підставивши знайдені в прикладі 1.10 б) частинні похідні для заданої функції в (2.12), отримаємо

Займемось оцінкою двох останніх доданків правої частини рівності (2.7).

Розглянемо величину . Зрозуміло, що

тоді і тільки тоді, коли одночасно та .

Суму двох останніх доданків правої частини (2.7) можна записати в такому вигляді:

$$\dots \quad (2.13)$$

Позначимо

$$\dots \quad (2.14)$$

Оскільки $\dots$, $\dots$, а на основі рівностей (2.2)

та $\dots$ при $\dots$, то й

$$\dots \quad (2.15)$$

З врахуванням (2.8), (2.13) та (2.14) рівність (2.7) можемо переписати так:

$$\dots \quad (2.16)$$

Тоді

Висновок 2.1. Отже, у випадку диференційованості функції в деякій точці різниця між її повним приростом та повним диференціалом в цій точці є нескінченно малою вищого порядку, ніж $\dots$, при $\dots$. Тому повний диференціал функції dz ще називають *головною частиною приросту функції*.

Відповідно до зробленого висновку можемо записати

,

або

$$\dots \quad (2.17)$$

Цю формулу використовують для наближеного обчислення значення функції в незручній для обчислення точці M через значення функції та її частинних похідних в зручнішій для обчислення точці M_0 . Зрозуміло, що чим точка M_0 ближча до точки M , тим наближена

рівність (2.17) точніша.

Приклад 2.4. Обчислити наближено

Р о з в' я з а н н я

Розглянемо функцію двох змінних

Очевидно, нам потрібно знайти значення цієї функції в точці $M(2,04; 0,97)$. В точці $M_0(2; 1)$ значення функції обчислюється легко:

Отже, візьмемо:

Тоді

Знайдемо частинні похідні розглядуваної функції:

Значення цих частинних похідних в точці $M_0(2; 1)$ дорівнюватимуть:

Підставивши обчислені значення в (2.17), знаходимо

2.3 Частинні похідні та диференціал складеної функції

Нехай функція визначена в деякій області D , а аргументи x та y є функціями від t :

$$(2.18)$$

визначеними в деякому проміжку , причому для всіх точки .

Якщо в функцію замість x та y підставити їх значення з (2.18), то отримаємо складену функцію від одного аргумента t :

$$(2.19)$$

Теорема 2.4. Якщо функції в деякій точці мають скінченні похідні, а функція в точці диференційована, то складена функція (2.19) має в точці t похідну, яка дорівнює

$$(2.20)$$

Д о в е д е н н я. Надамо аргументу t довільного приросту , такого щоб . Тоді функції , отримають прирости відповідно .

Оскільки функція диференційована в точці , то її повний приріст в цій точці можна записати у вигляді (2.7), тобто

Розділивши обидві частини цієї рівності на , отримаємо:

(2.21)

Так як функції f та g в точці (x_0, y_0) мають похідні, то вони неперервні в цій точці, тобто f та g при $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$. Значить, f та g при $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$. Тому, переходячи до границі в рівності (2.21) при $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$, отримуємо рівність (2.20), чим і доводимо нашу теорему.

Зауваження 2.6. Рівність (2.20) можна записати ще й так:

(2.22)

Зауваження 2.7. Щойно доведеної теореми можна

узагальнити на випадок, коли аргументи функції f є, в свою чергу, функціями декількох змінних, наприклад, двох.

Теорема 2.5. Нехай функція f визначена в деякій області D , а аргументи x та y є функціями двох змінних u та v : $x = x(u, v)$ та $y = y(u, v)$, які визначені в деякій області G , причому для всіх точок $(u, v) \in G$ відповідні точки $(x, y) \in D$.

Тоді якщо функції x та y диференційовані в якійсь точці (u_0, v_0) , а функція f диференційована у відповідній точці (x_0, y_0) , то складена функція $F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ має частинні похідні по u та v в точці (u_0, v_0) і ці частинні похідні дорівнюють:

. (2.23)

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню попередньої теореми.

Розглянемо приклади.

Приклад 2.5. Знайти похідну функції ,

якщо .

Р о з в' я з а н н я . Скориставшись формулою (2.22), маємо:

Приклад 2.6. Чи задовольняє співвідношенню

функція , де ?

Р о з в' я з а н н я . Використовуючи формули (2.23), знаходимо

звідки, додавши отримані рівності, переконуємось, що задана функція задовольняє вказаному співвідношенню.

Приклад 2.7 Якщо функція $f(x)$ має похідну в деякій точці x , а функція $g(x)$ диференційована у відповідній точці x , то, міркуючи відповідно до теореми 2.4, матимемо:

$$(2.24)$$

Займемось зараз диференціалом складеної функції.

Теорема 2.6. Нехай в деякій точці x функції $f(x)$ та $g(x)$ мають неперервні частинні похідні f'_x , f'_y , f'_z , g'_x , g'_y , g'_z , а функція $h(x, y, z)$ має неперервні частинні похідні h'_x , h'_y , h'_z та h'_w у відповідній точці (x, y, z, w) .

Тоді функція $h(f(x, y, z), g(x, y, z), w)$, розглядувана як складена функція в точці (x, y, z, w) , має диференціал

Д о в е д е н н я. Відповідно до умов теореми функція

має неперервні частинні похідні по u та v в точці (u_0, v_0) . Значить, за теоремою 2.3, вона диференційована в цій точці і її диференціал дорівнює

Підставивши в цю рівність значення похідних з формул (2.23), після перегрупування доданків отримаємо:

Оскільки за умовою теореми функції є неперервними в точці (u_0, v_0) , то вирази в дужках останньої рівності є відповідно диференціали du та dv . Теорему доведено.

Висновок 2.2. Як бачимо з доведеної теореми, форма повного диференціала зберігається і у випадку складеної функції декількох змінних. Цю властивість називають *інваріантністю форми повного диференціала функції декількох змінних*.

4. Диференціювання неявних функцій

Ми звикли вивчати функції однієї чи багатьох змінних, які задавались рівняннями, розв'язаними відносно цієї функції, тобто рівнянням

якщо йшлося про функцію однієї змінної, чи рівнянням (1.1) або (1.2) для функції двох або трьох змінних.

Відзначимо, що часто функцію задають рівнянням, не розв'язаним відносно цієї функції,

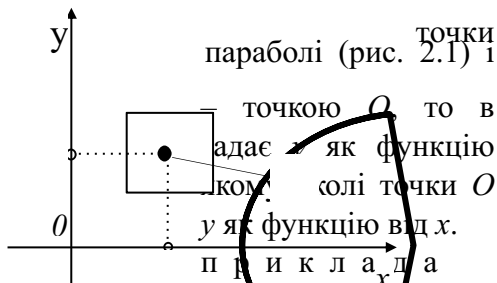
(2.25)

Розглянемо, наприклад, рівняння

(2.26)

Так як кожному значенню y дане рівняння ставить у відповідність два різних значення x , то воно при значеннях y не задає y як функцію від x . Але, якщо x та y

брати з певного околу O , яка лежить на параболі (рис. 2.1) і не збігається з її вершиною, цьому околі рівняння (2.26) від x . Разом з тим, в будь-якому околі O рівняння (2.26) не визначає y як функцію від x . З розглянутого випливає, що рівняння виду (2.26), може задавати y як функцію від x в околі однієї точки, координати якої задовольняють рівнянню (2.26), а в околі іншої точки рівняння (2.26) не задає y як функцію від x .



Природно поставити наступне запитання: чи можна в деякому околі точки, координати якої задовольняють цьому рівнянню, визначити y як функцію від x і щоб ця функція була неперервною та диференційованою?

