

ЗБІРНИК ЗАВДАНЬ ДЛЯ РОЗРАХУНКОВИХ РОБІТ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

За редакцією С.І.Гургули,
В.М.Мойсишина

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів
вищих навчальних закладів

Івано-Франківськ
2010

УДК 51(075.8)

ББК 22.11

3 41

*Гриф надано Міністерством освіти і науки
України (лист № 1/11-9544 від 15.10. 2010 р.)*

А в т о р и:

С.І. Гургула, В.М. Мойсишин, С.С. Гулька, І.М. Гураль,
Л.І. Камаєва, Т.Г. Лавинюкова, Д.Ф. Лялюк, Д.Д. Матієшин,
М.В. Маковійчук, Л.Д. Мельниченко, Л.А. Мойсеєнко,
М.М. Осипчук, Я.І. Савчук, Л.Р. Смоловик, І.Р. Тимків,
В.В. Тирлич, В.Д. Яцишин

Р е ц е н з е н т и:

Загороднюк А.В. – завідувач кафедри математичного і функціонального аналізу Прикарпатського національного університету ім. В. Стефаника, доктор фіз.-мат. наук, с.н.с.;

Маслюченко В.К. – завідувач кафедри математичного аналізу Чернівецького національного університету ім. Ю. Федьковича, доктор фіз.-мат. наук, професор;

Приймак В.І. – професор кафедри інформаційних систем у менеджменті Львівського національного університету ім. І. Франка, доктор економічних наук, кандидат фіз.-мат. наук.

3 41 **Збірник** завдань для розрахункових робіт з вищої математики:
Навчальний посібник / С.І. Гургула, В.М. Мойсишин, С.С. Гулька
та ін.; За ред. С.І. Гургули, В.М. Мойсишина. – Івано-Франківськ:
ІФНТУНГ, 2009. – 451с.

ISBN 978-966-694-123-0

Збірник завдань адресовано студентам технічних та економічних спеціальностей вишів, робочі навчальні плани яких передбачають виконання розрахункових робіт. Книга містить 7000 питань і вправ, зміст яких повністю відповідає типовій програмі з вищої математики. У межах кожного з 13 розділів книги виокремлено теоретичні питання і практичні вправи у 30 варіантах, що дозволяє кожному студенту навчальної групи запропонувати індивідуальне завдання

УДК 51(075.8)

ББК 22.11

ISBN 978-966-694-123-0

© С.І.Гургула, В.М. Мойсишин,
С.С.Гулька та ін., 2010

Зміст

Вступ	5
1 Векторна алгебра та аналітична геометрія	7
Теоретичні питання	7
Розрахункові завдання	7
2 Лінійна алгебра	53
Теоретичні питання	53
Розрахункові завдання	54
3 Вступ до математичного аналізу	96
Теоретичні питання	96
Розрахункові завдання	96
4 Диференціальне числення функцій однієї змінної	109
Теоретичні питання	109
Розрахункові завдання	110
5 Комплексні числа, многочлени	129
Теоретичні питання	129
Розрахункові завдання	129
6 Інтегральне числення функцій однієї змінної	138
Теоретичні питання	138
Розрахункові завдання	139
7 Диференціальне числення функцій декількох змінних	172
Теоретичні питання	172
Розрахункові завдання	172

8 Диференціальні рівняння _____	192
Теоретичні питання _____	192
Розрахункові завдання _____	193
9 Ряди _____	226
Теоретичні питання _____	226
Розрахункові завдання _____	227
10 Кратні, криволінійні, поверхневі інтеграли. Елементи теорії поля _____	253
Теоретичні питання _____	253
Розрахункові завдання _____	254
11 Теорія функцій комплексної змінної. Операційне числення _____	306
Теоретичні питання _____	306
Розрахункові завдання _____	307
12 Рівняння математичної фізики _____	345
Теоретичні питання _____	345
Розрахункові завдання _____	345
13 Теорія ймовірностей та математична статистика _____	384
Теоретичні питання _____	384
Розрахункові завдання _____	385
Література _____	450

Вступ

Інтегрування вищих навчальних закладів (ВНЗ) України у міжнародний освітній простір зумовлює необхідність розробки та втілення у практику навчального процесу заходів, спрямованих на підвищення якості освіти. Одними з них є розрахункові роботи (РР), які активізують самостійну роботу студентів і сприяють більш глибокому засвоєнню фундаментальних дисциплін, центральне місце серед яких належить вищій математиці.

Пропонований збірник завдань призначений для студентів технічних ВНЗ, містить 7000 питань і вправ, зміст яких повністю відповідає типовій програмі з вищої математики для технічних та економічних спеціальностей.

У межах кожного з 13 розділів книги виокремлено теоретичні питання і практичні вправи у 30 варіантах, що дозволяє кожному студенту навчальної групи запропонувати *індивідуальне* завдання. Зрозуміло, що зміст і кількість вправ РР лектор узгоджує з робочою програмою математичної дисципліни для тієї чи іншої спеціальності.

Виконання студентами РР контролюється викладачем, який попередньо перевіряє правильність розв'язку завдань. Завершальним етапом є захист РР, під час якого студент повинен правильно відповідати на теоретичні питання, пояснювати хід розв'язку вправи, розв'язувати аналогічні завдання.

Розділи збірника підготували:

1. Векторна алгебра та аналітична геометрія – В.М.Мойсишин, І.Р.Тимків;
2. Лінійна алгебра – Я.І.Савчук;
3. Вступ до математичного аналізу – Л.Д.Мельниченко;
4. Диференціальне числення функцій однієї змінної – С.С.Гулька;
5. Комплексні числа, многочлени – С.І.Гургула;

6. Інтегральне числення функцій однієї змінної – І.М.Гураль, С.І.Гургула;
7. Диференціальне числення функцій декількох змінних – Д.Ф.Лялюк;
8. Диференціальні рівняння – С.І.Гургула, В.В.Тирлич;
9. Ряди – В.Д.Яцишин, С.І.Гургула;
10. Кратні, криволінійні, поверхневі інтеграли. Елементи теорії поля – Т.Г.Лавинюкова, Л.А.Мойсеєнко;
11. Теорія функцій комплексної змінної. Операційне числення – С.І.Гургула, Л.Р.Смоловик, М.В.Матієшин;
12. Рівняння математичної фізики – Л.І.Камаєва, Д.Д.Матієшин;
13. Теорія ймовірностей та математична статистика – В.М.Мойсишин, М.М.Осипчук.

Автори вдячні викладачам кафедри вищої математики ІФНТУНГ Б.С.Сікорі, В.П.Нісонському за надані матеріали, поради та уточнення.

Відгуки, зауваження та побажання просимо надсилати за адресою:

кафедра вищої математики

Івано-Франківського національного

технічного університету нафти і газу;

76019, м. Івано-Франківськ,

вул. Карпатська, 15.

e-mail: math@nung.edu.ua

тел. (03422) 4-21-23

1 Векторна алгебра та аналітична геометрія

Теоретичні питання

1. Поняття вектора. Лінійні операції над векторами, їх властивості.
2. Проекція вектора на вісь, її властивості.
3. Розклад вектора за базисом.
4. Декартові система координат на площині і в просторі.
5. Скалярний добуток векторів.
6. Векторний добуток векторів.
7. Мішаний добуток векторів.
8. Полярні координати на площині. Перетворення прямокутних координат.
9. Поняття про рівняння лінії на площині.
10. Різні форми рівняння прямої на площині. Кут між прямими. Відстань від точки до прямої.
11. Криві другого порядку: коло, еліпс, гіпербола, парабола.
12. Поняття про рівняння поверхні і лінії в просторі.
13. Різні форми рівнянь площини в просторі. Кут між площинами. Відстань від точки до площини.
14. Різні форми рівнянь прямої в просторі. Кут між прямими відстань від точки до прямої.
15. Пряма і площина в просторі. Кут між прямою і площиною. Точка перетину прямої і площини.
16. Поверхні другого порядку.

Розрахункові завдання

Задача 1. Задані вектори $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$, $\vec{c} = (c_1; c_2; c_3)$ і $\vec{d} = (d_1; d_2; d_3)$ в деякому базисі. Переконатись, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють базис і знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі.

$$1.1. \quad \vec{a} = (5; 4; 1), \vec{b} = (-3; 5; 2), \vec{c} = (2; -1; 3), \vec{d} = (7; 23; 4).$$

$$1.2. \quad \vec{a} = (3; 1; 5), \vec{b} = (-1; 2; 1), \vec{c} = (1; 4; 2), \vec{d} = (12; 6; 3).$$

$$1.3. \quad \vec{a} = (2; 1; 4), \vec{b} = (-1; 1; 1), \vec{c} = (2; 2; 4), \vec{d} = (3; -4; 3).$$

$$1.4. \quad \vec{a} = (7; 3; 2), \vec{b} = (4; 2; -3), \vec{c} = (-1; 3; 1), \vec{d} = (13; 3; 10).$$

$$1.5. \quad \vec{a} = (1; 4; 0), \vec{b} = (4; -1; 3), \vec{c} = (-1; 5; -7), \vec{d} = (-9; -2; -6).$$

$$1.6. \quad \vec{a} = (4; 3; 1), \vec{b} = (-1; 2; -3), \vec{c} = (0; 5; 4), \vec{d} = (-6; -14; -19).$$

$$1.7. \quad \vec{a} = (1; 2; 3), \vec{b} = (5; 1; -3), \vec{c} = (-6; 4; 1), \vec{d} = (-15; 13; 9).$$

$$1.8. \quad \vec{a} = (2; 1; 5), \vec{b} = (-3; 1; 3), \vec{c} = (5; 1; -4), \vec{d} = (-7; -4; 11).$$

$$1.9. \quad \vec{a} = (2; 7; 7), \vec{b} = (-4; 3; 9), \vec{c} = (9; -6; -9), \vec{d} = (28; -1; 5).$$

$$1.10. \quad \vec{a} = (2; 1; 4), \vec{b} = (-3; 5; 1), \vec{c} = (1; -4; -3), \vec{d} = (2; -5; -4).$$

$$1.11. \quad \vec{a} = (2; 1; 3), \vec{b} = (-4; -2; 1), \vec{c} = (3; 4; 5), \vec{d} = (1; 3; 2).$$

$$1.12. \quad \vec{a} = (3; 1; 2), \vec{b} = (-5; 2; 7), \vec{c} = (3; 1; -1), \vec{d} = (1; 4; 8).$$

$$1.13. \quad \vec{a} = (1; 1; 2), \vec{b} = (-5; -4; 3), \vec{c} = (-1; 1; -5), \vec{d} = (2; 1; -9).$$

$$1.14. \quad \vec{a} = (4; 3; 4), \vec{b} = (-2; 3; 1), \vec{c} = (4; 6; 4), \vec{d} = (16; 33; 22).$$

$$1.15. \quad \vec{a} = (2; 7; 4), \vec{b} = (3; -5; 0), \vec{c} = (4; 1; 1), \vec{d} = (12; -33; -7).$$

$$1.16. \quad \vec{a} = (1; 0; 3), \vec{b} = (4; 5; 6), \vec{c} = (-1; 4; 5), \vec{d} = (6; -20; -22).$$

$$1.17. \quad \vec{a} = (2; 7; 4), \vec{b} = (3; -5; 0), \vec{c} = (4; 0; 11), \vec{d} = (33; 24; 39).$$

$$1.18. \quad \vec{a} = (8; 2; 4), \vec{b} = (3; 2; 1), \vec{c} = (-6; -2; -3), \vec{d} = (-4; 4; 5).$$

$$1.19. \quad \vec{a} = (2; 1; 3), \vec{b} = (-1; 3; 6), \vec{c} = (3; -1; 6), \vec{d} = (-4; 11; -29).$$

$$1.20. \quad \vec{a} = (7; 5; 10), \vec{b} = (2; -3; 11), \vec{c} = (3; 2; 5), \vec{d} = (15; 15; 36).$$

- 1.21. $\vec{a} = (1; 3; 3)$, $\vec{b} = (-4; 1; 5)$, $\vec{c} = (-2; 1; -6)$, $\vec{d} = (-3; 5; -9)$.
- 1.22. $\vec{a} = (2; 3; 5)$, $\vec{b} = (7; 14; 25)$, $\vec{c} = (13; 12; 16)$, $\vec{d} = (0; 18; 39)$.
- 1.23. $\vec{a} = (3; 5; 1)$, $\vec{b} = (1; -1; -1)$, $\vec{c} = (1; -1; 5)$, $\vec{d} = (-2; 10; 12)$.
- 1.24. $\vec{a} = (2; 1; 1)$, $\vec{b} = (-3; 4; -4)$, $\vec{c} = (1; 2; 0)$, $\vec{d} = (-7; -1; -5)$.
- 1.25. $\vec{a} = (-1; 4; 3)$, $\vec{b} = (3; 2; -4)$, $\vec{c} = (-2; -7; 1)$, $\vec{d} = (6; 20; -3)$.
- 1.26. $\vec{a} = (5; 7; -2)$, $\vec{b} = (-3; 1; 3)$, $\vec{c} = (1; -4; 6)$, $\vec{d} = (14; 9; -1)$.
- 1.27. $\vec{a} = (1; -3; 1)$, $\vec{b} = (-2; -4; 3)$, $\vec{c} = (0; -2; 3)$, $\vec{d} = (-8; -10; 13)$.
- 1.28. $\vec{a} = (9; 5; 3)$, $\vec{b} = (-3; 2; 1)$, $\vec{c} = (4; -7; 4)$, $\vec{d} = (-10; -13; 8)$.
- 1.29. $\vec{a} = (11; 1; 2)$, $\vec{b} = (-3; 3; 4)$, $\vec{c} = (-4; -2; 7)$, $\vec{d} = (-5; 11; -15)$.
- 1.30. $\vec{a} = (5; 3; 1)$, $\vec{b} = (-1; 2; -3)$, $\vec{c} = (3; -4; 2)$, $\vec{d} = (-9; 34; -20)$.

Задача 2. Відрізок, обмежений точками A та B , поділили точками C і D у заданому відношенні. Знайти координати цих точок поділу (2.1–2.10).

- 2.1. $A(2; -7; 9)$, $B(8; 11; -3)$, 1:2:3.
- 2.2. $A(7; -1; 9)$, $B(-3; -6; -1)$, 2:5:3.
- 2.3. $A(-6; 8; -5)$, $B(1; -6; 2)$, 4:1:2.
- 2.4. $A(2; 4; 0)$, $B(2; -7; 11)$, 2:3:6.
- 2.5. $A(14; 9; -3)$, $B(0; 2; -3)$, 3:2:2.
- 2.6. $A(-6; 7; 11)$, $B(2; -3; -1)$, 2:3:9.
- 2.7. $A(10; 3; 5)$, $B(-2; -7; 9)$, 3:1:2.
- 2.8. $A(6; 7; 12)$, $B(-14; -9; 0)$, 3:2:7.
- 2.9. $A(5; 4; 6)$, $B(-5; -1; 1)$, 2:1:2.

2.10. $A(9;6;7)$, $B(1;-2;-1)$, $3:1:4$.

Задано вершини трикутника A , B , C . Знайти довжину медіани, проведеної з вершини A (2.11–2.20).

2.11. $A(5;7;-2)$, $B(2;-1;-2)$, $C(6;-1;6)$.

2.12. $A(2;-5;-1)$, $B(7;9;6)$, $C(-3;5;2)$.

2.13. $A(3;4;7)$, $B(5;7;4)$, $C(5;-9;-8)$.

2.14. $A(7;2;3)$, $B(-2;-11;5)$, $C(6;-1;3)$.

2.15. $A(7;9;-4)$, $B(3;8;4)$, $C(1;2;6)$.

2.16. $A(3;0;-1)$, $B(-1;1;6)$, $C(5;7;8)$.

2.17. $A(-6;2;5)$, $B(8;4;1)$, $C(4;10;9)$.

2.18. $A(9;2;1)$, $B(-7;2;4)$, $C(3;-8;2)$.

2.19. $A(4;-1;3)$, $B(3;5;-1)$, $C(-1;-7;-3)$.

2.20. $A(-8;4;-2)$, $B(4;7;8)$, $C(0;3;2)$.

В точках A і B прикладені паралельні протилежно напрямлені сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$. Знайти точку прикладання рівнодійної сили (2.21–2.30).

2.21. $A(2;6;7)$, $B(2;-1;-6)$, $|\vec{F}_1| = 3H$, $|\vec{F}_2| = 4H$.

2.22. $A(-4;5;2)$, $B(6;-5;-3)$, $|\vec{F}_1| = 7H$, $|\vec{F}_2| = 3H$.

2.23. $A(3;6;-5)$, $B(1;-1;2)$, $|\vec{F}_1| = 5H$, $|\vec{F}_2| = 2H$.

2.24. $A(-2;5;7)$, $B(6;3;-1)$, $|\vec{F}_1| = 3H$, $|\vec{F}_2| = 9H$.

2.25. $A(7;4;2)$, $B(-1;-5;-6)$, $|\vec{F}_1| = 3H$, $|\vec{F}_2| = 5H$.

$$2.26. \quad A(5;-1;7), \quad B(-3;5;-1), \quad |\vec{F}_1| = 1H, \quad |\vec{F}_2| = 7H.$$

$$2.27. \quad A(3;4;5), \quad B(3;-7;5), \quad |\vec{F}_1| = 3H, \quad |\vec{F}_2| = 8H.$$

$$2.28. \quad A(3;0;11), \quad B\left(3;-13;\frac{9}{2}\right), \quad |\vec{F}_1| = 4H, \quad |\vec{F}_2| = 9H.$$

$$2.29. \quad A(4;-13;3), \quad B(-8;5;-1), \quad |\vec{F}_1| = 7H, \quad |\vec{F}_2| = 5H.$$

$$2.30. \quad A(9;11;2), \quad B(4;6;7), \quad |\vec{F}_1| = 6H, \quad |\vec{F}_2| = 4H.$$

Задача 3. Задані точки A, B, C . Знайти кут між векторами $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$ і проекцію вектора $3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$ на вектор $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

$$3.1. \quad A(-2;4;6), \quad B(0;2;-4), \quad C(-6;8;-10).$$

$$3.2. \quad A(1;4;-1), \quad B(-2;4;-5), \quad C(8;4;0).$$

$$3.3. \quad A(0;1;0), \quad B(0;2;1), \quad C(1;2;0).$$

$$3.4. \quad A(-4;0;4), \quad B(-1;6;7), \quad C(1;10;9).$$

$$3.5. \quad A(3;-6;9), \quad B(0;-3;6), \quad C(9;-12;15).$$

$$3.6. \quad A(-2;1;1), \quad B(2;3;-2), \quad C(0;0;3).$$

$$3.7. \quad A(0;2;-4), \quad B(8;2;2), \quad C(6;2;4).$$

$$3.8. \quad A(3;3;-1), \quad B(5;1;-2), \quad C(4;1;-3).$$

$$3.9. \quad A(-4;3;0), \quad B(0;1;3), \quad C(-2;4;-2).$$

$$3.10. \quad A(0;3;-6), \quad B(9;3;6), \quad C(12;3;3).$$

$$3.11. \quad A(1;-1;0), \quad B(-2;-1;4), \quad C(8;-1;-1).$$

$$3.12. \quad A(-1;2;-3), \quad B(0;1;-2), \quad C(-3;4;-5).$$

$$3.13. \quad A(7;0;2), \quad B(7;1;3), \quad C(8;-1;2).$$

- 3.14. $A(2;-8;-1)$, $B(4;-6;0)$, $C(-2;-5;-1)$.
- 3.15. $A(1;-2;3)$, $B(0;-1;2)$, $C(3;-4;5)$.
- 3.16. $A(0;0;4)$, $B(-3;-6;1)$, $C(-5;-10;-1)$.
- 3.17. $A(0;-3;6)$, $B(-12;-3;-3)$, $C(-9;-3;-6)$.
- 3.18. $A(6;2;-3)$, $B(6;3;-2)$, $C(7;3;-3)$.
- 3.19. $A(3;3;-1)$, $B(5;5;-2)$, $C(4;1;1)$.
- 3.20. $A(-1;-2;1)$, $B(-4;-2;5)$, $C(-8;-2;2)$.
- 3.21. $A(-1;2;-3)$, $B(3;4;-6)$, $C(1;1;-1)$.
- 3.22. $A(2;1;-1)$, $B(6;-1;-4)$, $C(4;2;1)$.
- 3.23. $A(-4;-2;0)$, $B(-1;-2;4)$, $C(3;-2;1)$.
- 3.24. $A(3;3;-1)$, $B(1;5;-2)$, $C(4;1;1)$.
- 3.25. $A(5;3;-1)$, $B(5;2;0)$, $C(6;4;-1)$.
- 3.26. $A(0;1;-2)$, $B(3;1;4)$, $C(4;1;1)$.
- 3.27. $A(-3;-7;-5)$, $B(0;-1;-2)$, $C(2;3;0)$.
- 3.28. $A(2;-4;6)$, $B(0;-2;4)$, $C(6;-8;10)$.
- 3.29. $A(2;3;2)$, $B(-1;-3;-1)$, $C(-3;-7;-3)$.
- 3.30. $A(2;2;7)$, $B(0;0;6)$, $C(-2;5;7)$.

Задача 4. Знайти довжину діагоналей і площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

- 4.1. $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$.
- 4.2. $\vec{a} = 5\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j} - 7\vec{k}$.
- 4.3. $\vec{a} = -2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$.

$$4.4. \quad \vec{a} = 6\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}.$$

$$4.5. \quad \vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}, \quad \vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}.$$

$$4.6. \quad \vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}, \quad \vec{b} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}.$$

$$4.7. \quad \vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}, \quad \vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}.$$

$$4.8. \quad \vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}, \quad \vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}.$$

$$4.9. \quad \vec{a} = 5\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}, \quad \vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}.$$

$$4.10. \quad \vec{a} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}, \quad \vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}.$$

$$4.11. \quad \vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}, \quad \vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}.$$

$$4.12. \quad \vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}, \quad \vec{b} = 2\vec{i} + 2\vec{k}.$$

$$4.13. \quad \vec{a} = \vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k}, \quad \vec{b} = -\vec{j} - 3\vec{k}.$$

$$4.14. \quad \vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{k}, \quad \vec{b} = 7\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}.$$

$$4.15. \quad \vec{a} = -5\vec{i} - 6\vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{b} = 3\vec{i} + 7\vec{j}.$$

$$4.16. \quad \vec{a} = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}.$$

$$4.17. \quad \vec{a} = -\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}, \quad \vec{b} = 2\vec{i} - 2\vec{k}.$$

$$4.18. \quad \vec{a} = 4\vec{i} - 5\vec{j}, \quad \vec{b} = 4\vec{j} - 3\vec{k}.$$

$$4.19. \quad \vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}, \quad \vec{b} = \vec{i} - 2\vec{k}.$$

$$4.20. \quad \vec{a} = -5\vec{j} - 6\vec{k}, \quad \vec{b} = -\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}.$$

$$4.21. \quad \vec{a} = -2\vec{j} + \vec{j} + 3\vec{k}, \quad \vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{k}.$$

$$4.22. \quad \vec{a} = 4\vec{i} - 6\vec{j} + 4\vec{k}, \quad \vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}.$$

$$4.23. \quad \vec{a} = -2\vec{i} + 5\vec{j} - 5\vec{k}, \quad \vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}.$$

$$4.24. \quad \vec{a} = 5\vec{i} + \vec{j} + 7\vec{k}, \quad \vec{b} = 4\vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k}.$$

$$4.25. \quad \vec{a} = 4\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}.$$

$$4.26. \quad \vec{a} = 5\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}, \quad \vec{b} = \vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}.$$

$$4.27. \quad \vec{a} = 6\vec{i} - 7\vec{k}, \quad \vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}.$$

$$4.28. \quad \vec{a} = 6\vec{i} + 7\vec{j} + 5\vec{k}, \quad \vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}.$$

$$4.29. \quad \vec{a} = 4\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{b} = -2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}.$$

$$4.30. \quad \vec{a} = -4\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}, \quad \vec{b} = 4\vec{i} + 2\vec{k}.$$

Задача 5. Задано вершини трикутника ABC . Обчислити довжину висоти, опущеної з вершини B на сторону AC (5.1–5.15).

$$5.1. \quad A(1;-1;3), \quad B(5;1;0), \quad C(2;1;1).$$

$$5.2. \quad A(6;1;5), \quad B(5;1;0), \quad C(3;1;1).$$

$$5.3. \quad A(3;2;-2), \quad B(1;3;1), \quad C(6;2;0).$$

$$5.4. \quad A(3;0;6), \quad B(1;-3;2), \quad C(3;2;5).$$

$$5.5. \quad A(6;6;5), \quad B(4;9;5), \quad C(4;6;11).$$

$$5.6. \quad A(3;5;4), \quad B(8;7;4), \quad C(1;10;4).$$

$$5.7. \quad A(1;2;3), \quad B(2;0;-1), \quad C(3;3;5).$$

$$5.8. \quad A(-2;1;0), \quad B(3;2;7), \quad C(2;2;5).$$

$$5.9. \quad A(1;2;0), \quad B(3;0;3), \quad C(5;2;6).$$

$$5.10. \quad A(1;-1;2), \quad B(5;-6;2), \quad C(1;3;-1).$$

$$5.11. \quad A(3;-2;1), \quad B(-4;-2;0), \quad C(-1;-2;4).$$

$$5.12. \quad A(4;3;1), \quad B(2;0;-3), \quad C(4;5;0).$$

5.13. $A(-3;4;1), B(-1;2;4), C(1;4;7).$

5.14. $A(-2;3;7), B(-1;1;3), C(0;4;9).$

5.15. $A(-7;3;2), B(-3;-2;2), C(7;7;-1).$

Задано сили $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, прикладені до точки C . Знайти величину моменту рівнодійної цих сил відносно точки D (5.16–5.30).

5.16. $\vec{F}_1 = (2;-1;-3), \vec{F}_2 = (3;2;-1), \vec{F}_3 = (-4;1;3),$
 $C(-1;4;-2), D(-4;1;3).$

5.17. $\vec{F}_1 = (7;-6;2), \vec{F}_2 = (-6;2;-1), \vec{F}_3 = (1;6;4),$
 $C(3;-6;1), D(6;-2;7).$

5.18. $\vec{F}_1 = (3;-4;2), \vec{F}_2 = (2;3;-5), \vec{F}_3 = (-3;-2;4),$
 $C(5;3;-7), D(4;-1;-4).$

5.19. $\vec{F}_1 = (-3;4;2), \vec{F}_2 = (1;-5;6), \vec{F}_3 = (4;3;5),$
 $C(4;2;-3), D(2;4;0).$

5.20. $\vec{F}_1 = (9;4;1), \vec{F}_2 = (-2;1;-5), \vec{F}_3 = (-3;2;1),$
 $C(5;-4;2), D(8;5;-4).$

5.21. $\vec{F}_1 = (-4;4;-3), \vec{F}_2 = (3;-2;4), \vec{F}_3 = (3;4;2),$
 $C(1;-4;3), D(4;0;-2).$

5.22. $\vec{F}_1 = (-4;1;-5), \vec{F}_2 = (2;2;1), \vec{F}_3 = (3;-1;-5),$
 $C(-2;3;-2), D(1;2;-1).$

5.23. $\vec{F}_1 = (5;1;-3), \vec{F}_2 = (4;-2;-5), \vec{F}_3 = (-6;2;5),$
 $C(-3;2;6), D(4;5;-3).$

$$5.24. \quad \vec{F}_1 = (7; 1; -2), \quad \vec{F}_2 = (-3; -1; 1), \quad \vec{F}_3 = (-2; 3; -4), \\ C(1; -2; 2), \quad D(1; 4; 0).$$

$$5.25. \quad \vec{F}_1 = (-5; 8; 4), \quad \vec{F}_2 = (6; -7; 3), \quad \vec{F}_3 = (3; 1; -5), \\ C(2; -4; 7), \quad D(0; 7; 4).$$

$$5.26. \quad \vec{F}_1 = (-5; 3; 4), \quad \vec{F}_2 = (2; 0; -5), \quad \vec{F}_3 = (-7; -1; -2), \\ C(4; 7; -5), \quad D(5; 9; 3).$$

$$5.27. \quad \vec{F}_1 = (-8; 3; -1), \quad \vec{F}_2 = (3; -4; 0), \quad \vec{F}_3 = (9; -4; 1), \\ C(2; -5; 1), \quad D(2; -1; -2).$$

$$5.28. \quad \vec{F}_1 = (5; -2; 3), \quad \vec{F}_2 = (4; 5; -3), \quad \vec{F}_3 = (-1; -3; 6), \\ C(7; 1; -5), \quad D(2; -3; -6).$$

$$5.29. \quad \vec{F}_1 = (-5; 11; -7), \quad \vec{F}_2 = (-6; -3; 2), \quad \vec{F}_3 = (13; -4; 4), \\ C(2; 3; 4), \quad D(1; 2; 2).$$

$$5.30. \quad \vec{F}_1 = (8; 3; 5), \quad \vec{F}_2 = (-4; -2; 3), \quad \vec{F}_3 = (-6; 0; -5), \\ C(3; 2; -2), \quad D(6; 2; 0).$$

Задача 6. Обчислити об'єм тетраедра з вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 і довжину його висоти, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

$$6.1. \quad A_1(3; 4; 5), \quad A_2(1; 2; 1), \quad A_3(-2; -3; 6), \quad A_4(3; -6; -3).$$

$$6.2. \quad A_1(1; 3; 1), \quad A_2(-1; 4; 6), \quad A_3(-2; -3; 4), \quad A_4(3; 4; -4).$$

$$6.3. \quad A_1(2; 4; 1), \quad A_2(-3; -2; 4), \quad A_3(3; 5; -2), \quad A_4(4; 2; -3).$$

$$6.4. \quad A_1(3; 4; 2), \quad A_2(-2; 3; -5), \quad A_3(4; -3; 6), \quad A_4(6; -5; 3).$$

- 6.5. $A_1(-4;6;3), A_2(3;-5;1), A_3(2;6;-4), A_4(2;4;-5).$
- 6.6. $A_1(3;-2;6), A_2(-6;-2;6), A_3(1;1;-4), A_4(4;6;-7).$
- 6.7. $A_1(-5;-4;-3), A_2(7;3;-1), A_3(6;-2;0), A_4(3;2;-7).$
- 6.8. $A_1(7;4;9), A_2(1;-2;-3), A_3(-5;-3;0), A_4(1;-3;4).$
- 6.9. $A_1(-4;-5;-3), A_2(3;1;2), A_3(5;7;-6), A_4(6;-1;5).$
- 6.10. $A_1(-6;4;5), A_2(5;-7;3), A_3(4;2;-8), A_4(2;8;-3).$
- 6.11. $A_1(5;-4;4), A_2(-4;-6;5), A_3(3;2;-7), A_4(6;2;-9).$
- 6.12. $A_1(-7;-6;-5), A_2(5;1;-3), A_3(8;-4;0), A_4(3;4;-7).$
- 6.13. $A_1(7;-1;-2), A_2(1;7;8), A_3(3;7;9), A_4(-3;-5;2).$
- 6.14. $A_1(5;2;7), A_2(7;-6;-9), A_3(-7;-6;3), A_4(1;-5;2).$
- 6.15. $A_1(-6;-3;-5), A_2(5;1;7), A_3(3;5;-1), A_4(4;-2;9).$
- 6.16. $A_1(7;4;2), A_2(-5;3;-9), A_3(1;-5;3), A_4(7;-9;1).$
- 6.17. $A_1(4;3;1), A_2(2;7;5), A_3(-4;-2;4), A_4(2;-3;-5).$
- 6.18. $A_1(-9;-7;4), A_2(-4;3;-1), A_3(5;-4;2), A_4(3;4;4).$
- 6.19. $A_1(3;5;3), A_2(-3;2;8), A_3(-3;-2;6), A_4(7;8;-2).$
- 6.20. $A_1(-4;-2;-3), A_2(2;5;7), A_3(6;3;-1), A_4(6;-4;1).$
- 6.21. $A_1(1;3;6), A_2(2;2;1), A_3(-1;0;1), A_4(-4;6;-3).$
- 6.22. $A_1(7;2;4), A_2(7;-1;-2), A_3(3;3;1), A_4(-4;2;1).$
- 6.23. $A_1(14;4;5), A_2(-5;-3;2), A_3(5;2;6), A_4(8;4;-9).$
- 6.24. $A_1(-4;2;6), A_2(2;-3;0), A_3(-10;5;8), A_4(-5;2;-4).$
- 6.25. $A_1(-3;4;-7), A_2(1;5;-4), A_3(-5;-2;0), A_4(2;5;4).$

- 6.26. $A_1(5;2;0)$, $A_2(2;5;0)$, $A_3(1;2;4)$, $A_4(-1;1;1)$.
- 6.27. $A_1(-3;-5;6)$, $A_2(2;1;-4)$, $A_3(0;-3;-1)$, $A_4(-5;2;-8)$.
- 6.28. $A_1(3;10;-1)$, $A_2(-2;3;-5)$, $A_3(-6;0;-3)$, $A_4(1;-1;2)$.
- 6.29. $A_1(2;1;4)$, $A_2(-1;5;-2)$, $A_3(-7;-3;2)$, $A_4(-6;-3;6)$.
- 6.30. $A_1(2;3;1)$, $A_2(4;1;-2)$, $A_3(6;3;7)$, $A_4(7;5;-3)$.

Задача 7. Середини сторін трикутника лежать у точках M_1 , M_2 , M_3 . Скласти рівняння сторони трикутника, яка проходить через точку M_1 (7.1–7.6).

- 7.1. $M_1(-1;5)$, $M_2(3;4)$, $M_3(8;-4)$.
- 7.2. $M_1(-3;-5)$, $M_2(7;11)$, $M_3(1;0)$.
- 7.3. $M_1(-7;1)$, $M_2(2;-4)$, $M_3(3;8)$.
- 7.4. $M_1(-3;5)$, $M_2(2;2)$, $M_3(1;-4)$.
- 7.5. $M_1(1;5)$, $M_2(13;0)$, $M_3(19;8)$.
- 7.6. $M_1(2;1)$, $M_2(5;3)$, $M_3(3;-4)$.

Задано вершини трикутника ABC . Скласти рівняння висоти трикутника, опущеної з вершини A (7.7–7.12).

- 7.7. $A(10;-1)$, $B(-2;-6)$, $C(-6;-3)$.
- 7.8. $A(9;-1)$, $B(3;5)$, $C(-4;0)$.
- 7.9. $A(10;-1)$, $B(-5;-4)$, $C(-9;-1)$.
- 7.10. $A(6;1)$, $B(-6;-4)$, $C(-10;-1)$.
- 7.11. $A(-1;5)$, $B(11;0)$, $C(17;8)$.
- 7.12. $A(-4;2)$, $B(2;-5)$, $C(5;0)$.

Скласти рівняння сторін прямокутника, які проходять через вершину A , якщо відомі координати сусідньої вершини B (7.13–7.18).

7.13. $A(-3;7), B(5;1)$.

7.14. $A(4;-3), B(2;5)$.

7.15. $A(1;2), B(-3;-7)$.

7.16. $A(-5;9), B(4;3)$.

7.17. $A(4;-1), B(7;11)$.

7.18. $A(6;-5), B(7;3)$.

Задані координати вершин трикутника ABC . Скласти рівняння прямої, яка проходить через вершину B паралельно стороні AC (7.19–7.24).

7.19. $A(0;5), B(12;0), C(18;8)$.

7.20. $A(-4;-5), B(8;0), C(-8;-2)$.

7.21. $A(-6;0), B(6;5), C(-10;3)$.

7.22. $A(11;2), B(-1;7), C(17;10)$.

7.23. $A(2;1), B(-5;7), C(1;7)$.

7.24. $A(1;1), B(2;4), C(3;2)$.

Вершини трикутника лежать у точках A, B, C . Скласти рівняння медіани, проведеної з вершини A (7.25–7.30).

7.25. $A(-1;2), B(3;1), C(-1;8)$.

7.26. $A(3;1), B(-1;1), C(4;2)$.

7.27. $A(-2;6), B(10;1), C(16;9)$.

7.28. $A(2;2), B(3;7), C(-5;1)$.

7.29. $A(1;7), B(-2;-4), C(8;1)$.

7.30. $A(-4;2), B(2;0), C(2;-4)$.

Задача 8.

8.1. Рівняння однієї із сторін квадрата $x + 2y - 5 = 0$. Скласти рівняння трьох інших сторін квадрата, якщо $P(-1;0)$ – точка перетину його діагоналей. Зробити рисунок.

8.2. Дано рівняння однієї із сторін ромба $x - 3y + 10 = 0$ і однієї з його діагоналей $x + 4y - 4 = 0$; діагоналі ромба перетинаються в точці $P(0;1)$. Скласти рівняння інших сторін ромба. Зробити рисунок.

8.3. Дано рівняння двох сторін паралелограма $x + 2y - 2 = 0$ і $x + y - 4 = 0$, а рівняння однієї із його діагоналей $x - 2 = 0$. Знайти координати вершин паралелограма. Зробити рисунок.

8.4. Дано вершини $A(-3;-2)$, $B(4;-1)$, $C(1;3)$ трапеції $ABCD$. Відомо, що діагоналі трапеції взаємно перпендикулярні. Знайти координати вершини D цієї трапеції. Зробити рисунок.

8.5. Дано рівняння двох сторін трикутника $5x - 4y + 15 = 0$ і $4x + y - 9 = 0$. Його медіани перетинаються в точці $P(0;2)$. Скласти рівняння третьої сторони.

8.6. Скласти рівняння катетів рівнобедреного прямокутника трикутника, знаючи рівняння гіпотенузи $y = 3x + 5$ і вершину прямого кута $(-4;1)$. Зробити рисунок.

8.7. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $(-2;5)$ під кутом $\frac{\pi}{4}$, до прямої $4x + 3y - 1 = 0$. Зробити рисунок.

8.8. Через точку перетину прямих $8x - 3y - 1 = 0$ і $4x + y - 13 = 0$ провести пряму паралельно прямій $4x + 3y - 5 = 0$ і записати її рівняння. Зробити рисунок.

8.9. Через точку перетину прямих $5x - 2y + 13 = 0$ і $x + 3y - 11 = 0$ провести пряму перпендикулярно прямій $4x - 7y + 12 = 0$ і записати її рівняння. Зробити рисунок.

8.10. Скласти рівняння двох сторін трикутника, якщо $A(5; -5)$, $B(-3; 1)$ – дві його вершини, а $D(2; 5)$ – точка перетину його висот. Зробити рисунок.

8.11. Дано вершини $A(2; -2)$, $B(3; -1)$ і точка $P(1; 0)$ перетину медіан трикутника ABC . Скласти рівняння висоти трикутника, проведеної через третю вершину C . Зробити рисунок.

8.12. Дано рівняння двох медіан трикутника $x - 2y + 1 = 0$ і $y - 1 = 0$ і одна із його вершин $A(1; 3)$. Скласти рівняння його сторін. Зробити рисунок.

8.13. Дві сторони трикутника задані рівняннями $5x - 2y - 8 = 0$ і $3x - 2y - 8 = 0$, а середина третьої сторони співпадає з початком координат. Скласти рівняння цієї сторони. Зробити рисунок.

8.14. Сторони AB і BC паралелограма задані рівняннями $2x - y + 5 = 0$ і $x + 2y - 4 = 0$, діагоналі його перетинаються в точці $M(1; 4)$. Знайти довжини його висот. Зробити рисунок.

8.15. Дано рівняння двох сторін прямокутника $2x - 3y + 5 = 0$ і $3x + 2y - 7 = 0$ і одна з його вершин $O(0; 0)$. Скласти рівняння двох інших сторін прямокутника. Зробити рисунок.

8.16. На прямій $2x + y + 6 = 0$ знайти точку, рівновіддалену від двох точок $A(2; 3)$, $B(4; 5)$. Зробити рисунок.

8.17. Знайти відстань від точки $A(1; 2)$ до прямої, яка проходить через точки $B(3; 8)$ і $C(5; -13)$. Зробити рисунок.

8.18. Дано трикутник з вершинами $A(-1;2)$, $B(3;4)$, $C(1;-6)$. Обчислити відстань від вершини B до медіани, яка проведена із вершини A . Зробити рисунок.

8.19. Дано рівняння двох паралелограма $x - y - 1 = 0$ і $x - 2y - 1 = 0$ і точку $P(2;-2)$ перетину його діагоналей. Скласти рівняння двох інших сторін паралелограма. Зробити рисунок.

8.20. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(4;1)$ на відстані 4 одиниці від точки $B(-4;0)$. Зробити рисунок.

8.21. Дано дві протилежні вершини квадрата $A(2;1)$ і $C(4;5)$. Знайти дві інші вершини квадрата. Зробити рисунок.

8.22. Через точку $M(1;2)$ провести пряму, відстань до якої від точок $M_2(2;3)$ і $M_3(2;3)$ були б однакові. Зробити рисунок.

8.23. Через точку $P(0;1)$ провести пряму так, щоб її відрізок, який міститься між двома даними прямими $x - 3y + 10 = 0$ і $2x + y - 8 = 0$, ділиться в точці P навпіл. Зробити рисунок.

8.24. Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи одну з його вершин $A(-4;2)$ і рівняння двох медіан: $3x - 2y + 2 = 0$ і $3x + 5y - 12 = 0$. Зробити рисунок.

8.25. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку перетину прямих $2x + 5y + 8 = 0$ і $3x - 4y - 7 = 0$ під кутом 45° до прямої $y = 4x + 3$. Зробити рисунок.

8.26. Дано точки $A(-4;0)$ і $B(2;-8)$. Знайти на прямій $x + 1 = 0$ таку точку M , щоб прямі AM і BM були взаємно перпендикулярні. Зробити рисунок.

8.27. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(1;2)$, так, що її відрізок, який заключений між осями координат, ділиться в точці A пополам. Зробити рисунок.

8.28. Скласти рівняння сторони трикутника, якщо відомо, що її серединою є точка $P(-1;-1)$, а дві інші сторони трикутника задаються рівняннями $5x - 2y - 5 = 0$ і $3x - 2y - 7 = 0$. Зробити рисунок.

8.29. Точка $A(-4;5)$ є вершиною квадрата, діагональ якого лежить на прямій $7x - y + 8 = 0$. Скласти рівняння сторін, та іншої діагоналі цього квадрата. Зробити рисунок.

8.30. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(4;3)$ і відтинає від його координатного кута трикутник з площею, що дорівнює 3 кв.од. Зробити рисунок.

Задача 9. Задано чотири точки $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$, $A_3(x_3; y_3; z_3)$, $A_4(x_4; y_4; z_4)$. Скласти рівняння:

- а) площини $A_1A_2A_3$; б) прямої A_1A_2 ;
- в) прямої A_4M , перпендикулярної до площини $A_1A_2A_3$;
- г) прямої A_3N , паралельної прямій A_1A_2 .

9.1. $A_1(3;2;5)$, $A_2(4;0;6)$, $A_3(2;6;5)$, $A_4(4;6;-1)$.

9.2. $A_1(2;1;7)$, $A_2(3;3;6)$, $A_3(2;-3;9)$, $A_4(1;2;5)$.

9.3. $A_1(2;1;6)$, $A_2(1;4;9)$, $A_3(2;-5;8)$, $A_4(5;4;2)$.

9.4. $A_1(2;-1;7)$, $A_2(6;3;1)$, $A_3(3;2;8)$, $A_4(2;-3;7)$.

9.5. $A_1(0;4;5)$, $A_2(3;-2;1)$, $A_3(4;5;6)$, $A_4(3;3;2)$.

9.6. $A_1(1;-1;3)$, $A_2(6;5;8)$, $A_3(3;5;8)$, $A_4(8;4;1)$.

9.7. $A_1(1;-2;7)$, $A_2(4;2;10)$, $A_3(2;3;5)$, $A_4(5;3;7)$.

9.8. $A_1(4;2;10)$, $A_2(1;2;0)$, $A_3(3;5;7)$, $A_4(2;-3;5)$.

- 9.9. $A_1(2;3;5), A_2(5;3;-7), A_3(1;2;7), A_4(4;2;0).$
- 9.10. $A_1(5;3;7), A_2(-2;3;5), A_3(4;2;10), A_4(1;2;7).$
- 9.11. $A_1(4;3;5), A_2(1;9;7), A_3(0;2;0), A_4(5;3;10).$
- 9.12. $A_1(3;1;4), A_2(-1;6;1), A_3(-1;1;6), A_4(0;4;-1).$
- 9.13. $A_1(8;-6;4), A_2(10;5;-5), A_3(5;6;-8), A_4(8;10;7).$
- 9.14. $A_1(3;-1;2), A_2(-1;0;1), A_3(1;7;3), A_4(8;5;8).$
- 9.15. $A_1(7;2;2), A_2(-5;7;-7), A_3(5;-3;1), A_4(2;3;7).$
- 9.16. $A_1(2;4;3), A_2(1;1;5), A_3(4;9;3), A_4(3;6;7).$
- 9.17. $A_1(6;6;5), A_2(4;9;5), A_3(4;6;11), A_4(6;9;3).$
- 9.18. $A_1(3;5;4), A_2(5;8;3), A_3(1;2;-2), A_4(-1;0;2).$
- 9.19. $A_1(1;8;2), A_2(5;2;6), A_3(5;7;4), A_4(4;10;9).$
- 9.20. $A_1(9;5;5), A_2(-3;7;1), A_3(5;7;8), A_4(6;9;2).$
- 9.21. $A_1(10;9;6), A_2(2;8;2), A_3(9;8;9), A_4(7;10;3).$
- 9.22. $A_1(0;7;1), A_2(2;-1;5), A_3(1;6;3), A_4(3;-9;8).$
- 9.23. $A_1(3;5;4), A_2(8;7;4), A_3(5;10;4), A_4(4;7;8).$
- 9.24. $A_1(5;5;4), A_2(1;-1;4), A_3(3;5;1), A_4(5;8;-1).$
- 9.25. $A_1(4;6;5), A_2(6;9;4), A_3(2;10;10), A_4(7;5;9).$
- 9.26. $A_1(6;1;1), A_2(4;6;6), A_3(4;2;0), A_4(1;2;6).$
- 9.27. $A_1(4;4;10), A_2(7;10;2), A_3(2;8;4), A_4(9;6;9).$
- 9.28. $A_1(7;5;3), A_2(9;4;4), A_3(4;5;7), A_4(7;9;6).$
- 9.29. $A_1(4;2;5), A_2(0;7;1), A_3(0;2;7), A_4(1;5;0).$

9.30. $A_1(6;8;2)$, $A_2(5;4;7)$, $A_3(2;4;7)$, $A_4(7;3;7)$.

Задача 10. Знайти відстань від точки M_0 до площини, яка проходить через три точки M_1 , M_2 , M_3 .

10.1. $M_1(1;5;-7)$, $M_2(-3;6;3)$, $M_3(-2;7;3)$, $M_0(1;-1;2)$.

10.2. $M_1(-3;4;7)$, $M_2(1;5;-4)$, $M_3(-5;-2;0)$, $M_0(-12;7;-1)$.

10.3. $M_1(1;1;-1)$, $M_2(2;3;1)$, $M_3(3;2;1)$, $M_0(-3;-7;6)$.

10.4. $M_1(-1;2;-3)$, $M_2(4;-1;0)$, $M_3(2;1;-2)$, $M_0(1;-6;-5)$.

10.5. $M_1(2;3;1)$, $M_2(4;1;-2)$, $M_3(6;3;7)$, $M_0(-5;-4;8)$.

10.6. $M_1(3;2;-2)$, $M_2(0;-6;-1)$, $M_3(5;-9;-8)$, $M_0(3;-8;-5)$.

10.7. $M_1(-3;-1;1)$, $M_2(-9;1;-2)$, $M_3(3;-5;4)$, $M_0(-7;0;-1)$.

10.8. $M_1(1;1;2)$, $M_2(-1;1;3)$, $M_3(2;-2;4)$, $M_0(2;3;8)$.

10.9. $M_1(1;-1;1)$, $M_2(-2;0;3)$, $M_3(2;1;-1)$, $M_0(-2;4;2)$.

10.10. $M_1(2;-1;2)$, $M_2(1;2;-1)$, $M_3(3;2;1)$, $M_0(-5;3;7)$.

10.11. $M_1(1;2;0)$, $M_2(1;-1;2)$, $M_3(0;1;-1)$, $M_0(2;-1;4)$.

10.12. $M_1(1;2;0)$, $M_2(3;0;-3)$, $M_3(5;2;6)$, $M_0(-13;-8;16)$.

10.13. $M_1(1;0;2)$, $M_2(1;2;-2)$, $M_3(2;-2;1)$, $M_0(-5;-9;1)$.

10.14. $M_1(14;4;5)$, $M_2(-5;-3;2)$, $M_3(-2;-6;-3)$,

$M_0(-1;-8;7)$.

10.15. $M_1(1;2;3)$, $M_2(1;0;1)$, $M_3(-2;-1;6)$, $M_0(3;-2;-9)$.

10.16. $M_1(-2;0;-4)$, $M_2(-1;7;1)$, $M_3(4;-8;-4)$,

$M_0(-6;5;-5)$.

$$10.17. M_1(3;10;-1), M_2(-2;3;-5), M_3(-6;0;-3),$$

$$M_0(-6;7;-10).$$

$$10.18. M_1(2;-1;-2), M_2(1;2;1), M_3(5;0;-6), M_0(14;-3;7).$$

$$10.19. M_1(-1;2;4), M_2(-1;-2;-4), M_3(3;0;-1), M_0(-2;3;5).$$

$$10.20. M_1(5;2;0), M_2(2;5;0), M_3(1;2;4), M_0(-3;-6;-8).$$

$$10.21. M_1(0;-3;1), M_2(-4;1;2), M_3(2;-1;5), M_0(-3;4;5).$$

$$10.22. M_1(0;-1;-1), M_2(-2;3;5), M_3(1;-5;-9),$$

$$M_0(-4;-13;6).$$

$$10.23. M_1(1;3;0), M_2(4;-1;2), M_3(3;0;1), M_0(4;3;0).$$

$$10.24. M_1(-1;-5;2), M_2(-6;0;-3), M_3(3;6;-3),$$

$$M_0(10;-8;-7).$$

$$10.25. M_1(-2;-1;-1), M_2(0;3;2), M_3(3;1;-4),$$

$$M_0(-21;20;-16).$$

$$10.26. M_1(2;1;4), M_2(3;5;-2), M_3(-7;-3;2), M_0(-3;1;8).$$

$$10.27. M_1(-3;-5;6), M_2(2;1;-4), M_3(0;-3;-1), M_0(3;6;68).$$

$$10.28. M_1(7;2;4), M_2(7;-1;-2), M_3(-5;-2;-1), M_0(10;1;8).$$

$$10.29. M_1(2;-4;-3), M_2(5;-6;0), M_3(-1;3;-3), M_0(2;-10;8).$$

$$10.30. M_1(1;-1;2), M_2(2;1;2), M_3(1;1;4), M_0(-3;2;7).$$

Задача 11. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку A перпендикулярно вектору $\overrightarrow{BC}$.

$$11.1. A(-7;0;3), B(1;-5;-4), C(2;-3;0).$$

- 11.2. $A(1;0;-6)$, $B(-7;2;1)$, $C(-9;6;1)$.
- 11.3. $A(0;-3;5)$, $B(-7;2;6)$, $C(-3;2;4)$.
- 11.4. $A(-3;1;0)$, $B(6;3;3)$, $C(9;4;-2)$.
- 11.5. $A(5;-1;2)$, $B(2;-4;3)$, $C(4;-1;3)$.
- 11.6. $A(-4;-2;5)$, $B(-2;-3;-7)$, $C(9;3;7)$.
- 11.7. $A(-3;7;2)$, $B(3;5;1)$, $C(4;5;3)$.
- 11.8. $A(0;-8;10)$, $B(-5;5;7)$, $C(-8;0;4)$.
- 11.9. $A(0;-2;8)$, $B(4;3;2)$, $C(1;2;3)$.
- 11.10. $A(1;-5;-2)$, $B(6;-2;1)$, $C(2;-2;-2)$.
- 11.11. $A(1;-1;5)$, $B(0;7;8)$, $C(-1;3;8)$.
- 11.12. $A(0;7;-9)$, $B(-1;8;-11)$, $C(-4;3;-12)$.
- 11.13. $A(-10;0;9)$, $B(12;4;11)$, $C(8;5;15)$.
- 11.14. $A(-3;-1;7)$, $B(0;2;-6)$, $C(2;3;-5)$.
- 11.15. $A(3;-3;-6)$, $B(1;9;-5)$, $C(6;6;-4)$.
- 11.16. $A(5;3;1)$, $B(0;0;-3)$, $C(5;-1;0)$.
- 11.17. $A(2;1;7)$, $B(9;0;2)$, $C(9;2;3)$.
- 11.18. $A(-1;2;-2)$, $B(13;14;1)$, $C(14;15;2)$.
- 11.19. $A(-7;1;4)$, $B(8;11;-3)$, $C(9;9;-1)$.
- 11.20. $A(7;-5;0)$, $B(8;3;-1)$, $C(8;5;1)$.
- 11.21. $A(1;0;-2)$, $B(2;-1;3)$, $C(0;-3;2)$.
- 11.22. $A(-3;6;4)$, $B(8;-3;5)$, $C(10;-3;7)$.
- 11.23. $A(-1;3;4)$, $B(-1;5;0)$, $C(2;6;1)$.

11.24. $A(2;5;-3)$, $B(7;8;-1)$, $C(9;7;4)$.

11.25. $A(4;-2;0)$, $B(1;-1;-5)$, $C(-2;1;-3)$.

11.26. $A(1;9;6)$, $B(5;7;1)$, $C(3;5;0)$.

11.27. $A(-8;0;7)$, $B(-3;2;4)$, $C(-1;4;5)$.

11.28. $A(-2;0;-5)$, $B(2;7;-3)$, $C(1;10;-1)$.

11.29. $A(7;-5;1)$, $B(5;-1;-3)$, $C(3;0;-4)$.

11.30. $A(1;-1;8)$, $B(-4;-3;10)$, $C(-1;-1;7)$.

Задача 12. Знайти кут між площинами.

12.1. $x + 2y + 2z - 3 = 0$, $2x - y + 2z + 5 = 0$.

12.2. $x + y + z\sqrt{2} - 3 = 0$, $x - y + z\sqrt{2} - 1 = 0$.

12.3. $3x + 2y - 3z - 1 = 0$, $x + y + z - 7 = 0$.

12.4. $x + 2y - 2z - 7 = 0$, $x + y - 3z = 0$.

12.5. $x + y - z + 3 = 0$, $x - 3y - 2z - 8 = 0$.

12.6. $3x - y - 5z = 0$, $2x + y - 3 = 0$.

12.7. $y + z + 5 = 0$, $3x - 2y + 3z + 23 = 0$.

12.8. $2x - 2y - 5 = 0$, $x - y + 7z - 1 = 0$.

12.9. $x + z - 1 = 0$, $x + y + 3z - 7 = 0$.

12.10. $5x - 15y + 35z - 3 = 0$, $2x - 6y + 14z - 1 = 0$.

12.11. $x - 2y - 1 = 0$, $x - 2y + 2z + 17 = 0$.

12.12. $x - y + 2z - 1 = 0$, $2y + z - 9 = 0$.

12.13. $x + y + 6 = 0$, $x + 2y - 1 = 0$.

12.14. $2x + y + 4z - 3 = 0$, $x + 4y - z + 1 = 0$.

$$12.15. \quad 2x+3y-7=0, \quad 2x-z+5=0.$$

$$12.16. \quad x+2y+2z+5=0, \quad 2x+3z-2=0.$$

$$12.17. \quad 5x+3y+z-18=0, \quad 2y+z-9=0.$$

$$12.18. \quad x-y+3z-1=0, \quad 2x+2y+z+9=0.$$

$$12.19. \quad 2x-y+5z-16=0, \quad x-3y+5=0.$$

$$12.20. \quad x+y-3z-7=0, \quad 3x-2y-2z-16=0.$$

$$12.21. \quad x+z-1=0, \quad x-3y+z-1=0.$$

$$12.22. \quad x+z+5=0, \quad 3x+y+z-4=0.$$

$$12.23. \quad x-4y-z+9=0, \quad 4x-5y+3z-1=0.$$

$$12.24. \quad 16x+12y-15z-1=0, \quad x+2y+2z-3=0.$$

$$12.25. \quad 5x+9y-3z-1=0, \quad 3x-y+2z+15=0.$$

$$12.26. \quad x+2y+6z-12=0, \quad 6x+3y-2z=0.$$

$$12.27. \quad 9x+3y-6z-4=0, \quad 6x+2y-4z+17=0.$$

$$12.28. \quad x-y\sqrt{2}+z-1=0, \quad x+y\sqrt{2}-z+3=0.$$

$$12.29. \quad 3y-z=0, \quad 2y+z=0.$$

$$12.30. \quad 6x-y+5z-1=0, \quad 3x-5y+z=0.$$

Задача 13. Пряма задана загальними рівняннями. Скласти канонічні рівняння цієї прямої.

$$13.1. \quad \begin{cases} 2x+y-3z-2=0, \\ 2x-y+z+6=0. \end{cases}$$

$$13.2. \quad \begin{cases} 2x-3y+z-1=0, \\ x-3y+z+3=0. \end{cases}$$

$$13.3. \quad \begin{cases} x+y-2z-2=0, \\ x-y+z+2=0. \end{cases}$$

$$13.4. \quad \begin{cases} 6x-5y+3z+8=0, \\ 6x+5y-4z+4=0. \end{cases}$$

$$13.5. \quad \begin{cases} x+5y-z+11=0, \\ x-y+2z-1=0. \end{cases}$$

$$13.7. \quad \begin{cases} x-y+z-2=0, \\ x-2y-z+4=0. \end{cases}$$

$$13.9. \quad \begin{cases} 6x-7y-z-2=0, \\ x+7y-4z-5=0. \end{cases}$$

$$13.11. \quad \begin{cases} 2x-5y-z+5=0, \\ x+5y+2z-5=0. \end{cases}$$

$$13.13. \quad \begin{cases} 2x+y+z-2=0, \\ 2x-y-3z+6=0. \end{cases}$$

$$13.15. \quad \begin{cases} x+3y+z+14=0, \\ x-3y+2z+2=0. \end{cases}$$

$$13.17. \quad \begin{cases} x-2y+z-4=0, \\ 2x+2y-z-8=0. \end{cases}$$

$$13.19. \quad \begin{cases} x+y+z-2=0, \\ x-y-2z+2=0. \end{cases}$$

$$13.21. \quad \begin{cases} 2x+3y+z+6=0, \\ x-3y-2z+3=0. \end{cases}$$

$$13.23. \quad \begin{cases} 3x-y+2z=0, \\ 3x+y-z-6=0. \end{cases}$$

$$13.25. \quad \begin{cases} x+5y+2z+11=0, \\ x-y-z-1=0. \end{cases}$$

$$13.27. \quad \begin{cases} 3x+4y-2z+1=0, \\ 2x-4y+3z+4=0. \end{cases}$$

$$13.6. \quad \begin{cases} 3x+3y+z-1=0, \\ 2x-3y+6=0. \end{cases}$$

$$13.8. \quad \begin{cases} 3x+4y+3z+1=0, \\ 2x-4y-2z+4=0. \end{cases}$$

$$13.10. \quad \begin{cases} x-3y+z+3=0, \\ 2x+3y-2z+6=0. \end{cases}$$

$$13.12. \quad \begin{cases} x-3y+z+2=0, \\ x+3y+2z+14=0. \end{cases}$$

$$13.14. \quad \begin{cases} 4x+y+z+2=0, \\ 2x-y-3z-8=0. \end{cases}$$

$$13.16. \quad \begin{cases} 5x+y+2z+4=0, \\ x-y-3z+2=0. \end{cases}$$

$$13.18. \quad \begin{cases} x-3y-2z+3=0, \\ 2x-3y+z+6=0. \end{cases}$$

$$13.20. \quad \begin{cases} x+5y-z-5=0, \\ 2x-5y+2z+5=0. \end{cases}$$

$$13.22. \quad \begin{cases} 6x-5y-4z+8=0, \\ 6x+5y+3z+4=0. \end{cases}$$

$$13.24. \quad \begin{cases} 8x-y-3z-1=0, \\ x+y+z+10=0. \end{cases}$$

$$13.26. \quad \begin{cases} 6x-7y-4z-2=0, \\ x+7y-z-5=0. \end{cases}$$

$$13.28. \quad \begin{cases} 3x+3y-2z-1=0, \\ 2x-3y+z+6=0. \end{cases}$$

$$13.29. \quad \begin{cases} 5x + y - 3z + 4 = 0, \\ x - y + 2z + 2 = 0. \end{cases}$$

$$13.30. \quad \begin{cases} x - y - z - 2 = 0, \\ x - 2y + z + 4 = 0. \end{cases}$$

Задача 14. Знайти точку перетину прямої і площини.

$$14.1. \quad \frac{x-7}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2}, \quad 2x + y + 7z - 3 = 0.$$

$$14.2. \quad \frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z+2}{3}, \quad 5x - y + 4z + 3 = 0.$$

$$14.3. \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z+2}{-2}, \quad 3x - 7y - 2z + 3 = 0.$$

$$14.4. \quad \frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{2}, \quad x + 2y - z + 2 = 0.$$

$$14.5. \quad \frac{x+3}{0} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+5}{11}, \quad 5x + 7y + 9z - 32 = 0.$$

$$14.6. \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-1}{-1}, \quad 3x - 2y - 4z - 8 = 0.$$

$$14.7. \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z-3}{-2}, \quad x + 2y - 5z + 16 = 0.$$

$$14.8. \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{3}, \quad 4x + 2y - z - 11 = 0.$$

$$14.9. \quad \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+3}{-2}, \quad 3x - y + 4z = 0.$$

$$14.10. \quad \frac{x+2}{2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+3}{0}, \quad 2x - 3y - 5z - 7 = 0.$$

$$14.11. \quad \frac{x-1}{6} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{3}, \quad 3x - 2y + 5z - 3 = 0.$$

$$14.12. \quad \frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+4}{-1}, \quad 2x - y + 3z + 23 = 0.$$

$$14.13. \quad \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{3}, \quad x + 4y + 13z - 23 = 0.$$

$$14.14. \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-4}{1}, \quad x - 2y + 4z - 19 = 0.$$

$$14.15. \quad \frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-8}{0}, \quad 5x+9y+4z-25=0.$$

$$14.16. \quad \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}, \quad x-2y+5z+17=0.$$

$$14.17. \quad \frac{x-1}{7} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-6}{-1}, \quad 4x+y-6z-5=0.$$

$$14.18. \quad \frac{x+1}{-3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-2}, \quad x+3y-5z+9=0.$$

$$14.19. \quad \frac{x-5}{-1} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-1}{2}, \quad 3x+7y-5z-11=0.$$

$$14.20. \quad \frac{x-5}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{0}, \quad 3x+y-5z-12=0.$$

$$14.21. \quad \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{0}, \quad x+7y+3z+11=0.$$

$$14.22. \quad \frac{x-1}{-1} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-1}{2}, \quad x-3y+7z-24=0.$$

$$14.23. \quad \frac{x-5}{-2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+4}{-1}, \quad 2x-5y+4z+24=0.$$

$$14.24. \quad \frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{5}, \quad x+2y-5z+20=0.$$

$$14.25. \quad \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+3}{2}, \quad 3x+4y+7z-16=0.$$

$$14.26. \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{2}, \quad 2x-y+4z=0.$$

$$14.27. \quad \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{5}, \quad 2x+3y+7z-52=0.$$

$$14.28. \quad \frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{4}, \quad x+2y+3z-14=0.$$

$$14.29. \quad \frac{x-3}{-1} = \frac{y-4}{5} = \frac{z-4}{2}, \quad 7x+y+4z-47=0.$$

$$14.30. \quad \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{3}, \quad x+3y+5z-42=0.$$

Задача 15. Знайти точку M' , симетричну точці M відносно прямої (15.1-15.15), або площини (15.16-15.30).

$$15.1. \quad M(0; -3; -2), \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y+1,5}{-1} = \frac{z}{1}.$$

$$15.2. \quad M(3; -3; -1), \quad \frac{x-6}{5} = \frac{y-3,5}{4} = \frac{z+0,5}{0}.$$

$$15.3. \quad M(2; -1; 1), \quad \frac{x-4,5}{1} = \frac{y+3}{-0,5} = \frac{z-2}{1}.$$

$$15.4. \quad M(0; 2; 1), \quad \frac{x-1,5}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{1}.$$

$$15.5. \quad M(1; 1; 1), \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y+1,5}{-2} = \frac{z-1}{1}.$$

$$15.6. \quad M(-1; 0; -1), \quad \frac{x}{-1} = \frac{y-1,5}{0} = \frac{z-2}{1}.$$

$$15.7. \quad M(3; 3; 3), \quad \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1,5}{0} = \frac{z-3}{1}.$$

$$15.8. \quad M(0; -3; -2), \quad \frac{x-0,5}{0} = \frac{y+1,5}{-1} = \frac{z-1,5}{1}.$$

$$15.9. \quad M(-2; -3; 0), \quad \frac{x+0,5}{1} = \frac{y+1,5}{0} = \frac{z-0,5}{1}.$$

$$15.10. \quad M(-1; 2; 0), \quad \frac{x+0,5}{1} = \frac{y+0,7}{-0,2} = \frac{z-2}{2}.$$

$$15.12. \quad M(2; 1; 0), \quad \frac{x-2}{0} = \frac{y+1,5}{-1} = \frac{z+0,5}{1}.$$

$$15.13. \quad M(2; -2; -3), \quad \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1,5}{0} = \frac{z+1,5}{0}.$$

$$15.14. \quad M(1; 2; 3), \quad \frac{x-0,5}{0} = \frac{y+1,5}{-1} = \frac{z-0,5}{1}.$$

$$15.15. \quad M(1; 0; -1), \quad \frac{x-3,5}{2} = \frac{y-1,5}{2} = \frac{z}{0}.$$

$$15.16. \quad M(-2; 0; 3), \quad 2x - 2y + 10z + 1 = 0.$$

$$15.17. \quad M(-1; 2; 0), \quad 4x - 5y - z - 7 = 0.$$

15.18. $M(3;3;3), \quad 8x + 6y + 8z - 25 = 0.$

15.19. $M(2;-1;1), \quad x - y + 2z - 2 = 0.$

15.20. $M(-1;0;1), \quad 2x + 4y - 3 = 0.$

15.21. $M(1;1;1), \quad x + 4y + 3z + 5 = 0.$

15.22. $M(2;-2;-3), \quad y + z + 2 = 0.$

15.23. $M(1;2;3), \quad 2x + 10y + 10z - 1 = 0.$

15.24. $M(1;0;1), \quad 4x + 6y + 4z - 25 = 0.$

15.25. $M(0;-3;-2), \quad 2x + 10y + 10z - 1 = 0.$

15.26. $M(-1;0;-1), \quad 2x + 6y - 2z + 11 = 0.$

15.27. $M(-2;-3;0), \quad x + 5y + 4 = 0.$

15.28. $M(0;2;1), \quad 2x + 4y - 3 = 0.$

15.29. $M(2;1;0), \quad y + z + 2 = 0.$

15.30. $M(0;2;1), \quad 2x + 4y - 3 = 0.$

Задача 16.

16.1. Скласти рівняння площини, яка проходить через вісь Oy і точку $M(3;-5;2)$.

16.2. Знайти довжину відрізків, які відтинає на координатних осях площина, що проходить через точку $M(-2;7;3)$ паралельно площині $x - 4y + 5z - 1 = 0$.

16.3. З'ясувати, при якому значенні C , площини $3x - 5y + Cz - 3 = 0$ і $x - 3y + 2z + 5 = 0$ будуть перпендикулярні.

16.4. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M(1;2;3)$ і $N(-3;4;5)$ паралельно осі Oz .

16.5. Скласти рівняння площини, яка проходить через середину відрізка M_1M_2 перпендикулярно до цього відрізка, якщо $M_1(1;5;6)$, $M_2(-1;7;10)$.

16.6. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M(2;3;-5)$ і $N(-1;1;-6)$ паралельно вектору $\vec{a} = (4;4;3)$.

16.7. При яких значеннях n і A пряма $\frac{x}{3} = \frac{y-5}{n} = \frac{z+5}{6}$ перпендикулярна до площини $Ax + 2y - 2z - 7 = 0$.

16.8. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $A(2; -3; 5)$ і паралельно площині Oxy .

16.9. Скласти рівняння площини, яка проходить через початок координат перпендикулярно до площин $x + 5y - z + 7 = 0$ і $3x - y + 2z - 3 = 0$.

16.10. Скласти рівняння площини, яка проходить через вісь Ox і точку $A(2; 5; -1)$.

16.11. Скласти загальне рівняння площини, яка проходить через точку $A(3; -4; 1)$ паралельно координатній площині Oxz .

16.12. Скласти рівняння площини, якщо точки $A(1; -2; 0)$, $B(3; 2; 6)$ симетричні, щодо неї.

16.13. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $A(2; 3; -1)$, $B(1; 1; 4)$ перпендикулярно до площини $x - 4y + 3z + 2 = 0$.

16.14. Знайти проекцію точки $M(4; -3; 1)$, $B(1; 1; 4)$ на площину $x - 2y - z - 15 = 0$.

16.15. Визначити при якому значенні B площини $x - 4y + z - 1 = 0$ і $2x + By + 10z - 3 = 0$ будуть перпендикулярні.

16.16. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(2; -3; 4)$ і відтинає на координатних осях рівні відрізки.

16.17. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(2; 3; -1)$ і пряму
$$\begin{cases} x = t - 3, \\ y = 2t + 5, \\ z = -3t + 1. \end{cases}$$

16.18. Знайти довжину відрізків, які відтинає на координатних осях площина, яка проходить через точку $M(2; -3; 3)$ паралельно площині $3x + y - 3z = 0$.

16.19. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $A(2; 5; -1)$, $B(-3; 1; 3)$ паралельно осі Oy .

16.20. Скласти рівняння площини у відрізках, якщо вона проходить через точку $M(6; -10; 1)$ і відтинає на осі Ox відрізок $a = -3$, а на осі Oz – відрізок $c = 2$.

16.21. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $A(3; 4; 0)$ і пряму $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{2}$.

16.22. Скласти рівняння площини, яка проходить через дві паралельні прямі $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ і $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$.

16.23. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $A(2; 3; -4)$ паралельно двом векторам $\vec{a} = (4; 1; -1)$, $\vec{b} = (2; -1; 2)$.

16.24. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $A(1; 1; 0)$, $B(2; -1; -1)$ перпендикулярно до площини $5x + 2y + 3z - 7 = 0$.

16.25. Скласти рівняння площини, яка проходить через початок координат перпендикулярно до двох площин $2x - 3y + z - 1 = 0$ і $x - y + 5z + 3 = 0$.

16.26. Написати рівняння площин, що ділять навпіл двогранні кути між площинами $x - 2y + 5z - 11 = 0$ і $2x + y + 5z - 5 = 0$.

16.27. Скласти рівняння площини, яка проходить через початок координат перпендикулярно вектору $\overrightarrow{AB}$, $A(5; -2; 3)$, $B(1; -3; 5)$.

16.28. Скласти рівняння площини у відрізках, яка проходить через точку $M(-1;2;3)$ і відтинає на осях Ox та Oy відрізки $a = 2$, $b = -1$.

16.29. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(0;1;2)$ паралельно векторам $\vec{a} = (2;0;1)$ і $\vec{b} = (1;1;0)$.

16.30. Точка $M(3;-1;-2)$ є основою перпендикуляра, опущеного з початку координат на площину. Скласти рівняння цієї площини.

Задача 17.

17.1. Переконатись чи прямі паралельні: $\frac{x-1}{6} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-1}$
і $\begin{cases} x-2y+2z-8=0, \\ x+6z-6=0. \end{cases}$

17.2. Скласти параметричні рівняння медіани трикутника з вершинами $A(3;6;-7)$, $B(-5;1;-4)$, $C(0;2;3)$, проведеної з вершини C .

17.3. При якому значенні A площина $Ax+3y-5z+1=0$ паралельна прямій $\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{1}$.

17.4. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(2;-3;4)$ перпендикулярно до прямих $\frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{1}$ і $\frac{x+4}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{-3}$.

17.5. При якому значенні D пряма $\begin{cases} 3x-y+2z-6=0, \\ x+4y-z+D=0 \end{cases}$ перетинає вісь Oz .

17.6. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $E(3;4;5)$ паралельно осі Ox .

17.7. Скласти рівняння руху точки $M(x; y; z)$, яка з початкового положення $M_0(3; -1; -5)$ рухається прямолінійно і рівномірно в напрямку вектора $\vec{S} = (-2; 6; 3)$ зі швидкістю $V = 21$.

17.8. Показати, що пряма $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{3}$ паралельна площині $2x + y - z = 0$, а пряма $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-4}{3}$ лежить в цій площині.

17.9. При яких значеннях m і C пряма $\frac{x-2}{m} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-5}{-3}$ перпендикулярна до площини $3x - 2y + Cz + 1 = 0$.

17.10. Скласти рівняння прямої, яка проходить через початок координат паралельно прямій
$$\begin{cases} x = 2t + 5, \\ y = -3t + 1, \\ z = -7t - 4. \end{cases}$$

17.11. З'ясувати чи точки $A(0; 0; 2)$, $B(4; 2; 5)$ і $C(12; 6; 11)$ лежать на одній прямій.

17.12. Скласти канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку $M(1; -5; 3)$ перпендикулярно до прямих

$$\frac{x}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-1} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x = 3t + 1, \\ y = -t - 5, \\ z = 2t + 3. \end{cases}$$

17.13. При якому значенні p прямі
$$\begin{cases} x = 2t + 5, \\ y = -t + 2, \\ z = pt - 7, \end{cases} \quad \text{і}$$

$$\begin{cases} x + 3y + z + 2 = 0, \\ x - y - 3z - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{паралельні.}$$

17.14. Скласти загальні рівняння прямої, утвореної перетином площини $x + 2y - z + 5 = 0$ з площиною, яка проходить через вісь Oy і точку $M(5;3;2)$.

17.15. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(2;3;1)$ перпендикулярно до прямої $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}$.

17.16. При яких значеннях B та D пряма $\begin{cases} x - 2y + z - 9 = 0, \\ 3x + By + z + D = 0 \end{cases}$ лежить в площині Oxy .

17.17. Знайти гострий кут між прямою $\begin{cases} x + y + z - 4 = 0, \\ 2x - y + 4z + 5 = 0 \end{cases}$ і площиною $x + y + 3z - 1 = 0$.

17.18. Скласти рівняння руху точки $M(x; y; z)$, яка рухаючись прямолінійно і рівномірно, пройшла відстань від точки $M_1(-7;12;5)$ до точки $M_2(9;-4;-3)$ за проміжок часу від $t = 0$ до $t = 1$.

17.19. Довести, що пряма $\frac{x}{6} = \frac{y-3}{-8} = \frac{z-1}{-9}$ паралельна площині $x + 3y - 2z + 1 = 0$, а пряма $\begin{cases} x = t + 7, \\ y = t - 2, \\ z = 2t + 1 \end{cases}$ лежить в цій площині.

17.20. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(1;-3;3)$ і утворює з осями координат кути 60° , 45° і 120° .

17.21. Знайти відстань між прямими $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{2}$ і $\frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2}$.

17.22. При якому значенні n пряма $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{n} = \frac{z}{1}$ паралельна прямій $\begin{cases} x+y-z=0, \\ x-y-5z-8=0. \end{cases}$

17.23. Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $A(2;-3;4)$ на вісь Oy .

17.24. Знайти відстань від точки $P(7;6;-3)$ до прямої, яка задана точками $A(3;2;-1)$, $B(-1;0;2)$.

17.25. При яких значеннях A та B площина $Ax + By + 6z - 7 = 0$ перпендикулярна до прямої $\frac{x-2}{2} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z+1}{3}$.

17.26. Знайти кут між прямими $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{6}$, $\begin{cases} 2x+y-4z+2=0, \\ 4x-y-5z+4=0. \end{cases}$

17.27. Задано вершини трикутника $A(3;-1;-1)$, $B(1;2;-7)$, $C(-5;14;-3)$. Скласти канонічні рівняння бісектриси його внутрішнього кута при вершині B .

17.28. Обчислити відстань між мимобіжними прямими $\frac{x-9}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{1}$ і $\frac{x}{-2} = \frac{y+7}{9} = \frac{z-2}{2}$.

17.29. Визначити взаємне розміщення прямої $\frac{x+3}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{-5}$ і площини $x-2y+z-15=0$.

17.30. Знайти відстань від точки $P(1;1;-1)$ до прямої, яка проходить через точки $M(2;2;-2)$, $N(7;4;3)$.

Задача 18. Скласти канонічні рівняння:

а) еліпса; б) гіперболи; в) параболи

(A , B – точки, які лежать на кривій, F – фокус, a , b – відповідно велика та мала півосі еліпса (a , b – дійсна горизонтальна та уявна півосі для гіперболи), ε – ексцентриситет, $y = \pm kx$ – рівняння асимптот гіперболи, d – директриса кривої, $2c$ – відстань між фокусами).

$$18.1. \quad \text{а) } \varepsilon = \frac{3}{5}, \quad A(0;8); \quad \text{б) } k = \frac{\sqrt{11}}{5}, \quad 2c = 12;$$

$$\text{в) } d : y = 9.$$

$$18.2. \quad \text{а) } 2a = 22, \quad \varepsilon = \frac{10}{11}; \quad \text{б) } A(\sqrt{6};0), \quad B(-2\sqrt{2};1);$$

$$\text{в) вісь симетрії } Ox \text{ і } A(-7;5).$$

$$18.3. \quad \text{а) } b = 2\sqrt{2}, \quad \varepsilon = \frac{7}{9}; \quad \text{б) } k = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 2a = 12;$$

$$\text{в) вісь симетрії } Oy \text{ і } A(-45;15).$$

$$18.4. \quad \text{а) } \varepsilon = \frac{2}{3}, \quad A(-6;0); \quad \text{б) } A(\sqrt{8};0), \quad B\left(\frac{\sqrt{20}}{3};2\right);$$

$$\text{в) } d : y = 1.$$

$$18.5. \quad \text{а) } b = 15, \quad F(-10;0); \quad \text{б) } a = 13, \quad \varepsilon = \frac{14}{3};$$

$$\text{в) } d : x = -4.$$

$$18.6. \quad \text{а) } b = 2, \quad \varepsilon = 5\frac{\sqrt{29}}{29}; \quad \text{б) } k = \frac{12}{13}, \quad 2a = 26;$$

$$\text{в) вісь симетрії } Ox \text{ і } A(-5;15).$$

18.7. а) $A(3;0)$, $B\left(2;\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$; б) $k=\frac{3}{4}$, $\varepsilon=\frac{5}{4}$;

в) $d: y = -2$.

18.8. а) $b=2$, $F(4\sqrt{2};0)$; б) $a=7$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{85}}{7}$;

в) $d: x = 5$.

18.9. а) $2a=22$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{57}}{11}$; б) $k=\frac{2}{3}$, $2c=10\sqrt{13}$;

в) вісь симетрії Ox і $A(27;9)$.

18.10. а) $A(0;-2)$, $B\left(\frac{\sqrt{5}}{2};1\right)$; б) $k=2\frac{\sqrt{10}}{9}$, $\varepsilon=\frac{11}{9}$;

в) $d: y = 5$.

18.11. а) $b=2\sqrt{15}$, $\varepsilon=\frac{7}{8}$; б) $k=\frac{5}{6}$, $2a=12$;

в) вісь симетрії Oy і $A(-2;3\sqrt{2})$.

18.12. а) $2a=50$, $\varepsilon=\frac{3}{5}$; б) $k=\frac{\sqrt{29}}{14}$, $2c=30$;

в) вісь симетрії Oy і $A(4;1)$.

18.13. а) $A(-3;0)$, $B\left(1;\frac{\sqrt{40}}{3}\right)$; б) $k=\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{15}}{3}$;

в) $d: y = 4$.

18.14. а) $b=7$, $F(13;0)$; б) $b=4$, $F(-11;0)$;

в) $d: x = 13$.

18.15. а) $\varepsilon = \frac{3}{6}5$, $A(0; -\sqrt{11})$; б) $A\left(\sqrt{\frac{32}{2}}; 1\right)$, $B(\sqrt{8}; 0)$;

в) $d: y = -3$.

18.16. а) $2a = 30$, $\varepsilon = \frac{17}{15}$; б) $k = \frac{\sqrt{18}}{8}$, $2c = 18$;

в) вісь симетрії Oy і $A(4; -10)$.

18.17. а) $A\left(-\sqrt{\frac{17}{3}}; \frac{1}{3}\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{21}}{2}; \frac{1}{2}\right)$; б) $k = \frac{1}{2}$, $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{2}$;

в) $d: y = -1$.

18.18. а) $a = 9$, $F(7; 0)$; б) $b = 6$, $F(12; 0)$;

в) $d: x = -\frac{1}{4}$.

18.19. а) $b = 5$, $F(-10; 0)$; б) $a = 9$, $\varepsilon = \frac{4}{3}$;

в) $d: x = 12$.

18.20. а) $a = 13$, $F(-5; 0)$; б) $b = 44$, $F(-7; 0)$;

в) $d: x = -\frac{3}{8}$.

18.21. а) $b = \sqrt{15}$, $\varepsilon = \frac{\sqrt{10}}{25}$; б) $k = \frac{3}{4}$, $2a = 16$;

в) вісь симетрії Ox і $A(4; -8)$.

18.22. а) $\varepsilon = \frac{7}{8}$, $A(8; 0)$; б) $A\left(3; -\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{13}}{5}; 6\right)$;

в) $d: y = 4$.

18.23. а) $2a = 24$, $\varepsilon = \frac{\sqrt{22}}{6}$; б) $k = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $2c = 10$;

в) вісь симетрії Ox і $A(-7;7)$.

18.24. а) $A(0;\sqrt{3})$, $B\left(\sqrt{\frac{14}{3}};1\right)$; б) $k = \frac{\sqrt{21}}{10}$, $\varepsilon = \frac{11}{10}$;

в) $d : y = -4$.

18.25. а) $b = 4$, $F(9;0)$; б) $a = 5$, $\varepsilon = \frac{7}{5}$;

в) $d : x = 6$.

18.26. а) $a = 4$, $F(3;0)$; б) $b = 2\sqrt{10}$, $F(-11;0)$;

в) $d : x = -2$.

18.27. а) $\varepsilon = \frac{\sqrt{21}}{5}$, $A(-5;0)$; б) $A(\sqrt{80};3)$, $B(2\sqrt{6};3\sqrt{2})$;

в) $d : y = 1$.

18.28. а) $a = 6$, $F(-4;0)$; б) $b = 3$, $F(7;0)$;

в) $d : x = -7$.

18.29. а) $b = 5$, $\varepsilon = \frac{12}{13}$; б) $k = \frac{1}{3}$, $2a = 6$;

в) вісь симетрії Oy і $A(-9;6)$.

18.30. а) $b = 7$, $F(-5;0)$; б) $a = 11$, $\varepsilon = \frac{12}{11}$;

в) $d : x = 10$.

Задача 19. Скласти рівняння кола, яке проходить через вказані точки і має центр в точці A .

- 19.1. Фокуси гіперболи $5x^2 - 11y^2 = 55$, $A(0;5)$.
- 19.2. $B(1;4)$, A - вершина параболи $y^2 = \frac{x-4}{3}$.
- 19.3. Лівий фокус еліпса $3x^2 + 7y^2 = 21$, $A(-1;-3)$.
- 19.4. Ліву вершину гіперболи $5x^2 - 9y^2 = 45$, $A(0;-6)$.
- 19.5. Фокуси еліпса $24x^2 - 25y^2 = 600$, A - його верхня вершина.
- 19.6. Правий фокус гіперболи $57x^2 - 64y^2 = 3648$, $A(2;8)$.
- 19.7. Лівий фокус еліпса $13x^2 + 49y^2 = 837$, $A(1;8)$.
- 19.8. $B(3;4)$, A - вершина параболи $y^2 = \frac{x+7}{4}$.
- 19.9. Фокуси гіперболи $4x^2 - 5y^2 = 20$, $A(0;-6)$.
- 19.10. Праву вершину гіперболи $3x^2 - 25y^2 = 75$, $A(-5;-2)$.
- 19.11. $O(0;0)$, A - вершина параболи $y^2 = 3(x-4)$.
- 19.12. Фокуси еліпса $16x^2 + 41y^2 = 656$, A - його нижня вершина.
- 19.13. Вершину гіперболи $2x^2 - 9y^2 = 18$, $A(0;4)$.
- 19.14. Лівий фокус гіперболи $3x^2 - 5y^2 = 30$, $A(0;6)$.
- 19.15. Правий фокус еліпса $33x^2 + 49y^2 = 1617$, $A(1;7)$.
- 19.16. $O(0;0)$, A - вершина параболи $y^2 = -\frac{x+5}{2}$.
- 19.17. Фокуси гіперболи $4x^2 - 5y^2 = 80$, $A(0;-4)$.
- 19.18. Вершину гіперболи $x^2 - 16y^2 = 64$, $A(0;-2)$.
- 19.19. Фокуси еліпса $3x^2 + 4y^2 = 12$, A - його верхня вершина.
- 19.20. Лівий фокус гіперболи $3x^2 - 4y^2 = 12$, $A(0;-3)$.
- 19.21. Фокуси еліпса $9x^2 + 25y^2 = 1$, $A(0;6)$.
- 19.22. Вершини гіперболи $12x^2 - 13y^2 = 156$, $A(0;-2)$.

