

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- 1 Пак В.В., Носенко Ю.Л. Вища математика: Підручник. – К.: Либідь, 1996. – 440 с.
- 2 Шипачев В.С. Высшая математика. - М.: Высш. шк., 1990.- 479 с.
- 3 Булах Е.Г., Шуман В.Н. Основы векторного анализа и теории поля: Учебное пособие. – К.: Наукова думка, 1998. – 360 с.
- 4 Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С. Краткий курс высшей математики, том 2. М.: Высш. шк., 1978
- 5 Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. М.:Высш. шк., 1981
- 6 Никольский С.М. Курс математического анализа. М.: Наука, 1973
- 7 Гусак А.А. Высшая математика, том 2. Минск: Университетское, 1984
- 8 Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление, том 2. М.: Наука, 1964
- 9 Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. М.:Высшая школа, 1966
- 10 Сборник задач по курсу высшей математики под редакцией Г.И.Кручковича. М.: Высшая школа, 1973
- 11 Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике. М.: Высшая школа, 1983

Івано-Франківський національний технічний
університет нафти і газу

Кафедра вищої математики

Камаєва Л.І., Лавинюкова Т.Г., Гураль І.М., Гевка
О.А.

КРАТНІ І КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

*Методичні вказівки та завдання для
самостійної роботи
для студентів всіх інженерно-технічних
спеціальностей*

Івано-Франківськ
2003

Міністерство освіти і науки України

Івано-Франківський національний технічний
університет нафти і газу

Кафедра вищої математики

Камаєва Л.І., Лавинюкова Т.Г., Гураль І.М., Гевка О.А.

КРАТНІ І КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

методичні вказівки та завдання для самостійної роботи
для студентів всіх інженерно-технічних спеціальностей

МВ 02070855-1012-2003

Івано-Франківськ

2003

Камаєва Л.І., Лавинюкова Т.Г., Гураль І.М., Гевка О.А. Кратні і криволінійні інтеграли та їх застосування: методичні вказівки та завдання для самостійної роботи для студентів всіх інженерно-технічних спеціальностей. – Івано-Франківськ.: Факел, 2003, - с.

Пропоновані методичні вказівки мають метою допомогти студентам організувати самостійну роботу при вивченні розділу вищої математики «Кратні і криволінійні інтеграли та їх застосування». У методичних вказівках викладені основні поняття, означення, формули і теореми з теорії кратних і криволінійних інтегралів, наведені приклади їх обчислення та застосування. Пропонується великий обсяг задач для самостійного опрацювання і розв'язування.

Рецензент: доктор технічних наук, професор Мойсишин В.М.

Дане видання – власність ІФНТУНГ. Забороняється тиражувати та розповсюджувати без відома авторів

Камаєва Л.І., Лавинюкова Т.Г., Гураль І.М., Гевка О.А. Кратні і криволінійні інтеграли та їх застосування: методичні вказівки та завдання для самостійної роботи для студентів всіх інженерно-технічних спеціальностей. – Івано-Франківськ.: Факел, 2003, - с.

Пропоновані методичні вказівки мають метою допомогти студентам організувати свою самостійну роботу при вивченні розділу вищої математики «Кратні і криволінійні інтеграли та їх застосування». У методичних вказівках викладені основні поняття, означення, формули і теореми з теорії кратних і криволінійних інтегралів, наведені приклади їх обчислення та застосування. Пропонується великий обсяг задач для самостійного опрацювання і розв'язування.

Рецензент: Мойсишин В.М., доктор технічних наук,
професор

Погоджено з навчально-методичним об'єднанням спеціальностей

Я.С. Коцкулич

В.Я. Грудз

Р.М. Рудий

Нормоконтролер

О.Г. Гургула

Корректор

Н.Ф. Будуйкевич

Член експертно-рецензійної комісії університету

Р.М.Рудий

Дане видання – власність ІФНТУНГ. Забороняється тиражувати та розповсюджувати без відома авторів

ЗМІСТ

Розділ 1 Кратні інтеграли	5
1.1 Задачі, що приводять до поняття подвійного інтеграла.....	5
1.2 Означення подвійного інтеграла.....	7
1.3 Властивості подвійного інтеграла.....	8
1.4 Обчислення подвійного інтеграла в декартових прямокутних координатах.....	9
1.5 Заміна змінних у подвійному інтегралі.....	15
1.6 Перехід від декартових координат до полярних в подвійному інтегралі.....	17
1.7 Деякі застосування подвійних інтегралів.....	19
1.8 Індивідуальні завдання для самостійної роботи.....	29
Розділ 2. Потрійні інтеграли	53
2.1 Задача, що приводить до поняття потрійного інтеграла.....	53
2.2 Означення та умови існування потрійного інтеграла.....	54
2.3 Властивості потрійного інтеграла.....	55
2.4 Обчислення потрійного інтеграла в декартових прямокутних координатах.....	56
2.5 Заміна змінних в потрійному інтегралі.....	60
2.6 Перехід від декартових координат до циліндричних в потрійному інтегралі.....	61
2.7 Перехід від декартових координат до сферичних в потрійному інтегралі.....	62
2.8 Застосування потрійних інтегралів.....	65
2.9 Індивідуальні завдання для самостійної роботи.....	71
Розділ 3 Криволінійні інтеграли	82
3.1 Задача, що приводить до поняття криволінійного інтеграла першого роду.....	82
3.2 Означення криволінійного інтеграла першого роду.....	83
3.3 Властивості криволінійного інтеграла першого роду.....	84
3.4 Обчислення криволінійного інтеграла першого роду.....	85
3.5 Застосування криволінійних інтегралів першого роду.....	88
3.6 Задача, що приводить до поняття криволінійного інтеграла другого роду.....	94
3.7 Означення криволінійного інтеграла другого роду.....	95
3.8 Обчислення криволінійного інтеграла другого роду.....	96
3.9 Зв'язок між криволінійними інтегралами першого і другого роду.....	99
3.10 Формула Гріна-Остроградського.....	99
3.11 Незалежність криволінійного інтеграла другого роду від шляху інтегрування.....	101

3.12 Застосування криволінійних інтегралів другого роду.....	103
3.13 Індивідуальні завдання для самостійної роботи.....	105
Розділ 4 Поверхневі інтеграли.....	120
4.1 Задача про масу матеріальної поверхні, що приводить до поняття поверхневого інтеграла першого роду.....	120
4.2 Означення поверхневого інтеграла першого роду.....	121
4.3 Обчислення поверхневих інтегралів першого роду.....	122
4.4 Застосування поверхневих інтегралів першого роду.....	124
4.5 Поняття про двосторонні та односторонні поверхні.....	131
4.6 Задача про потік рідини через поверхню, що приводить до поняття поверхневого інтеграла другого роду.....	131
4.7 Означення поверхневого інтеграла другого роду.....	133
4.8 Обчислення поверхневого інтеграла другого роду.....	134
4.9 Формула Остроградського-Гаусса.....	136
4.10 Формула Стокса.....	138
4.11 Індивідуальні завдання для самостійної роботи.....	140
Розділ 5 Елементи теорії поля	149
5.1 Скалярне і векторне поля.....	149
5.2 Оператор Гамільтона.....	150
5.3 Основні задачі теорії поля.....	151
5.4 Дивергенція векторного поля.....	153
5.5 Лінійний інтеграл і циркуляція векторного поля.....	154
5.6 Ротор векторного поля.....	154
5.7 Потенціальні та соленоїдальні поля.....	156
5.8 Індивідуальні завдання для самостійної роботи.....	158
Перелік використаних джерел.....	164

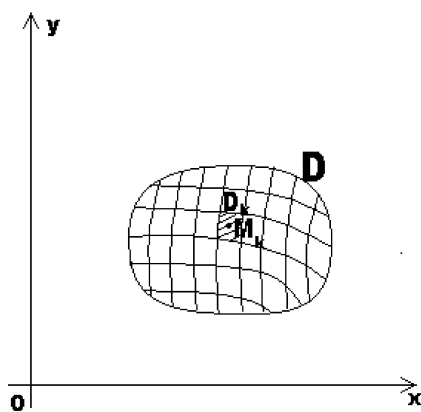
Розділ 1 КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

В цьому розділі вищої математики мова піде про узагальнення поняття визначеного інтеграла на випадок функції багатьох змінних, зокрема, розглянемо функції двох і трьох змінних, для яких відповідно вводиться поняття подвійного і потрійного інтегралів.

1.1 Задачі, що приводять до поняття подвійного інтеграла

Задача 1 Про обчислення маси неоднорідної плоскої пластинки

Нехай маємо плоску матеріальну пластину, яка має форму замкненої обмеженої області D і яка розташована в площині xOy (рис 1.1.).



Якщо вибрати на ній деяку частину з площею ΔS і взяти в ній точку $M(x, y)$, то відношення маси Δm цієї частини до її площі, тобто $(\Delta m)/(\Delta S)$, називається середньою густиною цієї частини. Якщо існує границя відношення $(\Delta m)/(\Delta S)$ за умови, що частина стягується в точку $M(x, y)$, то ця границя називається поверхневою густиною в точці $M(x, y)$. Поверхнева густина залежить від положення точки M і тому є функцією її координат: $\rho = \rho(x, y)$.

Поставимо задачу про знаходження маси m пластини D , вважаючи функцію $\rho(x, y)$ неперервною в області D (очевидно, що вона невід'ємна).

Рисунок 1.1

Розіб'ємо пластину D довільним чином на n частин D_k ($k=1, 2, \dots, n$)

без спільних внутрішніх точок і таких, що ρ не змінюється. Позначимо їх площі через ΔS_k і в кожній частині виберемо довільну точку $M_k(x_k, y_k)$ (рис.1.1). Оскільки частини дуже малі, то густина в різних точках k -ої частини буде мало відрізнятися від густини в точці M_k . Тому можна припустити, що в межах кожної окремої частини густина є величиною сталою і дорівнює густині в точці M_k : $\rho = \text{const} = \rho(x_k, y_k)$. Тоді маса кожної частини Δm_k наближено дорівнює:

$$\Delta m_k \approx \rho(x_k, y_k) \Delta S_k, \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

Оскільки вся маса складається з мас окремих частин, маємо наближену рівність:

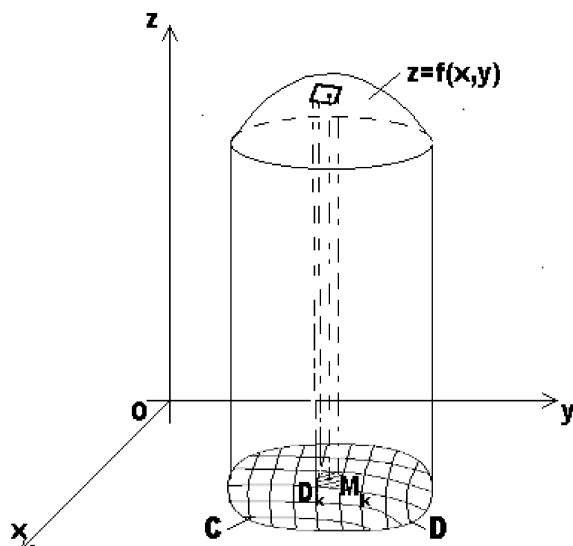
Щоб уточнити цю формулу, потрібно зробити граничний перехід за умови, що кожна частина стягується в точку, тобто $\lim_{k \rightarrow \infty} \max d(D_k) = 0$, $(k=1,2,\dots,n)$. Тут максимальний діаметр частин вводиться як максимальна відстань між двома точками частини. Отже:

$$(1.1)$$

Таким чином, задача про масу неоднорідної пластинки зводиться до знаходження границі певної суми.

Задача 2 Про обчислення об'єму криволінійного циліндра

Ця задача є аналогом задачі про площу криволінійної трапеції, яка приводить до поняття визначеного інтеграла. Нехай D – область в площині



Розглянемо тіло, яке обмежене знизу областю D , з боків циліндричною поверхнею з напрямною C і твірними, паралельними до осі Oz , і зверху частиною поверхні з рівнянням $z=f(x,y)$. Припустимо, що функція $z=f(x,y)$, яка є визначеною в області D , неперервна і невід'ємна в ній. Таке тіло називається криволінійним циліндром. Поставимо задачу про знаходження його об'єму. Розіб'ємо область D довільним чином на n

частин D_k ($k=1, \dots, n$) без спільних внутрішніх точок, і таких, що (рис.1.2). Позначимо площу кожної такої частини через ΔS_k . В кожній

6

частині виберемо довільну точку $M_k(x_k, y_k)$, якій відповідає значення функції $z=f(x_k, y_k)$. В силу малих розмірів частин можна вважати, що для кожної з них висота циліндричного тіла (з основою D_k), буде величиною сталою, що дорівнює висоті в точці M_k . Тоді об'єм кожного такого циліндра:

$$\Delta V_k \approx f(x_k, y_k) \Delta S_k,$$

а весь об'єм :

Очевидно, що точне значення об'єму одержимо в результаті

граничного переходу за умови, що частини D_k стягуються в точку, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} \max d(D_k) = 0$, $(k=1,2,\dots,n)$ де $\max d(D_k)$, як і в попередній задачі, - максимальний діаметр кожної частини. Тоді :

$$(1.2)$$

Як бачимо, дві зовсім різні задачі мають один і той самий математичний алгоритм розв'язування. До знаходження границі подібних сум приводять також інші геометричні і фізичні задачі.

1.2 Означення подвійного інтеграла

Відійдемо від конкретного змісту розглянутих задач і застосуємо відомий нам уже алгоритм для будь-якої функції $z=f(x,y)$, яка є визначеною і обмеженою в деякій замкненій обмеженій області D . Виконаємо такі дії:

1) Розіб'ємо область D довільним чином на n частин D_k без спільних

внутрішніх точок і таких, що , з площами ΔS_k , $(k=1,2,\dots,n)$

2) В кожній частині D_k виберемо довільну точку $M_k(x_k, y_k)$, в якій обчислимо значення функції $f(x_k, y_k)$.

3) Запишемо суму (1.3)

яка називається інтегральною сумою для функції $f(x,y)$ в області D .

4) Позначимо $\lim_{n \rightarrow \infty} \max d(D_k) = 0$ $(k=1,2,\dots,n)$

Означення Якщо інтегральна сума (1.3) при $\lim_{n \rightarrow \infty} \max d(D_k) = 0$ має скінченну границю I , причому ця границя не залежить від способу розбиття області D та від вибору точок M_k в кожній окремій частині D_k , то ця границя називається *подвійним інтегралом* від функції $f(x,y)$ по області D і позначається символічно так:

Функція $f(x,y)$ називається підінтегральною функцією, D – областю інтегрування, dS – елементарною площею.

Тепер формулам (1.1) і (1.2) можна надати інтегрального виду. Використовуючи введене позначення, запишемо формулу для обчислення маси неоднорідної плоскої пластинки:

В цьому полягає механічний зміст подвійного інтеграла.

Аналогічно запишемо і формулу для обчислення об'єму криволінійного циліндра:

В цьому полягає геометричний зміст подвійного інтеграла.

1.3 Властивості подвійного інтеграла

Основні властивості подвійного інтеграла аналогічні відповідним властивостям визначеного інтеграла. Тому обмежимося лише формулюванням цих властивостей, не зупиняючись на детальному їх доведенні.

Властивість 1 Якщо K – довільне число і функція $f(x,y)$ – інтегровна в області D , то функція $Kf(x,y)$ також інтегровна в області D , причому сталий множник можна виносити за знак подвійного інтеграла, тобто

Властивість 2 Якщо функції $f(x,y)$ і $g(x,y)$ – інтегровні в області D , то їх алгебраїчна сума також інтегровна в цій області, причому:

Властивість 3 Якщо область D є об'єднанням областей D_1 і D_2 , які не мають спільних внутрішніх точок, і в кожній з яких функція $f(x,y)$ – інтегровна, то вона інтегровна і в області D , причому

З механічної точки зору цю властивість можна прокоментувати так: маса пластинки D складається з суми мас окремих її частин.

Властивість 4 Якщо функції $f(x,y)$ і $g(x,y)$ – інтегровні в області D , причому для всіх точок цієї області виконується нерівність $f(x,y) \geq g(x,y)$, то

З геометричного змісту ця нерівність означає, що більший об'єм має той циліндр, висота якого більша, а з механічного змісту – більшу масу має та пластина, густина якої більша.

Властивість 5 Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в замкненій обмеженій області D , то мають місце нерівності:

де S – площа області D , m – найменше значення, а M – найбільше значення

функції $f(x,y)$ в області D .

Властивість 6 Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в замкненій області D , то в цій області знайдеться така точка $P_0(x_0, y_0)$, в якій функція набуває свого середнього значення $f_{\text{сеп}} = f(x_0, y_0)$, для якого має місце така рівність:

де S – площа області D .

З цієї властивості випливає формула для знаходження середнього значення функції:

1.4 Обчислення подвійного інтеграла в декартових координатах

Спочатку введемо поняття стандартної або правильної області, розташованої в площині xOy . Якщо область обмежена лініями: $x = a$, $x = b$, $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, причому для всіх $x \in [a, b]$ $\varphi_2(x) \geq \varphi_1(x)$ і будь-яка пряма, проведена через область D паралельно до осі Oy , перетинає границю області лише в двох точках (знизу і зверху), то така область називається стандартною по змінній y . Пряму, паралельну до осі Oy будемо називати прямою входу-виходу (рис. 1.3; 1.4). Вона показує, як змінюється y в обл. D в залежності від x .