Дамо наступне

Означення 2.3. Нехай області визначення функції

належить прямокутник D . Якщо для кожного x з відрізка I рівняння (2.25) має один і тільки один корінь y , то функція $y = y(x)$ називається *явною функцією від x* , заданою рівнянням (2.25).

Таким чином, якщо функція $y = y(x)$, задана рівнянням

(2.25), є неявною, то для всіх виконується тотожність

$$F(x, y) = 0 \quad (2.27)$$

Теорема 2.7. Нехай функція визначена, неперервна та має неперервні частинні похідні в деякому околі точки (x_0, y_0) , причому $F(x_0, y_0) = 0$.

Тоді існує такий окіл точки (x_0, y_0) , в якому рівняння (2.25) визначає єдину неявну функцію $y = y(x)$, неперервну та диференційовану в околі точки x_0 , і таку що $y(x_0) = y_0$.

Доведення цієї теореми опускаємо. Його можна знайти, наприклад, в [1].

Знайдемо похідну неявної функції. Відповідно до умов теореми, на деякому інтервалі, якому належить точка x_0 , виконується тотожність (2.27). так як похідна функції, що тотожно дорівнює нулю, також дорівнює нулю, то повна похідна

Але, використовуючи рівність (2.24), маємо

, тому . Зокрема, в точці матимемо , звідки, оскільки , отримуємо

$$y'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)} \quad (2.28)$$

Приклад 2.8. Знайти похідну функції, заданої рівнянням

Р о з в' я з а н н я . В нашому випадку

Значить, відповідно до формули (2.28), матимемо

Зауваження 2.8. Інколи буває, що функція задовольняє всім умовам теореми 2.7, тільки , але . Тоді рівняння (2.25) задає x як неявну функцію від y : . Ця функція має ті ж властивості, що й функція , зокрема, має неперервну частинну похідну

Ми розглянули питання про неявну функцію однієї змінної. Аналогічно можна розглянути неявну функцію багатьох змінних. Зупинимось, наприклад, на неявній функції двох змінних.

Розглянемо рівняння

$$(2.29)$$

Означення 2.4. Нехай області визначення функції належить паралелепіпед . Якщо для кожної точки з прямокутника рівняння (2.25) має один і тільки один корінь з відрізка , то називається *неявною функцією від двох змінних x та y* , заданою рівнянням (2.29).

Отже, якщо функція , задана рівнянням (2.29), є

неявною, то для всіх точок (x, y) з прямокутника D виконується тотожність

Аналогічно до теореми 2.7 має місце наступна

Теорема 2.8. Нехай функція $F(x, y)$ визначена, неперервна та має неперервні частинні похідні в деякому околі точки (x_0, y_0) , причому $F(x_0, y_0) = 0$.

Тоді існує такий окіл точки (x_0, y_0) , в якому рівняння (2.29) визначає єдину неявну функцію $y = y(x)$, неперервну та диференційовану в околі точки x_0 , і таку що $y(x_0) = y_0$.

Доведення цієї теореми також опускаємо. Відзначимо, що воно аналогічне доведенню теореми 2.7.

Знайдемо частинні похідні неявної функції z від x та y , заданої рівнянням (2.29). Коли визначаємо $\frac{\partial z}{\partial x}$ (або $\frac{\partial z}{\partial y}$), то змінну y (або x) вважаємо сталою, тому, використовуючи (2.28), отримуємо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} \quad (2.30)$$

Приклад 2.8. Знайти повний диференціал функції $z = z(x, y)$, якщо $F(x, y, z) = 0$.

$$F(x, y, z) = 0 \quad (2.31)$$

Р о з в' я з а н н я . Очевидно, рівність (2.31) можна переписати так: $F(x, y, z(x, y)) = 0$. Тому в нашому

випадку маємо

Значить, відповідно до формул (2.30), знаходимо

звідки, використовуючи (2.11), отримуємо

Зауваження 2.9. Якщо умова не виконується, зате, наприклад, і виконуються всі інші умови теореми 2.8, то рівняння (2.29) в околі точки задає x як функцію двох змінних

. При цьому , .

Лекція 3 Деякі застосування частинних похідних

3.1 Дотична площина та нормаль до поверхні. Геометричний зміст диференціала функції двох змінних

Нехай маємо деяку поверхню , задану рівнянням
 . (3.1)

Точка належить цій поверхні і входить в область визначення функції разом зі своїм якимось околom, а сама функція диференційована в точці , причому не всі частинні похідні в цій точці дорівнюють нулю, тобто

. (3.2)

Розглянемо довільну криву L , яка проходить через точку M_0 , має дотичну в цій точці, лежить на поверхні (3.1) і задається рівняннями

,
причому точці M_0 відповідає значення параметра t_0 .

Оскільки крива L лежить на поверхні, то координати її точок задовольняють рівнянню (3.1):

. (3.3)

На основі вищесказаного виконуються всі умови теореми по диференціювання складеної функції в точці t_0 .

Тому, продиференціювавши рівність (3.3), отримуємо

. (3.4)

Ця рівність означає перпендикулярність векторів $\vec{n}$ та $\vec{a}$

, причому другий з них є напрямним вектором дотичної до кривої L в точці M_0 .

Висновок 3.1. З рівності (3.4) випливає, що дотичні до всіх кривих, які лежать на поверхні (3.1) і проходять через точку M_0 , перпендикулярні до одного й того самого вектора $\vec{n}$. Значить, усі ці дотичні лежать в одній і тій самій площині, яка називається *дотичною площиною до поверхні в точці M_0* .

Запишемо рівняння дотичної площини як рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\vec{n}$:

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = 0. \quad (3.5)$$

Означення 3.1. Нормаллю до поверхні в точці M_0 називається пряма, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до дотичної площини в цій точці.

Відповідно до цього означення запишемо рівняння нормалі як канонічні рівняння прямої, що проходить через точку M_0 і має напрямний вектор $\vec{n}$:

$$\frac{x - x_0}{n_x} = \frac{y - y_0}{n_y} = \frac{z - z_0}{n_z}. \quad (3.6)$$

Зауваження 3.1. Ми розглянули випадок, коли функція (3.1) диференційована в точці M_0 і виконується (3.2). Якщо ці умови не виконуються в деякій точці (її називають особливою), то дотична площина та нормаль в такій точці можуть і не існувати.

Зауваження 3.2. Якщо для деякої функції рівняння (3.1) є поверхнею рівня, тобто

, то вектор

буде напрямним вектором нормалі до цієї поверхні

Зауваження 3.3. Якщо рівняння поверхні задано в явній формі , то, взявши , маємо

$$, \quad ,$$

Тоді рівняння (3.5) та (3.6) наберуть відповідно такого вигляду:

$$; \quad (3.7)$$

$$. \quad (3.8)$$

Розглянемо приклади.

Приклад 3.1. Записати рівняння дотичної площини та нормалі до гіперboloїда в точці .

Р о з в' я з а н н я

В нашому випадку маємо

, , . Тому

Значить, скориставшись рівняннями (3.5) та (3.6), шукані рівняння дотичної площини та нормалі матимуть вигляд:

або

;

або

Приклад 3.2. Записати рівняння дотичної площини та нормалі до параболоїда в точці .

Р о з в' я з а н н я

В даному випадку , , . Отже, ,

Тому, підставивши обчислені значення в формули (3.7) та (3.8), після спрощень матимемо:

- рівняння дотичної площини;

- рівняння нормалі.

З'ясуємо тепер геометричний зміст повного диференціала функції , диференційованої в точці .

Поклавши , рівність (3.7) можемо переписати так.

Права частина останньої рівності є повним диференціалом функції в точці , отже .