19.23. Фокуси гіперболи $24x^2 - 25y^2 = 600$, $A(0; -8)$.

19.24. $B(2; -5)$, A - вершина параболи $x^2 = -2(y + 1)$.

19.25. Правий фокус еліпса $x^2 + 4y^2 = 12$, $A(2; -7)$.

19.26. Вершини гіперболи $4x^2 - 9y^2 = 36$, $A(0; 4)$.

19.27. Праву вершину гіперболи $40x^2 - 81y^2 = 3240$,
 $A(-2; 5)$.

19.28. Фокуси еліпса $x^2 + 10y^2 = 90$, A - його нижня
вершина.

19.29. Лівий фокус гіперболи $7x^2 - 9y^2 = 63$, $A(-1; -2)$.

19.30. Праву вершину гіперболи $3x^2 - 16y^2 = 48$, $A(1; 3)$.

Задача 20.

20.1. Скласти рівняння і побудувати лінію, відстань кожної точки якої до прямої $x + 6 = 0$ вдвічі більша відстані до точки $A(1; 3)$.

20.2. Скласти рівняння і побудувати лінію, відстань кожної точки якої від точки $A(2; 0)$ і від прямої $5x + 8 = 0$ відносяться як 5:4.

20.3. Скласти рівняння і побудувати лінію, кожна точка якої рівновіддалена від точки $A(2; 6)$ і від прямої $y + 2 = 0$.

20.4. Скласти рівняння і побудувати лінію, для кожної точки якої сума квадратів відстаней її від точок $A(-3; 3)$ і $B(6; 3)$ дорівнює 81.

20.5. Фокуси еліпса розміщені на осі Oy симетрично відносно початку координат, а один з них співпадає з фокусом параболи $x^2 = -16y$. Відстань від однієї із точок еліпса до фокусів рівна 3 і 7. Скласти рівняння еліпса. Зробити рисунок.

20.6. Скласти рівняння гіперболи і її асимптот, якщо відомо, що гіпербола симетрична відносно осей координат, один із її фокусів співпадає з центром кола $x^2 + y^2 - 20y + 19 = 0$, а ексцентриситет рівний 1,25. Зробити рисунок.

20.7. Скласти рівняння і побудувати лінію, відстані кожної точки якої до точки $A(2;3)$ і до прямої $5x + 8 = 0$ відносяться як 5:4.

20.8. Скласти рівняння кола, яке дотикається директриси параболи $x^2 = 16y$ і має центр у фокусі цієї параболи. Зробити рисунок.

20.9. Фокуси гіперболи розміщені на осі Ox симетрично відносно початку координат. Гіпербола проходить через точку $M(5;3)$, а її уявна піввісь рівна 6. знайти ексцентриситет гіперболи і скласти рівняння її асимптот. Зробити рисунок.

20.10. Скласти рівняння параболи і її директриси, якщо відомо, що парабола проходить через точки перетину прямої $y = 2x$ з колом $x^2 + y^2 - 10y = 0$ і вісь Ox є віссю симетрії параболи. Зробити рисунок.

20.11. Сума відстаней однієї із точок еліпса до його фокусів рівна 6, а довжина хорди, яка проходить через фокус і перпендикулярна більшій осі, рівна 2. знайти ексцентриситет еліпса. Зробити рисунок.

20.12. Написати рівняння траєкторії точки M , яка при своєму русі залишається весь час у півтора рази далі від точки $F(0;6)$ ніж від прямої $y = \frac{8}{3}$. Зробити рисунок.

20.13. Через фокус параболи $y^2 = 8x$ і через ту її точку, абсциса якої дорівнює 0,5, а ордината додатня, проведена пряма. Обчислити відстань від центра кола $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 3 = 0$ до цієї прямої. Зробити рисунок.

20.14. Відстань між кінцями малої і великої осей еліпса в півтора рази більша відстані між його фокусами. Знайти ексцентриситет еліпса і скласти його рівняння в системі координат, в якій фокуси еліпса розміщені на осі Ox симетрично відносно початку координат, а еліпс проходить через точку $M_0(5;2)$. Зробити рисунок.

20.15. Скласти рівняння кола, яке проходить через фокуси еліпса $x^2 + 4y^2 = 16$ і має центр у вершині еліпса, ордината

якого є від'ємною. Знайти точки перетину цього кола з віссю Oy . Зробити рисунок.

20.16. Точка P ділить відрізок між фокусами гіперболи $9x^2 - 16y^2 = 144$, який має початок в фокусі з від'ємною абсцисою, у відношенні 1:4. Скласти рівняння перпендикулярів опущених з точки P на асимптоти гіперболи. Зробити рисунок.

20.17. Малу вісь еліпса видно із його фокуса під кутом 120° , а відстань між кінцями малої і великої осей рівна 7. Знайти ексцентриситет і відстань між фокусами еліпса. Зробити рисунок.

20.18. Скласти рівняння і побудувати лінію, для кожної точки якої квадрат її відстані до точки $A(5;4)$ більше квадрата відстані до точки $B(-2;2)$ на 10.

20.19. Скласти рівняння і побудувати лінію, кожна точка якої знаходиться від точки $A(-3;3)$ втричі далі, ніж від точки $B(5;1)$.

20.20. Скласти рівняння і побудувати лінію, кожна точка якої віддалена від прямої $x - 2 = 0$ у п'ятеро далі, ніж від точки $A(4;-3)$.

20.21. Скласти рівняння і побудувати лінію, для кожної точки якої відстані до точок $A(2;-4)$ і $B(3;5)$ відноситься як 2:3.

20.22. Скласти рівняння і побудувати лінію, для кожної точки якої сума квадратів відстаней її від точок $A(-5;3)$ і $B(2;-4)$ рівна 65.

20.23. Скласти рівняння перпендикулярів, опущених із фокусів еліпса $15x^2 + 7y^2 = 210$ на асимптоту гіперболи $x^2 - 9y^2 = 36$ з додатнім кутовим коефіцієнтом. Зробити рисунок.

20.24. Скласти рівняння кола, діаметр якого є відрізок прямої $y = 2x + 9$, який відтинається гіперболою $xy = 5$. Зробити рисунок.

20.25. Скласти рівняння лінії, кожна точки якої рівновіддалена від прямої $x + 6 = 0$ і від початку координат. Зробити рисунок.

20.26. Скласти рівняння еліпса, симетрично розташованого відносно осей координат, якщо один з його фокусів співпадає з фокусом параболи $x^2 = -12y$, а відстані однієї з його точок до його фокусів дорівнюють 4 і 6. Зробити рисунок.

20.27. Скласти рівняння гіперболи з асимптотами $\sqrt{3}x \pm y = 0$, яка дотикається до прямої $2x - y - 3 = 0$. Зробити рисунок.

20.28. Скласти рівняння траєкторії точки, яка рухається так, що її відстань від точки $A(2;3)$ рівна її відстані до прямої $3x + 4y - 5 = 0$. Зробити рисунок.

20.29. Струмінь води, що створений фонтаном, має форму параболи, параметр якої $p = 0,1$. Знайти висоту струменя, якщо відомо, що вона падає на відстані 2 м від місця виходу.

20.30. Мостова арка має форму параболи. Визначити параметр цієї параболи, знаючи, що проліт арки 24м, а висота 6м.

Задача 21. Побудувати криву, задану рівнянням в полярних координатах.

21.1. $r = 2 \sin 4\varphi$.

21.2. $r = 2(1 - \sin 2\varphi)$.

21.3. $r = 3 \sin 2\varphi$.

21.4. $r = 2 \sin 6\varphi$.

21.5. $r = \frac{2}{1 + \cos \varphi}$.

21.6. $r = 3(1 + \sin \varphi)$.

21.7. $r = 2 - \cos 2\varphi$.

21.8. $r = 2 \sin 3\varphi$.

21.9. $r = 3 \cos 2\varphi$.

21.10. $r = \frac{2}{2 - \cos \varphi}$.

21.11. $r = 4(1 - \sin \varphi)$.

21.12. $r = 3(1 + \cos 2\varphi)$.

21.13. $r = 4(1 + \cos 2\varphi)$.

21.14. $r = \frac{1}{2 - \cos 2\varphi}$.

21.15. $r = 3 \sin 4\varphi$.

21.16. $r = 2 \cos 4\varphi$.

21.17. $r = 3\sqrt{\cos 2\varphi}$.

21.18. $r = 2(1 - \cos \varphi)$.

21.19. $r = 3(1 - \cos 2\varphi)$.

21.20. $r = 4 \sin 3\varphi$.

21.21. $r = 4 \sin 4\varphi$.

21.22. $r = 3(\cos \varphi + 1)$.

21.23. $r = \frac{1}{2 - \sin \varphi}$.

21.24. $r = \sin^2 \frac{\varphi}{2}$.

21.25. $r = 4 \sin 5\varphi$.

21.26. $r = 5\varphi$.

21.27. $r = e^{\varphi}$.

21.28. $r = 5(2 - \sin \varphi)$.

21.29. $r = 2 + \cos \varphi$.

21.30. $r = 2 \cos 6\varphi$.

Задача 22. Скориставшись методом паралельних перерізів, встановити тип, дослідити форму заданих поверхонь та побудувати їх.

22.1. а) $x^2 - 7y^2 - 14z - 21 = 0$; б) $2y = x^2 + 4z^2$.

22.2. а) $6x^2 - y^2 + 3z - 12 = 0$; б) $8y^2 + 2z^2 = x$.

22.3. а) $-16x^2 + y^2 + 4z^2 - 32 = 0$; б) $6x^2 + y^2 - 3z^2 = 0$.

22.4. а) $5x^2 - y^2 - 15z^2 + 15 = 0$; б) $x^2 + 3z = 0$.

22.5. а) $6x^2 + y^2 + 6z^2 - 18 = 0$; б) $3x^2 + y^2 - 3z = 0$.

22.6. а) $y^2 - z^2 = 4x^2$; б) $4y^2 - z = 0$.

22.7. а) $x^2 - z^2 = 9y^2$; б) $x^2 + 4 + y = 0$.

22.8. а) $x^2 - y^2 - 2z^2 + 3 = 0$; б) $9z^2 + y + 2 = 0$.

22.9. а) $3 - x^2 + y^2 + 4z = 0$; б) $x^2 + 4 = z^2$.

22.10. а) $4x^2 - y^2 - z^2 = 0$; б) $y - 9x^2 + 25 = 0$.

22.11. а) $5x^2 - 25 + y^2 = -5z^2$; б) $x^2 + 2z = 3 - z^2$.

22.12. а) $4x^2 - y^2 - 16z^2 + 16 = 0$; б) $x^2 + 4z = 0$.

22.13. а) $3x^2 + y^2 + 9z^2 - 9 = 0$; б) $x^2 + 2y^2 - 2z = 0$.

22.14. а) $5z^2 + 2y^2 = 10x$; б) $4z^2 - 3y^2 - 5x^2 + 60 = 0$.

22.15. а) $x^2 - 4y + 4z^2 = 0$; б) $9x^2 = 25 + z^2$.

22.16. а) $x^2 - z^2 = y^2 + 9$; б) $x^2 - 9z = 0$.

22.17. а) $x^2 - x^2 = y$; б) $x^2 = 4x - z^2$.

- 22.18. а) $4y = x^2 + y^2$; б) $8x^2 + z + 1 = 0$.
 22.19. а) $2z - 3x^2 = 5y^2$; б) $y^2 + z^2 = 8z$.
 22.20. а) $9 + 4x^2 + z^2 = 9y^2$; б) $9y^2 + z^2 + 2z = 0$.
 22.21. а) $3y^2 + z + x^2 = 0$; б) $x^2 - 2y^2 + 16 = 0$.
 22.22. а) $9x^2 + y^2 - z + 1 = 0$; б) $y^2 + 9z = 0$.
 22.23. а) $16x^2 + 16y^2 = 16 - 4z^2$; б) $x^2 - 6x + 9z^2 = 0$.
 22.24. а) $9z^2 + x^2 + y = 0$; б) $z^2 + y^2 = 6y$.
 22.25. а) $x^2 + z^2 + y^2 = 2x + 4z$; б) $x^2 + 9z^2 - 3 = 0$.
 22.26. а) $4y^2 + 5 = z^2 - x^2$; б) $x^2 - 4x = 4z - 4$.
 22.27. а) $2x^2 + 2y^2 - z^2 - 9 = 0$; б) $y^2 + 4y + 4z^2 = 0$.
 22.28. а) $4x - y^2 = z^2$; б) $z - 4x^2 + 9 = 0$.
 22.29. а) $2x^2 + 2y^2 - z^2 - 9 = 0$; б) $y^2 + 4y + 4z^2 = 0$.
 22.30. а) $y^2 - z^2 = 3x^2$; б) $y = 2z - z^2$.

Задача 23. Скласти рівняння і вказати тип поверхні, утвореної при обертанні даної лінії навколо вказаної осі. Зробити рисунок.

- 23.1. а) $x^2 = -4z$, Oz ; б) $y^2 + 4z^2 = 4$, Oy .
 23.2. а) $5x^2 - 6z^2 = 30$, Ox ; б) $x = 3$, $z = -2$, Oy .
 23.3. а) $z^2 = 2y$, Oy ; б) $2x^2 + 3z^2 = 6$, Oz .
 23.4. а) $y^2 = 4z$, Oz ; б) $y^2 + z^2 = 6$, Oy .
 23.5. а) $7x^2 - 5y^2 = 35$, Ox ; б) $x = -1$, $y = -3$, Oz .
 23.6. а) $y^2 = 5z$, Oz ; б) $3x^2 + 7y^2 = 21$, Ox .
 23.7. а) $15y^2 - x^2 = 6$, Oy ; б) $y = 5$, $z = 2$, Oy .
 23.8. а) $5z = -x^2$, Oz ; б) $3y^2 + 18z^2 = 1$, Oy .
 23.9. а) $3x^2 - 8z^2 = 288$, Ox ; б) $x = 5$, $z = -3$, Oy .
 23.10. а) $2y^2 = 72$, Oz ; б) $6y^2 + 5z^2 = 30$, Oy .
 23.11. а) $5x^2 - 7y^2 = 35$, Ox ; б) $x = 2$, $y = -4$, Oz .

- 23.12.** а) $3x^2 = -2z$, Oz ; б) $8x^2 + 11z^2 = 88$, Ox .
23.13. а) $5y^2 - 8z^2 = 40$, Oz ; б) $y = 3$, $z = 1$, Ox .
23.14. а) $3x^2 + 4y = 0$, Oz ; б) $4x^2 + 3z^2 = 12$, Oz .
23.15. а) $y^2 = 2z$, Oz ; б) $9y^2 + 4z^2 = 36$, Oy .
23.16. а) $4x^2 - 3y^2 = 12$, Ox ; б) $x = 1$, $y = 2$, Oz .
23.17. а) $x^2 = -3z$, Oz ; б) $3x^2 + 5z^2 = 15$, Ox .
23.18. а) $3y^2 - 4z^2 = 12$, Oz ; б) $y = 4$, $z = 2$, Ox .
23.19. а) $x^2 = 3y$, Oy ; б) $3x^2 + 4z^2 = 24$, Oz .
23.20. а) $2x^2 - 6y^2 = 12$, Ox ; б) $y^2 = 4z$, Oz .
23.21. а) $x^2 + 3z^2 = 9$, Oz ; б) $x = 4$, $z = 6$, Oy .
23.22. а) $3x^2 - 5z^2 = 15$, Oz ; б) $z = -1$, $y = 3$, Ox .
23.23. а) $y^2 = 3z$, Oz ; б) $2x^2 + 3z^2 = 6$, Ox .
23.24. а) $y^2 - 5x^2 = 5$, Oy ; б) $y = 3$, $z = 1$, Ox .
23.25. а) $2x^2 = z$, Oz ; б) $x^2 + 4z^2 = 4$, Ox .
23.26. а) $2y^2 - 5z = 10$, Oz ; б) $y = 2$, $z = 6$, Ox .
23.27. а) $x^2 = -5y$, Oy ; б) $2x^2 + 3z = 6$, Oz .
23.28. а) $x^2 - 9y^2 = 9$, Ox ; б) $3y^2 = z$, Oz .
23.29. а) $x^2 + 2z = 4$, Oz ; б) $x = 3$, $z = -1$, Oy .
23.30. а) $15x^2 - 3y^2 = 1$, Ox ; б) $x = 3$, $y = 4$, Oz .

2 Лінійна алгебра

Теоретичні питання

1. Матриця та її визначник. Методи обчислення визначників n -го порядку. Лінійні операції над матрицями. Множення матриць. Обернена матриця.
2. Означення та властивості лінійного простору. Базис і розмірність лінійного простору. Ізоморфізм лінійних просторів. Підпростори та лінійні оболонки. Ранг матриці, його знаходження.
3. Поняття системи лінійних рівнянь та її розв'язку, умова сумісності. Знаходження розв'язків квадратної системи лінійних рівнянь з $\det A \neq 0$. Знаходження всіх розв'язків загальної системи лінійних рівнянь.
4. Однорідні системи лінійних рівнянь. Зв'язок між розв'язками неоднорідної лінійної системи і відповідної їй однорідної системи.
5. Поняття та властивості евклідового простору. Ортонормований базис, його властивості. Ізоморфізм евклідових просторів.
6. Означення лінійного оператора. Дії над лінійними операторами, властивості. Матричний запис лінійних операторів. Відповідність між діями над лінійними операторами та над матрицями.
7. Перетворення матриці лінійного оператора при переході до нового базису. Характеристичний многочлен лінійного оператора. Власні значення та власні елементи лінійного оператора.
8. Лінійні оператори в евклідовому просторі. Спряжені та самоспряжені оператори. Основні властивості самоспряжених операторів.
9. Білінійні та квадратичні форми. Перетворення матриці білінійної форми при переході до нового базису. Зведення

квадратичної форми до канонічного вигляду. Білінійні та квадратичні форми в евклідовому просторі.

10. Застосування теорії квадратичних форм до дослідження алгебраїчних рівнянь другого степеня. Зведення загально-го рівняння лінії другого порядку до канонічного вигляду.

Розрахункові завдання

Задача 1. Обчислити визначник.

$$1.1. \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 6 \\ 0 & -5 & 7 & -1 \\ 3 & 4 & 6 & 9 \\ 4 & 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}.$$

$$1.2. \begin{vmatrix} -5 & 6 & 5 & 9 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 7 & 4 \\ 8 & 2 & 6 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$1.3. \begin{vmatrix} 3 & 9 & -2 & 2 \\ -3 & 8 & 11 & 5 \\ 5 & 6 & -7 & 9 \\ -4 & 5 & -2 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$1.4. \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 & -6 \\ -3 & 5 & 3 & -1 \\ 12 & 3 & 6 & -4 \\ -2 & 7 & 4 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$1.5. \begin{vmatrix} 0 & -6 & 9 & 4 \\ 4 & 13 & 3 & 2 \\ 7 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & -9 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$$

$$1.6. \begin{vmatrix} 1 & -9 & 5 & 3 \\ 3 & -8 & 0 & 8 \\ 6 & 0 & 8 & 10 \\ 4 & 15 & 6 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$1.7. \begin{vmatrix} 13 & 9 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ -8 & -6 & 3 & 0 \\ 2 & -7 & 9 & 7 \end{vmatrix}.$$

$$1.8. \begin{vmatrix} 2 & 4 & -7 & 9 \\ 8 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & 14 & 8 \\ 7 & 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$1.9. \begin{vmatrix} 6 & 9 & -7 & -3 \\ 8 & 4 & 16 & -6 \\ 3 & 8 & -9 & 8 \\ 0 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}.$$

$$1.10. \begin{vmatrix} 6 & 9 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 6 & 8 \\ 7 & 7 & 11 & 6 \end{vmatrix}.$$

$$1.11. \begin{vmatrix} -1 & 9 & 1 & 8 \\ -6 & 6 & 5 & 3 \\ -5 & 7 & 2 & 3 \\ 19 & 9 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$1.12. \begin{vmatrix} 1 & 8 & 5 & -3 \\ 3 & 4 & 0 & -2 \\ 6 & 6 & 8 & 17 \\ 4 & 3 & 6 & -5 \end{vmatrix}.$$

$$1.13. \begin{vmatrix} 16 & 7 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 13 & 7 \\ 21 & 1 & 8 & 8 \\ 0 & 2 & 11 & 6 \end{vmatrix}.$$

$$1.14. \begin{vmatrix} 7 & 19 & 3 & 5 \\ 4 & 16 & 1 & 2 \\ 3 & 27 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}.$$

$$1.15. \begin{vmatrix} 2 & 8 & 4 & 24 \\ 9 & 4 & 9 & 17 \\ 3 & 6 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 12 \end{vmatrix}.$$

$$1.16. \begin{vmatrix} 0 & 19 & 5 & 21 \\ 7 & 15 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 9 & 6 \\ 6 & 0 & 2 & 13 \end{vmatrix}.$$

$$1.17. \begin{vmatrix} 8 & 0 & 33 & 4 \\ 5 & 9 & 27 & 0 \\ 6 & 2 & 18 & 7 \\ 4 & 1 & 42 & 7 \end{vmatrix}.$$

$$1.18. \begin{vmatrix} 48 & 3 & 0 & 1 \\ 36 & 7 & 8 & 5 \\ 16 & 2 & 9 & 4 \\ 52 & 5 & 5 & 0 \end{vmatrix};.$$

$$1.19. \begin{vmatrix} 10 & -9 & 0 & 4 \\ -11 & -3 & -4 & 2 \\ 8 & 0 & 6 & 6 \\ -2 & 7 & 2 & 8 \end{vmatrix}.$$

$$1.20. \begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & -2 \\ 18 & 21 & -33 & 12 \\ -7 & 3 & 11 & 12 \\ -7 & 6 & -2 & 9 \end{vmatrix}.$$

$$1.21. \begin{vmatrix} -12 & -39 & 7 & 1 \\ 19 & -13 & 0 & 2 \\ 8 & 0 & -6 & 5 \\ 9 & 26 & 21 & 8 \end{vmatrix}.$$

$$1.22. \begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 & -9 \\ 8 & 2 & -13 & 2 \\ 3 & -4 & 14 & 18 \\ -7 & 6 & -2 & 10 \end{vmatrix}.$$

$$1.23. \begin{vmatrix} -13 & 8 & -7 & -4 \\ 9 & -12 & -4 & 1 \\ 6 & 24 & -9 & 5 \\ -16 & -20 & -2 & -3 \end{vmatrix}.$$

$$1.24. \begin{vmatrix} -24 & 7 & 0 & 3 \\ 84 & 2 & 16 & -2 \\ 0 & 9 & -12 & 8 \\ -12 & 4 & 8 & 11 \end{vmatrix}.$$

$$1.25. \begin{vmatrix} 17 & 19 & -1 & -8 \\ 0 & 13 & 7 & 3 \\ -51 & -7 & 0 & 9 \\ 34 & 8 & -4 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$1.26. \begin{vmatrix} 0 & 10 & 2 & -24 \\ -9 & 25 & -17 & 12 \\ -3 & -40 & 1 & 18 \\ 5 & 15 & -4 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$1.27. \begin{vmatrix} 18 & -9 & 45 & -54 \\ -11 & 0 & -4 & -5 \\ 8 & 1 & 16 & -6 \\ -2 & 7 & -2 & 7 \end{vmatrix}.$$

$$1.28. \begin{vmatrix} 4 & 19 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & -3 & 7 \\ 14 & -35 & 0 & 49 \\ -4 & 5 & 4 & 12 \end{vmatrix}.$$

$$1.29. \begin{vmatrix} -4 & 11 & -8 & 5 \\ 1 & 7 & 4 & 9 \\ -14 & 2 & 9 & -6 \\ 19 & -57 & 38 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$1.30. \begin{vmatrix} 21 & 6 & 9 & 16 \\ -7 & -5 & 4 & -12 \\ -28 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 28 \end{vmatrix}.$$

Задача 2. Знайти всі значення x , при яких задана матриця є виродженою.

$$2.1. \begin{pmatrix} x & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & -8 \\ 2 & x & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$2.2. \begin{pmatrix} 6 & -x & 3 & -3 \\ -4 & 4 & -2 & 2 \\ x & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$2.3. \begin{pmatrix} 3 & -1 & x & 2 \\ 7 & x & 3 & 0 \\ 6 & -2 & 3 & 4 \\ -8 & 0 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$2.4. \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 & -x \\ -3 & -1 & x & 2 \\ 0 & 7 & -1 & 9 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$2.5. \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 & -2 \\ x & 1 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 4 & -6 \\ 0 & -x & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$2.6. \begin{pmatrix} 0 & 2 & -7 & 1 \\ -4 & 1 & -x & -3 \\ x & -2 & -1 & 4 \\ 8 & -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$2.7. \begin{pmatrix} -7 & 3 & 0 & 4 \\ 5 & x & -4 & -1 \\ 10 & 6 & -8 & -2 \\ x & 6 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$2.8. \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 & -9 \\ 1 & -2 & 3 & -x \\ 6 & 0 & x & 1 \\ -3 & 6 & -9 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$2.9. \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & -8 \\ -8 & x & 2 & -8 \\ x & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$2.10. \begin{pmatrix} 6 & -3 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & -5 & 2 \\ x & 4 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & x & 3 \end{pmatrix}.$$

$$2.11. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 & -4 \\ -3 & -4 & -9 & 3 \\ 2 & 7 & x & 1 \\ -1 & -3 & -3 & -x \end{pmatrix}.$$

$$2.12. \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 & 6 \\ -4 & 2 & -2 & -4 \\ 8 & -1 & -1 & x \\ -x & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$2.13. \begin{pmatrix} -x & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 5 & -3 & 2 \\ 0 & -7 & 2 & x \\ 6 & -3 & 6 & -9 \end{pmatrix}.$$

$$2.14. \begin{pmatrix} 0 & x & -2 & 7 \\ -4 & 1 & -2 & -3 \\ 8 & 4 & -8 & 9 \\ -x & -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$2.15. \begin{pmatrix} -9 & 4 & -x & 2 \\ 7 & -3 & 9 & -3 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & x & -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$2.16. \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & x \\ -8 & 4 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & -x & 5 \\ -5 & -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$2.17. \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 & -7 \\ -x & 3 & -6 & -3 \\ 5 & 0 & 1 & x \\ 6 & -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$2.18. \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -6 & x & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & -1 \\ -4 & 4 & -x & -8 \end{pmatrix}.$$

$$2.19. \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & -x & 7 \\ 1 & -7 & 1 & -1 \\ 6 & -4 & 8 & x \end{pmatrix}.$$

$$2.20. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -5 \\ 2 & 4 & -7 & x \\ -1 & -x & -9 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$2.21. \begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 & -8 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ -x & 7 & -7 & 3 \\ -2 & 1 & x & 2 \end{pmatrix}.$$

$$2.22. \begin{pmatrix} 6 & 4 & -7 & -3 \\ -4 & -5 & 3 & 2 \\ 8 & x & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & -x \end{pmatrix}.$$

$$2.23. \begin{pmatrix} 3 & 9 & 0 & -1 \\ -9 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & -1 & -x & -2 \\ x & 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$2.24. \begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & -9 \\ -4 & 5 & -1 & -x \\ 1 & -x & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$2.25. \begin{pmatrix} x & 6 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -x \\ -4 & -3 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & -7 \end{pmatrix}.$$

$$2.26. \begin{pmatrix} 4 & -x & 8 & -4 \\ -x & 5 & -6 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{2.27.} \begin{pmatrix} 1 & -2 & x & 1 \\ 0 & 4 & -4 & -8 \\ 4 & 5 & 2 & -9 \\ -x & -3 & 3 & 6 \end{pmatrix} & \text{2.28.} \begin{pmatrix} 5 & 7 & 0 & x \\ -5 & -4 & -2 & 3 \\ 15 & 1 & -1 & -9 \\ 10 & -3 & x & -6 \end{pmatrix} \\
 \text{2.29.} \begin{pmatrix} 4 & -9 & 0 & -3 \\ -8 & -x & -7 & 6 \\ 0 & 7 & 5 & x \\ -4 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} & \text{2.30.} \begin{pmatrix} 7 & 0 & -7 & 7 \\ 0 & 4 & 1 & x \\ -1 & -2 & 3 & 4 \\ -5 & x & 5 & -7 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Задача 3. Знайти AB та BA , якщо:

$$\text{3.1. } A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -4 & 1 & -7 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -6 & -1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{3.2. } A = \begin{pmatrix} 9 & 12 & -8 \\ 0 & -7 & 6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 14 \\ 1 & -5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{3.3. } A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 11 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -4 & -5 & 17 \\ 6 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{3.4. } A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 14 & -8 & -5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 16 & -4 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

$$\text{3.5. } A = \begin{pmatrix} 9 & -9 \\ 12 & 3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 0 \\ 4 & -5 & -8 \end{pmatrix}.$$

$$3.6. \quad A = \begin{pmatrix} -9 & 21 & 4 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$3.7. \quad A = \begin{pmatrix} 17 & -1 \\ 0 & 11 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 6 & -8 & 10 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$3.8. \quad A = \begin{pmatrix} 9 & 12 & -5 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -6 & -5 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$3.9. \quad A = \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 9 & 19 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -7 & 3 & -1 \\ 6 & -9 & 14 \end{pmatrix}.$$

$$3.10. \quad A = \begin{pmatrix} 12 & -5 & 6 \\ 21 & 0 & -4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -4 & 1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix};$$

$$3.11. \quad A = \begin{pmatrix} 32 & 23 \\ 13 & -8 \\ -7 & 17 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$3.12. \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 11 & -5 \\ -4 & -8 & 9 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -9 & 7 \\ -6 & -5 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$3.13. \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -4 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 2 \\ -4 & 3 & -2 \end{pmatrix};$$

$$3.14. \quad A = \begin{pmatrix} 26 & -41 & 18 \\ 43 & 35 & 12 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{3.15.} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -6 & 7 \\ -7 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 11 & -8 & 9 \\ -10 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{3.16.} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -11 & 7 & 9 \\ 1 & -8 & -4 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ -4 & 6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{3.17.} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -9 & 9 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 11 & -3 & 2 \\ 1 & -15 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{3.18.} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 19 \\ -19 & 0 & -4 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{3.19.} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 24 \\ -11 & 6 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 7 & -7 & 10 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{3.20.} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 5 \\ 27 & 0 & -9 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{3.21.} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 9 & -7 \\ -2 & 17 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 14 & -2 & 0 \\ -3 & 5 & -8 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{3.22.} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 15 & 13 & 5 \\ -9 & -6 & -1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{3.23.} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 21 & -3 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -7 \end{pmatrix}.$$

$$3.24. \quad A = \begin{pmatrix} 23 & -7 & -8 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ -5 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$3.25. \quad A = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 8 & 3 \\ -9 & 9 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -6 & 10 & -8 \\ 8 & -7 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$3.26. \quad A = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -3 \\ -7 & 6 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 11 \\ -4 & -7 \\ 11 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$3.27. \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 26 & 31 & -4 \\ 18 & 28 & 14 \end{pmatrix}.$$

$$3.28. \quad A = \begin{pmatrix} -5 & 8 & -9 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 7 & -10 \\ -9 & 4 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$3.29. \quad A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 11 & -8 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -7 & 4 & 1 \\ 3 & -5 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$3.30. \quad A = \begin{pmatrix} 17 & -4 & -3 \\ 5 & 13 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -1 & -7 \\ -10 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 4. Перевірити, чи для заданої матриці існує обернена. У випадку існування знайти її.

$$4.1. \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$4.2. \quad \begin{pmatrix} 8 & -4 & 1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{4.3.} \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \\ -4 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{4.4.} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ -3 & 7 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{4.5.} \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 0 & 6 & 7 \\ 9 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{4.6.} \begin{pmatrix} 8 & 5 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{4.7.} \begin{pmatrix} 7 & -1 & 5 \\ -3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{4.8.} \begin{pmatrix} -6 & 4 & 2 \\ 9 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{4.9.} \begin{pmatrix} -1 & -4 & -8 \\ -3 & -6 & 1 \\ -5 & -7 & -9 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{4.10.} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ -6 & 3 & -4 \\ 9 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{4.11.} \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 1 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{4.12.} \begin{pmatrix} -4 & 1 & 8 \\ 5 & -5 & 3 \\ 0 & 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{4.13.} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{4.14.} \begin{pmatrix} -8 & -4 & 1 \\ -6 & -7 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{4.15.} \begin{pmatrix} 9 & 7 & -5 \\ -4 & -9 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{4.16.} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 6 \\ 9 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{4.17.} \begin{pmatrix} 8 & -7 & 3 \\ -4 & 1 & 9 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{4.18.} \begin{pmatrix} 7 & -4 & 5 \\ -5 & 0 & 6 \\ 8 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$4.19. \begin{pmatrix} 6 & -4 & -1 \\ 9 & 0 & 7 \\ 2 & -5 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$4.20. \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 8 & 1 & 5 \\ 9 & -3 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$4.21. \begin{pmatrix} -7 & 8 & -4 \\ 4 & 7 & -1 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$4.22. \begin{pmatrix} -8 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & -1 \\ 6 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$4.23. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 9 & 6 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$4.24. \begin{pmatrix} -5 & 7 & 3 \\ -6 & -3 & 1 \\ -3 & -8 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$4.25. \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 6 & 4 & 1 \\ 9 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$4.26. \begin{pmatrix} -8 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 7 \\ -7 & -1 & -9 \end{pmatrix}.$$

$$4.27. \begin{pmatrix} -4 & 5 & -8 \\ -1 & 2 & 7 \\ -7 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$4.28. \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -6 & -8 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$4.29. \begin{pmatrix} 7 & -4 & 9 \\ -4 & 3 & -1 \\ 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$4.30. \begin{pmatrix} 9 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Задача 5. Чи утворює лінійний простір задана множи-на, в якій визначені сума будь-яких двох елементів $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$ і добуток довільного елемента $\mathbf{a}$ на довільне дійсне число α ?

5.1. Множина всіх вироджених матриць $\mathbf{a} = \|a_{ij}\|_n^n$,

$\mathbf{b} = \|b_{ij}\|_n^n$, сума $\|a_{ij} + b_{ij}\|_n^n$, добуток $\|\alpha \cdot a_{ij}\|_n^n$.

5.2. Множина всіх невинроджених матриць $\mathbf{a} = \|a_{ij}\|_n^n$, $\mathbf{b} = \|b_{ij}\|_n^n$, сума $\|a_{ij} + b_{ij}\|_n^n$, добуток $\|\alpha \cdot a_{ij}\|_n^n$.

5.3. Множина всіх матриць $\mathbf{a} = \|a_{ij}\|_n^n$, $\mathbf{b} = \|b_{ij}\|_n^n$, сума $\|a_{ij} + b_{ij}\|_n^n$, добуток $\|\alpha \cdot a_{ij}\|_n^n$.

5.4. Множина всіх матриць $\mathbf{a} = \|a_{ij}\|_m^n$, $\mathbf{b} = \|b_{ij}\|_m^n$, сума $\|a_{ij} + b_{ij}\|_m^n$, добуток $\|\alpha \cdot a_{ij}\|_m^n$.

5.5. Множина всіх винроджених матриць $\mathbf{a} = \|a_{ij}\|_n^n$, $\mathbf{b} = \|b_{ij}\|_n^n$, сума $\|a_{ij} \cdot b_{ij}\|_n^n$, добуток $\|\alpha \cdot a_{ij}\|_n^n$.

5.6. Множина всіх невинроджених матриць $\mathbf{a} = \|a_{ij}\|_n^n$, $\mathbf{b} = \|b_{ij}\|_n^n$, сума $\|a_{ij} \cdot b_{ij}\|_n^n$, добуток $\|\alpha \cdot a_{ij}\|_n^n$.

5.7. Множина всіх матриць $\mathbf{a} = \|a_{ij}\|_n^n$, $\mathbf{b} = \|b_{ij}\|_n^n$, сума $\|a_{ij} \cdot b_{ij}\|_n^n$, добуток $\|\alpha \cdot a_{ij}\|_n^n$.

5.8. Множина всіх матриць $\mathbf{a} = \|a_{ij}\|_m^n$, $\mathbf{b} = \|b_{ij}\|_m^n$, сума $\|a_{ij} \cdot b_{ij}\|_m^n$, добуток $\|\alpha \cdot a_{ij}\|_m^n$.

5.9. Множина всіх винроджених матриць $\mathbf{a} = \|a_{ij}\|_n^n$, $\mathbf{b} = \|b_{ij}\|_n^n$, сума $\left\| \sum_{s=1}^n a_{is} \cdot b_{sj} \right\|_n^n$, добуток $\|\alpha \cdot a_{ij}\|_n^n$.

5.10. Множина всіх невивіржених матриць $\mathbf{a} = \|a_{ij}\|_n^n$,
 $\mathbf{b} = \|b_{ij}\|_n^n$, сума $\left\| \sum_{s=1}^n a_{is} \cdot b_{sj} \right\|_n^n$, добуток $\|\alpha \cdot a_{ij}\|_n^n$.

5.11. Множина всіх матриць $\mathbf{a} = \|a_{ij}\|_n^n$, $\mathbf{b} = \|b_{ij}\|_n^n$, сума
 $\left\| \sum_{s=1}^n a_{is} \cdot b_{sj} \right\|_n^n$, добуток $\|\alpha \cdot a_{ij}\|_n^n$.

5.12. Множина всіх многочленів п'ятого степеня від змінної x : $\mathbf{a} = \sum_{k=0}^5 a_k x^k$, $\mathbf{b} = \sum_{k=0}^5 b_k x^k$, $a_5 \neq 0, b_5 \neq 0$; сума
 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \sum_{k=0}^5 (a_k + b_k) x^k$, добуток $\alpha \cdot \mathbf{a} = \sum_{k=0}^5 \alpha \cdot a_k x^k$.

5.13. Множина всіх многочленів не вище п'ятого степеня від змінної x : $\mathbf{a} = \sum_{k=0}^5 a_k x^k$, $\mathbf{b} = \sum_{k=0}^5 b_k x^k$; сума
 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \sum_{k=0}^5 (a_k + b_k) x^k$, добуток $\alpha \cdot \mathbf{a} = \sum_{k=0}^5 \alpha \cdot a_k x^k$.

5.14. Множина всіх періодичних функцій $\mathbf{a} = f(x)$,
 $\mathbf{b} = g(x)$ з однаковим періодом, визначених на $(-\infty; +\infty)$;
сума $f(x) + g(x)$, добуток $\alpha \cdot f(x)$.

5.15. Множина всіх періодичних функцій $\mathbf{a} = f(x)$,
 $\mathbf{b} = g(x)$ (не обов'язково з однаковим періодом), визначених на $(-\infty; +\infty)$; сума $f(x) + g(x)$, добуток $\alpha \cdot f(x)$.

5.16. Множина всіх неперіодичних функцій $\mathbf{a} = f(x)$,
 $\mathbf{b} = g(x)$, визначених на $(-\infty; +\infty)$; сума $f(x) + g(x)$, добуток $\alpha \cdot f(x)$.

5.17. Множина всіх парних функцій $a = f(x)$, $b = g(x)$, визначених на $(-\infty; +\infty)$; сума $f(x) + g(x)$, добуток $\alpha \cdot f(x)$.

5.18. Множина всіх непарних функцій $a = f(x)$, $b = g(x)$, визначених на $(-\infty; +\infty)$; сума $f(x) + g(x)$, добуток $\alpha \cdot f(x)$.

5.19. Множина всіх функцій $a = f(x)$, $b = g(x)$, визначених на $(-\infty; +\infty)$, які не є ні парними, ні непарними; сума $f(x) + g(x)$, добуток $\alpha \cdot f(x)$.

5.20. Множина всіх збіжних послідовностей $\{u_n\}$, $\{v_n\}$; сума $\{u_n + v_n\}$, добуток $\{\alpha \cdot u_n\}$.

5.21. Множина всіх розбіжних послідовностей $\{u_n\}$, $\{v_n\}$; сума $\{u_n + v_n\}$, добуток $\{\alpha \cdot u_n\}$.

5.22. Множина всіх векторів тривимірного простору, які лежать на одній осі; сума $\vec{a} + \vec{b}$, добуток $\alpha \cdot \vec{a}$.

5.23. Множина всіх векторів тривимірного простору, які не лежать на одній осі; сума $\vec{a} + \vec{b}$, добуток $\alpha \cdot \vec{a}$.

5.24. Множина всіх векторів тривимірного простору, в кожного з яких друга координата дорівнює нулю; сума $\vec{a} + \vec{b}$, добуток $\alpha \cdot \vec{a}$.

5.25. Множина всіх векторів тривимірного простору, в кожного з яких хоча б одна з координат дорівнює нулю; сума $\vec{a} + \vec{b}$, добуток $\alpha \cdot \vec{a}$.

5.26. Множина всіх векторів тривимірного простору, в кожного з яких рівно одна координата дорівнює нулю; сума $\vec{a} + \vec{b}$, добуток $\alpha \cdot \vec{a}$.

5.27. Множина всіх векторів тривимірного простору; сума - векторний $\vec{a} \times \vec{b}$, добуток $\alpha \cdot \vec{a}$.

5.28. Множина всіх цілих чисел; сума $a + b$, добуток $[\alpha \cdot a]$, де $[\alpha \cdot a]$ - ціла частина числа $\alpha \cdot a$.

5.29. Множина всіх дійсних чисел; сума $a \cdot b$, добуток - $\alpha \cdot a$.

5.30. Множина всіх від'ємних дійсних чисел; сума $-a \cdot b$, добуток - $-(-a)^\alpha$.

Задача 6. Перевірити, чи система елементів є лінійно залежною.

6.1. $\sin x, \sin 2x, \sin 3x$ на інтервалі $(0; \pi)$.

6.2. $2 + x, 1 - x, x^2 - 1$ на відрізку $[-3; 2]$.

6.3. $a = (3; 1; -4)$, $b = (-2; 0; 6)$, $c = (5; -1; 6)$.

6.4. $\cos x, \sin x, \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ на інтервалі $(-\pi; 2\pi)$.

6.5. x, e^x, x^2 на відрізку $[-1; 1]$.

6.6. $a = (-1; 0; 3; 2)$, $b = (3; 0; -9; -6)$, $c = (5; -1; 6; 4)$.

6.7. $\sin x, \cos 2x, \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$.

6.8. $1 + 3x, 2 - x, 4 - 5x$ на інтервалі $(-\infty; +\infty)$.

6.9. $a = (-4; 2; -1)$, $b = (0; 5; -6)$, $c = (1; 1; -3)$.

6.10. 4 , $\cos 2x$, $\sin^2 x$, на інтервалі $(0; 4\pi)$.

6.11. $x + 2$, $x - 3$, $\sqrt{6 + x - x^2}$ на відрізку $[-2; 3]$.

6.12. $a = (0; 1; 4; -2)$, $b = (0; 0; -2; 1)$, $c = (4; 0; 6; 1)$.

6.13. $\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, $\cos x$ на проміжку $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

6.14. $x^2 - 2x$, $2x^2 - x$, $4x^2 + x$ на інтервалі $(-\infty; +\infty)$.

6.15. $a = (0; -3; 5)$, $b = (6; 1; -2)$, $c = (12; 7; -12)$.

6.16. -3 , $\cos 4x$, $\cos^2 2x$, на інтервалі $(\pi; 7\pi)$.

6.17. $2x - 1$, $x - 5$, $\sqrt{11x - 5 - 2x^2}$ на відрізку $[-0,5; 5]$.

6.18. $a = (3; -1; 0; -5)$, $b = (-1; 1; 0; 2)$, $c = (4; 0; 6; 1)$.

6.19. $\operatorname{tg} x$, $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, $\cos x$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$.

6.20. e^x , $e^x - 1$, x на інтервалі $(-\infty; +\infty)$.

6.21. $a = (5; -1; 1)$, $b = (-3; 1; -4)$, $c = (6; 2; 8)$.

6.22. $-x$, $\cos x$, $\cos^2 x$, на інтервалі $(-\pi; \pi)$.

6.23. $\sqrt{2x + 3}$, $x + 1$, $3x^2 + 2x - 1$ на відрізку $[-1,5; 0]$.

6.24. $a = (2; 3; -2; 5)$, $b = (1; -5; 1; -2)$, $c = (4; -7; 0; 1)$.

6.25. $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$, $\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - x$, $3x$ на проміжку

$$\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{2\pi}{3}\right).$$

6.26. $x - 10$, $\lg x - 1$, $\lg x$ на інтервалі $(0; +\infty)$.

6.27. $\mathbf{a} = (3; 2; -7)$, $\mathbf{b} = (-2; -4; 3)$, $\mathbf{c} = (-5; -12; 5)$.

6.28. $2 \sin^2 3x$, $\cos 6x$, $\cos^2 3x$, на інтервалі $(-\infty; \pi)$.

6.29. $\sqrt{4x+5}$, $\sqrt{3-x}$, $4x^2 - 7x - 15$ на відрізку $[-1,25; 3]$.

6.30. $\mathbf{a} = (-2; 0; 1; 3)$, $\mathbf{b} = (5; 0; -1; 4)$, $\mathbf{c} = (1; 0; -3; 2)$.

Задача 7. Знайти ранг матриці.

7.1.
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 5 & -2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -4 & 7 & -3 & -9 \\ -3 & 2 & -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

7.2.
$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & -2 & 6 \\ 9 & -5 & -4 & -7 & 8 \\ 3 & 8 & 4 & 1 & 10 \\ -1 & 7 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

7.3.
$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & -1 & 9 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

7.4.
$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & 0 & 8 & 9 \\ -1 & -3 & -1 & -5 & -8 \\ -5 & 5 & 1 & -11 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$7.5. \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & -3 & 5 & -4 \\ 6 & -2 & 0 & 3 & -5 \\ -8 & 5 & 3 & -8 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$7.6. \begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 & 1 & -3 \\ 6 & 1 & -4 & -7 & 7 \\ 1 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 6 & -5 & 6 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$7.7. \begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$7.8. \begin{pmatrix} -3 & 4 & 5 & 8 & -9 \\ 5 & -7 & -3 & -4 & 7 \\ 2 & -3 & 2 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 7 & 12 & -11 \end{pmatrix}.$$

$$7.9. \begin{pmatrix} 7 & -6 & 4 & 9 & 1 \\ 3 & -3 & 5 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & -6 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -11 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$7.10. \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & -4 & 7 \\ 5 & 2 & -6 & -4 & 3 \\ 7 & 5 & -7 & -8 & 10 \end{pmatrix}.$$

$$7.11. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & -3 & -2 \\ -6 & -7 & -1 & 11 & 3 \\ -5 & -3 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$7.12. \begin{pmatrix} 8 & -7 & 2 & 4 & 5 \\ 9 & -5 & -3 & 1 & 3 \\ 7 & -9 & -7 & 7 & 7 \\ 1 & 2 & -5 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$7.13. \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 & 3 & -8 \\ -4 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & 7 & 6 & 5 & -8 \\ 9 & -2 & -6 & -2 & -8 \end{pmatrix}.$$

$$7.14. \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ 4 & -5 & 2 & 5 & -1 \\ 1 & -6 & 0 & 8 & -5 \\ 7 & -4 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$7.15. \begin{pmatrix} 7 & 1 & -5 & 3 & 2 \\ 8 & 4 & 2 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & -7 & -1 & 3 \\ -6 & 2 & 12 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$7.16. \begin{pmatrix} -6 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & -3 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & -5 & 7 & 0 \\ -9 & 0 & 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$7.17. \begin{pmatrix} -3 & 6 & 2 & 5 & 7 \\ 4 & -4 & 1 & 3 & -6 \\ 1 & 2 & 3 & 8 & 1 \\ -8 & 20 & 9 & 23 & 22 \end{pmatrix}.$$

$$7.18. \begin{pmatrix} 5 & 1 & -7 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 4 & -3 & 3 \\ 3 & 4 & -3 & 1 & 5 \\ 1 & 7 & 1 & -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$7.19. \begin{pmatrix} -9 & 4 & 1 & 3 & -3 \\ 7 & -2 & 2 & -3 & 5 \\ -2 & -2 & 3 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 5 & -3 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$7.20. \begin{pmatrix} -7 & 6 & 8 & 0 & 1 \\ 4 & -5 & 3 & 2 & 4 \\ -10 & 7 & 19 & 2 & 6 \\ -13 & 12 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$7.21. \begin{pmatrix} 5 & -7 & 2 & 4 & 1 \\ -3 & 8 & 4 & 9 & 7 \\ -13 & 22 & 0 & 1 & 5 \\ -11 & 1 & 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$7.22. \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 5 & -4 & 3 & 5 & -2 \\ -5 & 8 & -5 & 1 & 4 \\ 7 & 0 & 2 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$7.23. \begin{pmatrix} 6 & -5 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 7 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & 4 & 8 \\ 3 & -3 & -8 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$7.24. \begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ -3 & -3 & 3 & -3 & 5 \\ -6 & -4 & 1 & -7 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$7.25. \begin{pmatrix} 12 & 9 & 7 & 8 & -6 \\ 5 & 4 & 1 & -5 & 3 \\ 2 & 1 & 6 & 13 & -9 \\ 1 & 2 & 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$7.26. \begin{pmatrix} 4 & -5 & 9 & 7 & 6 \\ -1 & 3 & -6 & -5 & -4 \\ 3 & -2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$7.27. \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 & -1 & -6 \\ -1 & 9 & 6 & -5 & -4 \\ 3 & 7 & 5 & -4 & 2 \\ 11 & 3 & 3 & -2 & 14 \end{pmatrix}.$$

$$7.28. \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 9 & -2 & 9 \\ -7 & 3 & 3 & -4 & -5 \\ -2 & 1 & 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$7.29. \begin{pmatrix} 0 & 7 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 2 & 3 & -4 \\ 5 & -1 & 10 & 15 & -14 \\ 3 & -3 & 4 & 6 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$7.30. \begin{pmatrix} 7 & -6 & 13 & 2 & 29 \\ 3 & -4 & 5 & 0 & 17 \\ 2 & -1 & 4 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Задача 8. Довести сумісність даної системи лінійних алгебраїчних рівнянь і розв'язати її: а) методом Гаусса; б) матричним методом; в) методом Крамера.

$$8.1. \begin{cases} 2x - y + 3z = -4, \\ -x + 4y + z = 2, \\ 5x + y - 2z = 8. \end{cases} \quad 8.2. \begin{cases} 4x - 3y - 5z = 2, \\ 3x - y + 2z = 6, \\ x - 2y - 3z = 0. \end{cases}$$

$$8.3. \begin{cases} 6x + 4y + z = -1, \\ -2x - y + 3z = 4, \\ x - 2y - 4z = -7. \end{cases} \quad 8.4. \begin{cases} x + 6y - 8z = -1, \\ -5x + 4y + 7z = 6, \\ 9x - 3y + 2z = 8. \end{cases}$$

$$8.5. \begin{cases} 3x + 5y + 3z = -3, \\ 4x + 4y + z = -7, \\ -x - 6y + 2z = 4. \end{cases} \quad 8.6. \begin{cases} -4x + y - 7z = -6, \\ x - 3y - 6z = 7, \\ 3x - 3y + 8z = 9. \end{cases}$$

$$8.7. \begin{cases} x - 7y + 3z = 5, \\ -3x + 5y - 4z = 5, \\ 2x - 2y - 3z = -8. \end{cases} \quad 8.8. \begin{cases} -x - 4y + 7z = -9, \\ -3x + 2y + 2z = -3, \\ 4x - y - 3z = 3. \end{cases}$$

$$8.9. \begin{cases} -2x - 3y + 3z = 7, \\ x - 4y - 5z = -5, \\ -3x + 2y + 7z = 9. \end{cases} \quad 8.10. \begin{cases} 5x + 3y - 5z = 1, \\ -6x - y - 4z = -6, \\ -x - 2y + 7z = 3. \end{cases}$$

$$8.11. \begin{cases} 3x - 2y + 3z = 0, \\ -x - 4y - 2z = 6, \\ -5x + y - 4z = -2. \end{cases} \quad 8.12. \begin{cases} -4x + 2y - z = 9, \\ 3x - 4y - 4z = 7, \\ x + 2y - 3z = 6. \end{cases}$$

$$8.13. \begin{cases} -x + 3y + z = 3, \\ -5x - 2y - 6z = -8, \\ 2x - 2y - 3z = 3. \end{cases} \quad 8.14. \begin{cases} x - 3y - 5z = -4, \\ -2x + 4y + 7z = 6, \\ 4x - 3y - 2z = 2. \end{cases}$$

$$8.15. \begin{cases} -3x + 2y - 8z = 1, \\ 5x + 5y + z = -6, \\ -x - 6y + 2z = 9. \end{cases} \quad 8.16. \begin{cases} -8x - y - 7z = -8, \\ x - 5y - 2z = 9, \\ 3x - 3y + 8z = 1. \end{cases}$$

$$8.17. \begin{cases} x - 9y + 3z = 8, \\ -2x + 5y + 4z = 4, \\ 5x - 3y - 2z = 6. \end{cases} \quad 8.18. \begin{cases} -x + 4y + 5z = 6, \\ 6x - 4y + 3z = 4, \\ -4x + 3y + z = -2. \end{cases}$$

$$8.19. \begin{cases} -5x - 3y + 2z = 0, \\ x - 4y + 5z = -7, \\ 7x - 2y + 4z = -8. \end{cases} \quad 8.20. \begin{cases} 6x - 5y - 5z = 3, \\ -4x - y + 4z = 5, \\ -x - 7y + 2z = -6. \end{cases}$$

$$8.21. \begin{cases} 9x - y + 3z = 6, \\ -x + 4y + 5z = -7, \\ -5x + y - 2z = -5. \end{cases} \quad 8.22. \begin{cases} -4x + 2y - 5z = -7, \\ 7x - 6y + 2z = 8, \\ x - 3y - 2z = -8. \end{cases}$$

$$8.23. \begin{cases} 6x + 4y - 9z = 9, \\ -2x - 3y + 5z = -1, \\ x - 3y - 2z = 1. \end{cases} \quad 8.24. \begin{cases} x + 6y + z = 6, \\ -3x - 4y - z = 2, \\ 2x - 3y + 5z = 6. \end{cases}$$

$$8.25. \begin{cases} 4x - 5y - 4z = -7, \\ 3x + y - 7z = 9, \\ -x - 2y + 2z = -8. \end{cases} \quad 8.26. \begin{cases} -4x + 7y - 3z = -5, \\ x - 4y + 3z = 8, \\ 6x - 9y + 5z = 9. \end{cases}$$

$$8.27. \begin{cases} x - 4y + 2z = 7, \\ -5x + 2y - 4z = -7, \\ 2x - 2y + 3z = 5. \end{cases} \quad 8.28. \begin{cases} -x - 5y + 3z = 6, \\ -2x + 2y - 3z = -3, \\ 4x - y + 3z = 0. \end{cases}$$

$$8.29. \begin{cases} -2x - 3y - 2z = -6, \\ x - 4y - 3z = 4, \\ -4x + 3y - 2z = 0. \end{cases} \quad 8.30. \begin{cases} 5x + 3y + 5z = -9, \\ 7x - 5y - 3z = -5, \\ -x - 4y - 6z = 2. \end{cases}$$

Задача 9. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь, визначивши при цьому розмірність лінійного простору – множини розв'язків даної системи і вказавши який-небудь базис цього простору.

$$9.1. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 0, \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 - 5x_5 = 0, \\ 5x_1 - x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 8x_5 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - 5x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$$

$$9.2. \begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

$$9.3. \begin{cases} -2x_2 + 3x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 - 5x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

$$9.4. \begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 + 5x_5 = 0, \\ 4x_1 - 7x_2 - x_3 + 9x_4 + x_5 = 0, \\ 5x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

$$9.5. \begin{cases} -3x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ -5x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 + 9x_2 - 5x_4 + 6x_5 = 0, \\ -8x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

$$9.6. \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 = 0, \\ -4x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 3x_4 - 7x_5 = 0, \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 2x_4 - 4x_5 = 0, \\ -3x_1 - 2x_3 + 5x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$$

$$9.7. \begin{cases} -2x_1 - x_2 + 4x_4 - 2x_5 = 0, \\ -x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - 6x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ -4x_1 - 9x_2 + 4x_3 + 11x_4 - 4x_5 = 0. \end{cases}$$

$$9.8. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 2x_4 - x_5 = 0, \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 6x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 4x_2 + 7x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$$

$$9.9. \begin{cases} -4x_2 - x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 0, \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

$$9.10. \begin{cases} 4x_1 + 7x_3 + 3x_4 + 8x_5 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 - x_5 = 0, \\ -3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 - 7x_5 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 5x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$$

$$9.11. \begin{cases} 5x_1 + x_2 - 10x_3 - 9x_4 + 16x_5 = 0, \\ 4x_1 - 7x_2 - 8x_3 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - 6x_3 - 3x_4 + 7x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$$

$$9.12. \begin{cases} -4x_1 - 7x_2 - x_3 - 2x_5 = 0, \\ 5x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

$$9.13. \begin{cases} -2x_2 + 3x_3 - 13x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 6x_5 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 0, \\ 5x_1 - 7x_3 + 2x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

$$9.14. \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 + x_5 = 0, \\ -3x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 7x_4 - 4x_5 = 0, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 11x_4 - 9x_5 = 0. \end{cases}$$

$$9.15. \begin{cases} -2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ -7x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 7x_4 + 9x_5 = 0, \\ -3x_1 + 5x_2 - 5x_4 + 7x_5 = 0. \end{cases}$$

$$9.16. \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ -5x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 4x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - 2x_4 - 2x_5 = 0, \\ -4x_1 - 3x_3 + 5x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$$

$$9.17. \begin{cases} -3x_1 - x_2 + 2x_4 - 6x_5 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + 4x_5 = 0, \\ -4x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 8x_5 = 0. \end{cases}$$

$$9.18. \begin{cases} 7x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 - 2x_5 = 0, \\ -5x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 9x_2 - 8x_3 + 6x_4 + 7x_5 = 0. \end{cases}$$

$$9.19. \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 6x_4 + 4x_5 = 0, \\ 5x_1 - 6x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ 4x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$$

$$9.20. \begin{cases} 3x_1 + 5x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0, \\ -x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 - 4x_5 = 0, \\ -4x_1 - 3x_2 - 7x_3 - 3x_4 - 10x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

$$9.21. \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 + x_5 = 0, \\ -3x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 - x_5 = 0, \\ 7x_1 - 2x_2 - 4x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_4 = 0. \end{cases}$$

$$9.22. \begin{cases} -x_1 + 4x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 0, \\ 3x_1 - 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 - 6x_5 = 0, \\ -4x_1 - 7x_2 + 6x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

$$9.23. \begin{cases} -4x_2 - 5x_3 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 + 9x_4 - 7x_5 = 0, \\ 5x_1 - 3x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

$$9.24. \begin{cases} x_1 - 4x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ -2x_1 + x_2 - 5x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 6x_4 + x_5 = 0, \\ 4x_1 - 9x_2 + 3x_3 + 10x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

$$9.25. \begin{cases} -4x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 - x_5 = 0, \\ -6x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 7x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ -5x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$$

$$9.26. \begin{cases} 6x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ -5x_1 + 4x_2 - 4x_3 - 2x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 + 6x_2 - 3x_3 - x_4 - 3x_5 = 0, \\ 7x_1 + 8x_2 - 2x_3 - x_5 = 0. \end{cases}$$

$$9.27. \begin{cases} -2x_1 - 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 - 5x_4 + x_5 = 0, \\ -4x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 7x_4 - 4x_5 = 0. \end{cases}$$

$$9.28. \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - x_3 - 8x_4 + 10x_5 = 0, \\ 2x_1 + 7x_2 - 7x_3 - 6x_4 + 8x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 7x_4 + 9x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

$$9.29. \begin{cases} -3x_2 - 2x_3 - x_4 + 7x_5 = 0, \\ -5x_1 + 9x_2 - 4x_3 - 5x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 - x_3 - x_4 + 3x_5 = 0, \\ 4x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

$$9.30. \begin{cases} 5x_1 + 4x_3 - 5x_4 + 6x_5 = 0, \\ -x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 - 5x_5 = 0, \\ -4x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 6x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 7x_4 - 4x_5 = 0. \end{cases}$$

Задача 10. Визначити при яких λ однорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь має нетривіальні розв'язки і знайти ці розв'язки.

$$10.1. \begin{cases} \lambda x - 11y + 13z = 0, \\ 4x + 7y - 6z = 0, \\ -5x + 18y - 19z = 0. \end{cases} \quad 10.2. \begin{cases} 9x - \lambda y + 11z = 0, \\ 4x + 7y - 16z = 0, \\ 13x + 12y - 5z = 0. \end{cases}$$

$$10.3. \begin{cases} 7x + 8y + \lambda z = 0, \\ -4x + 9y - 6z = 0, \\ 15x - 10y + 23z = 0. \end{cases} \quad 10.4. \begin{cases} 6x + 16y - 11z = 0, \\ \lambda x + 7y - 16z = 0, \\ 17x + 11y + 5z = 0. \end{cases}$$

$$10.5. \begin{cases} 21x - 11y + 9z = 0, \\ -9x + \lambda y + 18z = 0, \\ 12x + y + 27z = 0. \end{cases} \quad 10.6. \begin{cases} 17x - 3y + 16z = 0, \\ 4x + 17y - \lambda z = 0, \\ 13x + 20y - 25z = 0. \end{cases}$$

$$10.7. \begin{cases} 14x + 19y - 13z = 0, \\ -8x - 17y + 16z = 0, \\ -\lambda x + 21y - 10z = 0. \end{cases} \quad 10.8. \begin{cases} 29x + 6y - z = 0, \\ 7x - 15y + 7z = 0, \\ 22x + 21y - \lambda z = 0. \end{cases}$$

$$10.9. \begin{cases} 3x - 13y + 23z = 0, \\ 8x + 17y - 6z = 0, \\ -5x + \lambda y - 29z = 0. \end{cases}$$

$$10.10. \begin{cases} -9x - 11y + 14z = 0, \\ 16x + \lambda y - 13z = 0, \\ 25x + 12y - 27z = 0. \end{cases}$$

$$10.11. \begin{cases} -\lambda x - y + 3z = 0, \\ 4x + 17y - 16z = 0, \\ -5x + 19y - 25z = 0. \end{cases}$$

$$10.12. \begin{cases} 19x + \lambda y - 5z = 0, \\ -9x + 7y - 21z = 0, \\ 28x + 9y + 16z = 0. \end{cases}$$

$$10.13. \begin{cases} -23y - \lambda z = 0, \\ -4x + 9y - 6z = 0, \\ 12x - 4y + 27z = 0. \end{cases}$$

$$10.14. \begin{cases} -2x + 26y + z = 0, \\ -\lambda x + 27y - 6z = 0, \\ 17x - 25y - 13z = 0. \end{cases}$$

$$10.15. \begin{cases} 7x + 9y - 16z = 0, \\ -19x - \lambda y + 8z = 0, \\ 26x - y - 24z = 0. \end{cases}$$

$$10.16. \begin{cases} x - 13y + 26z = 0, \\ 14x - 7y + \lambda z = 0, \\ 15x - 20y + 17z = 0. \end{cases}$$

$$10.17. \begin{cases} 25x + 16y - 7z = 0, \\ -x - 17y + 16z = 0, \\ \lambda x + 15y + 2z = 0. \end{cases}$$

$$10.18. \begin{cases} -9x + 16y - 4z = 0, \\ 5x - 18y + 13z = 0, \\ 14x - 34y + \lambda z = 0. \end{cases}$$

$$10.19. \begin{cases} -3x + 20y + 18z = 0, \\ 16x - 27y + z = 0, \\ 13x - \lambda y + 19z = 0. \end{cases}$$

$$10.20. \begin{cases} 17x - 3y - 4z = 0, \\ -5x - 19y - \lambda z = 0, \\ 22x + 16y - 11z = 0. \end{cases}$$

$$10.21. \begin{cases} \lambda x - 17z = 0, \\ 14x - 9y + 13z = 0, \\ -5x + 3y - 10z = 0. \end{cases}$$

$$10.22. \begin{cases} -5x - \lambda y + 7z = 0, \\ -14x + 9y - 5z = 0, \\ 19x + 13y - 2z = 0. \end{cases} \quad 10.23. \begin{cases} 16x - 3y + \lambda z = 0, \\ -9y + 16z = 0, \\ -8x - 3y + 7z = 0. \end{cases}$$

$$10.24. \begin{cases} 4x + 5y + 21z = 0, \\ \lambda x + 2y - 7z = 0, \\ 17x - 11y = 0. \end{cases} \quad 10.25. \begin{cases} -x + 8y + 11z = 0, \\ -7x + \lambda y + 8z = 0, \\ 13x + y - 5z = 0. \end{cases}$$

$$10.26. \begin{cases} 4x - 9y + 16z = 0, \\ 17x + 3y - \lambda z = 0, \\ 13x + 12y - 26z = 0. \end{cases}$$

$$10.27. \begin{cases} x + 9y - 13z = 0, \\ -9x - 13y + 19z = 0, \\ -\lambda x - 4y + 6z = 0. \end{cases}$$

$$10.28. \begin{cases} 16x + y - 3z = 0, \\ 7x - 15y = 0, \\ 23x - 14y - \lambda z = 0. \end{cases}$$

$$10.29. \begin{cases} 17x - 23z = 0, \\ 5x + 17y + 9z = 0, \\ -22x + \lambda y - 14z = 0. \end{cases}$$

$$10.30. \begin{cases} -\lambda x + 5y - 23z = 0, \\ 9x + 7y + 6z = 0, \\ 19y - 11z = 0. \end{cases}$$

Задача 11. Лінійний оператор A заданий в деякому базисі

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \text{ матрицею } A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Знайти матрицю}$$

$\tilde{A}$ цього лінійного оператора в базисі $(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$, якщо:

$$11.1. \tilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3, \tilde{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3,$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3.$$

$$11.2. \tilde{\mathbf{e}}_1 = 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \tilde{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3.$$

$$11.3. \tilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3, \tilde{\mathbf{e}}_2 = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3,$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_3 = 3\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3.$$

$$11.4. \tilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3, \tilde{\mathbf{e}}_2 = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3,$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3.$$

$$11.5. \tilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3, \tilde{\mathbf{e}}_2 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3,$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_3 = 3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3.$$

$$11.6. \tilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3, \tilde{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3,$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3.$$

$$11.7. \tilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3, \tilde{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3,$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_3 = -\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3.$$

$$11.8. \tilde{\mathbf{e}}_1 = 4\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \tilde{\mathbf{e}}_2 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3,$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_3 = 3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3.$$

$$11.9. \tilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \tilde{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3,$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_3 = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3.$$

$$11.10. \tilde{e}_1 = e_1 + e_2 - 2e_3, \tilde{e}_2 = 2e_1 + e_2 + 5e_3, \\ \tilde{e}_3 = -e_1 + 3e_2 + e_3.$$

$$11.11. \tilde{e}_1 = -3e_1 + 2e_2 + e_3, \tilde{e}_2 = e_1 + e_2 + 3e_3, \\ \tilde{e}_3 = 4e_1 - e_2 + 5e_3.$$

$$11.12. \tilde{e}_1 = e_1 + 3e_2 + 9e_3, \tilde{e}_2 = e_1 + 4e_2 + 8e_3, \\ \tilde{e}_3 = e_1 - 3e_2 + 5e_3.$$

$$11.13. \tilde{e}_1 = 4e_1 + e_2 - e_3, \tilde{e}_2 = e_1 + 2e_2 + 5e_3, \\ \tilde{e}_3 = e_1 - e_2 + 2e_3.$$

$$11.14. \tilde{e}_1 = 2e_1 - e_2 + 5e_3, \tilde{e}_2 = e_1 + e_2, \\ \tilde{e}_3 = 3e_1 + 2e_2 + e_3.$$

$$11.15. \tilde{e}_1 = e_1 + e_2 + 3e_3, \tilde{e}_2 = -e_1 + 2e_2 - 6e_3, \\ \tilde{e}_3 = 3e_1 + 5e_2 - e_3.$$

$$11.16. \tilde{e}_1 = e_1 + e_2 - 2e_3, \tilde{e}_2 = e_1 + e_2 + e_3, \\ \tilde{e}_3 = e_1 - e_2 + e_3.$$

$$11.17. \tilde{e}_1 = -4e_1 + e_2 + e_3, \tilde{e}_2 = e_1 - 3e_2 - e_3, \\ \tilde{e}_3 = 3e_1 + 3e_2 + e_3.$$

$$11.18. \tilde{e}_1 = 2e_1 + e_2 + 3e_3, \tilde{e}_2 = e_1 - 2e_2 - 3e_3, \\ \tilde{e}_3 = -4e_1 + 3e_2 + e_3.$$

$$11.19. \tilde{e}_1 = e_1 + e_2 + 2e_3, \tilde{e}_2 = -5e_1 - 4e_2 + 3e_3, \\ \tilde{e}_3 = -e_1 + e_2 - 5e_3.$$

$$11.20. \tilde{e}_1 = 2e_1 + 3e_2 - e_3, \tilde{e}_2 = 5e_1 - 4e_2 - 2e_3, \\ \tilde{e}_3 = e_1 + e_2 + e_3.$$

$$11.21. \tilde{e}_1 = 3e_1 + e_2 + 2e_3, \tilde{e}_2 = -5e_1 + 2e_2 - 7e_3, \\ \tilde{e}_3 = 3e_1 + e_2 - e_3.$$

$$11.22. \tilde{e}_1 = e_1 + e_2 + e_3, \tilde{e}_2 = -e_1 - 4e_2 + 2e_3, \\ \tilde{e}_3 = -6e_1 + 6e_2 + 5e_3.$$

$$11.23. \tilde{e}_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3, \tilde{e}_2 = e_1 - e_2 - 2e_3, \\ \tilde{e}_3 = -e_1 + 2e_2 + e_3.$$

$$11.24. \tilde{e}_1 = e_1 + 3e_2 + 2e_3, \tilde{e}_2 = 3e_1 - 2e_2 + e_3, \\ \tilde{e}_3 = e_1 + e_2 - 4e_3.$$

$$11.25. \tilde{e}_1 = -3e_1 + e_2 - e_3, \tilde{e}_2 = e_1 - e_2 - 2e_3, \\ \tilde{e}_3 = e_1 + 3e_2 + 2e_3.$$

$$11.26. \tilde{e}_1 = 2e_1 + e_2 + e_3, \tilde{e}_2 = -e_1 + 2e_2 + 3e_3, \\ \tilde{e}_3 = -e_1 + 3e_2 + 4e_3.$$

$$11.27. \tilde{e}_1 = e_1 + 2e_2 + e_3, \tilde{e}_2 = -4e_1 + e_2 + 3e_3, \\ \tilde{e}_3 = 2e_1 - 3e_2 + e_3.$$

$$11.28. \tilde{e}_1 = e_1 + 2e_2 + 4e_3, \tilde{e}_2 = e_1 + 2e_2 - 3e_3, \\ \tilde{e}_3 = -3e_1 + 3e_2 + e_3.$$

$$11.29. \tilde{e}_1 = 3e_1 + e_2 + e_3, \tilde{e}_2 = e_1 + e_2 + 3e_3, \\ \tilde{e}_3 = e_1 - 2e_2 + 3e_3.$$

$$11.30. \tilde{e}_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3, \tilde{e}_2 = 3e_1 + e_2 + 2e_3, \\ \tilde{e}_3 = e_1 + 2e_2 - e_3.$$

Задача 12. Знайти власні значення та власні вектори лінійного оператора, заданого в деякому базисі матрицею.

$$12.1. \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$12.2. \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$12.3. \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$12.4. \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$12.5. \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$12.6. \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$12.7. \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$12.8. \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \\ -2 & -1 & -6 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$12.9. \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -4 & 5 & 0 \\ -2 & -2 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$12.10. \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$12.11. \begin{pmatrix} 11 & -2 & 2 \\ -6 & 15 & 6 \\ -2 & 2 & 19 \end{pmatrix}.$$

$$12.12. \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$12.13. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$12.14. \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$12.15. \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$12.16. \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$12.17. \begin{pmatrix} 6 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}. \quad 12.18. \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$12.19. \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}. \quad 12.20. \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$12.21. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \quad 12.22. \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -4 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$12.23. \begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 \\ -6 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \quad 12.24. \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$12.25. \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}. \quad 12.26. \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$12.27. \begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & -2 \\ 4 & 0 & -7 \end{pmatrix}. \quad 12.28. \begin{pmatrix} 11 & -4 & 0 \\ -2 & 13 & 0 \\ 2 & 1 & 15 \end{pmatrix}.$$

$$12.29. \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}. \quad 12.30. \begin{pmatrix} 9 & -2 & -2 \\ -6 & 5 & 2 \\ -6 & -2 & 13 \end{pmatrix}.$$

Задача 13. Самоспряжений лінійний оператор A заданий матрицею A в деякому ортонормованому базисі $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

Знайти: 1) α та β ; 2) власний ортонормований базис. Записати відповідну матриці A квадратичну форму в заданому базисі та її канонічний вигляд у власному базисі.

$$13.1. A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & \beta \\ -1 & 4 & \sqrt{3} \\ 0 & \alpha & 4 \end{pmatrix}. \quad 13.2. A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ \alpha & 9 & \beta \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$13.3. A = \begin{pmatrix} -4 & \alpha & 4 \\ -2 & -4 & -4 \\ \beta & -4 & 2 \end{pmatrix}. \quad 13.4. A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & \alpha \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & \beta & 1 \end{pmatrix}.$$

$$13.5. A = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} & \beta \\ \sqrt{3} & 1 & \alpha \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}. \quad 13.6. A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & -7 & \beta \\ \alpha & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$13.7. A = \begin{pmatrix} 1 & \beta & -2 \\ \frac{5\sqrt{2}}{2} & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -2 & \alpha & 5 \end{pmatrix}.$$

$$13.8. A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \\ \beta & 2 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{5\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

$$13.9. A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ \beta & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$13.10. A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2\sqrt{2} \\ -4 & 3 & \alpha \\ \beta & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}.$$

$$13.11. A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & \alpha \\ 4 & -9 & -2 \\ 1 & \beta & 5 \end{pmatrix}.$$

$$13.12. A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \sqrt{2} \\ 2 & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \beta & 2 \end{pmatrix}.$$

$$13.13. A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ \alpha & 1 & \beta \\ 0 & \frac{4\sqrt{2}}{3} & 1 \end{pmatrix}. \quad 13.14. A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ \beta & 5 & 4 \\ \alpha & 4 & 13 \end{pmatrix}.$$

$$13.15. A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -\sqrt{2} \\ -2 & 4 & 2\sqrt{2} \\ \beta & \alpha & 2 \end{pmatrix}. \quad 13.16. A = \begin{pmatrix} -3 & \beta & 4 \\ 1 & 9 & \alpha \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$13.17. A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & \alpha \\ \beta & 4 & 4 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix}. \quad 13.18. A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & \beta \\ \alpha & 2 & -4 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$13.19. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & \beta \\ \alpha & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}. \quad 13.20. A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ \alpha & -1 & 3 \\ -3 & \beta & -3 \end{pmatrix}.$$

$$13.21. A = \begin{pmatrix} 3 & \beta & -4 \\ 4 & -7 & \alpha \\ -4 & -4 & 3 \end{pmatrix}. \quad 13.22. A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & \alpha \\ \beta & 2 & 2 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$13.23. A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & -\frac{4\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \beta & 1 \end{pmatrix}.$$

$$13.24. A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \alpha & \beta \\ -2 & 5 & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad 13.25. A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ \alpha & 1 & 2 \\ \beta & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$13.26. A = \begin{pmatrix} 0 & \beta & -2 \\ -\sqrt{3} & 2 & \alpha \\ -2 & 2\sqrt{3} & -3 \end{pmatrix}.$$

$$13.27. A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2\sqrt{2} \\ 4 & 0 & \beta \\ \alpha & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

$$13.28. A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & \alpha \\ \beta & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}. \quad 13.29. A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 2 & \beta \\ 2 & -5 & -2 \\ -\frac{1}{2} & \alpha & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

$$13.30. A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{3} & 0 \\ \alpha & 2 & \beta \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 14. Звести до канонічного вигляду алгебраїчне рівняння другого порядку, вказавши його тип, і побудувати лінію, задану цим рівнянням.

$$14.1. \quad 31x^2 + 24xy + 21y^2 - 14x - 24y - 3 = 0.$$

$$14.2. \quad -2x^2 + 12xy + 7y^2 - 4x + 32y + 4 = 0.$$

$$14.3. \quad 9x^2 - 6xy + y^2 + 42x + 66y + 33 = 0.$$

$$14.4. \quad 14x^2 - 4xy + 11y^2 - 16x - 32y - 12 = 0.$$

$$14.5. \quad 5x^2 - 18xy - 17y^2 + 28x + 4y + 14 = 0.$$

$$14.6. \quad x^2 - 10xy + 25y^2 + 8x - 40y - 88 = 0.$$

$$14.7. \quad 13x^2 + 18xy + 37y^2 + 6x - 2y - 39 = 0.$$

$$14.8. \quad 5x^2 - 24xy - 5y^2 - 6x - 22y - 4 = 0.$$

$$14.9. \quad 4x^2 - 4xy + y^2 - 20x - 10y - 7 = 0.$$

$$14.10. \quad 33x^2 + 8xy + 18y^2 + 2x - 8y - 4 = 0.$$

$$14.11. \quad 49x^2 - 30xy - 23y^2 - 8x - 40y - 16 = 0.$$

$$14.12. \quad x^2 + 6xy + 9y^2 + 8x + 24y - 24 = 0.$$

$$14.13. \quad 27x^2 + 10xy + 51y^2 + 10x - 2y - 51 = 0.$$

14.14. $13x^2 + 12xy - 3y^2 - 2x + 6y - 18 = 0$.

14.15. $x^2 + 10xy + 25y^2 - 20x + 4y + 24 = 0$.

14.16. $17x^2 - 12xy + 22y^2 - 12x - 8y + 2 = 0$.

14.17. $14x^2 - 36xy - y^2 + 4x - 20y - 2 = 0$.

14.18. $x^2 + 4xy + 4y^2 + 10x + 20y - 20 = 0$.

14.19. $13x^2 + 8xy + 7y^2 + 6x + 18y + 3 = 0$.

14.20. $14x^2 + 24xy - 31y^2 + 24x + 6y - 8 = 0$.

14.21. $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 24x + 10y + 10 = 0$.

14.22. $28x^2 + 12xy + 12y^2 + 14x + 18y - 23 = 0$.

14.23. $-20xy + 15y^2 - 12x - 6y - 9 = 0$.

14.24. $16x^2 - 8xy + y^2 + 40x - 10y + 8 = 0$.

14.25. $65x^2 - 24xy + 20y^2 + 6x + 24y - 11 = 0$.

14.26. $23x^2 + 30xy - 49y^2 + 30x + 6y + 61 = 0$.

14.27. $x^2 + 8xy + 16y^2 - 22x - 20y + 33 = 0$.

14.28. $41x^2 - 24xy + 34y^2 - 12x - 16y - 46 = 0$.

14.29. $-14x^2 + 24xy + 31y^2 + 16x - 4y - 4 = 0$.

14.30. $4x^2 - 12xy + 9y^2 + 20x - 30y + 20 = 0$.

3 Вступ до математичного аналізу

Теоретичні питання

1. Поняття функції. Область визначення і область значень функції. Способи задання функції. Функції парні, непарні, періодичні, обмежені, монотонні. Обернена функція. Складена функція. Основні елементарні функції та їх графіки. Класифікація елементарних функцій. Елементарні перетворення графіків.
2. Числова послідовність. Границя послідовності. Єдиність границі. Послідовності обмежені та необмежені. Обмеженість збіжної послідовності. Теорема Больцано-Вейерштрасса.
3. Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності. Властивості нескінченно малих послідовностей. Правила обчислення границь. Граничний перехід в нерівностях.
4. Монотонні послідовності. Існування границі монотонної обмеженої послідовності. Число e .
5. Два означення границі функції в точці, їх еквівалентність. Односторонні границі. Границя функції на нескінченності. Основні теореми про границі функцій.
6. Перша важлива границя.
7. Друга важлива границя.
8. Нескінченно малі та нескінченно великі функції. Порівняння нескінченно малих. Застосування еквівалентних нескінченно малих при обчисленні границь.
9. Неперервність функцій. Дії над неперервними функціями. Неперервність елементарних функцій.
10. Точки розриву функцій, їх класифікація. Властивості функцій, неперервних на відрізку.

Розрахункові завдання

Задача 1. Знайти область визначення функції.

$$1.1. \quad y = \frac{\lg(x+3)}{x^2 - x - 2}.$$

$$1.2. \quad y = \sqrt{x^2 - |x| - 2}.$$

$$1.3. \quad y = \sqrt{x^4 - 16} + \frac{1}{|x| - 2}.$$

$$1.4. \quad y = \frac{\sqrt{x^2 - 10x + 9}}{\log_2(x+1)}.$$

- 1.5. $y = \lg x - \lg(1 - x^2)$. 1.6. $y = \frac{\sqrt{x}}{\lg(1-x)}$.
- 1.7. $y = \frac{\lg(3x)}{(x-3)\lg(x-1)}$. 1.8. $y = \log_{x^2-1} \frac{3}{x+2}$.
- 1.9. $y = \lg(1 - \lg(x^2 - 5x + 16))$. 1.10. $y = \frac{\sqrt{2-x^2}}{\arcsin x}$.
- 1.11. $y = \lg(x-1) - \arcsin \frac{x}{3}$. 1.12. $y = \arccos(2 - \sqrt{x})$.
- 1.13. $y = \sqrt[3]{\frac{x+2}{\lg \cos x}}$. 1.14. $y = \arcsin(2 - x^2)$.
- 1.15. $y = \arcsin(\lg x)$. 1.16. $y = \arccos(2^x)$.
- 1.17. $y = \sqrt{\lg \frac{3x - x^2}{x-1}}$. 1.18. $y = \arccos(\log_2 x)$.
- 1.19. $y = \log_{\sin x}(x+3)$. 1.20. $y = \arcsin \frac{x-1}{x}$.
- 1.21. $y = \frac{\sqrt{x^2 - \pi^2}}{\cos \pi x}$. 1.22. $y = \lg \cos(x+1)$.
- 1.23. $y = \log_{x-1}(x^2 - 4)$. 1.24. $y = \arcsin(3x-2)$.
- 1.25. $y = \sqrt{\log_{0,2}(5-x)}$. 1.26. $y = \arccos(\lg(3-2x))$.
- 1.27. $y = \frac{\log_2 x}{\log_3 x - 1}$. 1.28. $y = \log_x(\arcsin x)$.
- 1.29. $y = \sqrt{4^x - 3 \cdot 2^x + 2}$. 1.30. $y = \sqrt{3 - 5x - 2x^2}$.

Задача 2. Знайти границі послідовностей.