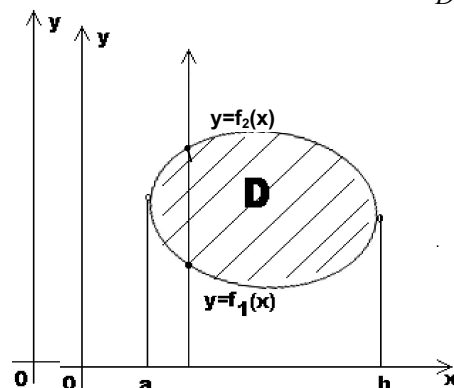
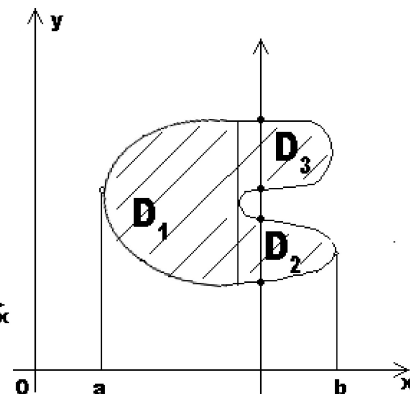


Рисунок 1.4



Область, показана на рис. 1.5, не є стандартною по змінній y . Але її можна розбити на ряд стандартних областей D_1, D_2, D_3 .

Аналогічно вводиться область, стандартна по змінній x (рис. 1.6, 1.7). Тепер пряма входу-виходу проводиться паралельно осі Ox і показує, як змінюється x в області D в залежності від y .

Зауважимо, що нестандартну область можна розбити на ряд

Рисунок 1.3

областей, кожна з яких буде стандартною по y або по x .

Розглянемо подвійний інтеграл нехай буде стандартною по змінній y (рис. 1.8).

Оскільки подвійний інтеграл не залежить від способу розбиття області D , то виконаємо найбільш зручне розбиття на частини прямими $x=const$ і $y=const$, тобто паралельними координатним осям. Тоді кожна із частин розбиття є прямокутник з розмірами Δx і Δy або dx і dy . Тоді площа частини розбиття $dS=dx dy$, а подвійний інтеграл набуває вигляду:

Щоб його обчислити, скористаємося механічним містом подвійного інтеграла, згідно з яким він визначає масу неоднорідної плоскої пластинки D з

Рисунок 1.5, де область D

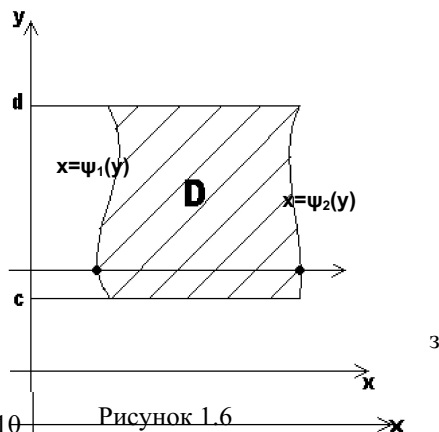
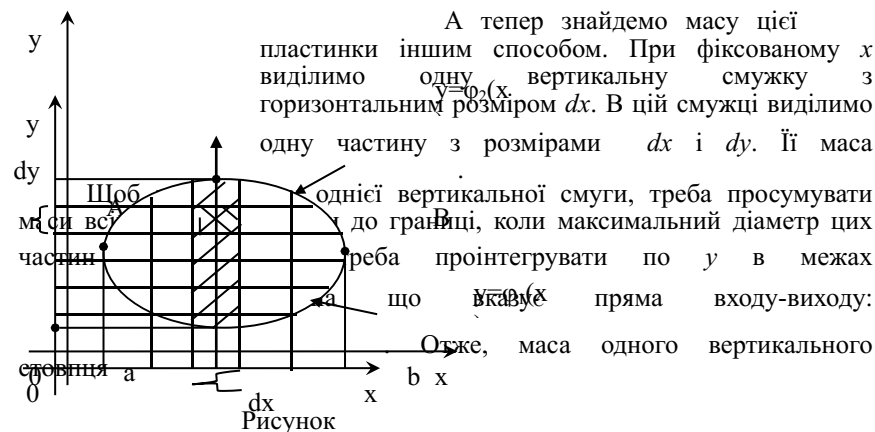


Рисунок 1.6

(1.5)



x

Щоб знайти всю масу, треба просумувати маси всіх вертикальних смуг від $x = a$ до $x = b$, тобто проінтегрувати по x .

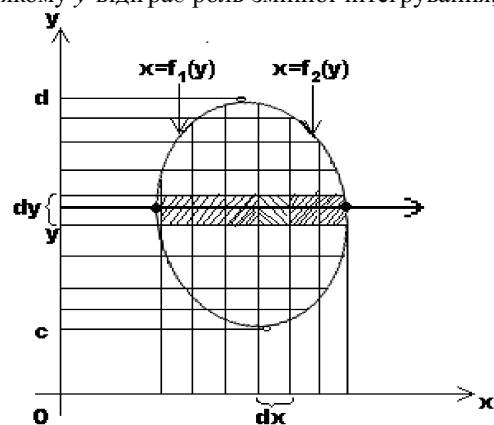
Порівнюючи формули (1.5) і (1.6), одержимо формулу для обчислення подвійного інтеграла в декартових прямокутних координатах у випадку, коли область D є стандартною по y :

Інтеграл в правій частині (1.7) називають повторним.
Правило обчислення подвійного інтеграла полягає в тому, щоб звести подвійний інтеграл до повторного. Фактично ми подвійний інтеграл розкладаємо на два визначених інтеграли.

Зауважимо, що обчислення починається з внутрішнього інтеграла, в якому y відіграє роль змінної інтегрування, а x – константи. Результат буде функцією від x , а після повторного інтегрування по змінній x одержимо число. В першому (зовнішньому) інтегралі межі інтегрування завжди сталі, а в другому (внутрішньому) можуть бути як сталі, так і функціями від x .

На випадок, коли область D є стандартною по змінній x (рис.1.9), існує інша формула для обчислення подвійного інтеграла, яка відрізняється від формули (1.7) порядком

інтегрування: Рисунок 1.9



(1.8)

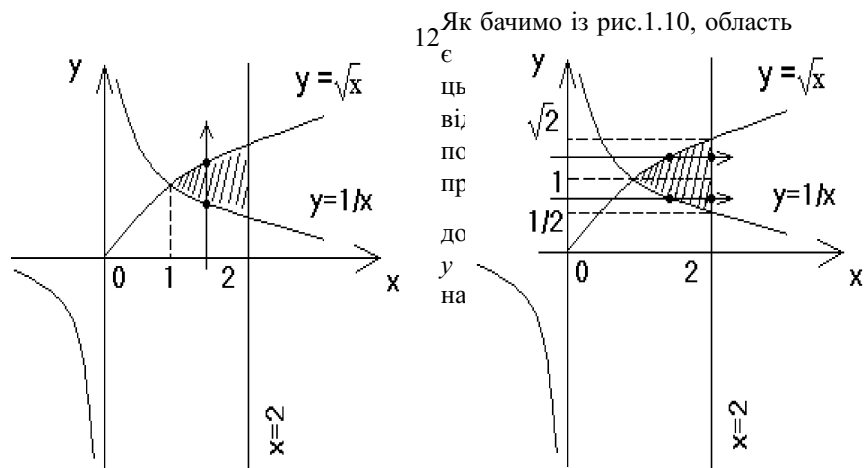
Очевидно, що результат не залежить від порядку інтегрування.

Розглянемо приклади.

Приклад 1 Розставити межі інтегрування у подвійному інтегралі

, де область D обмежена лініями: $xy=1$, $x=2$, $y=\sqrt{x}$.

Розв'язування Спочатку побудуємо область D в декартовій системі координат:



Тепер поміняємо порядок інтегрування. Як видно із рис. 1.11, область D проектується на вісь y відрізок $1/2 \leq y \leq \sqrt{2}$, але при цьому, як показує пряма входу-виходу проведена через область D паралельно до осі Ox , змінна x змінюється по-різному: для $1/2 \leq y \leq 1$ x змінюється від лінії $y=1/x$, на якій $x=1/y$ до лінії $x=2$, а для $1 \leq y \leq \sqrt{2}$ x змінюється від лінії $y=\sqrt{x}$, на якій $x=y^2$ до лінії $x=2$. Отже, область необхідно розбити на дві частини, а подвійний інтеграл запишеться як сума повторних інтегралів:

Приклад 2 Змінити порядок інтегрування в повторному інтегралі

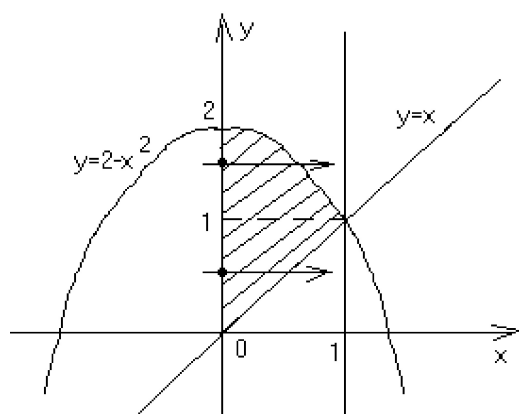


Рисунок 1.12
повторний інтеграл набуває вигляду :

Розв’язування Область інтегрування D обмежена лініями

$x = 0, x = 1, y = x, y = 2 - x^2$ (на рисунку 1.12 ця область заштрихована).

Як показує пряма “ входу – виходу ” , для $0 \leq y \leq 1 : 0 \leq x \leq y$, а для $1 \leq y \leq 2$:

$$0 \leq x \leq \dots$$

Отже, після зміни порядку інтегрування

Приклад 3 Обчислити подвійний інтеграл

де

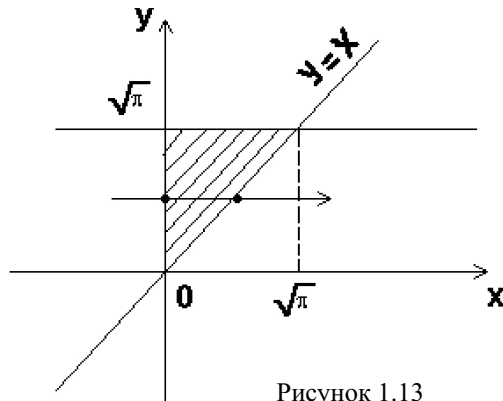


Рисунок 1.13

область D обмежена лініями:
 $x=0$, $y=x$, $y=\sqrt{\pi}$.

Розв'язування Побудуємо область D (рис. 1.13). Виходячи із виду області, можна зробити висновок, що тут не має значення, як вибрати порядок інтегрування. А тепер звернемо увагу на підінтегральну функцію і згідно з цим виберемо такий

14

порядок інтегрування, щоб внутрішній інтеграл (з якого почнеться інтегрування) був простішим. Очевидно, що по змінній x інтеграл буде простіший, ніж по змінній y .

Отже повторний інтеграл буде таким:

Обчислення починається з внутрішнього інтеграла по змінній x за умови, що змінна y є сталою. Отже:

1.5 Заміна змінних у подвійному інтегралі

Нехай функція $f(x,y)$ неперервна в деякій замкненій обмеженій

області D . Тоді для неї існує подвійний інтеграл

Припустимо, що в подвійному інтегралі здійснюється заміна змінних за формулами

$$x=x(u,v), \quad y=y(u,v) \quad (1.9)$$

Вважаємо ці перетворення взаємно однозначними, тобто із (1.9) змінні u і v визначаються однозначно :

$$u=u(x,y), \quad v=v(x,y) \quad (1.10)$$

За допомогою формул (1.10) кожній точці $M(x,y) \in D$ в площині xOy ставиться у відповідність єдина точка $M'(u,v) \in D'$ в площині uOv . Таким чином, область D переходить в область D' .

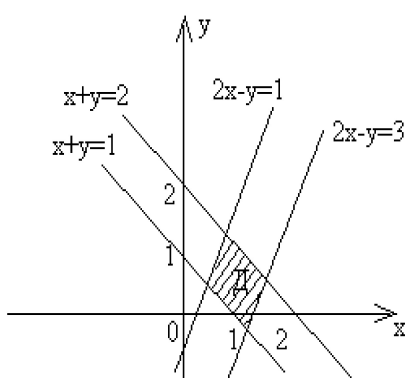
В теорії кратних інтегралів доводиться, що якщо функції $x(u,v)$ і $y(u,v)$ в області D' мають неперервні частинні похідні першого порядку і якщо визначник

,

то для подвійного інтеграла справедлива формула:

$$15 \quad (1.11)$$

Цей функціональний визначник називається визначником Якобі або якобіаном (на честь німецького математика Якобі). Фактично якобіан дає зв'язок між площами частин, на які розбита область, в різних системах координат, а в силу малості цих частин можна вважати, що вони рівні:



. Цим визначником будемо користуватися при переході до нових змінних в подвійному інтегралі.

Приклад 4

Обчислити подвійний інтеграл , де область D - паралелограм, обмежений прямими: $x+y=1$, $x+y=2$, $2x-y=1$, $2x-y=3$.

Розв'язування Побудуємо

область в декартовій системі координат.

Безпосереднє обчислення цього інтеграла досить громіздке, оскільки для зведення його до повторного необхідно область розбити на три частини, а потім обчислювати відповідно суму трьох інтегралів. Однак проста заміна змінних: $x+y=u$, $2x-y=v$, дозволяє значно спростити обчислення. Прямі $x+y=1$ і $x+y=2$ в системі координат xOy переходять в прямі $u=1$ і $u=2$ в системі координат $uO'v$ (рис. 1.15), а прямі $2x-y=1$ і $2x-y=3$ в прямі $v=1$ і $v=3$. Таким чином, паралелограм D перетворюється в прямокутник D' , який є більш простою областю інтегрування. Знайдемо якобіан. Для цього виразимо x і y через u і v :

Рисунок 1.14

Рисунок 1.15

16

Отже:

Його модуль . Тоді інтеграл

1.6 Перехід від декартових координат до полярних в подвійному інтегралі

Як відомо, зв'язок між декартовими і полярними координатами здійснюється за формулами:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad (1.12)$$

Відразу зауважимо, що коли підінтегральна функція або рівняння границі області інтегрування містить вираз $x^2 + y^2$, то з метою спрощення інтеграла доцільно перейти до полярних координат, оскільки в полярних

координатах вказаний вираз набирає досить простого вигляду:

$$(r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2 = r^2$$

Запишемо якобіан переходу від декартових координат до полярних:

Оскільки координата $r \geq 0$, то $|I| = r$, а перехід від декартових координат до полярних в подвійному інтегралі здійснюється за схемою:

17

Приклад

Обчислити подвійний інтеграл

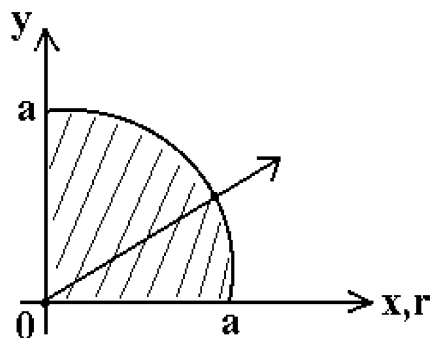


Рисунок 1.16

де область D обмежена чвертю кола $x^2 + y^2 = a^2$, розташованої в першому квадранті, і координатними осями. (рис.1.16).

Роз'язування

Тут доцільно перейти до полярних координат. Для зручності накладемо на декартову систему координат полярну і запишемо рівняння

даного кола в полярних координатах: $x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow (r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2 = a^2$

$\Rightarrow r = a$. Осям координат відповідають рівняння променів $\varphi = 0$ і $\varphi = \pi/2$. В полярних координатах також існує поняття прямої входу-виходу, яка являє собою промінь, що виходить із полюса і перетинаючи область, вказує в яких межах змінюється змінна r . Отже:

1.7 Деякі застосування подвійних інтегралів

18

1) Об'єм криволінійного циліндра

У випадку, коли криволінійний циліндр обмежений зверху поверхнею $z=f(x, y)>0$, а його основою є область D , що лежить в площині xOy , об'єм обчислюється за формулою (див. пп.1.1, 1.2)

(1.13)

Коли $z = f(x, y) < 0$, то при знаходженні об'єму такого криволінійного циліндра потрібно підінтегральну функцію взяти по абсолютній величині:

(1.14)

2) Площа плоскої фігури

В декартових координатах площу області D можна обчислювати за формулою

$$S = \int_D dx dy, \quad (1.15)$$

а в полярних координатах - за формулою

$$S = \int_D r dr d\varphi, \quad (1.16)$$

3) Маса матеріальної пластини

Із пп.1.1, 1.2 випливає, що маса плоскої неоднорідної пластини з густиною $\rho = \rho(x,y)$ обчислюється за формулою

$$M = \int_D \rho(x,y) dx dy, \quad (1.17)$$

4) Статичні моменти матеріальної пластини відносно координатних осей

Нехай задано матеріальну пластину з густиною $\rho = \rho(x, y)$ розташовану в площині xOy у вигляді області D . Як відомо з механіки, статичний момент матеріальної точки відносно деякої осі дорівнює добутку маси точки на відстань від точки до цієї осі. Щоб скористатися цим фактом, розіб'ємо область D на частини і виділимо одну з них з розмірами dx і dy . Виберемо в цій частині довільну точку $P(x,y)$ і в силу малості частини будемо вважати, що вся її маса зосереджена в цій точці. Тоді статичний момент цієї частини, як точки, відносно осі Ox буде

$$dM_x = y \rho(x,y) dx dy,$$

а статичний момент всієї області D :

$$M_x = \int_D y \rho(x,y) dx dy. \quad (1.18)$$

Аналогічно можна одержати статичний момент пластини відносно осі Oy :

$$M_y = \int_D x \rho(x,y) dx dy. \quad (1.19)$$

5) Координати центра мас матеріальної пластини

Для визначення координат центра мас матеріальної пластини, розташованої в площині xOy , скористаємося відомими з механіки формулами:

Отже, для неоднорідної пластини з густиною $\rho = \rho(x, y)$ маємо формули для обчислення координат центра мас у вигляді:

$$(1.20)$$

Якщо пластина однорідна, тобто $\rho = \text{const}$, то ці формули спрощуються:

Зауважимо, що у випадку однорідної пластини доцільно враховувати симетрію, якщо вона є.