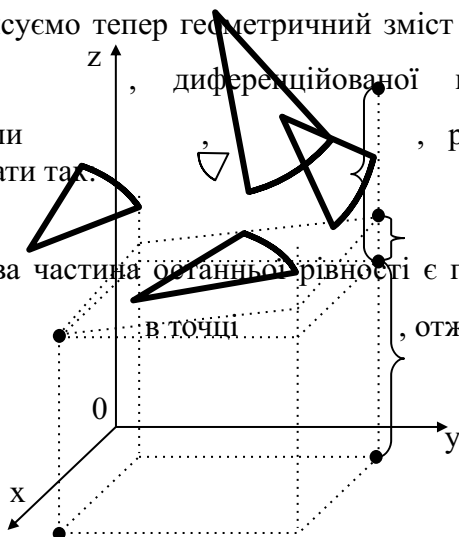


Рисунок 3.1

Таким чином, повний диференціал функції двох змінних у точці $M(x_0, y_0)$ дорівнює приросту аплікати точки на дотичній площині до поверхні в точці M , якщо від точки M перейти до точки M' (рис. 3.1). В цьому полягає геометричний зміст повного диференціала функції двох змінних.

3.2 Скалярне поле. Похідна за напрямком

Означення 3.2. Область простору, кожній точці M якої за певним правилом поставлено у відповідність одне єдине значення деякої скалярної фізичної величини u , називається *скалярним полем* величини u .

Прикладами скалярних полів є поле густини даного неоднорідного середовища, поле вологості повітря, поле температури даного тіла, поле атмосферного тиску, поле потенціалів заданого електростатичного поля.

Якщо функція $u(x, y, z)$ не залежить від часу, то скалярне поле називають *стаціонарним*. Якщо ж u залежить від часу, то скалярне поле називають *нестационарним*.

Наприклад, коли в середовище, яке проводить тепло, помістити нагріте тіло, то воно буде з часом охолоджуватися.

Температура в точках цього середовища залежатиме від розглядуваної точки та від плину часу. Отже, матимемо нестационарне поле температур.

Надалі розглядатимемо лише стаціонарні поля.

Зауваження 3.4. Означення скалярного поля не відрізняється від означення функції. Термін „поле” перенесено з фізики і підкреслює походження розглядуваного поняття.

Якщо в просторі ввести прямокутну декартову систему координат $xOyz$, то точка M матиме в цій системі певні координати x, y, z і скалярне поле u стане функцією цих координат:

У випадку, коли скалярна функція $u(x, y, z)$ залежить тільки від двох змінних, наприклад x та y , то відповідне скалярне поле називають *плоским*. Наприклад, поле температури навколо необмеженого в обох напрямках рівномірно нагрітого прямолінійного дроту є плоским. Якщо ж функція $u(x, y, z)$ залежить від трьох змінних x, y та z , то скалярне поле називають *просторовим*.

Геометрично плоскі скалярні поля зображають за допомогою ліній рівня, а просторові – за допомогою поверхонь рівня.

Однією з найважливіших характеристик скалярного поля є похідна за напрямком. З'ясуємо це поняття.

Нагадаємо, що для функції однієї змінної $u(x)$ похідна $u'(x)$ виражає швидкість зміни цієї функції в точці x . Отже, частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$

виражають швидкість зміни функції (поля) $u(x, y, z)$ відповідно в напрямках, паралельних координатним осям.

Тому природньо поставити питання про швидкість зміни функції u в точці M_0 в довільному напрямку, що виходить з цієї точки.

Нехай задано скалярне поле u , причому область визначення функції є відкритою та зв'язною. Розглянемо якийсь фіксований вектор $\vec{e}$, який утворює з додатними напрямками координатних осей відповідно кути $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Зафіксуємо в скалярному полі точку M_0 і візьмемо в цьому полі довільну точку M , таку щоб вектор $\vec{r}$ був співнапрямленим з вектором $\vec{e}$.

Позначимо $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)$.

При переході від точки M_0 до точки M функція отримує приріст в напрямі вектора $\vec{r}$, який дорівнює

.

Означення 3.3. Якщо існує скінченна границя відношення

при $r \rightarrow 0$, то ця границя називається *похідною функції (поля) u в точці M_0 за напрямком вектора $\vec{e}$* і позначається

.

Теорема 3.1. Якщо функція u диференційована в точці M_0 , то в цій точці існує похідна функції u за напрямком вектора $\vec{e}$ і

$$\dots \quad (3.9)$$

Д о в е д е н н я. Перш ніж приступити до доведення теореми, зауважимо, що рівність (3.9), яку потрібно довести можна переписати ще й так:

$$\dots \quad (3.10)$$

За умовою теореми функція $\dots$ диференційована в точці M_0 , тому її приріст $\dots$ в цій точці можна записати у вигляді

$$\dots \quad (3.11)$$

де $\dots$ - нескінченно малі функції при $\dots$.

Оскільки $\dots$ вектор співнапрямлений з вектором $\dots$, то

Тому, підставивши це в рівність (3.11) і розділивши обидві частини (3.11) на $\dots$, отримаємо

Перейшовши тут до границі при $\dots$, дістанемо рівність (3.10).

Теорему доведено.

Відзначимо, що рівність (3.10) в довільній точці M записуватимемо коротко у вигляді

$$(3.12)$$

Зауваження 3.4. Згідно означення 3.3, частинні похідні $\frac{\partial \phi}{\partial x_i}$, $\frac{\partial \phi}{\partial x_j}$, $\frac{\partial \phi}{\partial x_k}$ можна розглядати як похідні функції ϕ за напрямками відповідно $\vec{e}_i$, $\vec{e}_j$, $\vec{e}_k$ в точці M . Дійсно, наприклад, якщо $\vec{v} = \vec{e}_i$, то $\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$, тому

Отже, похідна за напрямком є узагальненням поняття про частинну похідну.

Відзначимо, що абсолютна величина $\left| \frac{d\phi}{dt} \right|$ відповідає значенню швидкості зміни скалярного поля ϕ в точці M , а знак похідної визначає характер зміни в напрямку (зростання чи спадання).

Легко бачити, що при зміні напрямку на протилежний $\vec{v} \rightarrow -\vec{v}$ похідна за напрямком також змінить свій знак.

Дійсно, при зміні напрямку на протилежний кути зміняться на π , тому

$$\frac{d\phi}{dt} \rightarrow -\frac{d\phi}{dt}. \quad (3.13)$$

Зауваження 3.5. Якщо поле плоске, тобто задається

функцією , то напрям вектора однозначно

визначається кутом , а , . З врахуванням цього рівність (3.11) набуде вигляду

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_x}{|\mathbf{v}|} \quad (3.14)$$

Розглянемо приклади.

Приклад 3.3. Знайти похідну функції в точці за напрямком , який утворює кут з додатним напрямком осі Ox .

Р о з в' я з а н н я

Знаходимо частинні похідні в заданій точці:

,

.

Тоді, скориставшись формулою (3.14), матимемо:

.

Як ми бачимо, , тому наша функція в заданому напрямку спадає.

Приклад 3.4. Знайти похідну функції в точці за напрямком від цієї точки до точки .

Р о з в' я з а н н я

В нашому випадку вектор $\vec{r}$ та його довжина дорівнюють:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Значить, напрямні косинуси будуть такими:

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}, \quad \cos \beta = \frac{y}{r}, \quad \cos \gamma = \frac{z}{r}$$

Тепер знайдемо частинні похідні та обчислимо їхні значення в точці M_1 .

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{r^3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{r^3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{r^3}$$

Підставивши обчислені значення в (3.10), знаходимо шукану похідну в точці M_1 в заданому напрямку:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{r^3}$$

3.3 Градієнт, його властивості

Припустимо, що $u(x, y, z)$ в якійсь точці M одночасно не

дорівнюють нулю. В якому напрямку $\vec{r}$ похідна $\frac{\partial u}{\partial \rho}$ має найбільше значення? Відповідь на це запитання має важливе

практичне значення.