- 2.1. а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(15-n)^2 + (15+n)^2}{(15-n)^2 - (15+n)^2}$;
 б) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n(n+2)} - \sqrt{n^2 - 2n + 8})$.

$$2.2. \text{ a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2+8n+n^2)^2 - (2-3n-n^2)^2}{4n^3 + n + 1};$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{(n^2+2)n} - (n+2)\sqrt{n}).$$

$$2.3. \text{ a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(14+n)^2 - (14-n)^2}{(n+1)^2 + 1}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^4+8} - \sqrt{n^4-2}).$$

$$2.4. \text{ a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^3 - (n-2)^3}{(n+1)^2 + (n-1)^2}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3n^2} - n).$$

$$2.5. \text{ a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5n+1)(3n-1)n^2}{(n^2+6)(3n^2+5)};$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+2n+4} - \sqrt{n^2-2n+4}).$$

$$2.6. \text{ a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^2 + 5n^2 - 6(n-2)^2}{n^2 - (n-4)^2};$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+3n-4} - \sqrt{n^2-8}).$$

$$2.7. \text{ a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2n+3n^2}{1-3n+3n^2-n^3}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2-13n+21} - n).$$

$$2.8. \text{ a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4+10-(n-1)^4}{2n^3+(n+1)^3}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{3n+10} - \sqrt{3n+20}).$$

$$2.9. \text{ a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^4+16}{3n^3+2n^2+10}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2+14} - n).$$

$$2.10. \text{ a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^2 + (2n-1)^2}{(n+1)^3 - (n-1)^3}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} 5n(\sqrt[3]{5+8n^3} - 2n).$$

$$2.11. \text{ a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^6 - (n-1)^6}{(n+1)^4 - (n-1)^4}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} 3n(\sqrt{n^3+10} - \sqrt{n^3}).$$

$$2.12. \text{ a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{50+100n+40n^2}{(1-n)^3};$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{3n(n-5)} - \sqrt{3n^2-3}).$$

- 2.13. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-4n^4 - 2n^2 + 8}{(n-1)^2(n+3)}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n(n+15)} - n)$.
- 2.14. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{14n^2 + 15n - 91}{n^3 - (n-1)^3}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{1+2+3+\dots+n} - \frac{2}{3} \right)$.
- 2.15. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^3 - (2n-1)^3}{(2n+1)^2 + (2n-1)^2}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} (3n - \sqrt{9n^2 + 100})$.
- 2.16. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+1)(4n-1)(3n+2)}{(3n^2+1)(5n+2)}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n(n-10)})$.
- 2.17. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^3 + 6n^2 - 13}{12n^2 + 13n - 54}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[3]{n^3 + 10} - \sqrt[3]{n^3 - 10})$.
- 2.18. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{21n^4 + 100n^2 - 10}{(4 - 7n^2)^2}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n + \sqrt[3]{7 - n^3})$.
- 2.19. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-10 - 12n - 49n^2}{(2+7n)(2-7n)}$;
 б) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n + 4} - \sqrt{n^2 - 2n + 4})$.
- 2.20. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^4}{(n-1)^2(2n-1)^2}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 + 5n + 1})$.
- 2.21. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^4 + 21n + 10}{7n^3 - 10}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 12} - n)$.
- 2.22. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^4 + 2n^2 + 16}{(n+1)^3(n-1)}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 + 15})$.
- 2.23. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 + (n-1)^3 + n^3}{(5n^2 + 13n + 12)n}$;
 б) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 + 15n - 13})$.
- 2.24. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3}{n + (n+1)^2 + (n+2)^3}$;
 б) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n(n+1)} - \sqrt{(n-4)(n-8)})$.

$$2.25. \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{5n^2 + (2n+3)^2}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^3 + 3n + 12} - n\sqrt{n}).$$

$$2.26. \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{15n^3 + (n+1)^3}{(n+1)^4 - n^4}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+2} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n-4}).$$

$$2.27. \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n+1)^3 - (4n-1)^3}{(n+1)^2 + (n-1)^2}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{9n^2 + 1} - 3n).$$

$$2.28. \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n + 1}{(3n+1)^2};$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{(n^2 + 2)(n^2 - 8)} - \sqrt{n^4 - 19}).$$

$$2.29. \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{15n^3 + 10}{(10n^2 + n + 7)(n-2)};$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n(n+4)} - \sqrt{n^2 - 4n + 3}).$$

$$2.30. \text{ а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{25n^2 + 15n + 31}{(2n-1)(1-3n)};$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^3 + 8} (\sqrt{n^3 + 12} - \sqrt{n^3 - 10}).$$

Задача 3. Знайти границі функцій.

$$3.1. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 2x - 7}{8x^3 + 4x^2}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{2x^3 + 3x - 5};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{x^2 - 9x + 8}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg} 14x}{\sqrt{1 - \cos 16x}};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-4}{x+9} \right)^{2x+3}; \quad \text{е) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(9 - 2x^2)}{\operatorname{tg}(x^2 - 4)}.$$

$$3.2. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{14x^2 + x + 5}{7x^2 - x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x - 10}{2x^2 - 8};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+26} - 3}{\sqrt{x+3} - 2}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{ctg} x}{1 - \sin x};$$

$$д) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x+2}{x+3} \right)^{\frac{12}{x-1}};$$

$$е) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \operatorname{arctg}^2 2x}{2 \ln(1-4x^2)}.$$

$$3.3. а) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4+1} - \sqrt[3]{x^6+1}}{2x^2+14};$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+x-12}{2x^2-18};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2+7x} - x \right);$$

$$г) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x \cdot \operatorname{tg} 4x}{\operatorname{arctg}^2 8x};$$

$$д) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+10}{x-2} \right)^{\frac{x+2}{5}};$$

$$е) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{5 \ln \sin 3x}{(6x-\pi)^2}.$$

$$3.4. а) \lim_{x \rightarrow \infty} 3x \left(\sqrt[3]{x^3+2x} - x \right);$$

$$б) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2-2x-12}{2x^2+x-6};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{2x-1}}{3x^2-12x-15};$$

$$г) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 6x}{\operatorname{tg} 15x};$$

$$д) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+2}{2-3x} \right)^{\frac{1}{x^2+x}};$$

$$е) \lim_{x \rightarrow 10} \frac{\lg x - 1}{x^2 - 11x + 10}.$$

$$3.5. а) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2+3x-200}{0,004x^3-100};$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-x^2-4}{2x^2-4x};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x+24} - \sqrt[3]{12x-9}}{2\sqrt{x+1}-4};$$

$$г) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 14x}{\sqrt{1-\cos 2x}};$$

$$д) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2x+3}{5+x} \right)^{\frac{7}{x^2-x-2}};$$

$$е) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(1-3x)}{\operatorname{arctg} 24x}.$$

$$3.6. а) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{x^5+x} - \sqrt[3]{x^9+1}}{16x^3-x-1500};$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2+x-20}{x^2+4x-32};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3\sqrt[3]{5x+2}-9}{1-\sqrt{x-4}};$$

$$г) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 3\pi x}{\sin 12\pi x};$$

$$д) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{5x-3}{x+1} \right)^{\frac{10}{x^2-x}};$$

$$е) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(4-3 \cdot 2^x)}{\arcsin 25x}.$$

$$3.7. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 8x + 10}{3\sqrt{x^6 + 1}};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 6x + 5};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x - 4}{\sqrt[3]{26 + x} - 3};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 3x};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x^2 + 1}{1 - 3x^2} \right)^{\frac{2x+1}{4x^2}};$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(5 - \frac{4}{\cos x} \right)^{\frac{1}{\sin^2 3x}}.$$

$$3.8. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 1) \operatorname{arctg} x}{5x^2};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{48 + 4x - x^3}{2x^2 + 32x - 160};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + 3x} - 1}{5x};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{\lg \cos 2x};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 2} (7 - 3x)^{\frac{x}{x-2}};$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(1 + 3x)}{\operatorname{tg}^2 6x}.$$

$$3.9. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 2x - 19}{4x^3 + 2x - 24};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 + 4x - 24}{x^2 + 5x - 14};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{ctg} 2x;$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+8}{x-4} \right)^{2x+5};$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\operatorname{tg} 3 - \operatorname{tg} x}{\ln 3x - \ln x}.$$

$$3.10. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{18 + 17x^2 + 9x^4}{(12 - 3x^2)(14 - 2x^2)};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 6x + 5}{x^2 - 2x - 35};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 + 2x - 63};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 16x}{1 - \cos 12x};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-3} \right)^{\frac{2x^2+x+4}{x-1}};$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow \infty} 5x(\ln(2x+1) - \ln(2x-1)).$$

$$3.11. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos 15x \cdot \cos \frac{1}{2x - \pi};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 15x + 18}{x^3 - 2x^2 - x + 2};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2 + 12} - x); \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin 2x - \sin 6}{\sqrt{x^3 - 2x^2 - 8} - 1};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x^2)^{3 \operatorname{ctg}^2 x}; \quad \text{е) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(\sqrt{x^2 + 3} - 1)}{\operatorname{arctg}(x - 1)}.$$

$$\mathbf{3.12.} \quad \text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \arccos \frac{x + \sqrt{x^5}}{x^2 \sqrt{2x + 1}}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{2x^4 - 8x^2 + 8}{10x^3 - 20x};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 7} \frac{6 - 3\sqrt{x - 3}}{x^2 - 49}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\cos 6 - \cos 2x}{\sqrt{x^3 + 28} - \sqrt{x^2 - 8}};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}; \quad \text{е) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{x^2}}{1 - \cos^2 x}.$$

$$\mathbf{3.13.} \quad \text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4\sqrt{x^3 + 1} + 18x}{3x(\sqrt{x + 7} + 4)}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 7x - 18}{x^3 - 2x - 4};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x^3 + 1} - \sqrt{x + 3}}{\sqrt[3]{2x^2 + 1} - \sqrt[3]{x + 2}}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x + \cos x - 2}{4 \sin^2 \frac{x}{2}};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow \pi} \left(\sin \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x - \sin x}}; \quad \text{е) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{\ln(1 + \operatorname{tg} 2x)}.$$

$$\mathbf{3.14.} \quad \text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 2x + 7}{(1 - 3x)(1 + 2x)}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 5x^2 + 25x - 125}{x^2 - 25};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x + 13} - 2\sqrt{x + 1}}{3x^2 - 27}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{6}} \frac{8 \sin^3 x + 1}{6x + \pi};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} (2 - \cos x)^{\frac{1}{x^2}}; \quad \text{е) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{(1 - 3x)^2}{\operatorname{tg} 3\pi x \cdot \sin 3\pi x}.$$

$$\mathbf{3.15.} \quad \text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 8x} - x); \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^2 - 100}{x^3 - 20x^2 + 100x};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{9 + 2x^2} - x}{4x - 2\sqrt{x^2 + 27}}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^3 x}{\cos^2 x};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 1} (4 - 3x)^{\frac{5x^2 - 20}{1 - x^2}}; \quad \text{е) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\log_3 x - 1}{\operatorname{tg} \pi x}.$$

$$\mathbf{3.16.} \quad \text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^2 + 2} - \sqrt[3]{x^2 - 2}); \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{3x^2 + 18x + 27}{x^3 + 5x^2 - 18};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{10 - x} - 2}{5x - 10}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos 5x};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 1} (2 - x)^{\frac{1}{\ln x}}; \quad \text{е) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos 3 - \cos 3x}{\sqrt{2x^2 + 2} - \sqrt{x^2 + 3}}.$$

$$\mathbf{3.17.} \quad \text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + x^2 + 10}{2 - 3x^3}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 - 2x^2 - 10x - 6}{-3x^3 - 4x^2 + x + 2};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{10 - x} - \sqrt{9x}}{\sqrt{2x + 2} - \sqrt{1 + 3x}}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{\cos x};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} (\sin 3x)^{\frac{1}{\sin x - \cos 2x}}; \quad \text{е) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(5x + 10) - \ln(10 - 5x)}{\arcsin 20x}.$$

$$\mathbf{3.18.} \quad \text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + \sqrt{4x^4 + 5}}{2x^2 + 2\sqrt{x^2 - 1}}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{2x^3 + 3x^2 - 7x - 10};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2\sqrt{x^2 + 5} - 6}{2 - \sqrt{2x^2 - 4}}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos 3\pi x}{\operatorname{tg}^2 5\pi x};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4 + 2x}{2x - 5} \right)^{\frac{5 - x^2}{2x}}; \quad \text{е) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin \frac{x}{4} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2x}{5}}{\log_3 \cos 2x}.$$

$$\mathbf{3.19.} \quad \text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 1}}{x - \sqrt{x^2 + 1}}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{6x^3 - 23x^2 + 15x}{4x^3 - 24x^2 + 108};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow -5} \frac{3 - \sqrt[3]{x^2 + 2}}{2\sqrt[3]{6 + x} - 2}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \sin 6x}{\operatorname{tg} \left(\frac{3\pi}{2} (x^2 - 3x) \right)};$$

$$д) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{12+4x}{4x-12} \right)^{\frac{12+4x^2}{3x}}; \quad е) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+\ln(1+3x)}{1+\operatorname{tg} 2x} \right)^{\frac{2}{x}}.$$

$$3.20. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+14x}-x); \quad б) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{8+4x-2x^3}{-12+x^2+x^3};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} - 2}{x^2+4x-5}; \quad р) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{2-2\cos 2x}}{3\sin^2 2x};$$

$$д) \lim_{x \rightarrow 3} \left(3 - \frac{2x}{3} \right)^{3\operatorname{tg} \frac{\pi x}{6}}; \quad е) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x + \operatorname{tg}^2 x}{x \sin 3x}.$$

$$3.21. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \sqrt{x} + 11x^2}{17x - 4\sqrt{x^5 - 100}}; \quad б) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^3 - 16x - 6}{-6x^2 + 27x - 27};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 4x}{3\sqrt[3]{4x - 6}}; \quad р) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \sin x - \cos 2x}{\sin^2 x};$$

$$д) \lim_{x \rightarrow 0} \left(3 - \frac{2}{\cos 2x} \right)^{\operatorname{ctg}^2 2x}; \quad е) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^x - 2}{\ln x}.$$

$$3.22. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{x} \cdot \ln \frac{x+1}{x^2-4x}; \quad б) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{5(x^2+x-6)^2}{(x+3)(3x^2+6x-9)};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{3\sqrt{9+2x}-15}{2\sqrt[3]{x^2}-8}; \quad р) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\cos x - \sqrt{3}}{2\sin x - 1};$$

$$д) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{15x - 3x^2 + x^3}{17 - 5x + x^3} \right)^{\frac{4+8x^3}{3x^2}}; \quad е) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4-4x}{3\log_2 x}.$$

$$3.23. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+1}{x^2+7x+6} \sin \frac{1}{x}; \quad б) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4+x^2+x-22}{x^2-5x+6};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+11x}); \quad р) \lim_{x \rightarrow 1} \sin \frac{1-x}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2};$$

$$д) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{12+8x-x^3}{10-3x-x^3} \right)^{\frac{x^2+5}{3}}; \quad е) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos 5x} - e^{\cos 3x}}{\operatorname{arctg} 12x}.$$

$$3.24. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1} + x}{x^2 - \sqrt{x}} \cos \frac{2}{x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + x^3 + 3x^2 - 4x - 1}{x^2 - 3x + 2};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10\sqrt{x+1} - 10}{2\sqrt[3]{x+1} - 2}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{\cos \pi x - \sin \pi x}{\operatorname{tg} 4\pi x};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4x+7}{5x+7} \right)^{\frac{2x-3}{10x}}; \quad \text{е) } \lim_{x \rightarrow 10} \frac{2 \lg x - 2}{\sqrt{x-9} - 1}.$$

$$3.25. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 14x + 15} - \sqrt{x^2 - 20x - 10} \right);$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^4 + 7x^2 - 5x - 4}{3x^3 + 3x - 6}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{6 - 2\sqrt[3]{4x+15}}{1 + \sqrt[3]{3x-10}};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 2x - 1}{15 \sin 4x}; \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{14x+28}{13+14x} \right)^{\frac{3-14x}{2}};$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow 10} \frac{5 \lg x - 5}{x^2 - 11x + 10}.$$

$$3.26. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 - 25} - \sqrt{x^2 + 25} \right); \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 + 2x - 20}{x^2 - 7x + 10};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3\sqrt{1+2x} - 9}{2\sqrt{x} - 4}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \cos^2 3x}{1 - \sin 3x};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 3} (7 - 2x)^{\frac{2x}{x-3}}; \quad \text{е) } \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(1 - \frac{2}{x} \right) \cdot \operatorname{ctg} \frac{1}{x}.$$

$$3.27. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x^4}{3x^2 + 1} - 2x^2 \right); \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x - 4}{x^2 - 11x + 18};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin 5x}{\sqrt{1 - \cos 12x}};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos \frac{x}{2} \right)^{\frac{4x^2-2}{3 \sin^2 x}}; \quad \text{е) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{5 \ln \cos 6x}{3 \arcsin(3x - \pi)^2}.$$

$$3.28. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sqrt{x^3 + 5x} - \sqrt{x^3 - 4x} \right); \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 + 5x - 7}{4x^3 - 2x - 2};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{\sqrt{2x + 10} - 2\sqrt{x + 1}}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{3x \sin 3x};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 4x + 17}{x^2 + 7x - 10} \right)^{\frac{3x}{2}}; \quad \text{е) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\sin 2(x^2 - 1)}.$$

$$3.29. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^3 + \sqrt{x^7 + 1}}{100 - x^3 \sqrt{x + 4}}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{x^3 + 2x - 33};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{\sqrt[3]{21x - 20} - \sqrt[3]{6 - 5x}}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1 + \cos 5\pi x}{\sin^2 3\pi x};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 3} (10 - 3x)^{\frac{1}{\lg \pi x}}; \quad \text{е) } \lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(x - 2) - \ln(x + 3)).$$

$$3.30. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 17x - 42} - \sqrt{x^2 + 30} \right);$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 + 16x - 48}{2x^3 + 2x - 20}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 + x} - \sqrt{4 - x}}{3x};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{5x^3}; \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{9x + 2}{9x - 3} \right)^{\frac{3 + x^2}{x - 4}};$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow \infty} (2x - 3)(\ln 2x - \ln 2x + 10).$$

Задача 4. Дослідити функцію на неперервність і з'ясувати характер точок розриву.

$$4.1. \quad f(x) = \frac{1}{4x - x^2 - 3}.$$

$$4.2. \quad f(x) = 2^{\frac{1}{\sin x}}.$$

$$4.3. \quad f(x) = e^{\frac{1}{x+5}}.$$

$$4.4. \quad f(x) = 2^{\frac{1}{3-x}}.$$

$$4.5. \quad f(x) = \frac{10x}{x^2 - 1}.$$

$$4.6. \quad f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 5x + 6}.$$

$$4.7. \quad f(x) = \frac{x+5}{x^2-4}.$$

$$4.9. \quad f(x) = \frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{x^2 - x}.$$

$$4.11. \quad f(x) = \frac{1}{\ln(3-x)}.$$

$$4.13. \quad f(x) = \frac{x}{\ln(1+x)}.$$

$$4.15. \quad f(x) = 4^{-\frac{1}{x-3}}.$$

$$4.17. \quad f(x) = x + \frac{x+2}{|x+2|}.$$

$$4.19. \quad f(x) = \frac{3}{2^x - 1}.$$

$$4.21. \quad f(x) = 3^{\frac{4}{5-x}} + 2.$$

$$4.23. \quad f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}.$$

$$4.25. \quad f(x) = \frac{1}{\lg|x|}.$$

$$4.27. \quad f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

$$4.29. \quad f(x) = \frac{\arcsin x}{x}.$$

$$4.8. \quad f(x) = 5^{\frac{2x}{1-x}}.$$

$$4.10. \quad f(x) = e^{\frac{3x+5}{2x+2}}.$$

$$4.12. \quad f(x) = \frac{x+5}{x^2 + x - 12}.$$

$$4.14. \quad f(x) = \frac{\sin x}{x(x+2)}.$$

$$4.16. \quad f(x) = \frac{4}{x^2 - 2x + 1}.$$

$$4.18. \quad f(x) = \lg|x-3|.$$

$$4.20. \quad f(x) = \frac{12}{x^2 - 6x + 5}.$$

$$4.22. \quad f(x) = \frac{x+2}{x^2 - 6x + 8}.$$

$$4.24. \quad f(x) = \arctg \frac{1}{x}.$$

$$4.26. \quad f(x) = 5^{\frac{1}{x}} + 3.$$

$$4.28. \quad f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}.$$

$$4.30. \quad f(x) = \frac{1 + 4x + x^2}{\sin x}.$$

4 Диференціальне числення функцій однієї змінної

Теоретичні питання

1. Задачі, які приводять до поняття похідної.
2. Означення похідної. Механічний та геометричний зміст похідної.
3. Правила диференціювання .
4. Похідна степеневої, показникової, тригонометричних, та логарифмічної функцій.
5. Похідна складеної функції та оберненої функцій. Похідні Обернених тригонометричних функцій.
6. Гіперболічні функції та їхні похідні.
7. Похідні функцій, заданих неявно та параметрично.
8. Логарифмічне диференціювання. Похідна показниково-степеневої функції.
9. Диференційованість функції. Диференціал функції та його геометричний і механічний зміст. Властивості диференціала, інваріантність форми диференціала. Застосування диференціала в наближених обчисленнях.
10. Похідні вищих порядків, формула Лейбніца.
11. Похідні вищих порядків параметрично заданої функції.
12. Диференціали вищих порядків.
13. Теореми Ферма, Ролля, Лагранжа, Коші.
14. Правило Лопітала.
15. Формула Тейлора. Розклад за формулою Тейлора функцій e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$.
16. Дослідження монотонності функції за допомогою похідних. Локальний екстремум функції, необхідна та достатні умови. Найбільше і найменше значення функції на замкнутому відрізку.
17. Опуклість і вгнутість кривих. Точки перегину.
18. Асимптоти графіка функції.
19. Загальна схема дослідження функції та побудови її графіка.

Розрахункові завдання

Задача 1. Знайти похідні функцій.

1.1. а) $y = \frac{3x-4}{\sqrt{x^3+3x-2}}$; б) $y = \frac{\sqrt{2}}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{6} \ln \frac{x-1}{x+1}$;

в) $y = (\ln(x^2+2x+3))^{\sin^3 x}$; г) $y \sin x - \cos(x-y) = 0$.

1.2. а) $y = \frac{1}{8} \sqrt[3]{(1+x^3)^8} - \frac{1}{5} \sqrt[3]{(1+x^3)^5}$; б) $y = \ln \left(\frac{1+\sqrt{\sin x}}{1-\sqrt{\sin x}} \right)$;

в) $y = (\operatorname{arctg}(x^2+1))^{2^{\cos x}}$; г) $x \sin y - \cos y + \operatorname{tg} 2y = 0$.

1.3. а) $y = \sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x-1)^2}}$; б) $y = \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln \sqrt{1-x^2}$;

в) $y = (\operatorname{arctg} 2x)^{e^x}$; г) $y = xy + x2^y$.

1.4. а) $y = \frac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}$;

б) $y = \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$;

в) $y = (\sin x)^{\cos x}$; г) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = x^2 y + 2$.

1.5. а) $y = \frac{2(3x^3+4x^2-x-2)}{15\sqrt{1+x}}$;

б) $y = \frac{3}{4} \ln \frac{x^2+1}{x^2-1} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x$; в) $y = (\sin(2x+1))^{e^{x^2}}$;

г) $\sin(xy) + \cos(xy) = \operatorname{tg}(x+y)$.

1.6. а) $y = \frac{2x^2-x-1}{3\sqrt{2+4x}}$; б) $y = \operatorname{arctg} \ln \frac{1}{x} + 2^{\cos x}$;

в) $y = (x+3)^{x^2+2x+3}$; г) $y = x \cos y + y 2^{\operatorname{tg} x}$.

$$1.7. \text{ a) } y = \sqrt{\frac{(x-1)^3}{(x-3)^2(x+3)^5}}; \quad \text{б) } y = \ln \cos \sqrt{\frac{x-1}{x}};$$

$$\text{в) } y = \sqrt[3]{ctgx}; \quad \text{г) } 2^x + 2^y = 2^{xy}.$$

$$1.8. \text{ a) } y = \frac{(x^2-6)\sqrt{(4+x^2)^3}}{120x^5}; \quad \text{б) } y = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \frac{tg \frac{x}{2} + 2 - \sqrt{3}}{tg \frac{x}{2} + 2 + \sqrt{3}};$$

$$\text{в) } y = (\arctg x)^{3x+1}; \quad \text{г) } y^2 + x2^y = \cos(xy).$$

$$1.9. \text{ a) } y = \sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}}; \quad \text{б) } y = 2^{\arcsin 3x} + (1 - \arccos 3x)^2;$$

$$\text{в) } y = \sqrt[3]{\ln x}; \quad \text{г) } x + y = \arccos x + \arccos y.$$

$$1.10. \text{ a) } y = \frac{2x^3+5}{\sqrt{x^4+2x}}; \quad \text{б) } y = -\frac{1}{2\sin^2 x} + \ln tgx;$$

$$\text{в) } y = \sqrt[3]{\sin 2x}; \quad \text{г) } 2^x + 2y = y^2 e^{xy}.$$

$$1.11. \text{ a) } y = \frac{x^3-10}{\sqrt{x^4-8x}}; \quad \text{б) } y = \frac{1}{2} \ln tg \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \frac{\cos x}{\sin^2 x};$$

$$\text{в) } y = x^{chx}; \quad \text{г) } \sqrt{x^2+y^2} = 2 \arctg \frac{y}{x}.$$

$$1.12. \text{ a) } y = \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+3x+1}}; \quad \text{б) } y = \arctg(\ln x) + \ln(\arctg x);$$

$$\text{в) } y = x^{\log_2 x}; \quad \text{г) } ye^x = \cos(xy).$$

$$1.13. \text{ a) } y = \frac{5x-2}{\sqrt{x^2+5x-1}}; \quad \text{б) } y = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2} \arctg x^2;$$

$$\text{в) } y = e^{\sqrt{\sin x}}; \quad \text{г) } y^3 = \frac{x-y}{x+y}.$$

$$1.14. \text{ a) } y = \frac{2x-7}{\sqrt{x^2+8x-14}}; \quad \text{б) } y = \arctg \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}};$$

$$\text{B)} \quad y = x^{\sqrt{x}}; \quad \text{r)} \quad \ln y + \frac{x}{y} = \sqrt{3x-2y}.$$

$$\text{1.15. a)} \quad y = \frac{3x-4}{\sqrt{x^2+9x-6}}; \quad \text{б)} \quad y = \ln(x^2 + \sqrt{1+x^4})$$

$$\text{B)} \quad y = (\arcsin x)^{\frac{1}{x}}; \quad \text{r)} \quad \sin x + e^y + xy = 0.$$

$$\text{1.16. a)} \quad y = \frac{5x+4}{\sqrt{x^3-5x-2}}; \quad \text{б)} \quad y = \operatorname{arctg} \frac{4 \sin x}{3+5 \cos x};$$

$$\text{B)} \quad y = (\operatorname{tg} 2x)^{\ln x}; \quad \text{r)} \quad y = x3^y + \sqrt{xy}.$$

$$\text{1.17. a)} \quad y = \frac{3x-1}{\sqrt[3]{x^3+9x-1}}; \quad \text{б)} \quad y = \arccos \frac{x^2-1}{x^2+1};$$

$$\text{B)} \quad y = x\sqrt{(x+1)^2}; \quad \text{r)} \quad y \ln x - e^{xy} + x \ln y = 0.$$

$$\text{1.18. a)} \quad y = \frac{2x-8}{\sqrt[3]{x^3-8x+4}}; \quad \text{б)} \quad y = \frac{\ln \sin x}{\ln \cos x} + \operatorname{arctg} \frac{x^2}{2};$$

$$\text{B)} \quad y = x^{\frac{1}{x}}; \quad \text{r)} \quad e^{2x} + xy + e^{-y} = 0.$$

$$\text{1.19. a)} \quad y = \frac{2x+1}{\sqrt[3]{x^3-4x-1}}; \quad \text{б)} \quad y = \sin^2 \left(\frac{1-\ln x}{x} \right);$$

$$\text{B)} \quad y = (x+5)^{\operatorname{sh} x}; \quad \text{r)} \quad \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \operatorname{ctg}(xy).$$

$$\text{1.20. a)} \quad y = \frac{4x+3}{\sqrt[3]{x^3-4x+1}}; \quad \text{б)} \quad y = \arcsin x^2 + \arccos x^2;$$

$$\text{B)} \quad y = (\cos x)^{\sin x}; \quad \text{r)} \quad \ln \frac{x}{y} + e^{x+y} = 0.$$

$$\text{1.21. a)} \quad y = \frac{5x-6}{\sqrt[3]{x^3+5x-2}}; \quad \text{б)} \quad y = \frac{1}{2}(\arcsin x)^2 \arccos x;$$

$$\text{B)} \quad y = (x^2+2x+3)^{\ln x}; \quad \text{r)} \quad 3^y + \operatorname{tg}(xy) = \frac{x}{y}.$$

$$\text{1.22. a)} \quad y = \frac{5x+4}{\sqrt{x^3-5x+2}}; \quad \text{б)} \quad y = x \arcsin(\ln x);$$

$$\text{в)} \quad y = \left(\frac{x}{x+1} \right)^x; \quad \text{г)} \quad \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$$

$$\text{1.23. а)} \quad y = \frac{3x-1}{\sqrt[3]{x^3+9x-1}}; \quad \text{б)} \quad y = \operatorname{tg} \frac{1-e^x}{1+e^x};$$

$$\text{в)} \quad y = \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x; \quad \text{г)} \quad \ln(xy) + e^{-\frac{y}{x}} = 0.$$

$$\text{1.24. а)} \quad y = \frac{4x-1}{\sqrt[3]{x^3+2x-1}}; \quad \text{б)} \quad y = \frac{\arcsin 4x}{1-4x} + \ln \frac{1-e^x}{1+e^x};$$

$$\text{в)} \quad y = (x^2 + 1)^{\sin x}; \quad \text{г)} \quad 5^y = y^2 + x \ln \frac{y}{x}.$$

$$\text{1.25. а)} \quad y = \frac{4+3x^3}{x^3 \sqrt{(2+x^3)^2}}; \quad \text{б)} \quad y = \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} + 10^{x/\operatorname{gr} x};$$

$$\text{в)} \quad y = (\arcsin x)^{\sqrt{1-x^2}}; \quad \text{г)} \quad \cos^2(x+y) + \frac{x}{y} = 2x + y.$$

$$\text{1.26. а)} \quad y = \sqrt[3]{\frac{\left(1 + x^{\frac{3}{4}} \right)^2}{x^{\frac{3}{2}}}};$$

$$\text{б)} \quad y = \cos \frac{\arcsin x}{2} + \log_3(x - \sin x);$$

$$\text{в)} \quad y = (\operatorname{arctg} x)^{(1+x^2)^2}; \quad \text{г)} \quad \operatorname{tg} x - 3xy + \sqrt{x+y} = 0.$$

$$\text{1.27. а)} \quad y = \frac{(x^2 - 2)\sqrt{4+x^2}}{24x^3}; \quad \text{б)} \quad y = x10^{\sqrt{x}} + \sin^2 x \cdot \sin x^2;$$

$$\text{в)} \quad y = (\cos x)^{\frac{1}{x}}; \quad \text{г)} \quad \operatorname{arctg} y + \sin(xy) + y^2 = 0.$$

$$\text{1.28. а)} \quad y = \frac{8x-1}{\sqrt[3]{x^3+7x+5}}; \quad \text{б)} \quad y = \frac{e^x}{1+x^3} + \frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x};$$

$$\text{в)} \quad y = (\operatorname{arctg} 3x)^{\cos x}; \quad \text{г)} \quad x^3 y^2 + \ln \frac{x}{y} + \sqrt{x+y} = 0.$$

$$1.29. \text{ а) } y = x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}; \quad \text{б) } y = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\sin x} + \frac{1}{\ln^2 x};$$

$$\text{в) } y = (\operatorname{ctgx})^{x^2+5}; \quad \text{г) } \arcsin y + x^2 y - x \cos y = 0.$$

$$1.30. \text{ а) } y = \frac{\sqrt{2x^3 - 2x + 1}}{x};$$

$$\text{б) } y = \sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + \ln \cos \frac{x-1}{x};$$

$$\text{в) } y = (\sin 5x)^{\frac{x}{x^2+1}}; \quad \text{г) } 3^y + xy - \sqrt{2x+y} = 0.$$

Задача 2. Знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ та $\frac{d^2y}{dx^2}$ функції, заданої параметрично.

$$2.1. \begin{cases} x = t - \ln t, \\ y = 3t^2 - 2t^3. \end{cases}$$

$$2.2. \begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = 3t - t^3. \end{cases}$$

$$2.3. \begin{cases} x = a \operatorname{tg} t, \\ y = \frac{b}{\cos t}. \end{cases}$$

$$2.4. \begin{cases} x = \operatorname{ctg} t, \\ y = \frac{1}{\cos^2 t}. \end{cases}$$

$$2.5. \begin{cases} x = 2t - \sin 2t, \\ y = 8 \sin^3 t. \end{cases}$$

$$2.6. \begin{cases} x = a(1 - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

$$2.7. \begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln(1 + 9t^2). \end{cases}$$

$$2.8. \begin{cases} x = a \cos^2 t, \\ y = b \sin^3 t. \end{cases}$$

$$2.9. \begin{cases} x = a(\sin t - t \cos t), \\ y = a(\cos t + t \sin t). \end{cases}$$

$$2.10. \begin{cases} x = t^2 + \ln t, \\ y = 2t^3 + 3t. \end{cases}$$

$$2.11. \begin{cases} x = 2t + e^t, \\ y = t^3 - 2t^2. \end{cases}$$

$$2.12. \begin{cases} x = a \sin t, \\ y = b \cos 2t. \end{cases}$$

$$2.13. \begin{cases} x = \operatorname{arccos} t, \\ y = t^2 - 2t. \end{cases}$$

$$2.14. \begin{cases} x = \operatorname{tg} 2t, \\ y = \cos t. \end{cases}$$

$$2.15. \begin{cases} x = 2t - \cos t, \\ y = 8t^2 + t. \end{cases}$$

$$2.17. \begin{cases} x = \operatorname{arctg} 2t, \\ y = \ln(1 + 2t^2). \end{cases}$$

$$2.19. \begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = \cos 2t. \end{cases}$$

$$2.21. \begin{cases} x = \ln t + t, \\ y = \sin 2t. \end{cases}$$

$$2.23. \begin{cases} x = 3 \sin^2 t, \\ y = 2 \cos^2 t. \end{cases}$$

$$2.25. \begin{cases} x = \operatorname{tg} t, \\ y = t^3 - 2t. \end{cases}$$

$$2.27. \begin{cases} x = e^t + \cos t, \\ y = t^2 + 5t. \end{cases}$$

$$2.29. \begin{cases} x = 3 \cos^2 2t, \\ y = 4 \sin^2 2t. \end{cases}$$

$$2.16. \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t). \end{cases}$$

$$2.18. \begin{cases} x = a \sin^2 t, \\ y = b \cos^3 t. \end{cases}$$

$$2.20. \begin{cases} x = \ln(t^2 + 1), \\ y = 2t^3 - 3t. \end{cases}$$

$$2.22. \begin{cases} x = e^t + 2t^2, \\ y = \ln(t + 1). \end{cases}$$

$$2.24. \begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = t^2 + 2t. \end{cases}$$

$$2.26. \begin{cases} x = 3t^3 - 2t, \\ y = \sin 2t. \end{cases}$$

$$2.28. \begin{cases} x = \ln(t^2 - 1), \\ y = e^t + 2. \end{cases}$$

$$2.30. \begin{cases} x = 5t^2 + 2t, \\ y = 1 + \sin 3t. \end{cases}$$

Задача 3. Знайти $y'''(x_0)$ для заданої функції $y = f(x)$.

$$3.1. y = x^3 e^x, \quad x_0 = 1.$$

$$3.2. y = e^{3x} \sin 2x, \quad x_0 = 0.$$

$$3.3. y = e^{2x} \cos x, \quad x_0 = 0.$$

$$3.4. y = e^{-x} \sin 5x, \quad x_0 = 0.$$

$$3.5. y = \ln(2x + 1), \quad x_0 = 0.$$

$$3.6. y = (x^2 + 3x + 2) \sin x, \quad x_0 = 0.$$

$$3.7. y = (x^3 + 1)e^x, \quad x_0 = 0.$$

$$3.8. y = e^{-x} \cos x, \quad x_0 = 0.$$

$$3.9. y = x^2 \ln x, \quad x_0 = 1.$$

$$3.10. y = \frac{2x + 3}{x^2 - 3x + 7}, \quad x_0 = 1.$$

$$3.11. y = \ln \frac{1}{1 - x}, \quad x_0 = 0.$$

$$3.12. y = x^5 e^{-x}, \quad x_0 = 0.$$

$$\mathbf{3.13.} \quad y = 5^x \sin x, \quad x_0 = 0. \quad \mathbf{3.14.} \quad y = 2^x \cos x, \quad x_0 = 0.$$

$$\mathbf{3.15.} \quad y = (3x^2 + 2x + 1) \cos x, \quad x_0 = 0.$$

$$\mathbf{3.16.} \quad y = e^{2x} \ln(x+1), \quad x_0 = 0. \quad \mathbf{3.17.} \quad y = x^6 \ln x, \quad x_0 = 1.$$

$$\mathbf{3.18.} \quad y = (2x^2 + 1)e^x, \quad x_0 = 0. \quad \mathbf{3.19.} \quad y = e^{-3x} \cos x, \quad x_0 = 0.$$

$$\mathbf{3.20.} \quad y = 6^x \cos x, \quad x_0 = 0. \quad \mathbf{3.21.} \quad y = \ln(x+1), \quad x_0 = 0.$$

$$\mathbf{3.22.} \quad y = \cos^2 x, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}. \quad \mathbf{3.23.} \quad y = 5^{-x}, \quad x_0 = 0.$$

$$\mathbf{3.24.} \quad y = x^2 \ln x, \quad x_0 = 1. \quad \mathbf{3.25.} \quad y = \sin 3x, \quad x_0 = \frac{\pi}{3}.$$

$$\mathbf{3.26.} \quad y = \frac{2}{x^2 - 4x + 3}, \quad x_0 = 0. \quad \mathbf{3.27.} \quad y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}, \quad x_0 = 0.$$

$$\mathbf{3.28.} \quad y = x^2 \sqrt[3]{x+1}, \quad x_0 = 1. \quad \mathbf{3.29.} \quad y = \cos 5x, \quad x_0 = 0.$$

$$\mathbf{3.30.} \quad y = x^5 \ln(x+1), \quad x_0 = 0.$$

Задача 4. Виходячи із значення функції $y = f(x)$ в точці x_0 і використовуючи диференціал, знайти наближене значення функції в точці x_1 (4.1 – 4.10).

$$\mathbf{4.1.} \quad y = \sqrt[3]{3x^2 + 8x - 16}, \quad x_0 = 4, \quad x_1 = 3,96.$$

$$\mathbf{4.2.} \quad y = \sqrt{5x^2 + 4x - 1}, \quad x_0 = 5, \quad x_1 = 5,08.$$

$$\mathbf{4.3.} \quad y = \sqrt[5]{x^2 - 2x + 8}, \quad x_0 = 6, \quad x_1 = 5,84.$$

$$\mathbf{4.4.} \quad y = \sqrt[4]{x^3 + 6x - 7}, \quad x_0 = 4, \quad x_1 = 4,06.$$

$$\mathbf{4.5.} \quad y = \sqrt[3]{2x^2 + 2x + 13}, \quad x_0 = -8, \quad x_1 = -7,85.$$

$$\mathbf{4.6.} \quad y = \sqrt{3x^2 - 5x - 2}, \quad x_0 = 9, \quad x_1 = 9,08.$$

$$\mathbf{4.7.} \quad y = \sqrt[4]{5x^4 + 2x - 3}, \quad x_0 = 2, \quad x_1 = 1,92.$$

$$\mathbf{4.8.} \quad y = \sqrt{3x^2 - 6x - 5}, \quad x_0 = 7, \quad x_1 = 7,05.$$

$$\mathbf{4.9.} \quad y = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 8}, \quad x_0 = -4, \quad x_1 = -4,03.$$

$$4.10. y = \sqrt[4]{8x^2 + 6x - 9}, \quad x_0 = 3, x_1 = 2,88.$$

Обчислити наближено, використовуючи диференціал (4.11 – 4.30).

$$4.11. \cos 63^\circ. \quad 4.12. \operatorname{tg} 46^\circ. \quad 4.13. \sin 32^\circ.$$

$$4.14. \operatorname{ctg} 43^\circ. \quad 4.15. \sin 27^\circ. \quad 4.16. \cos 59^\circ.$$

$$4.17. \operatorname{tg} 43^\circ. \quad 4.18. \sin 33^\circ. \quad 4.19. \sin 61^\circ.$$

$$4.20. \operatorname{tg} 45^\circ. \quad 4.21. \operatorname{tg} 44^\circ. \quad 4.22. \operatorname{tg} 46^\circ.$$

$$4.23. \ln 1,1. \quad 4.24. \sqrt[4]{17}. \quad 4.25. \sin 29^\circ.$$

$$4.26. \sqrt[5]{31}. \quad 4.27. \sin 28^\circ. \quad 4.28. \sin 46^\circ.$$

$$4.29. \sin 31^\circ. \quad 4.30. \sqrt{24}.$$

Задача 5. Скласти рівняння дотичної і нормалі до заданої кривої в точці $C(x_0; y_0)$. Зробити рисунок.

$$5.1. y = \frac{1}{4}x^2 - 1, C(0; -1). \quad 5.2. y = \frac{1}{3}x^2 - 2, C(0; -2).$$

$$5.3. y = \frac{1}{4}x^2 - 2, C(0; -2). \quad 5.4. y = \frac{1}{2}(x^2 - 3), C\left(0; -\frac{3}{2}\right).$$

$$5.5. y = \frac{1}{3}x^2 + 2, C(0; 2). \quad 5.6. y = \frac{1}{6}(x^2 + 3), C\left(0; \frac{1}{2}\right).$$

$$5.7. y = \frac{1}{4}x^2 + 1, C(0; 1). \quad 5.8. y = \frac{1}{2}(x^2 + 1), C\left(0; \frac{1}{2}\right).$$

$$5.9. y = \frac{1}{6}(x^2 - 3), C\left(0; -\frac{1}{2}\right). \quad 5.10. y = \frac{1}{8}x^2 + 3, C(0; 3).$$

$$5.11. y = 3 - \frac{1}{4}x^2, C(0; 3). \quad 5.12. y = 1 - \frac{1}{3}x^2, C(0; 1).$$

$$5.13. y = \frac{1}{2}(1 - x^2), C\left(0; \frac{1}{2}\right). \quad 5.14. y = \frac{1}{6}(3 - x^2), C\left(0; \frac{1}{2}\right).$$

$$5.15. y = 4 - \frac{1}{8}x^2, C(0; 4). \quad 5.16. y = 2 - \frac{1}{3}x^2, C(0; 2).$$

$$5.17. y = 2 - \frac{1}{4}x^2, \quad C(0;2). \quad 5.18. y = \frac{1}{2}(3 - x^2), \quad C\left(0; \frac{3}{2}\right).$$

$$5.19. y = 3 - \frac{1}{8}x^2, \quad C(0;3). \quad 5.20. y = 6 - \frac{1}{4}x^2, \quad C(0;6).$$

$$5.21. y^2 = 4x, \quad C(1;2). \quad 5.22. y = x^2 - 2x, \quad C(0;0).$$

$$5.23. y = 2 - \frac{1}{3}x^2, \quad C(0;2). \quad 5.24. y = 5 - \frac{1}{4}x^2, \quad C(2;4).$$

$$5.25. y = \frac{1}{4}(x-3)^2, \quad C(1;1). \quad 5.26. y^2 = 5 - x, \quad C(1;2).$$

$$5.27. y = \frac{1}{9}(x-3)^2, \quad C(6;1). \quad 5.28. y^2 = 7 - x, \quad C(3;2).$$

$$5.29. y^2 = 8 + x, \quad C(1;3). \quad 5.30. y^2 = 17 - x, \quad C(1;4).$$

Задача 6. Знайти найбільше і найменше значення функції на заданому проміжку.

$$6.1. y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1, \quad [-4;0].$$

$$6.2. y = x - 4\sqrt{x} + 1, \quad [1;9].$$

$$6.3. y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1, \quad [-1;2].$$

$$6.4. y = x + \frac{4}{x^2}, \quad [1;3].$$

$$6.5. y = \frac{x}{1+x^2}, \quad [0;2].$$

$$6.6. y = \sqrt{21 + 4x - x^2}, \quad [-1;7].$$

$$6.7. y = \frac{x^2 + 3x}{x^2 + 2x + 5}, \quad [-1;3].$$

$$6.8. y = \sin 2x - x, \quad \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

$$6.9. y = \frac{x-1}{x+1}, \quad [0;4].$$

$$6.10. y = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}, \quad [0;1].$$

$$6.11. y = x^3 - 3x^2 + 3, \quad [1; 3].$$

$$6.12. y = x^3 - 6x^2 + 2, \quad [-2; 2].$$

$$6.13. y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1, \quad [-2; 4].$$

$$6.14. \phi = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2, \quad [-2; 2].$$

$$6.15. y = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 5, \quad [0; 3].$$

$$6.16. y = \frac{2x+3}{x^2+4}, \quad [-2; 2].$$

$$6.17. y = \frac{3x+4}{x^2+1}, \quad [-1; 4].$$

$$6.18. y = \frac{x+1}{x^2+3}, \quad [0; 3].$$

$$6.19. y = \frac{2x+1}{x^2+6}, \quad [-3; 4].$$

$$6.20. y = \frac{4x-1}{x^2+3}, \quad [-1; 3].$$

$$6.21. y = x - 2 \sin x, \quad \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

$$6.22. y = x + 2 \cos, \quad \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right].$$

$$6.23. y = e^{-x^2} + 2x^2, \quad [-1; 1].$$

$$6.24. y = 2x^2 - \sqrt{x} + 1, \quad [0; 1].$$

$$6.25. y = x - \frac{2}{x} - 3 \ln x, \quad [1; 4].$$

$$6.26. y = xe^{-2x^2}, \quad [0; 1].$$

$$6.27. y = x^3 - 3 \ln x, \quad \left[\frac{1}{2}; 2\right].$$

$$6.28. \phi = \delta^2 \hat{a}^{-\delta}, \quad [-1; 2].$$

$$6.29. y = 4 \arctg x - 2x + 1, \quad [0; 1].$$

$$6.30. y = \sqrt{x^3 - x^2 - x + 5}, \quad [0; 3].$$

Задача 7. Знайти границі за правилом Лопітала.

7.1. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$.

7.2. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$; в) $\lim_{x \rightarrow +0} x^x$.

7.3. а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1-\sin \frac{\pi x}{2}}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x \cdot \ln(x-1)$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}$.

7.4. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{1 - \cos x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \frac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})} \right)$;

в) $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$.

7.5. а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \operatorname{ctg} x$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x}$.

7.6. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{\frac{1}{x}}$.

7.7. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{5}{x^2-x-6} \right)$; в) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

7.8. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{e^{2x} - \cos 2x}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{2}{x}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

7.9. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{4}{x^2-x-2} - \frac{1}{x-2} \right)$;

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x}$.

7.10. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{\sin x}}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + 3^x)^{\frac{1}{x}}$.

$$7.11. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right); \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}.$$

$$7.12. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{(1+x)(2+x)(3+x)} - x \right);$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{2x - \pi}.$$

$$7.13. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x \cos x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} ((\pi - 2 \operatorname{arctg} x) \ln x);$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}.$$

$$7.14. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{x \sqrt{1 - x^2}}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1 - x) + \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}{\operatorname{ctg} \pi x};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}.$$

$$7.15. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos x \cdot \ln(x - 1)}{\ln(e^x - e)}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{1}{x - 4} - \frac{4}{x^2 - 3x - 4} \right);$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 2} \left(2 - \frac{x}{2} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4}}.$$

$$7.16. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2}{x - \sin x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \left(\frac{x}{3x - 1} - \frac{1}{\ln 3x} \right);$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^x.$$

$$7.17. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - e^x}{\operatorname{tg} x - x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right);$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}.$$

$$7.18. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1 - x^3}{\sin^2 2x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 - \sin x) \operatorname{tg} x; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} x^{\operatorname{tg} x}.$$

$$7.19. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\operatorname{tg} x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x \right);$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4}{2 + \sqrt{4 + x}} \right)^{\frac{1}{\sin x}}.$$

$$7.20. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2 \sin^2 x - 1}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\operatorname{ctg} x} - \frac{\pi}{2 \cos x} \right);$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x \right)^x.$$

$$7.21. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 2x - 1}{\sin^2 4x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) \operatorname{ctg} \pi(x - 1);$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)^{x-1}.$$

$$7.22. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x(e^x + 1) - e^x + 1}{x^2}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{5}{x};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}}.$$

$$7.23. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{1 - \cos x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x - \sqrt{x});$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2 \operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}.$$

$$7.24. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{1 + 2x} + 1}{\sqrt{2 + x} + x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left(\frac{x}{2x - 1} - \frac{1}{\ln 2x} \right);$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + e^x)^{\frac{1}{x}}.$$

$$7.25. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2 \arcsin x}{x^3}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x^2} \right);$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{e^x - 1}}.$$

$$7.26. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{4 - 4e^{-x}}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{x^3 - 1} - \frac{2}{x^5 - 1} \right);$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos 2x}{\cos 3x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

$$7.27. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5tg 2x - 3tg 5x}{5 \sin 2x - 3 \sin 5x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2);$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} (ctg x)^{\sqrt{x}}.$$

$$7.28. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - 2 \sin \frac{\pi x}{6}}{1 - x^2}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \arcsin x \cdot ctg x;$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{ctg \pi x}.$$

$$7.29. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - x}{e^x - 1}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{3}{ctg x} \right);$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}.$$

$$7.30. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)^2 - 2x + x^3}{5 \sin x - 3x + x^2};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(x + \sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right); \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} (ctg x)^{\sin x}.$$

Задача 8. Дослідити функцію та побудувати її графік.

$$8.1. \text{ a) } y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}; \quad \text{б) } y = x^2 e^{-x}.$$

$$8.2. \text{ a) } y = \frac{x^2}{1+x}; \quad \text{б) } y = \frac{\ln x}{x-1}.$$

$$8.3. \text{ a) } y = \frac{x^3}{3-x^2}; \quad \text{б) } y = \frac{e^{x-1}}{x}.$$

$$8.4. \text{ a) } y = \frac{x^3}{x^2 - 3};$$

$$\text{б) } y = x^2 e^{-x^2}.$$

$$8.5. \text{ a) } y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1};$$

$$\text{б) } y = x - \ln(x + 2).$$

$$8.6. \text{ a) } y = \frac{x^3 + 4}{x^2};$$

$$\text{б) } y = 2x \ln x.$$

$$8.7. \text{ a) } y = \frac{3x^4 + 1}{x^3};$$

$$\text{б) } y = \frac{\sqrt{e^x}}{x}.$$

$$8.8. \text{ a) } y = \frac{x^3}{x^2 + 2x + 3};$$

$$\text{б) } y = \frac{3 \ln x}{x}.$$

$$8.9. \text{ a) } y = \frac{x^3 - 8}{2x^2};$$

$$\text{б) } y = 4x e^{\frac{x^2}{2}}.$$

$$8.10. \text{ a) } y = \frac{x^2 + x - 5}{x - 2};$$

$$\text{б) } y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

$$8.11. \text{ a) } y = \frac{4x^3}{3(x^2 + 1)};$$

$$\text{б) } y = x^3 e^{-x}.$$

$$8.12. \text{ a) } y = \frac{x^2}{2(x - 1)};$$

$$\text{б) } y = \frac{e^x}{x}.$$

$$8.13. \text{ a) } y = \frac{\sqrt[3]{2x^2 - x^3}}{2(x - 1)^2};$$

$$\text{б) } y = \ln(x^2 + 2x).$$

$$8.14. \text{ a) } y = \frac{x^3}{3(x^2 - 3)};$$

$$\text{б) } y = x^3 \ln x.$$

$$8.15. \text{ a) } y = \frac{4x^3}{9(3 - x^2)};$$

$$\text{б) } y = x - \ln(x + 1).$$

$$8.16. \text{ a) } y = \frac{2x^2}{2x - 1};$$

$$\text{б) } y = \frac{x^2}{2} \ln \frac{x}{2}.$$

$$8.17. \text{ a) } y = \frac{x^4}{(1 + x)^3};$$

$$\text{б) } y = \frac{x}{\ln x}.$$

$$8.18. \text{ а) } y = \frac{2x-1}{(x-1)^2};$$

$$\text{б) } y = xe^{\frac{x^2}{2}}.$$

$$8.19. \text{ а) } y = \frac{x^3}{x^2-4};$$

$$\text{б) } y = x + \frac{\ln x}{x}.$$

$$8.20. \text{ а) } y = \frac{x^3+4}{x^2};$$

$$\text{б) } y = \ln(1+e^{-x})$$

$$8.21. \text{ а) } y = \frac{x^2-2x-3}{x+2};$$

$$\text{б) } y = (x+1)\ln^2(x+1).$$

$$8.22. \text{ а) } y = \frac{x^3-4}{4x^2};$$

$$\text{б) } y = \left(2 + \frac{x^2}{2}\right)e^{\frac{x}{2}}.$$

$$8.23. \text{ а) } y = \frac{x^2-x+1}{x-1};$$

$$\text{б) } y = \ln(x^2-1) + \frac{1}{x^2+1}.$$

$$8.24. \text{ а) } y = \frac{x^2-3x+3}{x-1};$$

$$\text{б) } y = \ln \frac{x+6}{x} - 1.$$

$$8.25. \text{ а) } y = \frac{4-x^3}{x^2};$$

$$\text{б) } y = \frac{e^{x-3}}{x-3}.$$

$$8.26. \text{ а) } y = \frac{x^2-4x+1}{x-4};$$

$$\text{б) } y = \ln \frac{x-5}{x} + 2.$$

$$8.27. \text{ а) } y = \frac{2x^3+1}{x^2};$$

$$\text{б) } y = \ln \frac{x}{x+5} - 1.$$

$$8.28. \text{ а) } y = \frac{3x^4+1}{x^3};$$

$$\text{б) } y = 2\ln \frac{x+3}{x} - 3.$$

$$8.29. \text{ а) } y = \frac{x^3-32}{x^2};$$

$$\text{б) } y = (4-x)e^{x-3}.$$

$$8.30. \text{ а) } y = \frac{x^2-x+7}{x+1};$$

$$\text{б) } y = \ln \frac{x}{x-2} - 2.$$

Задача 9.

9.1. Сіткою довжиною 120 м потрібно обгородити прямокутну ділянку найбільшої площі. Визначити розміри ділянки.

9.2. Розкласти число 10 на два доданки так, щоб їхній добуток був найбільшим.

9.3. У трикутник з основою a і висотою h вписано прямокутник найбільшої площі (одна із сторін прямокутника належить основі). Визначити площу прямокутника.

9.4. З квадратного листка картону зі стороною a вирізають по кутах однакові квадрати, а з частини, що залишилась, склеюють прямокутну коробку. Якою повинна бути сторона вирізаного квадрата, щоб об'єм коробки був найбільшим?

9.5. Визначити розміри відкритого басейну з квадратним дном об'єму 32 м^3 так, щоб на облицювання його стін і дна пішла найменша кількість матеріалу.

9.6. Бічні сторони і менша основа трапеції рівні по 10 см . Визначити її більшу основу так, щоб площа трапеції була найбільшою.

9.7. У півкруг вписано трапецію, основою якої є діаметр круга. Визначити кут трапеції при основі так, щоб площа трапеції була найбільша.

9.8. Переріз тунелю має форму прямокутника, завершеного півкругом. Периметр перерізу 18 м . При якому радіусі півкруга площа перерізу буде найбільшою?

9.9. Поблизу заводу А прокладається по прямій до міста В залізнична колія. Під яким кутом α до залізничної колії потрібно провести шосе з заводу А, щоб перевезення вантажів з А до В було найдешевшим, якщо вартість перевезення однієї тони на кілометр по шосе в t раз дорожча, ніж по залізниці?

9.10. Два джерела світла розміщені на відстані 30 м один від одного. На прямій, що з'єднує їх, знайти найменш освітлену точку, якщо сили освітлення джерел, відносяться як $27:8$.

9.11. Два літаки летять в одній площині і прямолінійно під кутом 120° з однаковою швидкістю $v \text{ км/год}$. У деякий момент один літак прийшов у точку перетину ліній руху, а другий не долетів до неї на $a \text{ км}$. Через який час відстань між літаками буде найменшою і чому вона дорівнюватиме?

9.12. Знайти сторони трикутника найбільшої площі, вписаного в еліпс $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

9.13. Знайти бічну сторону рівнобедреної трапеції, яка при заданій площі S і куті при основі α , буде мати найменший периметр.

9.14. У конус з радіусом основи 4 дм висотою 6 дм вписано циліндр найбільшого об'єму. Знайти цей об'єм.

9.15. У півкруг радіуса R вписано прямокутник найбільшої площі. Знайти його розміри.

9.16. На параболі $y = x^2$ знайти точку найменш віддалену від прямої $y = 2x - 4$.

9.17. Картина повішена на стіні. Нижній її кінець на b см, а верхній на a см вище ока спостерігача. На якій відстані від стіни повинен стати спостерігач, щоб розглядати картину під найбільшим кутом?

9.18. У прямокутний трикутник з гіпотенузою 8 см і кутом 60° вписано прямокутник, основа якого розміщена на гіпотенузі. Які повинні бути розміри прямокутника, щоб його площа була найбільшою?

9.19. Задано точки $A(0;3)$ і $B(4;5)$. На осі Ox знайти точку M таку, щоб сума відстаней від заданих точок до шуканої була найменшою.

9.20. Опір балки поздовжньому стисканню пропорційний площі поперечного перерізу. Визначити розміри балки, вирізаної з круглого дерева діаметром D так, щоб опір її стисканню був найбільшим.

9.21. З круга вирізається сектор, що містить кут α , а потім сектор згортається в конус. При якому значенні кута α об'єм конуса буде найбільшим?

9.22. Знайти висоту прямого циліндра з найбільшим об'ємом, який може бути вписаний у сферу радіусом R .

9.23. Знайти катети прямокутного трикутника з найбільшою площею, якщо довжина гіпотенузи дорівнює c .

9.24. Знайти висоту прямого конуса з найменшим об'ємом, описаного навколо сфери радіуса R .

9.25. Поліно довжиною 20 м має форму зрізаного конуса, діаметри основ дорівнюють 2 м і 1 м відповідно. Необхідно виготовити з поліна балку з квадратним поперечним перерізом, вісь якої співпадала б з віссю поліна, а об'єм якої був би найбільшим. Якими будуть розміри балки?

9.26. Покрівельник бажає зробити відкритий жолоб найбільшої місткості, у якому дно і боки повинні мати ширину 10 см і боки повинні бути однаково нахилені до дна. Яка повинна бути ширина жолоба зверху?

9.27. Два коридори шириною 2,4 м і 1,6 м перетинаються під прямим кутом. Визначити найбільшу довжину драбини, яку можна перенести (горизонтально) з другого коридору в інший.

9.28. В сегмент параболи $y^2 = 4x$, що відтинається прямою $x = 6$, вписати прямокутник з найбільшою площею.

9.29. Описати навколо даного циліндра з радіусом основи r прямий конус найменшого об'єму, враховуючи, що площини і центри кругових основ циліндра і конуса співпадають. Знайти радіус основи конуса.

9.30. Кусок проводу заданої довжини L зігнути у вигляді прямокутника так, щоб площа останнього була найбільшою.

5 Комплексні числа, многочлени

Теоретичні питання

1. Поняття комплексного числа. Геометрична інтерпретація комплексних чисел. Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі.
2. Тригонометрична форма комплексного числа. Дії над комплексними числами в тригонометричній формі.
Формула Муавра. Добування кореня із комплексного числа.
3. Формули Ейлера. Показникова форма комплексного числа.
4. Многочлени в комплексній області. Теорема Безу. Основна теорема алгебри. Умова тотожності двох многочленів.
5. Дійсні многочлени. Розклад дійсного многочлена на лінійні і квадратичні множники з дійсними коефіцієнтами.
6. Розклад дробово-раціональної функції на суму найпростіших дробів.

Розрахункові завдання

Задача 1. Виконати дії, подавши результат в алгебраїчній формі.

$$1.1. \frac{(3-2i)(2+3i)^2}{3+i}.$$

$$1.2. \frac{(2-i)(4+3i)}{(1-2i)^2}.$$

$$1.3. \frac{(5-2i)^2}{(3+i)(1-2i)}.$$

$$1.4. \frac{3+4i}{(1-i)^2(3+2i)}.$$

$$1.5. \frac{(3-4i)(2+i)^2}{1-3i}.$$

$$1.6. \frac{(-3+i)(5+2i)}{(2+i)^2}.$$

$$1.7. \frac{(-1+2i)^2}{(3-i)(2+5i)}.$$

$$1.8. \frac{-4-3i}{(3+5i)(2-3i)^2}.$$

$$1.9. \frac{(-1+i)^2(3+5i)}{4-3i}.$$

$$1.10. \frac{(3-5i)(2+3i)^2}{-5+2i}.$$

$$1.11. \frac{3-4i}{(2+5i)(3-i)^2}.$$

$$1.13. \frac{(4+3i)^2(-2-5i)}{-1+3i}$$

$$1.15. \frac{(5+3i)^2}{(-3+5i)(4-i)}.$$

$$1.17. \frac{(3+2i)(-5+2i)}{(3-2i)^2}.$$

$$1.19. \frac{(-2-3i)(1+2i)^2}{4-3i}.$$

$$1.21. \frac{5-6i}{(3+2i)(2-i)^2}.$$

$$1.23. \frac{(2-3i)^2(5+4i)}{-1+6i}.$$

$$1.25. \frac{(6-5i)(3+i)^2}{-3+i}.$$

$$1.27. \frac{(3+2i)(-6+5i)}{(1-3i)^2}.$$

$$1.29. \frac{-3+2i}{(1-2i)(3+i)^2}.$$

$$1.12. \frac{(3-5i)(2+3i)}{(6-2i)^2}.$$

$$1.14. \frac{-6+5i}{(-2+3i)^2(1-2i)}.$$

$$1.16. \frac{(3-2i)(5+6i)^2}{-3+4i}.$$

$$1.18. \frac{-3-5i}{(4+i)(-2+i)^2}.$$

$$1.20. \frac{(-2-3i)^2}{(2+i)(3-4i)}.$$

$$1.22. \frac{(1-6i)(2-3i)}{(1+2i)^2}.$$

$$1.24. \frac{(3+5i)(-2+3i)}{(5-i)^2}.$$

$$1.26. \frac{5+2i}{(3-i)^2(4+i)}.$$

$$1.28. \frac{(-3-2i)(-2+5i)^2}{3-4i}.$$

$$1.30. \frac{(5+i)^2(-6+2i)}{1-3i}.$$

Задача 2. Розв'язати рівняння.

$$2.1. \text{ а) } (1+2i)z + 3 - 2i = 0;$$

$$\text{б) } z^2 - 4z + 13 = 0.$$

$$2.2. \text{ а) } (-2+i)z - 4 + 3i = 0;$$

$$\text{б) } z^2 + 6z + 25 = 0.$$

$$2.3. \text{ а) } (1+3i)z - 5 - i = 0;$$

$$\text{б) } z^2 - 2z + 10 = 0.$$

$$2.4. \text{ а) } (3-4i)z + 2 + 3i = 0;$$

$$\text{б) } z^2 + 8z + 17 = 0.$$

$$2.5. \text{ а) } (4-3i)z + 6 - 5i = 0;$$

$$\text{б) } z^2 + 2z + 5 = 0.$$

$$2.6. \text{ а) } (-3+i)z - 2 - 3i = 0;$$

$$\text{б) } z^2 - 6z + 13 = 0.$$

$$2.7. \text{ а) } (-4+3i)z - 5 + 2i = 0;$$

$$\text{б) } z^2 + 4z + 20 = 0.$$

- 2.8. а) $(4 - 3i)z - 2 + 5i = 0$; б) $z^2 + 8z + 20 = 0$.
 2.9. а) $(3 + i)z + 4 + 3i = 0$; б) $z^2 - 10z + 34 = 0$.
 2.10. а) $(1 - 3i)z + 4 - i = 0$; б) $z^2 + 2z + 26 = 0$.
 2.11. а) $(4 + 3i)z - 5 - i = 0$; б) $z^2 + 4z + 40 = 0$.
 2.12. а) $(-3 - i)z + 4 + 3i = 0$; б) $z^2 - 6z + 10 = 0$.
 2.13. а) $(1 - 3i)z + 6 - 5i = 0$; б) $z^2 + 12z + 40 = 0$.
 2.14. а) $(-2 + 3i)z - 3 + i = 0$; б) $z^2 - 10z + 50 = 0$.
 2.15. а) $(2 + 3i)z - 5 - 3i = 0$; б) $z^2 - 8z + 25 = 0$.
 2.16. а) $(-4 - 3i)z + 6 + 2i = 0$; б) $z^2 + 10z + 41 = 0$.
 2.17. а) $(-3 - 2i)z + 7 + 3i = 0$; б) $z^2 - 12z + 52 = 0$.
 2.18. а) $(2 - 3i)z - 4 - 5i = 0$; б) $z^2 + 8z + 52 = 0$.
 2.19. а) $(-3 - 4i)z - 8 + i = 0$; б) $z^2 + 4z + 40 = 0$.
 2.20. а) $(1 + 4i)z + 9 - 4i = 0$; б) $z^2 - 6z + 45 = 0$.
 2.21. а) $(-4 + i)z - 6 + 4i = 0$; б) $z^2 + 14z + 50 = 0$.
 2.22. а) $(3 - 2i)z + 9 + 2i = 0$; б) $z^2 + 12z + 45 = 0$.
 2.23. а) $(3 + 2i)z - 1 - 6i = 0$; б) $z^2 - 4z + 20 = 0$.
 2.24. а) $(-2 - 3i)z - 8 + 3i = 0$; б) $z^2 + 2z + 17 = 0$.
 2.25. а) $(-3 + 2i)z + 4 - 7i = 0$; б) $z^2 + 8z + 65 = 0$.
 2.26. а) $(4 + i)z + 6 + 5i = 0$; б) $z^2 - 6z + 90 = 0$.
 2.27. а) $(-4 + 2i)z - 10 - 3i = 0$; б) $z^2 + 16z + 80 = 0$.
 2.28. а) $(2 - 4i)z - 9 + 2i = 0$; б) $z^2 - 4z + 20 = 0$.
 2.29. а) $(4 - 2i)z + 7 - 3i = 0$; б) $z^2 + 4z + 8 = 0$.
 2.30. а) $(-4 - 2i)z - 3 + i = 0$; б) $z^2 + 10z + 50 = 0$.

Задача 3. Записати комплексне число z в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах.

$$3.1. \quad z = \frac{2\sqrt{2}}{1+i} \quad 3.2. \quad z = \frac{4}{\sqrt{3}-i} \quad 3.3. \quad z = \frac{8}{\sqrt{3}+i}.$$

$$3.4. \quad z = \frac{4}{-1 + \sqrt{3}i} \quad 3.5. \quad z = \frac{4\sqrt{2}}{-\sqrt{3} + i} \quad 3.6. \quad z = \frac{2}{-1 + i} .$$

$$3.7. \quad z = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3} - i} \quad 3.8. \quad z = \frac{8}{1 - \sqrt{3}i} \quad 3.9. \quad z = \frac{2\sqrt{2}}{-1 + i} .$$

$$3.10. \quad z = \frac{8}{-1 + \sqrt{3}i} \quad 3.11. \quad z = \frac{4\sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}i} \quad 3.12. \quad z = \frac{4}{1 - i} .$$

$$3.13. \quad z = \frac{4}{-\sqrt{3} + i} \quad 3.14. \quad z = \frac{2\sqrt{2}}{1 - i} \quad 3.15. \quad z = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i} .$$

$$3.16. \quad z = \frac{8}{-\sqrt{3} + i} \quad 3.17. \quad z = \frac{4\sqrt{2}}{1 + \sqrt{3}i} \quad 3.18. \quad z = \frac{2}{1 + i} .$$

$$3.19. \quad z = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i} \quad 3.20. \quad z = \frac{8}{1 + \sqrt{3}i} \quad 3.21. \quad z = \frac{2\sqrt{2}}{-1 - i} .$$

$$3.22. \quad z = \frac{2}{1 - i} \quad 3.23. \quad z = \frac{4}{1 + \sqrt{3}i} \quad 3.24. \quad z = \frac{4\sqrt{2}}{-1 + \sqrt{3}i} .$$

$$3.25. \quad z = \frac{8}{\sqrt{3} - i} \quad 3.26. \quad z = \frac{4}{1 - \sqrt{3}i} \quad 3.27. \quad z = \frac{4}{1 + i} .$$

$$3.28. \quad z = \frac{4\sqrt{2}}{1 - \sqrt{3}i} \quad 3.29. \quad z = \frac{4}{\sqrt{3} + i} \quad 3.30. \quad z = \frac{4}{-1 + i} .$$

Задача 4. В пункті а) обчислити значення виразу; в пункті б) знайти всі корені двочленного рівняння і зобразити їх на комплексній площині.

$$4.1. \quad \text{а) } \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 + i} \right)^{24} ; \quad \text{б) } z^3 - 27i = 0 .$$

$$4.2. \quad \text{а) } \left(\left(\sqrt{3} + i \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \right) \right)^{18} ; \quad \text{б) } z^4 + 16 = 0 .$$

$$4.3. \quad \text{а) } \left(\frac{-2 + 2i}{\sqrt{3} - i} \right)^{24} ; \quad \text{б) } z^3 + 4\sqrt{2}(1 - i) = 0 .$$

$$4.4. \text{ a) } \left((-\sqrt{3}+i)(1-i) \right)^{12}; \quad \text{б) } z^4 - 81i = 0 .$$

$$4.5. \text{ a) } \left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i} \right)^{18}; \quad \text{б) } z^4 + 2(1+\sqrt{3}i) = 0 .$$

$$4.6. \text{ a) } \left((\sqrt{3}+i) \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \right) \right)^{30}; \quad \text{б) } z^3 + 27 = 0 .$$

$$4.7. \text{ a) } \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+i} \right)^{35}; \quad \text{б) } z^4 + 4i = 0 .$$

$$4.8. \text{ a) } \left((-3+3i) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}i \right) \right)^{12}; \quad \text{б) } z^3 + 8 = 0 .$$

$$4.9. \text{ a) } \left(\frac{2-2i}{1+\sqrt{3}i} \right)^{24}; \quad \text{б) } z^3 + 8i = 0 .$$

$$4.10. \text{ a) } \left((1-i) \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right)^{24}; \quad \text{б) } z^4 + 2(1-\sqrt{3}i) = 0$$

$$4.11. \text{ a) } \left(\frac{\sqrt{3}+i}{-1-i} \right)^{18}; \quad \text{б) } z^3 + 4\sqrt{2}(1+i) = 0 .$$

$$4.12. \text{ a) } \left((\sqrt{2}+\sqrt{2}i) \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right)^{12}; \quad \text{б) } z^4 + i = 0 .$$

$$4.13. \text{ a) } \left(\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{\sqrt{3}+i} \right)^{30}; \quad \text{б) } z^4 - 16i = 0 .$$

$$4.14. \text{ a) } \left(\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) \right)^{18}; \quad \text{б) } z^3 + 27i = 0 .$$

$$4.15. \text{ a) } \left(\frac{-\sqrt{3}+i}{1-i} \right)^{18}; \quad \text{б) } z^3 + 2(1-i) = 0 .$$

$$4.16. \text{ a) } \left((-\sqrt{2} + \sqrt{2}i) \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right)^{12}; \quad \text{б) } z^3 + 2(1+i) = 0.$$

$$4.17. \text{ a) } \left(\frac{1 - \sqrt{3}i}{-1 + i} \right)^{24}; \quad \text{б) } z^4 + 8(1 - \sqrt{3}i) = 0.$$

$$4.18. \text{ a) } \left((1+i) \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right)^{18}; \quad \text{б) } z^4 + 16i = 0.$$

$$4.19. \text{ a) } \left(\frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}i}{1-i} \right)^{12}; \quad \text{б) } z^3 + i = 0.$$

$$4.20. \text{ a) } \left((1 + \sqrt{3}i) \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \right) \right)^{24}; \quad \text{б) } z^4 - 4i = 0.$$

$$4.21. \text{ a) } \left(\frac{2 + 2i}{-\sqrt{3} - i} \right)^{18}; \quad \text{б) } z^4 + 4 = 0.$$

$$4.22. \text{ a) } \left((\sqrt{3} - i) \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right)^{12}; \quad \text{б) } z^3 - 8i = 0.$$

$$4.23. \text{ a) } \left(\frac{\sqrt{3} - i}{-\sqrt{2} - \sqrt{2}i} \right)^{30}; \quad \text{б) } z^4 + 8(1 + \sqrt{3}i) = 0.$$

$$4.24. \text{ a) } \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) (1 - \sqrt{3}i) \right)^{12}; \quad \text{б) } z^4 + 8li = 0.$$

$$4.25. \text{ a) } \left(\frac{\sqrt{3} - 3i}{\sqrt{2} + \sqrt{2}i} \right)^{12}; \quad \text{б) } z^3 + 1 = 0.$$

$$4.26. \text{ a) } \left((3 + \sqrt{3}i) \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) \right)^6; \quad \text{б) } z^4 - i = 0.$$

$$4.27. \text{ a) } \left(\frac{2 + 2i}{-1 + \sqrt{3}i} \right)^{24}; \quad \text{б) } z^3 - i = 0.$$

$$4.28. \text{ а) } \left((-2+2i) \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i \right) \right)^{30}; \quad \text{б) } z^4 + 81 = 0.$$

$$4.29. \text{ а) } \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{\sqrt{2}-\sqrt{2}i} \right)^{30}; \quad \text{б) } z^3 - 8 = 0.$$

$$4.30. \text{ а) } \left((-1+i) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) \right)^{18}; \quad \text{б) } z^4 + 1 = 0.$$

Задача 5. Розкласти многочлен на лінійні і квадратичні множники з дійсними коефіцієнтами, знаючи один з його коренів a_0 .

$$5.1. \quad x^4 + x^3 - 5x^2 - 7x + 10, \quad a_0 = -2 + i.$$

$$5.2. \quad x^4 - 2x^2 - 16x - 15, \quad a_0 = -1 + 2i.$$

$$5.3. \quad x^4 - x^3 - 6x^2 + 14x - 12, \quad a_0 = 1 - i.$$

$$5.4. \quad x^4 - 5x^3 + 13x^2 - 19x + 10, \quad a_0 = 1 + 2i.$$

$$5.5. \quad x^4 - 3x^3 - x^2 + 13x - 10, \quad a_0 = 2 - i.$$

$$5.6. \quad x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 6, \quad a_0 = -1 - i.$$

$$5.7. \quad x^4 - 2x^3 - 7x^2 - 12x + 72, \quad a_0 = -2 - 2i.$$

$$5.8. \quad x^4 - 7x^2 + 26x - 40, \quad a_0 = 1 - 2i.$$

$$5.9. \quad x^4 - 8x^3 + 23x^2 - 26x + 10, \quad a_0 = 3 - i.$$

$$5.10. \quad x^4 + 5x^3 + 5x^2 + x - 26, \quad a_0 = -3 + 2i.$$

$$5.11. \quad x^4 - 13x^2 + 52x - 40, \quad a_0 = 2 - 2i.$$

$$5.12. \quad x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 32x + 40, \quad a_0 = 1 - 3i.$$

$$5.13. \quad x^4 + x^3 - 14x^2 + 26x - 20, \quad a_0 = 1 + i.$$

$$5.14. \quad x^4 - 2x^3 - 14x + 15, \quad a_0 = -1 - 2i.$$

$$5.15. \quad x^4 + 2x^3 + 6x^2 - 8x - 40, \quad a_0 = -1 + 3i.$$

$$5.16. \quad x^4 - 10x^3 + 40x^2 - 70x + 39, \quad a_0 = 3 + 2i.$$

$$5.17. \quad x^4 + 4x^3 + 12x^2 - 4x - 13, \quad a_0 = -2 + 3i.$$

$$5.18. \quad x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 26x + 17, \quad a_0 = 4 - i.$$

$$5.19. \quad x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 16x - 32, \quad a_0 = -2 + 2i.$$

$$5.20. \quad x^4 + 9x^3 + 23x^2 + x - 34, \quad a_0 = -4 - i.$$

$$5.21. \quad x^4 - 8x^2 + 72x - 65, \quad a_0 = 2 - 3i.$$

$$5.22. \quad x^4 - 6x^3 + x^2 + 54x - 90, \quad a_0 = 3 + i.$$

$$5.23. \quad x^4 + 10x^3 + 38x^2 + 64x + 40, \quad a_0 = -3 - i.$$

$$5.24. \quad x^4 + 2x^3 + 12x^2 + 62x + 51, \quad a_0 = 1 + 4i.$$

$$5.25. \quad x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 50x - 50, \quad a_0 = -1 - 3i.$$

$$5.26. \quad x^4 + 3x^3 + 17x^2 + 13x - 34, \quad a_0 = -1 + 4i.$$

$$5.27. \quad x^4 - 13x^3 + 66x^2 - 148x + 120, \quad a_0 = 4 - 2i.$$

$$5.28. \quad x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 42x + 90, \quad a_0 = -1 - 3i.$$

$$5.29. \quad x^4 + 2x^3 - 14x^2 - 32x - 32, \quad a_0 = -1 + i.$$

$$5.30. \quad x^4 - 8x^3 + 3x^2 + 82x - 78, \quad a_0 = 5 - i.$$

Задача 6. Розкласти правильний раціональний дріб на суму найпростіших дробів.

$$6.1. \quad \frac{6x^3 + 7x^2 + 5x + 8}{(x^2 + x - 2)(x^2 + 2x + 2)}.$$

$$6.2. \quad \frac{3x^3 + 6x^2 + 13x + 6}{(x + 1)^2(x^2 + 3)}.$$

$$6.3. \quad \frac{11x^2 - 2x - 28}{(x - 2)^2(x^2 + 2x + 4)}.$$

$$6.4. \quad \frac{5x^3 - 2x^2 - 12x - 38}{(x^2 - x - 2)(x^2 + 3x + 5)}.$$

$$6.5. \quad \frac{-x^2 - 9x - 10}{(x^2 - 5x + 6)(x^2 + 2x + 8)}.$$

$$6.6. \quad \frac{-4x^2 + 7x - 25}{(x^2 - x - 2)(x^2 + 5)}.$$

$$6.7. \quad \frac{22x + 73}{(x^2 + 2x - 3)(x^2 + 4x + 8)}.$$

$$6.8. \quad \frac{3x^3 - 12x^2 + 6x + 39}{(x - 1)^2(x^2 + 3x + 8)}.$$

$$6.9. \quad \frac{x^3 + 117x}{(x^2 + 4x + 3)(x^2 + 9)}.$$

$$6.10. \quad \frac{3x^3 + 13x^2 - 35x + 69}{(x^2 + 3x - 4)(x^2 - 5x + 9)}.$$

$$6.11. \quad \frac{8x^2 - 29x + 66}{(x^2 - 4)(x^2 - 2x + 5)}.$$

$$6.12. \quad \frac{-2(2x^3 + x + 24)}{(x^2 - 4x - 5)(x^2 + 6)}.$$

- 6.13.** $\frac{-12x^2 + 47x - 8}{(x^2 - x - 6)(x^2 - 3x + 5)} \cdot$ **6.14.** $\frac{x^3 + 3x^2 - 16x + 4}{(x + 2)^2(x^2 - 4x + 8)} \cdot$
6.15. $\frac{-6x^3 + 7x^2 + 6x - 39}{(x^2 - 9)(x^2 - 3x + 10)} \cdot$ **6.16.** $\frac{3x^3 + 4x^2 - 59x - 90}{(x^2 + 3x - 10)(x^2 + 5x + 10)} \cdot$
6.17. $\frac{-2(x^3 - 11x^2 + 54x - 80)}{(x^2 - 2x - 8)(x^2 - 6x + 12)} \cdot$ **6.18.** $\frac{19x^2 - 69x + 156}{(x^2 - 16)(x^2 + 7)} \cdot$
6.19. $\frac{2(3x^2 - 17x + 6)}{(x^2 - 4x + 3)(x^2 - 5x + 12)} \cdot$ **6.20.** $\frac{2x^3 - 7x^2 + 15x - 13}{(x - 3)^2(x^2 + x + 5)} \cdot$
6.21. $\frac{2(9x^2 - x + 12)}{(x^2 - 9)(x^2 - x + 4)} \cdot$ **6.22.** $\frac{6x^3 - 8x^2 - 17x + 56}{(x^2 + 3x - 10)(x^2 - 2x + 4)} \cdot$
6.23. $\frac{-14x^2 + 7x + 72}{(x^2 - 6x + 8)(x^2 + 2x + 7)} \cdot$ **6.24.** $\frac{x^2(3x + 1)}{(x + 3)^2(x^2 - 3x + 6)} \cdot$
6.25. $\frac{7x^3 - 32x^2 + 33x - 66}{(x^2 - 7x + 10)(x^2 + 4)} \cdot$ **6.26.** $\frac{-3x^2 - 14x + 20}{(x^2 + 6x + 8)(x^2 + 2x + 6)} \cdot$
6.27. $\frac{4x^3 - 23x^2 + 29x - 52}{(x^2 - 5x + 4)(x^2 - 2x + 8)} \cdot$ **6.28.** $\frac{2x^3 + 26x^2 + 30x + 150}{(x^2 - 25)(x^2 + 2x + 5)} \cdot$
6.29. $\frac{-2(x^3 - 9x^2 + 15x - 7)}{(x - 4)^2(x^2 - 2x + 10)} \cdot$ **6.30.** $\frac{x(5x^2 + 22x + 44)}{(x^2 + 2x - 8)(x^2 + 8)} \cdot$

6 Інтегральне числення функцій однієї змінної

Теоретичні питання

1. Первісна та невизначений інтеграл.
2. Основні властивості невизначеного інтеграла. Таблиця інтегралів.
3. Інтегрування підстановкою (заміною змінної).
4. Інтегрування частинами,
5. Комплексні числа.
6. Многочлени.
7. Многочлен з дійсними коефіцієнтами.
8. Раціональні дроби. Розклад правильних раціональних дробів на елементарні.
9. Інтегрування елементарних раціональних дробів.
10. Інтеграли типу $\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right] dx$.
11. Інтеграли типу $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$. Підстановки Ейлера.
12. Інтеграли від диференціального бінома.
13. Інтеграли типу $\int R(\sin x, \cos x) dx$.
14. Інтеграли типів $\int \sin^m x, \cos^n x dx$ і $\int \sin \alpha x, \cos \beta x dx$.
15. Інтегрування деяких ірраціональних функцій за допомогою тригонометричних підстановок.
16. Означення та умови існування визначеного інтеграла.
17. Основні властивості визначеного інтеграла.
18. Інтеграл із змінною верхньою межею. Формула Ньютона - Лейбніца.
19. Заміна змінної і формула інтегрування частинами у визначеному інтегралі.
20. Означення невластивих інтегралів.

21. Формули інтегрального числення для невласних інтегралів.
22. Критерії Коші збіжності невласних інтегралів. Абсолютно збіжні інтеграли.
23. Невласні інтеграли від невід'ємних функцій.
24. Обчислення площ.
25. Об'єм тіл обертання.
26. Обчислення довжини кривої.
27. Площа поверхні обертання.
28. Робота сили.
29. Координати центра мас.
30. Обчислення моменту інерції.
31. Формули прямокутників і трапецій наближеного обчислення визначеного інтеграла.
32. Формула Сімпсона наближеного обчислення визначеного інтеграла.

Розрахункові завдання

Задача 1. Знайти невизначені інтеграли.

1.1. а) $\int \frac{\sin 3x}{\sqrt[3]{\cos^2 3x}} dx$; б) $\int x \cos 5x dx$;

в) $\int \frac{(x-1)dx}{2x^3 + 3x^2 + x}$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}-1}$; д) $\int \frac{2x-13}{\sqrt{3x^2-3x-16}} dx$;

е) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x \cdot \sqrt[4]{x^3}} dx$; є) $\int \frac{dx}{2+\operatorname{tg} x}$.