б) Моменти інерції матеріальної пластини відносно координатних осей

Нехай задано матеріальну пластину з густиною $\rho = \rho(x, y)$, розташовану в площині xOy у вигляді області D .

Як відомо з механіки, момент інерції матеріальної точки відносно деякої осі дорівнює добутку маси точки на квадрат її відстані до цієї осі.

Як і у випадку із статичним моментом, розіб'ємо область D на частини і виділимо одну з них з розмірами dx і dy . Виберемо довільну точку $P(x, y)$ і в силу малості частини будемо вважати, що вся її маса зосереджена в цій точці. Тоді момент інерції частини відносно осі Ox визначиться за формулою:

Момент інерції I_x всієї пластини відносно осі Ox :

(1.22)

Аналогічно визначається момент інерції I_y пластини відносно осі Oy :

(1.23)

Можна знайти момент інерції I_0 пластини відносно початку координат. Враховуючи, що момент інерції точки $P(x,y)$ з масою dm відносно початку координат дорівнює :

Тоді момент інерції I_0 для всієї пластини :

(1.24)

Очевидно, що $I_0 = I_x + I_y$

Приклад 1

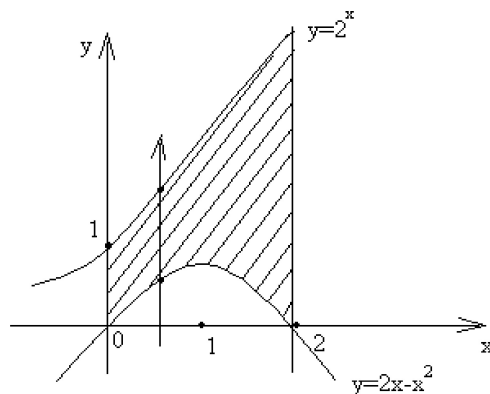


Рисунок 1.17
даний інтеграл до повторного :

Обчислити площу фігури,
обмеженої лініями

Розв'язування Згідно з формулою (1.15) де область інтегрування D зображена на рис.1.17. Вибираємо раціональний порядок інтегрування і зводимо

Приклад 2 Переходячи до полярних координат, знайти площу фігури, обмеженої лінією $(x^2+y^2)^3=4a^2xy(x^2-y^2)$.

Розв'язування Перейдемо до полярних координат за формулами $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$: $(r^2\cos 2\varphi + r^2\sin 2\varphi)^3 = 4a^2 r\cos\varphi r\sin\varphi (r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi)$

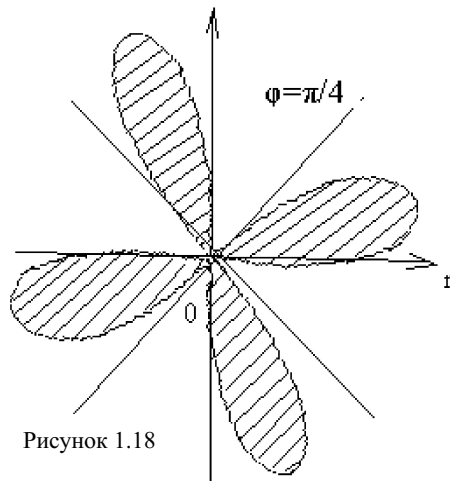


Рисунок 1.18

$$r^6 = 2a^2 \cdot r^2 \cdot \sin 2\varphi r^2 \cdot \cos 2\varphi$$

, звідки $r^2 = a^2 \cdot \sin 4\varphi$
або

Очевидно, що $\sin 4\varphi \geq 0$. Фігура в полярних координатах зображена на рис. 1.18.

Використовуючи симетрію фігури і застосовуючи формулу (1.16), знайдемо площу:

φ

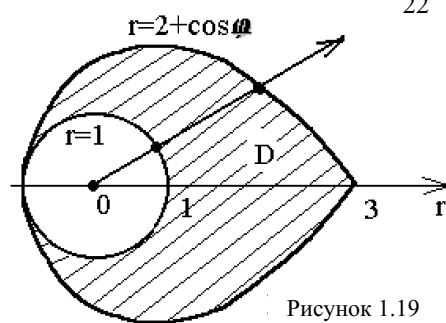


Рисунок 1.19

обчислюємо площу за формулою (1.16):

22

Приклад 3

Знайти площу фігури обмеженої лініями, заданими в полярній системі координат:

$$r=2+\cos\varphi, \quad r=1$$

Розв'язування

Побудуємо ці лінії (равлик Паскаля і коло одиничного радіуса з центром в полюсі).

Враховуючи симетрію,

Приклад 4

Знайти об'єм тіла, обмеженого двома параболоїдами: $z=4-x^2-y^2$, $2z=2+x^2+y^2$

Розв'язування

Задане тіло зображене на рис.1.20. Його об'єм можна знайти як різницю об'ємів двох вертикальних циліндричних тіл, які мають спільну основу D на площині xOy , а зверху обмежені даними параболоїдами.

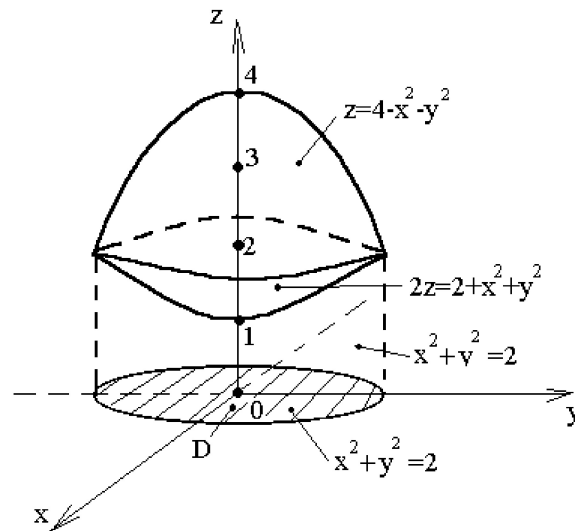


Рисунок 1.20

Лінію перетину даних поверхонь, яка визначає границю області D ,

можна знайти із системи рівнянь . Виключивши z , одержимо . Щоб спростити обчислення інтеграла, перейдемо до полярних координат. Тоді:

Приклад 5

24

Знайти масу пластини в формі еліпса, якщо поверхнева густина в кожній точці пластини пропорційна її відстані d від малої осі еліпса і при $d=1$ вона дорівнює λ .

Розв'язування

Позначимо півосі еліпса a і b ($a > b$) і виберемо осі Ox і Oy так, щоб еліпс мав у вибраній системі координат канонічне рівняння (рис. 1.21)

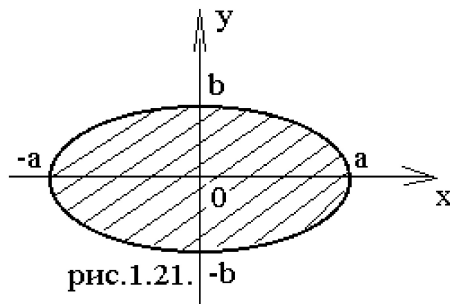


рис.1.21.

Згідно з умовою задачі густина в точці $M(x,y)$ буде .
Тоді маса правої половини еліпса

Рисунок 1.21

Отже маса всієї пластинки

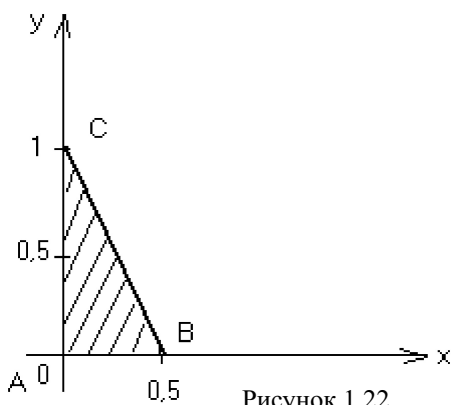
Приклад 6 Знайти координати центра мас прямокутного трикутника з вершинами в точках $A(0; 0)$, $B(0,5; 0)$, $C(0; 1)$, якщо поверхнева густина ρ в кожній точці трикутника чисельно дорівнює квадрату відстані від цієї точки до вершини прямого кута.

Розв'язування

За умовою . Розрахункові формули :

, де S_y , S_x - статичні моменти відносно Oy і Ox .

25



В даному випадку:

Рисунок 1.22

Рисунок 1.22

Знайдемо масу пластинки :

Знаходимо статичні моменти :

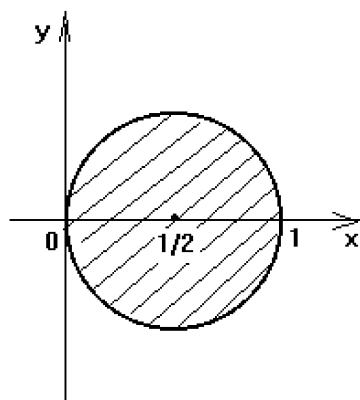
За допомогою даних, отриманих вище, знайдемо x_0 ; y_0 . Отже,

Відповідь:

Приклад 7

Знайти момент інерції однорідного круга $x^2+y^2 \leq x$ відносно осі Ox (густина $\rho=1$).

Розв'язування Покажемо, що даний круг має центр в точці $C(1/2; 0)$ і радіус $R=1/2$: (Рисунок 1.23).



Перейдемо до полярних координат

і врахуємо, що поверхнева густина $\rho=1$.

Рівняння кола $x^2+y^2=x$ в полярних

координатах буде $r=\cos \varphi$.

Обчислення проводимо за формулою (1.22), але в полярних координатах.

Рисунок 1.23

Відповідь: .

1.8 Індивідуальні завдання ²⁸для самостійної роботи
Задача 1 Змінити порядок інтегрування у повторному

інтегралі

1.1 а)

б)

2.2 а)

б)

3.3 а)

б)

1.4 а)

б)

29

1.5 а)

б)

1.6 а)

б)

1.7 а)

б)

1.8 a)

б)

30

1.9 a)

б)

10.10 a)

б)

11.11 a)

б)

12.12 а)

б)

31

13.13 а)

б)

14.14 а)

б)

1.15 a)

б)

1.16 a)

б)

1.17 a)

32

б)

1.18 a)

б)

1.19 а)

б)

1.20 а)

б)

1.21 а)

б)

1.22 а)

б)

1.23 а)

б)

1.24 а)

б)

1.25 а)

б)

1.26 a)

б)

1.27 a)

б)

1.28 a)

б)

1.29 a)

б)

1.30 а)

35

б)

Задача 2 Обчислити

2.1

D: $y=\ln 2$, $y=\ln 3$, $x=2$, $x=4$ /

2.2

D: $x=0$, $y=$,

2.3

D: , , $x=1$, $x=2$

2.4

D: $x=0, y=2, y=x$

2.5

D: $y=$, , $x=1, x=2$

2.6

36

D: $x=0, y=$ $y=$

2.7

D: $y=\ln 3, y=\ln 4, x=$, $x=1$.

2.8

D: $x=0, y=$, $y=x$.

2.9

D: $y=$, $y=$, $x=$, $x=1$.

2.10

D: $x=0$, $y=2$, $y=$.

2.11

D: $y=$, $y=$, $x=2$, $x=3$.

2.12

D: $x=0$, $y=$, $y=x$.

37

2.13

D: $y=\ln 2$, $y=\ln 3$, $x=4$, $x=8$.

2.14

D: $x=0$, $y=$, $y=2x$.

2.15

D: $y=$, $y=$, $x=1$, $x=2$.

2.16

$$D: x=0, y=, y=x.$$

2.17

$$D: y=, y=2, x=, x=1.$$

2.18

$$D: x=0, y=, y=.$$

2.19

$$D: y=\ln 3, y=\ln 4, x=, x=.$$

2.20

38

$$D: x=0, y=, y=.$$

2.21

$$D: y=, y=, x=, x=1.$$

2.22

$$D: x=0, y=1, y= \quad .$$

2.23

$$D: y= \quad , y= \quad , x= \quad , x=2.$$

2.24

$$D: x=0, y= \quad , y=2x.$$

2.25

$$D: y=\ln 2, y=\ln 3, x=3, x=6.$$

2.26

$$D: x=0, y= \quad , y=x.$$

2.27

$$D: y= \quad , y= \quad , x= \quad , x=2.$$

39

2.28

$$D: x=0, y=4, y=2x.$$

2.29

D: $y=$, $y=$, $x=1$, $x=3$.

2.30

D: $x=0$, $y=$, $y=2x$.

Задача 3 Знайти площу фігури обмеженої даними лініями

3.1 $y=$, $y=$, $y=3$, $y=4$.

3.2 $x=$, $x=6-$.

3.3

3.4

3.5

3.6

3.7

3.8

3.9

3.10

3.11

3.12

3.13

3.14

3.15

3.16

3.17

3.18

3.19

3.20

3.21

3.22

3.23

3.24

3.25

3.26

3.27

41

3.28

3.29

3.30

.

Задача 4 Знайти площу фігури, обмеженої лініями заданими в полярній системі координат

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

4.13

42

4.14

4.15

4.16

4.17

4.18

4.19

4.20

4.21

4.22

4.23

4.24

4.25

4.26

4.27

4.28

4.29

4.30

Задача 5 Переходячи до полярних координат, знайти площу фігури, обмеженої лінією

5.1

5.2

5.3

43

5.4

5.5

5.6

5.7

5.8

5.9

5.10

5.11

5.12

5.13

5.14

5.15

5.16

5.17

5.18

5.19

5.20

5.21

5.22

5.23

5.24

5.25

5.26

44

5.27

5.28

5.29

5.30

Задача 6 Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями

6.1

6.2

6.3

6.4

6.5

6.6

6.7

6.8

6.9

6.10

6.11

6.12

6.13

6.14

6.15

6.16

6.17

6.18

6.19

6.20

6.21

6.22

6.23

6.24

6.25

6.26

6.27

6.28

6.29

6.30

Задача 7 Знайти масу пластини D , заданої нерівностями, з поверхневою густиною ρ .

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.11

47

7.12

7.13

7.14

7.15

7.16

7.17

7.18

7.19

7.20

7.21

7.22

7.23

48

7.24

7.25

7.26

7.27

7.28

7.29

7.30

Задача 8 Знайти координати центра мас пластини D , заданої лініями, з поверхневою густиною ρ

8.1

8.2

8.3

8.4

49

8.5

8.6

8.7

8.8

8.9

8.10

8.11

8.12

8.13

8.14

8.15

8.16

50

8.17

8.18

8.19

8.20

8.21

8.22

8.23

8.24

8.25

8.26

8.27

51

8.28

8.29

8.30

Задача 9 Знайти момент інерції однорідного прямокутного трикутника з катетами a і b відносно вершини прямого кута

9.1	$a = 1,$	$b = 1$
9.2	$a = 1,$	$b = 2$
9.3	$a = 1,$	$b = 3$
9.4	$a = 1,$	$b = 4$
9.5	$a = 1,$	$b = 5$
9.6	$a = 1,$	$b = 6$
9.7	$a = 1,$	$b = 7$
9.8	$a = 1,$	$b = 8$
9.9	$a = 2,$	$b = 2$
9.10	$a = 2,$	$b = 3$
9.11	$a = 2,$	$b = 4$
9.12	$a = 2,$	$b = 5$
9.13	$a = 2,$	$b = 6$
9.14	$a = 2,$	$b = 7$
9.15	$a = 2,$	$b = 8$
9.16	$a = 3,$	$b = 3$
9.17	$a = 3,$	$b = 4$
9.18	$a = 3,$	$b = 5$
9.19	$a = 3,$	$b = 6$
9.20	$a = 3,$	$b = 7$
9.21	$a = 4,$	$b = 4$
9.22	$a = 4,$	$b = 5$
9.23	$a = 4,$	$b = 6$

9.24	$a = 4,$	$b = 7$
9.25	$a = 5,$	$b = 5$
9.26	$a = 5,$	$b = 6$
9.27	$a = 5,$	$b = 7$
9.28	$a = 6,$	$b = 6$
9.29	$a = 6,$	$b = 7$
9.30	$a = 7,$	$b = 7$

Розділ 3

КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

3.1 Задача, що приводить до поняття криволінійного інтеграла першого роду

Розглянемо задачу про масу дуги кривої. Нехай дано дугу плоскої лінії AB , вздовж якої розподілено речовину з лінійною густиною $\rho = \rho(x, y)$. Треба знайти масу матеріальної дуги. Згідно із знайомим вже алгоритмом розіб'ємо дугу AB

довільним чином на частини (рисунок 3.1) таких, що . Позначимо довжину кожної частини через Δl_k , $k=1,2,\dots,n$. В кожній частині l_k виберемо довільну точку $M_k(x_k, y_k)$, в якій густина $\rho = \rho(x_k, y_k)$. Враховуючи малі розміри частини l_k , можна вважати, що густина в межах її є сталою і дорівнює густині в точці M_k . Тоді масу окремої частини l_k наближено можна знайти за формулою:

$$\Delta m_k \approx \rho(x_k, y_k) \Delta l_k$$

а масу всієї дуги AB :

Точне значення маси можна одержати, якщо перейти до границі, за умови,

що величина

Отже:

$$(3.1)$$

3.2 Означення криволінійного інтеграла першого роду

Зауважимо, що до границь виду (3.1) приводять і інші задачі геометричного та фізичного змісту. Тому можна абстрагуватися від

конкретного змісту функції $f(x, y)$ і узагальнити алгоритм розв'язування попередньої задачі, розглянувши довільну функцію $f(x, y)$, визначену в кожній точці дуги AB деякої кусково-гладкої кривої, розташованої в площині xOy . Виконаємо такі операції :

1) Розіб'ємо дугу AB довільним чином на n частин l_k ($k = 1, 2, \dots, n$) з довжинами Δl_k .