Означення 3.4. Вектор, координатами якого є значення частинних похідних функції f в точці P , називається *градієнтом функції* в цій точці і позначається або $\text{grad} f(P)$ чи $\nabla f(P)$. Отже,

$$\text{grad} f(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \quad (3.15)$$

Наступна теорема встановлює зв'язок між похідною функції в даній точці за довільним напрямком та градієнтом функції в цій точці.

Теорема 3.2. Похідна функції f в точці P за напрямком вектора $\vec{u}$ дорівнює проекції градієнта функції в цій точці на вектор $\vec{u}$, тобто

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P) = \text{grad} f(P) \cdot \vec{u} \quad (3.16)$$

Д о в е д е н н я. Так як

$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, то, згідно властивості проекції та формули для обчислення скалярного добутку векторів через їхні координати, матимемо:

Враховуючи (3.12), отримуємо (3.16), чим і доводимо нашу теорему.

Розглянемо деякі властивості градієнта.

1⁰. Градієнт функції в даній точці вказує напрямок, по якому похідна в цій точці має найбільше значення, яке дорівнює

$$\dots \quad (3.17)$$

Дійсно, з рівності (3.16) на основі означення проекції маємо

$$\dots \quad (3.18)$$

де α - кут між напрямком вектора ∇u та градієнтом функції в даній точці. З (3.18) видно, що у випадку $\alpha = 0$ рівність

$$\dots \quad (3.19)$$

тобто коли вектор ∇u співнаправлений з градієнтом.

Таким чином, скалярне поле в довільній точці зростає найшвидше в напрямку градієнта. Відповідно до (3.13) в напрямку, протилежному до градієнта, воно найшвидше зменшуватиметься.

2⁰. Швидкість зміни скалярного поля в даній точці в напрямку, перпендикулярному градієнту в цій точці, дорівнює нулю.

Справді, якщо $\nabla u \cdot \vec{v} = 0$, то з рівності (3.16) отримуємо

$$\dots$$

3⁰. Градієнт в кожній точці поля перпендикулярний до поверхні рівня, яка проходить через цю точку.

Ця властивість впливає безпосередньо з зауваження 3.2.

4⁰. Нехай u, v - скалярні поля, задані в деякій області. Мають місце наступні рівності:

;

;

;

;

.

Доведення цих рівностей впливає з означення градієнта та правил диференціювання. Доведемо, наприклад, четверту рівність:

Приклад 3.5. Знайти найбільшу швидкість зростання поля

в точці .

Р о з в' я з а н н я

Знайдемо градієнт поля в заданій точці. Відповідно до (3.15) маємо:

.

Отже, .

Тоді за формулою (3.17) знаходимо

.

Лекція 4 Частинні похідні та диференціали вищих порядків. Формула Тейлора

4.1 Частинні похідні вищих порядків

Нехай функція задана в деякій відкритій області
і в усіх точках цієї області має частинні похідні

. Ці похідні називають *частинними похідними першого порядку*.

Частинні похідні першого порядку, будучи функціями від x та y , в свою чергу, в якійсь точці можуть мати частинні похідні.

Означення 4.1. Нехай функції мають в точці частинні похідні. Ці частинні похідні називають частинними похідними другого порядку від функції

і позначають , , , або , , , .

При цьому називають частинною похідною другого порядку по x^2 ; - частинною похідною другого порядку по xy ; - частинною похідною другого порядку по yx ; - частинною похідною другого порядку по y^2 .

Отже, згідно означення , маємо:

$$, \quad ,$$

Таким чином, для знаходження *частинних похідних другого порядку* потрібно спочатку знайти частинні похідні першого порядку даної функції, а потім від них знайти відповідні частинні похідні першого порядку. Аналогічно, шукаючи частинні похідні першого порядку від частинних похідних другого порядку, знаходимо тим самим *частинні похідні третього порядку*.

Індуктивно можна означити частинні похідні n -го порядку як частинні похідні першого порядку від частинних похідних $(n - 1)$ -го порядку. Частинні похідні n -го порядку позначають так:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \dots \text{і т. д.}$$

Приклад 4.1. Знайти частинні похідні другого порядку для функції

Р о з в' я з а н н я

Знайдемо спочатку частинні похідні першого порядку:

Тоді

Зауваження 4.1. Ми бачимо, що для розглянутої в останньому прикладі функції частинні похідні та , які називаються *мішаними частинними похідними другого порядку*, рівні між собою. Постає природне запитання:

чи завжди ? Виявляється, що це не завжди так.

Приклад 4.2. Розглянемо функцію

Покажемо, що для цієї функції в точці $O(0;0)$ існують обидві мішані частинні похідні другого порядку та знайдемо їх.

Легко бачити, що частинні прирости в точці $O(0;0)$ дорівнюють:

;

Тому існують

,

Якщо ж $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L$, тобто L , то, використовуючи правила диференціювання, матимемо:

$$\frac{d}{dx} f(x) = L \quad (4.2)$$

Поклавши $f(x) = x^2$ в рівності (4.1), отримаємо $\frac{d}{dx} x^2 = 2x$. Тоді, згідно означення частинної похідної, знаходимо

.

При $x = x_0$ з рівності (4.2) маємо $\frac{d}{dx} f(x) = L$, звідки

Отже, для розглядуваної функції

Якщо ж на функцію накласти деякі додаткові умови, то на поставлене в зауваженні 4.1 можна отримати ствердну відповідь.

Теорема 4.1. Нехай функція визначена і має частинні похідні, в області, якій належить точка разом зі своїм деяким околom, причому похідні є неперервними функціями в точці. Тоді має місце рівність

$$(4.3)$$

Д о в е д е н н я. Виберемо в області D якийсь окіл точки і візьмемо в ньому довільну точку, таку щоб. Побудуємо вираз

$$(4.4)$$

Розглянемо функцію

$$(4.5)$$

в область визначення якої, очевидно, входить відрізок (або відрізок, якщо). Згідно умов теореми функція в усіх точках цього відрізка має похідну

$$, \quad (4.6)$$

а отже, f неперервна на відрізку $[a, b]$. Таким чином, на вказаному відрізку для f виконуються всі умови теореми Лагранжа, відповідно до якої існує таке число ξ , що виконується рівність

$$(4.5)$$

Легко бачити, що за допомогою функції (4.5) вираз (4.4) можна записати так:

Тоді з рівності (4.5) з врахуванням (4.6) отримуємо

$$. \quad (4.6)$$

Розглянувши далі функцію φ , яка в усіх точках відрізка $[a, b]$ (або відрізка $[a, b]$, якщо $a = b$) має похідну $\varphi'(x)$, тому, застосувавши теорему Лагранжа, матимемо

$$, \quad (4.7)$$

де

Розглядаючи функцію

,

аналогічно до (4.6) отримуємо

де ,
звідки, аналогічно до (4.7), дістанемо

де . (4.8)
Тоді з рівностей (4.7) та (4.8) маємо

. (4.9)
Очевидно, що

при ;

при .

Тому, переходячи в рівності (4.9) до границі при ,
і враховуючи неперервність частинних похідних
в точці , отримуємо рівність (4.3), чим і доводимо
нашу теорему.

Зауваження 4.2. Щойно доведена теорема узагальнюється
на випадок мішаних похідних третього і більш вищих порядків.

4.2 Диференціали вищих порядків

Нехай функція визначена і має неперервні
частинні похідні в області . Тоді за теоремою 2.3 вона
диференційована в кожній точці , отже, має повний
диференціал

(4.10)

Цей диференціал називатимемо *диференціалом першого
порядку*. Як бачимо, диференціал першого порядку є
функцією від x та y ; , - прирости незалежних
змінних, і вони розглядаються як сталі числа. Якщо функція ,

або частинні похідні f'_x, f'_y, f'_z мають, в свою чергу, неперервні частинні похідні першого порядку, то можемо стверджувати, що f має диференціал df .