1.2. а) $\int \frac{\cos x dx}{2 \sin x - 5}$; б) $\int \frac{\ln(2x+1)}{x^3} dx$;

в) $\int \frac{(x+4)dx}{x^3 + 6x^2 + 5x}$; г) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} dx$; д) $\int \frac{x-3}{\sqrt{2x^2-4x-1}} dx$;

$$\text{e) } \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x \cdot \sqrt[3]{x^2}} dx; \quad \text{e) } \int \frac{dx}{4+\sin x}.$$

$$\mathbf{1.3.} \quad \text{a) } \int \frac{x dx}{\sqrt{2x^2+3}}; \quad \text{б) } \int x e^{3x-5} dx;$$

$$\text{в) } \int \frac{x^2+x-1}{x^3+x^2-6x} dx; \quad \text{г) } \int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{3x+1}}; \quad \text{д) } \int \frac{x-1}{\sqrt{3x^2-x+5}} dx;$$

$$\text{e) } \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt{x}} dx; \quad \text{e) } \int \frac{\sin x dx}{1+\sin x}.$$

$$\mathbf{1.4.} \quad \text{a) } \int \frac{\sin x dx}{2+5\cos x}; \quad \text{б) } \int (x+1)\cos 2x dx;$$

$$\text{в) } \int \frac{dx}{x^4+x^3+x^2+x}; \quad \text{г) } \int \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}} dx; \quad \text{д) } \int \frac{2x+1}{\sqrt{1+x-3x^2}} dx;$$

$$\text{e) } \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}{x \cdot \sqrt[9]{x^4}} dx; \quad \text{e) } \int \sin 3x \cos 5x dx.$$

$$\mathbf{1.5.} \quad \text{a) } \int \frac{dx}{x \ln^2 x}; \quad \text{б) } \int \frac{x dx}{\sin^2 x}; \quad \text{в) } \int \frac{x^3-2x+2}{(x-1)^2(x^2+1)} dx;$$

$$\text{г) } \int \frac{\sqrt[3]{3x+4}}{1+\sqrt[3]{3x+4}} dx; \quad \text{д) } \int \frac{2x+5}{\sqrt{4x^2+8x+9}} dx;$$

$$\text{e) } \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x \sqrt[9]{x^8}} dx; \quad \text{e) } \int \sin^5 2x dx.$$

$$\mathbf{1.6.} \quad \text{a) } \int \frac{\sqrt{2+\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx; \quad \text{б) } \int (2-x)\cos 3x dx;$$

$$\text{в) } \int \frac{dx}{x^4+5x^2+4}; \quad \text{г) } \int \frac{dx}{(8+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}} dx;$$

$$д) \int \frac{2x-16}{\sqrt{1+x-x^2}} dx; \quad е) \int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x})^2}}{x \cdot \sqrt[9]{x^5}} dx; \quad е) \int \frac{dx}{5-4\cos x}.$$

$$1.7. \text{ а) } \int \frac{e^{3x} dx}{16+e^{6x}}; \quad б) \int x \ln(x-1) dx; \quad в) \int \frac{x^2 dx}{x^4+x^2-2};$$

$$г) \int x\sqrt{2-x} dx; \quad д) \int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x+x^2}} dx;$$

$$е) \int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x^2})^2}}{x^2 \cdot \sqrt[9]{x}} dx; \quad е) \int \frac{2-\sin x}{2+\sin x} dx.$$

$$1.8. \text{ а) } \int x \cos(x^2+1) dx; \quad б) \int (2x+1) \arctg x dx;$$

$$в) \int \frac{(3x-7) dx}{x^3+x^2+4x+4}; \quad г) \int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}} dx;$$

$$д) \int \frac{(3x+4) dx}{\sqrt{x^2+6x+13}}; \quad е) \int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^2}}{x^6 \sqrt{x^5}} dx; \quad е) \int \frac{dx}{1+\sin^2 x}.$$

$$1.9. \text{ а) } \int \frac{\cos x}{3-5\sin^2 x} dx; \quad б) \int \arctg \sqrt{2x-1} dx;$$

$$в) \int \frac{(2x^2-3x-3) dx}{(x-1)(x^2-2x+5)}; \quad г) \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}+1} dx;$$

$$д) \int \frac{3x-1}{\sqrt{2x^2-5x+1}} dx; \quad е) \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x^2} dx; \quad е) \int \frac{dx}{3-2\cos x}.$$

$$1.10. \text{ а) } \int \frac{dx}{(1+x^2) \arctg x}; \quad б) \int \arcsin x dx;$$

$$в) \int \frac{3x^2+8}{x^4+5x^2+4} dx; \quad г) \int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}+1} dx; \quad д) \int \frac{5x+2}{\sqrt{x^2+3x-4}} dx;$$

$$\text{e) } \int \frac{\sqrt{1+x}}{x^2 \sqrt{x}} dx; \quad \text{e) } \int \frac{\sin x}{1 - \sin x} dx.$$

$$\mathbf{1.11.} \quad \text{a) } \int e^{\sin^2 x} \sin 2x dx; \quad \text{б) } \int \arctg \sqrt{4x-1} dx;$$

$$\text{в) } \int \frac{2x^2 + x + 1}{x^3 + x} dx; \quad \text{г) } \int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+1}}; \quad \text{д) } \int \frac{x-4}{\sqrt{2x^2 - x + 7}} dx;$$

$$\text{e) } \int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt{x})^3}}{x^8 \sqrt{x^7}} dx; \quad \text{e) } \int \sin^3 x dx.$$

$$\mathbf{1.12.} \quad \text{a) } \int \frac{x dx}{(x^2 + 4)^8}; \quad \text{б) } \int \ln(x^2 + 4) dx;$$

$$\text{в) } \int \frac{(x+5) dx}{x^4 + 2x^3 + x^2}; \quad \text{г) } \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x-1}}; \quad \text{д) } \int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2 - 3x + 4}} dx;$$

$$\text{e) } \int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[3]{x})^3}}{x^{12} \sqrt{x^7}} dx; \quad \text{e) } \int \cos^5 x dx.$$

$$\mathbf{1.13.} \quad \text{a) } \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^8}}; \quad \text{б) } \int (x+3) \sin 3x dx;$$

$$\text{в) } \int \frac{dx}{x^3 - x^2 - x + 1}; \quad \text{г) } \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(5x+2)^3}}; \quad \text{д) } \int \frac{4x+1}{\sqrt{2+x-x^2}} dx;$$

$$\text{e) } \int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[3]{x^2})^3}}{x^2 \cdot \sqrt[6]{x}} dx; \quad \text{e) } \int \cos 3x \cos 8x dx.$$

$$\mathbf{1.14.} \quad \text{a) } \int \frac{\ln x dx}{x \sqrt{7 + \ln^2 x}}; \quad \text{б) } \int e^{-3x} (2 - 8x) dx;$$

$$\text{B)} \int \frac{x^2 + 4x + 4}{x(x-1)^2} dx; \quad \text{Г)} \int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}} dx; \quad \text{Д)} \int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+4x-5}} dx;$$

$$\text{е)} \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2 \cdot \sqrt[8]{x}} dx; \quad \text{е)} \int \sin 2x \sin 5x dx.$$

$$\mathbf{1.15.} \quad \text{a)} \int x \cdot 7^{x^2} dx; \quad \text{б)} \int (3x-2) \cos 5x dx;$$

$$\text{B)} \int \frac{(x+2)dx}{x^3-2x^2+2x}; \quad \text{Г)} \int \frac{\sqrt{2x-3}}{x} dx; \quad \text{Д)} \int \frac{3x+2}{\sqrt{4+2x-x^2}} dx;$$

$$\text{е)} \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2} dx; \quad \text{е)} \int \sin^7 x dx.$$

$$\mathbf{1.16.} \quad \text{a)} \int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}; \quad \text{б)} \int e^{-2x}(4x-3) dx;$$

$$\text{B)} \int \frac{2x^2-3x+12}{x^3+x^2-6x} dx; \quad \text{Г)} \int \frac{\sqrt{x-5}}{x} dx;$$

$$\text{Д)} \int \frac{x-7}{\sqrt{3x^2-2x+1}} dx; \quad \text{е)} \int \frac{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{x^3}\right)^2}}{x^2 \cdot \sqrt[4]{x}} dx; \quad \text{е)} \int \cos^9 x dx.$$

$$\mathbf{1.17.} \quad \text{a)} \int \frac{x+\arctg x}{1+x^2} dx; \quad \text{б)} \int (2-4x) \sin 2x dx;$$

$$\text{B)} \int \frac{(x^2-3)dx}{x^3+2x^2-3x}; \quad \text{Г)} \int \frac{dx}{x\sqrt{x-8}}; \quad \text{Д)} \int \frac{x+5}{\sqrt{3-6x-x^2}} dx;$$

$$\text{е)} \int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt{x})^4}}{x\sqrt[10]{x^9}} dx; \quad \text{е)} \int \sin^4 x \cos^3 x dx.$$

$$\mathbf{1.18.} \quad \text{a)} \int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{3+2\cos x}}; \quad \text{б)} \int x e^{-3x} dx;$$

$$\text{B)} \int \frac{x dx}{x^3 - 3x + 2}; \quad \text{Г)} \int \frac{x dx}{\sqrt[3]{2x-3}}; \quad \text{Д)} \int \frac{2x+4}{\sqrt{3x^2+x-5}} dx;$$

$$\text{е)} \int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x})^4}}{x^5 \sqrt{x^3}} dx; \quad \text{е)} \int \cos^2 x \sin^5 x dx.$$

$$\mathbf{1.19.} \quad \text{a)} \int \frac{\sqrt[3]{4+\ln x}}{x} dx; \quad \text{б)} \int (4x-2) \cos 2x dx;$$

$$\text{B)} \int \frac{5x^2+6x+8}{(x-3)^2(x+1)^2} dx; \quad \text{Г)} \int \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{1+x}{x}} dx;$$

$$\text{Д)} \int \frac{7x-2}{\sqrt{x^2-5x+1}} dx; \quad \text{е)} \int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt[3]{x^2})^4}}{x^2 \cdot \sqrt[5]{x}} dx; \quad \text{е)} \int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} dx.$$

$$\mathbf{1.20.} \quad \text{a)} \int \frac{\arctg \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx; \quad \text{б)} \int (5x-2) e^{3x} dx;$$

$$\text{B)} \int \frac{2x^2+41x-81}{(x-1)(x+3)(x-4)} dx; \quad \text{Г)} \int \frac{x^3}{\sqrt{x+1}} dx;$$

$$\text{Д)} \int \frac{x-8}{\sqrt{4x^2+x-5}} dx; \quad \text{е)} \int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt[4]{x^3})^4}}{x^2 \cdot \sqrt[20]{x^7}} dx; \quad \text{е)} \int \frac{\cos^3 x}{\sin^8 x} dx.$$

$$\mathbf{1.21.} \quad \text{a)} \int \frac{x dx}{(x^2-1)^2}; \quad \text{б)} \int x^3 \ln x dx;$$

$$\text{B)} \int \frac{(3x+13) dx}{(x-1)(x^2+2x+5)}; \quad \text{Г)} \int \frac{\sqrt{3x+4}}{x^2} dx;$$

$$\text{Д)} \int \frac{3x+4}{\sqrt{2+3x-x^2}} dx; \quad \text{е)} \int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt[5]{x^4})^4}}{x^2 \cdot \sqrt[25]{x^{11}}} dx; \quad \text{е)} \int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx.$$

1.22. а) $\int x^2 \sqrt{x^3 + 5} dx$; б) $\int (x^2 + 4x) \cos x dx$;

в) $\int \frac{x^2 - 6x + 8}{x^3 + 8} dx$; г) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}} dx$; д) $\int \frac{x-6}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx$;

е) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^2 \cdot \sqrt[5]{x}} dx$; ё) $\int \operatorname{tg}^4 x dx$.

1.23. а) $\int \frac{x dx}{(x^2 + 1)^2 + 4}$; б) $\int (3x + 5) \sin x dx$;

в) $\int \frac{2x^2 + 2x + 20}{(x-1)(x^2 + 2x + 5)} dx$; г) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+2} dx$;

д) $\int \frac{2x+3}{\sqrt{2x^2-x+6}} dx$; е) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^2 \cdot \sqrt[5]{x}} dx$; ё) $\int \sin^5 x dx$.

1.24. а) $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$; б) $\int x^2 e^{8x} dx$;

в) $\int \frac{(x^2 + 3x - 6) dx}{(x+1)(x^2 + 6x + 13)}$; г) $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$;

д) $\int \frac{x-9}{\sqrt{4+2x-x^2}} dx$; е) $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[5]{x^4})^2}}{x^2 \cdot \sqrt[5]{x}} dx$; ё) $\int \cos^3 x dx$.

1.25. а) $\int \frac{5x+3}{\sqrt{3-x^2}} dx$; б) $\int \ln x dx$;

в) $\int \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 - 1} dx$; г) $\int x \sqrt{x-1} dx$; д) $\int \frac{2x+7}{\sqrt{x^2 + 5x - 4}} dx$;

$$\text{e) } \int \frac{\sqrt[4]{\left(1+\sqrt[5]{x^4}\right)^3}}{x^2 \cdot \sqrt[5]{x^2}} dx; \quad \text{e) } \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx.$$

$$\mathbf{1.26.} \quad \text{a) } \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}; \quad \text{б) } \int (x+1)e^x dx;$$

$$\text{в) } \int \frac{36dx}{(x+2)(x^2-2x+10)}; \quad \text{г) } \int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx;$$

$$\text{д) } \int \frac{3x-4}{\sqrt{2x^2-6x+1}} dx; \quad \text{e) } \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{x^3\sqrt{x}} dx; \quad \text{e) } \int \frac{dx}{\cos^4 x}.$$

$$\mathbf{1.27.} \quad \text{a) } \int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx; \quad \text{б) } \int (x^2+2x+3)\cos x dx;$$

$$\text{в) } \int \frac{(9x-9)dx}{(x+1)(x^2-4x+13)}; \quad \text{г) } \int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}};$$

$$\text{д) } \int \frac{2x+5}{\sqrt{3x^2+9x-4}} dx; \quad \text{e) } \int \frac{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^2}}{x^{12}\sqrt[5]{x}} dx; \quad \text{e) } \int \sin^2 x \cos^2 x dx.$$

$$\mathbf{1.28.} \quad \text{a) } \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6-1}}; \quad \text{б) } \int e^{2x} \cos x dx;$$

$$\text{в) } \int \frac{7x-10}{x^3+8} dx; \quad \text{г) } \int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}; \quad \text{д) } \int \frac{4x+3}{\sqrt{2x^2-x+5}} dx;$$

$$\text{e) } \int \frac{\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x}}}{x^{12}\sqrt[5]{x}} dx; \quad \text{e) } \int \sin^3 x \cos^4 x dx.$$

$$\mathbf{1.29.} \quad \text{a) } \int \frac{xdx}{\sqrt{x^4-1}}; \quad \text{б) } \int (x+5)\arctg x dx;$$

$$\begin{aligned} \text{в)} \int \frac{(4x^2 + 3x + 17)dx}{(x-1)(x^2 + 2x + 5)}; \quad \text{г)} \int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1} dx; \\ \text{д)} \int \frac{3x-7}{\sqrt{x^2-5x+1}} dx; \quad \text{е)} \int \frac{\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x^6 \sqrt{x^5}} dx; \quad \text{е)} \int \sin^2 x \cos^3 x dx. \end{aligned}$$

$$1.30. \text{ а)} \int \frac{dx}{(x-7)\sqrt{x}}; \quad \text{б)} \int x^2 \arctg x dx;$$

$$\text{в)} \int \frac{dx}{(x+2)^2(x+3)^2}; \quad \text{г)} \int \frac{x dx}{\sqrt{x+1}};$$

$$\text{д)} \int \frac{(7x-1)dx}{\sqrt{2-3x-x^2}}; \quad \text{е)} \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[5]{x}}}{x^{15}\sqrt{x^4}} dx; \quad \text{е)} \int \cos^2 x \sin^4 x dx.$$

Задача 2. Обчислити визначені інтеграли.

$$2.1. \text{ а)} \int_0^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx; \quad \text{б)} \int_2^3 x \ln(x-1) dx.$$

$$2.2. \text{ а)} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx; \quad \text{б)} \int_{-2}^0 x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx.$$

$$2.3. \text{ а)} \int_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4} dx; \quad \text{б)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx.$$

$$2.4. \text{ а)} \int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx; \quad \text{б)} \int_0^{\pi} x^2 \sin x dx.$$

$$2.5. \text{ а)} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^3+1}{x^2 \sqrt{4-x^2}} dx; \quad \text{б)} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \arccos 2x dx.$$

$$2.6. \quad \text{a)} \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{3-x^2} dx;$$

$$\text{б)} \int_1^2 (x-1) \ln x dx.$$

$$2.7. \quad \text{a)} \int_{-3}^3 x^2 \sqrt{9-x^2} dx;$$

$$\text{б)} \int_{-\frac{1}{2}}^0 x e^{-2x} dx.$$

$$2.8. \quad \text{a)} \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^6} dx;$$

$$\text{б)} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin x \cos x dx.$$

$$2.9. \quad \text{a)} \int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3} dx;$$

$$\text{б)} \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{x}{e^{3x}} dx.$$

$$2.10. \quad \text{a)} \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 \frac{dx}{x^2 \sqrt{(1+x^2)^2}};$$

$$\text{б)} \int_1^{e^2} \sqrt{x} \ln x dx.$$

$$2.11. \quad \text{a)} \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx;$$

$$\text{б)} \int_1^{e^2} \frac{\ln^2 x}{x^2} dx.$$

$$2.12. \quad \text{a)} \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+3)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\text{б)} \int_0^1 \arctg \sqrt{x} dx.$$

$$2.13. \quad \text{a)} \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2} dx;$$

$$\text{б)} \int_0^{\pi} (x+2) \cos \frac{x}{2} dx.$$

$$2.14. \quad \text{a)} \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^2};$$

$$\text{б)} \int_0^{\frac{\pi}{8}} x^2 \sin 4x dx.$$

2.15. a) $\int_{2\sqrt{3}}^6 \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 9}}$;

б) $\int_1^2 x^2 \ln x dx$.

2.16. a) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}}$;

б) $\int_1^2 \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} dx$.

2.17. a) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-x^2} dx$;

б) $\int_{\frac{3}{2}}^2 \operatorname{arctg}(2x-3) dx$.

2.18. a) $\int_0^3 \frac{dx}{(9+x^2)\sqrt{9+x^2}}$;

б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+3) \sin x dx$.

2.19. a) $\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} dx$;

б) $\int_1^e x \ln^2 x dx$.

2.20. a) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$;

б) $\int_{-3}^0 (x-2) e^{-\frac{x}{3}} dx$.

2.21. a) $\int_0^{\sqrt{2.5}} \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}$;

б) $\int_0^{\frac{\pi}{9}} \frac{x dx}{\cos^2 3x}$.

2.22. a) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$;

б) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \arcsin(1-x) dx$.

2.23. a) $\int_{\sqrt{3}}^2 \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2-3}}$;

б) $\int_1^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx$.

$$2.24. \text{ а) } \int_2^4 \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^4} dx;$$

$$\text{б) } \int_{-1}^0 x \ln(1-x) dx.$$

$$2.25. \text{ а) } \int_0^{\sqrt{\frac{7}{3}}} x^3 \sqrt{7+x^2} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^1 \frac{\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{4-x^2}} dx.$$

$$2.26. \text{ а) } \int_{\sqrt{8}}^{4\sqrt{\frac{2}{3}}} \frac{\sqrt{x^2-8}}{x^4} dx;$$

$$\text{б) } \int_1^2 \ln(3x+2) dx.$$

$$2.27. \text{ а) } \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x^5 \sqrt{x^2-1}};$$

$$\text{б) } \int_0^4 x^3 \sqrt{x^2+9} dx.$$

$$2.28. \text{ а) } \int_0^3 x^4 \sqrt{9-x^2} dx;$$

$$\text{б) } \int_{-1}^0 (x+1)e^{-2x} dx.$$

$$2.29. \text{ а) } \int_0^3 \frac{x^3}{\sqrt{9+x^2}} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \operatorname{tg}^2 x dx.$$

$$2.30. \text{ а) } \int_0^{\sqrt{6}} \sqrt{6-x^2} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^1 x \arctg x dx.$$

Задача 3. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність.

$$3.1. \text{ а) } \int_0^{\infty} \frac{x dx}{16x^4+1};$$

$$\text{б) } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}.$$

$$3.2. \text{ а) } \int_1^{\infty} \frac{16x dx}{16x^4-1};$$

$$\text{б) } \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+9}}.$$

$$3.3. \quad \text{a)} \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{\sqrt{16x^4 + 1}};$$

$$\text{б)} \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{e^{3+\frac{1}{x}}}{x^2} dx.$$

$$3.4. \quad \text{a)} \int_1^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{16x^4 - 1}};$$

$$\text{б)} \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^5}}.$$

$$3.5. \quad \text{a)} \int_{-\infty}^0 \frac{x dx}{\sqrt{(x^2 + 4)^3}};$$

$$\text{б)} \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{\ln(3x-1)}{3x-1} dx.$$

$$3.6. \quad \text{a)} \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(x^3 + 8)^4}};$$

$$\text{б)} \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{dx}{20x^2 - 9x + 1}.$$

$$3.7. \quad \text{a)} \int_0^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt[4]{(16 + x^2)^5}};$$

$$\text{б)} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln 2 dx}{(1-x) \ln^2(1-x)}.$$

$$3.8. \quad \text{a)} \int_4^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 1}};$$

$$\text{б)} \int_0^{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt[3]{\ln(2-3x)}}{2-3x} dx.$$

$$3.9. \quad \text{a)} \int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{\pi(x^2 + 4x + 5)};$$

$$\text{б)} \int_0^1 \frac{x dx}{1-x^4}.$$

$$3.10. \quad \text{a)} \int_{-1}^{\infty} \frac{x dx}{x^2 + 4x + 5};$$

$$\text{б)} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos 3x}{\sqrt[6]{(1 - \sin 3x)^5}} dx.$$

$$3.11. \quad \text{a)} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\pi(1+4x^2)} dx;$$

$$\text{б)} \int_0^1 \frac{2x dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

$$3.12. \quad \text{a)} \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{16 dx}{\pi(4x^2 + 4x + 5)};$$

$$\text{б)} \int_{-\frac{1}{3}}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}.$$

$$3.13. \text{ a) } \int_0^{\infty} \frac{x dx}{4x^2 + 4x + 5};$$

$$\text{б) } \int_{\frac{3}{4}}^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}.$$

$$3.14. \text{ a) } \int_0^{\infty} \frac{(x+2)dx}{\sqrt[3]{(x^2+4x+1)^4}};$$

$$\text{б) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx.$$

$$3.15. \text{ a) } \int_0^{\infty} \frac{3-x^2}{x^2+4} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^1 \frac{2e^{1-\frac{2}{\pi} \arcsin x}}{\pi \sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$3.16. \text{ a) } \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2} dx;$$

$$\text{б) } \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[5]{4x-x^2-4}}.$$

$$3.17. \text{ a) } \int_1^{\infty} \frac{4dx}{x(1+\ln^2 x)};$$

$$\text{б) } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x dx}{\sqrt[7]{\cos^2 x}}.$$

$$3.18. \text{ a) } \int_0^{\infty} x \sin x dx;$$

$$\text{б) } \int_{-\frac{3}{4}}^0 \frac{dx}{\sqrt{4x+3}}.$$

$$3.19. \text{ a) } \int_{-\infty}^{-1} \frac{7dx}{(x^2-4x)\ln 5};$$

$$\text{б) } \int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{(x^2-1)^3}}.$$

$$3.20. \text{ a) } \int_{\frac{1}{3}}^{\infty} \frac{\pi dx}{(1+9x^2) \operatorname{arctg}^2 3x};$$

$$\text{б) } \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{9x^2-9x+2}.$$

$$3.21. \text{ a) } \int_2^{\infty} \frac{dx}{(4+x^2) \sqrt{\pi \operatorname{arctg} \frac{x}{2}}};$$

$$\text{б) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3 \sin^3 x dx}{\sqrt{\cos x}}.$$

$$3.22. \text{ a) } \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x}; \quad \text{б) } \int_0^3 \frac{\sqrt[3]{9} x dx}{\sqrt[3]{9 - x^2}}.$$

$$3.23. \text{ a) } \int_0^{\infty} e^{-3x} x dx; \quad \text{б) } \int_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt[3]{1 - x^5}}.$$

$$3.24. \text{ a) } \int_{-\infty}^0 \left(\frac{x^2}{x^3 - 1} - \frac{x}{1 + x^2} \right) dx; \quad \text{б) } \int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{64 - x^6}}.$$

$$3.25. \text{ a) } \int_0^{\infty} \frac{dx}{2x^2 - 2x + 1}; \quad \text{б) } \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt[9]{1 - 2x}}.$$

$$3.26. \text{ a) } \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}; \quad \text{б) } \int_1^5 \frac{x^2 dx}{\sqrt{31(x^3 - 1)}}.$$

$$3.27. \text{ a) } \int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x - 1)^2}; \quad \text{б) } \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{3x - x^2 - 2}}.$$

$$3.28. \text{ a) } \int_1^{\infty} \frac{dx}{6x^2 - 5x + 1}; \quad \text{б) } \int_0^4 \frac{10x dx}{\sqrt[4]{(16 - x^2)^3}}.$$

$$3.29. \text{ a) } \int_1^{\infty} \frac{dx}{9x^2 - 9x + 2}; \quad \text{б) } \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1 - 4x}}.$$

$$3.30. \text{ a) } \int_3^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}; \quad \text{б) } \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(2x - 1)^2}.$$

Задача 4. Обчислити площу фігур, обмежених вказаними лініями.

4.1. а) $y = (x-2)^3$, $y = 4x-8$; б) $r = 3\sqrt{\cos 2\varphi}$;

в) $\begin{cases} x = 4\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin^3 t, \end{cases} \quad x = 2 \quad (x \geq 2).$

4.2. а) $y = x^2$, $y = 3-x$; б) $r = 4 \cos 3\varphi$, $r = 2 \quad (r \geq 2)$;

в) $\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin t, \end{cases} \quad y = 2 \quad (y \geq 2).$

4.3. а) $y = \sqrt{x}$, $y = x^3$; б) $r = 6 \sin 3\varphi$, $r = 3 \quad (r \geq 3)$;

в) $\begin{cases} x = 16 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, \end{cases} \quad x = 2 \quad (x \geq 2).$

4.4. а) $y = 4-x^2$, $y = x^2-2x$; б) $r = \cos \varphi$, $r = 2 \cos \varphi$;

в) $\begin{cases} x = 7 \cos^3 t, \\ y = 7 \sin^3 t. \end{cases}$

4.5. а) $y = (x+1)^2$, $y^2 = x+1$; б) $r = 4 \cos 3\varphi$;

в) $\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 6 \sin t, \end{cases} \quad y = 3 \quad (y \geq 3).$

4.6. а) $y = \arccos x$, $y = 0$, $x = 0$; б) $r = 3 \cos 2\varphi$;

в) $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} \quad y = 3 \quad (0 < x < 4\pi, y \geq 3).$

4.7. а) $y = 2x - x^2 + 3$, $y = x^2 - 4x + 3$; б) $r = 2(1 - \cos \varphi)$;

в) $\begin{cases} x = 16 \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases} \quad x = 6\sqrt{3} \quad (x \geq 6\sqrt{3}).$

4.8. a) $y = x\sqrt{9-x^2}$, $y = 0$ ($0 \leq x \leq 3$); б) $r^2 = 2\sin 2\varphi$;

б) $\begin{cases} x = 6\cos t, \\ y = 2\sin t, \end{cases} \quad y = \sqrt{3} \quad (y \geq \sqrt{3}).$

4.9. a) $y = x \arctg x$, $y = 0$, $x = \sqrt{3}$; б) $r = \sin 6\varphi$;

б) $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases} \quad y = 0 \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$

4.10. a) $y = \frac{x}{1+\sqrt{x}}$, $y = 0$, $x = 1$; б) $r = 2(1 + \cos \varphi)$;

б) $\begin{cases} x = 8\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases} \quad x = 4 \quad (x \geq 4).$

4.11. a) $y = \sqrt{4-x^2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$; б) $r = 2\sin 3\varphi$;

б) $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t, \\ y = 3\sqrt{2}\sin t, \end{cases} \quad y = 3 \quad (y \geq 3).$

4.12. a) $y = \sqrt{e^x - 1}$, $y = 0$, $x = \ln 2$; б) $r = 2 + \cos \varphi$;

б) $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \end{cases} \quad y = 9 \quad (0 < x < 12\pi, y \geq 9).$

4.13. a) $y = \frac{1}{1+x^2}$, $y = \frac{x^2}{2}$; б) $r = 1 + \sqrt{2}\cos \varphi$;

б) $\begin{cases} x = 32\cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases} \quad x = 4 \quad (x \geq 4).$

4.14. a) $y^2 = x+1$, $y^2 = 9-x$; б) $r = \frac{3}{2}\cos \varphi$, $r = \frac{5}{2}\cos \varphi$;

$$\text{B)} \begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 8 \sin t, \end{cases} \quad y = 4 \quad (y \geq 4).$$

$$\mathbf{4.15.} \quad \text{a)} \quad y^2 = x^3, \quad x = 0, \quad y = 4; \quad \text{б)} \quad r = \sin \varphi, \quad r = 2 \sin \varphi;$$

$$\text{B)} \begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \end{cases} \quad y = 6 \quad (0 < x < 12\pi, \quad y \geq 6).$$

$$\mathbf{4.16.} \quad \text{a)} \quad y = x^2 \sqrt{8 - x^2}, \quad y = 0 \quad (0 \leq x \leq 2\sqrt{2}); \quad \text{б)} \quad r = 4 \sin^2 \varphi;$$

$$\text{B)} \begin{cases} x = 8 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t, \end{cases} \quad x = 3\sqrt{3} \quad (x \geq 3\sqrt{3}).$$

$$\mathbf{4.17.} \quad \text{a)} \quad y = (x - 1)^2, \quad y^2 = x - 1; \quad \text{б)} \quad r = 4 \cos 4\varphi;$$

$$\text{B)} \begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 2 \sin t. \end{cases}$$

$$\mathbf{4.18.} \quad \text{a)} \quad y^2 = 9x, \quad y = 3x; \quad \text{б)} \quad r = \frac{1}{2} + \cos \varphi;$$

$$\text{B)} \begin{cases} x = 10(t - \sin t), \\ y = 10(1 - \cos t), \end{cases} \quad y = 15 \quad (0 < x < 20\pi, \quad y \geq 15).$$

$$\mathbf{4.19.} \quad \text{a)} \quad y = x^2 \cos x, \quad y = 0 \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right); \quad \text{б)} \quad r^2 = 9 \sin 4\varphi;$$

$$\text{B)} \begin{cases} x = 3(\cos t + t \sin t), \\ y = 3(\sin t - t \cos t), \end{cases} \quad y = 0 \quad (0 \leq t \leq \pi).$$

$$\mathbf{4.20.} \quad \text{a)} \quad y^2 = 4x, \quad x^2 = 4y; \quad \text{б)} \quad r = \frac{5}{2} \sin \varphi, \quad r = \frac{3}{2} \sin \varphi;$$

$$\text{B)} \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, \\ y = 4\sqrt{2} \sin t, \end{cases} \quad y = 4 \quad (y \geq 4).$$

4.21. a) $y^2 = x^3$, $x = 2$; б) $r = 6 \sin \varphi$, $r = 4 \sin \varphi$;

б) $\begin{cases} x = 32 \cos^3 t, \\ y = 3 \sin^3 t, \end{cases} \quad x = 12\sqrt{3} \quad (x \geq 12\sqrt{3}) .$

4.22. a) $y = x^2$, $y = 2 - x^2$; б) $r = 1 + \sqrt{2} \sin \varphi$;

б) $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases} \quad y = 6 \quad (0 < x < 8\pi, y \geq 6) .$

4.23. a) $y^2 = 4 - x^2$, $x = 0$; б) $r = 2 \cos \varphi$, $r = 3 \cos \varphi$;

б) $\begin{cases} x = 9 \cos t, \\ y = 4 \sin t, \end{cases} \quad y = 2 \quad (y \geq 2) .$

4.24. a) $y = \cos^5 x \sin 2x$, $y = 0 \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$; б) $r = 3 \sin 4\varphi$;

б) $\begin{cases} x = 8(t - \sin t), \\ y = 8(1 - \cos t), \end{cases} \quad y = 12 \quad (0 < x < 16\pi, y \geq 12) .$

4.25. a) $y = x^3$, $y = 1$, $x = 0$; б) $r = \cos \varphi + \sin \varphi$;

б) $\begin{cases} x = 24 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, \end{cases} \quad x = 9\sqrt{3} \quad (x \geq 9\sqrt{3}) .$

4.26. a) $yx = 6$, $x + y - 7 = 0$; б) $r = 4 \sin 3\varphi$, $r = 2 \quad (r \geq 2)$;

б) $\begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 8 \sin t, \end{cases} \quad y = 4\sqrt{3} \quad (y \geq 4\sqrt{3}) .$

4.27. a) $y = 2^x$, $y = 2x - x^2$, $x = 0$, $x = 2$; б) $r = 2 \cos 6\varphi$;

б) $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} \quad y = 2 \quad (0 < x < 4\pi, y \geq 2) .$

$$4.28. \text{ а) } x^2 = 4y, y = \frac{8}{x^2 + 4}; \quad \text{б) } r = \cos \varphi - \sin \varphi ;$$

$$\text{в) } \begin{cases} x = 4\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = \sqrt{2} \sin^3 t, \end{cases} \quad x = 2 \quad (x \geq 2).$$

$$4.29. \text{ а) } y = x + 1, y = \cos x, y = 0; \quad \text{б) } r = \frac{1}{2} + \sin \varphi ;$$

$$\text{в) } \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos t, \\ y = 5\sqrt{2} \sin t, \end{cases} \quad y = 5 \quad (y \geq 5).$$

$$4.30. \text{ а) } y = \sin x \cos^2 x, y = 0 \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right); \quad \text{б) } r = 2 \sin 5\varphi ;$$

$$\text{в) } \begin{cases} x = 2 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t. \end{cases}$$

Задача 5. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури Φ , обмеженої вказаними лініями, навколо вказаної осі координат.

$$5.1. \quad \Phi: y^2 = 4 - x, x = 0, Oy.$$

$$5.2. \quad \Phi: \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2}, x = 0, y = 0, Ox.$$

$$5.3. \quad \Phi: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, Oy.$$

$$5.4. \quad \Phi: y^3 = x^2, y = 1, Ox.$$

$$5.5. \quad \Phi: x = 6(t - \sin t), y = 6(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi), Ox.$$

$$5.6. \quad \Phi: x = 3 \cos^2 t, y = 4 \sin^2 t \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right), Oy.$$

$$5.7. \quad \Phi: y^2 = x, x^2 = y, Ox.$$

5.8. $\Phi: y^2 = (x-1)^3, x=2, Ox.$

5.9. $\Phi: x = \sqrt{1-y^2}, y = \sqrt{\frac{3}{2}}x, y=0, Ox.$

5.10. $\Phi: y = \sin x, y=0 \ (0 \leq x \leq \pi), Ox.$

5.11. $\Phi: y^2 = 4x, x^2 = 4y, Ox.$

5.12. $\Phi: x = 2 \cos t, y = 5 \sin t, Oy.$

5.13. $\Phi: y = x^2, 8x = y^2, Oy.$

5.14. $\Phi: y = e^x, x=0, y=0, x=1, Ox.$

5.15. $\Phi: y^2 = \frac{4x}{3}, x=3, Ox.$

5.16. $\Phi: y = 2x - x^2, y=0, Ox.$

5.17. $\Phi: r = 2(1 + \cos \varphi),$ полярна вісь.

5.18. $\Phi: x = 7 \cos^3 t, y = 7 \sin^3 t, Oy.$

5.19. $\Phi: \frac{x^2}{16} + y^2 = 1, Ox.$

5.20. $\Phi: x^3 = (y-1)^2, x=0, y=0, Ox.$

5.21. $\Phi: xy = 4, 2x + y - 6 = 0, Ox.$

5.22. $\Phi: x = \sqrt{3} \cos t, y = 2 \sin t, Oy.$

5.23. $\Phi: y = 2 - x^2, y = x^2, Ox.$

5.24. $\Phi: y = -x^2 + 8, y = x^2, Ox.$

5.25. $\Phi: y^2 = (x+4)^3, x=0, Ox.$

5.26. $\Phi: y = x^3, x=0, y=8, Oy.$

5.27. $\Phi: x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, Ox$.

5.28. $\Phi: 2y = x^2, 2x + 2y - 3 = 0, Ox$.

5.29. $\Phi: y = x - x^2, y = 0, Ox$.

5.30. $\Phi: y = 2 - \frac{x^2}{2}, x + y = 2, Oy$.

Задача 6. Обчислити довжину дуг даних ліній.

6.1. а) $y = \ln x, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{15}$; б) $r = 3e^{\frac{3\varphi}{4}}, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$;

в) $\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases} 0 \leq t \leq \pi$.

6.2. а) $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}, 1 \leq x \leq 2$; б) $r = \sqrt{2}e^\varphi, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$;

в) $\begin{cases} x = 2(\cos t + t \sin t), \\ y = 2(\sin t - t \cos t), \end{cases} 0 \leq t \leq \pi$.

6.3. а) $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x, 0 \leq x \leq \frac{7}{9}$;

б) $r = \sin^3 \frac{\varphi}{3}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$;

в) $\begin{cases} x = 3(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 3(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases} 0 \leq t \leq 2\pi$.

6.4. а) $y = \ln \frac{5}{2x}, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$; б) $r = 2e^{\frac{4\varphi}{3}}, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$;

в) $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t \sin t, \end{cases} 0 \leq t \leq \pi$.

6.5. а) $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{9}$; б) $r = 6 \sin \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$;

в) $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases} \quad \pi \leq t \leq 2\pi$.

6.6. а) $y = e^x + 6$, $\ln \sqrt{8} \leq x \leq \ln \sqrt{15}$; б) $r = 2\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{5}{12}$;

в) $\begin{cases} x = 10 \cos^3 t, \\ y = 10 \sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

6.7. а) $y^2 = (x+1)^3$, яка відтинається прямою $x = 4$;

б) $r = 3e^{\frac{3\varphi}{4}}$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$; в) $\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi$.

6.8. а) $y = 1 - \ln \cos x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$; б) $r = 3\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{4}{3}$;

в) $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{4} \cos 2t, \\ y = \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{4} \sin 2t, \end{cases} \quad \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{2\pi}{3}$.

6.9. а) $y = 2 + \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}$, $\frac{1}{4} \leq x \leq 1$;

б) $r = 6 \cos^3 \frac{\varphi}{3}$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$; в) $\begin{cases} x = 4(\cos t + t \sin t), \\ y = 4(\sin t - t \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$.

6.10. а) $y = \ln(x^2 - 1)$, $2 \leq x \leq 3$; б) $r = 5e^{\frac{5\varphi}{12}}$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$;

$$\text{в) } \begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}.$$

6.11. а) $y^2 = (x-1)^3$, від точки $A(1; 0)$ до точки $B(6; \sqrt{125})$;

$$\text{б) } r = 2 \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}; \quad \text{в) } \begin{cases} x = 4 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t. \end{cases}$$

6.12. а) $y^2 = x^3$, яка відтинається прямою $x = 5$;

$$\text{б) } r = 1 - \sin \varphi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq -\frac{\pi}{6}; \quad \text{в) } \begin{cases} x = 6 \cos^3 t, \\ y = 6 \sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}.$$

6.13. а) $y = 2 + \operatorname{ch} x$, $0 \leq x \leq 1$; б) $r = 3 \cos \varphi$;

$$\text{в) } \begin{cases} x = 2,5(t - \sin t), \\ y = 2,5(1 - \cos t), \end{cases} \quad \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi.$$

6.14. а) $y = \ln(1 - x^2)$, $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$; б) $r = 3(1 - \cos \varphi)$;

$$\text{в) } \begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases} \quad \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi.$$

6.15. а) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}}$; б) $r = 2 \cos^3 \frac{\varphi}{3}$;

$$\text{в) } \begin{cases} x = 3,5(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 3,5(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

6.16. а) $y = \sqrt{1 - x^2} + \arccos x$, $0 \leq x \leq \frac{8}{9}$;

$$\text{б) } r = 3(1 + \sin \varphi), \quad -\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq 0; \quad \text{в) } \begin{cases} x = 5 \cos^2 t, \\ y = 5 \sin^2 t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

6.17. а) $9y^2 = 4(3-x)^3$, між точками перетину з віссю Oy ;

$$\text{б) } r = 4\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{3}{4}; \quad \text{в) } \begin{cases} x = 8 \cos^3 t, \\ y = 8 \sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{6}.$$

6.18. а) $y = -\arccos \sqrt{x} + \sqrt{x-x^2}$, $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$; б) $r = 3 \sin \varphi$;

$$\text{в) } \begin{cases} x = 6(\cos t + t \sin t), \\ y = 6(\sin t - t \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

6.19. а) $y = \ln \sin x$, $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$; б) $r = 5\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{12}{5}$;

$$\text{в) } \begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases} \quad \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{2\pi}{3}.$$

6.20. а) $y = e^x + 13$, $\ln \sqrt{15} \leq x \leq \ln \sqrt{24}$;

$$\text{б) } r = 4(1 - \sin \varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}; \quad \text{в) } \begin{cases} x = 2 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}.$$

6.21. а) $y = \frac{1 - e^x - e^{-x}}{2}$, $0 \leq x \leq 3$; б) $r = 2(1 - \cos \varphi)$;

$$\text{в) } \begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases} \quad \frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{4}.$$

6.22. а) $y^2 = (x-1)^3$, від точки $A(2; -1)$ до точки $B(5; -8)$;

$$\text{б) } r = 6e^{\frac{12\varphi}{5}}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}; \quad \text{в) } \begin{cases} x = 4(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 4(2\sin t - \sin 2t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

6.23. а) $y = 1 - \ln(x^2 - 1)$, $3 \leq x \leq 4$;

$$\text{б) } r = 6(1 + \sin \varphi), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 0; \quad \text{в) } \begin{cases} x = 7(t - \sin t), \\ y = 7(1 - \cos t), \end{cases} \quad 2\pi \leq t \leq 4\pi.$$

6.24. а) $y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$, $0 \leq x \leq 2$; б) $r = \sqrt{2}e^\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$;

$$\text{в) } \begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

6.25. а) $y = 2 + \ln \cos x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$;

$$\text{б) } r = 5(1 - \cos \varphi), \quad -\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq 0; \quad \text{в) } \begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \end{cases}, \quad \frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{4}.$$

6.26. а) $y = e^x + e$, $\ln \sqrt{3} \leq x \leq \ln \sqrt{15}$;

$$\text{б) } r = 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{4}{3}; \quad \text{в) } \begin{cases} x = \sqrt{3}t^3, \\ y = t - t^3 \end{cases}, \quad (\text{петля}).$$

6.27. а) $y = \ln 7 - \ln x$, $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$; б) $r = 5 \sin \varphi$;

$$\text{в) } \begin{cases} x = 8(\cos t + t \sin t), \\ y = 8(\sin t - t \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}.$$

6.28. а) $y = -\arccos x + \sqrt{1-x^2} + 1, \quad 0 \leq x \leq \frac{9}{16};$

б) $r = 4 \cos \varphi;$ в) $\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$

6.29. а) $y = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 3}{4}, \quad 0 \leq x \leq 2;$ б) $r = 5(1 + \cos \varphi);$

в) $\begin{cases} x = 2(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 2(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}.$

6.30. а) $y^2 = x^3$, від точки $O(0; 0)$ до точки $A(4; 8);$

б) $r = 7(1 - \sin \varphi), \quad -\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6};$ в) $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$

Задача 7. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням дуги кривої L , навколо вказаної осі:

7.1. $L: y = \frac{x^3}{3} \quad \left(-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}\right), \quad O_x.$

7.2. $L: r = 2 \cos \varphi$, полярна вісь.

7.3. $L: x = 10(t - \sin t), \quad y = 10(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi), \quad O_x.$

7.4. $L: y = \frac{x^2}{2}$, яка відтинається прямою $y = \frac{3}{2}$, $O_y.$

7.5. $L: 3y = x^2 \quad (0 \leq x \leq 2), \quad O_x.$

7.6. $L: y = \sqrt{x}$, яка відтинається прямою $y = x$, $O_x.$

7.7. $L: x = 2(t - \sin t), \quad y = 2(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi), \quad O_x.$

7.8. $L : x = \cos t, y = 3 + \sin t, Ox.$

7.9. $L : 3x = y^3 \ (0 \leq t \leq 2), Oy.$

7.10. $L : y = \frac{x^3}{3} \ (-1 \leq x \leq 1), Ox.$

7.11. $L : x = \cos t, y = 1 + \sin t, Ox.$

7.12. $L : x^2 = 4 + y$, яка відтинається прямою $y = 2$, $Oy.$

7.13. $L : x = 3(t - \sin t), y = 3(1 - \cos t) \ (0 \leq t \leq 2\pi), Ox.$

7.14. $L : x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, Ox.$

7.15. $L : r = \sqrt{\cos 2\varphi}$, полярна вісь.

7.16. $L : y^2 = 4 + x$, яка відтинається прямою $x = 2$, $Ox.$

7.17. $L : y^2 = 2x$, яка відтинається прямою $2x = 3$, $Ox.$

7.18. $L : 3y = x^3 \ (0 \leq x \leq 1), Ox.$

7.19. $L : r^2 = 4 \cos 2\varphi$, полярна вісь.

7.20. $L : r = 6 \sin \varphi$, полярна вісь.

7.21. $L : x = t - \sin t, y = 1 - \cos t \ (0 \leq t \leq 2\pi), Ox.$

7.22. $L : r = 2 \sin \varphi$, полярна вісь.

7.23. $L : r = \frac{2}{3} \cos \varphi$, полярна вісь.

7.24. $L : x = 3 \cos^3 t, y = 3 \sin^3 t, Ox.$

7.25. $L : x = 2 \cos t, y = 3 + 2 \sin t, Ox.$

7.26. $L : r^2 = 9 \cos 2\varphi$, полярна вісь.

7.27. $L : y = x^3$, між прямими $x = \pm \frac{2}{3}$, Ox .

7.28. $L : x = 2 \cos^3 t, y = 2 \sin^3 t, Ox$.

7.29. $L : x = \cos t, y = 2 + \sin t, Ox$.

7.30. $L : r = 4 \sin \varphi$, полярна вісь.

Задача 8. Обчислити роботу, яку необхідно затратити на вивчаування води з резервуара P . Питому вагу води прийняти рівною $9,81 \text{ kH/ì}^3$, $\pi = 3,14$.

8.1. P : правильна чотирикутна піраміда зі стороною основи 2м і висотою 5м.

8.2. P : правильна чотирикутна піраміда, повернута вершиною вниз. Сторона основи піраміди дорівнює 2м і висота дорівнює 6м.

8.3. P : котел, який має форму сферичного сегмента, висота якого 1,5м і радіус 1м.

8.4. P : півциліндр, радіус основи якого 1м, довжина 5м.

8.5. P : зрізаний конус, у якого радіус верхньої основи дорівнює 1м, нижньої – 2м, висота – 3м.

8.6. P : жолоб, перпендикулярний переріз якого є параболою. Довжина жолоба 5м, ширина 4м, глибина 4м.

8.7. P : циліндрична цистерна радіус основи якої 1м, довжина 5м.

8.8. P : правильна трикутна піраміда, повернута вершиною вниз, сторона основи якої 4м, висота 6м.

8.9. P : правильна трикутна піраміда з основою 2м і висотою 5м.

8.10. P : конус, повернутий вершиною вниз, радіус основи якого 3м, висота 5м.

8.11. P : зрізаний конус, у якого радіус верхньої основи дорівнює 3м, нижньої – 1м, висота – 3м.

8.12. P : конус з радіусом основи 2м і висотою 5м.

8.13. P : правильна чотирикутна зрізана піраміда, у якій сторона верхньої основи 8м, нижньої – 4м, висота – 2м.

8.14. P : параболоїд обертання, радіус основи якого 2м, глибина 4м.

8.15. P : половина еліпсоїда обертання, радіус основи якого 1м, глибина 2м.

8.16. P : зрізана чотирикутна піраміда, у якій сторона верхньої основи дорівнює 2м, нижньої – 4м, висота – 1м.

8.17. P : правильна шестикутна піраміда зі стороною основи 1м і висотою 2м.

8.18. P : правильна шестикутна піраміда з вершиною, повернутою вниз, сторона основи якої 2м і висота 6м.

8.19. P : циліндр з радіусом основи 1м і висотою 3м.

8.20. P : правильна зрізана шестикутна піраміда, у якій сторона верхньої основи дорівнює 1м, нижньої – 2м, висота – 2м.

8.21. P : жолоб, в перпендикулярному перерізі якого лежить півколо з радіусом 1м, довжина жолоба 10м.

8.22. P : правильна зрізана шестикутна піраміда, у якій сторона верхньої основи дорівнює 2м, нижньої – 1м, висота – 2м.

8.23. P : півсфера з радіусом 2м.

8.24. P : параболоїд обертання, повернутий вершиною вгору з радіусом основи 2м, висотою 4м.

8.25. P : зрізаний конус, у якого радіус верхньої основи дорівнює 1м, нижньої – 2м, висота – 2м.

8.26. P : цистерна, обмежена поверхнями $y^2 = 4z$, $x = \pm 2$, $z = 3$.

8.27. P : правильна шестикутна зрізана піраміда, у якій сторона верхньої основи дорівнює 1м, нижньої – 2м, висота – 2м.

8.28. P : правильна зрізана чотирикутна піраміда, у якої сторона верхньої основи дорівнює 2м, нижньої – 4м, висота – 2м.

8.29. P : правильна шестикутна піраміда зі стороною основи 1м і висотою 2м.

8.30. P : правильна чотирикутна піраміда зі стороною основи 2м і висотою 4м.

Задача 9. Знайти координати центра мас однорідної плоскої кривої l (9.1-9.15).

9.1. l : півколо $x^2 + y^2 = R^2$, яке розташоване над віссю Ox .

9.2. l : перша арка циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

9.3. l : дуга астроїди $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, яка розташована в третьому квадранті.

9.4. l : дуга кола радіуса R , яка стягує центральний кут α .

9.5. l : дуга ланцюгової лінії $y = a \operatorname{ch}(x - a)$ ($-a \leq x \leq a$).

9.6. l : дуга кардіоїди $r = a(1 + \cos \varphi)$ ($0 \leq \varphi \leq \pi$).

9.7. l : дуга логарифмічної спіралі $r = ae^{\varphi}$ ($\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$).

9.8. l : одна арка циклоїди $x = 3(t - \sin t)$, $y = 3(1 - \cos t)$.

9.9. l : дуга астроїди $x = 2 \cos^3\left(\frac{t}{4}\right)$, $y = 2 \sin^3\left(\frac{t}{4}\right)$, яка розташована в першому квадранті.

9.10. l : дуга кривої $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$).

9.11. l : кардіоида $r = 2(1 + \cos \varphi)$.

9.12. l : крива $r = 2 \sin \varphi$ від точки $O(0; 0)$ до точки $A\left(\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}\right)$.

9.13. l : дуга розгортки кола $x = a(\cos t + t \sin t)$,
 $y = a(\sin t - t \cos t)$ ($0 \leq t \leq \pi$).

9.14. l : крива $r = 2\sqrt{3} \cos \varphi$, яка знаходиться між
 променями $\varphi = 0$ і $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

9.15. l : крива $x = \sqrt{3}t^2$, $y = t - t^3$ ($0 \leq t \leq 1$).

Знайти координати центра мас плоскої однорідної фігури Φ , яка обмежена даними лініями (9.16-9.30).

9.16. Φ – трикутник, сторони якого лежать на прямих $x + y = a$, $x = 0$, $y = 0$.

9.17. Φ обмежена еліпсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ і осями координат
 ($x \geq 0$, $y \geq 0$).

9.18. Φ обмежена першою аркою циклоїди $x = a(t - \sin t)$,
 $y = a(1 - \cos t)$ і віссю Ox .

9.19. Φ обмежена кривими $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

9.20. Φ обмежена дугою синусоїди $y = \sin x$ і відрізком
 осі Ox ($0 \leq x \leq \pi$).

9.21. Φ обмежена півколом $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ і віссю Ox .

9.22. Φ обмежена дугою параболи $y = b\sqrt{\frac{x}{a}}$,
 ($a > 0$, $b > 0$), віссю Ox і прямою $x = a$.

- 9.23.** Φ обмежена дугою параболи $y = b\sqrt{\frac{x}{a}}$,
 $(a > 0, b > 0)$, віссю Oy і прямою $y = b$.
- 9.24.** Φ обмежена осями координат і дугою астроїди $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, яка розташована в першому квадранті.
- 9.25.** Φ – сектор круга радіуса R з центральним кутом, який дорівнює 2α .
- 9.26.** Φ обмежена кардіоїдою $r = a(1 + \cos \varphi)$.
- 9.27.** Φ обмежена першою петлею лемніскати Бернуллі $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.
- 9.28.** Φ обмежена осями координат і кривою $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.
- 9.29.** Φ обмежена півкубічною параболою $ay^2 = x^3$ і прямою $x = a$ ($a > 0$).
- 9.30.** Φ обмежена параболою $y = 2x - x^2$ і прямою $y = 0$.

7 Диференціальне числення функцій декількох змінних

Теоретичні питання

1. Поняття функції декількох змінних. Область визначення, границя і неперервність функції декількох змінних.
2. Частинні похідні функції декількох змінних.
3. Диференційованість і повний диференціал функції декількох змінних.
4. Геометричний зміст повного диференціала. Дотична площина та нормаль до поверхні.
5. Похідні і повний диференціал складеної функції. Повна похідна.
6. неявно задані функції і їх похідні.
7. Похідна за напрямом. Градієнт.
8. Частинні похідні та повні диференціали вищих порядків.
Незалежність результату від порядку диференціювання.
9. Формула Тейлора для функції декількох змінних.
10. Екстремум функції декількох змінних. Необхідні та достатні умови екстремуму.
11. Найменше і найбільше значення функції в обмеженій замкненій області.
12. Умовний екстремум.
13. Метод найменших квадратів.

Розрахункові завдання

Задача 1. Знайти та побудувати область визначення функції $z = f(x, y)$.

$$1.1. \quad z = \sqrt{x^2 - y} + \sqrt{4 - x^2 - y^2}.$$

$$1.2. \quad z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 1}.$$

$$1.3. \quad z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}.$$

$$1.4. \quad z = \sqrt{x + y} - \sqrt{x^2 - y}.$$

$$1.5. \quad z = \sqrt{x-y}.$$

$$1.6. \quad z = \sqrt[3]{x^2-1} + \sqrt{y}.$$

$$1.7. \quad z = \ln(y^2 - x + 2).$$

$$1.8. \quad z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}.$$

$$1.9. \quad z = \sqrt{x+1} + \arccos y.$$

$$1.10. \quad z = \ln xy.$$

$$1.11. \quad z = \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{1-y^2}.$$

$$1.12. \quad z = \ln(4 - x^2 - y^2).$$

$$1.13. \quad z = \sqrt[4]{x^2 - y}.$$

$$1.14. \quad z = \sqrt{x^2 - y + 2}.$$

$$1.15. \quad z = \ln(x^2 + y^2 - 9).$$

$$1.16. \quad z = \sqrt{y^2 - x}.$$

$$1.17. \quad z = \frac{x+y}{x^2-y}.$$

$$1.18. \quad z = \frac{1}{x^2-y^2}.$$

$$1.19. \quad z = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}.$$

$$1.20. \quad z = \frac{x-y}{x^2+y}.$$

$$1.21. \quad z = \sqrt{x^2 - y^2}.$$

$$1.22. \quad z = \sqrt{2xy}.$$

$$1.23. \quad z = \arcsin(2y(1+x^2)-1).$$

$$1.24. \quad z = \arcsin \frac{y}{x^2}.$$

$$1.25. \quad z = \ln \frac{x^2 + y^2}{xy}.$$

$$1.26. \quad z = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(9 - x^2 - y^2)}.$$

$$1.27. \quad z = \arcsin \frac{y-1}{x}.$$

$$1.28. \quad z = \arccos \frac{y-1}{x^2}.$$

$$1.29. \quad z = \frac{\ln(1-x^2-y^2)}{\sqrt{x-y^2}}.$$

$$1.30. \quad z = \frac{\ln(x^2+y^2-1)}{\sqrt{y-x^2}}.$$

Задача 2. Знайти повний диференціал заданої функції $z = f(x, y)$.

$$2.1. \quad z = \sqrt[4]{x^2 + y^2}.$$

$$2.2. \quad z = \sqrt[4]{x^2 - y^2}.$$

2.3. $z = \sqrt[3]{x} \cdot \sin y.$

2.4. $z = \cos(x^3 - 2xy).$

2.5. $z = \arccos \sqrt{xy}.$

2.6. $z = \arcsin(x + y^2).$

2.7. $z = \operatorname{arctg}(x^2 + y^2).$

2.8. $z = \operatorname{arctg}(x^2 + \sqrt[3]{y}).$

2.9. $z = \sqrt[3]{xy^2} \cdot \operatorname{tg} x.$

2.10. $z = x^2 + y^2 + 5x^2y^2.$

2.11. $z = xy \cdot \ln(xy).$

2.12. $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$

2.13. $z = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$

2.14. $z = e^{\frac{x}{y}} \cdot \operatorname{tg}(x + y).$

2.15. $z = \arcsin(2x^3y).$

2.16. $z = \arccos(x - y^2).$

2.17. $z = \cos(x^2 + 2xy).$

2.18. $z = \operatorname{tg}(x^3y^2).$

2.19. $z = \operatorname{arctg} \frac{x^3}{y^2}.$

2.20. $z = \arcsin xy - 2x^2y.$

2.21. $z = \ln(3x^2 + y^2).$

2.22. $z = \sin \sqrt{x - y^2}.$

2.23. $z = \ln(\sqrt{xy} - 1).$

2.24. $z = \arccos(x + y^2).$

2.25. $z = e^{-\sqrt{x^2 + y^2}}.$

2.26. $z = \operatorname{arctg} \frac{2y - x^2}{y}.$

2.27. $z = \sin(x^2 + y^2) + y^3.$

2.28. $z = \operatorname{arctg}(x^2 + y^2).$

2.29. $z = \sqrt{3x^2 + y^2} - x.$

2.30. $z = \ln(2\sqrt{y} + 4x).$

Задача 3. Задана функція $z = f(x, y)$. Перевірити, чи задовольняє ця функція заданому рівнянню; переконатись та-

кож, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$

$$3.1. \quad z = e^{xy}, \quad x^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2xyz = 0.$$

$$3.2. \quad z = \cos y + (y - x) \cdot \sin y, \quad (x - y) \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

$$3.3. \quad z = e^{-(x+3y)} \sin(x+3y), \quad 9 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

$$3.4. \quad z = \sin(x + ay), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0.$$

$$3.5. \quad z = \frac{x}{y}, \quad x \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

$$3.6. \quad z = xe^{\frac{y}{x}}, \quad x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

$$3.7. \quad z = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

$$3.8. \quad z = \ln(x^2 + (y+1)^2), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

$$3.9. \quad z = \arctg \frac{y}{x}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

$$3.10. \quad z = \ln(x^2 + y^2), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

$$3.11. \quad z = \ln(x + e^{-y}), \quad \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0.$$

$$3.12. \quad z = x^y, \quad y \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - (1 + y \ln x) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

$$3.13. \quad z = e^{xy}, \quad x^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2xyz = 0.$$

$$3.14. \quad z = \frac{y}{x}, \quad x^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

$$3.15. \quad z = y \sqrt{\frac{y}{x}}, \quad x^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

$$3.16. \quad z = \frac{y^2}{3x} + \arcsin(xy), \quad x^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - xy \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0.$$

$$3.17. \quad z = \frac{\cos y^2}{x^2}, \quad x \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

$$3.18. \quad z = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

$$3.19. \quad z = e^x (x \cos y - y \sin y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

$$3.20. \quad z = x \cdot e^{-\frac{y}{x}}, \quad x \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2 \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \right) - y \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

$$3.21. \quad z = x \ln \frac{y}{x}, \quad x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2x - z = 0.$$

$$3.22. \quad z = e^{\frac{x}{y}}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + y \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$$

$$3.23. \quad z = \cos^2(y - 0,5x), \quad 2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$$

$$3.24. \quad z = \sqrt{y^2 + 2xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x + 2y}{\sqrt{y^2 + 2xy}}.$$

$$3.25. \quad z = \frac{xy}{x + y}, \quad x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xy}{x + y}.$$

$$3.26. \quad z = e^{-\cos(x+3y)}, \quad 9 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

$$3.27. \quad z = \ln \frac{x}{y} + x^3 - y^3, \quad x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 3(x^3 - y^3).$$

$$3.28. \quad z = (x^2 + y^2) \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{y}, \quad x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} - 2z = 0.$$

$$3.29. \quad z = \frac{y}{(x^2 - y^2)^5}, \quad \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

$$3.30. \quad z = e^{xy}, \quad x^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Задача 4. Задані функція $z = f(x, y)$, точка $A(x_0, y_0)$ і вектор $\vec{a}$. Знайти: а) $\operatorname{grad} z$ в точці A ; б) похідну функції в точці A за напрямом вектора $\vec{a}$.

$$4.1. \quad z = \ln(3x^2 + 4y^2), \quad A(1; 3), \quad \vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}.$$

$$4.2. \quad z = 5x^2 + 6xy, \quad A(2; 1), \quad \vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}.$$

$$4.3. \quad z = 3x^2y^2 + 5y^2x, \quad A(1; 1), \quad \vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}.$$

$$4.4. \quad z = x^2 + xy + y^2, \quad A(1; 1), \quad \vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}.$$

$$4.5. \quad z = \ln(5x^2 + 3y^2), \quad A(1; 1), \quad \vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j}.$$

$$4.6. \quad z = 2x^2 + 3xy + y^2, \quad A(2; 1), \quad \vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j}.$$

$$4.7. \quad z = \operatorname{arctg}(xy^2), \quad A(2; 3), \quad \vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j}.$$

$$4.8. \quad z = \ln(5x^2 + 4y^2), \quad A(1; 1), \quad \vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}.$$

$$4.9. \quad z = \arcsin\left(\frac{x^2}{y}\right), \quad A(1; 2), \quad \vec{a} = 5\vec{i} - 12\vec{j}.$$

$$4.10. \quad z = 3x^4 + 2x^2y^3, \quad A(-1; 2), \quad \vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j}.$$

$$4.11. \quad z = 3x^2 - 6xy + y^2, \quad A\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}\right), \quad \bar{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{j}.$$

$$4.12. \quad z = x^2 - xy + y^2, \quad A(1; 1), \quad \bar{a} = 6\bar{i} + 8\bar{j}.$$

$$4.13. \quad z = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1, \quad A(3; 1), \quad \bar{a} = 3\bar{i} + 4\bar{j}.$$

$$4.14. \quad z = x^2 + y^2, \quad A(3; 2), \quad \bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j}.$$

$$4.15. \quad z = \ln(3x^2 + 2y^2), \quad A(2; 2), \quad \bar{a} = 3\bar{i} - 2\bar{j}.$$

$$4.16. \quad z = x^2 + xy - y^2, \quad A(2; 2), \quad \bar{a} = 5\bar{i} + 3\bar{j}.$$

$$4.17. \quad z = 5x^2y^2 - 3y^2x, \quad A(1; 1), \quad \bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j}.$$

$$4.18. \quad z = \ln(2x^2 + y^2), \quad A(1; 3), \quad \bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j}.$$

$$4.19. \quad z = \arccos\left(\frac{x^2}{y}\right), \quad A(1; 2), \quad \bar{a} = 5\bar{i} - 2\bar{j}.$$

$$4.20. \quad z = 5x^3 + 2xy^3, \quad A(-2; 1), \quad \bar{a} = 3\bar{i} + 4\bar{j}.$$

$$4.21. \quad z = 3x^2 + 5xy^2, \quad A(2; 2), \quad \bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j}.$$

$$4.22. \quad z = \operatorname{arccotg}(xy^2), \quad A(3; 2), \quad \bar{a} = 4\bar{i} + 3\bar{j}.$$

$$4.23. \quad z = x^2 - y^2, \quad A(2; 3), \quad \bar{a} = 2\bar{i} - 3\bar{j}.$$

$$4.24. \quad z = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right), \quad A(2; 5), \quad \bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j}.$$

$$4.25. \quad z = 3x^4 - 2x^3y^2, \quad A(1; 3), \quad \bar{a} = 3\bar{i} + 3\bar{j}.$$

$$4.26. \quad z = 3x^2 - 2y^3, \quad A(3; 2), \quad \bar{a} = 2\bar{i} - 3\bar{j}.$$

$$4.27. \quad z = 5x^3 - 2y^2, \quad A(-3; 2), \quad \bar{a} = 3\bar{i} + 2\bar{j}.$$

$$4.28. \quad z = x^2y^2 + 3xy^2, \quad A(3; -3), \quad \bar{a} = 2\bar{i} - 3\bar{j}.$$

$$4.29. \quad z = \ln(2x^2 + 3y^2), \quad A(3; 2), \quad \bar{a} = 3\bar{i} + 2\bar{j}.$$

4.30. $z = \arcsin\left(\frac{x}{y^2}\right), \quad A(3;3), \quad \vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}.$

Задача 5. В пункті а) знайти $\frac{dz}{dt}$; в пункті б) знайти $\frac{dz}{dx}$;

в пункті в) знайти $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$.

5.1. а) $z = x^2 - xy + y^2$, де $x = e^{-3t}$, $y = \cos 2t$;

б) $z = \ln(x^2 - y^2 + 1)$, де $y = e^{-x^2}$;

в) $z = x^3 \cdot \ln y$, де $x = \frac{v}{u}$, $y = u^2 v$.

5.2. а) $z = e^{2x-y}$, де $x = \sqrt{t}$, $y = \sin 2t$;

б) $z = (\sin x)^y$, де $y = \ln x$;

в) $z = \operatorname{tg}(2x + 3y)$, де $x = \frac{u}{v^2}$, $y = 2u - v$.

5.3. а) $z = \arcsin(x - y)$, де $x = t^3 - 1$, $y = t^2$;

б) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, де $y = \sin^2 x$;

в) $z = x^2 y^2$, де $x = u \cdot e^v$, $y = v \cdot e^u$.

5.4. а) $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$, де $x = t^2$, $y = t + 1$;

б) $z = \operatorname{arctg}(xy)$, де $y = e^x$;

в) $z = x^2 + y^2$, де $x = \sqrt{uv}$, $y = e^{u+v}$.

5.5. а) $z = x^2 + y^2$, де $x = \sin t$, $y = \ln t$;

б) $z = \arcsin \frac{x}{y}$, де $y = \sqrt{x^2 + 1}$;

$$\text{в) } z = x^2 \ln y, \quad \text{де } x = \frac{v}{u}, \quad y = u^2 + v^2.$$

$$\mathbf{5.6.} \quad \text{а) } z = e^{2y-3x}, \quad \text{де } x = t^2 - 1, \quad y = tg t;$$

$$\text{б) } z = \arccos \frac{y}{x+1}, \quad \text{де } y = \sqrt{1-x^2};$$

$$\text{в) } z = \ln(x^2 + y^2), \quad \text{де } x = uv, \quad y = \frac{u}{v}.$$

$$\mathbf{5.7.} \quad \text{а) } z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, \quad \text{де } x = e^{2t} - 1, \quad y = e^{2t} + 1;$$

$$\text{б) } z = tg(2x + y), \quad \text{де } y = e^x;$$

$$\text{в) } z = \ln(x^2 + y^2), \quad \text{де } x = u \cos v, \quad y = v \sin u.$$

$$\mathbf{5.8.} \quad \text{а) } z = 0,5 \ln \frac{x}{y}, \quad \text{де } x = tg^2 t, \quad y = ctg^2 t;$$

$$\text{б) } z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}, \quad \text{де } y = \cos x;$$

$$\text{в) } z = xy^2, \quad \text{де } x = \sin \frac{u}{v}, \quad y = \sqrt{\frac{u}{v}}.$$

$$\mathbf{5.9.} \quad \text{а) } z = y^x, \quad \text{де } x = \sin t, \quad y = \ln t;$$

$$\text{б) } z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{де } y = \cos^2 x;$$

$$\text{в) } z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, \quad \text{де } x = v \sin u, \quad y = u \cos v.$$

$$\mathbf{5.10.} \quad \text{а) } z = e^{x-2y}, \quad \text{де } x = \sin t, \quad y = t^3;$$

$$\text{б) } z = x^y, \quad \text{де } y = \cos 2x;$$

$$\text{в) } z = x^2 y, \quad \text{де } x = \cos uv, \quad y = u^2 - 2v.$$

$$\mathbf{5.11.} \quad \text{а) } z = tg(3t + 2x^2 - y), \quad \text{де } x = \frac{1}{t}, \quad y = \sqrt{t};$$

$$\text{б) } z = \frac{x^2 - y}{x^2 + y}, \quad \text{де } y = 3x + 1;$$

$$\text{в) } z = x^2 y - xy^2, \quad \text{де } x = u \cos v, \quad y = u \sin v.$$

$$\mathbf{5.12.} \quad \text{а) } z = \arctg x + \ln y, \quad \text{де } x = \cos 2t, \quad y = e^t;$$

$$\text{б) } z = x^2 y, \quad \text{де } y = \cos x;$$

$$\text{в) } z = x^2 \ln y, \quad \text{де } x = \frac{u}{v}, \quad y = 3u - 2v.$$

$$\mathbf{5.13.} \quad \text{а) } z = e^x + y^2, \quad \text{де } x = \ln t, \quad y = \sin t;$$

$$\text{б) } z = \ln(x^2 - y^2), \quad \text{де } y = e^x;$$

$$\text{в) } z = x^2 + y^2, \quad \text{де } x = u + v^2, \quad y = u^2 - v.$$

$$\mathbf{5.14.} \quad \text{а) } z = \ln(x + y), \quad \text{де } x = e^t, \quad y = e^{-t};$$

$$\text{б) } z = xy^2, \quad \text{де } y = \sin 2x;$$

$$\text{в) } z = tg(2x + 3y), \quad \text{де } x = \frac{u}{v^2}, \quad y = 2u - v.$$

$$\mathbf{5.15.} \quad \text{а) } z = x^y, \quad \text{де } x = \ln t, \quad y = \sin t;$$

$$\text{б) } z = \ln \frac{x - \sqrt{x^2 - y^2}}{x + \sqrt{x^2 - y^2}}, \quad \text{де } y = \frac{x}{\sqrt{2}};$$

$$\text{в) } z = x^2 \ln y, \quad \text{де } x = \frac{u}{v}, \quad y = u^2 + v^2.$$

$$\mathbf{5.16.} \quad \text{а) } z = \frac{1}{2} \ln \frac{x}{y}, \quad \text{де } x = tg^2 t, \quad y = ctg^2 t;$$

$$\text{б) } z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{де } y = \sin^2 x;$$

$$\text{в) } z = x^2 y - xy^2, \quad \text{де } x = u \sin v, \quad y = v \cos u.$$

$$\mathbf{5.17.} \quad \text{а) } z = \ln(e^t + e^y), \quad \text{де } y = t^3;$$

$$\text{б) } z = x^y, \quad \text{де } y = \ln x;$$

в) $z = x^2 y^2$, де $x = u \cdot e^v$, $y = v \cdot e^u$.

5.18. а) $z = e^{xy} \cdot \ln(x + y)$, де $x = t^2$, $y = 1 - t^3$;

б) $z = e^{\frac{x}{y}}$, де $y = \sin^3 x$;

в) $z = x^2 + y^2$, де $x = \sqrt{uv}$, $y = e^{u+v}$.

5.19. а) $z = \frac{t^2 - y}{t^2 + y}$, де $y = 3t + 1$;

б) $z = \ln(x^2 + y^2)$, де $y = e^{x^2}$;

в) $z = \ln(x^2 + y^2)$, де $x = u \cdot v$, $y = \frac{u}{v}$.

5.20. а) $z = \ln(e^x + e^y)$, де $x = t$, $y = t^2$;

б) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, де $y = \cos^2 x$;

в) $z = y^2 \ln x$, де $x = 3u - 2v$, $y = \frac{u}{v}$.

5.21. а) $z = \frac{x + y}{1 - xy}$, де $x = \operatorname{tg} t$, $y = -\operatorname{ctg} t$;

б) $z = e^{\frac{x}{y}}$, де $y = \sin^2 x$;

в) $z = x^2 y^2$, де $x = u^2 + v$, $y = u - v^2$.

5.22. а) $z = x^2 - xy + y^2$, де $x = e^{-3t}$, $y = \cos 2t$;

б) $z = \ln(x^2 - y^2)$, де $y = e^{x^2}$;

в) $z = xy$, де $x = \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$, $y = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$.

5.23. а) $z = \arcsin(x - y)$, де $x = 3t$, $y = 4t^3$;

б) $z = \sin \frac{x}{y}$, де $z = \ln^2 x$;

$$\text{в) } z = \sin(x - y), \quad \text{де } x = u^2 - v, \quad y = u - v^2.$$

$$5.24. \quad \text{а) } z = y^x, \quad \text{де } x = \sin t, \quad y = \ln t;$$

$$\text{б) } z = x^2 + xy, \quad \text{де } y = \sin^2 x;$$

$$\text{в) } z = xy, \quad \text{де } x = e^u \cos v, \quad y = e^u \sin v.$$

$$5.25. \quad \text{а) } z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad \text{де } x = e^{2t} + 1, \quad y = e^{2t} - 1;$$

$$\text{б) } z = x^2 + xy + y^2, \quad \text{де } y = \cos^2 x;$$

$$\text{в) } z = x^2 \ln y, \quad \text{де } x = 3u - 2v, \quad y = \frac{v}{u}.$$

$$5.26. \quad \text{а) } z = \operatorname{tg}(3t + 2x^2 - y), \quad \text{де } x = \frac{1}{t}, \quad y = \sqrt{t};$$

$$\text{б) } z = \arccos \frac{y}{x+1}, \quad \text{де } y = \sqrt{1-x^2};$$

$$\text{в) } z = x^2 + y^2, \quad \text{де } x = e^{u+v}, \quad y = \sqrt{uv}.$$

$$5.27. \quad \text{а) } z = \frac{y}{x}, \quad \text{де } x = e^t, \quad y = \ln t;$$

$$\text{б) } z = \ln(x^2 - y^2 + 1), \quad \text{де } y = e^{-x^2};$$

$$\text{в) } z = \ln(x^2 + y^2), \quad \text{де } x = \frac{u}{v}, \quad y = u \cdot v.$$

$$5.28. \quad \text{а) } z = e^{2x-y}, \quad \text{де } x = \sin t, \quad y = t^2;$$

$$\text{б) } z = \ln(e^x + e^y), \quad \text{де } y = x^3;$$

$$\text{в) } z = xy^2 - x^2y, \quad \text{де } x = u \sin v, \quad y = v \cos u.$$

$$5.29. \quad \text{а) } z = x + xy + y, \quad \text{де } x = \sin t, \quad y = e^t;$$

$$\text{б) } z = xy^2, \quad \text{де } y = \sin 2x;$$

$$\text{в) } z = y^2 \ln x, \quad \text{де } x = u^2 + v^2, \quad y = \frac{v}{u}.$$

5.30. а) $z = \arccos(x - y)$, де $x = 4t^3$, $y = 3t$;

б) $z = \arcsin \frac{y}{x+1}$, де $y = \sqrt{1-x^2}$;

в) $z = x^3 y^3$, де $x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2$.

Задача 6. В пункті а) знайти похідну $\frac{dy}{dx}$ функції, заданої неявно; в пункті б) знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції, заданої неявно.

6.1. а) $\operatorname{arctg} \frac{x}{y} - \ln \sqrt{x^2 + y^2} = 0$;

б) $x^2 + 2y^2 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0$.

6.2. а) $x^3 + y^3 - 3x^2 y^2 = 0$; б) $z^3 - 4xz + y^2 - 4 = 0$.

6.3. а) $x^2 y^2 - \ln y - 1 = 0$; б) $z \cdot \ln(x + z) = \frac{xy}{z}$.

6.4. а) $x^3 y - e^{3xy} = 0$; б) $z \cdot \ln(x + z) = \frac{x^2 y}{z}$.

6.5. а) $(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0$;

б) $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y = 0$.

6.6. а) $x^2 e^{2y} - y^2 e^{2x} = 0$;

б) $3x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xz + 2z - 5 = 0$.

6.7. а) $y \sin x - \cos(x - 2y) = 0$; б) $x^2 + y^2 + z^2 = e^z$.

6.8. а) $x^2 + y^2 = e^{x-2y}$; б) $x^2 z - \operatorname{arctg}(xz) = 0$.

6.9. а) $x^2 - y + \operatorname{arctg} y = 0$; б) $z^3 + 5xyz^2 = 4$.

6.10. а) $1 + xy = (e^{xy} + e^{-xy})$; б) $e^z - xyz^2 = z$.

- 6.11. a) $x^2 + 2xy^2 + x^4 = 0$;
 б) $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z + 10 = 0$.
- 6.12. a) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$; б) $z^3 + 3xyz = 8$.
- 6.13. a) $xy - \ln y = 0$; б) $yz = \arctg(xz)$.
- 6.14. a) $x^2y = e^y$; б) $xz - e^{\frac{z}{y}} + x^3 + y^3 = 0$.
- 6.15. a) $x^3e^{2y} - y^3e^{2x} = 0$;
 б) $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 3 = 0$.
- 6.16. a) $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$;
 б) $x + y + z^2 = e^z$.
- 6.17. a) $x^3y - xy^3 = 10$; б) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$.
- 6.18. a) $xe^y + ye^x - e^{xy} = 0$; б) $z^3 - 4xz + y^2 = 4$.
- 6.19. a) $xy^2 - \ln y = 1$; б) $y \cos x - \sin(y - z) + y^2 = 0$.
- 6.20. a) $x^2 + y^2 + \ln(x^2 + y^2) = 0$; б) $e^z - x^2yz = 0$.
- 6.21. a) $\frac{y}{x} + \sin\left(\frac{y}{x}\right) = a$, ($a = \text{const}$);
 б) $x^2 + y^2 - z^2 = xyz$.
- 6.22. a) $x^3 + 2y^3 - 2xy\sqrt{2xy} + 1 = 0$; б) $x^2y^2 - \ln z = z^2$.
- 6.23. a) $\ln(x^2 + y^2) - 2\arctg\left(\frac{y}{x}\right) = 0$;
 б) $x^3 + y^3 + z^3 = \ln xy$.
- 6.24. a) $x^2 + y^2 - e^{x^2+y^2} = 0$; б) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
- 6.25. a) $(x^2 + y^2 - 2x)^2 = 2(x^2 + y^2)$;

$$\text{б) } \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{z^2} + z = 0.$$

$$\text{6.26. а) } x^2 - 3xy + 4y^2 - 2x + 3y + 3 = 0;$$

$$\text{б) } x^3 - 3xy^3 - z^3 = xz^2.$$

$$\text{6.27. а) } x^3 + y^3 - 3axy = 0, \quad (a = \text{const});$$

$$\text{б) } x^2 + xy + y^2 - z^2 + xz = 0.$$

$$\text{6.28. а) } \sin x \cdot \ln y + \cos y \cdot \ln x = 0;$$

$$\text{б) } z^2 \cdot \ln(x - y) - x^2 yz = 0.$$

$$\text{6.29. а) } x \cdot \sin y - \cos y + \cos 2y = 0;$$

$$\text{б) } \ln(x + y) - x^2 yz^3 = 0.$$

$$\text{6.30. а) } y \cdot \sin x + \cos(x - y) = 0;$$

$$\text{б) } x^2 z - \arcsin(yz) = 0.$$

Задача 7. Дослідити на екстремум функцію $z = f(x, y)$.

$$\text{7.1. } z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y.$$

$$\text{7.2. } z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

$$\text{7.3. } z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2.$$

$$\text{7.4. } z = x^3 + y^3 - x^2 - 2xy - y^2.$$

$$\text{7.5. } z = x^3 - 2x^2 y^2 + y^4.$$

$$\text{7.6. } z = x^3 - 2y^3 - 3x + 6y.$$

$$\text{7.7. } z = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x.$$

$$\text{7.8. } z = x^2 - xy + y^2.$$

$$\text{7.9. } z = x^2 - xy - y^2.$$

$$\text{7.10. } z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5.$$

$$\text{7.11. } z = 6(x - y) - 3x^2 - 3y^2.$$

$$\text{7.12. } z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y.$$

$$7.13. \quad z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10.$$

$$7.14. \quad z = xy(6 - x - y).$$

$$7.15. \quad z = x^2 + y^2 - xy + x + y.$$

$$7.16. \quad z = 6x - x^2 - xy - y^2 - 3x - 6y.$$

$$7.17. \quad z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y.$$

$$7.18. \quad z = xy^2(1 - x - y).$$

$$7.19. \quad z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20.$$

$$7.20. \quad z = x^2 + y^2 - 2 \ln x - 18 \ln y, \quad (x > 0, y > 0).$$

$$7.21. \quad z = x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y.$$

$$7.22. \quad z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y.$$

$$7.23. \quad z = x^3 - y^3 - 3xy.$$

$$7.24. \quad z = x^3 y^2 (12 - x - y).$$

$$7.25. \quad z = xy(xy(x + y - 1))$$

$$7.26. \quad z = -y^2 - x^2 - xy + 6x + 1.$$

$$7.27. \quad z = 14x^3 + 27xy^2 - 69x - 54y.$$

$$7.28. \quad z = x^3 + y^3 - 15xy.$$

$$7.29. \quad z = 4 - (x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}.$$

$$7.30. \quad z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2.$$

Задача 8. Знайти умовні екстремуми функції $z = f(x, y)$ (8.1 – 8.18), або функції $u = f(x, y, z)$ (8.19 – 8.30).

$$8.1. \quad z = x^2 + y^2 - xy + x + y, \quad \text{за умови } x + y + 3 = 0.$$

$$8.2. \quad z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \quad \text{за умови } x + y - 2 = 0.$$

$$8.3. \quad z = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y - 4), \quad \text{за умови } x^2 + y^2 = 1.$$

$$8.4. \quad z = xy^2, \quad \text{за умови } x + 2y = 1.$$

$$8.5. \quad z = 2x + y, \quad \text{за умови } x^2 + y^2 = 1.$$

$$8.6. \quad z = x^2 + y^2, \quad \text{за умови } 3x + 4y - 12 = 0.$$

$$8.7. \quad z = xy, \quad \text{за умови } x^2 + y^2 = 1.$$

$$8.8. \quad z = x^2 + y^2, \quad \text{за умови } x + y = 2.$$

$$8.9. \quad z = xy, \quad \text{за умови } 2x + 3y = 5.$$

$$8.10. \quad z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4, \quad \text{за умови } x + y = 3.$$

$$8.11. \quad z = x^2 + y^2, \quad \text{за умови } 3x + 2y - 6 = 0.$$

$$8.12. \quad z = xy, \quad \text{за умови } x + y = 1.$$

$$8.13. \quad z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \quad \text{за умови } x + y = 2.$$

$$8.14. \quad z = \cos^2 x + \cos^2 y, \quad \text{за умови } y - x = \frac{\pi}{4}.$$

$$8.15. \quad z = x + 2y, \quad \text{за умови } x^2 + y^2 = 5.$$

$$8.16. \quad z = xy^2, \quad \text{за умови } x + 2y = 1.$$

$$8.17. \quad z = x + y, \quad \text{за умови } \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{4}.$$

$$8.18. \quad z = \sin^2 x + \sin^2 y, \quad \text{за умови } y - x = \frac{\pi}{4}.$$

$$8.19. \quad u = 2x + y - 2z, \quad \text{за умови } x^2 + y^2 + z^2 = 36.$$

$$8.20. \quad u = x^2 + y^2 + z^2, \quad \text{за умови } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1.$$

$$8.21. \quad u = xy^2z^3, \quad \text{за умови } x + 2y + 3z = 12 \\ (x > 0, y > 0, z > 0).$$

$$8.22. \quad u = x - y + 2z, \quad \text{за умови } x^2 + y^2 + z^2 = 9.$$

- 8.23. $u = x^2 y^3 z^4$, за умови $2x + 3y + 4z = 12$.
- 8.24. $u = xyz$, за умов $x + y + z = 5$, $xy + xz + yz = 8$.
- 8.25. $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, за умов $x^2 + y^2 + z^2 = 1$,
 $x + 2y + 3z = 0$.
- 8.26. $u = xyz$, за умов $x + y + z = 4$, $xy + yz + xz = 5$.
- 8.27. $u = xy^2 z^3$, за умови $x + 2y + 3z = 6$
 $(x > 0, y > 0, z > 0)$.
- 8.28. $u = x - 2y + 2z$, за умови $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
- 8.29. $u = x^2 + y^2 + 2z^2$, за умови $x - y + z = 1$.
- 8.30. $u = x - 2y + z$, за умови $x + y^2 - z^2 = 1$.

Задача 9. Знайти найменше та найбільше значення функції $z = f(x, y)$ в обмеженій замкненій області D .

- 9.1. $z = x - 2y + 5$, $D: x = 0, y = 0, x + y - 1 = 0$.
- 9.2. $z = x^2 + y^2 - xy - x - y$, $D: x = 0, y = 0$,
 $x + y - 3 = 0$.
- 9.3. $z = xy$, $D: x^2 + y^2 \leq 1$.
- 9.4. $z = x - 2y + 5$, $D: x = 0, y = 0, x - y - 1 = 0$.
- 9.5. $z = x^2 + 2y^2 + 1$, $D: x = 0, y = 0, x + y - 3 = 0$.
- 9.6. $z = x^3 + y^3 - 3xy$, $D: x = 0, x = 2, y = 0, y = 2$.
- 9.7. $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$, $D: x = 0, y = 0$,
 $x + y + 1 = 0$.
- 9.8. $z = x^2 + 2xy - 10$, $D: y = 0, y = x^2 - 4$.
- 9.9. $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$, $D: x = 0, y = 0$,
 $x + y = 3$.
- 9.10. $z = 2x^3 - xy^2 + y^2$, $D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 6$.
- 9.11. $z = xy - 2x - y$, $D: x = 0, x = 3, y = 0, y = 4$.

$$9.12. \quad z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1, \quad D: x = -3, \quad y = 0, \\ x + y + 1 = 0.$$

$$9.13. \quad z = x^2 + xy - 2, \quad D: y = 0, \quad y = 4x^2 - 4.$$

$$9.14. \quad z = xy - x - 2y, \quad D: x = 3, \quad y = 0, \quad y = x.$$

$$9.15. \quad z = x^2 + 2xy - 4x + 8y, \quad D: x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \\ y = 2.$$

$$9.16. \quad z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8, \quad D: x = 0, \quad y = 0, \\ x + y = 1.$$

$$9.17. \quad z = x^2 + 3y^2 + x - y, \quad D: x = 1, \quad y = -1, \quad x + y = 1.$$

$$9.18. \quad z = x^2 - 2xy + 2, 5y^2 - 2x, \quad D: x = 0, \quad x = 2, \\ y = 0, \quad y = 2.$$

$$9.19. \quad z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4, \quad D: x = -1, \quad y = -1, \\ x + y - 1 = 0.$$

$$9.20. \quad z = 10 + 2xy - x^2, \quad D: y = 0, \quad y = 4 - x^2.$$

$$9.21. \quad z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4, \quad D: x = -1, \quad x = 1, \\ y = -1, \quad y = 1.$$

$$9.22. \quad z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x, \quad D: x = 3, \quad y = 0, \\ x - y + 1 = 0.$$

$$9.23. \quad z = 4y - xy - y^2, \quad D: x = 0, \quad y = 0, \quad x + y - 6 = 0.$$

$$9.24. \quad z = 3x^2 + 3y^2 - x - y + 1, \quad D: x = 5, \quad y = 0, \\ x - y - 1 = 0.$$

$$9.25. \quad z = 2x^2 + 2xy - 0,5y^2 - 4x, \quad D: x = 0, \quad y = 2, \quad y = 2x.$$

$$9.26. \quad z = x^2 - xy + y^2 - 4x, \quad D: x = 0, \quad y = 0, \\ 2x + 3y - 12 = 0.$$

$$9.27. \quad z = 1 - x^2 - y^2, \quad D: (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1.$$

$$9.28. \quad z = 4(x-y) - x^2 - y^2, \quad D: x + 2y = 4, \quad x - 2y = 4, \\ x = 0.$$

9.29. $z = xy + x + y$, $D: x = 1, x = 2, y = 2, y = 3$.