2) У кожній частині виберемо довільну точку $M_k(x_k, y_k)$, в якій знайдемо значення функції $f(x_k, y_k)$.

3) Побудуємо суму
$$\sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta l_k, \quad (3.2)$$

яка називається *інтегральною сумою* функції $f(x, y)$ по довжині дуги.

4) Позначимо через Δl найбільшу з довжин частин розбиття: $\Delta l = \max \{ \Delta l_k \}$.

Означення Якщо при $\Delta l \rightarrow 0$ існує границя інтегральної суми (3.2), яка не залежить від способу розбиття дуги AB і вибору точок M_k , то ця границя називається *криволінійним інтегралом першого роду*. Позначається:

(3.3)

де dl - довжина частини розбиття дуги, а сама дуга AB - контур інтегрування.

В курсі математичного аналізу доводиться, що границя інтегральної суми (3.2) існує, якщо функція $f(x, y)$ - неперервна. Отже, неперервна на AB функція є інтегровною по довжині дуги.

Зауваження Тепер формулі (3.1) можна надати інтегрального виду:

У визначенні маси неоднорідної матеріальної кривої полягає механічний зміст криволінійного інтеграла першого роду.

Криволінійні інтеграли першого роду мають такі властивості.

Властивість 1 Криволінійний інтеграл першого роду не залежить від напрямку обходу контуру інтегрування:

Властивість 2 Сталий множник можна виносити за знак криволінійного інтеграла:

Властивість 3 Якщо функції $f_1(x, y)$ і $f_2(x, y)$ інтегровні на дузі AB , то на цій дузі інтегровні їх сума і різниця, причому

Властивість 4 Якщо дуга AB складається з дуг AC і CB , а функція $f(x, y)$ – інтегровна на AB , то вона інтегровна на AC і CB , причому

Властивість 5 Якщо функції $f_1(x, y)$ і $f_2(x, y)$ інтегровні на AB , причому $f_1(x, y) \geq f_2(x, y)$ для всіх точок дуги AB , то

З механічної точки зору це означає, що криволінійний стержень з більшою лінійною густиною має і більшу масу.

Властивість 6 Якщо функція $f(x, y)$ неперервна на кривій AB , то має місце така оцінка криволінійного інтеграла першого роду:

де L – довжина дуги AB , m – найменше значення функції $f(x, y)$ на AB , M – найбільше значення $f(x, y)$ на AB .

Властивість 7 Якщо функція $f(x, y)$ неперервна на AB , то на цій дузі знайдеться така точка, в якій функція набуває свого середнього значення $f_{\text{сеп}}$, для якого має місце рівність:

Звідси можна одержати формулу для знаходження середнього значення

функції на дузі AB :

3.4 Обчислення криволінійного інтеграла першого роду

Обчислення криволінійного інтеграла першого роду зводиться до обчислення визначеного інтеграла. Формули обчислення залежать від способу задання кривої AB . Розглянемо різні випадки, але спочатку згадаємо, як вводилося поняття диференціала довжини дуги dl , який застосовувався при знаходженні довжини кривої за допомогою

визначеного інтеграла: (3.4)

1) Нехай криву AB задано рівнянням $y=y(x)$, де $y(x)$ і $y'(x)$ - неперервні при $x \in [a, b]$, де відрізок $[a, b]$ є проекцією кривої AB на вісь Ox . Тоді, враховуючи що, $dy=y'dx$, перехід від криволінійного інтеграла першого роду до визначеного здійснюється за схемою

(3.5)

Аналогічним чином криволінійний інтеграл першого роду зводиться до визначеного, якщо крива AB задана рівнянням $x=x(y)$.

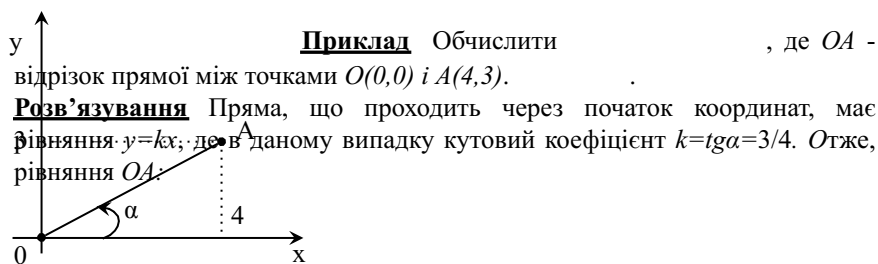


Рисунок 3.2

85 Нехай криву AB задано параметричними рівняннями $x=x(t)$, $y=y(t)$, де $x(t)$, $y(t)$ — функції, $x(t)$, $y(t)$ та їхні похідні $x'(t)$ та $y'(t)$, неперервні при $t \in [a, \beta]$. Тоді, скориставшись формулою (3.4) і враховуючи, що $dx=x'dt$, $dy=y'dt$ маємо:

$$(3.6)$$

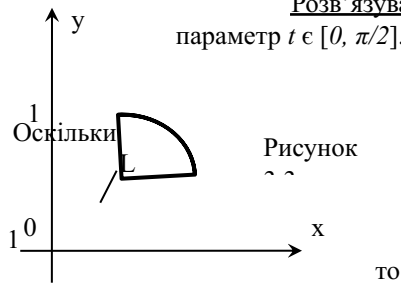
Зауважимо, що формула (3.6) поширюється і на просторовий випадок, коли криву AB задано у просторі параметричними рівняннями: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, де ці функції разом зі своїми похідними неперервні при $t \in [a, \beta]$. Тоді криволінійний інтеграл першого роду у просторі:

$$(3.7)$$

Приклад Обчислити $\int_L x^2 y^2 dx + y^2 x^2 dy$, де L - дуга астроїди

розташована в першому квадранті.

Розв'язування Із рисунка 3.3 видно, що кутовий параметр $t \in [0, \pi/2]$. Визначимо dl за формулою (3.4).



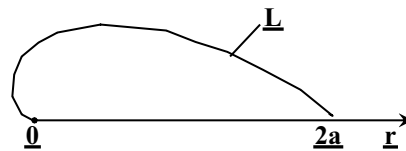
Обчислюємо криволінійний інтеграл першого роду:

3) Нехай криву AB задано в полярній системі координат рівнянням $r=r(\varphi)$, де функція $r(\varphi)$ разом із похідною $r'(\varphi)$ неперервні при $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$.

Щоб скористатися формулою (3.4), знайдемо диференціали dx і dy , якщо $x=r\cos \varphi$, $y=r\sin \varphi$, а $r=r(\varphi)$.

Тоді

Криволінійний інтеграл



(3.8)

Приклад Обчислити $\int_L \sqrt{r} dr$, де L дуга кардіоїди $r=a(1+\cos\varphi)$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, ($a>0$).

Розв'язування

Крива L зображена на рис 3.4. Згідно з формулою (3.8) одержимо :

3.5 Застосування криволінійних інтегралів першого роду

1) Маса матеріальної кривої

Якщо $\rho = \rho(x, y)$ – лінійна густина речовини, розподіленої вздовж кривої AB , то, як випливає із пункту 3.1, маса кривої

$$(3.9)$$

2) Довжина кривої

Якщо у формулі (3.9) покласти густину $\rho(x, y) \equiv 1$, то $m = 1 \cdot l = l$. Тому

$$(3.10)$$

88

3) Статичні моменти матеріальної кривої відносно координатних осей

$$(3.11)$$

4) Координати центра мас матеріальної кривої

Прямокутні декартові координати центра мас $C(x_c, y_c)$ визначаються за формулами:

(3.12)

Якщо крива AB однорідна, тобто $\rho = \text{const}$, то одержимо спрощені формули для координат центра мас

(3.13)

5) Моменти інерції матеріальної кривої

Моменти інерції матеріальної кривої AB з густиною $\rho = \rho(x, y)$ відносно координатних осей і початку координат виражаються формулами

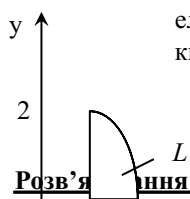
(3.14)

Зауваження Формули (3.9) - (3.14) записані для плоскої кривої, але всі вони легко узагальнюються і на випадок просторової кривої.

Розглянемо приклади на застосування криволінійного інтеграла першого роду.

Приклад 1

Знайти масу чверті еліпса $x = \cos t$, $y = 2 \sin t$, розташованої у першому квадранті площини xOy , якщо лінійна густина $\rho = y$.



Згідно з формулою (3.9) маса даної кривої L

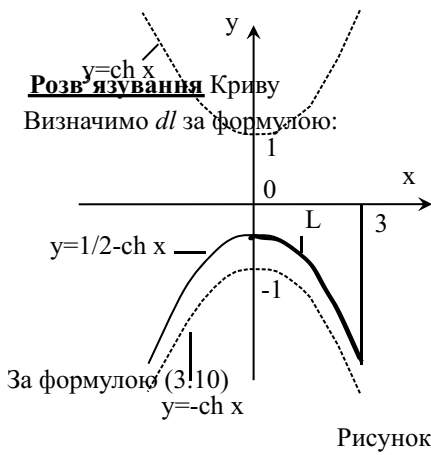
Із рівняння кривої знайдемо

Очевидно, що параметр . Тоді

Далі цей інтеграл можна взяти по частинах і одержати остаточно

Приклад 2 Знайти довжи її , якщо

$x \in [0, 3]$.



зображено на рис. 3.5.

Приклад 3 Знайти координати центра мас кривої AB гвинтової лінії $x = acost$, $y = asint$, $z = bt$, якщо в кожній точці кривої лінійна густина пропорційна аплікаті цієї точки, тобто $\rho = kz = kbt$; $t \in [0, \pi]$

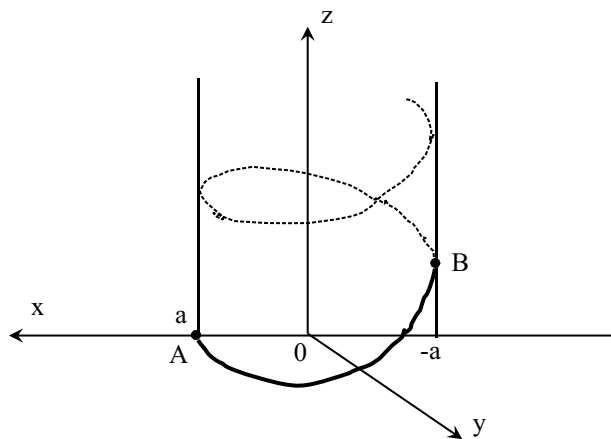


Рисунок 3.6

Розв'язування

Гвинтову лінію зображено на рис.3.6. Узагальнюючи

формули (3.12) на випадок тривимірного простору, запишемо координати центра мас у вигляді

де m -маса кривої, M_{yz} , M_{xz} , M_{xy} статичні моменти кривої відносно площин yOz , xOz , xOy відповідно.

Знайдемо ці величини, визначивши спочатку dl :

Отже,

Приклад 4 Знайти моменти інерції чверті однорідного кола $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, розташованої в першому квадранті площини xOy , відносно осей і початку координат.



Розв'язування Оскільки дана дуга однорідна і симетрична відносно прямої $y=x$, то $I_x=I_y$. Згідно з формулами

Рисунок 3.7

3.6 Задача, що приводить до поняття криволінійного інтеграла другого роду

Розглянемо задачу про роботу змінної сили на криволінійному переміщенні. Якщо сила $\vec{F}$ стала (по величині і по напрямку), а переміщення $\vec{S}$ прямолінійне, то, як відомо, робота цієї сили дорівнює скалярному добутку

де φ - кут між векторами $\vec{F}$ і $\vec{S}$.

Якщо вектори задані своїми координатами, то скалярний добуток дорівнює сумі добутків відповідних координат цих векторів.

Розглянемо випадок, коли сила $\vec{F}$ змінна і задається, як вектор із змінними координатами в площині xOy .

(3.15)

Нехай ця сила діє вздовж дуги AB , яка також лежить в площині xOy . Поставимо задачу про знаходження роботи цієї сили на криволінійному переміщенні із точки A в точку B .

Дугу AB розіб'ємо довільним чином на n частин. Якщо ці частини досить малі, можна припустити, що діюча сила на кожній частині стала і дорівнює $\vec{F}_k$, де точка $M_k(\xi_k, \eta_k)$ - довільна точка дуги $A_{k-1}A_k$, а саму дугу $A_{k-1}A_k$ можна вважати прямолінійним відрізком.

Тоді переміщення :

Сила $\vec{F}$ тепер задається сталим вектором:

Тоді робота на кожній частині

Вся робота сили на криволінійному переміщенні AB наближено виражається формулою

(3.16)

Щоб уточнити формулу (3.17), треба перейти до границі при $\Delta \rightarrow 0$, де Δ - довжина найбільшої із частин $A_{k-1}A_k$.

(3.17)

3.7 Означення криволінійного інтеграла другого роду

Відійдемо від конкретного змісту розглянутої задачі і застосуємо алгоритм її розв'язування до довільної векторної функції

(3.18)

яка визначена і неперервна на деякій кривій AB з початком в точці A і кінцем в точці B (рис 3.8). Виконаємо такі операції :

1) розіб'ємо криву AB на n частин $A_{k-1}A_k$ ($k=1,2,\dots,n$); $A_0=A$, $A_n=B$.
 2) на дузі виберемо довільну точку . Позначимо координати точки A_k через x_k, y_k , тобто $A_k(x_k, y_k)$, тоді $A_{k-1}(x_{k-1}, y_{k-1})$, а проєкції дуги A_kA_{k-1} на координатні осі виражаються формулами
 3) значення функції $P(x,y)$, $Q(x,y)$ в точці помножимо відповідно $P(x_k, y_k)$ і $Q(x_k, y_k)$ на довжину дуги A_kA_{k-1} і додамо ці добутки

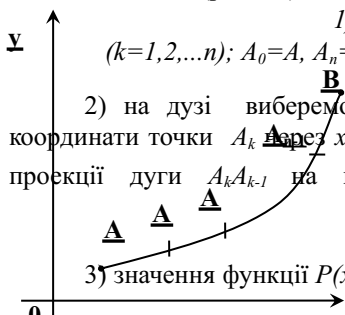


Рисунок 3.8

. Складемо суму всіх таких виразів :

$$, \quad (3.19)$$

яка називається інтегральною сумою по координатах для вектор-функції (3.19). Зауважимо, що на відміну від інтегральної суми (3.3) в сумі (3.20) значення функції множиться не на довжину елементарної дуги, а на її проекцію на відповідну координатну вісь.

4) позначимо через Δl довжину найбільшої із дуг $A_{k-1}A_k$ і перейдемо до границі коли $\Delta l \rightarrow 0$.

Означення Якщо при $\Delta l \rightarrow 0$ існує границя інтегральної суми (3.20), яка не залежить від способу розбиття кривої AB і від вибору точок M_k , то ця границя називається *криволінійним інтегралом другого роду* від вектор-функції (3.19) і позначається

$$(3.20)$$

Криволінійний інтеграл другого роду ще називають криволінійним інтегралом по координатах.

Очевидно

тобто при зміні напрямку інтегрування криволінійний інтеграл другого роду змінює знак, оскільки в цьому випадку змінюються знаки проекції елементарної дуги на координатні осі.

Інші властивості криволінійного інтеграла другого роду аналогічні основним властивостям криволінійного інтеграла першого роду.

3.8 Обчислення криволінійного інтеграла другого роду

Обчислення криволінійного інтеграла другого роду також зводиться до обчислення визначеного інтеграла. В залежності від способу задання кривої AB розглянемо такі випадки.