Означення 4.2. Диференціал першого порядку від диференціала першого порядку називається *диференціалом другого порядку* функції $f(x, y, z)$ в точці (x_0, y_0, z_0) і позначається символом d^2f , тобто

$$d^2f = d(df) \quad (4.11)$$

Використовуючи це означення, виведемо формулу для диференціала другого порядку. Підставляючи значення з (4.10) в (4.11), дістаємо

М и

позначили $f''_{xy} = f''_{yx}$. За припущенням мішані частинні похідні неперервні в точці (x_0, y_0, z_0) , тому за теоремою 4.1 вони рівні між собою, тобто

Таким чином, для диференціала другого порядку маємо таку формулу:

$$d^2f = \left(f''_{xx} dx^2 + 2f''_{xy} dx dy + f''_{yy} dy^2 + f''_{xz} dx dz + 2f''_{yz} dy dz + f''_{zz} dz^2 \right) \quad (4.12)$$

Очевидно, диференціал другого порядку є функцією від x та y , тому він може мати диференціал першого порядку.

Відповідно до означення 4.2 диференціал першого порядку від диференціала другого порядку називається *диференціалом третього порядку* функції $f(x, y, z)$ в точці (x_0, y_0, z_0) і

позначається символом $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$, тобто

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right). \quad (4.13)$$

Якщо функція u має неперервні частинні похідні третього порядку в області D , то u є диференційованою функцією, отже, має диференціал. Підставивши (4.12) в (4.13), дістанемо формулу для диференціала третього порядку:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right). \quad (4.14)$$

Індуктивно можна означити диференціали четвертого, п'ятого і т.д., n -го порядків: якщо маємо диференціал $(n - 1)$ -го порядку функції u , то диференціал першого порядку від цього диференціала називають диференціалом n -го порядку функції u , тобто

Відзначимо, що коли для позначення частинних похідних

користуватися символами $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ і т.д., то формули (4.10), (4.12) та (4.14) можна записати компактніше:

,

,

.

Для диференціала n -го порядку матимемо

(4.15)

Формулу (4.15) називають символічно *степеневою формулою*. В розгорнутому вигляді вона запишеться так:

д е

- число комбінацій з n по k :

Зауваження 4.3. Враховуючи зауваження 2.3, ми можемо, аналогічно до (4.15), записати диференціал n -го порядку у випадку його існування функції трьох і більшої кількості змінних. Зокрема, для функції трьох змінних матимемо:

(4.16)

Розглянемо приклади.

Приклад 4.3. Знайти функції в точці

Р о з в' я з а н н я

Ми скористаємось формулою (4.12). Для цього знайдемо частинні похідні першого та другого порядків:

Тоді

звідки

Приклад 4.4. Знайти функції в довільній точці

Розв'язання

Знайдемо усі частинні похідні до третього порядку включно:

,

.

Скориставшись формулою (4.14) та винісши за дужки, матимемо:

Приклад 4.5. Знайти функції .

Р о з в' я з а н н я

Для заданої функції трьох змінних знаходимо спочатку усі частинні похідні до другого порядку включно:

,

,

,

,

,

,

Тепер скористаємось формулою (4.16), яка в розгорнутому виді при $n = 2$ буде такою:

Підставивши в цю формулу знайдені частинні похідні, дістанемо

Зауваження 4.4. Відзначимо, що на відміну від диференціала першого порядку диференціали вищих порядків не мають властивості інваріантності. Переконаємось в цьому на прикладі диференціала другого порядку.

Нехай функція визначена в деякій відкритій області D , а - функції, визначені на проміжку

, причому для всіх точки .

Припустимо, що функція має неперервні частинні похідні в області D до другого порядку включно, а функції

мають неперервні похідні на проміжку до другого порядку включно. Значить, функція має диференціали першого та другого порядків. Отже,

Тут та на відміну від розглянутого вище випадку не є сталими величинами, а функціями від t :

Тоді, відповідно до означення диференціала другого порядку, матимемо

Розкриваючи диференціали, отримуємо

Як бачимо, на відміну від формули (4.12), тут з'явилися нові доданки:

Очевидно, ці доданки не завжди рівні нулю. Отже, форма диференціала другого порядку *не зберігається*.

4.3 Формула Тейлора для функції двох змінних

В теорії функцій однієї дійсної змінної важливу роль відіграє формула Тейлора. Не менш важливе значення має вона і для функцій декількох змінних. Ми виведемо формулу Тейлора, розглядаючи для спрощення викладок функцію двох змінних.

Нехай функція визначена і має неперервні

частинні похідні до $(n + 1)$ -го порядку включно в деякому околі точки x_0 . Візьмемо в цьому околі якусь точку x_1 і сполучимо її з точкою x_0 відрізком прямої лінії. Рівняння цієї прямої як прямої, що проходить через

дві точки x_0 та M , буде таким: $y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$. Звідси,

$$y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0). \quad (4.16)$$

Якщо в рівностях (4.16) взяти $t = 0$, то дістанемо координати точки x_0 , а якщо $t = 1$, то координати точки M . Тому можемо вважати, що t змінюється на відрізку $[0, 1]$, тобто $t \in [0, 1]$.

Функція $y = y(x)$ вздовж відрізка $[x_0, x_1]$ змінюватиметься як функція однієї змінної t на відрізку $[0, 1]$:

$$y = y(x(t)). \quad (4.17)$$

Згідно припущення функція $y = y(x)$ визначена і має неперервні частинні похідні до $(n + 1)$ -го порядку включно в околі точки x_0 , якому належить відрізок $[x_0, x_1]$. Тому складена функція $y = y(x(t))$ має на відрізку $[0, 1]$ неперервні похідні до $(n + 1)$ -го порядку включно. Значить, для функції $y = y(x(t))$ можна записати формулу Маклорена n -го порядку з залишковим членом в формі Лагранжа:

де $\xi = x(t)$.

Поклавши тут $t = 1$, з врахуванням (4.17) дістанемо:

$$\dot{y} = -y^2 \quad (4.18)$$

Знайдемо тепер $\dot{y}$ і т. д.,

Диференціюючи (4.17) та враховуючи рівність (2.20) в теоремі 2.4, матимемо

Беручи до уваги (4.16), останню рівність запишемо так:

$$\dot{y} = -y^2$$

Тепер знаходимо $\dot{y}$, пам'ятаючи, що y та $\dot{y}$

є складеними функціями (x і y залежать від t за формулами (4.16)), а $\dot{y}$ і $\ddot{y}$ - сталі числа:

Аналогічно знаходимо

$$\ddot{y} = -2y\dot{y}$$

і т. д.,

$$\ddot{y} = -2y\dot{y}$$

Поклавши $t = 0$ в отриманих формулах для $\dot{y}$ і $\ddot{y}$ для $t = 0$, з врахуванням (4.16) матимемо:

Тоді формулу (4.18) можна записати так:

$$(4.19)$$

Формула (4.19) називається формулою Тейлора n -го порядку для функції двох змінних з залишковим членом в формі Лагранжа в околі точки .