9.30. $z = 0,5x^2 - xy$, $D: y = 8, y = 2x^2$.

8 Диференціальні рівняння

Теоретичні питання

1. Основні поняття теорії диференціальних рівнянь першого порядку. Задача Коші. Теорема існування і єдиності розв'язку задачі Коші. Загальний і частинний розв'язок, загальний і частинний інтеграл.
2. Інтегровні типи диференціальних рівнянь першого порядку: рівняння з відокремлюваними змінними, однорідні рівняння і звідні до них, лінійні рівняння, рівняння Бернуллі, рівняння в повних диференціалах, інтегрувальний множник.
3. Основні поняття теорії диференціальних рівнянь вищих порядків. Задача Коші. Теорема існування і єдиності розв'язку задачі Коші. Загальний і частинний розв'язок, загальний і частинний інтеграл.
4. Рівняння виду $y^{(n)} = f(x)$. Рівняння, що допускають пониження порядку.
5. Основні поняття теорії лінійних диференціальних рівнянь вищих порядків. Лінійно залежні і незалежні системи функцій. Вронськіан.
6. Лінійні однорідні диференціальні рівняння вищих порядків. Фундаментальна система розв'язків, структура загального розв'язку.
7. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння вищих порядків. Структура загального розв'язку. Метод варіації довільних сталих.
8. Лінійні однорідні диференціальні рівняння з постійними коефіцієнтами.
9. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння з постійними коефіцієнтами з правою частиною спеціального виду.
10. Нормальна система диференціальних рівнянь. Метод виключення.
11. Система лінійних однорідних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами. Розв'язування за допомогою характеристичного рівняння.

Розрахункові завдання

Задача 1. Розв'язати диференціальні рівняння. В пункті г) серед усіх інтегральних кривих виділити ту, яка проходить через задану точку $M(x_0, y_0)$. Рівняння пункту є) розв'язати методом інтегрувального множника.

1.1. а) $xy' = y \ln y$;

б) $(y - x)dx + (y + x)dy = 0$;

в) $(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 5)dy = 0$;

г) $y' + y \cos x = \sin x \cos x$, $M(0; 2)$;

д) $y' + xy = x^3 y^3$;

е) $(3y^2 + 2xy + 2x)dx + (6xy + x^2 + 3)dy = 0$;

є) $(2y + xy^3)dx + (x + y^2 x^2)dy = 0$.

1.2. а) $y' = \frac{y+1}{x+1}$;

б) $(x + y)dx + xdy = 0$;

в) $(6x + y - 1)dx + (4x + y - 2)dy = 0$;

г) $y' + xy = x^3$, $M(0; -2)$;

д) $y' - xy = 3xy^2$;

е) $(x + y - 1)dx + (x + e^y)dy = 0$;

є) $(xy^2 + y)dx - xdy = 0$.

1.3. а) $y' = e^{x+y}$;

б) $(x + y)dx + (y - x)dy = 0$;

в) $(12x - 5y - 3)dx - (2x - y - 1)dy = 0$;

$$\text{г) } y' + \frac{y}{x} = 2 \ln x + 1, \quad M(1;3);$$

$$\text{д) } y - y' \cos x = y^2 \cos x (1 - \sin x);$$

$$\text{е) } (2xy^2 - 3y)dx + (2x^2y - 3x + 1)dy = 0;$$

$$\text{е) } (x - 4y - \frac{2y^2}{x})dx + (\frac{y^2}{x} - 4y - 2x)dy = 0.$$

$$\mathbf{1.4.} \quad \text{а) } 2x(1 + y^2)dx + y(1 + x^2)dy = 0;$$

$$\text{б) } xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}dx;$$

$$\text{в) } (-12x + 11y + 10)dx + (-10x + y - 8)dy = 0;$$

$$\text{г) } y' - \frac{2y}{x+1} = e^x(x+1)^2, \quad M(0;3);$$

$$\text{д) } y' + \frac{2y}{x} = y^2 \frac{\ln x}{x};$$

$$\text{е) } \sin x \sin y dx - (\cos x \cos y + 2y)dy = 0;$$

$$\text{е) } xy^2 dx + (x^2 y - x)dy = 0.$$

$$\mathbf{1.5.} \quad \text{а) } ye^{2x} dx + (1 + e^{2x})dy = 0;$$

$$\text{б) } (2\sqrt{xy} - y)dx + xdy = 0;$$

$$\text{в) } (3x - 7y + 1)dx + (3x + y - 7)dy = 0;$$

$$\text{г) } y' + \frac{2xy}{x^2 + 1} = e^x, \quad M(0;2);$$

$$\text{д) } y' + 4xy = 2xe^{-x^2} \sqrt{y};$$

$$\text{е) } (e^x \sin y + x)dx + (e^x \cos y + y)dy = 0;$$

$$\text{е) } (6y + x + \frac{3}{x})dy + (\frac{3y^2}{x} + 2y + 2)dx = 0.$$

1.6. а) $x\sqrt{1+y^2}dx + y(1+x^2)dy = 0$;

б) $(x-y)dx + xdy = 0$;

в) $(3x-y+1)dx + (5x+y-9)dy = 0$;

г) $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{2 \sin x}{\cos^2 x}$, $M(0; -3)$;

д) $y' - y \operatorname{ctg} x = \frac{y^3}{\sin x}$;

е) $(x^3 - 2xy - 2y^2)dx + (y^3 - 4xy - x^2)dy = 0$;

е) $\frac{e^y}{x} + \left(\frac{\cos y}{x} + e^y\right)y' = 0$.

1.7. а) $xy - (x^2 + 1)y' = 0$;

б) $xy^2 dy = (x^3 + y^3)dx$;

в) $(5x + 13y - 8)dx - (7x - y + 8)dy = 0$;

г) $y' + 2xy = xe^{-x^2} \sin x$, $M(0; 3)$;

д) $y' - \frac{xy}{1-x^2} = \frac{2xy^2}{1-x^2}$;

е) $3ydx + (3x + \ln y)dy = 0$;

е) $(2xy - 3 + \frac{1}{x})y' = 3\frac{y}{x} - 2y^2$.

1.8. а) $y \sin x dx + (2 + \cos x)dy = 0$;

б) $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$;

в) $(6x - 6y - 6)dx + (x + y - 5)dy = 0$;

г) $y' + y \operatorname{tg} x = \cos^3 x$, $M(0; 5)$;

$$д) y' + \frac{xy}{1-x^2} = x\sqrt{y};$$

$$е) (xy + \sin y)dx + (\frac{1}{2}x^2 + x \cos y + 2)dy = 0;$$

$$е) (2y + 1 + \frac{e^y}{x})y' + x + \frac{y^2 + y}{x} = 0.$$

$$1.9. а) y^2 e^x dx - (e^x + 2)dy = 0;$$

$$б) y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x};$$

$$в) (6x + 13y - 1)dx = (12x + y + 23)dy;$$

$$г) y' + y \operatorname{tg} x = x \cos^2 x, \quad M(0;1);$$

$$д) y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x};$$

$$е) (3x^2 - 2y)dx + (\sqrt{y} - 2x)dy = 0;$$

$$е) (1 + \frac{e^y}{x})dy + (1 + \frac{y}{x} - \frac{1}{x})dx = 0.$$

$$1.10. а) (1 + \operatorname{tg} x) \cos^2 xy' = y;$$

$$б) xdy - ydx = ydy;$$

$$в) (6x - 4y + 6)dx + (11x + y - 14)dy = 0;$$

$$г) y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1, \quad M(1;1);$$

$$д) y' - y \operatorname{tg} x = \frac{y^4}{\cos x};$$

$$е) (x^2 + y^2 + y)dx + (2xy + x + e^y)dy = 0;$$

$$\text{е) } (2x^2 - 3\frac{x}{y} + \frac{1}{y})y' = 3 - 2xy.$$

$$\mathbf{1.11.} \text{ а) } 2x^2 y dy = (3 + y^2) dx ;$$

$$\text{б) } x^2 dy + y^2 dx = xy dx ;$$

$$\text{в) } (x + y - 2) dx = (3x - y - 2) dy ;$$

$$\text{г) } y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3, \quad M(0;2);$$

$$\text{д) } y' + \frac{y}{x} = y^2 \ln x ;$$

$$\text{е) } (x^2 - 4xy - 2y^2) dx + (y^2 - 4xy - 2x^2) dy = 0 ;$$

$$\text{е) } (2y + 1 + \frac{e^y}{x}) dy + (x + \frac{y^2}{x} + \frac{y}{x}) dx = 0 .$$

$$\mathbf{1.12.} \text{ а) } y' \lg x = \ln \ln y ;$$

$$\text{б) } (x - y \cos \frac{y}{x}) dx + x \cos \frac{y}{x} = 0 ;$$

$$\text{в) } (x + 5y + 3) dx = (5x + y - 9) dy ;$$

$$\text{г) } y' - 2\frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}, \quad M(0;3);$$

$$\text{д) } y' + \frac{y}{x} = y^4 (1 - x^2) ;$$

$$\text{е) } 2(3xy^2 + 2x^3) dx + 3(2x^2 y + y^2) dy = 0 ;$$

$$\text{е) } (x - 4y - \frac{2y^2}{x}) dx + (\frac{y^2}{x} - 4y - 2x) dy = 0 .$$

$$\mathbf{1.13.} \text{ а) } (x^2 - yx^2) \frac{dy}{dx} + y^2 + xy^2 = 0 ;$$

$$\text{б)} (x^2 + y^2)dx + x(x + 2y)dy = 0;$$

$$\text{в)} (3y - 7x + 7)dx - (3x - 7y - 3)dy = 0;$$

$$\text{г)} y' + y \tan x = \sec x, \quad M(0;1);$$

$$\text{д)} y' - y \tan x = -y^2 \cos x;$$

$$\text{е)} \left(1 + \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}}\right)dx + \left(1 - \frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}}\right)dy = 0;$$

$$\text{е)} (3x^2 + 6xy + 3y^2)dx + (2x^2 + 3xy)dy = 0 .$$

$$\mathbf{1.14.} \text{ а)} (y - 2)dx + x^2 dy = 0;$$

$$\text{б)} xy' = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y;$$

$$\text{в)} (x + 7y - 8)dx = (9x - y - 8)dy;$$

$$\text{г)} y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x, \quad M(0;-1);$$

$$\text{д)} y' + \frac{y}{x+1} = -\frac{1}{2}(x+1)^3 y^3;$$

$$\text{е)} (5xy^2 - x^3)dx + (5x^2y - y)dy = 0;$$

$$\text{е)} 3xe^y dx + \left(x^2 e^y - \frac{1}{x}\right)dy = 0 .$$

$$\mathbf{1.15.} \text{ а)} \frac{dy}{dx} = \frac{1 + y^2}{1 + x^2};$$

$$\text{б)} \left(1 - \frac{y}{x}\right)e^{\frac{y}{x}}dx + \left(1 + e^{\frac{y}{x}}\right)dy = 0;$$

$$\text{в)} (10x + 4y + 26)dx + (x - 5y + 8)dy = 0;$$

$$\text{г)} y' - \frac{5}{x}y = e^x x^5, \quad M(1;3);$$

$$\text{д) } y' + xy = \frac{1}{2}(x-1)e^x y^2 ;$$

$$\text{е) } (y^3 + \cos x)dx + (3xy^2 + e^y)dy = 0 ;$$

$$\text{е) } \frac{x+y^2}{y} dy = dx .$$

$$\mathbf{1.16.} \text{ а) } dy + ytgx dx = 0 ;$$

$$\text{б) } xdy = (y + \sqrt{y^2 - 4x^2})dx ;$$

$$\text{в) } (2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0 ;$$

$$\text{г) } y' + \frac{3}{x}y = \frac{4}{x^3}, \quad M(1; \frac{4}{3}) ;$$

$$\text{д) } y' - x = -y^3 e^{-x^2} ;$$

$$\text{е) } (2x - 1 - \frac{y}{x^2})dx - (2y - \frac{1}{x})dy = 0 ;$$

$$\text{е) } \frac{y}{x} dx - (xy + 1)dy = 0 .$$

$$\mathbf{1.17.} \text{ а) } ydx - (x^2 - 1)dy = 0 ;$$

$$\text{б) } (2y - 3x)y' + 4x - 3y = 0 ;$$

$$\text{в) } (18x - 7y + 3)dx = (8x - 3y + 1)dy ;$$

$$\text{г) } y' - \frac{2}{x}y = 3x^2, \quad M(1; 3) ;$$

$$\text{д) } y' - \frac{4xy}{x^2 - 1} = 8x\sqrt{y} ;$$

$$\text{е) } (3x^2 + 4y^2)dx + (8xy + e^y)dy = 0 ;$$

$$\text{е) } \frac{e^y}{x} dx + (e^y + \frac{\cos y}{x})dy = 0 .$$

1.18. а) $3e^x \operatorname{tg} y dx + (1 - e^x) \sin^2 y dy = 0$;

б) $(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0$;

в) $(12x - 5y - 9)dx = (7x - 3y - 5)dy$;

г) $y' + \frac{2}{x}y = \frac{e^x}{x^2}$, $M(1; e)$;

д) $y' + \frac{y}{x} = -xy^2$;

е) $(3x^2 y + 2y + 3)dx + (x^3 + 2x + 3y^2)dy = 0$;

ё) $(3x^2 + 2 + \frac{3}{y})dx + (\frac{x^3}{y} + 2\frac{x}{y} + 3y)dy = 0$.

1.19. а) $(x - y^2 x)dx + (y - x^2 y)dy = 0$;

б) $xy' - y = (x + y) \ln \frac{x + y}{x}$;

в) $(6x - 3y)dx = (5x - 2y + 2)dy$;

г) $y' + y = e^{-x}$, $M(0; 0)$;

д) $y' + 4x^3 y = 4(x^3 + 1)e^{-4x} y^2$;

е) $(3x^3 + 6x^2 y + 3xy^2)dx + (2x^3 + 3x^2 y + 3y^3)dy = 0$;

ё) $(5xy - \frac{y}{x})dy + (5y^2 - x^2)dx = 0$.

1.20. а) $(1 + y^2)xdx + (1 + x^2)dy = 0$;

б) $2x^3 y' = y(2x^2 - y^2)$;

в) $(4x + 2y + 2)dx = (y - 3)dy$;

г) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$, $M(0; 2)$;

$$\text{д) } y' - y \operatorname{tg} x = -\frac{2}{3} y^4 \sin x ;$$

$$\text{е) } (5y^2 - 6xy + 6x)dx + (10xy - 3x^2 + 4)dy = 0 ;$$

$$\text{е) } \left(\frac{x^2}{y} - 4x - 2y\right)dx + \left(y - 4x - \frac{2x^2}{y}\right)dy = 0 .$$

$$\mathbf{1.21.} \text{ а) } xydx + \sqrt{1-x^2} dy = 0 ;$$

$$\text{б) } xy'(\ln y - \ln x) = y ;$$

$$\text{в) } (4y - 8)dx = (3x + 2y - 7)dy ;$$

$$\text{г) } y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2, \quad M(0; -1);$$

$$\text{д) } y' + 4x^3 y = 4y^2 e^{4x} (1 - x^3) ;$$

$$\text{е) } (6x^2 + 5y)dx + (5x + 10y\sqrt{y})dy = 0 ;$$

$$\text{е) } y^2 dx + \left(x + e^{\frac{2}{y}}\right)dy = 0 .$$

$$\mathbf{1.22.} \text{ а) } 2e^x \operatorname{tg} y dx + (1 + e^x) \sec^2 y dy = 0 ;$$

$$\text{б) } 2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8 \frac{y}{x} + 8 ;$$

$$\text{в) } (8x - 13y + 3)dx + (7x - 2y + 12)dy = 0 ;$$

$$\text{г) } y' + 2y = e^{3x}, \quad M(0; 1) ;$$

$$\text{д) } y' - y \operatorname{ctg} x = \frac{y^3}{\sin x} ;$$

$$\text{е) } (2e^{2x} \cos y + 3x^2)dx + (3y^2 - e^{2x} \sin y)dy = 0 ;$$

$$\text{е) } e^{y^2} dx - (y + 2xye^{y^2})dy = 0 .$$

1.23. а) $(1 + y^2)dx - xydy = 0$;

б) $xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y$;

в) $(60x + 6y - 12)dx = (x + 5y + 39)dy$;

г) $y' + \frac{y}{x} = 2\ln x + 1$, $M(1;0)$;

д) $y' - \frac{2y}{x} = -x^4 y^3 e^x$;

е) $(5y + 2\ln x)dx + (4y + 5x)dy = 0$;

е) $dx + (xy - y^3)dy = 0$.

1.24. а) $(xy^2 + x)dy + (x^2 y - y)dx = 0$;

б) $(xy' - y)\arctg \frac{y}{x} = x$;

в) $(15x + 19y + 23)dx = (21x + y - 19)dy$;

г) $y' - 2xy = 3x^2 - 2x^4$, $M(0;1)$;

д) $y' - \frac{3y}{2x} = -\frac{5x^2 + 3}{2x} y^3$;

е) $(2x - 2\sin x \sin y)dx + (3y^2 + 2\cos x \cos y)dy = 0$;

е) $2y^2 dx + (x + e^{\frac{1}{y}})dy = 0$.

1.25. а) $y' = xy^2 + 2xy$;

б) $xy' = \sqrt{2x^2 + y^2} + y$;

в) $(x + 5y - 6)dx = (7x - y - 6)dy$;

г) $y' - \frac{2y}{x} = 2x^3$, $M(1;2)$;

$$д) y' - y\sqrt{x} = \frac{4\sqrt{x}}{y};$$

$$е) (2xy^2 + e^x)dx + (2x^2y - \sin y)dy = 0;$$

$$е) (xy + \sqrt{y})dy + y^2dx = 0.$$

$$1.26. а) y' = (2y + 1)ctgx;$$

$$б) (2x - y)y' = x + 2y;$$

$$в) (x + 2y + 1)dx - (2x - 3)dy = 0;$$

$$г) y' + y\cos x = e^{-\sin x}, \quad M(0;1);$$

$$д) y' + \frac{2y}{x} = x^4y^2;$$

$$е) \left(\frac{2}{y} - 3\right)dx + \left(3y^2 - \frac{2x}{y^2}\right)dy = 0;$$

$$е) 2(x + y^4)dy - ydx = 0.$$

$$1.27. а) xy(1 + x^2)y' = 1 + y^2;$$

$$б) 3x^2y' = y^2 + 10xy + 10x^2;$$

$$в) (2x + 3y - 5)dx = (5x - 5)dy;$$

$$г) y' + y = \ln(e^x + 1), \quad M(0; \ln 2);$$

$$д) y' + 2y = y^2e^x;$$

$$е) (xy^3 + y\sin x + 5)dx + \left(\frac{3}{2}x^2y^2 - \cos x + 2y\right)dy = 0;$$

$$е) 4ydx - (13y^3 - x)dy = 0.$$

$$1.28. а) x^3y' + y = 7;$$

$$б) y^2 + x^2y' = xy y';$$

$$\text{в)} (10x - 12y + 8)dx = (9x - y + 17)dy ;$$

$$\text{г)} y' + \frac{y}{x} = e^{x^2}, \quad M(1; \frac{1}{2}) ;$$

$$\text{д)} y' + \frac{y}{x+1} = -y^2 ;$$

$$\text{е)} (3x^2 + y^2 e^{xy^2})dx + (3y + 2xye^{xy^2})dy = 0 ;$$

$$\text{е)} (2xy + 3)dy - y^2 dx = 0 .$$

$$\mathbf{1.29.} \text{ а)} e^y(1+x^2)dy - 2x(1+e^y)dx = 0 ;$$

$$\text{б)} (3x^2 - 2xy)y' = x^2 + 3xy - y^2 ;$$

$$\text{в)} (2x + 19y + 17)dx = (16x + 2y - 14)dy ;$$

$$\text{г)} y' - \frac{xy}{x^2 + 1} = (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}, \quad M(0; 2) ;$$

$$\text{д)} y' - \frac{2y}{3x} = \frac{x^2}{3y^2} ;$$

$$\text{е)} (2x - \frac{y}{x^2} e^{\frac{y}{x}})dx + (y + \frac{1}{x} e^{\frac{y}{x}})dy = 0 ;$$

$$\text{е)} (\frac{x}{y^2} - \frac{1}{\cos^2 y})dy - \frac{1}{y} dx = 0 .$$

$$\mathbf{1.30.} \text{ а)} (2xy + y)y' = 3 - y^2 ;$$

$$\text{б)} xy' \sin \frac{y}{x} + x = y \sin \frac{y}{x} ;$$

$$\text{в)} (2y - 2)dx = (x + y - 2)dy ;$$

$$\text{г)} y' - y \operatorname{tg} x = \sin^2 x, \quad M(0; \frac{2}{3}) ;$$

$$д) y' + \frac{y}{x} = \frac{y^2}{2};$$

$$е) \left(\frac{4}{3}x - e^y \sin x\right)dx + (5 + e^y \cos x)dy = 0;$$

$$є) (x^2 + y)dx - xdy.$$

Задача 2. Розв'язати диференціальні рівняння. В пункті а) знайти частинний розв'язок, що задовольняє початковим умовам $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$.

$$2.1. а) y'' + x(y')^2 - y' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1;$$

$$б) yy'' - (y')^2 = 0.$$

$$2.2. а) xy'' + y' = x^2 + 1, \quad y(1) = \frac{10}{9}, \quad y'(1) = \frac{7}{3};$$

$$б) (y-1)y'' = 2(y')^2.$$

$$2.3. а) xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = e^2;$$

$$б) (2y+3)y'' - 2(y')^2 = 0.$$

$$2.4. а) xy'' \ln x = y', \quad y(e) = 0, \quad y'(e) = 1;$$

$$б) yy'' - y' + (y')^2 = 0.$$

$$2.5. а) y'' = 2(y' - 1) \operatorname{ctg} x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5;$$

$$б) yy'' = (y')^2 - y'.$$

$$2.6. а) x^3 y'' + x^2 y' - 1 = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 1;$$

$$б) yy'' = (y')^2 - (y')^3.$$

$$2.7. а) y'' = \frac{y'}{x} + x, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 0;$$

$$б) 2yy'' = (y')^2.$$

$$2.8. а) (1 + e^x)y'' + y' = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 2;$$

$$б) (1 + y)y'' = (y')^2 + y'.$$

2.9. а) $(1+x^2)y'' + 2xy' = 2$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$;

б) $y'' + \frac{2}{1-y}(y')^2 = 0$.

2.10. а) $y'' + y'tg x = \sin 2x$, $y(0)=0$, $y'(0)=-1$;

б) $(y')^2 + 2yy'' = 0$.

2.11. а) $xy'' - y' = x^2e^x$, $y(0)=-1$, $y'(0)=0$;

б) $(y')^2 + yy'' = 0$.

2.12. а) $x^4y'' + 2x^3y' = 1$, $y(1)=\frac{3}{2}$, $y'(1)=-2$;

б) $(y^2 - y')y' + yy'' = 0$.

2.13. а) $xy'' + y' = x + 1$, $y(1)=\frac{5}{4}$, $y'(1)=\frac{5}{2}$;

б) $y^2y'' = (y')^3$.

2.14. а) $(x^2 + 1)y'' - 2xy' = 0$, $y(0)=1$, $y'(0)=3$;

б) $yy'' - (2 + y')y' = 0$.

2.15. а) $(1+x^2)y'' + 2xy' = 2x^3$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$;

б) $y'' + 2y(y')^3 = 0$.

2.16. а) $y'' - \frac{2xy'}{1-x^2} + \frac{2}{1-x^2} = 0$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$;

б) $y'((y')^2 - 1) = 2yy''$.

2.17. а) $y'' - 2y'ctg 2x = 2ctg 2x$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{4}$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -3$;

б) $2yy'' = y^2 + (y')^2$.

2.18. а) $y'' - y'ctg x = \sin 2x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$;

б) $y''tg y = 2(y')^2$.

2.19. а) $x^2y'' = (y')^2$, $y(1)=1-\ln 2$, $y'(1)=\frac{1}{2}$;

б) $yy'' = y^2y' + (y')^2$.

2.20. a) $(1 + \sin x)y'' = y' \cos x, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 1;$
 б) $2yy'' + y^2 - (y')^2 = 0.$

2.21. a) $xy'' + y' + x = 0, \quad y(1) = -\frac{1}{4}, \quad y'(1) = \frac{1}{2};$

б) $yy'' + (y')^2 - (y')^3 = 0.$

2.22. a) $(1 + x^2)y'' + 2xy' + 2x = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1;$

б) $yy'' = (y')^2 + 1.$

2.23. a) $(1 + \cos x)y'' + 2y' \sin x = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 16;$

б) $yy'' + (y')^2 = 0.$

2.24. a) $y'' + \frac{y'}{x} = \frac{1}{x^4}, \quad y(1) = \frac{1}{4}, \quad y'(1) = \frac{1}{2};$

б) $yy'' = (y' - 2)y'.$

2.25. a) $y'' \operatorname{tg} x = y' + 1, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1;$

б) $yy'' - (1 + y')y' = 0.$

2.26. a) $xy'' + y' = 1, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 2;$

б) $y'' + y(y')^3 = 0.$

2.27. a) $xy'' \ln x - y' = 2, \quad y(e) = 0, \quad y'(e) = 0;$

б) $y'' = (1 + (y')^2)y'.$

2.28. a) $xy'' + y' = \sqrt{x}, \quad y(1) = \frac{4}{9}, \quad y'(1) = \frac{5}{3};$

б) $2(y')^2 = (y + 2)y''.$

2.29. a) $y'' + \frac{y'}{x} = x^2, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 1;$

б) $yy'' + (y')^3 = 0.$

2.30. a) $x^2y'' + xy' = 1, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1;$

б) $2yy'' = 1 + (y')^2.$

Задача 3. Розв'язати диференціальні рівняння. В пункті б) знайти частинний розв'язок, що задовольняє початковим умовам $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$.

3.1. а) $y'' - 12y' - 28y = 0$;

б) $y'' + 2y' + 5y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;

в) $y^{IV} - 2y''' - 3y'' = 0$.

3.2. а) $y'' + 6y' + 13y = 0$;

б) $y'' - y' - 2y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 9$;

в) $y^{IV} + 2y''' - 3y'' = 0$.

3.3. а) $y'' - 2y' + y = 0$;

б) $y'' - 2y' + 10y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$;

в) $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$.

3.4. а) $y'' - 5y' + 6y = 0$;

б) $y'' - 2y' + 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$;

в) $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$.

3.5. а) $y'' - 4y' + 3y = 0$;

б) $y'' + 9y = 0$, $y(\frac{\pi}{3}) = 1$, $y'(\frac{\pi}{3}) = 6$;

в) $y''' + 3y'' - 4y = 0$.

3.6. а) $y'' - 6y' + 10y = 0$;

б) $y'' - 4y' - 5y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 11$;

в) $y^{IV} - 2y'' + y = 0$.

3.7. а) $y'' - 6y' + 9y = 0$;

$$\text{б) } y''+64y=0, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right)=2, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=4;$$

$$\text{в) } y^{IV}-6y''' + 3y'' + 16y' - 24y = 0.$$

$$\mathbf{3.8.} \quad \text{а) } y''-6y'+8y=0;$$

$$\text{б) } y''+y=0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0;$$

$$\text{в) } y'''-3y''+4y=0.$$

$$\mathbf{3.9.} \quad \text{а) } 3y''-2y'-8y=0;$$

$$\text{б) } y''-2y'+2y=0, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=1;$$

$$\text{в) } y'''-y''-y'+y=0.$$

$$\mathbf{3.10.} \quad \text{а) } y''-4y'+13y=0;$$

$$\text{б) } y''+4y'=0, \quad y(0)=7, \quad y'(0)=8;$$

$$\text{в) } y'''-2y''-4y'+8y=0.$$

$$\mathbf{3.11.} \quad \text{а) } 3y''+7y'+2y=0;$$

$$\text{б) } y''+49y=0, \quad y\left(\frac{\pi}{14}\right)=0, \quad y'\left(\frac{\pi}{14}\right)=2;$$

$$\text{в) } y'''-3y''-9y'+27y=0.$$

$$\mathbf{3.12.} \quad \text{а) } 3y''-7y'+2y=0;$$

$$\text{б) } y''+324y=0, \quad y\left(\frac{\pi}{18}\right)=0, \quad y'\left(\frac{\pi}{18}\right)=36;$$

$$\text{в) } y^{IV} + 4y''' + 7y'' + 6y' + 2y = 0.$$

$$\mathbf{3.13.} \quad \text{а) } y''-2y'+5y=0;$$

$$\text{б) } y''-22y'+121y=0, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=0;$$

$$\text{в) } y'''-4y''+y'+6y=0.$$

3.14. а) $y''-27y'+50y=0$;

б) $y''+4y'+13y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$;

в) $y'''-18y''+81y=0$.

3.15. а) $y''-4y'+5y=0$;

б) $7y''+6y'-y=0$, $y(0)=2$, $y'(0)=2$;

в) $y'''-8y''+16y=0$.

3.16. а) $y''-18y'+81y=0$;

б) $y''+2y'+10y=0$, $y(0)=2$, $y'(0)=1$;

в) $y'''-2y''-y'+2=0$.

3.17. а) $4y''-8y'+5y=0$;

б) $y''-5y'+6y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$;

в) $y'''-4y''+y'+6y=0$.

3.18. а) $y''+5y'-14y=0$;

б) $y''-4y'+5y=0$, $y(0)=2$, $y'(0)=3$;

в) $y'''-3y''+3y'-y=0$.

3.19. а) $y''-8y'+12y=0$;

б) $y''+2y'+26y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=9$;

в) $y''' + y'''-12y''=0$.

3.20. а) $y''-2y'+26y=0$;

б) $y''-y=0$, $y(0)=2$, $y'(0)=0$;

в) $y''' - y'''-6y''=0$.

3.21. а) $y''-2y'+17y=0$;

б) $y''-2y'+y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$;

$$\text{в) } y''' - 4y'' + y' - 4 = 0.$$

$$\mathbf{3.22.} \text{ а) } y'' - 6y' + 13y = 0;$$

$$\text{б) } y'' - 13y' + 42y = 0, \quad y(0) = \frac{1}{6}, \quad y'(0) = 2;$$

$$\text{в) } y''' - 3y'' - y' + 3y = 0.$$

$$\mathbf{3.23.} \text{ а) } y'' - 9y' + 14y = 0;$$

$$\text{б) } y'' + 4y' + 8y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4;$$

$$\text{в) } y''' + 4y'' + 4y' = 0.$$

$$\mathbf{3.24.} \text{ а) } y'' - 36y' + 324y = 0;$$

$$\text{б) } y'' - 2y' + 26y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 11;$$

$$\text{в) } y''' - 3y'' - 9y' + 27y = 0.$$

$$\mathbf{3.25.} \text{ а) } y'' + 6y' + 9y = 0;$$

$$\text{б) } y'' + 49y = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{7}\right) = 1, \quad y'\left(\frac{\pi}{7}\right) = 6;$$

$$\text{в) } y^{IV} + 2y''' - 3y'' = 0.$$

$$\mathbf{3.26.} \text{ а) } y'' + 6y' + 10y = 0;$$

$$\text{б) } y'' - 4y' = 0, \quad y(0) = 7, \quad y'(0) = 16;$$

$$\text{в) } y^{IV} + 4y''' + 7y'' + 6y' + 2y = 0.$$

$$\mathbf{3.27.} \text{ а) } y'' - 30y' + 225y = 0;$$

$$\text{б) } y'' + 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 5;$$

$$\text{в) } y''' - y'' - y' + y = 0.$$

$$\mathbf{3.28.} \text{ а) } y'' - 6y' + 25y = 0;$$

$$\text{б) } y'' + 4y' - 5y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 13;$$

$$\text{в) } y^{IV} - 4y'' + 4y = 0 .$$

$$\mathbf{3.29.} \text{ а) } y'' - 6y' + 5y = 0 ;$$

$$\text{б) } y'' + 2y' + 10y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2 ;$$

$$\text{в) } y''' + 2y'' - 7y' + 4y = 0 .$$

$$\mathbf{3.30.} \text{ а) } 3y'' + 2y - y = 0 ;$$

$$\text{б) } y'' - 4y' + 13y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 ;$$

$$\text{в) } y^{IV} - 16y'' + 64y = 0 .$$

Задача 4. Розв'язати диференціальні рівняння. В пункті б) знайти частинний розв'язок, що задовольняє початковим умовам $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$. Рівняння пункту г) розв'язати методом варіації довільних сталих.

$$\mathbf{4.1.} \text{ а) } y'' - 4y' = 8 - 16x ;$$

$$\text{б) } y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2 ;$$

$$\text{в) } y'' + 4y = -8\sin 2x + 32\cos 2x + 4e^{2x} ;$$

$$\text{г) } y'' + 9y = \frac{9}{\sin 3x} .$$

$$\mathbf{4.2.} \text{ а) } y'' - 2y' + y = 4e^x ;$$

$$\text{б) } 4y'' + 16y' + 15y = 4e^{\frac{3x}{2}}, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -5,5 ;$$

$$\text{в) } y'' - y' = 128\cos 8x - 64e^{8x} ;$$

$$\text{г) } y'' + 4y = 8\operatorname{ctg} 2x .$$

$$\mathbf{4.3.} \text{ а) } y'' + 3y' = 10 - 6x ;$$

$$\text{б) } y'' - y' = 2(1 - x), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 ;$$

$$\text{в) } y'' + y = 2\sin x - 8\cos x + 2e^x ;$$

$$\text{г) } y'' + 9y = \frac{9}{\cos 3x} .$$

$$\mathbf{4.4.} \text{ а) } y'' + 2y' + y = (18x + 8)e^{-x} ;$$

$$\text{б) } y'' + y + \sin 2x = 0, \quad y(\pi) = 1, \quad y'(\pi) = 1 ;$$

$$\text{в) } y'' + 16y = 16\cos 4x - 16e^{4x} ;$$

$$\Gamma) y'' - 6y' + 8y = \frac{4e^{2x}}{1 + e^{-2x}}.$$

4.5. а) $y'' + y' - 2y = 9\cos x - 7\sin x$;

б) $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 9$;

в) $y'' - y' = 2x - 1 - 3e^{2x}$;

$$\Gamma) y'' - 2y' = \frac{4e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} ;$$

4.6. а) $y'' - 14y' + 49y = 147\sin 7x$;

б) $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

в) $y'' - 4y' = 8(e^{4x} + e^{-4x})$;

$$\Gamma) y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}.$$

4.7. а) $y'' - 4y' + 4y = \sin x$;

б) $2y'' - y' = 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

в) $y'' - y = e^{2x} + e^x(x^2 + x + 1)$;

$$\Gamma) y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}.$$

4.8. а) $y'' + 4y' - 5y = 1$;

б) $y'' + 4y = \cos 2x$, $y(0) = 0$, $y'(\frac{\pi}{4}) = 0$;

в) $y'' + y' = e^x + x^2$;

$$\Gamma) y'' - y = \frac{e^x}{e^x + 1}.$$

4.9. а) $2y'' + y' - y = 2e^{2x}$;

б) $y'' - y' - 6y = 2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;

в) $y'' - 4y' + 3y = 3e^{2x} - 4\sin 2x$;

г) $y'' - 2y' + 2y = e^{-x}\operatorname{ctgx}$.

4.10. а) $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$;

б) $y'' + 2y' + y = -2\sin x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;

в) $y'' - y' = 2e^x + \cos x$;

$$\text{г) } y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}.$$

$$4.11. \text{ а) } 4y'' - 4y' + y = -25 \cos x;$$

$$\text{б) } y'' + 3y' = 10 - 6x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 7;$$

$$\text{в) } y'' + 16y = 16 \cos 4x - 16e^{4x};$$

$$\text{г) } y'' + y = \frac{1}{\cos x}.$$

$$4.12. \text{ а) } y'' - 2y' + 2y = 2x;$$

$$\text{б) } y'' + 6y' + 9y = 72e^{3x}, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 2;$$

$$\text{в) } y'' + 36y = 24 \sin 6x + 36e^{6x}.$$

$$\text{г) } y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}.$$

$$4.13. \text{ а) } y'' + y' = \cos x;$$

$$\text{б) } y'' + y' = x^2 + 2x, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -2;$$

$$\text{в) } y'' + y' = 2 \operatorname{ch} x;$$

$$\text{г) } y'' + 4y = \operatorname{ctg} 2x.$$

$$4.14. \text{ а) } y'' - 2y' - 8y = 12 \sin 2x - 36 \cos 2x;$$

$$\text{б) } y'' - 6y' + 9y = 9x - 6, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2;$$

$$\text{в) } y'' + 4y = e^x + 1;$$

$$\text{г) } y'' + y = \operatorname{tg} x.$$

$$4.15. \text{ а) } y'' + 9y = 10e^{3x};$$

$$\text{б) } y'' - 13y' + 12y = 18x^2 - 39, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3;$$

$$\text{в) } y'' - 4y' + 5y = 1 + \cos^2 x;$$

$$\text{г) } y'' + y = \frac{1}{\sin^3 x}.$$

$$4.16. \text{ а) } y'' + 6y' + 9y = 9xe^{-3x};$$

$$\text{б) } y'' - 4y' + 5y = \sin x + 2 \cos x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 11;$$

$$\text{в) } y'' + 9y = -18 \sin 3x - 18e^{3x};$$

$$\text{г) } y'' - y' = \frac{1}{e^{-x} + 1}.$$

4.17. а) $y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5$;

б) $y'' + y = 3\sin 4x + 2\cos 4x$, $y(\frac{\pi}{2}) = 0$, $y'(\frac{\pi}{2}) = 0$;

в) $y'' - y' = 2x - 1 - 3e^{2x}$;

г) $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x^2 - 1}$.

4.18. а) $y'' - 8y' + 20y = 16(\sin 2x - \cos 2x)$;

б) $y'' - 4y' = 32 - 384x^2$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 0$;

в) $y'' + 5y' + 6y = (x^2 + 1)e^x + xe^{2x}$;

г) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2}$.

4.19. а) $y'' - 2y' = 6 + 12x - 24x^2$;

б) $y'' + 2y' + y = -2\sin x$, $y(\frac{\pi}{2}) = 0$, $y'(\frac{\pi}{2}) = 0$;

в) $y'' + 16y = 16\cos 4x - 16e^{4x}$;

г) $y'' - y = \frac{e^x}{1 + e^x}$.

4.20. а) $y'' + 4y' = 20x^2 + 12x + 2$;

б) $y'' + 6y' + 9y = 10\sin x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$;

в) $y'' + y = 2\sin x - 8\cos x + 2e^x$;

г) $y'' - 3y' = \frac{9e^{-3x}}{3 + e^{-3x}}$.

4.21. а) $y'' - 6y' + 9y = 72e^{3x}$;

б) $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3)$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$;

в) $y'' - y' = 128\cos 8x - 64e^{8x}$;

г) $y'' + \pi^2 y = \frac{\pi^2}{\sin \pi x}$.

4.22. а) $y'' + 2y' + y = 4x^3 + 24x^2 + 22x - 4$;

б) $y'' - 4y' + 5y = 2x^2 e^x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$;

в) $y'' + 4y = -8\sin 2x + 32\cos 2x + 4e^{2x}$;

$$\text{г) } y'' + y = 4\text{ctgx} .$$

$$4.23. \text{ а) } y'' + 7y' + 12y = 24x^2 + 16x - 15 ;$$

$$\text{б) } y'' - 4y' + 20y = 16xe^{2x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2 ;$$

$$\text{в) } y'' + 2y' + y = 3\sin 2x + \cos x ;$$

$$\text{г) } y'' + 16y = \frac{16}{\cos 4x} .$$

$$4.24. \text{ а) } y'' - 4y' + 13y = 26x + 5 ;$$

$$\text{б) } y'' - 9y' + 18y = 26\cos x - 8\sin x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2 ;$$

$$\text{в) } y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x} + \frac{x}{2} ;$$

$$\text{г) } y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{2 + e^{-x}} .$$

$$4.25. \text{ а) } y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6 ;$$

$$\text{б) } y'' - 10y' + 25y = e^{5x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 ;$$

$$\text{в) } y'' - 3y' = e^{3x} + e^{-3x} + 3\cos 3x ;$$

$$\text{г) } y'' + 4y = 4\text{ctg} 2x .$$

$$4.26. \text{ а) } y'' - 3y' - 10y = \sin x + 3\cos x ;$$

$$\text{б) } y'' - 4y' + 13y = 65x - 59, \quad y(0) = -4, \quad y'(0) = 6 ;$$

$$\text{в) } y'' + 6y' + 9y = 9xe^{-3x} + 9\sin x ;$$

$$\text{г) } y'' + 4y = \frac{4}{\sin 2x} .$$

$$4.27. \text{ а) } y'' - 2y' = (4x + 4)e^{2x} ;$$

$$\text{б) } y'' + 2y' + 10y = 30x - 14, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -2 ;$$

$$\text{в) } y'' - 4y' + 4y = 4x + \sin x ;$$

$$\text{г) } y'' + 3y' + 2y = \frac{e^{-x}}{2 + e^x} .$$

$$4.28. \text{ а) } y'' + 8y' + 25y = 18e^{5x} ;$$

$$\text{б) } y'' + 2y' = 6x^2 2x + 1, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2 ;$$

$$\text{в) } y'' - 4y' + 4y = 4x + \sin 2x ;$$

$$\text{г) } y'' + y' = \frac{e^x}{2 + e^x}.$$

$$4.29. \text{ а) } y'' - 2y' + 5y = 5x^2 + 6x - 12;$$

$$\text{б) } y'' - 10y' + 25y = 10e^{5x}, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = -1;$$

$$\text{в) } y'' - 2y' + y = \sin x + e^x;$$

$$\text{г) } y'' + 4y = 8\operatorname{ctg} 2x.$$

$$4.30. \text{ а) } y'' + 6y' + 13y = -75 \sin 2x;$$

$$\text{б) } y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}(12x + 16), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2;$$

$$\text{в) } y'' + 2y' - 3y = 2xe^{-3x} + (x+1)e^x;$$

$$\text{г) } y'' + 3y' = \frac{9e^{3x}}{1 + e^{3x}}.$$

Задача 5. Розв'язати системи диференціальних рівнянь.

Систему пункту а) розв'язати методом виключення. Систему пункту б) розв'язати за допомогою характеристичного рівняння, а також знайти частинний розв'язок, що задовольняє початковим умовам $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$.

$$5.1. \text{ а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + 2e^t, \\ \frac{dy}{dt} = -x + e^t; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -8x - 5y, \end{cases} \quad \begin{matrix} x(0) = 0, \\ y(0) = 2. \end{matrix}$$

$$5.2. \text{ а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - y - 5t + 1, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y + t - 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y, \end{cases} \quad \begin{matrix} x(0) = 0, \\ y(0) = 1. \end{matrix}$$

$$5.3. \text{ а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 4y + \cos t, \\ \frac{dy}{dt} = -x - 2y + \sin t; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 2y, \end{cases} \quad \begin{matrix} x(0) = 1, \\ y(0) = 7. \end{matrix}$$

$$5.4. \text{ a) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x - 4y + 2t, \\ \frac{dy}{dt} = x + y + t; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -5x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = x - 6y, \end{cases} \quad \begin{matrix} x(0) = 1, \\ y(0) = 5. \end{matrix}$$

$$5.5. \text{ a) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y + 2t + 1, \\ \frac{dy}{dt} = -2x - y - t + 2; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 4y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 5y, \end{cases} \quad \begin{matrix} x(0) = -1, \\ y(0) = 5. \end{matrix}$$

$$5.6. \text{ a) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x + y + e^t; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - 3y, \\ \frac{dy}{dt} = x + y, \end{cases} \quad \begin{matrix} x(0) = 1, \\ y(0) = -3. \end{matrix}$$

$$5.7. \text{ a) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - 3y + 7 \sin t - 10 \cos t, \\ \frac{dy}{dt} = 3x - y + 3 \sin t - 3 \cos t; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y, & x(0) = 1, \\ \frac{dy}{dt} = 6y, & y(0) = 5. \end{cases}$$

$$5.8. \text{ a) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - 3y - 15e^t, \\ \frac{dy}{dt} = 3x - y - 11e^t; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x - 2y, \end{cases} \quad \begin{matrix} x(0) = -2, \\ y(0) = 2. \end{matrix}$$

$$5.9. \text{ a) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 5x + y - 2t; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -3x + 2y, \end{cases} \quad \begin{matrix} x(0) = 2, \\ y(0) = -4. \end{matrix}$$

$$5.10. \text{ a) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - t + 7, \\ \frac{dy}{dt} = x - 3t - 6; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 4y, \end{cases} \quad \begin{matrix} x(0) = -2, \\ y(0) = 1. \end{matrix}$$

$$5.11. \text{ a) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -5x + 2y + 4e^t, \\ \frac{dy}{dt} = -8x + 5y + 9e^t; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y, \end{cases} \quad \begin{matrix} x(0) = -1, \\ y(0) = 5. \end{matrix}$$

$$5.12. \text{ a) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - \cos t, \\ \frac{dy}{dt} = -x + \sin t; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 4y, \end{cases} \quad \begin{matrix} x(0) = 2, \\ y(0) = 6. \end{matrix}$$

$$5.13. \text{ a) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + y - e^t, \\ \frac{dy}{dt} = -3x + 2y + 6e^t; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 8y, \\ \frac{dy}{dt} = x + y, \end{cases} \quad \begin{matrix} x(0) = 6, \\ y(0) = 0. \end{matrix}$$

$$5.14. \text{ a) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 4y + e^t, \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 5y + 2e^t; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x - 3y, \\ \frac{dy}{dt} = -x, \end{cases} \quad \begin{matrix} x(0) = 3, \\ y(0) = 1. \end{matrix}$$

$$5.15. \text{ a) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y + 2e^t, \\ \frac{dy}{dt} = 3x - 2y + 4e^t; \end{cases}$$

$$5.16. \text{ a) } \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -4x - 4y, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x(0) = 1, \\ y(0) = -4. \end{array}$$

$$5.16. \text{ a) } \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x + y - \cos t, \\ \frac{dy}{dt} = -2x - y + \sin t; \end{array} \right.$$

$$5.16. \text{ б) } \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -3x + 2y, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x(0) = -1, \\ y(0) = 5. \end{array}$$

$$5.17. \text{ a) } \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -2x - y + \sin t, \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 2y + \cos t; \end{array} \right.$$

$$5.17. \text{ б) } \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -6x - 3y, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x(0) = 1, \\ y(0) = -3. \end{array}$$

$$5.18. \text{ a) } \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = y + 3e^t, \\ \frac{dy}{dt} = x - e^t; \end{array} \right. \quad \text{б) } \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 4x - 8y, \\ \frac{dy}{dt} = -8x + 4y, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x(0) = 4, \\ y(0) = -2. \end{array}$$

$$5.19. \text{ a) } \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x + y + t, \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 4y + 6t^2; \end{array} \right. \quad \text{б) } \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x - 5y, \\ \frac{dy}{dt} = -x - 3y, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x(0) = -4, \\ y(0) = 2. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{5.20. a)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -2x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = x + y - t; \end{array} \right. & \text{б)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 3x + y, \quad x(0) = 1, \\ \frac{dy}{dt} = 8x + y, \quad y(0) = -4. \end{array} \right. \\
\text{5.21. a)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -2x - 4y + 1, \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y + 6t^2; \end{array} \right. & \text{б)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 5x + 8y, \quad x(0) = 10, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 3y, \quad y(0) = 0. \end{array} \right. \\
\text{5.22. a)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y + t, \\ \frac{dy}{dt} = 3x - 4y; \end{array} \right. & \text{б)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 2x + 8y, \quad x(0) = 3, \\ \frac{dy}{dt} = x + 4y, \quad y(0) = 5. \end{array} \right. \\
\text{5.23. a)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 5x - 3y + te^t, \\ \frac{dy}{dt} = 3x - y + e^t; \end{array} \right. & \text{б)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 4x - y, \quad x(0) = 3, \\ \frac{dy}{dt} = -x + 4y, \quad y(0) = 5. \end{array} \right. \\
\text{5.24. a)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x - y + 4 \cos t, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 2y + 5 \sin t; \end{array} \right. & \\
& \text{б)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 7x + 3y, \quad x(0) = 1, \\ \frac{dy}{dt} = x + 5y, \quad y(0) = -1. \end{array} \right. \\
\text{5.25. a)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x + y + \cos t, \\ \frac{dy}{dt} = -2x - y; \end{array} \right. & \text{б)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x + 4y, \quad x(0) = 5, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 3y, \quad y(0) = -1. \end{array} \right.
\end{array}$$

$$5.26. \text{ а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y - 4, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y + 3t - 6; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y, & x(0) = 3, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 8y, & y(0) = -1. \end{cases}$$

$$5.27. \text{ а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + t^2, \\ \frac{dy}{dt} = x; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 4y, & x(0) = 2, \\ \frac{dy}{dt} = x + y, & y(0) = 1. \end{cases}$$

$$5.28. \text{ а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y - \sin t, \\ \frac{dy}{dt} = 3x - 2y - \cos t; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y, & x(0) = -1, \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 3y, & y(0) = 4. \end{cases}$$

$$5.29. \text{ а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 2y + 2e^{-t}, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y + e^{-t}; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y, & x(0) = 3, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 6y, & y(0) = 2. \end{cases}$$

$$5.30. \text{ а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 5x + y + t^2; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 3y, & x(0) = -5, \\ \frac{dy}{dt} = 5x + 4y, & y(0) = 1. \end{cases}$$

Задача 6.

6.1. Матеріальна точка маси m рухається прямолінійно до центра, що притягує її з силою $\frac{mt^2}{r}$, де r - віддаль точки від центра. Рух починається із стану спокою при $r = a$. Знайти час, за який точка досягне центра.

6.2. Швидкість розпаду радію пропорційна його кількості. Протягом року з кожного грама радію розпадається 0,44 мг. Через скільки років розпадеться половина наявної кількості радію?

6.3. Швидкість розмноження деяких бактерій пропорційна їх кількості в розглядуваний момент часу t . За 5 год. кількість бактерій збільшилась втричі. Знайти залежність кількості бактерій від часу.

6.4. Моторний човен рухається в стоячій воді з швидкістю v_0 . Опір води пропорційний швидкості руху човна. Описати подальший рух човна, якщо двигун вимкнено. Знайти час руху човна до зупинки і пройдений шлях.

6.5. Човен розганяють в стоячій воді до швидкості v_0 , після чого вимикають мотор. Опір води пропорційний швидкості руху човна. Описати подальший рух човна. Знайти час руху човна до зупинки і пройдений шлях.

6.6. Температура вийнятої з печі хлібини протягом 20 хв. падає від 200 до 150°C . Температура повітря дорівнює 25°C . Через скільки часу від початку охолодження температура хліба понизилась до 30°C ?

6.7. Скласти рівняння руху тіла по осі Ox , якщо тіло почало рухатися з точки $M(4;0)$ з швидкістю $v = 2t + 3t^2$.

6.8. Відомо, що швидкість приросту населення прямо пропорційна кількості населення. Знайти залежність між чисельністю населення A і часом, якщо відомо, що в деякий момент, що приймається за початковий, кількість населення дорівнювала A_0 , а через рік вона збільшилась на $a(\%)$. Прийняти $A_0 = 5$ мільярдів, $a = 10\%$. Якою буде чисельність населення через 10 років, відрاهовуючи від $t_0 = 0$?

6.9. Поїзд, вага якого разом з тепловозом дорівнює P , рухається по прямолінійним шляхом. Сила тяги тепловоза постійна і дорівнює $\vec{F}$. Сила опору $\vec{W}$ при русі задається як лінійна функція від швидкості поїзда. Знайти закон руху, якщо в початковий момент швидкість і пройдений шлях дорівнюють нулю.

6.10. Тіло масою m рухається прямолінійно під дією сили F , яка пропорційна часу руху тіла (коефіцієнт пропорційності дорівнює 3). Крім цього на тіло діє сила опору середовища, яка пропорційна швидкості (коефіцієнт пропорційності дорівнює 2). Знайти залежність швидкості від часу.

6.11. Точка масою m рухається прямолінійно під дією сили, яка дорівнює потроєному кубові часу. В момент часу $t_0 = 0$ $v = v_0$. Крім того на точку діє сила опору середовища пропорційна добутку часу і швидкості (коефіцієнт пропорційності k). Знайти залежність швидкості від часу.

6.12. Тіло масою m падає з деякої висоти з швидкістю v . В момент часу $t_0 = 0$ $v = v_0$. На тіло діє сила опору середовища пропорційна квадратові швидкості тіла. Знайти залежність швидкості від часу.

6.13. У культурі пивних дріжджів швидкість приросту діючого ферменту пропорційна наявній його кількості. Якщо ця кількість подвоюється протягом години, то у скільки разів вона збільшиться протягом 2,5 год?

6.14. Скласти рівняння кривої, що проходить через точку $M(2; -3)$ та має дотичну з кутовим коефіцієнтом $x = 4x - 3$.

6.15. Сталева кулька радіуса r падає з висоти h без початкової швидкості на сталеву плиту. Опір повітря пропорційний квадратові швидкості. Знайти швидкість кульки в момент удару в плиту.

6.16. Тіло рухається прямолінійно з прискоренням, яке пропорційне добутку квадрата швидкості v на час t . Знайти залежність між швидкістю і часом, якщо при $t = 0$ $v = 60 \frac{\text{км}}{\text{год}}$.

6.17. Маса пілота з парашутом становить 80 кг. Опір повітря при опусканні парашута пропорційний квадрату його швидкості ($k=400$). Визначити швидкість опускання залежно від часу і встановити максимальну швидкість опускання.

6.18. Знайти лінію, яка проходить через точку $M(2; 0)$, якщо відрізок дотичної між точкою дотику і віссю ординат має сталу довжину $l = 2$.

6.19. Конденсатор ємністю 10^6 пф вмикається в коло з напругою $E = 100$ В і опором $R = 10^3$ Ом. Визначити заряд q конденсатора в момент t після вмикання.

6.20. Моторний човен рухається в стоячій воді з швидкістю 5 м/с. На повному ході двигун вимикається і через 40 с після цього швидкість човна зменшується до 2 м/с. Визначити швидкість човна через 2 хв. після зупинки двигуна, вважаючи, що опір води пропорційний швидкості руху човна.

6.21. Матеріальна точка масою 0,2 кг занурюється в воду з початковою швидкістю 0,05 м/с. Знайти шлях пройдений точ-

кою за 2 с, якщо сила опору води пропорційна швидкості (коефіцієнт пропорційності 2).

6.22. Швидкість розпаду радіо пропорційна його наявній кількості. Відомо, що половина його початкового запасу розпадається протягом 1600 років. Визначити, яка кількість радіо не розпалась за 100 років, якщо початкова його кількість дорівнювала 1 кг.

6.23. Футбольний м'яч вагою 0,4 кг підкинуто вгору з швидкістю 20 м/с. Опір повітря пропорційний квадрату швидкості і дорівнює 0,48 г при швидкості 1 м/с. Обчислити час підйому м'яча.

6.24. Швидкість здешевлення обладнання внаслідок його зношування пропорційна в кожний момент часу його фактичній вартості. Початкова вартість обладнання 2 млн. грн. Якою буде вартість обладнання через 10 років?

6.25. Тіло масою m падає з деякої висоти з швидкістю v_0 . Сила опору, яка діє на тіло, пропорційна квадратові швидкості. Знайти залежність між швидкістю і часом падіння.

6.26. Знайти лінію, яка проходить через точку $M(2;0)$, якщо відрізок дотичної між точкою дотику і віссю ординат має сталу довжину $l = 2$.

6.27. У воді, температура якої 20° , за 10 хв. тіло охолоджується від 100° до 60° . За скільки часу тіло охолodиться до 30° , якщо за законом Ньютона швидкість охолодження пропорційна різниці температур тіла і середовища.

6.28. В чан налито 100 л ропи, що містить 10 кг розчиненої солі. Зі швидкістю 3 л за хвилину в чан вливається вода, і суміш з такою ж швидкістю витікає з чана. Перемішуючи воду, в чані підтримують рівномірну концентрацію. Скільки солі залишиться в чані через годину?

6.29. Матеріальна точка масою m рухається прямолінійно під дією сили F , яка прямо пропорційна часу руху t і обернено пропорційна швидкості руху v . Встановити залежність між швидкістю v і часом t , якщо при $t = 0$ $v = 0$.

6.30. Знайти рівняння кривої, що проходить через точку $(3;4)$, якщо кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної в будь-якій точці кривої, дорівнює квадратові ординати точки дотику.

9 Ряди

Теоретичні питання

1. Поняття числового ряду. Збіжність і сума ряду, залишок ряду. Геометрична прогресія. Гармонічний ряд.
2. Лінійні операції над збіжними рядами.
3. Ознаки порівняння рядів з додатними членами.
4. Ознака Даламбера збіжності ряду.
5. Ознака Коші збіжності ряду.
6. Інтегральна ознака збіжності ряду.
7. Знакопереміжні ряди. Ознака Лейбніца.
8. Знакозмінні ряди. Абсолютна і умовна збіжність. Властивості абсолютно збіжних рядів.
9. Функціональний ряд, область його збіжності. Рівномірна збіжність функціонального ряду. Ознака Вейєрштрасса.
10. Неперервність суми рівномірно збіжного функціонального ряду з неперервними членами.
11. Почленне інтегрування і диференціювання функціональних рядів.
12. Степеневий ряд. Теорема Абеля. Інтервал та радіус збіжності степеневому ряду.
13. Неперервність суми степеневому ряду. Почленне інтегрування і диференціювання степеневих рядів.
14. Розклад функцій в степеневі ряди. Єдиність розкладу. Ряди Тейлора і Маклорена.
15. Розклад в ряд Маклорена функцій
 e^x , $\sin x$, $\cos x$, $sh x$, $ch x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^m$, $arctg x$.
16. Застосування степеневих рядів до наближених обчислень.
17. Ортогональність системи тригонометричних функцій. Задача розкладу функції в тригонометричний ряд. Єдиність розкладу. Коефіцієнти Фур'є. Ряд Фур'є періоду 2π .
18. Ряд Фур'є періоду $2l$.

19. Ряди Фур'є для парних і непарних функцій. Неповні ряди Фур'є.
 20. Комплексна форма ряду Фур'є.
 21. Інтеграл Фур'є. Косинус- і синус-перетворення Фур'є.
 22. Інтеграл Фур'є в комплексній формі. Перетворення Фур'є.

Розрахункові завдання

Задача 1. Знайти суму рядів.

1.1. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2 + 24n + 35};$

б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-5)^n + 4}{6^n}.$

1.2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2 + 8n + 3};$

б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3(-1)^n}{4^n}.$

1.3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2 + 16n + 15};$

б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{6^n - 3^n}{9^n}.$

1.4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^2 + 15n + 4};$

б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n - 3}{12^n}.$

1.5. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{9n^2 + 3n - 2};$

б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-3)^n + 4^n}{5^n}.$

1.6. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^2 + 21n + 10};$

б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{7^n}.$

1.7. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^2 - 3n - 2};$

б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 - (-4)^n}{5^n}.$

1.8. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2 + 6n - 8};$

б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n - 3}{8^n}.$

1.9. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{16n^2 + 8n - 15};$

б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{6^n}.$

1.10. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{16n^2 - 8n - 15};$

б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 4(-1)^n}{7^n}.$

$$1.11. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{4n^2 + 4n - 3};$$

$$1.12. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{9n^2 + 21n - 8};$$

$$1.13. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{25n^2 + 5n - 6};$$

$$1.14. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 28n - 45};$$

$$1.15. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 - 7n - 12};$$

$$1.16. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{36n^2 - 12n - 35};$$

$$1.17. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{25n^2 - 5n - 6};$$

$$1.18. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{4n^2 - 9};$$

$$1.19. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 - 21n - 10};$$

$$1.20. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{36n^2 + 12n - 35};$$

$$1.21. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{36n^2 - 24n - 5};$$

$$1.22. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{25n^2 + 15n - 4};$$

$$1.23. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{16n^2 - 8n - 3};$$

$$1.24. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2 - 1};$$

$$\text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n + 4}{6^n}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - 5^n}{7^n}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n - 3^n}{5^n}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n + 3^n}{8^n}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n + 3(-1)^n}{9^n}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^n - 5}{4^n}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 + (-1)^n}{2^n}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{5^n}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5 + (-1)^n}{4^n}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n + 2^n}{5^n}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{7 - 2^n}{3^n}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 - 4^n}{5^n}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{7 - 3^n}{10^n}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 + 2^n}{5^n}.$$

- 1.25. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{16n^2 + 24n + 5}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 2}{4^n}$.
- 1.26. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 + 7n - 12}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 5^n}{7^n}$.
- 1.27. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{25n^2 - 15n - 4}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n - 2^n}{10^n}$.
- 1.28. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{36n^2 + 24n - 5}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n - 3^n}{6^n}$.
- 1.29. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{25n^2 + 35n + 6}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{4^n}$.
- 1.30. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{36n^2 + 48n + 7}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{12^n}$.

Задача 2. Дослідити ряди на збіжність.

- 2.1. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n \cdot n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctg \frac{n+1}{n+2} \right)^n$;
- в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(2n+3)}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n^2+1}$.
- 2.2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\arcsin \frac{n}{2n+1} \right)^{4n}$;
- в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1) \ln(3n+1)}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n} \right)^n$.
- 2.3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (n+1)!}{n^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+5}{3n+1} \right)^{n-1}$;
- в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+1) \ln^3(n+1)}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n^2+1}{n^2} \right)$.
- 2.4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n n!}{(2n)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}$;

$$\text{B)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(2n+1)} ; \quad \text{r)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(3n+2)^2}} .$$

$$2.5. \text{ a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+2)!}{3n+5} \cdot \frac{1}{2^n} ; \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3} \right)^{n\sqrt{n}} ;$$

$$\text{B)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)\ln^2(3n+2)} ; \quad \text{r)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{3^n + n} .$$

$$2.6. \text{ a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n!} \sin \frac{2}{3^n} ; \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} 10^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^{2n^2} ;$$

$$\text{B)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} ; \quad \text{r)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(6n-1)^4}} .$$

$$2.7. \text{ a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}}{(2n-1)!} ; \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n+1}{4n} \right)^{n^2} ;$$

$$\text{B)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\sqrt{\ln(2n+3)}} ; \quad \text{r)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+n}{4+n^2} \right)^2 .$$

$$2.8. \text{ a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{5^n} ; \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{-n^2} ;$$

$$\text{B)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\ln(3n+5)} ; \quad \text{r)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\sqrt{3n+2}} .$$

$$2.9. \text{ a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+1)2^n}{n!} ; \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} ;$$

$$\text{B)} \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2} ; \quad \text{r)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1} .$$

$$2.10. \text{ a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{5}{n}}{n!} ; \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \left(\frac{n}{3n+5} \right)^n ;$$

- Б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+3)\ln(3n+5)}$; р) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^3+1}{2n^3}\right)$.
- 2.11. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+2)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \operatorname{tg}^n\left(\frac{\pi}{2n}\right)$;
- Б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2 \ln(n+2)}$; р) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6+n}{36+n^2}$.
- 2.12. а) $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin \frac{3\pi}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+5}{n+3}\right)^{n^2}$;
- Б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{(n^3+1)\ln n}$; Б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{(3+7n)^2}}$.
- 2.13. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{2n}}{(2n-1)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{3n}\right)^{n^2}$;
- Б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\ln^2 n}$; р) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{(6n-1)^4}}$.
- 2.14. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 5^n}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin^n \frac{\pi}{2n}$;
- Б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)\ln(n+3)}$; р) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$.
- 2.15. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{3n}\right)^{2n}$;
- Б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(5+\ln n)}$; р) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin^2 n}{n^2+1}$.
- 2.16. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{4n+1}\right)^{2n}$;
- Б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(2n+1)}$; р) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$.

$$2.17. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 5}{(n+1)!} ; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n+1} e^{-n} ;$$

$$\text{B) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+4)\sqrt{\ln(5n+2)}} ; \quad \text{r) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^n + 1} .$$

$$2.18. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} n! \sin \frac{\pi}{2^n} ; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9n-1}{9n} \right)^{n^2} ;$$

$$\text{B) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\ln^3(2n+3)} ; \quad \text{r) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + \cos n}{3^n + \sin n} .$$

$$2.19. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(2n+5)!} ; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\arcsin \frac{1}{2n} \right)^n ;$$

$$\text{B) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+\ln n)^2} ; \quad \text{r) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}} .$$

$$2.20. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n!} ; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{n}{9n-5} \right)^{n^2} ;$$

$$\text{B) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+2n)\ln^5(3+n)} ; \quad \text{r) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{2n^2+3} .$$

$$2.21. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n} ; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(\ln(n+1))^n} ;$$

$$\text{B) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\ln(2n+1)} ; \quad \text{r) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4\sqrt{(3+5n)^3}} .$$

$$2.22. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} (4n-1) \sin \frac{\pi}{3^n} ; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 2^n}{(2n+1)^n} ;$$

$$\text{B) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(9n-4)\ln^2(5n+4)} ; \quad \text{r) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 3}{n^5 + \cos 2^n} .$$

$$2.23. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)^2}{n!} ; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n-1} e^{-n} ;$$

- B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\ln^2(n\sqrt{5}+2)}$; r) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+n}{4+n^2-2n}$.
- 2.24. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n-1}{\sqrt{n3^n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{3n+1}{5n-2} \right)^{2n}$;
- B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)^3 \sqrt{\ln(3n-1)}}$; r) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n}} \sin \frac{1}{n}$.
- 2.25. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (n^2+1)}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{2n+3} \right)^{n-1}$;
- B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(3n^2+1)\ln(n+1)}$; r) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+7n}{4^n+2n}$.
- 2.26. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n-3)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 10^n}{(2n-1)!}$;
- B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)\ln^3(2n+1)}$; r) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(3n-1)^3}}$.
- 2.27. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+2)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{(\ln(n+1))^{2n}}$;
- B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2+5n)\ln^2(3+4n)}$; r) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2+3}{n^2+2}$.
- 2.28. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n-3)!}{10^n n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{3n^2+2} \right)^{n+1}$;
- B) $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\sqrt{\ln(n-2)}}$; r) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt{n^4+2}}$.
- 2.29. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (5n+7)}{4^n (2n-1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arccos \frac{n-1}{2n+1} \right)^n$;
- B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$; r) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n} \arctg \frac{1}{n^2}$.

$$2.30. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{\sqrt[3]{n4^n}} ; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+2}}{(2n^2+1)^{\frac{n}{2}}} ;$$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n}{(3n^2+1) \cdot \ln(2n)} ; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \ln n} .$$

Задача 3. Дослідити на збіжність знакозмінні ряди. У випадку збіжності вказати збігається ряд абсолютно чи умовно.

$$3.1. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}} \right) ; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^n}{n^2} .$$

$$3.2. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n+1}{n(n+2)} ; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \operatorname{arctg} \frac{n}{2n+1} .$$

$$3.3. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{3n+1} \right)^n ; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} .$$

$$3.4. \text{ а) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} ; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n(n+1)}}{4^n} .$$

$$3.5. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{3n+1}} ; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(-1)^{n+1}}{n\sqrt{n+2}} .$$

$$3.6. \text{ а) } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(\ln n) \cdot \ln n} ; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3^n}{(2n+1)!} .$$

$$3.7. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2n^2}{n^4 - n^2 + 1} ; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \arcsin \frac{n+1}{2n+3} .$$

$$3.8. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2) \ln(n+2)} ; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+1) \cos n}{e^n} .$$

$$3.9. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}} ; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n}{2n+1} .$$

$$3.10. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \sin \frac{\pi}{2\sqrt{n}}}{\sqrt{2n+1}} ; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{2n+1}{3n+1} \right)^{n-1} .$$

$$3.11. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt{n}} ;$$

$$3.12. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \sin \frac{\pi}{3n} ;$$

$$3.13. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+3}{5^n} ;$$

$$3.14. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n}{n!} ;$$

$$3.15. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot \ln(2n)} ;$$

$$3.16. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{3n+1} ;$$

$$3.17. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{n} ;$$

$$3.18. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n-1} ;$$

$$3.19. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{n^2} ;$$

$$3.20. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n-1) \cdot 2^n} ;$$

$$3.21. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n+2)}{3^n} ;$$

$$3.22. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{2n + \ln n}} ;$$

$$3.23. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n} ;$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n - 1}{3 + 5 \cdot 2^{n+1}} .$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \sin n}{4^n + 5} .$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{3n^2 + 1} .$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+1}{n(3n+2)} .$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n\sqrt{n+1}} .$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^3}{2^n} .$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{2n}{2n+1} \right)^{n^2} .$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n \left(\frac{3n-1}{5n+2} \right)^{n-2} .$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sqrt{\frac{n+1}{4n+5}} .$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln(n+1)}{n+1} .$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{\sqrt{n^2+5}} .$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt[n]{3}}{n^2} .$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{\ln^n(n+1)} .$$

$$3.24. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+2)\left(\frac{3}{2}\right)^n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{2n+1}{2n+3} \right)^n.$$

$$3.25. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{10n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n!}{n^n}.$$

$$3.26. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (n+1)}{n \ln(n+2)};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n + 4^n}{5^n}.$$

$$3.27. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{\sqrt{n^3}};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \ln \frac{2n^2+3}{2n^2}.$$

$$3.28. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{5n-1}};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 + \cos 2^n}.$$

$$3.29. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{(3n+1) \cdot 2^{3n+1}};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sin\left(\frac{\pi n}{6n+1}\right).$$

$$3.30. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n\sqrt{n}};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Задача 4. Довести справедливість рівності.

$$4.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

$$4.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!!}{n^n} = 0.$$

$$4.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!}{(n^2)!} = 0.$$

$$4.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(2n)!} = 0.$$

$$4.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)^n}{(2n-1)!} = 0.$$

$$4.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0.$$

$$4.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!!}{5^{n^2}} = 0.$$

$$4.8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n!} = 0.$$

$$4.9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n^n} = 0.$$

$$4.10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(2n+1)!} = 0.$$

$$4.11. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)!!}{n^n} = 0.$$

$$4.12. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n)!}{2^{n^2}} = 0.$$

$$4.13. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n)^n}{(2n-1)!} = 0.$$

$$4.14. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n!)^3} = 0.$$

$$4.15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5}{(2n)!} = 0.$$

$$4.16. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{3n}}{n!} = 0.$$

$$4.17. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)!}{n^n} = 0.$$

$$4.18. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(2n-1)!} = 0.$$

$$4.19. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)!!}{n^n} = 0.$$

$$4.20. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)^n}{(2n+1)!} = 0.$$

$$4.21. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n)!}{2^{n^2}} = 0.$$

$$4.22. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{[(n+1)!]^2} = 0.$$

$$4.23. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{4^{n^2}} = 0.$$

$$4.24. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{2^{n^2}} = 0.$$

$$4.25. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)!}{n^n} = 0.$$

$$4.26. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(2n+3)!} = 0.$$

$$4.27. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)!!}{n^n} = 0.$$

$$4.28. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5n)^n}{(2n+1)!} = 0.$$

$$4.29. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5n)!}{2^{n^2}} = 0.$$

$$4.30. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{[(n+2)!]^2} = 0.$$

Задача 5. Знайти область збіжності функціонального ряду.

$$5.1. \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}.$$

$$5.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n.$$

$$5.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \frac{1}{(3x^2 + 4x + 2)^n}.$$

$$5.4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n} (x^2 - 4x + 6)^n.$$

$$5.5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}.$$

$$5.6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n+1} \frac{1}{(27x^2 + 12x + 2)^n}.$$

$$5.7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n}{n+1} \frac{1}{(3x^2 + 8x + 6)^n}.$$

$$5.8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^n.$$

$$5.9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2 - 6x + 12)^n}{4^n (n^2 + 1)}.$$

$$5.10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}.$$

$$5.11. \sum_{n=1}^{\infty} \lg^n x.$$

$$5.12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n (n^2 + 1)} (25x^2 + 1)^n.$$

$$5.13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2 - 5x + 11)^n}{5^n (n^2 + 5)}.$$

$$5.14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3}{n^3 + 2} \frac{1}{(3x^2 + 10x + 9)^n}.$$

$$5.15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{(n+1)^5 x^{2n}}.$$

$$5.16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 x^n}.$$

$$5.17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}.$$

$$5.18. \sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x.$$

$$5.19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 1}{3^n (x-1)^n}.$$

$$5.20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}.$$

$$5.21. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^2 x}.$$

$$5.22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n 3^n \sqrt{(x+2)^n}}.$$

$$5.23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+x)^n}{n^n}.$$

$$5.24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{|x|}{x} \right)^n.$$

$$5.25. \sum_{n=1}^{\infty} (5 - x^2)^n.$$

$$5.26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg}^n x}{n^2 + 2}.$$

$$5.27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

$$5.28. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{x^{2+n}}.$$

$$5.29. \sum_{n=1}^{\infty} (2 - x^2)^n.$$

$$5.30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\ln^n (x+2)}.$$

Задача 6. Довести рівномірну збіжність функціонального ряду у вказаному проміжку.

$$6.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4 + x^4}}, \quad (-\infty; \infty).$$

$$6.2. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{3n-4}, \quad [0; 1].$$

$$6.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 nx}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}, \quad (-\infty; \infty).$$

$$6.4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{x}{n}}{\sqrt{n^3 + x}}, \quad (0; \infty).$$

$$6.5. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2n+1}, \quad \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right].$$

$$6.6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \cos^2 x}, \quad (-\infty; \infty).$$

$$6.7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}, \quad [-1; 1].$$

$$6.8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^3}}, \quad [-1; 1].$$

$$6.9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad [-10; 10].$$

$$6.10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^{2n}}{n}, \quad [-1; 1].$$

$$6.11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}, \quad [-1; 1].$$

$$6.12. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{n^2}, \quad (-\infty; \infty).$$

$$6.13. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right), \quad \left[\frac{1}{3}; 3\right].$$

$$6.14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \sin^2\left(\frac{x}{n}\right), \quad (-\infty; \infty).$$

$$6.15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 nx}{\sqrt{n^3}}, \quad (-\infty; \infty).$$

$$6.16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \ln x}, \quad [1; \infty).$$

$$6.17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n 3^n}, \quad [-2; 2].$$

$$6.18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+3)^n}{n!}, \quad [-5; -1].$$

$$6.19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{n^2 2^n}, \quad [-7; -3].$$

$$6.20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \sqrt{n+x}}, \quad (0; \infty).$$

$$6.21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3 + \ln x}}, \quad [1; \infty).$$

$$6.22. \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n(1+x)}, \quad [0; \infty).$$

$$6.23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad [-3; 3].$$

$$6.24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + \sin^2 nx}}, \quad (-\infty; \infty).$$

$$6.25. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{3n-5}, \quad [0; 1].$$

$$6.26. \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}, \quad [1; \infty).$$

$$6.27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2n^2 + 3}, \quad (-\infty; \infty).$$

$$6.28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n 9^n}, \quad [-1; 3].$$

$$6.29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+2)}, \quad [-1; 1].$$

$$6.30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^4 x^2 + 1}, \quad (0; \infty).$$

Задача 7. Знайти область збіжності степеневих рядів.

$$7.1. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^n x^n; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \cdot (x+1)^n;$$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{n^2 4^n}.$$

$$7.2. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+1) \ln^2(n+1)};$$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^{2n+1}}{3n+8}.$$

$$7.3. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n+1)^2 x^n; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+2} (x-2)^n;$$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(n+1)4^n}.$$

$$7.4. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^n}{n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{(n+5) \ln(n+5)};$$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} 9^n (x-2)^{2n}.$$

$$7.5. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{5^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{7n+3}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{n^2 \ln(n+1)}.$$

$$7.6. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^n}{2n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2)(x-2)^n}{(n+1)^2 2^n};$$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 3}{7^n} (x+5)^{2n+1}.$$

$$7.7. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\sqrt{n^3+2}} ; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 5^n} ;$$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{4n+1} \right)^n (x+6)^{2n} .$$

$$7.8. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} x^n ; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n^2} ; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{4^n} x^{2n-1} .$$

$$7.9. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{7^n}{n^3} x^n ; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+2} \right)^n (x+3)^n ;$$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{9^n} .$$

$$7.10. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{5^n \sqrt{2n+3}} ; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{(n-1)!} (x+1)^n ;$$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{2n}}{4^n + 1} .$$

$$7.11. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^5 + 1} x^n ; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n+1} ; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^{2n+1}}{(3n+1)3^{2n}}$$

$$7.12. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2} \right)^n ; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{(2n+3)\sqrt{3n+2}} ;$$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n x^{2n-1}}{n^2 + 1} .$$

$$7.13. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)\ln(n+2)} ; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} n^n (x+3)^n ;$$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^{2n-1}}{(n^2+3)9^{n+1}} .$$

$$7.14. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)3^n} ; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{\sqrt[3]{n^3+2}} ; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} x^{2n} .$$

$$7.15. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{n^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (x+2)^n}{n^3 + 3n}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{n(9^n + 1)}.$$

$$7.16. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{(4n+3)(2n+1)}}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x+2)^n}{3^n};$$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)^n}{(4n+1)^n} x^{2n+1}.$$

$$7.17. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n^3 + 1}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (x-4)^n}{n!};$$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n-1}}{4^n + 5}.$$

$$7.18. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + 5}{n+1} x^n; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x+3)^n}{2^n + 1};$$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + 1}{n^2} (x-5)^{2n}.$$

$$7.19. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(n^2 + 3)2^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}(n^3 + 1)};$$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{3n+2}.$$

$$7.20. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+3)^n}{(2n+1)^2}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{\ln^n(n+1)};$$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n+1)^n}{n^n} (x+2)^{2n-1}.$$

$$7.21. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 x^n}{(2n)!}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n3^n}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+3}{n+2}} x^{2n}.$$

$$7.22. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n^2 + 1}{n^3 + 2}} x^n; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^n \sqrt{n^2 + 2}};$$

$$\text{B)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^3 + 1} (x-3)^{4n-2}.$$

$$7.23. \text{ a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt{n} 2^n}; \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 + 1}{n^2 + 2} \right)^n (x-4)^n;$$

$$\text{B)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n+1)^2 x^{3n}.$$

$$7.24. \text{ a)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} x^n; \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{n 2^n \ln(n+1)};$$

$$\text{B)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4^n} (x-1)^{2n-1}.$$

$$7.25. \text{ a)} \sum_{n=1}^{\infty} (n^4 + 1) x^n; \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n (n+1)(n+2)};$$

$$\text{B)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 + 2}{9n^2 + 1} \right)^n x^{2n-1}.$$

$$7.26. \text{ a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n} x^n; \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! (x+2)^n}{n^n};$$

$$\text{B)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{3n+2}.$$

$$7.27. \text{ a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt{(4n+3)5^n}}; \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{3^n \sqrt{n+3}};$$

$$\text{B)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)x^{2n}}{(n+2)^2}.$$

$$7.28. \text{ a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n^2} \left(\frac{x}{3} \right)^n; \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{n+1} (x+6)^n;$$

$$\text{B)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}} (x-1)^{2n+1}.$$

$$7.29. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n^3+1} x^n; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n^2(n+1)(n+2)};$$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}.$$

$$7.30. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\sqrt{n^2+1}}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+5}}{4^n} (x+3)^n;$$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} (4n+3)^n (x-2)^{2n}.$$

Задача 8. Знайти суму ряду.

$$8.1. 1 \cdot 2x + 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 4x^3 + \dots + n(n+1)x^n + \dots$$

$$8.2. 1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n+1)x^n + \dots$$

$$8.3. x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$$

$$8.4. 1 \cdot 2 + \frac{2 \cdot 3}{x} + \frac{3 \cdot 4}{x^2} + \dots + \frac{n(n+1)}{x^{n-1}} + \dots$$

$$8.5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

$$8.6. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}.$$

$$8.7. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

$$8.8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}.$$

$$8.9. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}.$$

$$8.10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+3}}{(2n+1)(2n+2)}.$$

$$8.11. x + \frac{x^5}{5} + \frac{x^9}{9} + \dots + \frac{x^{4n-3}}{4n-3} + \dots$$

$$8.12. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) x^n.$$

$$8.13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}.$$

$$8.14. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}.$$

$$8.15. \sum_{n=1}^{\infty} nx^n.$$

$$8.16. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{x^n}.$$

$$8.17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n!} x^{3n}.$$

$$8.18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)x^{n+1}}.$$

$$8.19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}.$$

$$8.20. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n(n-1)}.$$

$$8.21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n(2n+1)}.$$

$$8.22. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) x^n.$$

$$8.23. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}.$$

$$8.24. \sum_{n=1}^{\infty} \left[2^n + \frac{(-1)^n}{n}\right] x^n.$$

$$8.25. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n-2)(2n-1)}.$$

$$8.26. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}.$$

$$8.27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos^{n+1} x}{n(n+1)}.$$

$$8.28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \operatorname{tg}^n x}{n(n+1)}.$$

$$8.29. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{\dot{0}}}{(n+1)x^{n+1}}.$$

$$8.30. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n + (-1)^n}{n(n-1)} x^n.$$

Задача 9. Розкласти функцію $f(x)$ в ряд Маклорена.

$$9.1. f(x) = x^3 \sin 5x.$$

$$9.2. f(x) = x^2 \operatorname{arctg} x.$$

$$9.3. f(x) = \cos x^2.$$

$$9.4. f(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

$$9.5. f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x}.$$

$$9.6. f(x) = \frac{3}{1+2x^2}.$$

$$9.7. f(x) = xe^{4x}.$$

$$9.8. f(x) = \frac{x}{1+x}.$$

$$9.9. f(x) = sh(3x^2).$$

$$9.10. f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x}}.$$

$$9.11. \quad f(x) = ch\left(\frac{x^2}{2}\right).$$

$$9.12. \quad f(x) = e^{-x^3}.$$

$$9.13. \quad f(x) = 2^{-x}.$$

$$9.14. \quad f(x) = 3^x.$$

$$9.15. \quad f(x) = x \cos \sqrt{x}.$$

$$9.16. \quad f(x) = \frac{\sin 3x}{x}.$$

$$9.17. \quad f(x) = \frac{x^2}{x+2}.$$

$$9.18. \quad f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}.$$

$$9.19. \quad f(x) = x^3 e^{2x}.$$

$$9.20. \quad f(x) = \frac{5}{6-x-x^2}.$$

$$9.21. \quad f(x) = \frac{1}{20-x-x^2}.$$

$$9.22. \quad f(x) = \ln(1-x-12x^2).$$

$$9.23. \quad f(x) = \frac{6}{8+2x-x^2}.$$

$$9.24. \quad f(x) = \ln(1+3x+2x^2).$$

$$9.25. \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{27-2x}}.$$

$$9.26. \quad f(x) = x \cos^2 2x.$$

$$9.27. \quad f(x) = x^2 \sqrt{4-3x}.$$

$$9.28. \quad f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 5}.$$

$$9.29. \quad f(x) = x^2 \sin^2 \frac{x}{2}.$$

$$9.30. \quad f(x) = x^3 \ln(3x+1).$$

Задача 10. В пункті а) використовуючи розклад в ряд Маклорена підінтегральної функції, обчислити визначений інтеграл з точністю до 0,0001; в пункті б) знайти три перших, відмінних від нуля, члени розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння.

$$10.1. \quad \text{а) } \int_0^{0.5} e^{-6x^2} dx ;$$

$$\text{б) } y' = xy + e^y, \quad y(0) = 0.$$

$$10.2. \quad \text{а) } \int_0^{0.2} e^{-3x^2} dx ;$$

$$\text{б) } y' = x^2 y^2 + 1, \quad y(0) = 1.$$

$$10.3. \quad \text{а) } \int_0^{0.1} \sin(100x^2) dx ;$$

$$\text{б) } y' = x^2 - y^2, \quad y(0) = \frac{1}{2}.$$

- 10.4. a) $\int_0^{0.4} \sin\left(\frac{5x}{2}\right)^2 dx$; б) $y' = x^3 + y^2$, $y(0) = \frac{1}{2}$.
- 10.5. a) $\int_0^{0.2} \frac{1 - e^{-x}}{x} dx$; б) $y' = x + y^2$, $y(0) = -1$.
- 10.6. a) $\int_0^1 \sin x^2 dx$; б) $y' = x + x^2 + y^2$, $y(0) = 1$.
- 10.7. a) $\int_0^{0.5} e^{\frac{3x^2}{25}} dx$; б) $y' = 2 \cos x - xy^2$, $y(0) = 1$.
- 10.8. a) $\int_0^{0.6} \frac{1 - \cos x}{x} dx$; б) $y' = e^x - y^2$, $y(0) = 0$.
- 10.9. a) $\int_0^{0.5} \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{3}\right)}{x} dx$; б) $y' = x + y + y^2$, $y(0) = 1$.
- 10.10. a) $\int_0^{0.4} \cos(4x^2) dx$; б) $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$.
- 10.11. a) $\int_0^1 \frac{x - \sin x}{x^2} dx$, б) $y' = x^2 y^2 + \sin x$, $y(0) = \frac{1}{2}$.
- 10.12. a) $\int_0^{0.3} e^{-2x^2} dx$; б) $y' = 2y^2 + ye^x$, $y(0) = \frac{1}{3}$.
- 10.13. a) $\int_0^{0.5} \sin(5x^2) dx$; б) $y' = e^{3x} + 2xy^2$, $y(0) = 1$.
- 10.14. a) $\int_0^{0.25} \sin x^2 dx$; б) $y' = x + e^y$, $y(0) = 0$.
- 10.15. a) $\int_0^1 e^{-x^2} dx$; б) $y' = y \cos x + 2 \cos y$, $y(0) = 0$.
- 10.16. a) $\int_0^{0.4} \cos\left(\frac{5x}{2}\right)^2 dx$; б) $y' = x^2 + 2y^2$, $y(0) = 0,2$.

$$10.17. \quad \text{a) } \int_0^{0,6} \frac{1 - \cos x}{x} dx ; \quad \text{б) } y' = x^2 + xy + y^2, \quad y(0) = 0,5 .$$

$$10.18. \quad \text{a) } \int_0^{0,4} \frac{1 - e^{-\frac{x}{2}}}{x} dx ; \quad \text{б) } y' = e^{\sin x} + x, \quad y(0) = 0 .$$

$$10.19. \quad \text{a) } \int_0^{0,1} \frac{\ln(1 + 2x)}{x} dx ; \quad \text{б) } y' = xy - y^2, \quad y(0) = 0,2 .$$

$$10.20. \quad \text{a) } \int_0^{0,5} \frac{dx}{1 + x^4} dx ; \quad \text{б) } y' = 2x + y^2 + e^x, \quad y(0) = 1 .$$

$$10.21. \quad \text{a) } \int_0^{0,5} \frac{\sin x}{x} dx ; \quad \text{б) } y' = x \sin x - y^2, \quad y(0) = 1 .$$

$$10.22. \quad \text{a) } \int_0^{0,1} \frac{\ln(1 + 3x)}{x} dx ; \quad \text{б) } y' = 2x^2 - xy, \quad y(0) = 0 .$$

$$10.23. \quad \text{a) } \int_0^{0,2} \cos(25x^2) dx ; \quad \text{б) } y' = x - 2y^2, \quad y(0) = 0,5 .$$

$$10.24. \quad \text{a) } \int_0^{0,5} \cos(2x^2) dx ; \quad \text{б) } y' = xe^x + 2y^2, \quad y(0) = 0 .$$

$$10.25. \quad \text{a) } \int_0^{0,4} e^{-\frac{3x^2}{4}} dx ; \quad \text{б) } y' = xy + x^2 + y^2, \quad y(0) = 1 .$$

$$10.26. \quad \text{a) } \int_0^1 \sin(3x^2) dx ; \quad \text{б) } y' = xy + e^x, \quad y(0) = 0 .$$

$$10.27. \quad \text{a) } \int_0^{0,5} \frac{1 - e^{-2x}}{x} dx ; \quad \text{б) } y' = ye^x, \quad y(0) = 1 .$$

$$10.28. \quad \text{a) } \int_0^{0,1} \cos(100x^2) dx ; \quad \text{б) } y' = 2 \sin x + xy, \quad y(0) = 0 .$$

$$10.29. \quad \text{a) } \int_0^{0,5} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx ; \quad \text{б) } y' = x^2 + e^y, \quad y(0) = 0 .$$

$$10.30. \text{ а) } \int_0^{0,8} e^{-\frac{x^2}{2}} dx ;$$

$$\text{б) } y' = x^2 + y, \quad y(0) = 1 .$$

Задача 11. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)$. Побудувати графіки функції та суми одержаного ряду.

$$11.1. \quad f(x) = x, \quad -\pi \leq x \leq \pi .$$

$$11.2. \quad f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4}, & -\pi \leq x < 0, \\ \frac{\pi}{4}, & 0 \leq x \leq \pi . \end{cases}$$

$$11.3. \quad f(x) = |x|, \quad -\pi \leq x \leq \pi .$$

$$11.4. \quad f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ 2x, & 0 \leq x \leq \pi . \end{cases}$$

$$11.5. \quad f(x) = \begin{cases} -a, & -\pi \leq x < 0, \\ a, & 0 \leq x \leq \pi . \end{cases}$$

$$11.6. \quad f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 4, & 0 < x \leq \pi . \end{cases}$$

$$11.7. \quad f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ x, & 0 \leq x < \pi . \end{cases}$$

$$11.8. \quad f(x) = \pi + x, \quad -\pi \leq x \leq \pi .$$

$$11.9. \quad f(x) = \begin{cases} -2x, & -\pi \leq x < 0, \\ 0, & 0 \leq x < \pi . \end{cases}$$

$$11.10. \quad f(x) = \begin{cases} -2x, & -\pi \leq x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq \pi . \end{cases}$$

$$11.11. \quad f(x) = |x| - 5, \quad -2 \leq x \leq 2 .$$

$$11.12. \quad f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$11.13. \quad f(x) = \begin{cases} x, & -3 \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq 3. \end{cases}$$

$$11.14. \quad f(x) = \begin{cases} 3, & -1 \leq x < 0, \\ -1, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$11.15. \quad f(x) = 2x - 3, \quad -3 \leq x \leq 3.$$

$$11.16. \quad f(x) = \begin{cases} 3, & -3 \leq x < 0, \\ -x, & 0 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

$$11.17. \quad f(x) = |x| - 3, \quad -3 \leq x \leq 3.$$

$$11.18. \quad f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \leq x < 0, \\ 2 - x, & 0 \leq x < 2. \end{cases}$$

$$11.19. \quad f(x) = \begin{cases} -x, & -2 \leq x < 0, \\ 2, & 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

$$11.20. \quad f(x) = \begin{cases} -2, & -4 \leq x < 0, \\ 1 + x, & 0 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

$$11.21. \quad f(x) = \begin{cases} x + 2, & -2 \leq x \leq 1, \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

$$11.22. \quad f(x) = \begin{cases} -2x, & -2 \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

$$11.23. \quad f(x) = |x| + 1, \quad -2 \leq x \leq 2.$$

$$11.24. \quad f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x < 0, \\ 2, & 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

$$11.25. \quad f(x) = \begin{cases} -2, & -\pi \leq x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$11.26. \quad f(x) = \begin{cases} x + 1, & -2 \leq x < 0, \\ 0, & 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

$$11.27. \quad f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leq x < 0, \\ 3x, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$\mathbf{11.28.} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ 4x - 3, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$\mathbf{11.29.} \quad f(x) = 10 - x, \quad -\pi \leq x \leq \pi \quad .$$

$$\mathbf{11.30.} \quad f(x) = \pi^2 - x^2, \quad -\pi \leq x \leq \pi \quad .$$

10 Кратні, криволінійні, поверхневі інтеграли. Елементи теорії поля

Теоретичні питання

1. Подвійні інтеграли (означення, умови існування, властивості, геометричне та механічне тлумачення).
2. Обчислення подвійного інтеграла двома послідовними інтегруваннями у декартових прямокутних координатах.
3. Заміна змінних у подвійному інтегралі. Визначник Остроградського (якобіан) та його геометричне тлумачення.
4. Подвійний інтеграл у полярних координатах.
5. Геометричні застосування подвійного інтеграла.
6. Застосування подвійних інтегралів до задач механіки.
7. Потрійні інтеграли (означення, умови існування, властивості, геометричне та механічне тлумачення).
8. Обчислення потрійних інтегралів зведенням до повторних інтегралів у декартових прямокутних координатах.
9. Заміна змінних у потрійному інтегралі. Циліндричні і сферичні координати, визначник Остроградського у цих координатах.
10. Застосування потрійних інтегралів.
11. Криволінійні інтеграли першого роду (означення, умови існування, властивості, тлумачення).
12. Обчислення криволінійного інтеграла першого роду.
13. Застосування криволінійних інтегралів першого роду.
14. Поверхневі інтеграли першого роду (означення, умови існування, властивості, тлумачення).
15. Поверхні. Різні види задання рівнянь поверхні. Поняття про двосторонні та односторонні поверхні.
16. Обчислення поверхневих інтегралів першого роду.
17. Застосування поверхневих інтегралів першого роду.
18. Криволінійні інтеграли другого роду (означення, властивості, тлумачення).
19. Умови існування криволінійного інтеграла другого роду, обчислення криволінійного інтеграла другого роду.