1) Нехай криву AB задано рівнянням $y=y(x)$, де функція $y(x)$ та її похідна $y'(x)$ неперервні на проміжку $x \in [a, b]$ (відрізок $[a, b]$ є проекцією кривої AB на координатну вісь Ox). Тоді перехід від криволінійного

інтеграла другого роду до визначеного здійснюється за схемою:

$$(3.21)$$

Аналогічний перехід буде у випадку, коли криву AB задано рівнянням $x=x(y)$.

2) Нехай криву AB задано параметричними рівняннями $x=x(t)$, $y=y(t)$, де функції $x(t)$, $y(t)$ та їхні похідні $x'(t)$, $y'(t)$ неперервні на проміжку $t \in [\alpha, \beta]$. Тоді криволінійний інтеграл другого роду обчислюється за схемою:

$$(3.22)$$

Ця формула поширюється і на просторовий випадок, коли криву AB задано параметричними рівняннями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ де функції $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ та їхні похідні неперервні на проміжку $t \in [\alpha, \beta]$. Тоді :

(3.23)

Зуваження При обчисленні криволінійних інтегралів другого роду необхідно враховувати напрям контуру інтегрування. У випадку, коли крива інтегрування замкнена (точка B збігається з точкою A), із двох можливих напрямків обходу контуру L домовимося називати додатним той напрям, при якому, область, що міститься всередині цього контуру, залишається ліворуч по відношенню до точки, яка здійснює обхід.

Криволінійний інтеграл по замкнутому контуру L позначається так

Приклад Обчислити від точки $A(1,0)$ до точки $B(0,2)$ вздовж :

1) прямої $2x+y=2$;

2) дуги еліпса $x=\cos t$, $y=2\sin t$.

Розв'язування

Лінії L_1 і L_2 інтегрування зображено на рис (3.9). Тут же вказано напрям інтегрування. Проведемо обчислення для кожного із випадків згідно з формулам (3.21) і (3.22).



Рисунок 3.9

1)

2)

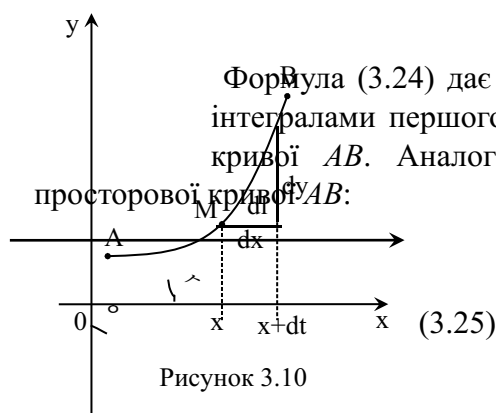
Як бачимо, результати вийшли різні, оскільки в загальному випадку криволінійний інтеграл другого роду залежить від форми контуру інтегрування.

3.9 Зв'язок між криволінійними інтегралами першого і другого роду

Розглянемо напрямлену дугу з початком в точці A і кінцем в точці B . Дотичну в будь якій точці M дуги AB також будемо вважати напрямленою

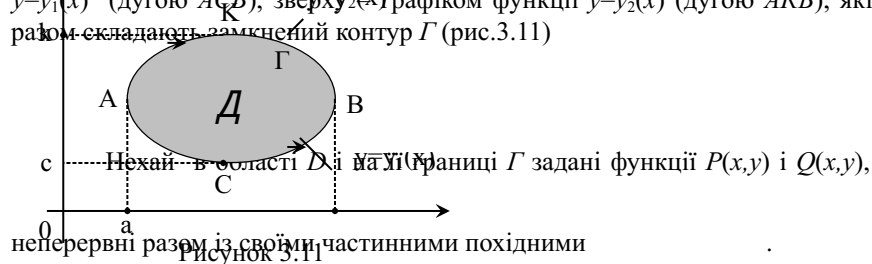
прямою (рис.3.10). Позначимо кути, які утворює дотична з осями координат через α і ϕ . Вектор $\vec{dl}$, де dl - диференціал довжини дуги напрямлений по дотичній, тому $dx = \cos \alpha \, dl$, $dy = \sin \alpha \, dl$. Отже,

$$(3.24).$$



3.10 Формула Гріна

Формула Гріна дає зв'язок між подвійним інтегралом по області D і криволінійним інтегралом другого роду по контуру Γ , який обмежує цю область. Будемо вважати, що область D є стандартною по кожній з координат і обмежена знизу графіком функції $y=y_1(x)$ (дугою ACB), зверху графіком функції $y=y_2(x)$ (дугою AKB), які разом складають замкнений контур Γ (рис.3.11)



Тоді:

x

При цьому обхід контура Γ відбувається в додатному напрямку (проти ходу годинникової стрілки). Отже,

(3.25).

Аналогічно можна одержати

(3.26).

Віднімаючи почленно (3.25) від (3.26), одержимо формулу Гріна :

(3.27)

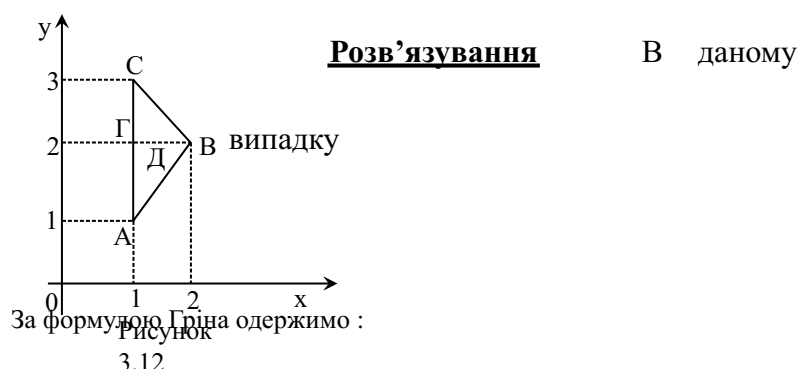
Зауваження 1) Формула Гріна дає можливість обчислити площу області за допомогою криволінійного інтеграла другого роду. Дійсно, якщо $P(x, y) = -y$, $Q(x, y) = x$, то формула (3.27) набере вигляду:

Звідси

(3.28)

2) Формулу Гріна зручно використовувати для обчислення криволінійного інтегралу другого роду по замкненому контуру Γ , коли цей контур складається з кількох різних ліній.

Приклад Застосовуючи формулу Гріна, обчислити $\oint_{\Gamma} (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$, де Γ - контур трикутника з вершинами в точках $A(1,1)$, $B(2,2)$, $C(3,1)$.



3.11 Незалежність криволінійного інтеграла другого роду від шляху інтегрування

Ми вже відмічали, що, взагалі кажучи, криволінійний інтеграл залежить від форми шляху інтегрування, але є випадки, коли величина

криволінійного інтеграла не залежить від форми шляху інтегрування, а залежить лише від початкової і кінцевої точки A і B . Отже, в таких задачах можна не задавати саму криву, а задати тільки ці точки. При обчисленні криволінійного інтеграла другого роду в цьому випадку

криву інтегрування, що сполучає точки A і B , можна вибрати довільним чином.

Умовою незалежності криволінійного інтегралу від шляху інтегрування є рівність:

$$(3.28)$$

Якщо при цьому контур інтегрування Γ замкнений, то, як випливає з формули Гріна,

Приклад Обчислити

Розв'язування

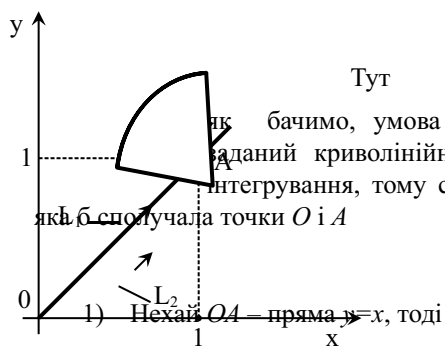


Рисунок
3.13

2) Нехай OA — дуга параболи $y=x^2$, тоді

Як і слід було очікувати, результат збігається.

3.12 Застосування криволінійних інтегралів другого роду

1) Робота змінної сили $\vec{F}$ на криволінійному шляху AB .

$$(3.29)$$

2) Площа плоскої фігури, обмеженої контуром Γ .

$$(3.30)$$

Приклад 1 Знайти роботу силового поля, в кожній точці якого сила,

що діє на одиницю маси $\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j}$, коли точка маси m описує коло $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, рухаючись по ходу годинникової стрілки (тобто, у від'ємному напрямку).

Розв'язування

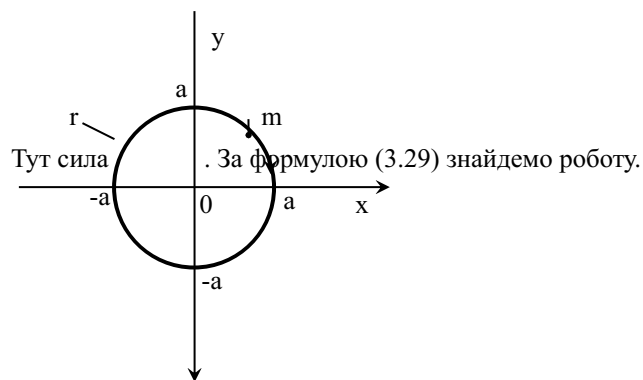
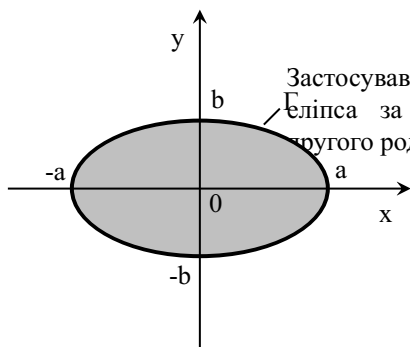


Рисунок 3.14

Приклад2

Знайти площу фігури, обмеженої еліпсом

Розв'язування



Застосувавши формулу (3.30), знайдемо площу Еліпса за допомогою криволінійного інтеграла другого роду:

3.13 Індивідуальні завдання для самостійної роботи

Задача 1 Обчислити криволінійні інтеграли

1.1 а) де L – дуга кривої

б) де L – дуга параболи
 $y=x^2$ від точки $A(-1;1)$ до точки $B(1,1)$.

1.2 а) де L – коло ;

б) де L – дуга астроїди
від точки $A(2,0)$ до точки $B(0,2)$

1.3 а) де L – відрізок прямої, що з'єднує точки $O(0,0)$
і $B(2,2)$.

б) де L – дуга кубічної параболи $y=x^3$ від
точки $O(0,0)$ до точки $A(1,1)$.

1.4 а) де L – відрізок прямої AB , що з'єднує точки
 $A(-1;0)$, $B(0;1)$.

б) де L – коло
при додатному напрямі обходу.

1.5 а) де L – відрізок прямої AB , що з'єднує точки $A(0,4)$ і $B(4,0)$.

б) де L – дуга еліпса
при додатному напрямі обходу

1.6 а) де L – відрізок прямої AB , що з'єднує точки $A(0,-2)$ і $B(1,0)$.

б) де L – дуга еліпса
від точки $A(1,0)$ до точки $B(0,2)$.

1.7 а) де L – дуга астроїди
що знаходиться між точками $A(1,0)$ і $B(0,1)$

б) де L – ламана OBA : $O(0,0)$, $B(2,0)$, $A(2,1)$.

1.8 а) де L – дуга параболі між точками $O(0,0)$

і .

б) де L – відрізок прямої AB , $A(1,1)$ і $B(3,4)$.

1.9 а) де L – дуга кривої $y=\cos t$, $y=\sin t$,

б) , де L – відрізок прямої AB , $A(2\pi;-2\pi)$ і $B(-2\pi;\pi)$.

1.10 а) де L – відрізок прямої AB , що з'єднує точки $A(0,0)$ і $B(1,2)$.

б) де L – відрізок прямої AB , $A(1,2)$ і $B(3,6)$.

1.11 а) де L – перша арка циклоїди

б) де L – дуга кубічної параболи $y=x^3$
від точки $A(0,0)$ до точки $B(1,1)$.

1.12 а) де L – відрізок прямої OA , що з'єднує
точки $O(0,0)$ і $A(1,2)$.

б) де L – ламана ABC :
 $A(1,2)$, $B(3,2)$, $C(3,5)$.

1.13 а) де L – відрізок прямої AB , що з'єднує точки
 $A(0,-2)$ і $B(4,0)$.

б) де L – відрізок прямої OB ,
 $O(0,0,0)$ і $B(-2,4,5)$.

1.14 а) , де L – контур прямокутника з вершинами
 $O(0,0)$, $A(4,0)$, $B(4,2)$, $C(0,2)$.

б) де L – дуга AB кола $x=R\cos t$, $y=R\sin t$, $A(R,0)$, $B(0,R)$.

1.15 а) , де L – контур трикутника з вершинами
 $A(1,0)$, $B(0,1)$, $O(0,0)$.

б) де L – дуга параболи $y^2=x$ від точки $O(0;0)$ до точки $A(1,1)$.

1.16 а) де L – перший виток гвинтової лінії $x=2\cos t, y=2\sin t, z=2t$.

б) де L – відрізок прямої AB , $A(1,1,1)$ і $B(2,3,4)$.

1.17 а) , де L – контур трикутника з вершинами $O(0,0), A(-1,0), B(0,1)$.

б) де L – дуга параболи $y^2=4-4x$ від точки $A(1;0)$ до точки $B(0,2)$.

1.18 а) де L – дуга кривої $x=4\cos t, y=4\sin t, z=3t$.

б) де L – дуга параболи $y=x^2$ від точки $O(0;0)$ до точки $B(1,1)$.

2.19 а) , де L – коло $x=2\cos t, y=2\sin t$.

б) де L – дуга параболи $y=x^2$ від точки $O(0;0)$ до точки $B(1,1)$.

1.20 а) де L – контур прямокутника з вершинами $O(0,0), A(5,0), B(5,3), C(0,3)$.

- б) де L – дуга астроїди від точки $A(2,0)$ до точки $B(0,2)$.
- 1.21 а) де L – коло $x=\cos t, y=\sin t$.
- б) де L – дуга параболи $y^2=4x$ від точки $A(0;0)$ до точки $B(1,2)$.
- 1.22 а) де L – дуга астроїди від точки $A(1,0)$ до точки $B(0,1)$
- б) , де L – відрізок прямої AB , $A(1,0)$ і $B(0,2)$.
- 1.23 а) , де L – контур квадрата зі сторонами $x=1, x=-1, y=1, y=-1$.
- б) де L – дуга одного витка гвинтової лінії $x=\cos t, y=\sin t, z=2t, A(1,0,0), B(1,0,2\pi)$.
- 1.24 а) де L – перша арка циклоїди .
- б) , де L – дуга дуги лінії $y=\ln x$ від точки $A(1,0)$ до точки $B(e,1)$.
- 1.25 а) , де L – контур прямокутника з вершинами $A(2,0), B(4,0), C(4,3), D(2,3)$.
- б) де L – дуга спіралі ,
яка пробігається в додатному напрямі обходу.

1.26 а) де L – дуга параболи $y^2=2x$, яка відтинається параболою $x^2=2y$.

б) де L – дуга параболи $y=x^2/4$ від точки $A(0;0)$ до точки $B(2,1)$.

1.27 а) де L – відрізок прямої AB , $A(4,0)$ і $B(6,1)$.

б) , де L – ламана лінія $y=|x|$ від точки $O(0,0)$ до точки $B(2,2)$.

2.28 а) де L – перша чверть кола $x=2\cos t$, $y=2\sin t$.

б) , де L – відрізок прямої, що з'єднує точки $O(0,0,0)$ і $A(2,1,-1)$.

1.29 а) де L – відрізок прямої, що з'єднує точки $A(1,1,1)$ і $B(2,2,2)$.

б) де L – контур трикутника з вершинами $A(-1,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$ при додатному напрямі обходу.

1.30 а) де L – відрізок прямої, що з'єднує точки $A(1,1)$ і $B(3,3)$.

б) де L – ламана ABC , $A(2,0)$, $B(5,0)$, $C(5,3)$.

Задача 2 Знайти довжини дуг кривих, заданих рівняннями

2.1 a) ;

б) ;

в)

2.2 a) ;

б) ;

в)

2.3 a) ;

б) ;

в)

2.4 a) ;

б) ;

в)

2.5 a) ;

б) ;

в)

2.6 a) ;

б) ;

в)

2.7 a)

б)

в)

2.8 a) ;

б) ;

в)

2.9 а) ;

б) ;

в)

2.10 а)

б)

в)

2.11 а)

б)

в)

2.12 а)

б)

В)

2.13 а)

б)

В)

2.14 а)

б)

В)

2.15 а)

б)

В)

2.16 а)

б)

В)

2.17 а)

б)

в)

2.18 а)

б)

в)

2.19 а)

б)

в)

2.20 а)

б)

в)

2.21 а)

б)

в)

2.22 а)

б)

в)

2.23 а)

б)

в)

2.24 а)

б)

в)

2.25 а)

б)

в)

2.26 а)

б)

в)

2.27 а)

б)

в)

2.28 а)

б)

в)

2.29 а)

б)

в)

2.30 а)

б)

в)

Задача 3 Знайти центр мас однорідних кривих

3.1

3.2

3.3

3.4

3.5

3.6

3.7

3.8

3.9

3.10

3.11

3.12

3.13

3.14

3.15

3.16

3.17

3.18

3.19

3.20

3.21

3.22

3.23

3.24

3.25

3.26

3.27

3.28

3.29

3.30

Задача 4 Знайти роботу сили при переміщенні вздовж лінії L від точки M до точки N

4.1 L – відрізок прямої MN , $M(-4;0)$, $N(0;2)$.

4.2 L – відрізок прямої MN , $M(-4;0)$, $N(0;2)$.

4.3 $M(-4;0)$, $N(0;2)$.