Зауваження 4.5. Відзначимо, що якщо умови, накладені на функцію , послабити, а саме, вимагати, щоб вона мала неперервні частинні похідні до $(n-1)$ -го порядку включно в деякому околі точки , а в самій точці була диференційованою до n -го порядку, то тоді функцію можна розвинути за формулою Тейлора n -го порядку залишковим членом в формі Пеано:

$$(4.20)$$

де - нескінченно мала функція при

Як бачимо, формула Тейлора у вигляді (4.19) чи (4.20) зовні нічим не відрізняється від формули Тейлора для функції однієї змінної, записаної в диференціальній формі. Проте в

розгорнутому вигляді для функції двох змінних вона буде значно складніша. Запишемо, наприклад, формулу (4.20) для випадку $n=2$, позначивши $x_1 = x$, $x_2 = y$, тобто

$$f(x, y) = f(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) + \frac{1}{1!} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 \right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \Delta x_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \Delta x_1 \Delta x_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \Delta x_2^2 \right) + \dots$$

Зауваження 4.6. Для функції трьох і більшої кількості змінних також можна записати формулу Тейлора при відповідних умовах на функцію. Так, наприклад, якщо функція визначена і має неперервні частинні похідні до $(n+1)$ -го порядку включно в деякому околі точки $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то, аналогічно до (4.19), можна записати:

Приклад 4.6. Розвинути за формулою Тейлора другого порядку функцію $f(x, y) = x^2 + y^2$ в околі точки $(1, 1)$.
Розв'язання
Задана функція має неперервні частинні похідні будь-якого порядку в усіх точках площини. Знайдемо усі частинні похідні до другого порядку включно та обчислимо їхні значення, а також значення функції в заданій точці $(1, 1)$.

;

,

;

,

;

,

;

,

;

,

.

Тоді, підставивши та обчислені значення
частинних похідних в заданій точці, матимемо:

Лекція 5 Екстремуми функцій декількох змінних

5.1 Локальні екстремуми функцій декількох змінних. Необхідні умови екстремуму

Як і для функції однієї змінної, для функції декількох змінних вводять поняття екстремальної точки.

Нехай функція декількох змінних визначена в деякій області D , для якої точка M_0 внутрішня.

Означення 5.1. Якщо існує проколотий окіл точки M_0 , який повністю міститься в області D , і для всіх точок M з цього проколотого околу значення функції в точці M менше (більше) за значення функції в точці M_0 , то точка M_0 називається точкою *локального максимуму (мінімуму)* заданої функції, а значення самої функції в точці M_0 називається *локальним максимумом (мінімумом)* функції.

Точки локального максимуму чи мінімуму називають точками *локального екстремуму*, а максимум чи мінімум - *локальним екстремумом* даної функції.

Надалі, з метою більшої зручності викладок, слово локальний опускатимемо.

Як і раніше, для простоти розглядатимемо функцію двох змінних.

Отже, відповідно до означення 5.1, точка M_0 , яка є внутрішньою для області D визначення функції $z = f(x, y)$, буде точкою *максимуму (мінімуму)* цієї функції, якщо знайдеться такий окіл $U(M_0, \rho)$, що для всіх точок $M \in U(M_0, \rho)$, відмінних від точки M_0 , виконується нерівність

(5.1)

Приклад 5.1. Розглянемо деякі функції.

1. Для функції

$$z = x^2 + y^2, \quad (5.2)$$

визначеної в усіх точках площини, для довільної точки (x, y) , як легко бачити, виконується нерівність

,

отже, $(0, 0)$ - точка мінімуму для заданої функції.

2. Оскільки для функції

$$z = -x^2 - y^2, \quad (5.3)$$

також визначеної в усій площині, для довільної точки (x, y) має місце нерівність

,

то $(0, 0)$ - точка максимуму для функції (5.3).

3. Для функції

$$z = x^2 + y^2, \quad (5.4)$$

визначеної в усіх точках площини, в будь-якому околі точки $(0, 0)$ є точки

виду (x, y) і $(-x, -y)$. Так як

,

то точка $(0, 0)$ не може бути ні точкою максимуму, ні точкою мінімуму для заданої функції (5.4).

Виникає запитання, як знаходити екстремальні точки функції $z = f(x, y)$, якщо вони існують. Зрозуміло, що ці точки будуть серед точок, підозрілих на екстремум. Для знаходження таких точок використовують необхідні умови існування екстремуму функції.

Теорема 5.1. Якщо точка (x_0, y_0) є точкою екстремуму для функції $f(x, y)$ і в цій точці існують частинні похідні f'_x та f'_y , то вони дорівнюють нулю:

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0. \quad (5.5)$$

Д о в е д е н н я. Зафіксуємо в функції $f(x, y)$ змінну y , поклавши $y = y_0$. Тоді наша функція перетвориться в функцію однієї змінної x :

Очевидно, для функції $\varphi(x) = f(x, y_0)$ точка x_0 є точкою екстремуму. Також, відповідно до умов теореми, ця функція в точці x_0 має похідну

Тоді, згідно необхідної умови екстремуму для функції однієї змінної, $\varphi'(x_0) = 0$, звідки робимо висновок, що $f'_x(x_0, y_0) = 0$.

Аналогічно доводимо, що $f'_y(x_0, y_0) = 0$. Тим самим теорему доведено.

Означення 5.2. Точка, в якій усі частинні похідні функції декількох змінних дорівнюють нулю, називається *стаціонарною точкою* даної функції.

Отже, стаціонарна точка може бути точкою екстремуму. Щоб знайти стаціонарні точки функції $f(x, y)$, потрібно розв'язати систему рівнянь

$$(5.6)$$

Приклад 5.2. Знайти стаціонарні точки функції

Розв'язання

Частинні похідні заданої функції дорівнюють:

$$\begin{aligned} & , \\ & . \end{aligned}$$

Тоді система рівнянь (5.6) матиме вигляд:

З першого рівняння легко отримуємо $x = 0$. Тоді з другого рівняння маємо $y = 0$.

Отже, для заданої функції точка $(0, 0)$ є стаціонарною. Інших стаціонарних точок немає.

Зауваження 5.1. Не кожна стаціонарна точка для заданої функції є точкою екстремуму цієї функції, тобто необхідні умови екстремуму не є достатніми. Дійсно, як ми побачили в прикладі

5.1, точка $(0, 0)$ не є точкою екстремуму для функції (5.4),

хоча $f_x = 0$ та $f_y = 0$, звідки $f_x = 0$ та $f_y = 0$,

, тому точка $(0, 0)$ є стаціонарною.

5.2 Достатні умови екстремуму

Розглянемо умови, які гарантують екстремум функції декількох змінних в заданій точці.

Теорема 5.2. Нехай для функції $f(x, y)$ точка (x_0, y_0) є стаціонарною і в деякому околі цієї точки дана функція має неперервні частинні похідні до другого порядку включно.

Тоді якщо

то функція $f(x, y)$ в точці (x_0, y_0) має екстремум, причому максимум при (x_0, y_0) і мінімум при (x_0, y_0) .

Якщо $f'(x_0, y_0) = 0$, то функція $f(x, y)$ в стаціонарній точці (x_0, y_0) екстремуму не має.

Д о в е д е н н я. Оскільки функція $f(x, y)$ в околі стаціонарної точки (x_0, y_0) має неперервні частинні похідні до другого порядку включно, то її можна розвинути за формулою Тейлора першого порядку з залишковим членом в формі Лагранжа:

$$(5.7)$$

де $f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy}$ — частинні похідні другого порядку функцій $f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy}$ в точці (x_0, y_0) .
Так як частинні похідні другого порядку є неперервними функціями в околі точки (x_0, y_0) , то

$$(5.8)$$

де $\rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ — функції від x, y та ρ , такі що

$$(5.9)$$

Позначимо для зручності

Точка є стаціонарною, тобто ,
 , тому, враховуючи (5.8), рівність (5.7) можна
 записати так:

$$(5.10)$$

де

$$(5.11)$$

- повний приріст функції в точці .

Нехай - кут, який утворює вектор з

додатнім напрямком осі Ox , . Тоді
 і рівність (5.10) набуде такого вигляду:

$$(5.12)$$

Розглянемо тепер два випадки.

1) .