20. Формула Гріна-Остроградського.
21. Умови незалежності криволінійного інтеграла другого роду від шляху інтегрування, знаходження функції за її повним диференціалом.
22. Поверхневі інтеграли другого роду (означення, властивості, тлумачення).
23. Умови існування поверхневого інтеграла другого роду, обчислення поверхневого інтеграла другого роду.
24. Формула Остроградського.
25. Формула Стокса.
26. Скалярне поле. Похідна за напрямом. Градієнт (інваріантне означення, формула в декартових координатах, властивості).
27. Векторне поле. Потік векторного поля через поверхню, його фізичний зміст.
28. Дивергенція векторного поля (інваріантне означення, формула в декартових координатах, властивості).
29. Циркуляція векторного поля, її гідродинамічний зміст.
30. Ротор векторного поля (інваріантне означення, формула в декартових координатах, властивості).
31. Соленоїдальне векторне поле, його основні властивості, умови соленоїдальності.
32. Потенціальне векторне поле. Умови потенціальності. Знаходження потенціала.

Розрахункові завдання

Задача 1. Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі.

$$1.1. \text{ а) } \int_0^{\sqrt{2}} dx \int_{4-2x^2}^{4-x^2} f(x, y) dy ;$$

$$\text{б) } \int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2+y}}^0 f(x, y) dx + \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{-y}}^0 f(x, y) dx .$$

$$1.2. \quad \text{a) } \int_0^3 dx \int_{\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y) dy ;$$

$$\text{б) } \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f(x, y) dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f(x, y) dx .$$

$$1.3. \quad \text{a) } \int_0^4 dy \int_{\frac{3}{2}\sqrt{y}}^{\sqrt{25-y^2}} f(x, y) dx ;$$

$$\text{б) } \int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y) dx .$$

$$1.4. \quad \text{a) } \int_0^1 dy \int_{2y+1}^{4-y^2} f(x, y) dx ;$$

$$\text{б) } \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2-y}} f(x, y) dx .$$

$$1.5. \quad \text{a) } \int_0^4 dy \int_{\frac{y}{4}+1}^{7-y} f(x, y) dx ;$$

$$\text{б) } \int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^0 f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_x^0 f(x, y) dy .$$

$$1.6. \quad \text{a) } \int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y) dy ;$$

$$\text{б) } \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dy \int_0^{\arcsin y} f(x, y) dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 dy \int_0^{\arccos y} f(x, y) dx .$$

$$1.7. \quad \text{a) } \int_0^2 dx \int_{\frac{x^2}{4}}^{2\sqrt{x}} f(x, y) dy ;$$

$$\text{б)} \int_{-2}^{-1} dy \int_0^{\sqrt{2+y}} f(x, y) dx + \int_{-1}^0 dy \int_0^{\sqrt{-y}} f(x, y) dx .$$

$$\text{1.8. а)} \int_{-2}^4 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{y+4} f(x, y) dx ;$$

$$\text{б)} \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f(x, y) dx + \int_1^e dy \int_{-1}^{-\ln y} f(x, y) dx .$$

$$\text{1.9. а)} \int_{-2}^1 dy \int_{y^2}^4 f(x, y) dx ;$$

$$\text{б)} \int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy .$$

$$\text{1.10. а)} \int_0^2 dy \int_{y^2}^{y^2+2} f(x, y) dx ;$$

$$\text{б)} \int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^0 f(x, y) dy + \int_{-\sqrt{3}}^0 dx \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^0 f(x, y) dy .$$

$$\text{1.11. а)} \int_0^2 dx \int_{2x}^{\frac{x^2}{2}+2} f(x, y) dy ;$$

$$\text{б)} \int_0^1 dx \int_{1-x^2}^1 f(x, y) dy + \int_1^e dx \int_{\ln x}^1 f(x, y) dy .$$

$$\text{1.12. а)} \int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x} f(x, y) dy ;$$

$$\text{б)} \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x, y) dx .$$

$$\text{1.13. а)} \int_0^{\frac{\pi}{4}} dy \int_y^{\frac{\pi}{2}-y} f(x, y) dx ;$$

$$\text{б)} \int_0^{\frac{\pi}{4}} dy \int_0^{\sin y} f(x, y) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^{\cos y} f(x, y) dx .$$

$$\text{1.14. а)} \int_0^2 dx \int_{2x^2}^{12x} f(x, y) dy ;$$

$$\text{б)} \int_{-2}^{-1} dx \int_{-(2+x)}^0 f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_{\sqrt[3]{x}}^0 f(x, y) dy .$$

$$\text{1.15. а)} \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx ;$$

$$\text{б)} \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_1^e dy \int_{\ln y}^1 f(x, y) dx .$$

$$\text{1.16. а)} \int_0^1 dx \int_{-1}^{x^2+1} f(x, y) dy ;$$

$$\text{б)} \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{2-y}}^0 f(x, y) dx .$$

$$\text{1.17. а)} \int_{-1}^2 dx \int_{x^2}^{2+x} f(x, y) dy ;$$

$$\text{б)} \int_0^1 dy \int_{-y}^0 f(x, y) dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f(x, y) dx .$$

$$\text{1.18. а)} \int_0^1 dx \int_{-x^2}^{x^2} f(x, y) dy ;$$

$$\text{б)} \int_0^1 dy \int_0^{y^2} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x, y) dx .$$

$$\text{1.19. а)} \int_0^1 dy \int_{2y^2}^{3-y} f(x, y) dx ;$$

$$\text{б)} \int_0^{\sqrt{3}} dx \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^0 f(x, y) dy + \int_{\sqrt{3}}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^0 f(x, y) dy .$$

$$\text{1.20. а)} \int_{-1}^0 dy \int_{-1-y}^{1+y} f(x, y) dx ;$$

$$\text{б)} \int_{-2}^{-1} dy \int_{-(2+y)}^0 f(x, y) dx + \int_{-1}^0 dy \int_{\sqrt[3]{y}}^0 f(x, y) dx .$$

$$\text{1.21. а)} \int_0^1 dx \int_{2x}^{5x} f(x, y) dy ;$$

$$\text{б)} \int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx + \int_1^e dy \int_{\ln y}^1 f(x, y) dx .$$

$$\text{1.22. а)} \int_0^1 dx \int_{2x^2}^{3-x} f(x, y) dy ;$$

$$\text{б)} \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy .$$

$$\text{1.23. а)} \int_0^1 dy \int_{1-y}^{2-2y} f(x, y) dx ;$$

$$\text{б)} \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\cos x} f(x, y) dy .$$

$$\text{1.24. а)} \int_0^4 dy \int_{\frac{y}{2}+1}^{\frac{3y}{2}+4} f(x, y) dx ;$$

$$\text{б)} \int_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f(x, y) dx + \int_{-1}^0 dy \int_y^0 f(x, y) dx .$$

$$\text{1.25. а)} \int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{1+x}}^{1+x} f(x, y) dy ;$$

$$\text{б)} \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy .$$

$$\text{1.26. а)} \int_0^{\frac{4}{5}} dy \int_{1+y}^{\frac{3}{2}-\frac{3y}{2}} f(x, y) dx ;$$

$$\text{б)} \int_0^{\sqrt{3}} dx \int_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy + \int_{\sqrt{3}}^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy .$$

$$\text{1.27. а)} \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^y f(x, y) dx ;$$

$$\text{б)} \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^0 f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_{-\sqrt{2-x}}^0 f(x, y) dy .$$

$$\text{1.28. а)} \int_0^1 dx \int_{-x}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} f(x, y) dy ;$$

$$\text{б)} \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy .$$

$$\text{1.29. а)} \int_{-1}^0 dy \int_{-2-y}^{2y+1} f(x, y) dx ;$$

$$\text{б)} \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y) dx .$$

$$\text{1.30. а)} \int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{4-x}} f(x, y) dy ;$$

$$\text{б)} \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{2-x}} f(x, y) dy .$$

Задача 2. Обчислити подвійний інтеграл по області D , обмеженій вказаними лініями.

- 2.1. $\iint_D y e^{\frac{xy}{2}} dx dy$, $D: y = \ln 2, y = \ln 3, x = 2, x = 4$.
- 2.2. $\iint_D y^2 \sin \frac{xy}{2} dx dy$, $D: x = 0, y = \sqrt{\pi}, y = \frac{x}{2}$.
- 2.3. $\iint_D y \cos xy dx dy$, $D: y = \frac{\pi}{2}, y = \pi, x = 1, x = 2$.
- 2.4. $\iint_D y^2 e^{\frac{xy}{4}} dx dy$, $D: x = 0, y = 2, y = x$.
- 2.5. $\iint_D y \sin xy dx dy$, $D: y = \frac{\pi}{2}, y = \pi, x = 1, x = 2$.
- 2.6. $\iint_D y^2 \cos \frac{xy}{2} dx dy$, $D: x = 0, y = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, y = \frac{x}{2}$.
- 2.7. $\iint_D 4y e^{2xy} dx dy$, $D: y = \ln 3, y = \ln 4, x = \frac{1}{2}, x = 1$.
- 2.8. $\iint_D 4y^2 \sin xy dx dy$, $D: x = 0, y = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, y = x$.
- 2.9. $\iint_D y \cos 2xy dx dy$, $D: y = \frac{\pi}{2}, y = \pi, x = \frac{1}{2}, x = 1$.
- 2.10. $\iint_D y^2 e^{\frac{xy}{8}} dx dy$, $D: x = 0, y = 2, y = \frac{x}{2}$.
- 2.11. $\iint_D 12y \sin 2xy dx dy$, $D: y = \frac{\pi}{4}, y = \frac{\pi}{2}, x = 2, x = 3$.
- 2.12. $\iint_D y^2 \cos xy dx dy$, $D: x = 0, y = \sqrt{\pi}, y = x$.
- 2.13. $\iint_D y e^{\frac{xy}{4}} dx dy$, $D: y = \ln 2, y = \ln 3, x = 4, x = 8$.
- 2.14. $\iint_D 4y^2 \sin 2xy dx dy$, $D: x = 0, y = \sqrt{2\pi}, y = 2x$.

- 2.15. $\iint_D 2y \cos 2xy \, dx dy$, $D: y = \frac{\pi}{4}, y = \frac{\pi}{2}, x = 1, x = 2$.
- 2.16. $\iint_D y^2 e^{\frac{xy}{2}} \, dx dy$, $D: x = 0, y = \sqrt{2}, y = x$.
- 2.17. $\iint_D y \sin xy \, dx dy$, $D: y = \pi, y = 2\pi, x = \frac{1}{2}, x = 1$.
- 2.18. $\iint_D y^2 \cos 2xy \, dx dy$, $D: x = 0, y = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, y = \frac{x}{2}$.
- 2.19. $\iint_D 8y e^{4xy} \, dx dy$, $D: y = \ln 3, y = \ln 4, x = \frac{1}{4}, x = \frac{1}{2}$.
- 2.20. $\iint_D 3y^2 \sin \frac{xy}{2} \, dx dy$, $D: x = 0, y = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}, y = \frac{2}{3}x$.
- 2.21. $\iint_D y \cos xy \, dx dy$, $D: y = \pi, y = 3\pi, x = \frac{1}{2}, x = 1$.
- 2.22. $\iint_D y^2 e^{\frac{xy}{2}} \, dx dy$, $D: x = 0, y = 1, y = \frac{x}{2}$.
- 2.23. $\iint_D y \sin 2xy \, dx dy$, $D: y = \frac{\pi}{2}, y = \frac{3\pi}{2}, x = \frac{1}{2}, x = 2$.
- 2.24. $\iint_D y^2 \cos xy \, dx dy$, $D: x = 0, y = \sqrt{\pi}, y = 2x$.
- 2.25. $\iint_D 6y e^{\frac{xy}{3}} \, dx dy$, $D: y = \ln 2, y = \ln 3, x = 3, x = 6$.
- 2.26. $\iint_D y^2 \sin \frac{xy}{2} \, dx dy$, $D: x = 0, y = \sqrt{\pi}, y = x$.
- 2.27. $\iint_D y \cos 2xy \, dx dy$, $D: y = \frac{\pi}{2}, y = \frac{3\pi}{2}, x = \frac{1}{2}, x = 2$.
- 2.28. $\iint_D y^2 e^{\frac{xy}{8}} \, dx dy$, $D: x = 0, y = 4, y = 2x$.

$$2.29. \iint_D 3y \sin xy \, dx dy, \quad D: \quad y = \frac{\pi}{2}, \quad y = 3\pi, \quad x = 1, \quad x = 3.$$

$$2.30. \iint_D y^2 \cos \frac{xy}{2} \, dx dy, \quad D: \quad x = 0, \quad y = \sqrt{2\pi}, \quad y = 2x.$$

Задача 3. За допомогою подвійного інтеграла знайти площу фігури, обмеженої заданими лініями.

$$3.1. \quad y = \frac{3}{x}, \quad y = 4e^x, \quad y = 3, \quad y = 4.$$

$$3.2. \quad x = \sqrt{36 - y^2}, \quad x = 6 - \sqrt{36 - y^2}.$$

$$3.3. \quad x^2 + y^2 = 72, \quad 6y = -x^2 \quad (y \leq 0).$$

$$3.4. \quad x = 8 - y^2, \quad x = -2y.$$

$$3.5. \quad y = \frac{3}{x}, \quad y = 8e^x, \quad y = 3, \quad y = 8.$$

$$3.6. \quad y = \frac{\sqrt{x}}{2}, \quad y = \frac{1}{2x}, \quad x = 16.$$

$$3.7. \quad x = 5 - y^2, \quad x = -4y.$$

$$3.8. \quad x^2 + y^2 = 12, \quad -\sqrt{6}y = x^2 \quad (y \leq 0).$$

$$3.9. \quad y = \sqrt{12 - x^2}, \quad y = 2\sqrt{3} - \sqrt{12 - x^2}, \quad x = 0 \quad (x \geq 0).$$

$$3.10. \quad y = \frac{3}{2}\sqrt{x}, \quad y = \frac{3}{2x}, \quad x = 9.$$

$$3.11. \quad y = \sqrt{24 - x^2}, \quad 2\sqrt{3}y = x^2, \quad x = 0 \quad (x \geq 0).$$

$$3.12. \quad y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad x = 0 \quad (x \geq 0).$$

$$3.13. \quad y = 20 - x^2, \quad y = -8x.$$

$$3.14. \quad y = \sqrt{18 - x^2}, \quad y = 3\sqrt{2} - \sqrt{18 - x^2}.$$

$$3.15. \quad y = 32 - x^2, \quad y = -4x.$$

$$3.16. \quad y = \frac{2}{x}, \quad y = 5e^x, \quad y = 2, \quad y = 5.$$

$$3.17. \quad x^2 + y^2 = 36, \quad 3\sqrt{2}y = x^2 \quad (y \geq 0) .$$

$$3.18. \quad y = 3\sqrt{x}, \quad y = \frac{3}{x}, \quad x = 4 .$$

$$3.19. \quad y = 6 - \sqrt{36 - x^2}, \quad y = \sqrt{36 - x^2}, \quad x = 0 \quad (x \geq 0) .$$

$$3.20. \quad y = \frac{25}{4} - x^2, \quad y = x - \frac{5}{2} .$$

$$3.21. \quad y = \sqrt{x}, \quad y = \frac{1}{x}, \quad x = 16 .$$

$$3.22. \quad y = \frac{2}{x}, \quad y = 7e^x, \quad y = 2, \quad y = 7 .$$

$$3.23. \quad x = 27 - y^2, \quad x = -6y .$$

$$3.24. \quad x = \sqrt{72 - y^2}, \quad 6x = y^2, \quad y = 0 \quad (y \geq 0) .$$

$$3.25. \quad y = \sqrt{6 - x^2}, \quad y = \sqrt{6} - \sqrt{6 - x^2} .$$

$$3.26. \quad y = \frac{3}{2}\sqrt{x}, \quad y = \frac{3}{2x}, \quad x = 4 .$$

$$3.27. \quad y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad x = 0 \quad (x \leq 0) .$$

$$3.28. \quad y = \frac{1}{x}, \quad y = 6e^x, \quad y = 1, \quad y = 6 .$$

$$3.29. \quad y = 3\sqrt{x}, \quad y = \frac{3}{x}, \quad x = 9 .$$

$$3.30. \quad y = 11 - x^2, \quad y = -10x .$$

Задача 4. За допомогою подвійного інтеграла знайти площу фігури, обмеженої лініями, заданими рівняннями в полярних координатах.

$$4.1. \quad r = 4 \cos 3\varphi, \quad r = 2 \quad (r \geq 2) .$$

$$4.2. \quad r = \cos 2\varphi .$$

$$4.3. \quad r = \sqrt{3} \cos 3\varphi, \quad r = \sin \varphi \quad \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

$$4.4. \quad r = 4 \sin 3\varphi, \quad r = 2 \quad (r \geq 2).$$

$$4.5. \quad r = 2 \cos \varphi, \quad r = 2\sqrt{3} \sin \varphi \quad \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

$$4.6. \quad r = \sin 3\varphi.$$

$$4.7. \quad r = 6 \sin 3\varphi, \quad r = 3 \quad (r \geq 3).$$

$$4.8. \quad r = \cos 3\varphi.$$

$$4.9. \quad r = \cos \varphi, \quad r = \sqrt{2} \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{4} \right) \quad \left(-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

$$4.10. \quad r = \sin \varphi, \quad r = \sqrt{2} \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{4} \right) \quad \left(0 \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4} \right).$$

$$4.11. \quad r = 6 \cos 3\varphi, \quad r = 3 \quad (r \geq 3).$$

$$4.12. \quad r = \frac{1}{2} + \sin \varphi.$$

$$4.13. \quad r = \cos \varphi, \quad r = \sin \varphi \quad \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

$$4.14. \quad r = \sqrt{2} \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{4} \right), \quad r = \sqrt{2} \sin \left(\varphi - \frac{\pi}{4} \right) \quad \left(\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4} \right).$$

$$4.15. \quad r = \cos \varphi, \quad r = 2 \cos \varphi.$$

$$4.16. \quad r = \sin \varphi, \quad r = 2 \sin \varphi.$$

$$4.17. \quad r = 1 + \sqrt{2} \cos \varphi.$$

$$4.18. \quad r = \frac{1}{2} + \cos \varphi.$$

$$4.19. \quad r = 1 + \sqrt{2} \cos \varphi.$$

$$4.20. \quad r = \frac{5}{2} \sin \varphi, \quad r = \frac{3}{2} \sin \varphi.$$

$$4.21. \quad r = \frac{3}{2} \cos \varphi, \quad r = \frac{5}{2} \cos \varphi .$$

$$4.22. \quad r = 4 \cos 4\varphi .$$

$$4.23. \quad r = \sin 6\varphi .$$

$$4.24. \quad r = 2 \cos \varphi, \quad r = 3 \cos \varphi .$$

$$4.25. \quad r = \cos \varphi + \sin \varphi .$$

$$4.26. \quad r = 2 \sin 4\varphi .$$

$$4.27. \quad r = 2 \cos 6\varphi .$$

$$4.28. \quad r = \cos \varphi - \sin \varphi .$$

$$4.29. \quad r = 2 \cos 5\varphi .$$

$$4.30. \quad r = 3 \sin 5\varphi .$$

Задача 5. Перейшовши до полярних координат, знайти площу фігури, обмеженої заданою лінією.

$$5.1. \quad (x^2 + y^2)^2 = 4(4x^2 + y^2) .$$

$$5.2. \quad (x^2 + y^2)^3 = 16x^2y^2 .$$

$$5.3. \quad (x^2 + y^2)^3 = x^2(4x^2 + 3y^2) .$$

$$5.4. \quad (x^2 + y^2)^2 = 3x^2 + 2y^2 .$$

$$5.5. \quad x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)^3 .$$

$$5.6. \quad (x^2 + y^2)^2 = 2x^2 + 3y^2 .$$

$$5.7. \quad (x^2 + y^2)^2 = 5x^2 + 3y^2 .$$

$$5.8. \quad (x^2 + y^2)^2 = 7x^2 + 5y^2 .$$

$$5.9. \quad (x^2 + y^2)^2 = 2xy .$$

$$5.10. \quad (x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2 .$$

$$5.11. \quad (x^2 + y^2)^3 = y^2 .$$

$$5.12. \quad (x^2 + y^2)^3 = x^2 .$$

$$5.13. \quad (x^2 + y^2)^3 = 4x^4 .$$

$$5.14. \quad (x^2 + y^2)^2 = 4(3x^2 + 4y^2) .$$

$$5.15. \quad (x^2 + y^2)^3 = 3x^2 y^2 .$$

$$5.16. \quad (x^2 + y^2)^3 = x^4 + y^4 .$$

$$5.17. \quad (x^2 + y^2)^3 = 2y^4 .$$

$$5.18. \quad (x^2 + y^2)^3 = 4xy(x^2 - y^2) .$$

$$5.19. \quad (x^2 + y^2)^2 = 9(4x^2 + y^2) .$$

$$5.20. \quad (x^2 + y^2)^3 = y^2(4x^2 + 3y^2) .$$

$$5.21. \quad (x^2 + y^2)^2 = 3x^2 + 2y^2 .$$

$$5.22. \quad x^4 = 3x^2 - y^2 .$$

$$5.23. \quad x^6 = x^4 - y^4 .$$

$$5.24. \quad x^4 = x^2 - 3y^2 .$$

$$5.25. \quad y^6 = y^4 - x^4 .$$

$$5.26. \quad (x^2 + y^2)^2 = 9(2x^2 + 3y^2) .$$

$$5.27. \quad y^6 = (3y^2 - x^2)(x^2 + y^2) .$$

$$5.28. \quad x^6 = (3x^2 - y^2)(x^2 + y^2) .$$

$$5.29. \quad x^4 = 4(3x^2 - y^2) .$$

$$5.30. \quad y^4 = 3y^2 - x^2 .$$

Задача 6. Знайти об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями.

$$6.1. \quad y = 16\sqrt{2x}, \quad y = \sqrt{2x}, \quad z = 0, \quad x + z = 2 .$$

$$6.2. \quad y = 5\sqrt{x}, \quad y = \frac{5x}{3}, \quad z = 0, \quad z = 5 + \frac{5\sqrt{x}}{3} .$$

$$6.3. \quad x^2 + y^2 = 2, \quad y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad z = 15x .$$

$$6.4. \quad x + y = 2, \quad y = \sqrt{x}, \quad z = 12y, \quad z = 0 .$$

$$6.5. \quad x = 20\sqrt{2y}, \quad x = 5\sqrt{2y}, \quad z = 0, \quad z + y = \frac{1}{2} .$$

$$6.6. \quad x = \frac{5}{2}\sqrt{y}, \quad x = \frac{5}{6}y, \quad z = 0, \quad z = \frac{5}{6}(3 + \sqrt{y}) .$$

$$6.7. \quad x^2 + y^2 = 2, \quad x = \sqrt{y}, \quad x = 0, \quad z = 0, \quad z = 30y .$$

$$6.8. \quad x + y = 2, \quad x = \sqrt{y}, \quad z = \frac{12}{5}x, \quad z = 0 .$$

$$6.9. \quad y = 17\sqrt{2x}, \quad y = 2\sqrt{2x}, \quad z = 0, \quad x + z = \frac{1}{2} .$$

$$6.10. \quad y = \frac{5}{3}\sqrt{x}, \quad y = \frac{5x}{9}, \quad z = 0, \quad z = \frac{5}{9}(3 + \sqrt{x}) .$$

$$6.11. \quad x^2 + y^2 = 8, \quad y = \sqrt{2x}, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad z = \frac{15x}{11} .$$

$$6.12. \quad x + y = 4, \quad y = \sqrt{2x}, \quad z = 3y, \quad z = 0 .$$

$$6.13. \quad x = \frac{5}{6}\sqrt{y}, \quad x = \frac{5}{18}y, \quad z = 0, \quad z = \frac{5}{18}(3 + \sqrt{y}) .$$

$$6.14. \quad x = 19\sqrt{2y}, \quad x = 4\sqrt{2y}, \quad z = 0, \quad y + z = 2 .$$

$$6.15. \quad x^2 + y^2 = 8, \quad x = \sqrt{2y}, \quad x = 0, \quad z = \frac{30}{11}y, \quad z = 0 .$$

$$6.16. \quad x + y = 4, \quad x = \sqrt{2y}, \quad z = \frac{3}{5}x, \quad z = 0 .$$

$$6.17. \quad y = 6\sqrt{3x}, \quad y = \sqrt{3x}, \quad z = 0, \quad x + z = 3 .$$

$$6.18. \quad y = \frac{5}{6}\sqrt{x}, \quad y = \frac{5x}{18}, \quad z = 0, \quad z = \frac{5}{18}(3 + \sqrt{x}) .$$

$$6.19. \quad x^2 + y^2 = 18, \quad y = \sqrt{3x}, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad z = \frac{5}{11}x .$$

$$6.20. \quad x + y = 6, \quad y = \sqrt{3x}, \quad z = 4y, \quad z = 0 .$$

$$6.21. \quad x = 7\sqrt{3y}, \quad x = 2\sqrt{3y}, \quad z = 0, \quad y + z = 3.$$

$$6.22. \quad x = \frac{5}{3}\sqrt{y}, \quad x = \frac{5}{9}y, \quad z = 0, \quad z = \frac{5}{9}(3 + \sqrt{y}).$$

$$6.23. \quad x^2 + y^2 = 18, \quad x = \sqrt{3y}, \quad x = 0, \quad z = 0, \quad z = \frac{10}{11}y.$$

$$6.24. \quad x + y = 6, \quad x = \sqrt{3y}, \quad z = \frac{4}{5}x, \quad z = 0.$$

$$6.25. \quad y = \sqrt{15x}, \quad y = \sqrt{15}x, \quad z = 0, \quad z = \sqrt{15}(1 + \sqrt{x}).$$

$$6.26. \quad x^2 + y^2 = 50, \quad y = \sqrt{5x}, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad z = \frac{3}{11}x.$$

$$6.27. \quad x + y = 8, \quad y = \sqrt{4x}, \quad z = 3y, \quad z = 0.$$

$$6.28. \quad x = 16\sqrt{2y}, \quad x = \sqrt{2y}, \quad z = 0, \quad y + z = 2.$$

$$6.29. \quad x = 15\sqrt{y}, \quad x = 15y, \quad z = 0, \quad z = 15(1 + \sqrt{y}).$$

$$6.30. \quad x^2 + y^2 = 50, \quad x = \sqrt{5y}, \quad x = 0, \quad z = 0, \quad z = \frac{6}{11}y.$$

Задача 7. Знайти масу матеріальної пластини, яка займає область D площини, задану нерівностями, з поверхневою густиною $\rho = \rho(x, y)$.

$$7.1. \quad D: x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1, \quad \rho = y^2.$$

$$7.2. \quad D: 1 \leq \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 2, \quad y \geq 0, \quad y \leq \frac{3}{2}x, \quad \rho = \frac{y}{x}.$$

$$7.3. \quad D: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} \leq 1, \quad y \geq 0, \quad \rho = x^2y.$$

$$7.4. \quad D: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} \leq 1, \quad y \geq 0, \quad \rho = \frac{7}{18}x^2y.$$

$$7.5. \quad D: 1 \leq \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 4, \quad y \geq 0, \quad y \leq \frac{1}{2}x, \quad \rho = \frac{8y}{x^3}.$$

$$7.6. \quad D: \frac{x^2}{9} + y^2 \leq 1, \quad x \geq 0, \quad \rho = 7xy^6.$$

$$7.7. \quad D: \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1, \quad \rho = 4y^4.$$

$$7.8. \quad D: 1 \leq \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 4, \quad x \geq 0, \quad y \geq \frac{3}{2}x, \quad \rho = \frac{x}{y}.$$

$$7.9. \quad D: 1 \leq \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} \leq 4, \quad x \geq 0, \quad y \geq \frac{1}{2}x, \quad \rho = \frac{x}{y}.$$

$$7.10. \quad D: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad \rho = x^3y.$$

$$7.11. \quad D: \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad \rho = 6x^3y^3.$$

$$7.12. \quad D: 1 \leq \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 25, \quad x \geq 0, \quad y \geq \frac{1}{2}x, \quad \rho = \frac{x}{y^3}.$$

$$7.13. \quad D: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1, \quad \rho = x^2y^2.$$

$$7.14. \quad D: \frac{x^2}{16} + y^2 \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad \rho = 5xy^7.$$

$$7.15. \quad D: \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad \rho = 30x^3y^7.$$

$$7.16. \quad D: 1 \leq \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 3, \quad x \geq 0, \quad y \leq \frac{2}{3}x, \quad \rho = \frac{y}{x}.$$

$$7.17. \quad D: x^2 + \frac{y^4}{25} \leq 1, \quad y \geq 0, \quad \rho = 7x^4y.$$

$$7.18. \quad D: x^2 + \frac{y^4}{9} \leq 1, \quad y \geq 0, \quad \rho = 35x^4y^3.$$

$$7.19. \quad D: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1, \quad \rho = x^2.$$

$$7.20. \quad D: 1 \leq x^2 + \frac{y^2}{16} \leq 9, \quad y \geq 0, \quad y \leq 4x, \quad \rho = \frac{y}{x^3}.$$

$$7.21. \quad D: \frac{x^2}{9} + y^2 \leq 1, \quad x \geq 0, \quad \rho = 11xy^8.$$

$$7.22. \quad D: 1 \leq \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} \leq 5, \quad x \geq 0, \quad y \geq 2x, \quad \rho = \frac{x}{y}.$$

$$7.23. \quad D: 1 \leq \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 5, \quad x \geq 0, \quad y \geq \frac{2}{3}x, \quad \rho = \frac{x}{y}.$$

$$7.24. \quad D: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad \rho = x^5 y.$$

$$7.25. \quad D: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} \leq 1, \quad \rho = x^4.$$

$$7.26. \quad D: x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad \rho = 15x^5 y^3.$$

$$7.27. \quad D: 1 \leq \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 36, \quad x \geq 0, \quad y \geq \frac{3}{2}x, \quad \rho = \frac{9x}{y^3}.$$

$$7.28. \quad D: \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{4} \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad \rho = 6xy^9.$$

$$7.29. \quad D: \frac{x^2}{16} + y^2 \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad \rho = 105x^3 y^9.$$

$$7.30. \quad D: 1 \leq \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 2, \quad y \geq 0, \quad y \leq \frac{4}{3}x, \quad \rho = \frac{27y}{x^5}.$$

Задача 8. Знайти координати центра мас пластини, яка займає область D площини, обмежену заданими лініями, з поверхневою густиною $\rho = \rho(x, y)$.

$$8.1. \quad D: x=1, \quad y=0, \quad y^2=4x \quad (y \geq 0), \quad \rho = 7x^2 + y.$$

$$8.2. \quad D: x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = 4, \quad x=0, \quad y=0 \quad (x \geq 0, \quad y \geq 0),$$

$$\rho = \frac{x+y}{x^2 + y^2}.$$

$$8.3. \quad D: x=1, y=0, y^2=4x \ (y \geq 0), \quad \rho = \frac{7x^2}{2} + 5y.$$

$$8.4. \quad D: x^2 + y^2 = 9, x^2 + y^2 = 16, x=0, y=0 \ (x \geq 0, y \geq 0), \\ \rho = \frac{2x+5y}{x^2+y^2}.$$

$$8.5. \quad D: x=2, y=0, y^2=2x \ (y \geq 0), \quad \rho = \frac{7x^2}{8} + 2y.$$

$$8.6. \quad D: x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 16, x=0, y=0 \ (x \geq 0, y \geq 0), \\ \rho = \frac{x+y}{x^2+y^2}.$$

$$8.7. \quad D: x=2, y=0, y^2 = \frac{x}{2} \ (y \geq 0), \quad \rho = \frac{7x^2}{2} + 6y.$$

$$8.8. \quad D: x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = 25, x=0, y=0 \ (x \geq 0, y \leq 0), \\ \rho = \frac{2x-3y}{x^2+y^2}.$$

$$8.9. \quad D: x=1, y=0, y^2=4x \ (y \geq 0), \quad \rho = x + 3y^2.$$

$$8.10. \quad D: x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 9, x=0, y=0 \ (x \geq 0, y \leq 0), \\ \rho = \frac{x-y}{x^2+y^2}.$$

$$8.11. \quad D: x=1, y=0, y^2=x \ (y \geq 0), \quad \rho = 3x + 6y^2.$$

$$8.12. \quad D: x^2 + y^2 = 9, x^2 + y^2 = 25, x=0, y=0 \ (x \leq 0, y \geq 0), \\ \rho = \frac{2y-x}{x^2+y^2}.$$

$$8.13. \quad D: x=2, y=0, y^2 = \frac{x}{2} \ (y \geq 0), \quad \rho = 2x + 3y^2.$$

$$8.14. \quad D: x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = 16, x=0, y=0 \ (x \leq 0, y \geq 0), \\ \rho = \frac{2y-3x}{x^2+y^2}.$$

$$8.15. \quad D: x = \frac{1}{2}, y=0, y^2=8x \ (y \geq 0), \quad \rho = 7x + 3y^2.$$

- 8.16. $D: x^2 + y^2 = 9, x^2 + y^2 = 16, x = 0, y = 0 \ (x \leq 0, y \geq 0),$
 $\rho = \frac{2y - 5x}{x^2 + y^2} .$
- 8.17. $D: x = 1, y = 0, y^2 = 4x \ (y \geq 0), \quad \rho = 7x^2 + 2y .$
- 8.18. $D: x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 16, x = 0, y = 0 \ (x \geq 0, y \geq 0),$
 $\rho = \frac{x + 3y}{x^2 + y^2} .$
- 8.19. $D: x = 2, y = 0, y^2 = 2x \ (y \geq 0), \quad \rho = \frac{7x^2}{4} + \frac{y}{2} .$
- 8.20. $D: x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 4, x = 0, y = 0 \ (x \geq 0, y \geq 0),$
 $\rho = \frac{x + 2y}{x^2 + y^2} .$
- 8.21. $D: x = 2, y = 0, y^2 = 2x \ (y \geq 0), \quad \rho = \frac{7x^2}{4} + y .$
- 8.22. $D: x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 9, x = 0, y = 0 \ (x \geq 0, y \leq 0),$
 $\rho = \frac{2x - y}{x^2 + y^2} .$
- 8.23. $D: x = 2, y = 0, y^2 = \frac{x}{2} \ (y \geq 0), \quad \rho = \frac{7x^2}{2} + 8y .$
- 8.24. $D: x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 25, x = 0, y = 0 \ (x \geq 0, y \leq 0),$
 $\rho = \frac{x - 4y}{x^2 + y^2} .$
- 8.25. $D: x = 1, y = 0, y^2 = 4x \ (y \geq 0), \quad \rho = 6x + 3y^2 .$
- 8.26. $D: x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = 16, x = 0, y = 0 \ (x \geq 0, y \leq 0),$
 $\rho = \frac{3x - y}{x^2 + y^2} .$
- 8.27. $D: x = 2, y = 0, y^2 = \frac{x}{2} \ (y \geq 0), \quad \rho = 4x + 6y^2 .$
- 8.28. $D: x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = 9, x = 0, y = 0 \ (x \leq 0, y \geq 0),$

$$\rho = \frac{y - 4x}{x^2 + y^2} .$$

$$8.29. \quad D: \quad x = \frac{1}{2}, \quad y = 0, \quad y^2 = 2x \quad (y \geq 0), \quad \rho = 4x + 9y^2 .$$

$$8.30. \quad D: \quad x^2 + y^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 9, \quad x = 0, \quad y = 0 \quad (x \leq 0, \quad y \geq 0),$$

$$\rho = \frac{y - 2x}{x^2 + y^2} .$$

Задача 9. Знайти момент інерції однорідного прямокутного трикутника з катетами a і b відносно вершини прямого кута (прийняти $\rho = 1$).

$$9.1. \quad a = 1, \quad b = 1. \quad 9.2. \quad a = 1, \quad b = 2. \quad 9.3. \quad a = 1, \quad b = 3.$$

$$9.4. \quad a = 1, \quad b = 4. \quad 9.5. \quad a = 1, \quad b = 5. \quad 9.6. \quad a = 1, \quad b = 6.$$

$$9.7. \quad a = 1, \quad b = 7. \quad 9.8. \quad a = 1, \quad b = 8. \quad 9.9. \quad a = 2, \quad b = 2.$$

$$9.10. \quad a = 2, \quad b = 3. \quad 9.11. \quad a = 2, \quad b = 4. \quad 9.12. \quad a = 2, \quad b = 5.$$

$$9.13. \quad a = 2, \quad b = 6. \quad 9.14. \quad a = 2, \quad b = 7. \quad 9.15. \quad a = 2, \quad b = 8.$$

$$9.16. \quad a = 3, \quad b = 3. \quad 9.17. \quad a = 3, \quad b = 4. \quad 9.18. \quad a = 3, \quad b = 5.$$

$$9.19. \quad a = 3, \quad b = 6. \quad 9.20. \quad a = 3, \quad b = 7. \quad 9.21. \quad a = 4, \quad b = 4.$$

$$9.22. \quad a = 4, \quad b = 5. \quad 9.23. \quad a = 4, \quad b = 6. \quad 9.24. \quad a = 4, \quad b = 7.$$

$$9.25. \quad a = 5, \quad b = 5. \quad 9.26. \quad a = 5, \quad b = 6. \quad 9.27. \quad a = 5, \quad b = 7.$$

$$9.28. \quad a = 6, \quad b = 6. \quad 9.29. \quad a = 6, \quad b = 7. \quad 9.30. \quad a = 7, \quad b = 7.$$

Задача 10. Обчислити потрійний інтеграл по області R , обмеженій вказаними поверхнями.

$$10.1. \quad \iiint_R 2y^2 e^{xy} dx dy dz, \quad R: \quad x = 0, \quad y = 1, \quad y = x, \quad z = 0, \quad z = 1 .$$

$$10.2. \quad \iiint_R x^2 z \sin(xyz) dx dy dz ,$$

$$R: \quad x = 2, \quad y = \pi, \quad z = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 .$$

$$10.3. \quad \iiint_R y^2 \operatorname{ch}(2xy) dx dy dz ,$$

$$R: \quad x = 0, \quad y = -2, \quad y = 4x, \quad z = 0, \quad z = 2 .$$

$$10.4. \iiint_R 8y^2 z e^{2xyz} dx dy dz ,$$

$$R: x = -1, y = 2, z = 1, x = 0, y = 0, z = 0 .$$

$$10.5. \iiint_R x^2 sh(3xy) dx dy dz , \quad R: x = 1, y = 2x, y = 0, z = 0, z = 36 .$$

$$10.6. \iiint_R y^2 z \cos xyz dx dy dz ,$$

$$R: x = 1, y = \pi, z = 2, x = 0, y = 0, z = 0 .$$

$$10.7. \iiint_R y^2 \cos\left(\frac{\pi xy}{4}\right) dx dy dz ,$$

$$R: x = 0, y = -1, y = \frac{x}{2}, z = 0, z = -\pi^2 .$$

$$10.8. \iiint_R x^2 z \sin \frac{xyz}{4} dx dy dz ,$$

$$R: x = 1, y = 2\pi, z = 4, x = 0, y = 0, z = 0 .$$

$$10.9. \iiint_R y^2 e^{-xy} dx dy dz , \quad R: x = 0, y = -2, y = 4x, z = 0, z = 1 .$$

$$10.10. \iiint_R 2y^2 z e^{xyz} dx dy dz ,$$

$$R: x = 1, y = 1, z = 1, x = 0, y = 0, z = 0 .$$

$$10.11. \iiint_R y^2 ch(2xy) dx dy dz , \quad R: x = 0, y = 1, y = x, z = 0, z = 8 .$$

$$10.12. \iiint_R x^2 z sh(xyz) dx dy dz ,$$

$$R: x = 0, x = 2, y = 1, y = 0, z = 0, z = 1 .$$

$$10.13. \iiint_R y^2 e^{\frac{xy}{2}} dx dy dz , \quad R: x = 0, y = 2, y = 2x, z = 0, z = -1 .$$

$$10.14. \iiint_R y^2 z \cos \frac{xyz}{3} dx dy dz ,$$

$$R: x = 3, y = 1, z = 2\pi, x = 0, y = 0, z = 0 .$$

$$10.15. \iiint_R y^2 \cos\left(\frac{\pi xy}{2}\right) dx dy dz ,$$

$$R: x = 0, y = -1, y = x, z = 0, z = 2\pi^2 .$$

$$10.16. \iiint_R 2x^2 z \operatorname{sh}(xyz) dx dy dz ,$$

$$R: x = 1, y = -1, z = 1, x = 0, y = 0, z = 0 .$$

$$10.17. \iiint_R y^2 \cos(\pi xy) dx dy dz ,$$

$$R: x = 0, y = 1, y = 2x, z = 0, z = \pi^2 .$$

$$10.18. \iiint_R 2x^2 z \operatorname{sh}(2xyz) dx dy dz ,$$

$$R: x = 2, y = \frac{1}{2}, z = \frac{1}{2}, x = 0, y = 0, z = 0 .$$

$$10.19. \iiint_R x^2 \operatorname{sh}(2xy) dx dy dz ,$$

$$R: x = -1, y = x, y = 0, z = 0, z = 8 .$$

$$10.20. \iiint_R x^2 z \sin \frac{xyz}{2} dx dy dz ,$$

$$R: x = 1, y = 4, z = \pi, x = 0, y = 0, z = 0 .$$

$$10.21. \iiint_R y^2 \operatorname{ch}(xy) dx dy dz ,$$

$$R: x = 0, y = -1, y = x, z = 0, z = 2 .$$

$$10.22. \iiint_R y^2 z \operatorname{ch}(xyz) dx dy dz ,$$

$$R: x = 1, y = 1, z = 1, x = 0, y = 0, z = 0 .$$

$$10.23. \iiint_R x^2 \sin\left(\frac{\pi xy}{2}\right) dx dy dz ,$$

$$R: x = 2, y = x, y = 0, z = 0, z = \pi .$$

$$10.24. \iiint_R y^2 z \cos \frac{xyz}{9} dx dy dz ,$$

$$R: x = 9, y = 1, z = 2\pi, x = 0, y = 0, z = 0 .$$

$$10.25. \iiint_R x^2 \sin(\pi xy) dx dy dz ,$$

$$R: x = 1, y = 2x, y = 0, z = 0, z = 4\pi .$$

$$10.26. \iiint_R y^2 z \operatorname{ch}\left(\frac{xyz}{2}\right) dx dy dz ,$$

$$R: x = 2, y = -1, z = 2, x = 0, y = 0, z = 0 .$$

$$10.27. \iiint_R y^2 \operatorname{ch}(3xy) dx dy dz, \quad R: x = 0, y = 2, y = 6x, z = 0, z = -3 .$$

$$10.28. \iiint_R 2y^2 z \operatorname{ch}(2xyz) dx dy dz ,$$

$$R: x = \frac{1}{2}, y = 2, z = -1, x = 0, y = 0, z = 0 .$$

$$10.29. \iiint_R x^2 \sin(4\pi xy) dx dy dz ,$$

$$R: x = 1, y = \frac{x}{2}, y = 0, z = 0, z = 8\pi .$$

$$10.30. \iiint_R 8y^2 z e^{-xyz} dx dy dz ,$$

$$R: x = 2, y = -1, z = 2, x = 0, y = 0, z = 0 .$$

Задача 11. Знайти об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями.

$$11.1. \text{ а) } z = x^2 + y^2, \quad x + y = 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0 ;$$

$$\text{б) } z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, \quad \frac{9z}{2} = x^2 + y^2 .$$

$$11.2. \text{ а) } z = 2 - (x^2 + y^2), \quad x + 2y = 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0 ;$$

$$\text{б) } z = \frac{15}{2} \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = \frac{17}{2} - x^2 - y^2 .$$

$$11.3. \text{ а) } z = x^2, \quad x - 2y + 2 = 0, \quad x + y - 7 = 0, \quad z \geq 0 ;$$

$$\text{б) } z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \quad z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{255}} .$$

$$11.4. \text{ а) } z = 2x^2 + 3y^2, \quad y = x^2, \quad y = x, \quad z \geq 0 ;$$

$$\text{б) } z = \sqrt{64 - x^2 - y^2}, \quad z = 1, \quad x^2 + y^2 = 60$$

(всередині циліндра).

$$11.5. \text{ а) } z = 2x^2 + y^2, \quad y = x, \quad y = 3x, \quad x = 2, \quad z \geq 0 ;$$

$$\text{б) } 2z = x^2 + y^2, \quad z = \sqrt{\frac{16}{9} - x^2 - y^2}.$$

$$11.6. \text{ а) } z = x, \quad y = 4, \quad x = \sqrt{25 - y^2}, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0;$$

$$\text{б) } z = 3\sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 10 - x^2 - y^2.$$

$$11.7. \text{ а) } y = \sqrt{x}, \quad y = x, \quad x + y + z = 2, \quad z \geq 0;$$

$$\text{б) } z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}, \quad z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{9}}.$$

$$11.8. \text{ а) } y = 1 - x^2, \quad x + y + z = 3, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0;$$

$$\text{б) } z = \sqrt{100 - x^2 - y^2}, \quad z = 6, \quad x^2 + y^2 = 51$$

(всередині циліндра).

$$11.9. \text{ а) } z = 2x^2 + y^2, \quad x + y = 4, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0;$$

$$\text{б) } z = \frac{21}{2}\sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = \frac{23}{2} - x^2 - y^2.$$

$$11.10. \text{ а) } z = 4 - x^2, \quad x^2 + y^2 = 4, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0;$$

$$\text{б) } z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}, \quad 6z = x^2 + y^2.$$

$$11.11. \text{ а) } 2x + 3y - 12 = 0, \quad 2z = y^2, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0;$$

$$\text{б) } z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, \quad z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{80}}.$$

$$11.12. \text{ а) } z = 10 + x^2 + 2y^2, \quad y = x, \quad x = 1, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0;$$

$$\text{б) } z = \sqrt{81 - x^2 - y^2}, \quad z = 5, \quad x^2 + y^2 = 45.$$

$$11.13. \text{ а) } z = x^2, \quad x + y = 6, \quad y = 2x, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0;$$

$$\text{б) } z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad \frac{3z}{2} = x^2 + y^2.$$

$$11.14. \text{ а) } z = 3x^2 + 2y^2 + 1, \quad y = x^2 - 1, \quad y = 1, \quad z \geq 0;$$

$$\text{б) } z = 6\sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 16 - x^2 - y^2.$$

$$11.15. \text{ а) } 3y = \sqrt{x}, \quad y \leq x, \quad x + y + z = 10, \quad y = 1, \quad z = 0;$$

$$\text{б) } z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}, \quad z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{63}}.$$

$$11.16. \text{ а) } y^2 = 1 - x, \quad x + y + z = 1, \quad x = 0, \quad z = 0;$$

б) $z = \sqrt{64 - x^2 - y^2}$, $z = 4$, $x^2 + y^2 = 39$
(всередині циліндра).

11.17. а) $y = x^2$, $x = y^2$, $z = 3x + 2y + 6$, $z = 0$;

б) $z = \sqrt{144 - x^2 - y^2}$, $18z = x^2 + y^2$.

11.18. а) $x^2 = 1 - y$, $x + y + z = 3$, $y \geq 0$, $z \geq 0$;

б) $z = \frac{5}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$, $z = \frac{5}{2} - x^2 - y^2$.

11.19. а) $x = y^2$, $x = 1$, $x + y + z = 4$, $z = 0$;

б) $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, $z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{35}}$.

11.20. а) $z = 2x^2 + y^2$, $x + y = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$;

б) $z = \sqrt{49 - x^2 - y^2}$, $z = 3$, $x^2 + y^2 = 33$

(всередині циліндра).

11.21. а) $y = x^2$, $y = 4$, $z = 2x + 5y + 10$, $z \geq 0$;

б) $z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}$, $9z = x^2 + y^2$.

11.22. а) $y = 2x$, $x + y + z = 2$, $x \geq 0$, $z \geq 0$;

б) $z = 9\sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 22 - x^2 - y^2$.

11.23. а) $y = 1 - z^2$, $y = x$, $y = -x$, $y \geq 0$, $z \geq 0$;

б) $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$, $z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{15}}$.

11.24. а) $x^2 + y^2 = 4y$, $z^2 = 4 - y$, $z \geq 0$;

б) $z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}$, $z = 2$, $x^2 + y^2 = 27$

(всередині циліндра).

11.25. а) $x^2 + y^2 = 1$, $z = 2 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$;

б) $z = \sqrt{\frac{4}{9} - x^2 - y^2}$, $z = x^2 + y^2$.

11.26. а) $y = x^2$, $z = 0$, $y + z = 2$;

б) $z = 12\sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 28 - x^2 - y^2$.

11.27. а) $z^2 = 4 - x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $z \geq 0$;

$$\text{б) } z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, \quad z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{8}}.$$

$$11.28. \text{ а) } z = x^2 + 2y^2, \quad y = x, \quad y = 1, \quad x \geq 0, \quad z \geq 0;$$

$$\text{б) } z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}, \quad z = 1, \quad x^2 + y^2 = 21$$

(всередині циліндра).

$$11.29. \text{ а) } z = y^2, \quad x + y = 1, \quad x \geq 0, \quad z \geq 0;$$

$$\text{б) } z = \sqrt{64 - x^2 - y^2}, \quad 12z = x^2 + y^2.$$

$$11.30. \text{ а) } y^2 = x, \quad x = 3, \quad z = x, \quad z \geq 0;$$

$$\text{б) } z = \frac{9}{2} \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = \frac{11}{2} - x^2 - y^2.$$

Задача 12. Знайти масу тіла, обмеженого заданими поверхнями, з густиною $\rho = \rho(x, y, z)$.

$$12.1. \quad 64(x^2 + y^2) = z^2, \quad x^2 + y^2 = 4, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad (y \geq 0, z \geq 0),$$

$$\rho = \frac{5}{4}(x^2 + y^2).$$

$$12.2. \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad x = 0 \quad (x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0),$$

$$\rho = 4|z|.$$

$$12.3. \quad x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = 2z, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad (x \geq 0, y \geq 0),$$

$$\rho = 10x.$$

$$12.4. \quad x^2 + y^2 = \frac{16}{49}z^2, \quad x^2 + y^2 = \frac{4}{7}z, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

$$(x \geq 0, y \geq 0), \quad \rho = 80yz.$$

$$12.5. \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = 4z^2, \quad x = 0, \quad y = 0$$

$$(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0), \quad \rho = 20z.$$

$$12.6. \quad 36(x^2 + y^2) = z^2, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad x = 0, \quad z = 0$$

$$(x \geq 0, z \geq 0), \quad \rho = \frac{5}{6}(x^2 + y^2).$$

$$12.7. \quad x^2 + y^2 + z^2 = 16, \quad x^2 + y^2 = 4 \quad (x^2 + y^2 \leq 4), \quad \rho = 2|z|.$$

$$12.8. \quad x^2 + y^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 8z, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

$$(x \geq 0, y \geq 0), \quad \rho = 5x.$$

$$12.9. \quad x^2 + y^2 = \frac{4}{25}z^2, \quad x^2 + y^2 = \frac{2}{5}z, \quad x=0, \quad y=0 \quad (x \geq 0, y \geq 0),$$

$$\rho = 28xz.$$

$$12.10. \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = z^2, \quad x=0, \quad y=0$$

$$(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0), \quad \rho = 6z.$$

$$12.11. \quad 25(x^2 + y^2) = z^2, \quad x^2 + y^2 = 4, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0$$

$$(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0), \quad \rho = 2(x^2 + y^2).$$

$$12.12. \quad x^2 + y^2 + z^2 = 9, \quad x^2 + y^2 = 4, \quad y=0 \quad (x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0),$$

$$\rho = |z|.$$

$$12.13. \quad x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = 6z, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0$$

$$(x \geq 0, y \geq 0), \quad \rho = 90y.$$

$$12.14. \quad x^2 + y^2 = \frac{z^2}{25}, \quad x^2 + y^2 = \frac{z}{5}, \quad x=0, \quad y=0 \quad (x \geq 0, y \geq 0),$$

$$\rho = 14yz.$$

$$12.15. \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 9z^2, \quad x=0, \quad y=0$$

$$(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0), \quad \rho = 10z.$$

$$12.16. \quad 9(x^2 + y^2) = z^2, \quad x^2 + y^2 = 4, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0$$

$$(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0), \quad \rho = \frac{5}{3}(x^2 + y^2).$$

$$12.17. \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 1 \quad (x^2 + y^2 \leq 1), \quad \rho = 6|z|.$$

$$12.18. \quad x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = z, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0$$

$$(x \geq 0, y \geq 0), \quad \rho = 10y.$$

$$12.19. \quad x^2 + y^2 = \frac{z^2}{49}, \quad x^2 + y^2 = \frac{z}{7}, \quad x=0, \quad y=0 \quad (x \geq 0, y \geq 0),$$

$$\rho = 10xz.$$

$$12.20. \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 4z^2, \quad x=0, \quad y=0$$

$$(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0), \quad \rho = 10z.$$

$$12.21. \quad 16(x^2 + y^2) = z^2, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0$$

$$(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0), \quad \rho = 5(x^2 + y^2).$$

$$12.22. \quad x^2 + y^2 + z^2 = 16, \quad x^2 + y^2 = 4 \quad (x^2 + y^2 \leq 4), \quad \rho = |z|.$$

$$12.23. \quad x^2 + y^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 4z, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \\ (x \geq 0, \quad y \geq 0), \quad \rho = 5y.$$

$$12.24. \quad x^2 + y^2 = z^2, \quad x^2 + y^2 = z, \quad x = 0, \quad y = 0 \quad (x \geq 0, \quad y \geq 0), \\ \rho = 35yz.$$

$$12.25. \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = z^2, \quad x = 0, \quad y = 0 \\ (x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0), \quad \rho = 32z.$$

$$12.26. \quad x^2 + y^2 = z^2, \quad x^2 + y^2 = 4, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \\ (x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0), \quad \rho = \frac{5}{2}(x^2 + y^2).$$

$$12.27. \quad x^2 + y^2 + z^2 = 9, \quad x^2 + y^2 = 4, \quad z = 0 \quad (x^2 + y^2 \leq 4, \quad z \geq 0), \\ \rho = 2z.$$

$$12.28. \quad x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = 3z, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \\ (x \geq 0, \quad y \geq 0), \quad \rho = 15x.$$

$$12.29. \quad x^2 + y^2 = \frac{4}{49}z^2, \quad x^2 + y^2 = \frac{2}{7}z, \quad x = 0, \quad y = 0 \\ (x \geq 0, \quad y \geq 0), \quad \rho = 20xz.$$

$$12.30. \quad x^2 + y^2 + z^2 = 16, \quad x^2 + y^2 = 9z^2, \quad x = 0, \quad y = 0 \\ (x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0), \quad \rho = 5z.$$

Задача 13. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого заданими поверхнями.

$$13.1. \quad x^2 + y^2 = 2z, \quad x^2 + y^2 = z^2.$$

$$13.2. \quad x + y = 1, \quad z = x^2 + y^2, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

$$13.3. \quad z^2 = xy, \quad x = 5, \quad y = 5, \quad z = 0.$$

$$13.4. \quad 2x + 3y - 12 = 0, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad z = \frac{y^2}{2}.$$

$$13.5. \quad y = 4 - x^2 - z^2, \quad y = 0.$$

$$13.6. \quad y = 3 - x^2 - z^2, \quad y = 2.$$

$$13.7. \quad x = 0, \quad y = 1, \quad y = 3, \quad z = 0, \quad x + 2z = 3.$$

$$13.8. \quad 3(x^2 + y^2) = 2z, \quad 9(x^2 + y^2) = z^2.$$

- 13.9. $z^2 = xy$, $x = 3$, $y = 3$, $z = 0$.
- 13.10. $3x + 2y - 12 = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = y^2$.
- 13.11. $y^2 + z^2 = 2x$, $y^2 + z^2 = x^2$.
- 13.12. $y + z = 1$, $x = y^2 + z^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
- 13.13. $x^2 = yz$, $x = 0$, $y = 5$, $z = 5$.
- 13.14. $3y + 2z = 12$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = \frac{y^2}{2}$.
- 13.15. $x = 4 - y^2 - z^2$, $x = 0$.
- 13.16. $z = 3 - x^2 - y^2$, $z = 2$.
- 13.17. $x = 0$, $y = 1$, $y = 3$, $z = 0$, $2x + z = 3$.
- 13.18. $3(y^2 + z^2) = 2x$, $9(y^2 + z^2) = x^2$.
- 13.19. $x^2 = yz$, $x = 0$, $y = 3$, $z = 3$.
- 13.20. $2y + 3z - 12 = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = y^2$.
- 13.21. $x^2 + z^2 = 2y$, $x^2 + z^2 = y^2$.
- 13.22. $x + z = 1$, $y = x^2 + z^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
- 13.23. $y^2 = xz$, $x = 5$, $y = 0$, $z = 5$.
- 13.24. $2x + 3z = 12$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $y = \frac{x^2}{2}$.
- 13.25. $z = 4 - x^2 - y^2$, $z = 0$.
- 13.26. $x = 3 - y^2 - z^2$, $x = 2$ ($x \geq 2$) .
- 13.27. $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$, $z = 3$, $x + 2y = 3$.
- 13.28. $3(x^2 + z^2) = 2y$, $9(x^2 + z^2) = y^2$.
- 13.29. $y^2 = xz$, $x = 3$, $y = 0$, $z = 3$.
- 13.30. $3x + 2z = 12$, $x = 3$, $y = 0$, $z = 0$, $y = z^2$.

Задача 14. Знайти момент інерції однорідного прямого кругового конуса з радіусом основи R і висотою H відносно його осі (прийняти $\rho = 1$).

- 14.1. $R = 7$, $H = 7$. 14.2. $R = 6$, $H = 7$.
- 14.3. $R = 6$, $H = 6$. 14.4. $R = 5$, $H = 6$.
- 14.5. $R = 5$, $H = 5$. 14.6. $R = 4$, $H = 7$.

- 14.7.** $R = 4, H = 6$. **14.8.** $R = 4, H = 5$.
14.9. $R = 4, H = 4$. **14.10.** $R = 3, H = 7$.
14.11. $R = 3, H = 6$. **14.12.** $R = 3, H = 5$.
14.13. $R = 3, H = 4$. **14.14.** $R = 3, H = 3$.
14.15. $R = 2, H = 8$. **14.16.** $R = 2, H = 7$.
14.17. $R = 2, H = 6$. **14.18.** $R = 2, H = 5$.
14.19. $R = 2, H = 4$. **14.20.** $R = 2, H = 3$.
14.21. $R = 2, H = 2$. **14.22.** $R = 1, H = 8$.
14.23. $R = 1, H = 7$. **14.24.** $R = 1, H = 6$.
14.25. $R = 1, H = 5$. **14.26.** $R = 1, H = 4$.
14.27. $R = 1, H = 3$. **14.28.** $R = 5, H = 2$.
14.29. $R = 7, H = 1$. **14.30.** $R = 5, H = 7$.

Задача 15. Обчислити криволінійні інтеграли.

- 15.1.** а) $\int_L (2z - \sqrt{x^2 + y^2}) dl$, де L – дуга кривої
 $x = t \cos t, y = t \sin t, z = t, 0 \leq t \leq 2\pi$;
 б) $\int_L (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy$, де L – дуга
 параболу $y = x^2$ від точки $A(-1; 1)$ до точки $B(1; 1)$.
15.2. а) $\oint_L (x^2 + y^2) dl$, де L – коло $x^2 + y^2 = 4$;
 б) $\int_L \frac{x^2 dy - y^2 dx}{\sqrt[3]{x^5} + \sqrt[3]{y^5}}$, де L – дуга астроїди $x = 2 \cos^3 t$,
 $y = 2 \sin^3 t$ від точки $A(2; 0)$ до точки $B(2; 0)$.
15.3. а) $\int_L \frac{dl}{\sqrt{8 - x^2 - y^2}}$, де L – відрізок прямої, що з'єднує
 точки $O(0; 0)$ і $A(2; 2)$;
 б) $\int_L (x^2 + y^2) dx + 2xy dy$, де L – дуга кубічної
 параболу $y = x^3$ від точки $O(0; 0)$ до точки $A(1; 1)$.

- 15.4.** а) $\int_L (4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y}) dl$, де L – відрізок прямої, що з'єднує точки $A(-1; 0)$ і $B(0; 1)$;
 б) $\oint_L (x + 2y)dx + (x - y)dy$, де L – коло $x = 2 \cos t$,
 $y = 2 \sin t$ при додатному напрямі обходу .
- 15.5.** а) $\int_L \frac{dl}{\sqrt{5}(x - y)}$, L – відрізок прямої, що з'єднує точки $A(0; 4)$ і $B(4; 0)$;
 б) $\oint_L (x^2 y - x)dx + (y^2 x - 2y)dy$, де L – дуга еліпса $x = 3 \cos t$, $y = 2 \sin t$ при додатному напрямі обходу.
- 15.6.** а) $\int_L \frac{dl}{x + y + 5}$, де L – відрізок прямої, що з'єднує точки $A(0; -2)$ і $B(1; 0)$;
 б) $\int_L (xy - 1)dx + x^2 y dy$, де L – дуга еліпса $x = \cos t$, $y = 2 \sin t$ від точки $A(1; 0)$ до точки $B(0; 2)$.
- 15.7.** а) $\int_L y dl$, де L – дуга астроїди $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, що з'єднує точки $A(1; 0)$ і $B(0; 1)$;
 б) $\int_L 2xy dx - x^2 dy$, де L – ламана OBA : $O(0; 0)$, $B(2; 0)$, $A(2; 1)$.
- 15.8.** а) $\int_L y dl$, де L – дуга параболи $y^2 = \frac{2}{3}x$ між точками $O(0; 0)$ і $B\left(\frac{35}{6}; \frac{\sqrt{35}}{3}\right)$;
 б) $\int_L (x^2 - y^2)dx + xy dy$, де L – відрізок прямої, що з'єднує точки $A(1; 1)$ і $B(3; 4)$.

15.9. а) $\int_L (x^2 + y^2 + z^2) dl$, де L – дуга кривої

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = \sqrt{3}t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi;$$

б) $\int_L \cos y dx - \sin x dy$, де L – відрізок прямої, що

з'єднує точки $A(2\pi; -2\pi)$ і $B(-2\pi; 2\pi)$.

15.10. а) $\int_L x dl$, де L – відрізок прямої, що з'єднує точки

$O(0; 0)$ і $A(1; 2)$;

б) $\int_L \frac{y dx + x dy}{x^2 + y^2}$, де L – відрізок прямої, що з'єднує

точки $A(1; 2)$ і $B(3; 6)$.

15.11. а) $\int_L \sqrt{2y} dl$, де L – перша арка циклоїди

$$x = 2(t - \sin t), \quad y = 2(1 - \cos t);$$

б) $\int_L xy dx + (y - x) dy$, де L – дуга кубічної параболи

$y = x^3$ від точки $O(0; 0)$ до точки $A(1; 1)$.

15.12. а) $\int_L \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, де L – відрізок прямої, що

з'єднує точки $O(0; 0)$ і $A(1; 2)$;

б) $\int_L (x^2 + y^2) dx + (x + y^2) dy$, де L – ламана ABC :

$A(1; 2)$, $B(3; 2)$, $C(3; 5)$.

15.13. а) $\int_L \frac{dl}{x - y}$, де L – відрізок прямої, що з'єднує

точки $A(0; -2)$ і $B(4; 0)$;

б) $\int_L xy^2 dx + yz^2 dy - x^2 z dz$, де L – відрізок прямої,

з'єднує точки $O(0; 0; 0)$ і $A(-2; 4; 5)$.

15.14. а) $\oint_L xy dl$, де L – контур прямокутника з

вершинами $O(0; 0)$, $A(4; 0)$, $B(4; 2)$, $C(0; 2)$;

б) $\int_L ydx + xdy$, де L – дуга AB кола

$x = R \cos t$, $y = R \sin t$, $A(R; 0)$, $B(0; R)$.

15.15. а) $\oint_L (x + y)dl$, де L – контур трикутника з

вершинами $A(1; 0)$, $B(0; 1)$, $O(0; 0)$;

б) $\int_L xydx + (y - x)dy$, де L – дуга параболи $y^2 = x$

від точки $O(0; 0)$ до точки $A(1; 1)$.

15.16. а) $\int_L \frac{z^2 dl}{x^2 + y^2}$, де L – перший виток гвинтової лінії

$x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $z = 2t$;

б) $\int_L xdx + ydy + (x - y + 1)dz$, де L – відрізок прямої,

що з'єднує точки $A(1; 1; 1)$ і $B(2; 3; 4)$.

15.17. а) $\oint_L (x + y)dl$, де L – контур трикутника з

вершинами $O(0; 0)$, $A(-1; 0)$, $B(0; 1)$;

б) $\int_L (xy - 1)dx + x^2 y dy$, де L – дуга параболи

$y^2 = 4 - 4x$ від точки $A(1; 0)$ до точки $B(0; 2)$.

15.18. а) $\int_L \frac{dl}{x^2 + y^2 + z^2}$, де L – дуга кривої $x = 4 \cos t$,

$y = 4 \sin t$, $z = 3t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$;

б) $\int_L xydx + (y - x)dy$, де L – дуга параболи $y = x^2$

від точки $O(0; 0)$ до точки $A(1; 1)$.

15.19. а) $\oint_L \sqrt{x^2 + y^2} dl$, де L – коло $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$;

б) $\int_L (xy - y^2) dx + x dy$, де L – дуга параболи $y = x^2$ від точки $O(0; 0)$ до точки $A(1; 1)$.

15.20. а) $\int_L xy dl$, де L – контур прямокутника з вершинами $O(0; 0)$, $A(5; 0)$, $B(5; 3)$, $C(0; 3)$;

б) $\int_L x dy - y dx$, де L – дуга астроїди $x = 2 \cos^3 t$, $y = 2 \sin^3 t$ від точки $A(2; 0)$ до точки $B(0; 2)$.

15.21. а) $\oint_L (x^2 + y^2) dl$, де L – коло $x = \cos t$, $y = \sin t$;

б) $\int_L (xy - x) dx + \frac{1}{2} x^2 dy$, де L – дуга параболи $y^2 = 4x$ від точки $O(0; 0)$ до точки $A(1; 2)$.

15.22. а) $\int_L (4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[3]{y}) dl$, де L – дуга астроїди $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$ від точки $A(1; 0)$ до точки $B(0; 1)$;

б) $\int_L (xy - 1) dx + x^2 y dy$, де L – відрізок прямої, що з'єднує точки $A(1; 0)$ і $B(0; 2)$.

15.23. а) $\oint_L xy dl$, де L – контур квадрата зі сторонами $x = 1$, $x = -1$, $y = 1$, $y = -1$;

б) $\int_L 2xy dx + y^2 dy + z^2 dz$, де L – дуга одного витка гвинтової лінії $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

15.24. а) $\int_L y^2 dl$, де L – перша арка циклоїди $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$;

б) $\int_L \frac{y}{x} dx + x dy$, де L – дуга дуга лінії $y = \ln x$ від точки $A(1; 0)$ до точки $B(e; 1)$.

15.25. а) $\oint_L xy dl$, де L – контур прямокутника з вершинами

$$A(2; 0), B(4; 0), C(4; 3), D(2; 3);$$

б) $\oint_L y dx - x dy$, де L – еліпс $x = 3 \cos t$, $y = 2 \sin t$,

який пробігається в додатному напрямі.

15.26. а) $\int_L y dl$, де L – дуга параболи $y^2 = 2x$, яка

відтинається параболою $x^2 = 2y$;

б) $\int_L 2xy dx + x^2 dy$, де L – дуга параболи $y = \frac{x^2}{4}$

від точки $O(0; 0)$ до точки $A(2; 1)$.

15.27. а) $\int_L \frac{dl}{x - y}$, де L – відрізок прямої, що з'єднує

точки $A(4; 0)$ і $B(6; 1)$;

б) $\int_L (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$, де L – ламана лінія

$y = |x|$ від точки $A(-1; 1)$ до точки $B(2; 2)$.

15.28. а) $\int_L (x^2 + y^2)^2 dl$, де L – перша чверть кола

$$x = 2 \cos t, y = 2 \sin t;$$

б) $\int_L 2xy dx - x^2 dy + z dz$, де L – відрізок прямої, що

з'єднує точки $O(0; 0; 0)$ і $A(2; 1; -1)$.

15.29. а) $\int_L \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, де L – відрізок прямої, що

з'єднує точки $A(1; 1; 1)$ і $B(2; 2; 2)$;

б) $\oint_L x dy - y dx$, де L – контур трикутника з

вершинами $A(-1; 0)$, $B(1; 0)$, $C(0; 1)$

при додатному напрямі обходу.

- 15.30.** а) $\int_L (xy + x^2) dl$, де L – відрізок прямої, що з'єднує точки $A(1; 1)$ і $B(3; 3)$;
 б) $\int_L (x^2 + y) dx + (x + y^2) dy$, де L – ламана ABC :
 $A(2; 0)$, $B(5; 0)$, $C(5; 3)$.

Задача 16. Знайти центр мас однорідної кривої.

- 16.1.** $2x + y - 2 = 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.
16.2. $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$, $1 \leq y \leq 2$.
16.3. $y^2 = 2x$, $0 \leq x \leq 2$.
16.4. $y = chx$, $-2 \leq x \leq 2$.
16.5. $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$ $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.
16.6. $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
16.7. $r = \cos \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.
16.8. $r = e^\varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.
16.9. $r^2 = \cos 2\varphi$, $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$.
16.10. $r = \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$.
16.11. $x + 2y - 2 = 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.
16.12. $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$, $1 \leq x \leq 2$.
16.13. $x^2 = 2y$, $0 \leq y \leq 2$.
16.14. $y = shx$, $-1 \leq x \leq 1$.
16.15. $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$ $0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$.
16.16. $x = 2t - 2\sin t$, $y = 2 - 2\cos t$ $0 \leq t \leq \pi$.
16.17. $r = 2\sin \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.
16.18. $r = 2e^\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$.

$$16.19. \quad r^2 = 4 \cos 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}.$$

$$16.20. \quad r = 3\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$16.21. \quad 3x + 2y - 3 = 0, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

$$16.22. \quad y = \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{4} x^2, \quad 1 \leq x \leq 2.$$

$$16.23. \quad y = 3ch \frac{x}{3}, \quad -3 \leq x \leq 3.$$

$$16.24. \quad x = 3 \cos^3 t, \quad y = 3 \sin^3 t \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}.$$

$$16.25. \quad x = 3(t - \sin t), \quad y = 3(1 - \cos t) \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$16.26. \quad r = 2 \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}.$$

$$16.27. \quad r = 3e^\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

$$16.28. \quad r^2 = 9 \cos 2\varphi, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq 0.$$

$$16.29. \quad r = 5\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}.$$

$$16.30. \quad r = 1 + \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Задача 17. Знайти роботу сили $\vec{F}$ при переміщенні точки прикладання вздовж лінії L від точки M до точки N .

$$17.1. \quad \vec{F} = (x^2 - 2y)\vec{i} + (y^2 - 2x)\vec{j},$$

L – відрізок прямої, $M(-4; 0)$, $N(0; 2)$.

$$17.2. \quad \vec{F} = (x^2 + 2y)\vec{i} + (y^2 + 2x)\vec{j},$$

L – відрізок прямої, $M(-4; 0)$, $N(0; 2)$.

$$17.3. \quad \vec{F} = (x^2 + 2y)\vec{i} + (y^2 + 2x)\vec{j},$$

$L: y = 2 - \frac{x^2}{8}$, $M(-4; 0)$, $N(0; 2)$.

$$17.4. \quad \vec{F} = (x + y)\vec{i} + 2x\vec{j},$$

$L: x^2 + y^2 = 4$ ($y \geq 0$), $M(2; 0)$, $N(-2; 0)$.

$$17.5. \quad \bar{F} = x^3 \bar{i} - y^3 \bar{j},$$

$$L: x^2 + y^2 = 4 \quad (x \geq 0, y \geq 0), \quad M(2; 0), N(0; 2).$$

$$17.6. \quad \bar{F} = (x+y)\bar{i} + (x-y)\bar{j}, \quad L: y = x^2, \quad M(-1; 1), N(1; 1).$$

$$17.7. \quad \bar{F} = x^2 y \bar{i} - y \bar{j}, \quad L - \text{відрізок прямої}, \quad M(-1; 0), N(0; 1).$$

$$17.8. \quad \bar{F} = (2xy - y)\bar{i} + (x^2 + x)\bar{j},$$

$$L: x^2 + y^2 = 9 \quad (y \geq 0), \quad M(3; 0), N(-3; 0).$$

$$17.9. \quad \bar{F} = (x+y)\bar{i} + (x-y)\bar{j},$$

$$L: x^2 + \frac{y^2}{9} = 1 \quad (x \geq 0, y \geq 0), \quad M(1; 0), N(0; 3).$$

$$17.10. \quad \bar{F} = y \bar{i} - x \bar{j},$$

$$L: x^2 + y^2 = 1 \quad (y \geq 0), \quad M(1; 0), N(-1; 0).$$

$$17.11. \quad \bar{F} = (x^2 + y^2)\bar{i} + (y^2 - x^2)\bar{j},$$

$$L: y = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}, \quad M(2; 0), N(0; 0).$$

$$17.12. \quad \bar{F} = y \bar{i} - x \bar{j},$$

$$L: x^2 + y^2 = 2 \quad (y \geq 0), \quad M(\sqrt{2}; 0), N(-\sqrt{2}; 0).$$

$$17.13. \quad \bar{F} = xy \bar{i} + 2y \bar{j},$$

$$L: x^2 + y^2 = 1 \quad (x \geq 0, y \geq 0), \quad M(1; 0), N(0; 1).$$

$$17.14. \quad \bar{F} = y \bar{i} - x \bar{j},$$

$$L: 2x^2 + y^2 = 1 \quad (y \geq 0), \quad M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right), N\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right).$$

$$17.15. \quad \bar{F} = (x^2 + y^2)(\bar{i} + 2\bar{j}),$$

$$L: x^2 + y^2 = R \quad (y \geq 0), \quad M(R; 0), N(-R; 0).$$

$$17.16. \quad \bar{F} = (x + y\sqrt{x^2 + y^2})\bar{i} + (y - x\sqrt{x^2 + y^2})\bar{j},$$

$$L: x^2 + y^2 = 1 \quad (y \geq 0), \quad M(1; 0), N(-1; 0).$$

$$17.17. \quad \bar{F} = x^2 y \bar{i} - xy^2 \bar{j},$$

$$L: x^2 + y^2 = 4 \quad (x \geq 0, y \geq 0), \quad M(2; 0), N(0; 2).$$

$$17.18. \quad \bar{F} = (x + y\sqrt{x^2 + y^2})\bar{i} + (y - x\sqrt{x^2 + y^2})\bar{j},$$

$$L: x^2 + y^2 = 16 \quad (x \geq 0, y \geq 0), \quad M(4; 0), N(0; 4) .$$

$$17.19. \quad \bar{F} = y^2 \bar{i} + x^2 \bar{j},$$

$$L: x^2 + y^2 = 9 \quad (x \geq 0, y \geq 0), \quad M(3; 0), N(0; 3) .$$

$$17.20. \quad \bar{F} = (x + y)^2 \bar{i} - (x^2 + y^2) \bar{j},$$

$$L - \text{відрізок прямої, } M(1; 0), N(0; 2) .$$

$$17.21. \quad \bar{F} = (x^2 + y^2) \bar{i} + y^2 \bar{j},$$

$$L - \text{відрізок прямої, } M(2; 0), N(0; 2) .$$

$$17.22. \quad \bar{F} = x^2 \bar{j},$$

$$L: x^2 + y^2 = 9 \quad (x \geq 0, y \geq 0), \quad M(3; 0), N(0; 3) .$$

$$17.23. \quad \bar{F} = (y^2 - y) \bar{i} + (2xy + x) \bar{j},$$

$$L: x^2 + y^2 = 9 \quad (y \geq 0), \quad M(3; 0), N(-3; 0)$$

$$17.24. \quad \bar{F} = xy \bar{i}, \quad L: y = \sin x, \quad M(\pi; 0), N(0; 0) .$$

$$17.25. \quad \bar{F} = (xy - y^2) \bar{i} + x \bar{j}, \quad L: y = 2x^2, \quad M(0; 0), N(1; 2) .$$

$$17.26. \quad \bar{F} = x \bar{i} + y \bar{j}, \quad L - \text{відрізок прямої, } M(1; 0), N(0; 3) .$$

$$17.27. \quad \bar{F} = (xy - x) \bar{i} + \frac{x^2}{2} \bar{j}, \quad L: y = 2\sqrt{x}, \quad M(0; 0), N(1; 2) .$$

$$17.28. \quad \bar{F} = -x \bar{i} + y \bar{j},$$

$$L: x^2 + \frac{y^2}{9} = 1 \quad (x \geq 0, y \geq 0), \quad M(1; 0), N(0; 3) .$$

$$17.29. \quad \bar{F} = -y \bar{i} + x \bar{j}, \quad L: y = x^3, \quad M(0; 0), N(2; 8) .$$

$$17.30. \quad \bar{F} = (x^2 - y^2) \bar{i} + (x^2 + y^2) \bar{j},$$

$$L: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad (y \geq 0), \quad M(3; 0), N(-3; 0) .$$

Задача 18. В пункті а) обчислити поверхневий інтеграл першого роду по поверхні σ , де σ - частина площини (P) , яка відтинається координатними площинами; в пункті б) обчислити поверхневий інтеграл другого роду.

$$18.1. \quad \text{а) } \iint_{\sigma} (2x + 3y + 2z) d\sigma, \quad (P): x + 3y + z = 3 ;$$

б) $\iint_{\sigma} (y^2 + z^2) dydz$, де σ - частина параболоїда

$x = 9 - y^2 - z^2$ (вектор нормалі $\vec{n}$ утворює гострий кут з віссю Ox), яка відтинається площиною $x = 0$.