4.4 $M(2;0)$, $N(-2;0)$.

4.5 $M(2;0)$, $N(0;2)$.

4.6 $M(-1;1)$, $N(1;1)$.

4.7 L – відрізок прямої MN , $M(-1;0)$, $N(0;1)$.

4.8 $M(3;0)$, $N(-3;0)$.

4.9 $M(1;0)$, $N(0;3)$.

4.10 $M(1;0)$, $N(-1;0)$.

4.11 $M(2;0)$, $N(0;0)$.

4.12 $M(\quad ;0)$, $N(\quad ;0)$.

4.13 $M(1;0)$, $N(0;1)$.

4.14

4.15

$$M(R;0), N(-R;0).$$

4.16

$$M(1;0), N(-1;0).$$

4.17

$$M(2;0), N(0;2).$$

4.18

$$M(4;0), N(0;4).$$

4.19

$$M(3;0), N(0;3).$$

4.20

$$L - \text{відрізок прямої } MN, M(1;0), N(0;1).$$

4.21

$$L - \text{відрізок прямої } MN, M(2;0), N(0;2).$$

4.22

$$M(3;0), N(0;3).$$

4.23

$$M(3;0), N(-3;0).$$

4.24

$$M(\pi;0), N(0;0).$$

4.25

$$M(0;0), N(1;2).$$

4.26

$$L - \text{відрізок } MN, M(1;0), N(0;3).$$

4.27

$$M(0;0), N(1;2).$$

4.28

$$M(1;0), N(0;3).$$

4.29

$$M(0;0), N(2;8).$$

4.30

$$M(3;0), N(-3;0).$$

Як і криволінійні, поверхневі інтеграли бувають двох типів: першого і другого роду. В обох випадках областю інтегрування є поверхня.

4.1 Задача про обчислення маси матеріальної поверхні, що приводить до поняття поверхневого інтеграла першого роду

Розглянемо поверхню σ (рис. 4.1), на якій розподілена маса з поверхневою густиною $\sigma = \sigma(x, y, z)$, де під поверхневою густиною ми розуміємо масу одиниці площі поверхні. Поставимо задачу про знаходження маси всієї поверхні.



Розіб'ємо по-верхню довільним чином на n частин, площі яких позначимо через ΔS_k . Якщо площа ΔS_k мала, то значення поверхневої густини в точках області ΔS_k мало відрізняється від її значення в будь-якій точці $M_k \in \Delta S_k$, тому маса Δm_k наближено дорівнює

Маса всієї поверхні наближено виражається сумою мас частин розбиття:

Щоб отримати точне значення, перейдемо до границі, коли $n \rightarrow \infty$, де ΔS_k – найбільший із діаметрів частин ΔS_k . Отже,

$$(4.1)$$

4.2 Означення поверхневого інтеграла першого роду

Нехай на поверхні задана функція $u=f(x,y,z)$, до якої формально застосуємо алгоритм розв'язування попередньої задачі. Виконаємо такі операції :

1) Поверхню довільним чином розіб'ємо на n частин з площами ΔS_k ($k=1, 2, \dots, n$) і найбільший із діаметрів цих частин позначимо через ΔS_k .

2) На кожній частині виберемо довільну точку $M_k \in \Delta S_k$, в якій функція набуває значення $u_k=f(x_k, y_k, z_k)$.

3) Побудуємо суму

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k \Delta S_k, \quad (4.2)$$

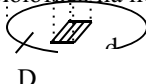
яка називається інтегральною сумою функції $u=f(x,y,z)$ по поверхні σ .

Означення Якщо при $\sigma \rightarrow \sigma_0$ існує границя інтегральної суми (4.2), яка не залежить від способу розбиття поверхні σ на частини $\Delta\sigma_k$ і від вибору точок M_k , то ця границя називається *поверхневим інтегралом першого роду* і позначається :

(4.3)

Відмітимо без доведення, що границя інтегральної суми існує, якщо функція $f(x,y,z)$ неперервна, а поверхня σ є гладкою (в кожній точці існує дотична площина) і обмеженою. В цьому випадку функція $f(x,y,z)$ називається *інтегровною* по поверхні σ , D - областю інтегрування.

Означення поверхневого інтеграла першого роду по суті аналогічне означенню подвійного інтеграла. Тому властивості подвійних інтегралів без особливих змін поширюються на поверхневі інтеграли.



4.3 Обчислення поверхневих інтегралів першого роду

Нехай потрібно обчислити поверхневий інтеграл першого роду

Тут σ - гладка поверхня, задана рівнянням $z=z(x,y)$, де $z(x,y)$ разом з похідними $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ неперервна в замкненій області D , яка є проекцією поверхні σ на площину xOy (рис. 4.2). Нехай функція $f(x,y,z)$ неперервна на поверхні σ і, отже, інтегровна на цій поверхні. Виділимо на поверхні частину з площею d , на якій виберемо довільну точку M і в цій точці встановимо нормаль $\vec{n}$ до поверхні, точніше, до дотичної площини, проведеної до поверхні у вибраній точці. Припустимо, що нормаль $\vec{n}$ утворює гострий кут φ з віссю Oz . Запишемо рівняння поверхні σ у вигляді



Рис. 4.2

. Тоді, як відомо, вектор нормалі до цієї поверхні має координати :

$$\vec{n} = (n_x, n_y, n_z),$$

тобто . Запишемо зв'язок площі частини d з площею ds її проекції на площину xOy :

$$ds = d\sigma \cos \alpha, \quad \text{де } \cos \alpha = \frac{n_z}{|\vec{n}|}.$$

Отже,

$$(4.4)$$

Таким чином, обчислення поверхневого інтеграла першого роду можна звести до обчислення подвійного інтеграла по області D за такою схемою :

$$(4.5)$$

Під записом $\sigma \rightarrow D$ тут і надалі розуміємо, що поверхня σ відображається в область D на площині xOy .

Приклад Обчислити , де - частина площини , розміщена у першому октанті (рис. 4.3).

Розв'язування Запишемо рівняння площини у вигляді:

$$x + y + z = 1, \quad \text{тоді } \vec{n} = (1, 1, 1), \quad |\vec{n}| = \sqrt{3}.$$

За формулою (4.5) маємо

Тут область D - проекція площини на площину xOy (рис. 4.4). Тоді :

4.4 Застосування поверхні інтегралів першого роду

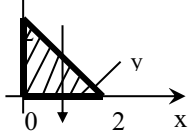
1) Маса матеріальної пластини з поверхневою густиною



(4.6)

(4.7)

3) Статичні моменти матеріальної поверхні відносно координатних площин



(4.8)

4) Координати центра мас матеріальної поверхні з густиною

$$(4.9)$$

Якщо поверхня однорідна, тобто $\rho = \text{const}$, то формули (4.9) набудуть простішого вигляду

$$I_x = \frac{\rho}{12} \int_V (y^2 + z^2) dV; \quad I_y = \frac{\rho}{12} \int_V (x^2 + z^2) dV; \quad I_z = \frac{\rho}{12} \int_V (x^2 + y^2) dV \quad (4.10)$$

В останньому випадку доцільно враховувати симетрію поверхні, якщо вона є.

5) Моменти інерції матеріальної поверхні з густиною ρ відносно координатних осей і початку координат.

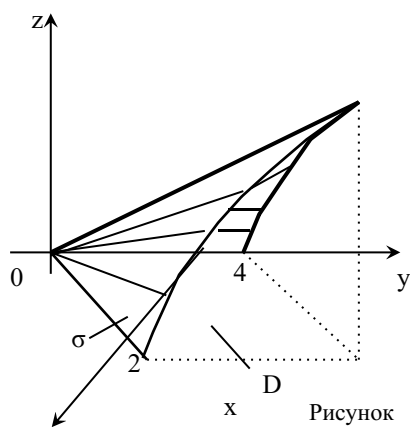
$$(4.11)$$

Розглянемо приклади застосування поверхневих інтегралів першого роду.

Приклад 1 Знайти площу частини поверхні конуса розташованої в I-му октанті між площинами $x=2$, $y=4$ (рис 4.5).

Розв'язування

Запишемо рівняння поверхні у вигляді , тоді



За формулою (4.7)

де - проекція на площину - прямокутник ,

Обчислюючи подвійний інтеграл, одержимо

Приклад 2

Знайти масу півсфери, якщо в кожній її точці поверхнева густина чисельно дорівнює відстані від цієї точки до радіуса, перпендикулярного основі півсфери.

Розв'язування Введемо декартову прямокутну систему координат таким чином, щоб її початок був

у центрі основи півсфери і напрям вісь Oz перпендикулярно до цієї

основи (рис. 4.6). Тоді рівняння півсфери буде , де -

радіус сфери. За умовою густина .

Знаходимо

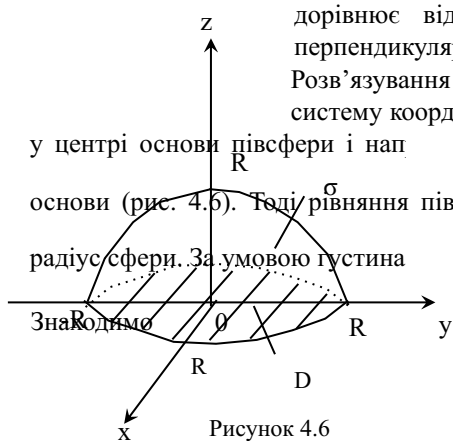


Рисунок 4.6

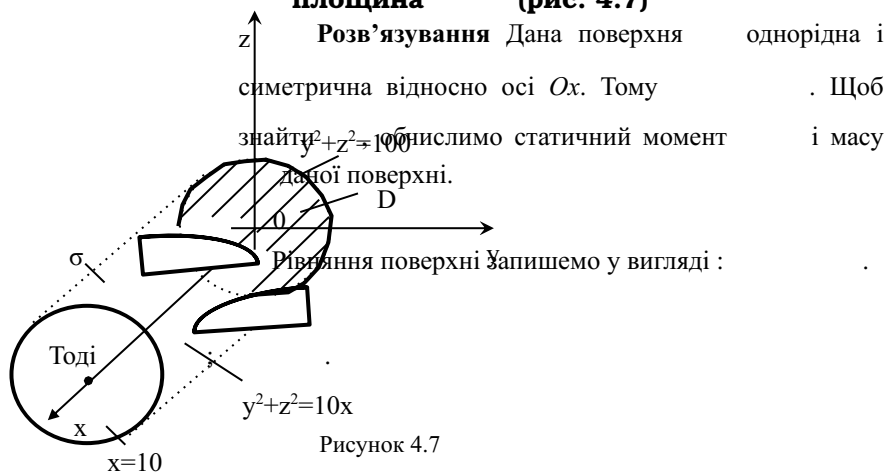
За формулою (4.6)

, де - проекція поверхні на

площину , тобто круг .

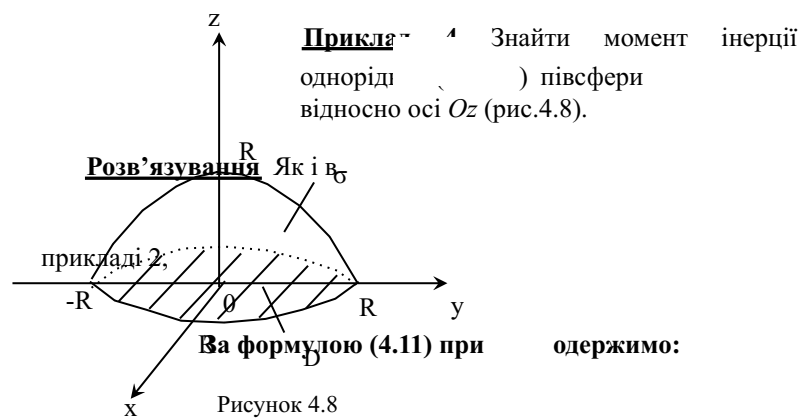
Переходячи до полярних координат, знайдемо

**Приклад3 Знайти координати центра мас частини
однорідної поверхні параболоїда ,яку відтинає
площина (рис. 4.7)**



За формулою (4.8)

За формулою (4.9) знайдемо



Тут область - круг. Тоді, переходячи до полярних координат, маємо:

4.5 Поняття про двосторонні та односторонні поверхні

Нехай маємо поверхню (рис. 4.9). Виберемо на цій поверхні будь-який замкнений контур Γ і на ньому точку M , в якій встановимо нормаль до поверхні.

Означення Поверхня називається *двосторонньою* або *орієнтованою*, якщо після обходу будь-якого замкненого контуру Γ , що лежить на поверхні, не має спільних точок з її другою стороною. В протилежному випадку поверхня називається *односторонньою*.

Прикладом односторонньої поверхні є лист Мьобіуса (рис. 4.10). Тут існують такі замкнені контури Γ , що після обходу по них нормаль $\vec{n}$ змінює напрям.

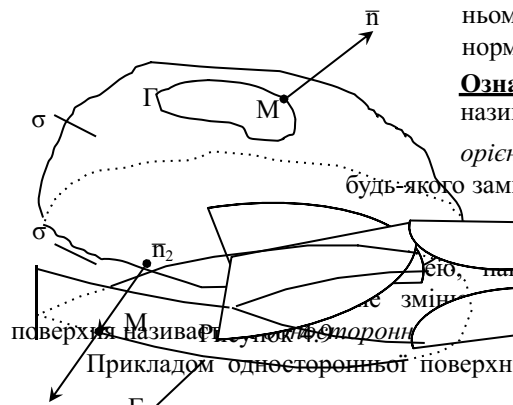


Рисунок 4.10

до поверхні в точці M буде мати протилежний напрям $-\vec{n}_1$. В подальшому ми будемо розглядати лише двосторонні поверхні, до яких належать всі гладкі поверхні, що задаються рівнянням $F(x, y, z) = 0$. Орієнтація поверхні здійснюється за допомогою вибору нормалі до поверхні, що дозволяє розрізняти зовнішню та внутрішню сторони поверхні.

4.6 Задача про обчислення потоку рідини через поверхню, що приводить до поняття поверхневого інтеграла другого роду

Нехай дана просторова область, заповнена рідиною, що рухається зі швидкістю $\vec{v}$, де $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$, v_x, v_y, v_z — функції координат x, y, z . Треба обчислити кількість рідини P , що протікає за одиницю часу через задану поверхню S .

Розіб'ємо цю поверхню на n частин S_k ($k=1, 2, \dots, n$) з площами ΔS_k .

Якщо ΔS_k малі, то можна вважати, що для всіх точок в частині S_k швидкість стала і дорівнює швидкості в деякій точці $M_k(x_k, y_k, z_k)$, а поверхні S_k — плоскі.

Відомо, що кількість рідини, що протікає через частину S_k за одиницю часу, дорівнює добутку проекції швидкості на вісь, яка визначається ортом нормалі до S_k , на площу ΔS_k . Координатами орта нормалі є напрямні косинуси, тобто $\cos \alpha_k, \cos \beta_k, \cos \gamma_k$, а проекція вектора $\vec{v}$ на вектор $\vec{n}_k$ є скалярний добуток: $\vec{v} \cdot \vec{n}_k$. Отже:

Кількість рідини, що протікає через всю поверхню S за одиницю часу, наближено виражається формулою:

Точне значення цієї величини одержимо, якщо знайдемо границю суми,

коли Δ , де Δ - найбільший з діаметрів частин Δ_i :

(4.12)

Добутки Δ_i , Δ_j , Δ_k в (4.12) є проекціями поверхонь Δ_i відповідно на координатні площини. Позначимо їх через Δ_i^x , Δ_i^y , Δ_i^z , тобто

(4.13)

Площі проекцій беремо зі знаком плюс або мінус в залежності від того, який кут (гострий чи тупий) утворює нормаль $\vec{n}$ до поверхні з відповідною координатною віссю. З урахуванням (4.14):

(4.14)

Приклад на обчислення потоку рідини через поверхню буде розглянутий у наступному розділі.

4.7 Означення поверхневого інтеграла другого роду

Відійдемо від конкретного змісту попередньої задачі і перенесемо алгоритм її розв'язування на будь-яку функцію R , визначену і неперервну на гладкій орієнтованій поверхні S .

Виконаємо такі операції:

1) Розіб'ємо поверхню S довільним чином на частини Δ_i

2) В кожній з частин Δ_i виберемо довільну точку M_i , в якій функція R має значення $R(M_i)$

3) Побудуємо суму

(4.16)

яка називається інтегральною сумою для функції R по поверхні S . Тут

- величина проекції на площину , що дорівнює площі області, в яку проектується на , взятої із знаком плюс, якщо нормаль до поверхні в точці утворює з віссю гострий кут, і зі знаком мінус, якщо вказаний кут - тупий. Позначимо через найбільший з діаметрів областей .