Тоді обов'язково і суму перших трьох доданків у
 співвідношенні (5.12) можемо записати так:

$$(5.13)$$

Очевидно, що вираз у зовнішніх дужках є строго додатним

при усіх значеннях x . Тому функція, що являє собою ліву частину рівності (5.13), набуває ненульових значень, які за знаком збігаються зі знаком числа A , для всіх x .

Оскільки $f(x)$ є функцією, неперервною на відрізку $[a, b]$, то вона на цьому відрізку набуває найменшого значення m , яке є, зрозуміло, додатним, тобто

$$f(x) \geq m \quad (5.14)$$

Так як $f(x)$ - обмежені, то, враховуючи (5.9), маємо

$$f(x) \leq M \quad (5.15)$$

тобто існує такий окіл U_m , що для всіх точок $x \in U_m$ виконується нерівність

$$f(x) \geq m \quad (5.16)$$

Тоді з рівності (5.12), а також з нерівностей (5.14) та (5.16)

видно, що для всіх точок

значення $f(x)$ збігається за знаком зі знаком числа A .

Отже, якщо $A > 0$, то $f(x) > 0$ або

,

тобто в стаціонарній точці функція має максимум.

Якщо ж $\alpha > 0$, то α або

α ,
тобто в стаціонарній точці α функція має мінімум.

2) $\alpha < 0$.

Якщо число $\alpha < 0$ то виконується рівність (5.13). Очевидно, при $\alpha < 0$ вираз у дужках співвідношення (5.13) дорівнює α , тобто додатний.

Нехай α_1 - один з коренів рівняння

$\alpha_1^2 - \alpha \alpha_1 + \alpha^2 = 0$.
Тоді обов'язково $\alpha_1 > 0$, тому при $\alpha < 0$ вираз у дужках співвідношення (5.13) від'ємний, бо дорівнює α_1 .

На основі рівності (5.15) при досить малих значеннях α та α_1 знак виразу в дужках правої частини рівності (5.12) співпадатиме зі знаком виразу (5.13). Отже, приріст на променях α та α_1 матиме значення протилежних знаків. Тому точка α_1 не може бути точкою екстремуму.

Якщо число $\alpha < 0$ то

$$(5.17)$$

Так як $\alpha < 0$, то $\alpha_1 > 0$, тому можемо вибрати такий кут α_1 , що $\alpha_1 > \alpha$. Тоді на променях α та α_1 вираз (5.17), знаком якого при досить малих значеннях α та α_1 визначається знак α , матиме

значення, протилежні за знаком. Значить, приріст на променах та матиме значення протилежних знаків, тому точка не буде екстремальною.

Теорему доведено.

Зауваження 5.2. У випадку, коли , теорема 5.2 не дає відповіді на питання, чи є стаціонарна точка точкою екстремуму. Ми цей випадок не досліджуватимемо. Відзначимо тільки, що в точці може бути екстремум, а може і не бути.

З теорем 5.1 та 5.2 впливає таке правило дослідження функції двох змінних на екстремум:

1) знаходимо стаціонарні точки даної функції, розв'язуючи систему рівнянь (5.6);

2) для кожної стаціонарної точки обчислюємо число

Якщо в стаціонарній точці , то ця точка є точкою екстремуму, причому точкою максимуму при або точкою мінімуму при .

Якщо в стаціонарній точці , то ця точка не є точкою екстремуму.

Розглянемо приклади.

Приклад 5.3. Для функції , розглянутої в прикладі 5.1, як ми бачили, точка не є точкою екстремуму, хоча вона є стаціонарною (зауваження 5.1).

Частинні похідні другого порядку дорівнюють:

Значить, $f(x, y)$ в усіх точках площини, зокрема і в стаціонарній точці $(0, 0)$. Отже, теорема 5.2 підтверджує, що ця стаціонарна точка не є екстремальною для заданої функції.

Приклад 5.4. Дослідити на екстремум функцію

Р о з в' я з а н н я

В прикладі 5.2 ми встановили, що задана функція має одну стаціонарну точку $(0, 0)$. Знайдемо частинні похідні другого порядку в цій точці.

$$f''_{xx}(0, 0) = 2, \quad f''_{yy}(0, 0) = 2;$$

$$f''_{xy}(0, 0) = 0;$$

.

Тоді $D^2 f(0, 0)$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Значить, точка $(0, 0)$ є екстремальною для заданої функції, а саме точкою мінімуму, бо $\Delta f(0, 0) > 0$.

Цей мінімум дорівнює $f(0, 0) = 0$.

5.3 Глобальні екстремуми функцій декількох змінних

Нехай функція f визначена і неперервна в обмеженій замкнутій області D . Тоді за теоремою 1.2 вона обмежена і досягає своїх найменшого та найбільшого значень, тобто існує хоча б одна точка a , в якій значення функції серед усіх інших значень є найменшим і існує хоча б одна точка b , в якій значення функції серед усіх інших значень є найбільшим. Ці точки ще називаються відповідно точками *глобального мінімуму* та *глобального максимуму*, а значення функції в цих точках – *глобальним мінімумом* та *глобальним максимумом*.

Зазначимо, що теорема 1.2 не дає способу знаходження точок a та b , тоді як методи визначення екстремуму функції в окремих випадках дають змогу в деяких випадках знайти її найменше та найбільше значення.

Припустимо, що функція f , крім перелічених вище умов, має ще й скінченні частинні похідні першого порядку в усіх внутрішніх точках області D . Якщо точка a , в якій функція набуває свого найменшого (найбільшого) значення, знаходиться всередині області D , то вона є точкою екстремуму даної функції, тобто виконуються необхідні умови (5.5) існування екстремуму. Проте функція f може набувати свого найменшого (найбільшого) значення в точках, які знаходяться на межі області.

Враховуючи вище сказане, дістаємо наступне правило.

Щоб знайти найменше (найбільше) значення функції f , визначеної і неперервної в обмеженій замкнутій області D , потрібно:

1) знайти всі внутрішні точки області D , в яких функція може мати екстремум, і, якщо цих точок скінченне число, обчислити значення функції в цих точках;

2) знайти, якщо це можна, значення функції, які є найменшим та найбільшим серед усіх значень функції, яких вона набуває на межі даної області;

3) серед усіх обчислених в п. 1) та 2) значень функції вибрати найменше та найбільше числа. Вони і будуть найменшим та найбільшим значеннями функції в області D .

Приклад 5.5. Знайти найменше та найбільше значення функції

$$(5.18)$$

в трикутнику, обмеженому прямими

Р о з в' я з а н н я

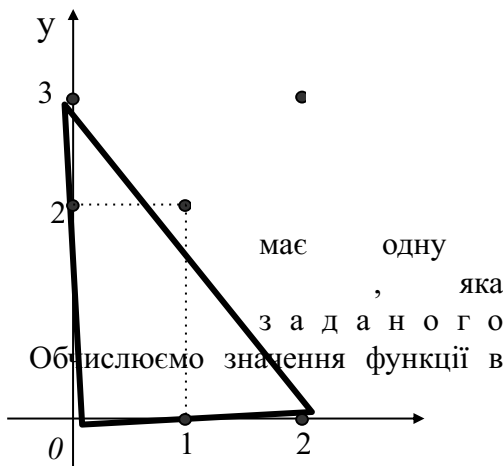
Знайдемо спочатку стаціонарні точки даної функції. Координати кожної з таких точок є розв'язками системи рівнянь виду (5.6). Так як

то система виду (5.6) буде
ю:

тако

Розв'язком її буде

Отже, функція (5.18) має одну стаціонарну точку, яка знаходиться всередині трикутника (рис. 5.1). Обчислимо значення функції в цій точці:



Тепер досліджуємо нашу функцію на межі області, тобто на

Рисунок 5.1

сторонах трикутника ABC .