18.2. а) $\iint_{\sigma} (2 + y - 7x + 9z) d\sigma$, $(P): 2x - y - 2z = -2$;

б) $\iint_{\sigma} z^2 dx dy$, де σ - зовнішня сторона поверхні еліпсоїда

$$x^2 + y^2 + 2z^2 = 2.$$

18.3. а) $\iint_{\sigma} (6x + y + 4z) d\sigma$, $(P): 3x + 3y + z = 3$;

б) $\iint_{\sigma} z dx dy + y dx dz + x dy dz$, де σ - зовнішня сторона поверхні куба, обмеженого площинами $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$.

18.4. а) $\iint_{\sigma} (x + 2y + 3z) d\sigma$, $(P): x + y + z = 2$;

б) $\iint_{\sigma} (z + 1) dx dy$, де σ - зовнішня сторона поверхні сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

18.5. а) $\iint_{\sigma} (3x - 2y + 6z) d\sigma$, $(P): 2x + y + 2z = 2$;

б) $\iint_{\sigma} yz dy dz + xz dx dz + xy dx dy$, де σ - верхня сторона частини площини $x + y + z = 4$, яка відтинається координатними площинами.

18.6. а) $\iint_{\sigma} (2x + 5y - z) d\sigma$, $(P): x + 2y + z = 2$;

б) $\iint_{\sigma} x^2 dy dz + y^2 dx dz + z^2 dx dy$, де σ - зовнішня сторона частини сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, що міститься у першому октанті.

$$18.7. \text{ а) } \iint_{\sigma} (5x - 8y - z) d\sigma, \quad (P) : 2x - 3y + z = 6 ;$$

б) $\iint_{\sigma} x dy dz + y dx dz + z dx dy$, де σ - зовнішня сторона поверхні сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

$$18.8. \text{ а) } \iint_{\sigma} (3y - x - z) d\sigma, \quad (P) : x - y + z = 2 ;$$

б) $\iint_{\sigma} xz dx dy + xy dy dz + yz dx dz$, де σ - верхня сторона частини площини $x + y + z = 1$, що відтинається координатними площинами.

$$18.9. \text{ а) } \iint_{\sigma} (3y - 2x - 2z) d\sigma, \quad (P) : 2x - y - 2z = -2 ;$$

б) $\iint_{\sigma} yz dx dy + xz dy dz + xy dx dz$, де σ - зовнішня сторона частини поверхні циліндра $x^2 + y^2 = 1$, що відтинається площинами $z = 0, z = 5$.

$$18.10. \text{ а) } \iint_{\sigma} (2x - 3y + z) d\sigma, \quad (P) : x + 2y + z = 2 ;$$

б) $\iint_{\sigma} y^2 z dx dy + xz dy dz + x^2 y dx dz$, де σ - частина поверхні параболоїда $z = x^2 + y^2$ (нормальний вектор $\vec{n}$ утворює тупий кут з віссю Oz), що вирізається циліндром $x^2 + y^2 = 1$.

$$18.11. \text{ а) } \iint_{\sigma} (5x + y - z) d\sigma, \quad (P) : x + 2y + 2z = 2 ;$$

б) $\iint_{\sigma} (x^2 + y^2) z dx dy$, де σ - зовнішня сторона нижньої половини сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

$$18.12. \text{ а) } \iint_{\sigma} (3x + 2y + 2z) d\sigma, \quad (P) : 3x + 2y + 2z = 6 ;$$

б) $\iint_{\sigma} x^2 dydz + z^2 dx dy$, де σ - частина поверхні конуса

$z^2 = x^2 + y^2$ (нормальний вектор $\vec{n}$ утворює тупий кут з віссю Oz), що лежить між площинами $z = 0$ і $z = 1$.

18.13. а) $\iint_{\sigma} (2z + 3y - z) d\sigma$, $(P) : 2x + y + z = 2$;

б) $\iint_{\sigma} (2y^2 - z) dx dy$, де σ - частина поверхні параболоїда

$z = x^2 + y^2$ (нормальний вектор $\vec{n}$ утворює тупий кут з віссю Oz), що відтинається площиною $z = 2$.

18.14. а) $\iint_{\sigma} (9x + 2y + z) d\sigma$, $(P) : 2x + y + z = 4$;

б) $\iint_{\sigma} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$, де σ - частина поверхні гіперболоїда

$x^2 + y^2 = z^2 + 1$ (нормальний вектор $\vec{n}$ утворює тупий кут з віссю Oz), що відтинається площинами $z = 0$ і $z = \sqrt{3}$.

18.15. а) $\iint_{\sigma} (3x + 8y + 8z) d\sigma$, $(P) : x + 4y + 2z = 8$;

б) $\iint_{\sigma} xy dy dz + yz dx dz + xz dx dy$, де σ - зовнішня сторона ча-

стини сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, що міститься у першому октанті.

18.16. а) $\iint_{\sigma} (4y - x + 4z) d\sigma$, $(P) : x - 2y + 2z = 2$;

б) $\iint_{\sigma} x^2 dy dz + z dx dy$, де σ - частина поверхні параболоїда

$z = x^2 + y^2$ (нормальний вектор $\vec{n}$ утворює тупий кут з віссю Oz), що відтинається площиною $z = 4$.

18.17. а) $\iint_{\sigma} (7x + y + 2z) d\sigma$, $(P) : 3x - 2y + 2z = 6$;

б) $\iint_{\sigma} x^2 dydz + y^2 dx dz - z dx dy$, де σ - частина поверхні конуса $z^2 = x^2 + y^2$ (нормальний вектор $\vec{n}$ утворює тупий кут з віссю Oz), що відтинається площинами $z = 0$ і $z = 3$.

18.18. а) $\iint_{\sigma} (2x + 3y + z) d\sigma$, $(P) : 2x + 3y + z = 6$;

б) $\iint_{\sigma} x^2 dydz - z^2 dx dz + z dx dy$, де σ - частина поверхні параболоїда $z = 3 - x^2 - y^2$ (нормальний вектор $\vec{n}$ утворює гострий кут з віссю Oz), що відтинається площиною $z = 0$.

18.19. а) $\iint_{\sigma} (4x - y + z) d\sigma$, $(P) : x - y + z = 2$;

б) $\iint_{\sigma} yz dydz - x^2 dx dz - y^2 dx dy$, де σ - частина поверхні конуса $x^2 + z^2 = y^2$ (нормальний вектор $\vec{n}$ утворює тупий кут з віссю Oy), що відтинається площинами $y = 0$ і $y = 1$.

18.20. а) $\iint_{\sigma} (6x - y + 8z) d\sigma$, $(P) : x + y + 2z = 2$;

б) $\iint_{\sigma} x^2 dydz + 2y^2 dx dz - z dx dy$, де σ - частина поверхні параболоїда $z = x^2 + y^2$ (нормальний вектор $\vec{n}$ утворює гострий кут з віссю Oz), що відтинається площиною $z = 1$.

18.21. а) $\iint_{\sigma} (4x - 4y - z) d\sigma$, $(P) : x + 2y + 2z = 4$;

б) $\iint_{\sigma} 2x dydz + (1 - z) dx dy$, де σ - внутрішня сторона частини циліндра $x^2 + y^2 = 4$, що відтинається площинами $z = 0$ і $z = 1$.

18.22. а) $\iint_{\sigma} (2x + 5y + z) d\sigma$, $(P) : x + y + 2z = 2$;

б) $\iint_{\sigma} 2xdydz - ydxdz + zdxdy$, де σ - зовнішня сторона замкненої поверхні, утвореної параболоїдом $3z = x^2 + y^2$ і півсферою $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

18.23. а) $\iint_{\sigma} (4x - y + 4z)d\sigma$, $(P) : 2x + 2y + z = 4$;

б) $\iint_{\sigma} 4xdydz + 2ydxdz - zdxdy$, де σ - зовнішня сторона поверхні сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

18.24. а) $\iint_{\sigma} (5x + 2y + 2z)d\sigma$, $(P) : x + 2y + z = 2$;

б) $\iint_{\sigma} (x + z)dydz + (z + y)dxdy$, де σ - зовнішня сторона поверхні циліндра $x^2 + y^2 = 1$, що відтинається площинами $z = 0$ і $z = 2$.

18.25. а) $\iint_{\sigma} (2x + 5y + 10z)d\sigma$, $(P) : 2x + y + 3z = 6$;

б) $\iint_{\sigma} 3xdydz - ydxdz - zdxdy$, де σ - частина поверхні параболоїда $9 - z = x^2 + y^2$ (нормальний вектор $\vec{n}$ утворює гострий кут з віссю Oz), що відтинається площиною $z = 0$.

18.26. а) $\iint_{\sigma} (2x + 15y + z)d\sigma$, $(P) : x + 2y + 2z = 2$;

б) $\iint_{\sigma} (y - x)dydz + (z - y)dxdz + (x - z)dxdy$,

де σ - внутрішня сторона замкненої поверхні, утвореної конусом $x^2 = y^2 + z^2$ і площиною $x = 1$.

18.27. а) $\iint_{\sigma} (3x + 10y - z)d\sigma$, $(P) : x + 3y + 2z = 6$;

$$\text{б) } \iint_{\sigma} 3x^2 dydz - y^2 dx dz - z dx dy, \quad \text{де } \sigma - \text{ частина поверхні}$$

параболоїда $1 - z = x^2 + y^2$ (нормальний вектор $\vec{n}$ утворює гострий кут з віссю Oz), що відтинається площиною $z = 0$.

$$\text{18.28. а) } \iint_{\sigma} (2x + 3y + z) d\sigma, \quad (P) : 2x + 2y + z = 2;$$

$$\text{б) } \iint_{\sigma} (1 + 2x^2) dydz + y^2 dx dz + z dx dy, \quad \text{де } \sigma - \text{ частина поверхні}$$

конуса $x^2 + y^2 = z^2$ (нормальний вектор $\vec{n}$ утворює тупий кут з віссю Oz), що відтинається площинами $z = 0$ і $z = 4$.

$$\text{18.29. а) } \iint_{\sigma} (5x - y + 5z) d\sigma, \quad (P) : 3x + 2y + z = 6;$$

$$\text{б) } \iint_{\sigma} x^2 dydz + z^2 dx dz + y dx dy, \quad \text{де } \sigma - \text{ частина поверхні}$$

параболоїда $4 - z = x^2 + y^2$ (нормальний вектор $\vec{n}$ утворює гострий кут з віссю Oz), що відтинається площиною $z = 0$.

$$\text{18.30. а) } \iint_{\sigma} (x + 3y + 2z) d\sigma, \quad (P) : 2x + y + 2z = 2;$$

$$\text{б) } \iint_{\sigma} (y^2 + z^2) dydz - y^2 dx dz + 2yz^2 dx dy,$$

де σ - частина поверхні конуса $x^2 + z^2 = y^2$ (нормальний вектор $\vec{n}$ утворює тупий кут з віссю Oy), що відтинається площинами $y = 0$ і $y = 1$.

Задача 19. Знайти площу:

19.1. частини поверхні конуса $z^2 = 2xy$, розташованої в першому октанті між площинами $x = 1, y = 2$.

19.2. частини поверхні сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, розташованої всередині циліндра $x^2 + y^2 = x$.

19.3. частини поверхні циліндра $x^2 + y^2 = x$, розташованої всередині сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

- 19.4. частини поверхні сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, вирізаної циліндром $x^2 + y^2 = 1$.
- 19.5. частини поверхні конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, розташованої всередині циліндра $x^2 + y^2 = 2x$.
- 19.6. частини поверхні параболоїда $x = 1 - y^2 - z^2$, вирізаної циліндром $y^2 + z^2 = 1$.
- 19.7. частини поверхні сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, вирізаної циліндром $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.
- 19.8. частини площини $z = x$, що міститься всередині циліндра $x^2 + y^2 = 4$.
- 19.9. частини поверхні циліндра $z = x^2$, вирізаної площинами $x + y = \sqrt{2}$, $x = 0$, $y = 0$.
- 19.10. частини поверхні циліндра $z^2 = 4x$, що міститься у першому октанті і вирізається циліндром $y^2 = 4x$ та площиною $x = 1$.
- 19.11. частини поверхні параболоїда $2y = x^2 + z^2$, вирізаної циліндром $x^2 + z^2 = 1$.
- 19.12. частини площини $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} = 6$, вирізаної координатними площинами.
- 19.13. частини поверхні конуса $2xy = z^2$, розташованої в першому октанті між площинами $x = 2$, $y = 1$.
- 19.14. частини поверхні сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, розташованої всередині циліндра $x^2 + y^2 = 2x$.
- 19.15. частини поверхні циліндра $x^2 + y^2 = 2x$, розташованої всередині сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
- 19.16. частини поверхні конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, що міститься всередині циліндра $x^2 + y^2 = 2y$.

- 19.17. частини поверхні параболоїда $y = 1 - x^2 - z^2$, вирізаної циліндром $x^2 + z^2 = 1$.
- 19.18. частини поверхні сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, вирізаної циліндром $4x^2 + y^2 = 4$.
- 19.19. частини площини $z = y$, що міститься всередині циліндра $x^2 + y^2 = 4$, вище площини $z = 0$.
- 19.20. частини поверхні циліндра $z = y^2$, вирізаної площинами $x + y = \sqrt{2}, x = 0, y = 0$.
- 19.21. частини поверхні параболоїда $2x = y^2 + z^2$, вирізаної циліндром $y^2 + z^2 = 1$.
- 19.22. частини поверхні сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, вирізаної циліндром $x^2 + z^2 = 4$.
- 19.23. частини площини $\frac{x}{2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{4} = 1$, вирізаної координатними площинами.
- 19.24. частини поверхні сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, розташованої всередині циліндра $x^2 + y^2 = 2y$.
- 19.25. частини поверхні циліндра $x^2 + y^2 = 2y$, розташованої всередині сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
- 19.26. частини поверхні параболоїда $z = 1 - x^2 - y^2$, вирізаної циліндром $x^2 + y^2 = 1$.
- 19.27. частини поверхні сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, вирізаної циліндром $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$.
- 19.28. частини площини $y = x$, що міститься всередині циліндра $x^2 + z^2 = 4$ ($y \geq 0$).
- 19.29. частини поверхні параболоїда $2z = x^2 + y^2$, вирізаної циліндром $x^2 + y^2 = 1$.

19.30. частини площини $2x + 3y + 6z = 6$, вирізаної координатними площинами.

Задача 20. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ через частину площини (P) , розташовану в першому октанті у напрямі вектора нормалі $\vec{n}$, який утворює гострий кут з віссю Oz .

20.1. $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $(P): x + y + z = 1$.

20.2. $\vec{a} = y\vec{j} + z\vec{k}$, $(P): x + y + z = 1$.

20.3. $\vec{a} = 2x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $(P): x + y + z = 1$.

20.4. $\vec{a} = x\vec{i} + 3y\vec{j} + 2z\vec{k}$, $(P): x + y + z = 1$.

20.5. $\vec{a} = 2x\vec{i} + 3y\vec{j}$, $(P): x + y + z = 1$.

20.6. $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $(P): \frac{x}{2} + y + z = 1$.

20.7. $\vec{a} = x\vec{i} + 2y\vec{j} + z\vec{k}$, $(P): \frac{x}{2} + y + z = 1$.

20.8. $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $(P): x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$.

20.9. $\vec{a} = y\vec{j} + 3z\vec{k}$, $(P): \frac{x}{2} + y + z = 1$.

20.10. $\vec{a} = 2x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $(P): x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$.

20.11. $\vec{a} = 2x\vec{i} + 3y\vec{j} + z\vec{k}$, $(P): \frac{x}{3} + y + \frac{z}{2} = 1$.

20.12. $\vec{a} = 3x\vec{i} + 2z\vec{k}$, $(P): x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$.

20.13. $\vec{a} = x\vec{i} + 3y\vec{j} - z\vec{k}$, $(P): \frac{x}{3} + y + \frac{z}{2} = 1$.

20.14. $\vec{a} = -2x\vec{i} + y\vec{j} + 4z\vec{k}$, $(P): \frac{x}{3} + y + \frac{z}{2} = 1$.

20.15. $\vec{a} = x\vec{i} - y\vec{j} + 6z\vec{k}$, $(P): \frac{x}{2} + y + \frac{y}{3} = 1$.

$$20.16. \vec{a} = 2x\vec{i} + 5y\vec{j} + 5z\vec{k}, \quad (P): \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + z = 1.$$

$$20.17. \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (P): 2x + \frac{y}{2} + z = 1.$$

$$20.18. \vec{a} = 2x\vec{i} + y\vec{j} - 2z\vec{k}, \quad (P): 2x + \frac{y}{2} + z = 1.$$

$$20.19. \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + 2z\vec{k}, \quad (P): 2x + \frac{y}{2} + z = 1.$$

$$20.20. \vec{a} = -x\vec{i} + y\vec{j} + 12z\vec{k}, \quad (P): 2x + \frac{y}{2} + z = 1.$$

$$20.21. \vec{a} = x\vec{i} + 3y\vec{j} + 8z\vec{k}, \quad (P): x + 2y + \frac{z}{2} = 1.$$

$$20.22. \vec{a} = x\vec{i} - y\vec{j} + 6z\vec{k}, \quad (P): x + 2y + \frac{z}{2} = 1.$$

$$20.23. \vec{a} = x\vec{i} + 2y\vec{j} + 5z\vec{k}, \quad (P): x + 2y + \frac{z}{2} = 1.$$

$$20.24. \vec{a} = x\vec{i} + 4y\vec{j} + 5z\vec{k}, \quad (P): x + 2y + \frac{z}{2} = 1.$$

$$20.25. \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (P): 2x + 3y + z = 1.$$

$$20.26. \vec{a} = 2x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (P): 2x + 3y + z = 1.$$

$$20.27. \vec{a} = 2x\vec{i} + 3y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (P): 2x + 3y + z = 1.$$

$$20.28. \vec{a} = 2x\vec{i} + 3y\vec{j} + 4z\vec{k}, \quad (P): 2x + 3y + z = 1.$$

$$20.29. \vec{a} = x\vec{i} + 9y\vec{j} + 8z\vec{k}, \quad (P): x + 2y + 3z = 1.$$

$$20.30. \vec{a} = 8x\vec{i} + 11y\vec{j} + 17z\vec{k}, \quad (P): x + 2y + 3z = 1.$$

Задача 21. Задані векторне поле $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ і площина $Ax + By + Cz + D = 0$ (P), яка разом з координатними площинами утворює піраміду V . Нехай σ - основа піраміди, яка належить площині (P); L - контур, який обмежує σ , $\vec{n}$ - зовнішня нормаль до σ . Обчислити:

а) циркуляцію векторного поля $\vec{a}$ вздовж замкненого контура L , застосовуючи формулу Стокса до контуру L і обмеженої ним поверхні σ з нормаллю $\vec{n}$;

б) потік векторного поля $\vec{a}$ через повну поверхню піраміди V в напрямі зовнішньої нормалі до її поверхні, застосовуючи формулу Остроградського.

$$21.1. \vec{a} = 3x\vec{i} + (y+z)\vec{j} + (x-z)\vec{k}, \quad (P): x+3y+z=3.$$

$$21.2. \vec{a} = (3x-1)\vec{i} + (y-x+z)\vec{j} + 4z\vec{k}, \quad (P): 2x-y-2z=2.$$

$$21.3. \vec{a} = x\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (y+z)\vec{k}, \quad (P): 3x+3y+z=3.$$

$$21.4. \vec{a} = (x+z)\vec{i} + (z-x)\vec{j} + (x+2y+z)\vec{k}, \quad (P): x+y+z=2.$$

$$21.5. \vec{a} = (y+2z)\vec{i} + (x+2z)\vec{j} + (x-2z)\vec{k}, \\ (P): 2x+y+2z=2.$$

$$21.6. \vec{a} = (x+z)\vec{i} + 2y\vec{j} + (x+y-z)\vec{k}, \quad (P): x+2y+z=2.$$

$$21.7. \vec{a} = (3x-y)\vec{i} + (2y+z)\vec{j} + (2z-x)\vec{k}, \\ (P): 2x-3y+z=6.$$

$$21.8. \vec{a} = (2y+z)\vec{i} + (z-y)\vec{j} - 2z\vec{k}, \quad (P): x+3y+z=3.$$

$$21.9. \vec{a} = (x+y)\vec{i} + 3y\vec{j} + (y-z)\vec{k}, \quad (P): 2x-y-2z=-2.$$

$$21.10. \vec{a} = (x+y-z)\vec{i} - 2y\vec{j} + (x+2z)\vec{k}, \quad (P): x+2y+z=2.$$

$$21.11. \vec{a} = (y-z)\vec{i} + (2x+y)\vec{j} + z\vec{k}, \quad (P): 2x+y+z=2.$$

$$21.12. \vec{a} = x\vec{i} + (y-2z)\vec{j} + (2x-y+2z)\vec{k}, \quad (P): x+2y+2z=2.$$

$$21.13. \vec{a} = (x+2z)\vec{i} + (y-3z)\vec{j} + z\vec{k}, \quad (P): 3x+2y+2z=6.$$

$$21.14. \vec{a} = 4x\vec{i} + (x-y-z)\vec{j} + (3y+2z)\vec{k}, \quad (P): 2x+y+z=4.$$

$$21.15. \vec{a} = (2z-x)\vec{i} + (x+2y)\vec{j} + 3z\vec{k}, \quad (P): x+4y+2z=8.$$

$$21.16. \vec{a} = 4z\vec{i} + (x-y-z)\vec{j} + (3y+z)\vec{k}, \quad (P): x-2y+2z=2.$$

$$21.17. \vec{a} = (x+y)\vec{i} + (y+z)\vec{j} + (z+x)\vec{k}, \quad (P): 3x-2y+2z=6.$$

$$21.18. \vec{a} = (x+y+z)\vec{i} + 2z\vec{j} + (y-7z)\vec{k}, \quad (P): 2x+3y+z=6.$$

$$21.19. \vec{a} = (2x-z)\vec{i} + (x+2z)\vec{j} + (x+2z)\vec{k}, \quad (P): x-y+z=2.$$

$$21.20. \vec{a} = (2y-z)\vec{i} + (x+y)\vec{j} + x\vec{k}, \quad (P): x+2y+2z=4.$$

$$21.21. \quad \vec{a} = (2z - x)\vec{i} + (x - y)\vec{j} + (3x + z)\vec{k}, \quad (P): x + y + 2z = 2.$$

$$21.22. \quad \vec{a} = (x + z)\vec{i} + (x + 3y)\vec{j} + y\vec{k}, \quad (P): x + y + 2z = 2.$$

$$21.23. \quad \vec{a} = (x + z)\vec{i} + z\vec{j} + (2x - y)\vec{k}, \quad (P): 2x + 2y + z = 4.$$

$$21.24. \quad \vec{a} = (3x + y)\vec{i} + (x + z)\vec{j} + y\vec{k}, \quad (P): x + 2y + z = 2.$$

$$21.25. \quad \vec{a} = (y + z)\vec{i} + (2x - z)\vec{j} + (y + 3z)\vec{k}, \\ (P): 2x + y + 3z = 6.$$

$$21.26. \quad \vec{a} = (y + z)\vec{i} + (x + 6y)\vec{j} + y\vec{k}, \quad (P): x + 2y + 2z = 2.$$

$$21.27. \quad \vec{a} = (2y - z)\vec{i} + (x + 2y)\vec{j} + y\vec{k}, \quad (P): x + 3y + 2z = 6.$$

$$21.28. \quad \vec{a} = (y + z)\vec{i} + x\vec{j} + (y - 2z)\vec{k}, \quad (P): 2x + 2y + z = 2.$$

$$21.29. \quad \vec{a} = (x + z)\vec{i} + z\vec{j} + (2x - y)\vec{k}, \quad (P): 3x + 2y + z = 6.$$

$$21.30. \quad \vec{a} = (2z - x)\vec{i} + (x + 2y)\vec{j} + 3z\vec{k}, \quad (P): x + 4y + 2z = 8.$$

Задача 22. Перевірити, чи є векторне поле $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ потенціальним і соленоїдним. У випадку потенціальності поля знайти його потенціал.

$$22.1. \quad \vec{a} = (x^2 - 2yz)\vec{i} + (y^2 - 2xz)\vec{j} + (z^2 - 2xy)\vec{k}.$$

$$22.2. \quad \vec{a} = (x^2 + yz)\vec{i} + (2xy + z)\vec{j} + (x^2 - y^2)\vec{k}.$$

$$22.3. \quad \vec{a} = (yz - 2x)\vec{i} + (xz + 2y)\vec{j} + xy\vec{k}.$$

$$22.4. \quad \vec{a} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}.$$

22.5.

$$\vec{a} = (x^2 - y^2 - 2xz)\vec{i} + (y^2 - z^2 - 2xy)\vec{j} + (z^2 - x^2 - 2zy)\vec{k}.$$

$$22.6. \quad \vec{a} = (x^2 - y^2)\vec{i} + (y^2 - z^2)\vec{j} + (z^2 - x^2)\vec{k}.$$

$$22.7. \quad \vec{a} = (2xz + y)\vec{i} + (x - 2yz)\vec{j} + (x^2 - y^2)\vec{k}.$$

$$22.8. \quad \vec{a} = (9x + 5yz)\vec{i} + (9y + 5xz)\vec{j} + (9z + 5xy)\vec{k}.$$

$$22.9. \quad \vec{a} = (6x + 7yz)\vec{i} + (-6y + 7xz)\vec{j} + (6z + 7xy)\vec{k}.$$

$$22.10. \quad \vec{a} = (3x - yz)\vec{i} + (3y - xz)\vec{j} + (3z - xy)\vec{k}.$$

$$22.11. \quad \vec{a} = (8x - 5yz)\vec{i} + (8y - 5xz)\vec{j} + (8z - 5xy)\vec{k}.$$

$$22.12. \quad \vec{a} = (x + 2yz)\vec{i} + (y + 2xz)\vec{j} + (z + 2xy)\vec{k}.$$

- 22.13. $\vec{a} = (5x + 4yz)\vec{i} + (5y + 4xz)\vec{j} + (5z + 4xy)\vec{k}$.
- 22.14. $\vec{a} = (10x - 3yz)\vec{i} + (10y - 3xz)\vec{j} + (10z - 3xy)\vec{k}$.
- 22.15. $\vec{a} = (7x - 2yz)\vec{i} + (7y - 2xz)\vec{j} + (7z - 2xy)\vec{k}$.
- 22.16. $\vec{a} = (12x + yz)\vec{i} + (-12y + xz)\vec{j} + (4 + xy)\vec{k}$.
- 22.17. $\vec{a} = (-3x - 2yz)\vec{i} + (3y - 2xz)\vec{j} - 2xy\vec{k}$.
- 22.18. $\vec{a} = (4x - 7yz)\vec{i} + (4y - 7xz)\vec{j} + (4z - 7xy)\vec{k}$.
- 22.19. $\vec{a} = 8yz\vec{i} + (3y + 8xz)\vec{j} + (-3z + 8xy)\vec{k}$.
- 22.20. $\vec{a} = (20x + yz)\vec{i} + xz\vec{j} + (-20z + xy)\vec{k}$.
- 22.21. $\vec{a} = (x^2 - 6yz)\vec{i} + (y^2 - 6xz)\vec{j} + (z^2 - 6xy)\vec{k}$.
- 22.22. $\vec{a} = (5x^2 - 6yz)\vec{i} - (5y^2 + 6xz)\vec{j} - 6xz\vec{k}$.
- 22.23. $\vec{a} = (7x^2 - 3yz)\vec{i} + 3xz\vec{j} + (-7z + 3xz)\vec{k}$.
- 22.24. $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$.
- 22.25. $\vec{a} = (x + z)\vec{i} + (y + z)\vec{j} + (x + y)\vec{k}$.
- 22.26. $\vec{a} = 2xy\vec{i} + (x^2 + z^2)\vec{j} + 2yz\vec{k}$.
- 22.27. $\vec{a} = (x + y - 2)\vec{i} + (x + y)\vec{j} - 2z\vec{k}$.
- 22.28. $\vec{a} = (x + y + 5z)\vec{i} + (x + 3y + z)\vec{j} + (5x + y)\vec{k}$.
- 22.29. $\vec{a} = x\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$.
- 22.30. $\vec{a} = 2yz\vec{i} + 2xz\vec{j} + (2xy + z)\vec{k}$.

11 Теорія функцій комплексної змінної.

Операційне числення

Теоретичні питання

1. Комплексні числа. Різні форми представлення комплексних чисел. Дії над комплексними числами в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах.
2. Поняття функції комплексної змінної. Границя і неперервність функції комплексної змінної.
3. Похідна функції комплексної змінної. Правила диференціювання. Геометричний зміст модуля і аргумента похідної.
4. Умови Коші-Рімана. Аналітичні функції. Гармонічні функції.
5. Функції z^n (n - ціле), e^z .
6. Функції $\sin z$, $\cos z$, tgz , $ctgz$, shz , chz , thz , $cthz$.
7. Деякі багатозначні функції комплексної змінної: Lnz , $Arc \sin z$, $Arc \cos z$, $Arctgz$, $Arcctgz$, $Arshz$, $Archz$, $Arthz$, $\sqrt[n]{z}$ (n - натуральне).
8. Інтеграл від функції комплексної змінної: означення, властивості, обчислення.
9. Теорема Коші для простого і складного контура.
10. Інтегральна формула Коші.
11. Ряд Тейлора функції комплексної змінної. Розклад в ряд за степенями z функцій e^z , $\sin z$, $\cos z$, shz , chz , $\frac{1}{1-z}$.
12. Ряд Лорана функції комплексної змінної.
13. Ізольовані особливі точки функцій, їх класифікація.
14. Лишки функцій, їх обчислення. Основна теорема про лишки.
15. Застосування лишків до обчислення деяких невластних інтегралів і інтегралів від тригонометричних функцій дійсної змінної.

16. Перетворення Лапласа, його властивості. Зображення одиничної функції, функцій $\sin t$, $\cos t$.
17. Теорема подібності і зміщення. Зображення функцій $\sin at$, $\cos at$, $e^{-\alpha t}$, $e^{-\alpha t} \sin at$, $e^{-\alpha t} \cos at$.
18. Диференціювання зображення. Зображення функцій t^n , $t \sin at$, $t \cos at$, $te^{-\alpha t}$.
19. Диференціювання оригіналу. Застосування операційного числення до розв'язування диференціальних рівнянь та їх систем.
20. Теорема про згортку.
21. Інтеграл Дюамеля.

Розрахункові завдання

Задача 1. Знайти множину точок на площині комплексної змінної z , яка визначається заданими умовами. Зробити рисунок.

- | | |
|---|--|
| 1.1. а) $0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1$; | б) $\operatorname{Re} \frac{1}{\bar{z}} = 1$. |
| 1.2. а) $2 \leq z - i < 4$; | б) $z^2 + \bar{z}^2 = 1$. |
| 1.3. а) $ z + 1 \leq 1$; | б) $ z - 3 \operatorname{Im} z = 6$. |
| 1.4. а) $ z - 1 < z - i $; | б) $\operatorname{Re} \frac{1}{z + 1} = \frac{1}{8}$. |
| 1.5. а) $ z - 5 - z + 5 > 8$; | б) $ z - i - z + i = 2$. |
| 1.6. а) $4 \leq z - 1 + z + 1 \leq 8$; | б) $ z - 1 + 2i = 1$. |
| 1.7. а) $1 < \operatorname{Re} z \leq 2$; | б) $\left \frac{z - 1}{z + 2} \right = 1$. |
| 1.8. а) $0 < \operatorname{Re}(iz) < 1$; | б) $\operatorname{Re} \frac{1}{z} = 4$. |
| 1.9. а) $1 - \operatorname{Re} z < z $; | б) $\operatorname{Im} \frac{z - 1}{z + 1} = 0$ |

- 1.10. a) $\frac{\pi}{4} \leq \arg(z-i) < \frac{\pi}{2}$; б) $\operatorname{Im} \frac{1}{\bar{z}} = 1$.
- 1.11. a) $\operatorname{Re}(z+2) \geq |z|$; б) $|z+i| + |z-i| = 4$.
- 1.12. a) $\operatorname{Re} z(1-i) < 1$; б) $|z+2i| = 2$.
- 1.13. a) $0 < \arg(z+i) < \frac{\pi}{2}$; б) $\operatorname{Re} \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{4}$.
- 1.14. a) $\operatorname{Re} \frac{1}{\bar{z}} \leq \frac{1}{16}$; б) $|z-2| = |1-2\bar{z}|$.
- 1.15. a) $\operatorname{Im} \bar{z}^2 < 1$; б) $|z-2| + |z+2| = 5$.
- 1.16. a) $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z \leq 2$; б) $\operatorname{Re}(1+z) = |z|$.
- 1.17. a) $|z| - \operatorname{Re} z \leq 0$; б) $z^2 + \bar{z}^2 = 1$.
- 1.18. a) $\left| \frac{z-1}{z+1} \right| \leq 1$; б) $|z| = \operatorname{Re} z + 1$.
- 1.19. a) $\operatorname{Im} \frac{1}{z} < -\frac{1}{2}$; б) $2z\bar{z} + (2+i)z + (2-i)\bar{z} = 2$.
- 1.20. a) $\operatorname{Im} \bar{z} \leq 4$; б) $\operatorname{Re} z^2 = 2$.
- 1.21. a) $0 < \operatorname{Re}(z+1) < 1$; б) $\operatorname{Im} \bar{z}^2 = 4$.
- 1.22. a) $\operatorname{Re} \bar{z} \geq 2$; б) $\operatorname{Im} z^2 = 2$.
- 1.23. a) $|z| > 2 + \operatorname{Im} z$; б) $\operatorname{Re} \bar{z}^2 = 1$.
- 1.24. a) $0 \leq \arg(z-1) \leq \frac{\pi}{2}$; б) $\operatorname{Re} \frac{z-1}{z+1} = 0$.
- 1.25. a) $z^2 + \bar{z}^2 \leq 4$; б) $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$.
- 1.26. a) $\operatorname{Re} \frac{1}{z} \geq 4$; б) $|z-1| = \operatorname{Re} z$.
- 1.27. a) $\operatorname{Re} z^2 \geq 4$; б) $|z| = 1 + \operatorname{Im} z$.
- 1.28. a) $0 < \operatorname{Re} i(z-1) < 1$; б) $\operatorname{Im} \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$.
- 1.29. a) $1 \leq |z+1+i| < 2$; б) $\operatorname{Im} \frac{1}{z-1} = \frac{1}{4}$.
- 1.30. a) $|z+1| < |z-1|$; б) $3|z| - \operatorname{Re} z = 12$.

Задача 2. Подати функцію $w = f(z)$, де $z = x + iy$, у виді $w = u(x, y) + iv(x, y)$ і, користуючись умовами Коші-Рімана, перевірити, чи є вона аналітичною. Якщо так, то знайти значення її похідної в точці

2.1. $w = z^3 + 3z - i$, $z_0 = 1 + i$.

2.2. $w = e^{iz-1}$, $z_0 = \pi - i$.

2.3. $w = (1 + 2z - z^2)i$, $z_0 = 1$.

2.4. $w = z^3 + z$, $z_0 = \frac{2}{3}i$.

2.5. $w = z^2 - 2z$, $z_0 = i$.

2.6. $w = e^{1-2z}$, $z_0 = \frac{\pi}{3}i$.

2.7. $w = \frac{1}{z}$, $z_0 = 1 + i$.

2.8. $w = e^{1-2iz}$, $z_0 = \frac{\pi}{6}$.

2.9. $w = z^2 + z + 2$, $z_0 = \frac{1}{2} + \sqrt{3}i$.

2.10. $w = z^2 + iz$, $z_0 = 1 + i$.

2.11. $w = (z-1)^2$, $z_0 = 2 + i$.

2.12. $w = e^{-z^2}$, $z_0 = i$.

2.13. $w = 2z^2 - iz$, $z_0 = 1 - i$.

2.14. $w = ze^z$, $z_0 = -1 + \pi i$.

2.15. $w = (z + 2i)^2$, $z_0 = 1 - i$.

2.16. $w = i(1 - z^2) - 2z$, $z_0 = 1$.

2.17. $w = z^3 + 2z + 1$, $z_0 = -2 - i$.

2.18. $w = z^2 + 3iz$, $z_0 = \frac{1}{2} - i$.

2.19. $w = z^3 + 5iz + i$, $z_0 = 1 + i$.

$$2.20. \quad w = \frac{z}{z+1}, \quad z_0 = 2i.$$

$$2.21. \quad w = \frac{i}{z}, \quad z_0 = 3i.$$

$$2.22. \quad w = \frac{1}{z+2}, \quad z_0 = -1+i.$$

$$2.23. \quad w = e^{iz^2}, \quad z_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}i.$$

$$2.24. \quad w = e^{-iz}, \quad z_0 = 0.$$

$$2.25. \quad w = (iz)^3, \quad z_0 = -1+i.$$

$$2.26. \quad w = z^3 - 2iz + 5, \quad z_0 = i.$$

$$2.27. \quad w = ze^{-2z}, \quad z_0 = \pi i.$$

$$2.28. \quad w = 2z^2 + iz + 2, \quad z_0 = 2-i.$$

$$2.29. \quad w = z - e^{-z}, \quad z_0 = \pi i.$$

$$2.30. \quad w = i(z^2 + 3z) - z, \quad z_0 = 1 - \frac{1}{2}i.$$

Задача 3. Відновити аналітичну в околі точки z_0 функцію $f(z)$ за відомою дійсною $u(x, y)$ або уявною $v(x, y)$ частиною і значенням $f(z_0)$.

$$3.1. \quad u = -2xy + 2x + y + 1, \quad f(1+i) = 2+i.$$

$$3.2. \quad v = 4xy + x + y + 3, \quad f(1-i) = 4-i.$$

$$3.3. \quad u = x^2 - y^2 - 2xy + x + 3, \quad f(-1+i) = 4+i.$$

$$3.4. \quad v = e^{-y} \sin x + y, \quad f(0) = 1.$$

$$3.5. \quad u = -x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 1, \quad f(-1-i) = -5(1+i).$$

$$3.6. \quad v = 2x^2 - 2y^2 + x + y + 1, \quad f(2+i) = -8+10i.$$

$$3.7. \quad u = e^{1+2y} \cos 2x, \quad f\left(\frac{\pi}{2} + i\right) = -e^3.$$

$$3.8. \quad u = x^3 - 3xy^2 + 3x, \quad f(i) = 2i.$$

$$3.9. \quad v = -x^2 + y^2 + 4y + 5, \quad f(2i) = 17i.$$

$$3.10. \quad v = 2x^2 - 2y^2 + 2, \quad f(5+i) = -17 + 50i.$$

$$3.11. \quad u = 1 - e^x \sin y, \quad f(0) = 1 + i.$$

$$3.12. \quad v = 4xy + x^2 - y^2 + 1, \quad f(i) = -1.$$

$$3.13. \quad u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad f(-i) = i.$$

$$3.14. \quad v = 2xy - 2y, \quad f(1) = 0.$$

$$3.15. \quad u = x^2 - y^2 - 3y, \quad f(2i) = -10.$$

$$3.16. \quad u = x^2 - y^2 + x - 2, \quad f(1) = 0.$$

$$3.17. \quad v = 2xy + 2x + 3, \quad f(1+i) = 2 + 7i.$$

$$3.18. \quad v = x^2 - y^2 + 2y + 5, \quad f(i) = 4 + 6i.$$

$$3.19. \quad u = 3x^2 - 3y^2 - 4y + 5, \quad f(1) = 8 + 4i.$$

$$3.20. \quad v = -x^2 + y^2 + 4y + 6, \quad f(2i) = 18i.$$

$$3.21. \quad u = x + \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad f(i) = 0.$$

$$3.22. \quad v = 5x^2 - 5y^2 + x + y + 1, \quad f(1) = 7i.$$

$$3.23. \quad u = 2x^2 - 2y^2 - y + 4, \quad f(-i) = 3 + 2i.$$

$$3.24. \quad v = 3x^2 - 3y^2 + x + 2y, \quad f(1) = 6 + 4i.$$

$$3.25. \quad u = e^{2-y} \cos x, \quad f(i) = e.$$

$$3.26. \quad v = -x^2 + y^2 + x + 3, \quad f(-i) = 2 + 4i.$$

$$3.27. \quad u = 2xy - 3y + 5, \quad f(1+i) = 4 + 3i.$$

$$3.28. \quad v = 2x^2 - 2y^2 + 3y, \quad f(2i) = 4 - 2i.$$

$$3.29. \quad u = x^2 - y^2 + 2xy + 2x - y + 4, \quad f(i) = 2 + 6i.$$

$$3.30. \quad v = x^2 - y^2 + x + y + 2, \quad f(-1) = 2 + 2i.$$

Задача 4. Обчислити інтеграл від функції комплексної змінної вздовж заданої кривої.

$$4.1. \quad \text{а) } \int_L \operatorname{Im} z^3 dz, \quad L - \text{відрізок прямої, що з'єднує точки}$$

$$z_0 = 0, \quad z_1 = 2 + i;$$

$$\text{б)} \int_L (z^2 + z \bar{z}) dz, \quad L : \{ |z| = 1, \quad 0 \leq \arg z \leq \pi \}.$$

$$4.2. \text{ а)} \int_L \bar{z}^2 dz, \quad L : \{ y = x^2, \quad 0 \leq x \leq 1 \};$$

$$\text{б)} \int_L z \operatorname{Im} z^2 dz, \quad L : \{ |z| = 1, \quad -\pi \leq \arg z \leq 0 \}.$$

$$4.3. \text{ а)} \int_L |z| dz, \quad L - \text{відрізок прямої, що з'єднує точки}$$

$$z_0 = 0, \quad z_1 = 2 - i;$$

$$\text{б)} \int_L z \operatorname{Re} z dz, \quad L : \left\{ |z| = 3, \quad 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

$$4.4. \text{ а)} \int_L e^{|z|^2} dz, \quad L - \text{відрізок прямої, що з'єднує точки}$$

$$z_0 = 0, \quad z_1 = 1 + i;$$

$$\text{б)} \int_L z \bar{z} dz, \quad L : \{ |z| = 2, \quad -\pi \leq \arg z \leq 0 \}.$$

$$4.5. \text{ а)} \int_L z \operatorname{Im} z dz, \quad L : \{ y = x^2, \quad 0 \leq x \leq 1 \}$$

$$\text{б)} \int_L (3 + i - \bar{z}) dz, \quad L : \{ |z| = 2, \quad -\pi \leq \arg z \leq 0 \}.$$

$$4.6. \text{ а)} \int_L (1 + i - 2\bar{z}) dz, \quad L : \{ y = x^2, \quad 0 \leq x \leq 1 \};$$

$$\text{б)} \int_L (z^2 + 2\bar{z}) dz, \quad L : \left\{ |z| = 1, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

$$4.7. \text{ а)} \int_L \bar{z} \operatorname{Im} z dz, \quad L - \text{відрізок прямої, що з'єднує точки}$$

$$z_0 = 0, \quad z_1 = 2 + 4i;$$

$$\text{б)} \int_L z |z| dz, \quad L : \left\{ |z| = 4, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

$$4.8. \text{ а)} \int_L \operatorname{Im}(1 + \bar{z}) dz, \quad L - \text{відрізок прямої, що з'єднує точки}$$

$$z_0 = 1, \quad z_1 = 2i;$$

$$\text{б) } \int_L z \operatorname{Re} z^2 dz, \quad L: \{|z| = 1, 0 \leq \arg z \leq \pi\}.$$

$$4.9. \text{ а) } \int_L (z^2 + 5z + 1) dz, \quad L - \text{ відрізок прямої, що з'єднує}$$

$$\text{точки } z_0 = 1, \quad z_1 = 1 - i;$$

$$\text{б) } \int_L |z| dz, \quad L: \left\{ |z| = \sqrt{2}, \quad \frac{3\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{5\pi}{4} \right\}.$$

$$4.10. \text{ а) } \int_L (z^2 + 1) dz, \quad L - \text{ відрізок прямої, що з'єднує точки}$$

$$z_0 = -1 + i, \quad z_1 = i;$$

$$\text{б) } \int_L \operatorname{Re} \frac{\bar{z}}{z} dz, \quad L: \{|z| = 1, 0 \leq \arg z \leq \pi\}.$$

$$4.11. \text{ а) } \int_L e^{\bar{z}} dz, \quad L - \text{ відрізок прямої, що з'єднує точки}$$

$$z_0 = 0, \quad z_1 = \pi - \pi i;$$

$$\text{б) } \int_L (z^2 - z \bar{z}) dz, \quad L: \{|z| = 4, 0 \leq \arg z \leq \pi\}.$$

$$4.12. \text{ а) } \int_L \operatorname{Re}(1 + \bar{z}) dz, \quad L - \text{ відрізок прямої, що з'єднує}$$

$$\text{точки } z_0 = 1, \quad z_1 = i;$$

$$\text{б) } \int_L (i - \bar{z}) dz, \quad L: \{|z| = 2, -\pi \leq \arg z \leq 0\}.$$

$$4.13. \text{ а) } \int_L \bar{z} dz, \quad L - \text{ відрізок прямої, що з'єднує точки}$$

$$z_0 = 0, \quad z_1 = 1 + i;$$

$$\text{б) } \int_L (2z + 1) \bar{z} dz, \quad L: \{|z| = 1, 0 \leq \arg z \leq \pi\}.$$

$$4.14. \text{ а) } \int_L \operatorname{Im}(i + \bar{z}) dz, \quad L - \text{ відрізок прямої, що з'єднує точки}$$

$$z_0 = 0, \quad z_1 = 2 - 2i;$$

$$\text{б) } \int_L |z| \bar{z} dz, \quad L: \{|z| = 1, 0 \leq \arg z \leq \pi\}.$$

$$4.15. \text{ a) } \int_L (3z^2 + 2z) dz, \quad L : \{y = x^2, \quad 0 \leq x \leq 1\};$$

$$\text{б) } \int_L \frac{dz}{\bar{z}}, \quad L : \left\{ |z| = 2, \quad 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

$$4.16. \text{ a) } \int_L \bar{z} \operatorname{Re} z \, dz, \quad L : \{x = y^2, \quad 0 \leq y \leq 2\};$$

$$\text{б) } \int_L |z|^3 dz, \quad L : \left\{ |z| = \sqrt{3}, \quad 0 \leq \arg z \leq \pi \right\}.$$

$$4.17. \text{ a) } \int_L \operatorname{Im} z^2 dz, \quad L - \text{ відрізок прямої, що з'єднує точки}$$

$$z_0 = 0, \quad z_1 = -3 + 3i;$$

$$\text{б) } \int_L (\bar{z}^2 + 2z) dz, \quad L : \left\{ |z| = 1, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

$$4.18. \text{ a) } \int_L z \operatorname{Re} z \, dz, \quad L - \text{ відрізок прямої, що з'єднує точки}$$

$$z_0 = 0, \quad z_1 = 2 + 2i;$$

$$\text{б) } \int_L (i\bar{z}^2 + 2z) dz, \quad L : \left\{ |z| = 2, \quad 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

$$4.19. \text{ a) } \int_L \operatorname{Im} z \, dz, \quad L : \{y = 2x^2, \quad 0 \leq x \leq 1\};$$

$$\text{б) } \int_L \frac{z}{\bar{z}} dz, \quad L : \left\{ |z| = 3, \quad 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

$$4.20. \text{ a) } \int_L \operatorname{Re} z^2 dz, \quad L - \text{ відрізок прямої, що з'єднує точки}$$

$$z_0 = 0, \quad z_1 = 6 + 2i;$$

$$\text{б) } \int_L (iz^2 - 2\bar{z}) dz, \quad L : \left\{ |z| = 2, \quad 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

$$4.21. \text{ a) } \int_L (i - 2\bar{z}) dz, \quad L : \{y = x^2, \quad 0 \leq x \leq 1\};$$

$$\text{б) } \int_L \operatorname{Im} \frac{z}{\bar{z}} dz, \quad L : \left\{ |z| = 1, \quad -\pi \leq \arg z \leq 0 \right\}.$$

4.22. а) $\int_L (1 + 2\bar{z})dz$, L – відрізок прямої, що з'єднує точки

$$z_0 = 0, \quad z_1 = 2 + i;$$

б) $\int_L \bar{z} \operatorname{Re}(2z + 1)dz$, $L : \{|z| = 2, 0 \leq \arg z \leq \pi\}$.

4.23. а) $\int_L \operatorname{Re}(z + z^2)dz$, $L : \{y = 2x^2, 0 \leq x \leq 1\}$;

б) $\int_L \frac{dz}{|z|}$, $L : \{|z| = 3, 0 \leq \arg z \leq \pi\}$.

4.24. а) $\int_L (z + \operatorname{Re} z)dz$, $L : \{x = 2y^2, 0 \leq y \leq 1\}$;

б) $\int_L \frac{\bar{z} + 1}{z} dz$, $L : \{|z| = 5, -\pi \leq \arg z \leq 0\}$.

4.25. а) $\int_L (z - \operatorname{Im} z)dz$, $L : \{x = y^2, 0 \leq y \leq 1\}$;

б) $\int_L (\bar{z}^2 - z)dz$, $L : \{|z| = 1, 0 \leq \arg z \leq \pi\}$.

4.26. а) $\int_L (\bar{z}^2 - 3z)dz$, L – відрізок прямої, що з'єднує

$$\text{точки } z_0 = 0, \quad z_1 = 3 + 6i;$$

б) $\int_L \bar{z} \operatorname{Re}(2z + 1)dz$, $L : \{|z| = 2, 0 \leq \arg z \leq \pi\}$.

4.27. а) $\int_L (2\bar{z} - 3i)dz$, $L : \{x = y^2, 0 \leq y \leq 1\}$;

б) $\int_L |z| \operatorname{Re} z^2 dz$, $L : \{|z| = 2, 0 \leq \arg z \leq \pi\}$.

4.28. а) $\int_L z \operatorname{Im} z^2 dz$, L – відрізок прямої, що з'єднує точки

$$z_0 = 0, \quad z_1 = 3 + 3i;$$

б) $\int_L \frac{dz}{z}$, $L : \{|z| = 3, -\pi \leq \arg z \leq 0\}$.

4.29. а) $\int_L (z^2 + 2\bar{z})dz$, $L : \{y = 2x^2, 0 \leq x \leq 1\}$;

$$\text{б)} \int_L (z+1) \operatorname{Im} z \, dz, \quad L: \{|z|=4, \ 0 \leq \arg z \leq \pi\}.$$

$$4.30. \text{ а)} \int_L (\bar{z}^2 + 4z) dz, \quad L: \{y = x^2, \ 0 \leq x \leq 2\};$$

$$\text{б)} \int_L (\bar{z}+1) \operatorname{Re} z \, dz, \quad L: \left\{ |z|=3, \ -\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Задача 5. Обчислити інтеграли, користуючись інтегральною формулою Коші, а також наслідком з неї – формулою для n -ї похідної аналітичної функції.

$$5.1. \text{ а)} \int_{|z-i|=2} \frac{e^{iz}}{z^2 + 2z + 2} dz; \quad \text{б)} \int_{|z|=3} \frac{z \cos \pi z}{z^2 - z - 2} dz;$$

$$\text{в)} \int_{|z-4|=1} \frac{3z-2}{(z-4)^3(z+5)} dz.$$

$$5.2. \text{ а)} \int_{|z+2i|=2} \frac{\sin z}{z^2 - 2z + 5} dz; \quad \text{б)} \int_{|z|=6} \frac{e^{iz}}{z^2 + 25} dz;$$

$$\text{в)} \int_{|z|=2} \frac{z+5}{(z-1)^3(3z+7)} dz.$$

$$5.3. \text{ а)} \int_{|z+i|=2} \frac{\cos z}{z^2 - 2z + 2} dz; \quad \text{б)} \int_{|z|=4} \frac{ze^z}{z^2 - 2z - 3} dz;$$

$$\text{в)} \int_{|z+3|=1} \frac{z}{(z+3)^3(2z+1)} dz.$$

$$5.4. \text{ а)} \int_{|z-i|=2,5} \frac{ch z}{z^2 + 4z + 5} dz; \quad \text{б)} \int_{|z|=3} \frac{3z-1}{z^2 - 4} dz;$$

$$\text{в)} \int_{|z|=2} \frac{e^{-iz^2}}{(z-1)^3} dz.$$

$$5.5. \text{ а)} \int_{|z+i|=2,5} \frac{\sin iz}{z^2 - 4z + 5} dz; \quad \text{б)} \int_{|z|=2} \frac{2z + e^{z^2}}{z^2 + 1} dz;$$

$$\text{B)} \int_{|z-3|=1} \frac{2z+3}{(z-3)^3(z+2)} dz.$$

$$5.6. \text{ a)} \int_{|z-3i|=2} \frac{ze^z}{z^2+2z+10} dz; \quad \text{б)} \int_{|z|=4} \frac{z^2-4z}{z^2+5z+6} dz;$$

$$\text{B)} \int_{|z|=0,5} \frac{1}{z^3} \cos \frac{\pi}{z+1} dz.$$

$$5.7. \text{ a)} \int_{|z+3i|=3} \frac{chiz}{z^2+4z+13} dz; \quad \text{б)} \int_{|z|=2} \frac{dz}{(z^2-1)(z+3)};$$

$$\text{B)} \int_{|z+2|=1} \frac{e^{-2z}}{(z+2)^3(2z-3)} dz.$$

$$5.8. \text{ a)} \int_{|z+3i|=2} \frac{z^3}{z^2-2z+10} dz; \quad \text{б)} \int_{|z|=4} \frac{e^{-iz}}{z^2+9} dz;$$

$$\text{B)} \int_{|z|=1} \frac{\cos^2 z}{z^3} dz.$$

$$5.9. \text{ a)} \int_{|z-i|=3,5} \frac{e^{z^2}}{z^2+6z+10} dz; \quad \text{б)} \int_{|z|=4} \frac{\cos \pi z}{z^2-3z} dz;$$

$$\text{B)} \int_{|z-3i|=1} \frac{dz}{(z^2+9)^3} dz.$$

$$5.10. \text{ a)} \int_{|z+i|=2} \frac{shiz}{z^2+2z+2} dz; \quad \text{б)} \int_{|z|=7} \frac{z^2+2z}{z^2+36} dz;$$

$$\text{B)} \int_{|z|=2} \frac{e^{2z}}{(z-1)^3(z+3)} dz.$$

$$5.11. \text{ a)} \int_{|z-i|=2,5} \frac{\cos 2z}{z^2-4z+5} dz; \quad \text{б)} \int_{|z|=4} \frac{e^{z^2}}{z^2-z-6} dz;$$

$$\text{B)} \int_{|z+2|=1} \frac{z^2+3}{z(z+2)^3} dz.$$

$$5.12. \text{ a) } \int_{|z+3i|=2} \frac{\sin z}{z^2 + 2z + 10} dz; \quad \text{б) } \int_{|z|=5} \frac{e^z}{z^2 + 16} dz;$$

$$\text{B) } \int_{|z-3|=1} \frac{3z+5}{(z-3)^3(z+2)} dz.$$

$$5.13. \text{ a) } \int_{|z+i|=2,5} \frac{\sin 2z}{z^2 + 4z + 5} dz; \quad \text{б) } \int_{|z|=5} \frac{3z+2}{z^2 - 5z + 4} dz;$$

$$\text{B) } \int_{|z|=2} \frac{e^{iz}}{(z+1)^3(z-3)} dz.$$

$$5.14. \text{ a) } \int_{|z-3i|=2} \frac{ch 2z}{z^2 - 2z + 10} dz; \quad \text{б) } \int_{|z|=6} \frac{2z+3}{z^2 + 25} dz;$$

$$\text{B) } \int_{|z-1|=0,5} \frac{e^z}{z(z-1)^3} dz.$$

$$5.15. \text{ a) } \int_{|z+i|=3,5} \frac{\sin iz}{z^2 - 6z + 10} dz; \quad \text{б) } \int_{|z|=2} \frac{e^{-z^2}}{z^2 - z} dz;$$

$$\text{B) } \int_{|z+2|=1} \frac{z+3}{(z+2)^3(2z-1)} dz.$$

$$5.16. \text{ a) } \int_{|z-3i|=3} \frac{e^{-z}}{z^2 - 4z + 13} dz; \quad \text{б) } \int_{|z|=4} \frac{ch z}{z^2 + 9} dz;$$

$$\text{B) } \int_{|z|=3} \frac{4z+3}{(z-2)^3(z+4)} dz.$$

$$5.17. \text{ a) } \int_{|z+i|=3,5} \frac{\cos \pi z}{z^2 + 6z + 10} dz; \quad \text{б) } \int_{|z|=6} \frac{sh z}{z^2 - 4z - 5} dz;$$

$$\text{B) } \int_{|z+1|=0,5} \frac{3z+1}{z(z+1)^3} dz.$$

$$5.18. \text{ a) } \int_{|z-4i|=3} \frac{e^{-iz}}{z^2 - 4z + 20} dz; \quad \text{б) } \int_{|z|=4} \frac{\sin z}{z^2 + z - 6} dz;$$

$$\text{B)} \int_{|z+i|=1} \frac{dz}{(z^2+1)^3}.$$

$$5.19. \text{ a)} \int_{|z+4i|=4} \frac{z^2+2iz}{z^2-6z+25} dz; \quad \text{б)} \int_{|z|=2} \frac{sh 2z}{z^2+1} dz;$$

$$\text{B)} \int_{|z|=2} \frac{e^{-z^2}}{(z+i)^3} dz.$$

$$5.20. \text{ a)} \int_{|z+4i|=3} \frac{\sin \pi z}{z^2+4z+20} dz; \quad \text{б)} \int_{|z|=4} \frac{ch z}{z^2-3z} dz;$$

$$\text{B)} \int_{|z-2i|=1} \frac{dz}{(z^2+4)^3}.$$

$$5.21. \text{ a)} \int_{|z-4i|=4} \frac{e^{iz^2}}{z^2+6z+25} dz; \quad \text{б)} \int_{|z|=4} \frac{5z-3}{z^2-9} dz;$$

$$\text{B)} \int_{|z-1|=2} \frac{z-2\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^3} dz.$$

$$5.22. \text{ a)} \int_{|z+3i|=3} \frac{sh 2z}{z^2-4z+13} dz, \quad \text{б)} \int_{|z|=5} \frac{z+\sin z^2}{z^2+16} dz,$$

$$\text{B)} \int_{|z+2|=1} \frac{2z+1}{(z+2)^3(3z+1)} dz.$$

$$5.23. \text{ a)} \int_{|z-3i|=3} \frac{\sin iz}{z^2+4z+13} dz; \quad \text{б)} \int_{|z|=4} \frac{e^{-iz}}{z^2+2z-3} dz;$$

$$\text{B)} \int_{|z-2|=1} \frac{3z+4}{z(z-2)^3} dz.$$

$$5.24. \text{ a)} \int_{|z+4i|=3} \frac{ch 2z}{z^2-4z+20} dz; \quad \text{б)} \int_{|z|=7} \frac{3z+2}{z^2+36} dz;$$

$$\text{B)} \int_{|z|=2} \frac{e^{z^2}}{(z-i)^3} dz.$$

$$5.25. \text{ а) } \int_{|z-4i|=4} \frac{\cos(z+\pi i)}{z^2-6z+25} dz; \quad \text{б) } \int_{|z|=5} \frac{z^2+5z}{z^2-3z-4} dz;$$

$$\text{в) } \int_{|z|=2} \frac{e^{-z^2}}{(z-1)^3} dz.$$

$$5.26. \text{ а) } \int_{|z-4i|=2} \frac{\cos^2 z}{z^2-2z+17} dz; \quad \text{б) } \int_{|z|=3} \frac{e^{iz}}{z^2+2z} dz;$$

$$\text{в) } \int_{|z+1|=1} \frac{5z+4}{(z+1)^3(z-2)} dz.$$

$$5.27. \text{ а) } \int_{|z+4i|=4} \frac{e^z+1}{z^2+6z+25} dz; \quad \text{б) } \int_{|z|=3} \frac{\sin z}{z^2+4} dz;$$

$$\text{в) } \int_{|z-1|=1} \frac{z-2}{(z-1)^3(2z+3)} dz.$$

$$5.28. \text{ а) } \int_{|z+4i|=2} \frac{\operatorname{sh} 3z}{z^2+2z+17} dz; \quad \text{б) } \int_{|z|=4} \frac{2z+1}{z^2-5z+6} dz;$$

$$\text{в) } \int_{|z|=2} \frac{e^{-iz}}{(z+1)^3(z-3)} dz.$$

$$5.29. \text{ а) } \int_{|z-i|=3,5} \frac{e^{-iz^2}}{z^2-6z+10} dz; \quad \text{б) } \int_{|z|=4} \frac{dz}{(z^2+9)(z+5)};$$

$$\text{в) } \int_{|z|=1} \frac{ch 2z}{z^3(z-2)} dz.$$

$$5.30. \text{ а) } \int_{|z-4i|=2} \frac{\sin^2 z}{z^2+2z+17} dz; \quad \text{б) } \int_{|z|=3} \frac{e^z}{z^2-3z+2} dz;$$

$$\text{в) } \int_{|z|=1} \frac{2z+3}{z^3(z+3)} dz.$$

Задача 6. В пункті а) знайти всі розклади функції $f(z)$ в ряд за степенями z , а також розкласти її в ряд Лорана в околі

її особливих точок; в пункті б) знайти всі лоранівські розклади функції $f(z)$ за степенями $z - z_0$; в пункті в) розкласти функцію $f(z)$ в ряд Лорана в околі точки z_0 і визначити область збіжності цього ряду.

$$6.1. \text{ а) } f(z) = \frac{-2z-14}{z^2+2z-8}; \quad \text{б) } f(z) = \frac{z}{z^2+1}, \quad z_0 = -3+2i;$$

$$\text{в) } f(z) = \sin \frac{z}{1-z}, \quad z_0 = 1.$$

$$6.2. \text{ а) } f(z) = \frac{3z-4}{z^2-z-6}; \quad \text{б) } f(z) = \frac{z-1}{z^2+z}, \quad z_0 = -2-3i;$$

$$\text{в) } f(z) = e^{\frac{z}{z-3}}, \quad z_0 = 3.$$

$$6.3. \text{ а) } f(z) = \frac{3z+3}{z^2+4z-5}; \quad \text{б) } f(z) = \frac{2z}{z^2-4}, \quad z_0 = -1+3i;$$

$$\text{в) } f(z) = z \cos \frac{2z}{z-1}, \quad z_0 = 1.$$

$$6.4. \text{ а) } f(z) = \frac{z-11}{z^2-2z-3}; \quad \text{б) } f(z) = \frac{z+1}{z^2-z}, \quad z_0 = 1+2i;$$

$$\text{в) } f(z) = ze^{\frac{1}{1-z}}, \quad z_0 = 1.$$

$$6.5. \text{ а) } f(z) = \frac{-2}{z^2+6z+8}; \quad \text{б) } f(z) = \frac{2z}{z^2+4}, \quad z_0 = -1-3i;$$

$$\text{в) } f(z) = z \operatorname{sh} \frac{1}{z^2}, \quad z_0 = 0.$$

$$6.6. \text{ а) } f(z) = \frac{-z-3}{z^2-4z+3}; \quad \text{б) } f(z) = \frac{z+3}{z^2-1}, \quad z_0 = 2+i;$$

$$\text{в) } f(z) = z \operatorname{ch} \frac{1}{z-1}, \quad z_0 = 1.$$

$$6.7. \text{ а) } f(z) = \frac{2z-2}{z^2+6z+5}; \quad \text{б) } f(z) = \frac{z+6}{z^2-4}, \quad z_0 = -2-i;$$

$$\text{в) } f(z) = \sin \frac{2z-1}{z+1}, \quad z_0 = -1.$$

$$6.8. \text{ a) } f(z) = \frac{3z-1}{z^2+z-6} ; \quad \text{б) } f(z) = \frac{z+1}{z^2-z}, \quad z_0 = 2-3i ;$$

$$\text{B) } f(z) = \cos \frac{z-3}{z+1}, \quad z_0 = -1 .$$

$$6.9. \text{ a) } f(z) = \frac{-z+1}{z^2-7z+12} ; \quad \text{б) } f(z) = \frac{2z}{z^2+4}, \quad z_0 = -3+2i ;$$

$$\text{B) } f(z) = z e^{\frac{z^2+1}{z^2}}, \quad z_0 = 0 .$$

$$6.10. \text{ a) } f(z) = \frac{z+9}{z^2-3z-4} ; \quad \text{б) } f(z) = \frac{z+3}{z^2-1}, \quad z_0 = 3-i ;$$

$$\text{B) } f(z) = sh \frac{z+2}{z+1}, \quad z_0 = -1 .$$

$$6.11. \text{ a) } f(z) = \frac{2z+14}{z^2-2z-15} ; \quad \text{б) } f(z) = \frac{3z-2}{z^2-4}, \quad z_0 = -2+3i ;$$

$$\text{B) } f(z) = \cos \frac{1-z^2}{z^2}, \quad z_0 = 0 .$$

$$6.12. \text{ a) } f(z) = \frac{z+10}{z^2+5z+4} ; \quad \text{б) } f(z) = \frac{z+1}{z^2-z}, \quad z_0 = -3-2i ;$$

$$\text{B) } f(z) = ch \frac{3z^2-1}{z^2}, \quad z_0 = 0 .$$

$$6.13. \text{ a) } f(z) = \frac{5z-19}{z^2-7z+10} ; \quad \text{б) } f(z) = \frac{2z}{z^2+4}, \quad z_0 = 2+3i ;$$

$$\text{B) } f(z) = z e^{\frac{1}{(2-z)^3}}, \quad z_0 = 2 .$$

$$6.14. \text{ a) } f(z) = \frac{5z-13}{z^2-z-12} ; \quad \text{б) } f(z) = \frac{z+3}{z^2-1}, \quad z_0 = -2-3i ;$$

$$\text{B) } f(z) = sh \frac{2z}{z-4}, \quad z_0 = 4 .$$

$$6.15. \text{ a) } f(z) = \frac{10}{z^2-3z-4} ; \quad \text{б) } f(z) = \frac{z+6}{z^2-4}, \quad z_0 = -1+2i ;$$

$$\text{B) } f(z) = \cos \frac{1-2z}{z-1}, \quad z_0 = 1 .$$

$$6.16. \text{ a) } f(z) = \frac{z-9}{z^2+3z-10} ; \quad \text{б) } f(z) = \frac{z+1}{z^2-z}, \quad z_0 = -2+i ;$$

$$\text{B) } f(z) = ch \frac{2z-3}{z-1}, \quad z_0 = 1 .$$

$$6.17. \text{ a) } f(z) = \frac{-z-7}{z^2+z-2} ; \quad \text{б) } f(z) = \frac{2z}{z^2+4}, \quad z_0 = 3+2i ;$$

$$\text{B) } f(z) = e^{\frac{3z+2}{z-2}}, \quad z_0 = 2 .$$

$$6.18. \text{ a) } f(z) = \frac{5z+11}{z^2+4z+3} ; \quad \text{б) } f(z) = \frac{z+3}{z^2-1}, \quad z_0 = -2-2i ;$$

$$\text{B) } f(z) = \cos \frac{z+1}{z+2}, \quad z_0 = -2 .$$

$$6.19. \text{ a) } f(z) = \frac{z+2}{z^2-6z+8} ; \quad \text{б) } f(z) = \frac{3z-4}{z^2-2z}, \quad z_0 = -1+2i ;$$

$$\text{B) } f(z) = \sin \frac{2z^2+1}{z^2}, \quad z_0 = 0 .$$

$$6.20. \text{ a) } f(z) = \frac{3z-3}{z^2+z-20} ; \quad \text{б) } f(z) = \frac{z-1}{z^2+z}, \quad z_0 = 1-3i ;$$

$$\text{B) } f(z) = sh \frac{3z-1}{z+1}, \quad z_0 = -1 .$$

$$6.21. \text{ a) } f(z) = \frac{-2z-14}{z^2+2z-3} ; \quad \text{б) } f(z) = \frac{2z}{z^2+4}, \quad z_0 = -1+3i ;$$

$$\text{B) } f(z) = e^{\frac{1+2z}{1-z}}, \quad z_0 = 1 .$$

$$6.22. \text{ a) } f(z) = \frac{5z-4}{z^2-3z-10} ; \quad \text{б) } f(z) = \frac{z}{z^2+1}, \quad z_0 = 2+i ;$$

$$\text{B) } f(z) = ch \frac{z-1}{z+2}, \quad z_0 = -2 .$$

$$6.23. \text{ a) } f(z) = \frac{-3z-11}{z^2+7z+12} ; \quad \text{б) } f(z) = \frac{3z-4}{z^2-2z}, \quad z_0 = 1-i ;$$

$$\text{B) } f(z) = \cos \frac{3z+2}{z-1}, \quad z_0 = 1 .$$

$$6.24. \text{ a) } f(z) = \frac{z+2}{z^2-3z+2} ; \quad \text{б) } f(z) = \frac{z-1}{z^2+z}, \quad z_0 = 2-i ;$$

$$\text{в) } f(z) = \sin \frac{2z+1}{2-z}, \quad z_0 = 2 .$$

$$6.25. \text{ a) } f(z) = \frac{3z-2}{z^2+z-12} ; \quad \text{б) } f(z) = \frac{2z}{z^2+4}, \quad z_0 = 2+2i ;$$

$$\text{в) } f(z) = sh \frac{z^2+2}{z^2}, \quad z_0 = 0 .$$

$$6.26. \text{ a) } f(z) = \frac{2z+3}{z^2+5z+6} ; \quad \text{б) } f(z) = \frac{z}{z^2+1}, \quad z_0 = 1-2i ;$$

$$\text{в) } f(z) = e^{\frac{1-z}{1+z}}, \quad z_0 = -1 .$$

$$6.27. \text{ a) } f(z) = \frac{z-23}{z^2-4z-5} ; \quad \text{б) } f(z) = \frac{z+1}{z^2-2z}, \quad z_0 = 3-i ;$$

$$\text{в) } f(z) = z ch \frac{3z}{z-2}, \quad z_0 = 2 .$$

$$6.28. \text{ a) } f(z) = \frac{-z+10}{z^2-2z-8} ; \quad \text{б) } f(z) = \frac{z-1}{z^2+z}, \quad z_0 = -1+2i ;$$

$$\text{в) } f(z) = \sin \frac{2-z}{z+1}, \quad z_0 = -1 .$$

$$6.29. \text{ a) } f(z) = \frac{4z+1}{z^2-z-2} ; \quad \text{б) } f(z) = \frac{3z-2}{z^2-4}, \quad z_0 = -3+2i ;$$

$$\text{в) } f(z) = z e^{\frac{z}{z-1}}, \quad z_0 = 1 .$$

$$6.30. \text{ a) } f(z) = \frac{7z-13}{z^2-5z+4} ; \quad \text{б) } f(z) = \frac{z}{z^2+1}, \quad z_0 = -3+i ;$$

$$\text{в) } f(z) = \cos \frac{2z+3}{z-1}, \quad z_0 = 1 .$$

Задача 7. Обчислити інтеграли за допомогою лишків.

$$7.1. \text{ a) } \int_{|z|=3} \frac{2z^2 - 1}{(z-1)^2(z+2)} dz ; \quad \text{б) } \int_{|z|=2} \frac{e^z}{z(z-1)^3} dz ;$$

$$\text{в) } \int_{|z|=1} \frac{chz - 1}{z^5} dz .$$

$$7.2. \text{ a) } \int_{|z|=2} \frac{\sin 2z}{(z-1)^2(z+1)} dz ; \quad \text{б) } \int_{|z|=2} \frac{3z^2 - 2z + 1}{z^3(z+1)} dz ;$$

$$\text{в) } \int_{|z|=1} \frac{1 - e^{z^2}}{z^7} dz .$$

$$7.3. \text{ a) } \int_{|z|=3} \frac{e^{iz}}{(z-1)^2(z-2)} dz ; \quad \text{б) } \int_{|z|=3} \frac{z^2 + 2}{(z-1)^3(z+2)} dz ;$$

$$\text{в) } \int_{|z|=1} z^4 sh \frac{1}{z} dz .$$

$$7.4. \text{ a) } \int_{|z|=3} \frac{\cos iz}{(z+2)^2(z-1)} dz ; \quad \text{б) } \int_{|z|=2} \frac{1 - 2z^2}{z(z+1)^3} dz ;$$

$$\text{в) } \int_{|z|=1} \frac{z - sh z}{z^4} dz .$$

$$7.5. \text{ a) } \int_{|z|=2} \frac{e^{iz^2}}{(z+1)^2(z-1)} dz ; \quad \text{б) } \int_{|z|=4} \frac{z^2 + 2z + 3}{z^3(z-3)} dz ;$$

$$\text{в) } \int_{|z|=1} \frac{1 - \cos z^2}{z^7} dz .$$

$$7.6. \text{ a) } \int_{|z|=4} \frac{z^2 + 1}{(z-3)^2(z-1)} dz ; \quad \text{б) } \int_{|z|=3} \frac{3 + \sin z}{(z-2)^3(z+1)} dz ;$$

$$\text{в) } \int_{|z|=1} \frac{e^{2z} - 1}{z^4} dz .$$

$$7.7. \text{ a) } \int_{|z|=4} \frac{ch 2z}{(z-1)^2(z+3)} dz ;$$

$$\text{б) } \int_{|z|=3} \frac{3z^2 - 4z + 2}{(z+1)^3(z+2)} dz ;$$

$$\text{B) } \int_{|z|=1} z^4 e^{\frac{1}{z}} dz .$$

$$7.8. \text{ a) } \int_{|z|=4} \frac{sh z}{(z-3)(z+1)^2} dz ;$$

$$\text{б) } \int_{|z|=3} \frac{5-2z-z^2}{(z-1)^3(z-2)} dz ;$$

$$\text{B) } \int_{|z|=1} \frac{1-e^{iz}}{z^4} dz .$$

$$7.9. \text{ a) } \int_{|z|=3} \frac{sh iz}{(z-1)(z+2)^2} dz ;$$

$$\text{б) } \int_{|z|=4} \frac{z^2 + 2z + 4}{(z-3)^3(z+1)} dz ;$$

$$\text{B) } \int_{|z|=1} \frac{1-ch z}{z^4} dz .$$

$$7.10. \text{ a) } \int_{|z|=4} \frac{2z^2 + 3}{(z+2)^2(z-3)} dz ;$$

$$\text{б) } \int_{|z|=3} \frac{\cos 2z}{z^3(z+2)} dz ;$$

$$\text{B) } \int_{|z|=1} z^3 e^{-\frac{2}{z}} dz .$$

$$7.11. \text{ a) } \int_{|z|=4} \frac{e^{2iz}}{(z-2)^2(z+3)} dz ;$$

$$\text{б) } \int_{|z|=4} \frac{1-3z-2z^2}{(z-3)(z+1)^3} dz ;$$

$$\text{B) } \int_{|z|=1} \frac{sh 2z - z}{z^4} dz .$$

$$7.12. \text{ a) } \int_{|z|=2} \frac{\sin iz}{(z-1)(z+1)^2} dz ;$$

$$\text{б) } \int_{|z|=3} \frac{2z^2 - 3z + 4}{z^3(z-2)} dz ;$$

$$\text{B) } \int_{|z|=1} \frac{e^{z^2} - 1}{z^5} dz .$$

$$7.13. \text{ a) } \int_{|z|=4} \frac{chiz}{(z-2)(z+3)^2} dz; \quad \text{б) } \int_{|z|=4} \frac{1-3z^2}{(z+3)^3(z-1)} dz;$$

$$\text{в) } \int_{|z|=1} z^4 \sin \frac{2}{z} dz.$$

$$7.14. \text{ a) } \int_{|z|=4} \frac{1-3z^2}{(z-3)^2(z+1)} dz; \quad \text{б) } \int_{|z|=3} \frac{e^{2z}}{z^3(z-2)} dz;$$

$$\text{в) } \int_{|z|=1} z^3 \cos \frac{1}{z} dz.$$

$$7.15. \text{ a) } \int_{|z|=3} \frac{shz}{z^2(z-2)} dz; \quad \text{б) } \int_{|z|=2} \frac{z}{(z-1)^3(z+1)(z+3)} dz;$$

$$\text{в) } \int_{|z|=1} z^4 e^{\frac{i}{z}} dz.$$

$$7.16. \text{ a) } \int_{|z|=3} \frac{e^z}{(z-2)^2(z+1)} dz; \quad \text{б) } \int_{|z|=3} \frac{2z+4}{(z+1)^3(z-2)(z+4)} dz;$$

$$\text{в) } \int_{|z|=1} \frac{z - \sin z}{z^4} dz.$$

$$7.17. \text{ a) } \int_{|z|=3} \frac{\cos 3z}{(z-2)^2(z-1)} dz; \quad \text{б) } \int_{|z|=4} \frac{2z^2-3z+5}{(z-3)^3 z} dz;$$

$$\text{в) } \int_{|z|=1} z^6 \sin \frac{1}{z} dz.$$

$$7.18. \text{ a) } \int_{|z|=4} \frac{2z^2+1}{(z-3)^2(z-2)} dz; \quad \text{б) } \int_{|z|=2} \frac{shz}{(z-1)(z+1)^3} dz;$$

$$\text{в) } \int_{|z|=1} \frac{1-e^{-z^2}}{z^5} dz.$$

$$7.19. \text{ a) } \int_{|z|=2} \frac{chz}{(z-1)(z+1)^2} dz;$$

$$\text{б) } \int_{|z|=3} \frac{z+1}{z^3(z-2)(z-4)} dz;$$

$$\text{B) } \int_{|z|=1} z^5 e^{\frac{1}{z}} dz.$$

$$7.20. \text{ a) } \int_{|z|=2} \frac{\cos z}{(z-1)^2(z+1)} dz;$$

$$\text{б) } \int_{|z|=4} \frac{8+2z-z^2}{(z-2)^3(z+3)} dz;$$

$$\text{B) } \int_{|z|=1} \frac{e^{iz^2}-1}{z^5} dz.$$

$$7.21. \text{ a) } \int_{|z|=3} \frac{\sin z}{(z-1)^2(z+2)} dz;$$

$$\text{б) } \int_{|z|=4} \frac{5z^2+z+2}{(z+2)^3(z-3)} dz;$$

$$\text{B) } \int_{|z|=1} \frac{ch2z-1}{z^3} dz.$$

$$7.22. \text{ a) } \int_{|z|=4} \frac{2z^2+3z-1}{(z+2)^2(z-3)} dz;$$

$$\text{б) } \int_{|z|=3} \frac{\sin 2z}{(z+2)(z+1)^3} dz;$$

$$\text{B) } \int_{|z|=1} z^3 e^{\frac{i}{z^2}} dz.$$

$$7.23. \text{ a) } \int_{|z|=3} \frac{e^{2z}}{(z-1)^2(z-2)} dz; \quad \text{б) } \int_{|z|=4} \frac{2z+3}{(z-1)^3(z-3)(z+5)} dz;$$

$$\text{B) } \int_{|z|=1} z^5 sh \frac{i}{z^2} dz.$$

$$7.24. \text{ a) } \int_{|z|=2} \frac{\cos 3z}{z^2(z-1)} dz;$$

$$\text{б) } \int_{|z|=3} \frac{e^{3z}}{(z-2)^3(z+1)} dz;$$

$$\text{B) } \int_{|z|=1} z^3 ch \frac{2}{z} dz.$$

$$7.25. \text{ a) } \int_{|z|=4} \frac{2 + \cos z}{z^2(z - \pi)} dz ;$$

$$\text{б) } \int_{|z|=4} \frac{4z^2 + 3}{(z - 3)^3(z - 1)} dz ;$$

$$\text{в) } \int_{|z|=1} \frac{e^{2iz} - 1}{z^3} dz .$$

$$7.26. \text{ a) } \int_{|z|=2} \frac{ch 2z}{z(z + 1)^2} dz ;$$

$$\text{б) } \int_{|z|=4} \frac{2z^2 - 3}{(z + 2)^3(z + 3)} dz ;$$

$$\text{в) } \int_{|z|=1} z^3 \sin^2 \frac{1}{z} dz .$$

$$7.27. \text{ a) } \int_{|z|=3} \frac{\sin^2 z}{(z - 1)^2(z + 2)} dz ;$$

$$\text{б) } \int_{|z|=3} \frac{3z + 1}{z(z + 2)^3(z - 4)} dz ;$$

$$\text{в) } \int_{|z|=1} z^5 e^{\frac{2}{z^3}} dz .$$

$$7.28. \text{ a) } \int_{|z|=3} \frac{e^{z^2} - 1}{(z - 1)^2(z + 2)} dz ;$$

$$\text{б) } \int_{|z|=4} \frac{5 - z^2}{(z - 3)^3(z - 1)} dz ;$$

$$\text{в) } \int_{|z|=1} z^3 ch \frac{1}{z^2} dz .$$

$$7.29. \text{ a) } \int_{|z|=4} \frac{3z^2 - 2z + 1}{z(z - 3)^2} dz ;$$

$$\text{б) } \int_{|z|=4} \frac{sh 2z}{(z + 3)(z + 1)^3} dz ;$$

$$\text{в) } \int_{|z|=1} z^3 \cos^2 \frac{2}{z} dz .$$

$$7.30. \text{ a) } \int_{|z|=3} \frac{e^{-z}}{(z - 2)^2(z + 2)} dz ;$$

$$\text{б) } \int_{|z|=4} \frac{2z^2 + 5}{z(z - 3)^3} dz ;$$

$$\text{в) } \int_{|z|=1} \frac{3z - sh 3z}{z^4} dz .$$

Задача 8. Обчислити інтеграли, застосувавши лишки.

8.1. а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^2 + 1}{(x^2 + 4)(x^2 + 9)} dx$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(3x - 1)\cos 2x}{x^2 + 25} dx$;

в) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{4 + \sqrt{7} \sin x}$.

8.2. а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4x^2 - 1}{(x^2 + 4)^2} dx$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin 3x}{x^2 - 4x + 5} dx$;

в) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3 - \sqrt{5} \cos x}$.

8.3. а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 - 6x + 10)^2} dx$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2 - 2x + 10} dx$;

в) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 - 3 \sin x}$.

8.4. а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^2 + 3x}{(x^2 + 4)(x^2 + 16)} dx$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin 4x}{x^2 + 4} dx$;

в) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 + 2\sqrt{6} \cos x}$.

8.5. а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{(x^2 + 4)^2} dx$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 6x + 10} dx$;

в) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3 + 2\sqrt{2} \sin x}$.