Означення Якщо при існує границя інтегральної суми (4.16), яка не залежить від способу розбиття поверхні на частини σ_k і від вибору точок , то ця границя називається *поверхневим інтегралом другого роду* від функції по поверхні . Позначається :

$$(4.17)$$

Відмітимо, що ця границя існує, якщо двостороння поверхня є обмеженою і гладкою і функція - неперервна на ній.

Аналогічно визначаються поверхневі інтеграли другого роду для функцій і , неперервних на поверхні :

$$(4.18)$$

$$(4.19)$$

Суму (4.17)-(4.19) називають загальним поверхневим інтегралом другого роду і позначають :

$$(4.20)$$

Зауваження Поверхневий інтеграл другого роду має ті ж властивості, що і поверхневий інтеграл першого роду, але на відміну від

останнього при зміні сторони поверхні він змінює знак на протилежний.

4.8 Обчислення поверхневого інтеграла другого роду

Розглянемо поверхневий інтеграл другого роду $\iint_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}$, де $\mathbf{r}$ - гладка поверхня, задана рівнянням $z = z(x, y)$. Припустимо, що поверхня S взаємно-однозначно проектується в область D площини Oxy . За означенням (4.17)

$$d\mathbf{S} = \pm \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \mathbf{n}$$

де $\mathbf{n}$ - величина проекції області S на площину Oxy , тобто площа області, в яку проектується область S на Oxy , взята зі знаком плюс, якщо нормаль до поверхні в точці $M(x, y, z)$ утворює з віссю Oz гострий кут, і зі знаком мінус, якщо цей кут тупий.

Оскільки

$$\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$$

то, переходячи до границі при $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$, одержимо :

$$\iint_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = \pm \iint_D \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \quad (4.21)$$

для зовнішньої сторони поверхні, тобто у випадку, коли $\mathbf{n}$ - вектор, де $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ - кут між нормаллю до поверхні і віссю Oz ;

$$\iint_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = - \iint_D \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \quad (4.22)$$

для внутрішньої сторони поверхні, тобто у випадку, коли $\mathbf{n}$ - вектор, де $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ - тупий кут). Аналогічно обчислюються поверхневі інтеграли другого роду

по координатах x і y (для функцій Q і P).

Таким чином, обчислення поверхневих інтегралів другого роду зводиться до обчислення подвійних інтегралів.

Приклад

Обчислити

, де

частина площини $z = 1 - x - y$, вирізана координатними площинами.

Орієнтація поверхні задається нормаллю $\vec{n}$ (рис. 4.11).

$$\sigma : x - y + z = 1$$

Розв'язування

Запишемо цей інтеграл, як суму трьох інтегралів і знайдемо кожний доданок окремо.



Рисунок 4.11

Тут D_{xy} - проекція поверхні на площину Oxy (рис. 4.12). Обчислимо подвійний інтеграл :

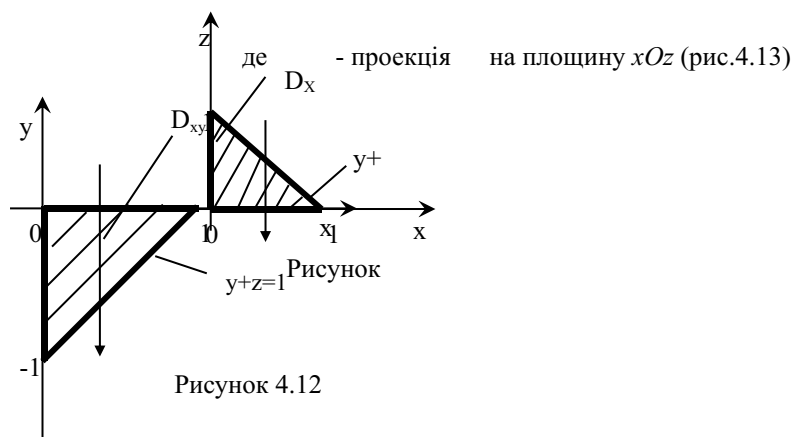


Рисунок 4.12

де D_{yz} - проекція Σ на площину yOz (рис.4.14)

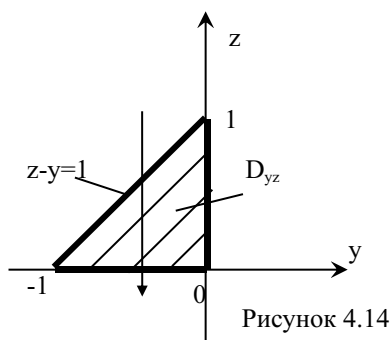


Рисунок 4.14

Отже, шуканий інтеграл

4.9 Формула Остроградського

Формула Остроградського дає зв'язок між поверхневим інтегралом другого роду по замкненій поверхні і потрійним інтегралом по просторовій області, обмеженій цією поверхнею.

Нехай маємо стандартну (по кожній змінній) просторову область V , обмежену поверхнею Σ . Розглянемо зовнішню сторону поверхні, яка є гладкою, або кусково-гладкою.

Теорема Нехай V - стандартна замкнена область, обмежена поверхнею Σ і нехай функції P, Q, R неперервні

разом зі своїми частинними похідними $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ в заданій області. Тоді має місце формула :

$$(4.23)$$

яка називається *формулою Остроградського*. Зауважимо, що цю формулу

доцільно використовувати при обчисленні поверхневих інтегралів другого роду по замкнених поверхнях.

Приклад Обчислити $\iint_{\sigma} \vec{r} \cdot d\vec{\sigma}$, де σ - зовнішня сторона піраміди, утвореної площинами $x=0, y=0, z=1-x-y$, $x \geq 0, y \geq 0$ (рис.4.15)

Розв'язування За формулою Остроградського (4.23)



Формула Стокса дає зв'язок між поверхневим і криволінійним інтегралами і є узагальненням формули Гріна на випадок тривимірного простору.

Нехай σ - поверхня, задана рівнянням $z = z(x, y)$, де функції x, y, z неперервні у замкненій області D - проекції поверхні σ на площину xy ; L - контур, на який спирається поверхня σ . Далі, нехай контур L проектується на площину xy у границю області D - деякий контур Γ . Виберемо верхню (зовнішню) сторону поверхні σ (рис. 4.16). Тоді має місце така теорема.

Теорема Якщо функція P, Q, R неперервна разом зі своїми частинними похідними першого порядку на поверхні σ , то має місце

формула :

$$, \quad (4.24)$$

де $\cos \alpha_i$ - відповідні напрямні косинуси нормалі до поверхні Σ , а обхід контуру L відбувається у додатному напрямі.

Для функцій x_i можна аналогічно записати:

$$, \quad (4.25)$$

$$(4.26)$$

Додавши почленно рівності (4.24) та (4.26) одержимо формулу Стокса

$$(4.27)$$

Формулу Стокса можна переписати у більш зручній формі :

$$(4.28)$$

Зауваження Формулу Стокса легко запам'ятати, помітивши, що перший доданок у правій частині (4.28) - це той же вираз, що міститься під знаком подвійного інтеграла у формулі Гріна, а другий і третій доданки одержуємо з нього циклічною перестановкою координат x_1, x_2, x_3 і функцій u, v, w .

Як окремий випадок, коли поверхня Σ - частина площини Oxy , обмежена замкненим контуром Γ , з формули Стокса одержуємо формулу Гріна, оскільки інтеграли по dy і dz дорівнюють нулю.

Формула Стокса дозволяє звести обчислення криволінійного інтеграла по замкнутому контуру до обчислення поверхневого інтеграла по поверхні, що спирається на цей контур.

Приклад Обчислити за допомогою формули Стокса інтеграл
 $\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{r}$, де L - коло, задане рівняннями $x^2 + y^2 = 1, z = 1$,
 обхід якого здійснюється у додатному напрямі, а поверхнею σ є верхня
 сторона півсфери (рис.4.17)

Розв'язування

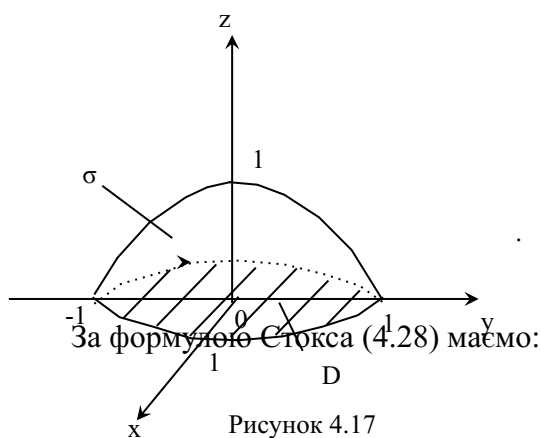


Рисунок 4.17

Зауважимо, що поверхню σ можна вибрати довільно, але з умовою, щоб вона була гладкою або кусково-гладкою і “натягненою” на замкнений контур L .

4.11 Індивідуальні завдання для самостійної роботи

Задача 1 В пункті а) обчислити поверхневий інтеграл першого роду по поверхні σ , де σ - частина площини (P) , яка відтинається координатними площинами; в пункті б) обчислити поверхневий інтеграл другого роду.

2.1 а) $\vec{n} = (1, 1, 1)$, $\vec{r} = (x, y, z)$.

б) $\vec{n} = (1, 1, 1)$, де $\vec{n}$ - частина параболоїда
(нормальний вектор утворює гострий кут з віссю Ox), яка
відтинається площиною $z = 1$.

2.2 а) $\vec{n} = (1, 1, 1)$, $\vec{r} = (x, y, z)$.

б) $\vec{n} = (1, 1, 1)$, де $\vec{n}$ - зовнішня сторона еліпсоїда
 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} = 1$.

2.3 а) $\vec{n} = (1, 1, 1)$, $\vec{r} = (x, y, z)$.

б) $\vec{n} = (1, 1, 1)$, де $\vec{n}$ - зовнішня сторона поверхні
куба, обмеженого площинами $x = 1, y = 1, z = 1$.

2.4 а). $\vec{n} = (1, 1, 1)$, $\vec{r} = (x, y, z)$.

б) $\vec{n} = (1, 1, 1)$, де $\vec{n}$ - зовнішня сторона сфери
 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

2.5 а) $\vec{n} = (1, 1, 1)$, $\vec{r} = (x, y, z)$.

б) $\vec{n} = (1, 1, 1)$, де $\vec{n}$ - верхня сторона площини
 $z = 1$.

, яка відтинається координатними площинами.

2.6 а) , .

б) , де γ - зовнішня сторона частини
сфери , що міститься у першому октанті.

2.7 а) , .

б) , де γ - зовнішня сторона сфери
.

2.8 а) , .

б) , де γ - верхня сторона частини
площини , що відтинається координатними площинами.

2.9 а) , .

б) , де γ - зовнішня сторона частини
циліндра , що відтинається площинами .

2.10 а) , .

б) , де γ - частина параболоїда

(нормальний вектор $\vec{n}$ утворює тупий кут з віссю Oz), що
 вирізається циліндром $x^2 + y^2 = R^2$.

2.11 а) $\vec{r} = (x, y, z)$, де $\vec{r}$ - радіус-вектор.

б) $\vec{r} = (x, y, z)$, де $\vec{r}$ - зовнішня сторона нижньої половини
 сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

2.12 а) $\vec{r} = (x, y, z)$, де $\vec{r}$ - радіус-вектор.

б) $\vec{r} = (x, y, z)$, де $\vec{r}$ - частина конуса
 (нормальний вектор $\vec{n}$ утворює тупий кут з віссю Oz), що лежить між
 площинами $z = 0$ та $z = h$.

2.13 а) $\vec{r} = (x, y, z)$, де $\vec{r}$ - радіус-вектор.

б) $\vec{r} = (x, y, z)$, де $\vec{r}$ - частина параболоїда
 (нормальний вектор $\vec{n}$ утворює тупий кут з віссю Oz), що
 відтинається площиною $z = h$.

2.14 а) $\vec{r} = (x, y, z)$, де $\vec{r}$ - радіус-вектор.

б) $\vec{r} = (x, y, z)$, де $\vec{r}$ - частина гіперболоїда
 (нормальний вектор $\vec{n}$ утворює тупий кут з віссю Oz), що

відтинається площинами σ_1, σ_2 .

2.15 а) σ_1, σ_2 - площини, що відтинаються площинами σ_1, σ_2 .

б) σ_1, σ_2 - площини, де σ_1 - зовнішня сторона частини сфери S , що міститься у першому октанті.

2.16 а) σ_1, σ_2 - площини, що відтинаються площинами σ_1, σ_2 .

б) σ_1, σ_2 - площини, де σ_1 - частина параболоїда S (нормальний вектор $\vec{n}$ утворює тупий кут з віссю Oz), що відтинається площиною σ_2 .

2.17 а) σ_1, σ_2 - площини, що відтинаються площинами σ_1, σ_2 .

б) σ_1, σ_2 - площини, де σ_1 - частина конуса S (нормальний вектор $\vec{n}$ утворює тупий кут з віссю Oz), що відтинається площинами σ_1, σ_2 .

2.18 а) σ_1, σ_2 - площини, що відтинаються площинами σ_1, σ_2 .

б) σ_1, σ_2 - площини, де σ_1 - частина параболоїда S (нормальний вектор $\vec{n}$ утворює гострий кут з віссю Oz), що відтинається площиною σ_2 .

2.19 а) $\int_{\Sigma} \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} dS$, де Σ - частина поверхні конуса $z = \sqrt{x^2+y^2}$, що відтинається площинами $z=1$ та $z=2$.

б) $\int_{\Sigma} (x^2+y^2+z^2) dS$, де Σ - частина поверхні конуса $z = \sqrt{x^2+y^2}$, що відтинається площинами $z=1$ та $z=2$.
(нормальний вектор $\vec{n}$ утворює тупий кут з віссю Oz),
що відтинається площинами $z=1$ та $z=2$.

2.20 а) $\int_{\Sigma} \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} dS$, де Σ - частина поверхні параболоїда $z = x^2+y^2$, що відтинається площинами $z=1$ та $z=2$.

б) $\int_{\Sigma} (x^2+y^2+z^2) dS$, де Σ - частина поверхні параболоїда $z = x^2+y^2$, що відтинається площинами $z=1$ та $z=2$.
(нормальний вектор $\vec{n}$ утворює гострий кут з віссю Oz),
що відтинається площиною $z=2$.

2.21 а) $\int_{\Sigma} \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} dS$, де Σ - частина поверхні конуса $z = \sqrt{x^2+y^2}$, що відтинається площинами $z=1$ та $z=2$.

б) $\int_{\Sigma} (x^2+y^2+z^2) dS$, де Σ - внутрішня сторона частини конуса $z = \sqrt{x^2+y^2}$, що відтинається площинами $z=1$ та $z=2$.

2.22 а) $\int_{\Sigma} \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} dS$, де Σ - частина поверхні конуса $z = \sqrt{x^2+y^2}$, що відтинається площинами $z=1$ та $z=2$.

б) $\int_{\Sigma} (x^2+y^2+z^2) dS$, де Σ - зовнішня сторона замкненої поверхні, утвореної параболоїдом $z = x^2+y^2$ і півсферою $x^2+y^2+z^2 = 2$, $z \geq 0$.

2.23 а) $\int_{\Sigma} \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} dS$, де Σ - частина поверхні конуса $z = \sqrt{x^2+y^2}$, що відтинається площинами $z=1$ та $z=2$.

б) $\int_{\Sigma} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}$, де Σ - зовнішня сторона сфери

.

2.24 а) $\int_{\Sigma} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}$, Σ - зовнішня сторона

б) $\int_{\Sigma} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}$, де Σ - зовнішня сторона

циліндра $x^2 + y^2 = 1$, що відтинається площинами $z = 0$ і $z = 1$.

2.25 а) $\int_{\Sigma} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}$, Σ - зовнішня сторона

б) $\int_{\Sigma} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}$, де Σ - частина параболоїда

$z = 1 - x^2 - y^2$ (нормальний вектор утворює гострий кут з віссю Oz), що відтинається площиною $z = 0$.

2.26 а) $\int_{\Sigma} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}$, Σ - зовнішня сторона

б) $\int_{\Sigma} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}$, де Σ - внутрішня

сторона замкненої поверхні, утвореної конусом $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ і площиною $z = 1$.

2.27 а) $\int_{\Sigma} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}$, Σ - зовнішня сторона

б) $\int_{\Sigma} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}$ де Σ - частина параболоїда

$z = 1 - x^2 - y^2$ (нормальний вектор утворює гострий кут з віссю Oz), що відтинається площиною $z = 0$.

Oz), що відтинається площиною .

2.28 а) , .

б) де γ - частина конуса
(нормальний вектор утворює тупий кут з віссю Oz),
що відтинається площинами .

2.29 а) , .

б) де γ - частина параболоїда
(нормальний вектор утворює гострий кут з віссю
 Oz), що відтинається площиною .

2.30 а) , .

б) , де γ - частина конуса
(нормальний вектор утворює гострий кут з віссю
 Oy), що відтинається площинами .

Задача 2 Знайти площу:

2.1 частини поверхні конуса , розташованої в першому октанті
між площинами .

2.2 частини поверхні сфери , розташованої всередині
циліндра .