I. Візьмемо сторону AB . В цьому випадку , ,
тому задана функція (5.18) вироджується в функцію однієї
змінної u , задану на відрізку :

Знаходимо точки, в яких функція може приймати
найменше та найбільше значення і обчислюємо значення в
цих точках.

,
звідки . Ця точка не належить відрізку , тому
обчислюємо значення функції тільки на кінцях відрізка
:

,
 .
II. На стороні BC маємо , отже функція (5.18)
набуває вигляду

.
Тепер аналогічно до попереднього поступаємо з функцією
на відрізку .

,
звідки . Ця точка знаходиться всередині відрізка .
Тому обчислюємо

а також

уже обчислено вище.

III. На стороні AC , звідки. Значить, функція (5.18) виглядатиме так:

де x змінюється на відрізку. Оскільки на кінцях цього відрізка вище уже обчислено, то нам залишилось обчислити стаціонарні точки функції на відрізку та обчислити її значення в цих точках.

звідки, тому обчислюємо

Тепер серед усіх обчислених значень функції (5.18) вибираємо найменше та найбільше. Вони і будуть шуканими її найменшим та найбільшим значеннями в заданій області.

Отже,

Зауваження 5.3. Ми детально вивчили екстремум на прикладі функції двох змінних. Відзначимо, що значна частина міркувань залишається справедливою і для функцій більше ніж двох змінних. Зокрема, правило знаходження найменшого (найбільшого) значення функції залишається таким самим, як і для функції двох змінних. Проте достатні умови існування екстремуму функції $n > 2$ змінних значно складніші, ніж достатні умови для функції двох змінних.

5.4 Умовний екстремум

В попередніх пунктах цієї лекції ми розглянули екстремум функції, коли на незалежні змінні не накладалося ніяких додаткових умов. Але на практиці часто зустрічаються такі екстремальні задачі, коли на незалежні змінні накладаються ще додаткові умови.

Наприклад, для функції $f(x, y)$ треба знайти екстремум не в усій її області існування, а тільки в точках деякої кривої із цієї області

$$(5.19)$$

Такий екстремум називають *умовним* (розглянутий вище екстремум називають *безумовним*). Зауважимо, що якщо рівняння (5.19) допускає розв'язання відносно однієї зі змінних, то, підставивши це значення у функцію, матимемо безумовний екстремум для функції однієї змінної. Проте далеко не завжди це легко зробити.

Ми розглянемо метод дослідження функції на умовний екстремум, який не вимагає розв'язання рівнянь типу (5.19) чи системи таких рівнянь відносно деяких змінних – *метод невизначених множників Лагранжа*.

Не зменшуючи загальності, з'ясуємо суть цього метода на прикладі функції двох змінних.

Отже, нехай функція

(5.20)

задана в деякій області D , а на незалежні змінні x та y накладено умову (5.19). Зазначимо, що умов повинно бути менше, ніж незалежних змінних.

Рівняння (5.19) називається *рівнянням зв'язку*.

Означення 5.2. Точка (x_0, y_0) , координати якої задовольняють рівнянням зв'язку (5.21), називається *точкою умовного мінімуму (максимуму) функції* $f(x, y)$, якщо існує окіл цієї точки $U_\delta(x_0, y_0)$, такий що для всіх точок $(x, y) \in U_\delta(x_0, y_0)$ із цього околу, координати яких задовольняють рівнянню зв'язку (5.19), виконується нерівність

Число $f(x_0, y_0)$ називається *умовним мінімумом (максимумом)*. Точка умовного мінімуму (максимуму) називається *точкою умовного екстремуму*, а число $f(x_0, y_0)$ - *умовним екстремумом*.

Виведемо необхідні умови того, щоб точка (x_0, y_0) була точкою умовного мінімуму (максимуму) функції $f(x, y)$.

Припустимо, що точка (x_0, y_0) є точкою умовного екстремуму і, крім того, виконуються умови:

1) функція $f(x, y)$ в області D має неперервні частинні похідні першого порядку;

2) функція $f(x, y)$ в області D задовольняє умовам теореми 2.7 про існування неявної функції, заданої рівнянням (5.19).

Отже, згідно з припущенням 2), рівняння (5.19) задає в області D функцію $y = y(x)$, яка в точці $x = x_0$ має похідну (п. 2.4)

(5.21)

Крім того, якщо значення λ підставити в (5.20), то задача про умовний екстремум в точці (x^*, y^*) зводиться до задачі про безумовний екстремум для складеної функції однієї змінної

(5.22)

У цьому випадку похідна першого порядку від функції (5.22) в точці (x^*, y^*) дорівнює нулю. За правилами диференціювання складеної функції (див. (2.24)) маємо

Поклавши в останній рівності $\lambda = 0$, з врахуванням (5.21) отримаємо

звідки

Позначивши останні відношення через μ (знак мінус взято для зручності, а саме число μ може мати довільний знак), маємо

тобто

Враховуючи ще й (5.20), бачимо, що координати точок умовного екстремуму повинні задовольняти систему рівнянь

$$(5.23)$$

Аналізуючи цю систему, помічаємо, що її рівняння є необхідними умовами екстремуму функції

$$(5.24)$$

Функція (5.24) називається *функцією Лагранжа*, а число λ - *множителем Лагранжа*.

Як уже сказано, умови (5.23) є лише необхідними. Вони дають змогу знайти стаціонарні точки умовного екстремуму. Враховуючи формулу Тейлора у вигляді (4.21), характер умовного екстремуму (достатні умови) можна встановити за знаком диференціала другого порядку функції Лагранжа в стаціонарній точці

причому dx та dy зв'язані співвідношенням

$$(5.25)$$

А саме, якщо $\lambda > 0$, то точка є точкою умовного мінімуму (максимуму)

Приклад 5.6. Знайти екстремуми функції

при умові

Розв'язання

Очевидно, рівняння зв'язку буде таким:

Отже, функція Лагранжа (5.24) матиме вигляд

Так як

то система рівнянь (5.23) виглядатиме так:

Розв'язуючи цю систему, знаходимо два розв'язки:

Таким чином,
точками умовного екстремуму можуть бути точки та
. Перевіримо, чи це так, знайшовши для кожної з точок

Оскільки

то

Значить, для точки

матимемо

тому є точкою умовного максимуму, а для точки
матимемо

тому є точкою умовного мінімуму для заданої функції.
При цьому

Зауваження 5.4. В щойно розглянутому прикладі не було потреби знаходити співвідношення (5.25) між dx та dy , так як ми і без цього чітко встановили знак для кожної з точок та

Зауваження 5.5. Розглянутий метод невизначених множників Лагранжа можна поширити на дослідження функції довільного числа змінних на умовний екстремум. Зокрема, для функції трьох змінних з рівняннями зв'язку функція Лагранжа буде такою:

Тому стаціонарні точки умовного екстремуму потрібно знаходити із системи $n+1$ рівнянь з $n+2$ невідомими

а достатні умови існування умовного екстремуму в цих точках можна визначити за знаком диференціала .

Література

1. Шкіль М.І. Математичний аналіз. Ч.ІІ. – К.: Вища школа, 1995. – 512 с.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – К.: А.С.К., 2003. – 648 с.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Том 2. - М.: Наука, 1978. – 456 с.
4. Пак В.В., Косенко Ю.Л. Вища математика: Підручник. – К.: Либідь, 1996. – 440 с.
5. Шипачев В.С. Высшая математика. - М.: Высш. шк., 1991.- 479 с.
6. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика. –К.: Техніка, 2000. – 592 с.
7. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. Т.І. - М.:Высш. шк., 1970. – 688 с.
8. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т.І. – М.: Гостехиздат, 1955. – 696 с.
9. Кудрявцев В.Ф., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 1989. – 656 с.