- 2.3 частини поверхні циліндра , розташованої всередині сфери .
- 2.4 частини поверхні сфери , вирізаної циліндром
- 2.5 частини поверхні конуса , розташованої всередині циліндра
- 2.6 частини поверхні параболоїда , вирізаної циліндром
- 2.7 частини поверхні сфери , вирізаної циліндром
- 2.8 частини площини , що міститься всередині циліндра
- 2.9 частини поверхні циліндра , вирізаної площинами
- 2.10 частини поверхні циліндра , що міститься у першому октанті і вирізається циліндром та площиною .
- 2.11 частини поверхні параболоїда , вирізаної циліндром
- 2.12 частини площини , вирізаної координатними площинами
- 2.13 частини поверхні конуса , розташованої в першому октанті між площинами

- 2.14 частини поверхні сфери , розташованої всередині
циліндра
- 2.15 частини поверхні циліндра , розташованої всередині
сфери .
- 2.16 частини поверхні конуса , що міститься всередині
циліндра .
- 2.17 частини поверхні параболоїда , вирізаної циліндром
.
- 2.18 частини поверхні сфери , вирізаної циліндром
.
- 2.19 частини площини , що міститься всередині циліндра
, вище площини
- 2.20 частини поверхні циліндра , вирізаної площинами
- 2.21 частини поверхні параболоїда , вирізаної циліндром
- 2.22 частини поверхні сфери , вирізаної циліндром
- 2.23 частини площини , вирізаної координатними
площинами.
- 2.24 частини поверхні сфери , розташованої всередині

циліндра .

2.25 частини поверхні циліндра , розташованої всередині
сфери .

2.26 частини поверхні параболоїда , вирізаної циліндром
.

2.27 частини поверхні сфери , вирізаної циліндром
.

2.28 частини площини , що міститься всередині циліндра
.

2.29 частини поверхні параболоїда , вирізаної циліндром
.

2.30 частини площини , вирізаної координатними
площинами.

Розділ 5

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

5.1 Скалярне і векторне поля

В основі теорії поля та її математичного апарата – диференціального та інтегрального числення – лежить модель суцільного середовища, під яким розуміють матеріальну субстанцію, що має властивості подільності до нескінченності (безструктурність) і неперервності усіх своїх характеристик у деякій області. Отже, під *полем* розуміємо область простору, в кожній точці якої задано значення певної характеристики суцільного середовища. Ці характеристики можуть бути скалярними (температура, тиск, густина), векторними (швидкість, прискорення) і тензорними (деформація). У відповідності з цим і поле може бути *скалярним* (поле температур), *векторним* (поле швидкостей), *тензорним* (поле деформацій). Ми обмежимося розглядом скалярних і векторних полів.

Скалярне поле вважається заданим, якщо є закон, за яким кожній точці M деякої області простору ставиться у відповідність певна скалярна величина $u(M)$. Задання скалярного поля рівносильно заданню скалярної функції трьох змінних (у просторі) $u(x, y, z)$ або двох змінних (на площині) $u(x, y)$.

Множину точок, в яких величина $u = \text{const} = c$, називають *поверхнями (лініями) рівня* скалярного поля. Важливою характеристикою скалярного поля є швидкість зміни поля в заданому напрямі. Ця швидкість визначається *похідною функції u за напрямом* , яка обчислюється за формулою

$$(5.1)$$

де $\vec{n}$ - нормальний вектор до поверхні рівня,

- одиничний вектор напрямку $\vec{e}_i$. Якщо $\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i}$, то

в даному напрямі $\vec{e}_i$ скалярне поле $u(M)$ зростає, а якщо $\vec{e}_i = -\frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i}$, то спадає.

Вектор $\vec{e}_i$ називають *градієнтом* скалярного поля і позначають:

$$\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} \quad (5.2)$$

Найбільша швидкість зміни скалярного поля буде саме в напрямі $\vec{e}_i$ і вона дорівнює:

Векторне поле вважається заданим, якщо є закон, за яким кожній точці M деякої області V простору ставиться у відповідність певна векторна величина $\vec{u}(M)$:

$$\vec{u}(M) = \vec{u}(x, y, z) \quad (5.3)$$

Тут точка M розглядається у тривимірному просторі, отже, $\vec{u}(M)$ і функції $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$, які будемо вважати неперервними в області V .

5.2 Оператор Гамільтона

Основні характеристики векторного поля і операції з ними зручно представляти за допомогою оператора Гамільтона (оператора «набла»):

$$\nabla = \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (5.4)$$

Оператор ∇ слід розглядати як символічний вектор, а операції з ним виконувати за правилами векторної алгебри.

Розглянемо деякі його застосування.

1) Нехай $u(x, y, z)$ - скалярна функція. Тоді добуток вектора ∇ на функцію u , дає градієнт цієї функції:

(5.5)

2) Нехай $\mathbf{F}$ - вектор-функція, де F_x, F_y, F_z - скалярні функції змінних x, y, z . Тоді скалярний добуток вектора $\mathbf{F}$ на вектор-функцію $\mathbf{r}$ дає скалярну величину, яка називається *дивергенцією* цієї вектор-функції:

(5.6)

3) Векторний добуток вектора $\mathbf{F}$ на вектор-функцію $\mathbf{r}$ дає векторну величину, яка називається *ротором* вектор-функції $\mathbf{F}$:

(5.7)

Можна розглядати також операції другого порядку, тобто попарні комбінації трьох вказаних вище операцій. Наприклад,

де ∇^2 - символічний диференціальний оператор другого порядку, який називається оператором Лапласа.

5.3 Основні задачі теорії поля

1) Потік векторного поля

Нехай маємо векторне поле $\mathbf{F}$, де F_x, F_y, F_z - скалярні функції змінних x, y, z .

Означення Потоком Π_σ (σ - площа) векторного поля $\mathbf{F}$ через двосторонню

поверхню Σ називається поверхневий інтеграл

$$(5.8)$$

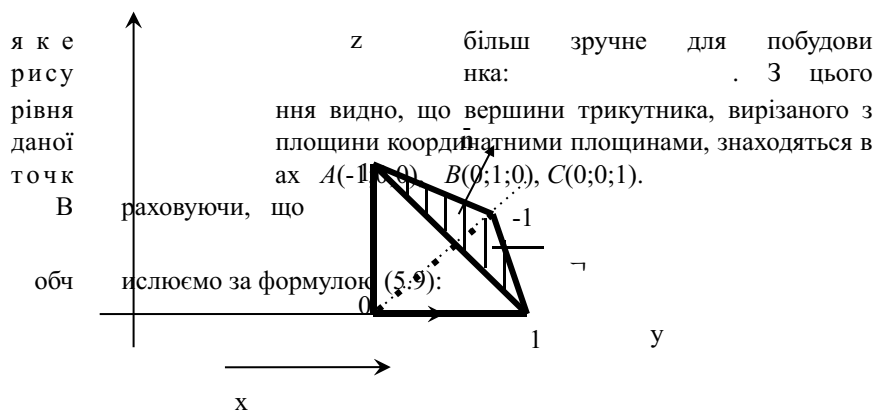
де $\vec{n}$ - одиничний вектор (орт) нормалі до вибраної сторони поверхні Σ в будь-якій точці

Замість поверхневого інтеграла першого роду у формулі (5.8) можна обчислювати поверхневий інтеграл другого роду (по координатах):

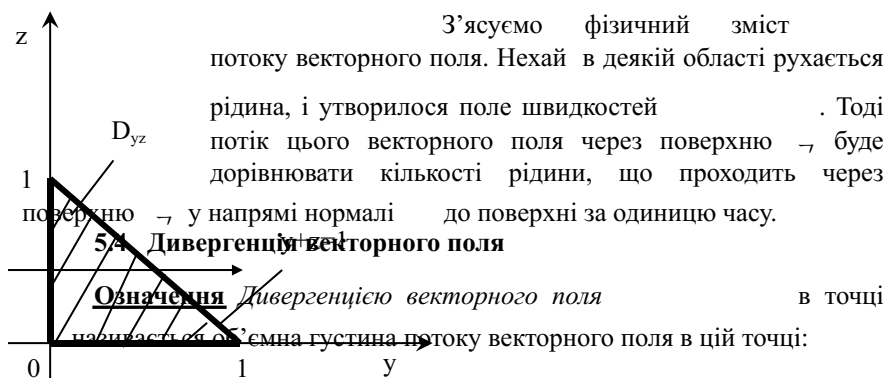
$$(5.9)$$

Приклад Знайти потік векторного поля через верхню сторону трикутника, що вирізається з площини координатними площинами (рис 5.1).

Розв'язування Запишемо для даної площини рівняння “у відрізках”,



де $\vec{n}$ - проекція $\vec{n}$ на площину (рис 5.2). Далі маємо:



$$(5.10)$$

де V - об'єм, обмежений замкненою поверхнею $\rightarrow$, в якій міститься точка.

На практиці користуються формулою

$$(5.11)$$

Якщо $\text{div } \vec{F} > 0$ (а це означає, що і $\vec{F} \cdot \vec{n} > 0$), то точка називається *джерелом*, а якщо $\text{div } \vec{F} < 0$, то точка називається *стоком*. Абсолютна величина $|\text{div } \vec{F}|$ характеризує об'ємну густину потужності джерела або стоку.

Теорема Остроградського Потік векторного поля через будь-яку замкнену поверхню $\rightarrow$ дорівнює потрійному інтегралу від дивергенції векторного поля по об'єму, обмеженому поверхнею $\rightarrow$:

$$, \quad (5.12)$$

тут

Цю теорему доцільно використовувати для обчислення потоку через зовнішню сторону замкненої поверхні Σ , яка обмежує об'єм V .

Приклад Знайти потік векторного поля

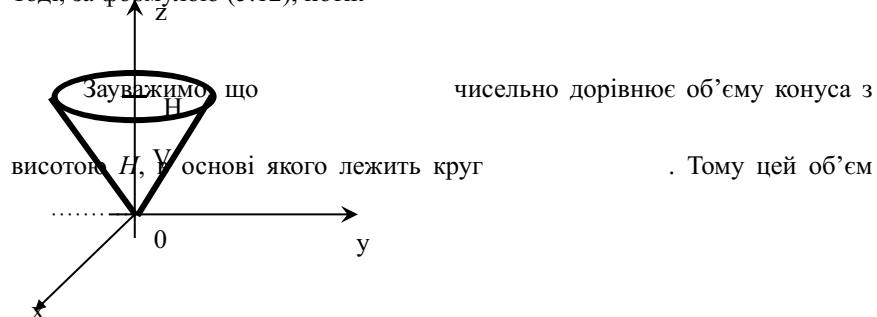
через повну поверхню конуса

(рис.5.3)

Рис.5.3

Розв'язування Тут

Тоді, за формулою (5.12), потік



5.5 Лінійний інтеграл і циркуляція векторного поля

Нехай задане векторне поле $\mathbf{F}$ і лінія L (із вказаним напрямом).

Означення 1 Лінійним інтегралом векторного поля $\mathbf{F}$ вздовж лінії L називається криволінійний інтеграл виду

$$(5.13)$$

де $\vec{r}$ - радіус-вектор точки $M(x, y, z)$, а $\vec{F}$ - поле сил, то

Фізичний зміст цього інтеграла полягає в тому, що, якщо $\vec{F}$ - поле сил, то він дорівнює роботі змінної сили $\vec{F}$ на переміщенні $d\vec{r}$. Це нам відомо із теорії криволінійних інтегралів другого роду.

Означення 2 *Циркуляцією векторного поля*

називається лінійний інтеграл цього поля вздовж замкненого контура L .

Циркуляцію будемо позначати C_L і обчислювати за формулою:

$$(5.14)$$

5.6 Ротор векторного поля

Означення Векторному полю $\vec{F}$ можна поставити у відповідність інше векторне поле, яке називається *ротором (вихорем) поля* $\vec{rot} \vec{F}$ і визначається рівністю:

$$(5.15)$$

Теорема Стокса *Циркуляція векторного поля $\vec{F}$ вздовж замкненого контура L дорівнює потоку ротора цього векторного поля через будь-яку поверхню σ , що опирається на цей контур (очевидно, що нормаль $\vec{n}$ до поверхні має бути узгоджена з напрямом обходу контура):*

$$(5.16)$$

Перепишемо формулу (5.16) у координатній формі

(5.17)

Зауважимо, що на практиці можна користуватися будь-якою з цих формул.

Приклад Знайти циркуляцію векторного поля вздовж замкненої кривої, яка складається із відрізків координатних осей і дуги кола від точки з параметром до точки з

параметром (рис.5.4).

Розв'язування Параметру на площині відповідає

точка $A(3; 0)$, t параметру - точка $B(0; 3)$. Згідно з цим вкажемо напрям обходу на рис.5.4. За поверхню Σ , що опирається на контур L , можна взяти частину площини xy , нормаль до якої - одиничний вектор $\vec{n}$.
Рис
Знайдемо, враховуючи, що $P=y-x$, $Q=2x-y$, $R=z$. За формулою (5.15) маємо:

В даній задачі зручно скористатися для обчислення циркуляції формулою (5.16):

Рис.5.4

Зауважимо, що $\iint_S \vec{r} \cdot d\vec{S}$ чисельно дорівнює площі поверхні $\rightarrow$, тобто площі

чверті круга

5.7 Потенціальні та соленоїдальні векторні поля

Означення 1 Векторне поле $\vec{F}$ називається *потенціальним* в області M , якщо в цій області існує таке скалярне поле $u(M)$, для якого виконується рівність:

$$\vec{F} = \text{grad } u \quad (5.18)$$

Функція u при цьому називається *потенціалом* поля $\vec{F}$. Легко перевірити, що у цьому випадку $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$, а це означає, що потенціальне поле є безвихровим.

Умова $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ є необхідною і достатньою умовою потенціальності векторного поля $\vec{F}$. Зауважимо, що коли векторне поле потенціальне, то лінійний інтеграл для нього не залежить від форми шляху інтегрування, а залежить лише від початкової та кінцевої точок. Тому потенціал векторного поля можна знайти за формулою

(5.18)

Шлях інтегрування вибирається довільно. Як правило, за шлях інтегрування вибирають ламану, яка складається з відрізків прямих, паралельних до координатних осей (рис.5.5). Точку M_0 можна вибирати довільно із області визначення функцій u . Точка M має полярні координати (ρ, φ, z) . Тоді

Рисунок 5.5

(5.19)

Приклад Задане векторне поле .
Довести, що воно є потенціальним, і знайти його потенціал.

Розв'язування Знайдемо , враховуючи, що

Отже, поле потенціальне.

Виберемо за точку початок координат і знайдемо потенціал за формулою (5.19)

Можна зробити перевірку. Покажемо, що

Як бачимо, дійсно, .

Означення 2 Векторне поле називається *соленоїдальним* (*трубчастим*) в області , якщо у всіх точках цієї області виконується рівність:

(5.20)

Потік такого поля через будь-яку замкнену поверхню дорівнює нулю.

Векторне поле, яке є одночасно потенціальним і соленоїдальним, називається *гармонічним*.

Приклад Перевірити, чи є соленоїдальним векторне поле із

попереднього прикладу:

Розв'язування

За формулою (5.11)

Отже, задане поле є соленоїдальним і потенціальним (див. попередній приклад), тобто воно є гармонічним.

5.8 Індивідуальні завдання для самостійної роботи

Задача 1 Знайти потік векторного поля через частину площини (P) , розташовану в першому октанті (нормаль утворює гострий кут з віссю)

1.1

1.2

1.3

1.4

1.5

1.6

1.7

1.8

1.9

1.10

1.11

1.12

1.13

1.14

1.15

1.16

1.17

1.18

1.19

1.20

1.21

1.22

1.23

1.24

1.25

1.26

1.27

1.28

1.29

1.30

Задача 2 Задані векторне поле $\vec{F}$ і площина Σ , яка разом з координатними площинами утворює піраміду Ω . Нехай $\vec{r}$ - основа піраміди, яка належить площині Σ ; $\vec{n}$ - контур, який обмежує Σ ; $\vec{n}_0$ - зовнішня нормаль до Σ . Обчислити:

а) циркуляцію векторного поля $\vec{F}$ вздовж замкненого контуру $\vec{r}$, застосовуючи формулу Стокса до контуру $\vec{r}$ і обмеженої ним поверхні Σ з нормаллю $\vec{n}_0$;

б) потік векторного поля $\vec{F}$ через повну поверхню піраміди Ω в напрямі зовнішньої нормалі до її поверхні, застосовуючи формулу Остроградського.

2.1.

2.2.

2.3.

2.4.

2.5.

2.6.

2.7.

2.8.

2.9.

2.10.

2.11.

2.12.

2.13.

2.14.

2.15.

2.16.

2.17.

2.18.

2.19.

2.20.

2.21.

2.22.

2.23.

2.24.

2.25.

2.26.

2.27.

2.28.

2.29.

2.30.

Задача 3 Перевірити, чи є векторне поле
потенціальним і соленоїдним. У випадку потенціальності поля знайти
його потенціал.

3.1.

3.2.

3.3.

3.4.

3.5.

3.6.

3.7.

3.8.

3.9.

3.10.

3.11.

3.12.

3.13.

3.14.

3.15.

3.16.

3.17.

3.18.

3.19.

3.20.

3.21.

3.22.

3.23.

3.24.

3.25.

3.26.

3.27.

3.28.

3.29.

3.30.