8.6. а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2 + 4x + 8)^2} dx$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2 + 2x + 5} dx$;

в) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 - 4 \cos x}$.

$$8.7. \text{ a) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+16)} dx; \quad \text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+2)\cos x}{x^2-4x+13} dx;$$

$$\text{в) } \int_0^{2\pi} \frac{dx}{6-3\sqrt{3}\sin x}.$$

$$8.8. \text{ a) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3x-1}{(x^2+9)^2} dx; \quad \text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(2-x)\sin x}{x^2+9} dx;$$

$$\text{в) } \int_0^{2\pi} \frac{dx}{4+2\sqrt{3}\cos x}.$$

$$8.9. \text{ a) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3-x^2}{(x^2-4x+13)^2} dx; \quad \text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 3x}{x^2+9} dx;$$

$$\text{в) } \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\sqrt{3}\sin x}.$$

$$8.10. \text{ a) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{5-2x}{(x^2+1)(x^2+16)} dx; \quad \text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(2x-1)\sin x}{x^2-4x+5} dx;$$

$$\text{в) } \int_0^{2\pi} \frac{dx}{6-4\sqrt{2}\cos x}.$$

$$8.11. \text{ a) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+16)^2} dx; \quad \text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 4x}{x^2+4x+5} dx;$$

$$\text{в) } \int_0^{2\pi} \frac{dx}{4-2\sqrt{3}\sin x}.$$

$$8.12. \text{ a) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x+3}{(x^2-6x+18)^2} dx; \quad \text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin 2x}{x^2+16} dx;$$

$$\text{в) } \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\sqrt{3}\cos x}.$$

$$8.13. \text{ a) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-2x+4}{(x^2+1)^2(x^2+4)} dx; \quad \text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2+16} dx;$$

$$\text{B)} \int_0^{2\pi} \frac{dx}{3 + \sqrt{5} \sin x}.$$

$$\mathbf{8.14.} \text{ a)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 9)^2};$$

$$\text{б)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-2)\sin 2x}{x^2 + 2x + 5} dx;$$

$$\text{B)} \int_0^{2\pi} \frac{dx}{4 - \sqrt{15} \cos x}.$$

$$\mathbf{8.15.} \text{ a)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{(x^2 + 2x + 5)^2} dx;$$

$$\text{б)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(3-2x)\cos x}{x^2 + 9} dx;$$

$$\text{B)} \int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 - 4 \sin x}.$$

$$\mathbf{8.16.} \text{ a)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 9)(x^2 + 16)};$$

$$\text{б)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(2x+1)\cos 2x}{x^2 + 2x + 10} dx;$$

$$\text{B)} \int_0^{2\pi} \frac{dx}{6 + 4\sqrt{2} \sin x}.$$

$$\mathbf{8.17.} \text{ a)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - 3x + 4}{(x^2 + 4)^2} dx;$$

$$\text{б)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(2x-3)\sin 2x}{x^2 + 4} dx;$$

$$\text{B)} \int_0^{2\pi} \frac{dx}{3 + 2\sqrt{2} \cos x}.$$

$$\mathbf{8.18.} \text{ a)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^2 - 3}{(x^2 + 2x + 5)^2} dx;$$

$$\text{б)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos 2x}{x^2 - 2x + 2} dx;$$

$$\text{B)} \int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 - 2\sqrt{6} \sin x}.$$

$$\mathbf{8.19.} \text{ a)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3 - x^2}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx;$$

$$\text{б)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 3x}{x^2 - 4x + 5} dx;$$

$$\text{B)} \int_0^{2\pi} \frac{dx}{7 - 2\sqrt{10} \cos x}.$$

$$8.20. \text{ a) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3-2x^2}{(x^2+9)^2} dx;$$

$$\text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 3x}{x^2+25} dx;$$

$$\text{B) } \int_0^{2\pi} \frac{dx}{5+4\sin x}.$$

$$8.21. \text{ a) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-6x+10)^2};$$

$$\text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin 2x}{x^2+2x+5} dx;$$

$$\text{B) } \int_0^{2\pi} \frac{dx}{5+3\cos x}.$$

$$8.22. \text{ a) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x-7}{(x^2+4)(x^2+25)} dx;$$

$$\text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(3x-1)\cos 2x}{x^2+4x+5} dx;$$

$$\text{B) } \int_0^{2\pi} \frac{dx}{7-\sqrt{13}\sin x}.$$

$$8.23. \text{ a) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+2}{(x^2+9)^2} dx;$$

$$\text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1-2x)\sin x}{x^2-2x+10} dx;$$

$$\text{B) } \int_0^{2\pi} \frac{dx}{4-\sqrt{7}\cos x}.$$

$$8.24. \text{ a) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2-x}{(x^2+2x+5)^2} dx;$$

$$\text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos 3x}{x^2+4x+8} dx;$$

$$\text{B) } \int_0^{2\pi} \frac{dx}{4+\sqrt{15}\sin x}.$$

$$8.25. \text{ a) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^2+x+2}{(x^2+4)(x^2+9)} dx;$$

$$\text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+4x+5} dx;$$

$$\text{B) } \int_0^{2\pi} \frac{dx}{5+\sqrt{21}\cos x}.$$

$$8.26. \text{ a) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3x-x^2}{(x^2+9)^2} dx;$$

$$\text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2-4x+8} dx;$$

$$B) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{6 - 2\sqrt{5} \sin x}.$$

$$8.27. a) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 2x + 10)^2} dx;$$

$$б) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 4x + 13} dx;$$

$$B) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{6 - \sqrt{11} \cos x}.$$

$$8.28. a) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x - x^2}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)} dx;$$

$$б) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x + 2) \cos 3x}{x^2 + 16} dx;$$

$$B) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 + 3 \sin x}.$$

$$8.29. a) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3 + 2x - x^2}{(x^2 + 9)^2} dx;$$

$$б) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x + 3) \sin 3x}{x^2 + 1} dx;$$

$$B) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 + 4 \cos x}.$$

$$8.30. a) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^2 + x + 2}{(x^2 - 4x + 5)^2} dx;$$

$$б) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 4x}{x^2 + 4} dx;$$

$$B) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{7 - 2\sqrt{6} \sin x}.$$

Задача 9. Знайти оригінали для даних зображень.

$$9.1. a) \frac{4p^2 - 2p + 14}{p^3 + p^2 + 4p + 4};$$

$$б) \frac{p^3 - 7p + 15}{p^4 - 4p^3 + 5p^2}.$$

$$9.2. a) \frac{6p^2 - 11p + 4}{p^3 - 3p^2 + 2p};$$

$$б) \frac{p^3 + p^2 + 4p - 4}{p^4 + 8p^2 + 16}.$$

$$9.3. \text{ a) } \frac{5p^2 - 3p + 16}{p^3 - 3p^2 + 4p - 12} ;$$

$$\text{б) } \frac{2p^2 + 2p - 2}{p^4 + 2p^2 + 1} .$$

$$9.4. \text{ a) } \frac{5p^2 + 21}{p^4 + 10p^2 + 9} ;$$

$$\text{б) } \frac{2p^2 + 6p + 10}{p^4 + 6p^3 + 10p^2} .$$

$$9.5. \text{ a) } \frac{4p^2 - 3p + 20}{p^3 + 3p^2 + 4p + 12} ;$$

$$\text{б) } \frac{p^3 - 3p^2 + p - 4}{p^4 - 2p^3 + 5p^2 - 8p + 4} .$$

$$9.6. \text{ a) } \frac{4p^2 + 4p + 20}{p^3 + p^2 + 4p + 4} ;$$

$$\text{б) } \frac{p^3 + 5p^2 + 2p + 1}{p^4 + 2p^3 - 3p^2 - 4p + 4} .$$

$$9.7. \text{ a) } \frac{5p^2 - 3p + 4}{p^3 - 3p^2 + p - 3} ;$$

$$\text{б) } \frac{p^3 - 2p^2 + 2p + 6}{p^4 - 2p^3 - 2p^2 + 8} .$$

$$9.8. \text{ a) } \frac{p^3 + 3p^2 + p + 12}{p^4 + 5p^2 + 4} ;$$

$$\text{б) } \frac{p^3 - p^2 + 3p - 1}{p^4 + 2p^2 + 1} .$$

$$9.9. \text{ a) } \frac{2p^2 - 2p + 6}{p^3 + p^2 + 4p + 4} ;$$

$$\text{б) } \frac{2p^3 + 4p^2 + 2p + 2}{p^4 + 2p^3 + 2p^2 + 2p + 1} .$$

$$9.10. \text{ a) } \frac{7p^2 + 6p + 4}{p^3 + 2p^2 + p + 2} ;$$

$$\text{б) } \frac{5p^2 + 2p + 17}{p^4 + 2p^2 - 8p + 5} .$$

$$9.11. \text{ a) } \frac{7p^2 - 3p + 16}{p^3 - p^2 + 4p - 4} ;$$

$$\text{б) } \frac{4p^2 - 4p + 7}{p^4 - 4p^3 + 5p^2 - 4p + 4} .$$

$$9.12. \text{ a) } \frac{5p^3 - 3p^2 + 6p - 16}{p^4 - 2p^3} ;$$

$$\text{б) } \frac{p^3 + 2p^2 + p + 16}{p^4 - 2p^3 + 5p^2 - 8p + 4} .$$

$$9.13. \text{ a) } \frac{-p^2 - 25p + 16}{p^3 + 5p^2 + 4p + 20} ; \quad \text{б) } \frac{4p^3 - 13p^2 + 11p + 5}{p^4 - 4p^3 + 5p^2} .$$

$$9.14. \text{ a) } \frac{2p^3 - 2p^2 + 8p - 18}{p^4 + 13p^2 + 36} ; \quad \text{б) } \frac{2p^3 - 5p^2 + 6p - 4}{p^4 - 4p^3 + 6p^2 - 4p} .$$

$$9.15. \text{ a) } \frac{5p^2 - 3p + 17}{p^3 - 4p^2 + p - 4} ; \quad \text{б) } \frac{p^3 + 3p^2 + 4p - 12}{p^4 + 8p^2 + 16} .$$

$$9.16. \text{ a) } \frac{3p^2 + 4p + 16}{p^3 + p^2 + 4p + 4} ; \quad \text{б) } \frac{p^3 - 5p^2 + 9p - 4}{p^4 - 5p^3 + 8p^2 - 4p} .$$

$$9.17. \text{ a) } \frac{7p^2 + 2p + 24}{p^3 - 2p^2 + 4p - 8} ; \quad \text{б) } \frac{p^3 - 4p^2 + 5p + 11}{p^4 - 4p^3 - p^2 + 6p + 18} .$$

$$9.18. \text{ a) } \frac{-2p^2 - 6p - 4}{p^3 - 3p^2 + p - 3} ; \quad \text{б) } \frac{2p^3 + p^2 + 2p - 3}{p^4 + 2p^3 + 2p^2 + 2p + 1} .$$

$$9.19. \text{ a) } \frac{-4p^2 + 2p - 28}{p^3 - 6p^2 + 4p - 24} ; \quad \text{б) } \frac{p^3 + 2p^2 + 2}{p^4 - 2p^3 + 5p^2 - 8p + 4} .$$

$$9.20. \text{ a) } \frac{6p^2 + 2p + 36}{p^3 + p^2 + 9p + 9} ; \quad \text{б) } \frac{4p^2 + 10p + 16}{p^4 + 2p^3 - 2p^2 - 6p + 5} .$$

$$9.21. \text{ a) } \frac{3p^2 - 16p + 29}{p^3 - 4p^2 + p + 6} ; \quad \text{б) } \frac{3p^2 + 2p + 3}{p^4 + 2p^3 + 2p^2 + 2p + 1} .$$

$$9.22. \text{ a) } \frac{7p^2 + 6p - 4}{p^3 + p^2 - 4p - 4} ; \quad \text{б) } \frac{p^3 - 2p^2 + 9p + 4}{p^4 - 6p^3 + 10p^2 - 6p + 9} .$$

$$9.23. \text{ а) } \frac{4p^2 + 19p + 7}{p^3 + p^2 - 8p - 12} ; \quad \text{б) } \frac{3p^3 - 2p^2 - 2p + 6}{p^4 - 2p^3 + 2p^2} .$$

$$9.24. \text{ а) } \frac{3p^2 + 3p + 33}{p^3 + 2p^2 + 9p + 18} ; \quad \text{б) } \frac{2p^3 - p^2 + 10p + 5}{p^4 - p^3 + 3p^2 + 5p} .$$

$$9.25. \text{ а) } \frac{3p^2 + 14p + 19}{p^3 + 6p^2 + 11p + 6} ; \quad \text{б) } \frac{2p^3 - 5p^2 + 2p + 5}{p^4 + 2p^2 + 1} .$$

$$9.26. \text{ а) } \frac{4p^2 + 5p + 14}{p^3 + 2p^2 + p + 2} ; \quad \text{б) } \frac{p^3 + 10p^2 + 14p - 9}{p^4 + 5p^3 + 3p^2 - 9p} .$$

$$9.27. \text{ а) } \frac{6p^2 + 4p + 18}{p^3 + p^2 + 9p + 9} ; \quad \text{б) } \frac{p^3 + 2p^2 + 5p + 16}{p^4 + 2p^2 - 8p + 5} .$$

$$9.28. \text{ а) } \frac{3p^2 + 7p - 1}{p^3 - 2p^2 - 7p - 4} ; \quad \text{б) } \frac{3p^2 - 16p + 32}{p^4 + p^3 + 16p^2 + 16p} .$$

$$9.29. \text{ а) } \frac{2p^2 + 10p - 16}{p^3 - p^2 - 5p - 3} ; \quad \text{б) } \frac{p^3 - 3p + 3}{p^4 - 4p^3 + 5p^2 - 4p + 4} .$$

$$9.30. \text{ а) } \frac{8p^2 + 22p + 15}{p^3 + 3p^2 - 4} ; \quad \text{б) } \frac{4p^2 + 15}{p^4 + 4p^3 - p^2 - 6p + 18} .$$

Задача 10. Операційним методом розв'язати в пункті а) диференціальне рівняння, в пункті б) систему диференціальних рівнянь при заданих початкових умовах.

$$10.1. \text{ а) } y'' - 4y' + 13y = 9 + 13t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2;$$

$$6) \begin{cases} x' = -x - 4y - 7, & x(0) = 6, \\ y' = 3x + 6y + 9, & y(0) = -6. \end{cases}$$

$$10.2. \text{ a) } y'' + 4y = 8e^{2t} + 12, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 4;$$

$$6) \begin{cases} x' = 3x + y + 5, & x(0) = 1, \\ y' = -2x - 4, & y(0) = -4. \end{cases}$$

$$10.3. \text{ a) } y'' - 2y' + y = 8\sin 2t - 6\cos 2t, \quad y(0) = 6, \quad y'(0) = 5;$$

$$6) \begin{cases} x' = x + y - 3, & x(0) = 1, \\ y' = -2x - 2y + 6, & y(0) = 0. \end{cases}$$

$$10.4. \text{ a) } y'' - 3y' + 2y = 9\sin t + 3\cos t, \quad y(0) = 7, \quad y'(0) = 3;$$

$$6) \begin{cases} x' = 5x + 3y - 5, & x(0) = -3, \\ y' = -6x - 4y + 8, & y(0) = 4. \end{cases}$$

$$10.5. \text{ a) } y'' + y' - 6y = \cos t - 7\sin t, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -3;$$

$$6) \begin{cases} x' = 6x + 2y + 14, & x(0) = 2, \\ y' = -x + 3y + 11, & y(0) = -6. \end{cases}$$

$$10.6. \text{ a) } y'' - 2y' + 2y = 4t - 2, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 5;$$

$$6) \begin{cases} x' = 2y + 4, & x(0) = 6, \\ y' = 2x + 3y, & y(0) = -1. \end{cases}$$

$$10.7. \text{ a) } y'' - 2y' + 5y = 15e^{2t} + 5, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 6;$$

$$6) \begin{cases} x' = 4x - 2y + 6, & x(0) = 3, \\ y' = 5y - 15, & y(0) = 2. \end{cases}$$

10.8. a) $y'' - 6y' + 10y = 18\cos t + 12\sin t$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$;

$$6) \begin{cases} x' = 4x + 6y - 4, & x(0) = 5, \\ y' = -3x - 5y + 2, & y(0) = -4. \end{cases}$$

10.9. a) $y'' + 4y' + 3y = 16\cos t - 2\sin t$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -2$;

$$6) \begin{cases} x' = -5x - 4y + 7, & x(0) = -3, \\ y' = 8x + 7y - 13, & y(0) = 4. \end{cases}$$

10.10. a) $y'' - 5y' + 4y = 4 - 6e^{2t}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -4$;

$$6) \begin{cases} x' = y + 2, & x(0) = 3, \\ y' = -2x - 3y - 4, & y(0) = -5. \end{cases}$$

10.11. a) $y'' - 6y' + 9y = 16e^{-t} - 9$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;

$$6) \begin{cases} x' = 4x + 2y - e^{-t}, & x(0) = 1, \\ y' = -3x - y + 3e^{-t}, & y(0) = -1. \end{cases}$$

10.12. a) $y'' + 5y' = -20t - 9$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$;

$$6) \begin{cases} x' = 5x + 3y - 4e^t + 6, & x(0) = 2, \\ y' = -6x - 4y + 6e^t - 8, & y(0) = -2. \end{cases}$$

10.13. a) $y'' - 4y' + 5y = 5t + 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

$$\text{б) } \begin{cases} x' = x - y - 1 - 2e^{3t}, & x(0) = 4, \\ y' = -2x - 6e^{3t} + 2, & y(0) = -2. \end{cases}$$

$$\mathbf{10.14.} \text{ а) } y'' - 4y' + 8y = 4e^{2t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -4;$$

$$\text{б) } \begin{cases} x' = x + y + 2e^{3t}, & x(0) = 0, \\ y' = x + y - 4e^{3t} - e^t, & y(0) = 1. \end{cases}$$

$$\mathbf{10.15.} \text{ а) } y'' - 4y' + 4y = -2e^t + te^t, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = -3;$$

$$\text{б) } \begin{cases} x' = -y - e^{-t} - 2e^{3t}, & x(0) = -4, \\ y' = 2x + 3y - 2e^{-t}, & y(0) = 5. \end{cases}$$

$$\mathbf{10.16.} \text{ а) } y'' - 4y' + 3y = 2e^{3t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0;$$

$$\text{б) } \begin{cases} x' = 4x + 3y - 5e^{-t}, & x(0) = -4, \\ y' = -6x - 5y + 6e^{-t}, & y(0) = 7. \end{cases}$$

$$\mathbf{10.17.} \text{ а) } y'' - 4y' + 4y = 2e^{2t} + 12, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0;$$

$$\text{б) } \begin{cases} x' = x - y - 2e^{-t} + 2, & x(0) = 1, \\ y' = 2x + 4y - 2e^{-t} - 8, & y(0) = 1. \end{cases}$$

$$\mathbf{10.18.} \text{ а) } y'' - 2y' + 2y = 6 + 2e^{2t}, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 3;$$

$$\text{б) } \begin{cases} x' = -2y - e^{-t} + 2e^t, & x(0) = 1, \\ y' = 4x + 6y - 5e^t - 4e^{-t}, & y(0) = 0. \end{cases}$$

$$\mathbf{10.19.} \text{ а) } y'' - 2y' + 10y = 18\cos t + 4\sin t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 5;$$

$$6) \begin{cases} x' = -3x - y + 5e^{2t} + 1, & x(0) = 5, \\ y' = 2x - 2e^{2t}, & y(0) = -6. \end{cases}$$

10.20. a) $y'' - y' = e^{2t}(6 \cos 2t - 2 \sin 2t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1;$

$$6) \begin{cases} x' = 3x + y - 3e^{4t}, & x(0) = 0, \\ y' = -2x + 12e^{4t} - 4e^{3t}, & y(0) = 0. \end{cases}$$

10.21. a) $y'' - 3y' + 2y = \cos t + 3 \sin t, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3;$

$$6) \begin{cases} x' = -2y + 4, & x(0) = 5, \\ y' = x + 3y + 2t - 9, & y(0) = -1. \end{cases}$$

10.22. a) $y'' - 5y' = 10t - 2, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -5;$

$$6) \begin{cases} x' = -x - 3y + 3t, & x(0) = 6; \\ y' = 2x + 4y + 1 - 4t, & y(0) = -5. \end{cases}$$

10.23. a) $y'' - 4y' + 4y = e^t + 8, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0;$

$$6) \begin{cases} x' = -5x - 6y - 2 - 4t, & x(0) = 0, \\ y' = 3x + 4y + 1 + 2t, & y(0) = 1. \end{cases}$$

10.24. a) $y'' - 4y' + 8y = 5e^t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$

$$6) \begin{cases} x' = 4x + 3y - 2 + 5t, & x(0) = -3, \\ y' = -6x - 5y + 1 - 7t, & y(0) = 4. \end{cases}$$

10.25. a) $y'' - 6y' + 10y = 4 + 10t, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 9;$

$$\text{б) } \begin{cases} x' = 7x + 4y - 8t, & x(0) = -4, \\ y' = -8x - 5y + 2 + 10t, & y(0) = 6. \end{cases}$$

10.26. а) $y'' - 8y' + 20y = 12 + 20t$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 7$;

$$\text{б) } \begin{cases} x' = 7x + 5y + 1 + 3t, & x(0) = 0, \\ y' = -10x - 8y - 2 - 6t, & y(0) = 2. \end{cases}$$

10.27. а) $y'' + 9y = e^t(2 \cos t + 9 \sin t)$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 4$;

$$\text{б) } \begin{cases} x' = -5x - 3y - 1 + 4t, & x(0) = 3, \\ y' = 6x + 4y + 3 - 6t, & y(0) = -2. \end{cases}$$

10.28. а) $y'' + y = 6 \cos t - 2 \sin t$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 2$;

$$\text{б) } \begin{cases} x' = -3x - 4y + 2 + 2t, & x(0) = 3, \\ y' = 8x + 9y - 1 - 7t, & y(0) = -2. \end{cases}$$

10.29. а) $y'' - 3y' + 2y = \cos t + 3 \sin t$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 5$;

$$\text{б) } \begin{cases} x' = -x - 3y - 2 + t, & x(0) = 5, \\ y' = 6x + 8y + 1 + 4t, & y(0) = -4. \end{cases}$$

10.30. а) $y'' - 4y' + 13y = 27e^{2t} - 13$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 5$;

$$\text{б) } \begin{cases} x' = 3x + y + 3 - 8t, & x(0) = -1, \\ y' = 2x + 4y - 1 - 2t, & y(0) = 4. \end{cases}$$

Задача 11. За допомогою формули Дюамеля знайти розв'язок задачі Коші.

$$11.1. \quad y'' - 2y' = \frac{1}{1+e^t}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

$$11.2. \quad y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^t}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

$$11.3. \quad y'' + y = \frac{1}{2+\sin t}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

$$11.4. \quad y'' + y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 t}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

$$11.5. \quad y'' + 4y = \frac{1}{1+\cos^2 2t}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

$$11.6. \quad y'' + 9y = \frac{1}{1+\sin^2 3t}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

$$11.7. \quad y'' - y = \frac{1}{1+e^{-t}}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

$$11.8. \quad y'' + 16y = \frac{1}{3+\cos 4t}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

$$11.9. \quad y'' + 9y = \frac{1}{3+\sin 3t}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

$$11.10. \quad y'' + y = \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 t}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

$$11.11. \quad y'' - 4y = \frac{1}{1+e^{2t}}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

$$11.12. \quad y'' - y' = \frac{1}{1+e^t}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

$$11.13. \quad y'' - 9y = \frac{1}{2+e^{-3t}}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

$$11.14. \quad y'' + 4y = \frac{2}{1+\operatorname{tg}^2 2t}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

$$11.15. \quad y'' + 4y = \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 2t}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

$$11.16. \quad y'' - y = tht, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

- 11.17. $y'' - 4y = \frac{1}{ch 2t}$, $y(0) = y'(0) = 0$.
- 11.18. $y'' - 9y = 2th 3t + 1$, $y(0) = y'(0) = 0$.
- 11.19. $y'' + 4y = \frac{1}{2 + \sin 2t}$, $y(0) = y'(0) = 0$.
- 11.20. $y'' + 4y = \frac{1}{1 + \cos 2t}$, $y(0) = y'(0) = 0$.
- 11.21. $y'' + y = \frac{1}{1 + \cos^2 t}$, $y(0) = y'(0) = 0$.
- 11.22. $y'' - 2y' = \frac{2e^t}{1 + e^{-t}}$, $y(0) = y'(0) = 0$.
- 11.23. $y'' + y = \frac{1}{3 + \cos t}$, $y(0) = y'(0) = 0$.
- 11.24. $y'' + y = \frac{1}{3 + \sin t}$, $y(0) = y'(0) = 0$.
- 11.25. $y'' - y = \frac{1}{1 + e^t}$, $y(0) = y'(0) = 0$.
- 11.26. $y'' - 4y = \frac{e^{2t}}{1 + e^{-2t}}$, $y(0) = y'(0) = 0$.
- 11.27. $y'' - y = \frac{1}{2 + e^{-t}}$, $y(0) = y'(0) = 0$.
- 11.28. $y'' - y' = \frac{e^{2t}}{2 + e^t}$, $y(0) = y'(0) = 0$.
- 11.29. $y'' - 4y = th 2t$, $y(0) = y'(0) = 0$.
- 11.30. $y'' - 9y = \frac{1}{ch 3t}$, $y(0) = y'(0) = 0$.

12 Рівняння математичної фізики

Теоретичні питання

1. Поняття про диференціальні рівняння з частинними похідними та їх загальний розв'язок.
2. Класифікація лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними та зведення їх до канонічного виду.
3. Постановка граничних задач математичної фізики.
4. Постановка задачі про поперечні коливання скінченної струни та розв'язування її методом Фур'є.
5. Постановка задачі про поперечні коливання нескінченної струни та розв'язування її методом Д'Аламбера.
6. Постановка задачі про поздовжні коливання стержня (обмеженої довжини) та розв'язування її методом Фур'є.
7. Рівняння коливань мембрани.
8. Постановка задачі про поширення тепла в стержні (обмеженої довжини) та розв'язування її методом Фур'є та методом сіток (методом скінченних різниць).
9. Задача про поширення тепла в просторі.
10. Постановка задачі стаціонарної теплопровідності. Задача Діріхле для рівняння Лапласа.
11. Метод Фур'є розв'язування задачі Діріхле для круга.
12. Розв'язування задачі Діріхле методом сіток (методом скінченних різниць).

Розрахункові завдання

Задача 1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння з частинними похідними відносно функції $u(x, y)$.

$$1.1. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin^2 2y.$$

$$1.2. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = e^{2x+3y}.$$

$$1.3. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \cos(xy).$$

$$1.4. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{x^2}{y}.$$

$$1.5. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \sin 2x \cdot \cos 2y.$$

$$1.6. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{xy}.$$

$$1.7. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{x}.$$

$$1.8. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{x^2 y^3}.$$

$$1.9. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{x}{y^2}.$$

$$1.10. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \cos^2 3x.$$

$$1.11. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \cos(2x + 3y).$$

$$1.12. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x e^{xy}.$$

$$1.13. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\cos^2 2x}.$$

$$1.14. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{y}{x}.$$

$$1.15. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2 y.$$

$$1.16. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{xy^2}.$$

$$1.17. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{x y^2}.$$

$$1.18. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{\frac{x}{y}}.$$

$$1.19. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{x}{y}\right)^2.$$

$$1.20. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \sin^2(xy).$$

$$1.21. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sqrt[3]{xy}.$$

$$1.22. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sqrt{\frac{x}{y}}.$$

$$1.23. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{\sqrt{xy}}.$$

$$1.24. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sin \frac{x}{y}.$$

$$1.25. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \cos^2(xy).$$

$$1.26. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x \sin x.$$

$$1.27. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{y}.$$

$$1.28. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{xy}.$$

$$1.29. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x \ln y.$$

$$1.30. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\sin x}{y}.$$

Задача 2. Знайти загальний розв'язок рівняння, звівши його до канонічного виду.

$$2.1. 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$2.2. 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$2.3. 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$2.4. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$2.5. 16 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 16 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$2.6. 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 16 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 16 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$2.7. 25 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 20 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$2.8. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 12 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$2.9. 12 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$2.10. \quad 49 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 28 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$2.11. \quad 64 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 32 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$2.12. \quad 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 20 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 25 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$2.13. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$2.14. \quad 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$2.15. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 27 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$2.16. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 16 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 48 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$2.17. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 20 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 75 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$2.18. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 24 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 108 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$2.19. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 28 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 147 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$2.20. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 32 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 192 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$2.21. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 36 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 243 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$2.22. \quad 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 28 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 49 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$2.23. \quad 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 32 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 64 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$2.24. \quad 27 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$2.25. \quad 48 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 16 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$2.26. \quad 75 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 20 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$2.27. \quad 108 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 24 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$2.28. \quad 147 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 28 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$2.29. \quad 192 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 32 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$2.30. \quad 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Задача 3.

3.1. Вертикальний важкий стержень довжиною l закріплений так, що зміщення у всіх точках дорівнюють нулю. В момент часу $t=0$ стержень звільняється, залишаючись закріпленим в верхній точці. Поставити задачу про позовжні коливання стержня.

3.2. Сформулювати задачу математичної фізики:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a^2 = \frac{E}{\rho},$$

$$\begin{cases} u(0, t) = 0, \\ \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = \frac{A \sin \omega t}{ES}, \end{cases} \quad \begin{cases} u(x, 0) = 0, \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

3.3. Поставити задачу про позовжні коливання стержня, один кінець якого жорстко закріплений, а до другого кінця в момент часу $t = 0$ прикладається сила величиною At . Стержень перебував у стані спокою.

3.4. Сформулювати задачу математичної фізики:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a^2 = \frac{E}{\rho},$$

$$\begin{cases} u(0, t) = 0, \\ \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(x, 0) = \frac{\delta}{l} x, \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

3.5. Поставити задачу про поздовжні коливання стержня, один кінець якого закріплений пружно, а другий вільний, причому в початковий момент часу зміщення в стержні дорівнювали нулю, а швидкості розподілялися за законом $F(x) = e^x - 1$.

3.6. Сформулювати задачу математичної фізики:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a^2 = \frac{E}{\rho},$$

$$\begin{cases} u(0, t) = 0, \\ \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = \frac{M}{ES} \frac{\partial^2 u(l, t)}{\partial t^2}, \end{cases} \quad \begin{cases} u(x, 0) = Ax, \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

3.7. Поставити задачу про поздовжні коливання стержня, один кінець якого жорстко закріплений, а до другого кінця прикладено розтягуючу силу F , яку в момент часу $t = 0$ знято без початкової швидкості.

3.8. Сформулювати задачу математичної фізики:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a^2 = \frac{E}{\rho},$$

$$\begin{cases} u(0, t) = 0, \\ \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = \frac{Q}{ES}, \end{cases} \quad \begin{cases} u(x, 0) = 0, \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

3.9. Поставити задачу про поздовжні коливання стержня, один кінець якого жорстко закріплений, а на другому кінці зосереджено масу M , причому попередньо стержень було розтягнуто на величину δ .

3.10. Сформулювати задачу математичної фізики:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g, \quad a^2 = \frac{E}{\rho},$$

$$\begin{cases} u(0, t) = 0, \\ \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(x, 0) = 0, \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = v. \end{cases}$$

3.11. Поставити задачу про поздовжні коливання стержня, один кінець якого закріплений нерухомо, а до другого в момент часу $t = 0$ прикладають стискуючу силу **P**.

3.12. Сформулювати задачу математичної фізики:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a^2 = \frac{E}{\rho},$$

$$\begin{cases} u(0, t) = 0, \\ \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(x, 0) = \frac{Fx}{ES}, \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = v. \end{cases}$$

3.13. Поставити задачу про поздовжні коливання стержня, один кінець якого жорстко закріплений, а за другий кінець стержень розтягнуто до довжини L , причому в момент часу $t = 0$ його відпускають з початковою швидкістю v . Початкова довжина стержня l .

3.14. Сформулювати задачу математичної фізики:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a^2 = \frac{E}{\rho},$$

$$\begin{cases} u(0, t) = 0, \\ \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = -\frac{c}{ES} u(l, t), \end{cases} \quad \begin{cases} u(x, 0) = bx, \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

3.15. Поставити задачу про поздовжні коливання стержня, один кінець якого жорстко закріплений, а на другому міститься вантаж маси m . Стержень попередньо був розтягнутий силою **P**, дія якої в початковий момент часу раптово припиняється.

3.16. Сформулювати задачу математичної фізики:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a^2 = \frac{E}{\rho},$$

$$\begin{cases} u(0, t) = \frac{At}{ES}, \\ \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(x, 0) = 0, \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

3.17. Поставити задачу про поздовжні коливання стержня, один кінець якого жорстко закріплений, а до вільного кінця в момент часу $t = 0$ прикладають збурюючу силу, яка змінюється за законом $A \sin \omega t$ і напрямлена вздовж осі стержня.

3.18. Сформулювати задачу математичної фізики:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a^2 = \frac{E}{\rho},$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} + \frac{C}{ES} u(0, t) = 0, \\ u(l, t) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(x, 0) = f(x), \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

3.19. Поставити задачу про поздовжні коливання стержня, один кінець якого закріплений нерухомо, а до другого кінця прикладено силу F , яку в момент часу $t = 0$ раптово знімають без початкової швидкості.

3.20. Сформулювати задачу математичної фізики:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g, \quad a^2 = \frac{E}{\rho},$$

$$\begin{cases} u(0, t) = 0, \\ \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(x, 0) = 0, \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

3.21. Поставити задачу про поздовжні коливання стержня, один кінець якого закріплений пружно, а другий – вільний. Причому в момент часу $t = 0$ стержень перебував у стані спокою, а початкові зміщення дорівнювали $f(x)$.

3.22. Сформулювати задачу математичної фізики:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a^2 = \frac{E}{\rho},$$

$$\begin{cases} u(0, t) = 0, \\ \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = -\frac{At}{ES}, \end{cases} \quad \begin{cases} u(x, 0) = 0, \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

3.23. Стержень довжиною l , один кінець якого жорстко закріплений, виводиться із стану спокою ударом (з імпульсом P) по його вільному кінцю в напрямку осі стержня. Поставити задачу про позовжні коливання стержня.

3.24. Сформулювати задачу математичної фізики:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a^2 = \frac{E}{\rho},$$

$$\begin{cases} u(0, t) = 0, \\ \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = -\frac{M}{ES} \frac{\partial^2 u(l, t)}{\partial t^2}, \end{cases} \quad \begin{cases} u(x, 0) = \frac{hx}{e}, \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

3.25. Верхній кінець вертикально підвішеного важкого стержня прикріплений до стелі ліфта, який вільно падає, причому досягнувши швидкості v , він раптово зупиняється. Поставити задачу про позовжні коливання стержня.

3.26. Один кінець стержня $x = 0$ закріплений нерухомо, а на кінці $x = l$ має місце в'язкий опір з коефіцієнтом в'язкості μ . Стержень попередньо розтягнутий силою Q , дія якої в момент часу $t = 0$ раптово припиняється. Поставити задачу про позовжні коливання стержня.

3.27. Сформулювати задачу математичної фізики:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g, \quad a^2 = \frac{E}{\rho},$$

$$\begin{cases} u(0, t) = 0, \\ \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} + \frac{M}{ES} \frac{\partial^2 u(l, t)}{\partial t^2} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(x, 0) = 0, \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

3.28. Стержень довжиною L , закріплений в точці $x = 0$ розтягнули до довжини L_1 , після чого в момент часу $t = 0$ відпустили без початкової швидкості. Поставити задачу про позовжні коливання стержня.

3.29. Сформулювати задачу математичної фізики:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a^2 = \frac{E}{\rho},$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} + \frac{ku(0, t)}{ES} = 0, \\ \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(x, 0) = 0, \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = F(x). \end{cases}$$

3.30. Поставити задачу про позовжні коливання стержня, один кінець якого жорстко закріплений, а до вільного кінця прикладено силу $\mathbf{P}$, причому в момент часу $t = 0$ дія сили раптово припиняється.

Задача 4. Сформулювати і розв'язати крайову задачу.

$$4.1. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty,$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = x(x-1), \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(1, t) = 0. \end{cases}$$

$$4.2. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \frac{3}{2}, \quad 0 < t < \infty,$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = x\left(x - \frac{3}{2}\right), \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u\left(\frac{3}{2}, t\right) = 0. \end{cases}$$

$$4.3. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 3, \quad 0 < t < \infty,$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = x(x-3), \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(3, t) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 4.4. \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < t < \infty, \\ & \begin{cases} u(x, 0) = x(x-2), \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(2, t) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4.5. \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \frac{1}{2}, \quad 0 < t < \infty, \\ & \begin{cases} u(x, 0) = x\left(x - \frac{1}{2}\right), \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u\left(\frac{1}{2}, t\right) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4.6. \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty, \\ & \begin{cases} u(x, 0) = x(x-1), \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(1, t) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4.7. \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{4}{9} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \frac{2}{3}, \quad 0 < t < \infty, \\ & \begin{cases} u(x, 0) = x\left(x - \frac{2}{3}\right), \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u\left(\frac{2}{3}, t\right) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

$$4.8. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \frac{1}{2}, \quad 0 < t < \infty,$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = x\left(x - \frac{1}{2}\right), \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u\left(\frac{1}{2}, t\right) = 0. \end{cases}$$

$$4.9. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < t < \infty,$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = x(x-2), \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(2, t) = 0. \end{cases}$$

$$4.10. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 3, \quad 0 < t < \infty,$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = x(x-3), \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(3, t) = 0. \end{cases}$$

$$4.11. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < t < \infty,$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = x(x-2), \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(2, t) = 0. \end{cases}$$

$$4.12. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty,$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = x(x-1), \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(1, t) = 0. \end{cases}$$

$$4.13. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{9} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \frac{1}{2}, \quad 0 < t < \infty,$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = x\left(x - \frac{1}{2}\right), \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u\left(\frac{1}{2}, t\right) = 0. \end{cases}$$

$$4.14. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 3, \quad 0 < t < \infty, \\ \begin{cases} u(x, 0) = x(x-3), \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(3, t) = 0. \end{cases}$$

$$4.15. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty, \\ \begin{cases} u(x, 0) = x(x-1), \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(1, t) = 0. \end{cases}$$

$$4.16. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \frac{3}{2}, \quad 0 < t < \infty, \\ \begin{cases} u(x, 0) = x\left(x - \frac{3}{2}\right), \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u\left(\frac{3}{2}, t\right) = 0. \end{cases}$$

$$4.17. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 3, \quad 0 < t < \infty, \\ \begin{cases} u(x, 0) = x(x-3), \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(3, t) = 0. \end{cases}$$

$$4.18. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < t < \infty,$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = x(x-2), \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(2, t) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 4.19. \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty, \\ & \begin{cases} u(x, 0) = x(x-1), \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(1, t) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4.20. \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \frac{1}{2}, \quad 0 < t < \infty, \\ & \begin{cases} u(x, 0) = x\left(x - \frac{1}{2}\right), \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u\left(\frac{1}{2}, t\right) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4.21. \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{4}{9} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < t < \infty, \\ & \begin{cases} u(x, 0) = x(x-2), \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(2, t) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4.22. \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{9}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \frac{3}{2}, \quad 0 < t < \infty, \\ & \begin{cases} u(x, 0) = x\left(x - \frac{3}{2}\right), \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u\left(\frac{3}{2}, t\right) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

$$4.23. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{9} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty,$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = x(x-1), \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(1, t) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 4.24. \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{9}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 3, \quad 0 < t < \infty, \\ & \begin{cases} u(x, 0) = x(x-3), \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(3, t) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4.25. \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \frac{1}{2}, \quad 0 < t < \infty, \\ & \begin{cases} u(x, 0) = x\left(x - \frac{1}{2}\right), \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u\left(\frac{1}{2}, t\right) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4.26. \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < t < \infty, \\ & \begin{cases} u(x, 0) = x(x-2), \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(2, t) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4.27. \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 3, \quad 0 < t < \infty, \\ & \begin{cases} u(x, 0) = x(x-3), \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(3, t) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

$$4.28. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{4}{9} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty,$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = x(x-1), \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(1, t) = 0. \end{cases}$$

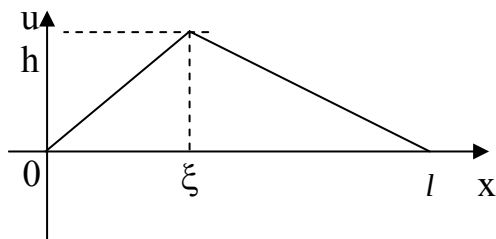
$$4.29. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \frac{3}{2}, \quad 0 < t < \infty,$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = x\left(x - \frac{3}{2}\right), \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u\left(\frac{3}{2}, t\right) = 0. \end{cases}$$

$$4.30. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{9} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < t < \infty,$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = x(x-2), \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(2, t) = 0. \end{cases}$$

Задача 5. Поставити і розв'язати методом Фур'є задачу про поперечні коливання струни із закріпленими кінцями, яка в початковий момент часу $t=0$ перебувала в стані спокою і мала форму, зображену на рисунку.



$$h = k, \quad k - \text{номер групи.} \quad \xi = \frac{N}{N+2}l,$$

N – номер варіанту.

Задача 6. Методом Д'Аламбера знайти розв'язок $u(x, t)$ хвильового рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a^2 = \frac{T_0}{\rho},$$

що визначає форму однорідної нескінченної струни, якщо в початковий момент часу $t = 0$ форма струни і швидкість точки струни з абсцисою x визначається відповідно функціями $\varphi(x)$

і $\psi(x)$:

6.1. $\varphi(x) = x(2 - x), \quad \psi(x) = e^{-x}.$

6.2. $\varphi(x) = x^2, \quad \psi(x) = \sin x.$

6.3. $\varphi(x) = e^x, \quad \psi(x) = \omega x.$

6.4. $\varphi(x) = \sin x, \quad \psi(x) = v_0.$

6.5. $\varphi(x) = \sin x, \quad \psi(x) = \cos x.$

6.6. $\varphi(x) = \cos x, \quad \psi(x) = \sin x.$

6.7. $\varphi(x) = \cos x, \quad \psi(x) = x.$

6.8. $\varphi(x) = x, \quad \psi(x) = \cos x.$

6.9. $\varphi(x) = x(1 - x), \quad \psi(x) = e^x.$

6.10. $\varphi(x) = e^{-x}, \quad \psi(x) = 5.$

6.11. $\varphi(x) = x^2 + x, \quad \psi(x) = e^{2x}.$

6.12. $\varphi(x) = x^3, \quad \psi(x) = \sin 2x.$

6.13. $\varphi(x) = x^2 - 4, \quad \psi(x) = \cos 3x.$

6.14. $\varphi(x) = 4 - x^2, \quad \psi(x) = 2x.$

6.15. $\varphi(x) = -x, \quad \psi(x) = \omega x.$

6.16. $\varphi(x) = 2 - 3x, \quad \psi(x) = \omega x^2.$

6.17. $\varphi(x) = \sin 2x, \quad \psi(x) = 3x^2.$

6.18. $\varphi(x) = e^x, \quad \psi(x) = x \sin x.$

6.19. $\varphi(x) = e^{2x}, \quad \psi(x) = x \cos x.$

6.20. $\varphi(x) = \cos x, \quad \psi(x) = e^x.$

6.21. $\varphi(x) = \cos 2x, \quad \psi(x) = e^{-x}.$

$$6.22. \quad \varphi(x) = x, \quad \psi(x) = e^{2x}.$$

$$6.23. \quad \varphi(x) = 2x - 5, \quad \psi(x) = 2x.$$

$$6.24. \quad \varphi(x) = 2e^{-x}, \quad \psi(x) = \omega x^2.$$

$$6.25. \quad \varphi(x) = 4e^x, \quad \psi(x) = \cos x.$$

$$6.26. \quad \varphi(x) = x^2 - 1, \quad \psi(x) = e^{-2x}.$$

$$6.27. \quad \varphi(x) = 1 - x^2, \quad \psi(x) = \cos x.$$

$$6.28. \quad \varphi(x) = x(2 + x), \quad \psi(x) = \sin x.$$

$$6.29. \quad \varphi(x) = e^{2x}, \quad \psi(x) = v_0.$$

$$6.30. \quad \varphi(x) = e^{3x}, \quad \psi(x) = 3x^2.$$

Задача 7. Сформулювати і розв'язати задачу математичної фізики.

$$7.1. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = \frac{xy}{64}(2-x)(3-y), \\ \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, y, t) = 0, \\ u(x, 0, t) = 0, \\ u(2, y, t) = 0, \\ u(x, 3, t) = 0. \end{cases}$$

$$7.2. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = xy(3-x)(4-y), \\ \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, y, t) = 0, \\ u(x, 0, t) = 0, \\ u(3, y, t) = 0, \\ u(x, 4, t) = 0. \end{cases}$$

$$7.3. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = xy(4-x)(5-y), \\ \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, y, t) = 0, \\ u(x, 0, t) = 0, \\ u(4, y, t) = 0, \\ u(x, 5, t) = 0. \end{cases}$$

$$7.4. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = xy(5-x)(6-y), \\ \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, y, t) = 0, \\ u(x, 0, t) = 0, \\ u(5, y, t) = 0, \\ u(x, 6, t) = 0. \end{cases}$$

$$7.5. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 25 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = xy(6-x)(2-y), \\ \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, y, t) = 0, \\ u(x, 0, t) = 0, \\ u(6, y, t) = 0, \\ u(x, 2, t) = 0. \end{cases}$$

$$7.6. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = xy(2-x)(4-y), \\ \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, y, t) = 0, \\ u(x, 0, t) = 0, \\ u(2, y, t) = 0, \\ u(x, 4, t) = 0. \end{cases}$$

$$7.7. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = xy(3-x)(5-y), \\ \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, y, t) = 0, \\ u(x, 0, t) = 0, \\ u(3, y, t) = 0, \\ u(x, 5, t) = 0. \end{cases}$$

$$7.8. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = xy(4-x)(6-y), \\ \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, y, t) = 0, \\ u(x, 0, t) = 0, \\ u(4, y, t) = 0, \\ u(x, 6, t) = 0. \end{cases}$$

$$7.9. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 25 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = xy(5-x)(2-y), \\ \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, y, t) = 0, \\ u(x, 0, t) = 0, \\ u(5, y, t) = 0, \\ u(x, 2, t) = 0. \end{cases}$$

$$7.10. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = xy(6-x)(3-y), \\ \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, y, t) = 0, \\ u(x, 0, t) = 0, \\ u(6, y, t) = 0, \\ u(x, 3, t) = 0. \end{cases}$$

$$7.11. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = xy(2-x)(5-y), \\ \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, y, t) = 0, \\ u(x, 0, t) = 0, \\ u(2, y, t) = 0, \\ u(x, 5, t) = 0. \end{cases}$$

$$7.12. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, y, 0) = xy(3-x)(6-y), \\ \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = 0, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} u(0, y, t) = 0, \\ u(x, 0, t) = 0, \\ u(3, y, t) = 0, \\ u(x, 6, t) = 0. \end{array} \right.$$

$$7.13. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 25 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, y, 0) = xy(4-x)(2-y), \\ \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = 0, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} u(0, y, t) = 0, \\ u(x, 0, t) = 0, \\ u(4, y, t) = 0, \\ u(x, 2, t) = 0. \end{array} \right.$$

$$7.14. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, y, 0) = xy(5-x)(3-y), \\ \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = 0, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} u(0, y, t) = 0, \\ u(x, 0, t) = 0, \\ u(5, y, t) = 0, \\ u(x, 3, t) = 0. \end{array} \right.$$

$$7.15. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, y, 0) = xy(6-x)(4-y), \\ \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = 0, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} u(0, y, t) = 0, \\ u(x, 0, t) = 0, \\ u(6, y, t) = 0, \\ u(x, 4, t) = 0. \end{array} \right.$$

$$7.16. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, y, 0) = xy(2-x)(6-y), \\ \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = 0, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} u(0, y, t) = 0, \\ u(x, 0, t) = 0, \\ u(2, y, t) = 0, \\ u(x, 6, t) = 0. \end{array} \right.$$

$$7.17. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 25 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = xy(3-x)(2-y), \\ \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, y, t) = 0, \\ u(x, 0, t) = 0, \\ u(3, y, t) = 0, \\ u(x, 2, t) = 0. \end{cases}$$

$$7.18. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = xy(4-x)(3-y), \\ \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, y, t) = 0, \\ u(x, 0, t) = 0, \\ u(4, y, t) = 0, \\ u(x, 3, t) = 0. \end{cases}$$

$$7.19. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = xy(5-x)(4-y), \\ \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, y, t) = 0, \\ u(x, 0, t) = 0, \\ u(5, y, t) = 0, \\ u(x, 4, t) = 0. \end{cases}$$

$$7.20. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = xy(6-x)(5-y), \\ \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, y, t) = 0, \\ u(x, 0, t) = 0, \\ u(6, y, t) = 0, \\ u(x, 5, t) = 0. \end{cases}$$

$$7.21. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 25 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = xy(2-x)(2-y), \\ \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, y, t) = 0, \\ u(x, 0, t) = 0, \\ u(2, y, t) = 0, \\ u(x, 2, t) = 0. \end{cases}$$

$$7.22. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = xy(3-x)(3-y), \\ \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, y, t) = 0, \\ u(x, 0, t) = 0, \\ u(3, y, t) = 0, \\ u(x, 3, t) = 0. \end{cases}$$

$$7.23. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = xy(4-x)(4-y), \\ \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, y, t) = 0, \\ u(x, 0, t) = 0, \\ u(4, y, t) = 0, \\ u(x, 4, t) = 0. \end{cases}$$

$$7.24. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = xy(5-x)(5-y), \\ \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, y, t) = 0, \\ u(x, 0, t) = 0, \\ u(5, y, t) = 0, \\ u(x, 5, t) = 0. \end{cases}$$

$$7.25. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = xy(6-x)(6-y), \\ \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, y, t) = 0, \\ u(x, 0, t) = 0, \\ u(6, y, t) = 0, \\ u(x, 6, t) = 0. \end{cases}$$

$$7.26. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 144 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = xy(2-x)(7-y), \\ \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, y, t) = 0, \\ u(x, 0, t) = 0, \\ u(2, y, t) = 0, \\ u(x, 7, t) = 0. \end{cases}$$

$$7.27. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 121 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = xy(3-x)(7-y), \\ \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, y, t) = 0, \\ u(x, 0, t) = 0, \\ u(3, y, t) = 0, \\ u(x, 7, t) = 0. \end{cases}$$

$$7.28. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 100 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = xy(4-x)(5-y), \\ \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, y, t) = 0, \\ u(x, 0, t) = 0, \\ u(4, y, t) = 0, \\ u(x, 5, t) = 0. \end{cases}$$

$$7.29. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 81 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = xy(5-x)(4-y), \\ \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, y, t) = 0, \\ u(x, 0, t) = 0, \\ u(5, y, t) = 0, \\ u(x, 4, t) = 0. \end{cases}$$

$$7.30. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 64 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = xy(6-x)(3-y), \\ \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, y, t) = 0, \\ u(x, 0, t) = 0, \\ u(6, y, t) = 0, \\ u(x, 3, t) = 0. \end{cases}$$

Задача 8. Розв'язати першу крайову задачу для хвильового рівняння в крузі.

$$\begin{aligned} \text{8.1. } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \Delta u, \quad 0 \leq r < 25, \quad 0 < t < \infty, \\ \begin{cases} u(r, 0) = \frac{1}{8} \left[1 - \left(\frac{r}{25} \right)^2 \right], \\ \frac{\partial u(r, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} & \quad u(25, t) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{8.2. } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 2\Delta u, \quad 0 \leq r < 24, \quad 0 < t < \infty, \\ \begin{cases} u(r, 0) = \frac{1}{8} \left[1 - \left(\frac{r}{24} \right)^2 \right], \\ \frac{\partial u(r, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} & \quad u(24, t) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{8.3. } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 3\Delta u, \quad 0 \leq r < 23, \quad 0 < t < \infty, \\ \begin{cases} u(r, 0) = \frac{1}{8} \left[1 - \left(\frac{r}{23} \right)^2 \right], \\ \frac{\partial u(r, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} & \quad u(23, t) = 0. \end{aligned}$$

$$\text{8.4. } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\Delta u, \quad 0 \leq r < 22, \quad 0 < t < \infty,$$

$$\begin{cases} u(r, 0) = \frac{1}{8} \left[1 - \left(\frac{r}{22} \right)^2 \right], \\ \frac{\partial u(r, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad u(22, t) = 0.$$

$$8.5. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 5\Delta u, \quad 0 \leq r < 21, \quad 0 < t < \infty,$$

$$\begin{cases} u(r, 0) = \frac{1}{8} \left[1 - \left(\frac{r}{21} \right)^2 \right], \\ \frac{\partial u(r, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad u(21, t) = 0.$$

$$8.6. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 6\Delta u, \quad 0 \leq r < 20, \quad 0 < t < \infty,$$

$$\begin{cases} u(r, 0) = \frac{1}{8} \left[1 - \left(\frac{r}{20} \right)^2 \right], \\ \frac{\partial u(r, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad u(20, t) = 0.$$

$$8.7. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 7\Delta u, \quad 0 \leq r < 19, \quad 0 < t < \infty,$$

$$\begin{cases} u(r, 0) = \frac{1}{8} \left[1 - \left(\frac{r}{19} \right)^2 \right], \\ \frac{\partial u(r, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad u(19, t) = 0.$$

$$8.8. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 8\Delta u, \quad 0 \leq r < 18, \quad 0 < t < \infty,$$

$$\begin{cases} u(r, 0) = \frac{1}{8} \left[1 - \left(\frac{r}{18} \right)^2 \right], \\ \frac{\partial u(r, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad u(18, t) = 0.$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{8.9.} \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\Delta u, \quad 0 \leq r < 17, \quad 0 < t < \infty, \\
 & \begin{cases} u(r, 0) = \frac{1}{8} \left[1 - \left(\frac{r}{17} \right)^2 \right], \\ \frac{\partial u(r, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad u(17, t) = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{8.10.} \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 10\Delta u, \quad 0 \leq r < 16, \quad 0 < t < \infty, \\
 & \begin{cases} u(r, 0) = \frac{1}{8} \left[1 - \left(\frac{r}{16} \right)^2 \right], \\ \frac{\partial u(r, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad u(16, t) = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{8.11.} \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 11\Delta u, \quad 0 \leq r < 15, \quad 0 < t < \infty, \\
 & \begin{cases} u(r, 0) = \frac{1}{8} \left[1 - \left(\frac{r}{15} \right)^2 \right], \\ \frac{\partial u(r, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad u(15, t) = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{8.12.} \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 12\Delta u, \quad 0 \leq r < 14, \quad 0 < t < \infty, \\
 & \begin{cases} u(r, 0) = \frac{1}{8} \left[1 - \left(\frac{r}{14} \right)^2 \right], \\ \frac{\partial u(r, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad u(14, t) = 0.
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{8.13.} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 13\Delta u, \quad 0 \leq r < 13, \quad 0 < t < \infty,$$

$$\begin{cases} u(r, 0) = \frac{1}{8} \left[1 - \left(\frac{r}{13} \right)^2 \right], \\ \frac{\partial u(r, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad u(13, t) = 0.$$

$$\mathbf{8.14.} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 14\Delta u, \quad 0 \leq r < 12, \quad 0 < t < \infty,$$

$$\begin{cases} u(r, 0) = \frac{1}{8} \left[1 - \left(\frac{r}{12} \right)^2 \right], \\ \frac{\partial u(r, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad u(12, t) = 0.$$

$$\mathbf{8.15.} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 15\Delta u, \quad 0 \leq r < 11, \quad 0 < t < \infty,$$

$$\begin{cases} u(r, 0) = \frac{1}{8} \left[1 - \left(\frac{r}{11} \right)^2 \right], \\ \frac{\partial u(r, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad u(11, t) = 0.$$

$$\mathbf{8.16.} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16\Delta u, \quad 0 \leq r < 10, \quad 0 < t < \infty,$$

$$\begin{cases} u(r, 0) = \frac{1}{8} \left[1 - \left(\frac{r}{10} \right)^2 \right], \\ \frac{\partial u(r, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad u(10, t) = 0.$$

$$\mathbf{8.17.} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 17\Delta u, \quad 0 \leq r < 9, \quad 0 < t < \infty,$$

$$\begin{cases} u(r, 0) = \frac{1}{8} \left[1 - \left(\frac{r}{9} \right)^2 \right], \\ \frac{\partial u(r, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad u(9, t) = 0.$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{8.18.} \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 18\Delta u, \quad 0 \leq r < 8, \quad 0 < t < \infty, \\
 & \begin{cases} u(r, 0) = \frac{1}{8} \left[1 - \left(\frac{r}{8} \right)^2 \right], \\ \frac{\partial u(r, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad u(8, t) = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{8.19.} \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 19\Delta u, \quad 0 \leq r < 7, \quad 0 < t < \infty, \\
 & \begin{cases} u(r, 0) = \frac{1}{8} \left[1 - \left(\frac{r}{7} \right)^2 \right], \\ \frac{\partial u(r, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad u(7, t) = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{8.20.} \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 20\Delta u, \quad 0 \leq r < 6, \quad 0 < t < \infty, \\
 & \begin{cases} u(r, 0) = \frac{1}{8} \left[1 - \left(\frac{r}{6} \right)^2 \right], \\ \frac{\partial u(r, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad u(6, t) = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{8.21.} \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 21\Delta u, \quad 0 \leq r < 5, \quad 0 < t < \infty, \\
 & \begin{cases} u(r, 0) = \frac{1}{8} \left[1 - \left(\frac{r}{5} \right)^2 \right], \\ \frac{\partial u(r, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad u(5, t) = 0.
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{8.22.} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 22\Delta u, \quad 0 \leq r < 4, \quad 0 < t < \infty,$$

$$\begin{cases} u(r, 0) = \frac{1}{8} \left[1 - \left(\frac{r}{4} \right)^2 \right], \\ \frac{\partial u(r, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad u(4, t) = 0.$$

$$8.23. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 23 \Delta u, \quad 0 \leq r < 3, \quad 0 < t < \infty,$$

$$\begin{cases} u(r, 0) = \frac{1}{8} \left[1 - \left(\frac{r}{3} \right)^2 \right], \\ \frac{\partial u(r, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad u(3, t) = 0.$$

$$8.24. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 24 \Delta u, \quad 0 \leq r < 2, \quad 0 < t < \infty,$$

$$\begin{cases} u(r, 0) = \frac{1}{8} \left[1 - \left(\frac{r}{2} \right)^2 \right], \\ \frac{\partial u(r, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad u(2, t) = 0.$$

$$8.25. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 25 \Delta u, \quad 0 \leq r < 1, \quad 0 < t < \infty,$$

$$\begin{cases} u(r, 0) = \frac{1}{8} [1 - r^2], \\ \frac{\partial u(r, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad u(1, t) = 0.$$

$$8.26. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, \quad 0 \leq r < 6, \quad 0 < t < \infty,$$

$$\begin{cases} u(r, 0) = \frac{1}{8} \left[1 - \left(\frac{r}{6} \right)^2 \right], \\ \frac{\partial u(r, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad u(6, t) = 0.$$

$$\begin{aligned}
 8.27. \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\Delta u, \quad 0 \leq r < 5, \quad 0 < t < \infty, \\
 & \begin{cases} u(r, 0) = \frac{1}{8} \left[1 - \left(\frac{r}{5} \right)^2 \right], \\ \frac{\partial u(r, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad u(5, t) = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8.28. \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\Delta u, \quad 0 \leq r < 4, \quad 0 < t < \infty, \\
 & \begin{cases} u(r, 0) = \frac{1}{8} \left[1 - \left(\frac{r}{4} \right)^2 \right], \\ \frac{\partial u(r, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad u(4, t) = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8.29. \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16\Delta u, \quad 0 \leq r < 3, \quad 0 < t < \infty, \\
 & \begin{cases} u(r, 0) = \frac{1}{8} \left[1 - \left(\frac{r}{3} \right)^2 \right], \\ \frac{\partial u(r, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad u(3, t) = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8.30. \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 25\Delta u, \quad 0 \leq r < 2, \quad 0 < t < \infty, \\
 & \begin{cases} u(r, 0) = \frac{1}{8} \left[1 - \left(\frac{r}{2} \right)^2 \right], \\ \frac{\partial u(r, 0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad u(2, t) = 0.
 \end{aligned}$$

Задача 9. Сформулювати і розв'язати задачу математичної фізики.

$$9.1. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 16 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 3, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{2x^2}{3}, & 0 \leq x \leq \frac{3}{2}, \\ 3 - x, & \frac{3}{2} < x \leq 3, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(3, t) = 0. \end{cases}$$

$$9.2. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(2, t) = 0. \end{cases}$$

$$9.3. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 25 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 5, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{2x^2}{5}, & 0 \leq x \leq \frac{5}{2}, \\ 5 - x, & \frac{5}{2} < x \leq 5, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(5, t) = 0. \end{cases}$$

$$9.4. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 16 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 4, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & 0 \leq x \leq 2, \\ 4 - x, & 2 < x \leq 4, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(4, t) = 0. \end{cases}$$

$$9.5. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 5, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{2x^2}{5}, & 0 \leq x \leq \frac{5}{2}, \\ 5 - x, & \frac{5}{2} < x \leq 5, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(5, t) = 0. \end{cases}$$

$$9.6. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 3, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{2x^2}{3}, & 0 \leq x \leq \frac{3}{2}, \\ 3 - x, & \frac{3}{2} < x \leq 3, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(3, t) = 0. \end{cases}$$

$$9.7. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 25 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 8, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{x^2}{4}, & 0 \leq x \leq 4, \\ 8 - x, & 4 < x \leq 8, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(8, t) = 0. \end{cases}$$

$$9.8. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(2, t) = 0. \end{cases}$$

$$9.9. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 16 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 2x^2, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - x, & \frac{1}{2} < x \leq 1, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(1, t) = 0. \end{cases}$$

$$9.10. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 4, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & 0 \leq x \leq 2, \\ 4 - x, & 2 < x \leq 4, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(4, t) = 0. \end{cases}$$

$$9.11. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 10, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{x^2}{5}, & 0 \leq x \leq 5, \\ 10 - x, & 5 < x \leq 10, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(10, t) = 0. \end{cases}$$

$$9.12. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 25 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 9, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{2x^2}{9}, & 0 \leq x \leq \frac{9}{2}, \\ 9 - x, & \frac{9}{2} < x \leq 9, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(9, t) = 0. \end{cases}$$

$$9.13. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 3, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{2x^2}{3}, & 0 \leq x \leq \frac{3}{2}, \\ 3 - x, & \frac{3}{2} < x \leq 3, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(3, t) = 0. \end{cases}$$

$$9.14. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 5, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{2x^2}{5}, & 0 \leq x \leq \frac{5}{2}, \\ 5 - x, & \frac{5}{2} < x \leq 5, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(5, t) = 0. \end{cases}$$

$$9.15. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 7, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{2x^2}{7}, & 0 \leq x \leq \frac{7}{2}, \\ 7 - x, & \frac{7}{2} < x \leq 7, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(7, t) = 0. \end{cases}$$

$$9.16. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 25 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 2x^2, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - x, & \frac{1}{2} < x \leq 1, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(1, t) = 0. \end{cases}$$

$$9.17. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 4, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & 0 \leq x \leq 2, \\ 4 - x, & 2 < x \leq 4, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(4, t) = 0. \end{cases}$$

$$9.18. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 10, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{x^2}{5}, & 0 \leq x \leq 5, \\ 10 - x, & 5 < x \leq 10, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(10, t) = 0. \end{cases}$$

$$9.19. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(2, t) = 0. \end{cases}$$

$$9.20. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 16 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 8, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{x^2}{4}, & 0 \leq x \leq 4, \\ 8 - x, & 4 < x \leq 8, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(8, t) = 0. \end{cases}$$

$$9.21. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 2x^2, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - x, & \frac{1}{2} < x \leq 1, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(1, t) = 0. \end{cases}$$

$$9.22. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 25 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 4, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & 0 \leq x \leq 2, \\ 4 - x, & 2 < x \leq 4, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(4, t) = 0. \end{cases}$$

$$9.23. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 16 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 6, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{x^2}{3}, & 0 \leq x \leq 3, \\ 6 - x, & 3 < x \leq 6, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(6, t) = 0. \end{cases}$$

$$9.24. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 2x^2, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - x, & \frac{1}{2} < x \leq 1, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(1, t) = 0. \end{cases}$$

$$9.25. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 5, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{2x^2}{5}, & 0 \leq x \leq \frac{5}{2}, \\ 5 - x, & \frac{5}{2} < x \leq 5, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(5, t) = 0. \end{cases}$$

$$9.26. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 25 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 6, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{x^2}{3}, & 0 \leq x \leq 3, \\ 6 - x, & 3 < x \leq 6, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(6, t) = 0. \end{cases}$$

$$9.27. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 12, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{x^2}{6}, & 0 \leq x \leq 6, \\ 12 - x, & 6 < x \leq 12, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(12, t) = 0. \end{cases}$$

$$9.28. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 16 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(2, t) = 0. \end{cases}$$

$$9.29. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 6, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{x^2}{3}, & 0 \leq x \leq 3, \\ 6 - x, & 3 < x \leq 6, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(6, t) = 0. \end{cases}$$

$$9.30. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 36 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 3, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{2x^2}{3}, & 0 \leq x \leq \frac{3}{2}, \\ 3 - x, & \frac{3}{2} < x \leq 3, \end{cases} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(3, t) = 0. \end{cases}$$

Задача 10. Методом скінченних різниць (методом сіток) розв'язати задачу про розподіл температур в стержні довжиною $L = 10$ м, на кінцях якого весь час підтримується нульова температура, а початковий розподіл температур задається законом $f(x) = \frac{Nx(10-x)}{N+1}$ де N – номер варіанту.

Крок дискретизації по просторовій змінній $h_x = L/10$, обчислення виконати для трьох кроків по часу (h_t). Коефіцієнт в рівнянні теплопровідності $a = 1$.

Задача 11. Розв'язати задачу Діріхле для рівняння Лапласа в крузі.

$$11.1. \quad \Delta u = 0, \quad 0 \leq r < 1, \quad 11.2. \quad \Delta u = 0, \quad 0 \leq r < 2, \\ u|_{r=1} = \varphi^2 + \varphi + 1. \quad u|_{r=2} = \varphi^2 + \varphi.$$

$$11.3. \quad \Delta u = 0, \quad 0 \leq r < 1, \quad 11.4. \quad \Delta u = 0, \quad 0 \leq r < 2, \\ u|_{r=1} = 2\varphi^2 + 3\varphi + 5. \quad u|_{r=2} = \varphi^2 + 5\varphi + 7.$$

- 11.5.** $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 3$,
 $u|_{r=3} = \varphi^2$.
- 11.6.** $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 1$,
 $u|_{r=1} = 3\varphi^2 + \varphi + 2$.
- 11.7.** $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 4$,
 $u|_{r=4} = 5\varphi^2 + 2\varphi + 2$.
- 11.8.** $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 2$,
 $u|_{r=2} = 4\varphi^2 + 3\varphi + 1$.
- 11.9.** $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 1$,
 $u|_{r=1} = \varphi^2$.
- 11.10.** $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 2$,
 $u|_{r=2} = 3\varphi^2 - \varphi - 1$.
- 11.11.** $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 1$,
 $u|_{r=1} = 2\varphi^2 - 5\varphi - 2$.
- 11.12.** $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 2$,
 $u|_{r=2} = 4\varphi^2 - 3\varphi + 1$.
- 11.13.** $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 2$,
 $u|_{r=2} = 5\varphi^2 - 2\varphi + 1$.
- 11.14.** $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 2$,
 $u|_{r=2} = \varphi^2 - 5\varphi$.
- 11.15.** $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 3$,
 $u|_{r=3} = -\varphi^2 + 3\varphi$.
- 11.16.** $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 3$,
 $u|_{r=2} = -2\varphi^2 + 7$.
- 11.17.** $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 2$,
 $u|_{r=2} = \varphi^2 - 3\varphi + 4$.
- 11.18.** $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 1$,
 $u|_{r=1} = \varphi^2 + 7\varphi - 1$.
- 11.19.** $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 2$,
 $u|_{r=2} = 10\varphi^2 - 2\varphi - 1$.
- 11.20.** $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 1$,
 $u|_{r=1} = 60\varphi^2 - 5\varphi + 3$.
- 11.21.** $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 1$,
 $u|_{r=1} = -3\varphi^2 + 5\varphi - 2$.
- 11.22.** $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 3$,
 $u|_{r=3} = \varphi^2 + 2\varphi$.
- 11.23.** $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 4$,
 $u|_{r=4} = \varphi^2 - \varphi$.
- 11.24.** $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 1$,
 $u|_{r=1} = 3\varphi^2 + 2\varphi - 2$.

- 11.25. $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 2$, $u|_{r=2} = -4\varphi^2 - 3\varphi + 1$.
- 11.26. $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 1$, $u|_{r=1} = -\varphi^2 + \varphi - \pi$.
- 11.27. $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 2$, $u|_{r=2} = 5\varphi^2 - \varphi + \pi$.
- 11.28. $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 1$, $u|_{r=1} = -6\varphi^2 + \varphi - 2$.
- 11.29. $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 2$, $u|_{r=2} = 6\varphi^2 + 3\varphi + 1$.
- 11.30. $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 4$, $u|_{r=4} = \varphi^2 - 4\varphi + 2$.

Задача 12. Методом скінченних різниць (методом сіток) знайти стаціонарний розподіл температур в квадратній пластині: $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, якщо на границі температура відома:

$$x = 0: u = 9(N - 1), \quad x = 1: u = 9(N + 9),$$

$$y = 0: u = 90x + 9(N - 1), \quad y = 1: u = 90x^2 + 9(N - 1),$$

де N – номер варіанту. Знайти температуру у внутрішніх вузлах сітки з кроком $h_x = h_y = 1/3$.

13 Теорія ймовірностей та математична статистика

Теоретичні питання

1. Простір елементарних подій. Випадкові події, операції над ними. Алгебра подій.
2. Аксиоми теорії ймовірностей. Ймовірнісний простір.
3. Класичне та геометричне означення ймовірності.
4. Умовна ймовірність. Незалежність подій. Ймовірність добутку подій.
5. Формула повної ймовірності та Байєса.
6. Схема випробувань Бернуллі.
7. Випадкова величина. Функція розподілу випадкової величини та її властивості. Дискретні та неперервні розподіли.
8. Математичне сподівання випадкової величини.
9. Дисперсія та середньоквадратичне відхилення випадкової величини.
10. Біноміальний розподіл та розподіл Пуассона.
11. Рівномірний та показників розподіли.
12. Нормальний розподіл.
13. Випадковий вектор, його розподіл. Умовні та маргінальні розподіли елементів вектора.
14. Числові характеристики випадкового вектора. Коефіцієнт кореляції його властивості.
15. Функції від випадкових величин.
16. Розподіл суми незалежних випадкових величин.

17. Нерівності Чебишова.
18. Закони великих чисел.
19. Центральна гранична теорема.
20. Основні поняття математичної статистики. Вибірка. Емпірична функція розподілу. Гістограма і полігон.
21. Точкові оцінки невідомих параметрів розподілу.
22. Метод максимальної правдоподібності.
23. Інтервальні оцінки параметрів розподілу. Довірчі інтервали для параметрів нормального розподілу.
24. Перевірка гіпотези про розподіл. Критерій χ^2 .
25. Лінійна регресія. Точкові оцінки параметрів.
26. Елементи теорії випадкових процесів.
27. Основні поняття теорії випадкових процесів.
28. Лінійні операції над випадковими процесами.
29. Стаціонарні випадкові процеси.
30. Елементи спектральної теорії випадкових процесів.

Розрахункові завдання

Задача 1.

1.1. В кіоску на початок зміни було 5 упаковок кави “Jacobs”, 6 – “Nescafe” і 8 – “Галка”. Попит на кожен із видів кави був однаковий. За зміну було продано п’ять упаковок. Яка ймовірність того, що вся кава “Jacobs” залишилася в кіоску?

1.2. Наталя і Сергій домовилися зустрічати Новий рік в компанії чисельністю 8 чоловік. Вони обоє дуже хотіли сидіти за святковим столом поруч. Яка ймовірність здійснення їх бажання, якщо серед друзів є звичай розподіляти місця жеребкуванням?

1.3. Три гральні кубики підкидають по одному разу. Яка ймовірність того, що при цьому або на трьох гранях випадуть однакові числа, або всі числа будуть різними?

1.4. Десять варіантів контрольної роботи, записаних на окремих аркушах, роздають випадковим чином по одному во-сьми студентам, які сидять в одному ряду. Знайти ймовірність того, що варіанти №1 і №2 не роздані.

1.5. Для зменшення загальної кількості ігор 12 команд розбивають на дві підгрупи по 6 команд в кожній. Яка ймовірність того, що дві найбільш сильні команди виявляться в різних підгрупах?

1.6. У шафі стоять 10 пар чобіт. З них навмання вибирають 4 чоботи. Знайти ймовірність того, що серед вибраних чобіт жоден не має пари.

1.7. Марія та Оксана і ще 8 осіб стоять у черзі. Яка ймовірність того, що Марія та Оксана відокремлені одна від одної трьома особами?

1.8. На полиці у довільному порядку розставлено 40 книг, серед яких є тритомник М. Коцюбинського. Знайти ймовірність того, що ці три томи стоять у порядку зростання зліва направо (не обов'язково поряд).

1.9. У записаному на карточці телефонному номері три останні цифри стерлись. У припущенні, що всі комбінації трьох стертих цифр рівноможливі, знайти ймовірність того, що стерлись різні цифри, відмінні від 1,3,5.

1.10. Серед 20 студентів групи, в якій 10 дівчат, розігруються 5 білетів в театр. Знайти ймовірність того, що серед власників білетів виявляться три дівчини.

1.11. Кидається 3 шестигранні кубики, на гранях яких нанесено числа від 1 до 6. Знайти ймовірність того, що принаймні на одному з трьох кубиків випаде парне число.

1.12. В урні є 10 кульок, серед них 4 білих і 6 червоних. Навмання виймається одразу 4 кульки. Знайти ймовірність, що принаймні дві з них білі.

1.13. У товаристві з 20 чоловік є 2 брати, всі члени товариства сідають за круглий стіл. Знайти ймовірність того, що брати сидітимуть поруч.

1.14. Із колоди карт (52) вибирають 6. Знайти ймовірність того, що серед цих шести карт будуть представники всіх чотирьох мастей.

1.15. В урні 15 червоних, 9 синіх та 6 зелених куль однакового розміру. Навмання беруть 6 куль. Яка ймовірність, що буде узято 1 зелену, 2 синіх і 3 червоних кулі?

1.16. В урні 15 червоних, 9 синіх та 6 зелених куль однакового розміру. Навмання беруть 8 куль. Яка ймовірність того, що буде взято 3 зелених, 2 синіх і 3 червоних кулі?

1.17. У групі 15 студентів, серед них 8 відмінників. За списком навання вибрано 9 студентів. Знайти ймовірність того, що серед вибраних студентів буде 6 відмінників.

1.18. У ліфт дев'ятиповерхового будинку на першому поверсі ввійшло 6 пасажирів, кожен з яких з однаковою ймовірністю може вийти на будь-якому з поверхів, починаючи з другого. Знайти ймовірність того, що всі пасажери вийдуть на п'ятому поверсі.

1.19. З колоди 36 карт навання витягують 3 карти. Знайти ймовірність того, що сума очок цих карт дорівнює 21, якщо валет складає 2 очки, дама – 3, король – 4, туз – 11, а решта карт – відповідно шість, сім, вісім, дев'ять і десять очок.

1.20. З букв А, В, І, К, Р, Т навання вибирають 3. Знайти ймовірність події А, яка полягає в тому, що при цьому вийде одне із слів, які можна утворити, переставляючи букви у слові КІР.

1.21. У гаманці лежать 3 монети вартістю по 50 коп. і сім монет по 25 коп. Навмання береться одна монета, а потім виймається друга, яка виявляється монетою вартістю 50 коп. Знайти ймовірність того, що і перша монета була вартістю 50 коп.

1.22. З десяти білетів лотереї виграшними є два. Знайти ймовірність того, що серед взятих навання п'яти білетів два будуть виграшними.

1.23. Знайти ймовірність того, що дні народження 12 осіб припадають на різні місяці року.

1.24. З партії, в якій 31 деталь без дефектів і 7 з дефектами, беруть навання 4 деталі. Яка ймовірність того, що серед вибраних три деталі без дефектів?

1.25. На восьми однакових картках написані відповідно числа: 2,4,5,6,7,8,11,12. Навмання беруть 2 картки. Знайдіть ймо-

вірність того, що утворений з двох одержаних чисел дріб є скоротним.

1.26. У 30 екзаменаційних білетах міститься по два питання, які не повторюються. Студент знає лише 45 питань. Яка ймовірність того, що вибраний навмання білет містить питання, які студент знає?

1.27. 3 колоди карт (52 карти) навмання витягують 3. Знайти ймовірність того, що це буде трійка, сімка і туз.

1.28. Знайти ймовірність того, що серед навмання вибраних 30 осіб є принаймні двоє, що народилися в один день і місяць.

1.29. Обчислити ймовірність того, що для даних 28 осіб з 12 місяців у році на 6 місяців припадає по два дні народження, на інші 4 місяці припадає по 3 дні народження і на решту два місяці – по 4 дні народження.

1.30. 3 урни, в якій лежать кулі з номерами $1, 2, \dots, 100$, виймають 10 разів по одній кулі і кожного разу повертають назад. Знайти ймовірність того, що номери вибраних куль утворюють зростаючу послідовність.

Задача 2.

2.1. Телефонна книжка розкривається навмання і вибирається випадковий номер телефону. Вважаючи, що телефонні номери складаються з 7 цифр, причому всі комбінації цифр рівно ймовірні, знайти ймовірності наступних подій: $A = \{\text{чотири останні цифри телефонного номера однакові}\}$; $B = \{\text{всі цифри різні}\}$.

2.2. 10 чоловіків і 10 жінок випадковим чином зайняли ряд із 20 місць. Знайти ймовірності таких подій:

$A = \{\text{жодних два чоловіки не сидять поруч}\}$; $B = \{\text{всі чоловіки сидять поруч}\}$.

2.3. 52 карти роздаються чотирьом гравцям (кожному по 13 карт). Знайти ймовірності таких подій: $A = \{\text{двоє певних гравців не отримують жодного туза}\}$; $B = \{\text{всі тузи попадуть до одного з гравців}\}$.

2.4. 52 карти роздаються чотирьом гравцям (кожному по 13 карт). Знайти ймовірності таких подій: $A = \{\text{двоє певних гравців не отримають жодного туза}\}$; $B = \{\text{всі тузи попадуть до одного з гравців}\}$.

2.5. В три вагони поїзда заходять дев'ять пасажирів. Знайти ймовірності таких подій: $A = \{\text{в перший вагон зайде три пасажери}\}$; $B = \{\text{в кожний вагон зайде по три пасажери}\}$.

2.6. Шість пасажирів зайшли в ліфт на першому поверсі семиповерхового будинку. Вважаючи, що будь-який пасажир може з однаковою ймовірністю вийти на 2-му, 3-му,...7-му поверхах, знайти ймовірності наступних подій: $A = \{\text{на другому, третьому і четвертому поверхах не вийде жоден пасажир}\}$; $B = \{\text{троє пасажирів вийдуть на сьомому поверсі}\}$.

2.7. Шість пасажирів зайшли в ліфт на першому поверсі семиповерхового будинку. Вважаючи, що будь-який пасажир може з однаковою ймовірністю вийти на 2-му, 3-му,...7-му поверхах, знайти ймовірності наступних подій: $A = \{\text{на кожному поверсі вийде по одному пасажиру}\}$; $B = \{\text{всі пасажери вийдуть на одному поверсі}\}$.

2.8. З 30 чисел (1,2,...,29,30) випадково вибирається 10 різних чисел. Знайти ймовірності таких подій:

$A = \{\text{рівно 5 чисел ділиться на 3}\}$; $B = \{\text{5 чисел парних і 5 непарних, причому рівно одне число ділиться на 10}\}$.

2.9. 8 осіб займають місця з однієї сторони прямокутного стола. Кількість місць дорівнює 12. Знайти ймовірності наступних подій: $A = \{\text{дві певні особи опиняться поруч}\}$; $B = \{\text{три вільних місця будуть знаходитися поряд}\}$.

2.10. В скриньці є 3 білі, 5 чорних і 7 червоних кульок. Навмання вибрали 5 кульок. Знайти ймовірності таких подій: $A = \{\text{вибрано принаймні одну червону кульку}\}$, $B = \{\text{вибрано всі червоні кульки}\}$.

2.11. Із скриньки, що містить 10 кульок, з яких 6 білих і 4 чорних, навмання вибрано 3 кульки. Знайти ймовірності на-

ступних подій: $A = \{\text{всі вибрані кульки білі}\}$, $B = \{\text{серед вибраних кулек рівно дві білі}\}$.

2.12. До чотирьохстороннього перехрестя з кожної сторони під'їхало по одному автомобілю. Кожний автомобіль може з однаковою ймовірністю здійснити один з маневрів на перехресті: розвернутись і поїхати назад, поїхати прямо, наліво або направо. Через деякий час всі автомобілі покинули перехрестя. Знайти ймовірності наступних подій $A = \{\text{всі автомобілі поїдуть однією і тією ж вулицею}\}$; $B = \{\text{певною вулицею поїде три автомобілі}\}$.

2.13. До чотирьохстороннього перехрестя з кожної сторони під'їхало по одному автомобілю. Кожний автомобіль може з однаковою ймовірністю здійснити один з маневрів на перехресті: розвернутись і поїхати назад, поїхати прямо, наліво або направо. Через деякий час всі автомобілі покинули перехрестя. Знайти ймовірності таких подій: $A = \{\text{кожною з чотирьох вулиць поїде рівно один автомобіль}\}$; $B = \{\text{принаймні однією з вулиць не поїде жоден з автомобілів}\}$.

2.14. На п'яти карточках записані цифри від 1 до 5. Дослід полягає у випадковому виборі трьох карточок і розкладанні їх в порядку витягування зліва направо. Знайти ймовірності наступних подій: $A = \{\text{з'явиться число, що містить хоча б одну з цифр 2 або 3}\}$, $B = \{\text{з'явиться число, що не містить цифри 3}\}$.

2.15. На п'яти карточках записані цифри від 1 до 5. Дослід полягає у випадковому виборі трьох карточок і розкладуванні в порядку витягування зліва направо. Знайти ймовірності наступних подій: $A = \{\text{одержане число складається з послідовних цифр}\}$, $B = \{\text{з'явиться парне число}\}$.

2.16. Із колоди в 52 карти витягують навмання 6 карт. Знайти ймовірності наступних подій: $A = \{\text{всі вибрані карти бубнової масті}\}$, $B = \{\text{всі вибрані карти однієї масті}\}$.

2.17. З множини всіх послідовностей довжини 10, що складається з цифр 0, 1, 2, випадково вибирається одна. Знайти ймовірності наступних подій: $A = \{\text{послідовність містить рівно 6 нулів, причому 2 з них знаходяться на кінцях послідовнос-}$

ті}; $B = \{\text{послідовність містить рівно 5 одиниць}\}$.

2.18. Числа 1, 2,..., 9 записуються у випадковому порядку. Знайти ймовірності наступних подій: $A = \{\text{числа 1 і 2 стоять поруч і в порядку зростання}\}$, $B = \{\text{числа 3, 6 і 9 розміщені поруч в довільному порядку}\}$.

2.19. Числа 1, 2,..., 9 записуються у випадковому порядку. Знайти ймовірності наступних подій: $A = \{\text{на парних місцях стоять парні числа}\}$, $B = \{\text{сума кожних двох чисел, що стоять на однаковій відстані від кінців, дорівнює 10}\}$.

2.20. Яка ймовірність того, що п'ятизначний номер випадково взятого автомобіля в великому місті: $A = \{\text{має всі цифри різні}\}$; $B = \{\text{має тільки дві однакові цифри}\}$.

2.21. Знайти ймовірність того, що дні народження 12 людей $A = \{\text{випадають на різні місяці року}\}$; $B = \{\text{випадають на один місяць року}\}$.

2.22. Колода з 36 карт добре перемішана (тобто всі можливі варіанти розташування карт рівноймовірні). Знайти ймовірності наступних подій: $A = \{\text{чотири тузи розташовані поряд}\}$; $B = \{\text{місця розташування тузів утворюють арифметичну прогресію з кроком 7}\}$.

2.23. Кидається 6 гральних кубиків. Знайти ймовірності наступних подій: $A = \{\text{випаде 3 одиниці, дві трійки і одна шістка}\}$; $B = \{\text{випадуть різні цифри}\}$.

2.24. 10 варіантів контрольної роботи, написані кожний на окремії карточці, змішуються і розподіляються довільним чином серед восьми студентів, що сидять в одному ряду, причому кожний отримує один варіант. Знайти ймовірності наступних подій: $A = \{\text{варіанти з номерами 1, 2 залишаться невикористаними}\}$; $B = \{\text{варіанти 1 і 2 дістануться студентам, що сидять поруч}\}$.

2.25. Кидають 10 однакових гральних кубиків. Обчислити ймовірності наступних подій: $A = \{\text{на жодному з кубиків не випаде 6 очок}\}$; $B = \{\text{хоча б на одному кубіку випаде 6 очок}\}$.

2.26. Телефонна книжка розкривається навмання і вибирається випадковий номер телефону. Вважаючи, що телефонні

номери складаються з 7 цифр, причому всі комбінації цифр рівноймовірні, знайти ймовірності наступних подій: $A = \{\text{номер починається з цифри 5}\}$; $B = \{\text{номер містить три цифри 5, дві цифри 1 і дві цифри 2}\}$.

2.27. Із колоди в 52 карти витягують навмання 6 карт. Знайти ймовірності наступних подій: $A = \{\text{серед вибраних карт виявиться хоча б один туз}\}$, $B = \{\text{буде отримано наступний склад карт: валет, дама і два королі}\}$.

2.28. 7 яблук, 3 апельсина і 5 лимонів розкладаються випадковим чином в три пакета, але так, щоб в кожному була однакова кількість фруктів. Знайти ймовірності наступних подій: $A = \{\text{в кожному з пакетів по одному апельсину}\}$; $B = \{\text{випадково вибраний пакет не містить апельсинів}\}$.

2.29. 12 осіб, серед яких є C і O шикуються в шеренгу довільним чином. Знайти ймовірності наступних подій: $A = \{C \text{ і } O \text{ будуть стояти поруч}\}$, $B = \{\text{між } C \text{ і } O \text{ буде знаходитись рівно 4 особи}\}$.

2.30. Вибрано п'ять різних цифр. Знайти ймовірності наступних подій: $A = \{\text{вибрана цифра 1}\}$, $B = \{\text{вибрані тільки парні цифри}\}$.

Задача 3.

3.1. На відрізку AB довжиною a навмання поставлено дві точки C і D . Знайти ймовірність того, що точка C буде ближче до точки D , ніж до точки A .

3.2. Яка ймовірність того, що сума трьох навмання взятих відрізків, довжина кожного з яких не перевищує r , буде більшою, ніж r ?

3.3. На площині проведено паралельні прямі, відстань між якими 6 см. На площину навмання кидають круг радіуса 2 см. Яка ймовірність того, що круг не перетне жодної з прямих?

3.4. Стержень довжиною m навмання розламали на три частини. Яка ймовірність того, що з одержаних частин можна утворити трикутник?

3.5. Яка ймовірність того, що з трьох навмання взятих відрізків довжиною, не більшою за a , можна побудувати трикутник?

3.6. Навмання взято два додатні числа, кожне з яких не перевищує 1. Знайти ймовірність того, що сума їх не перевищує 1, а добуток не перевищує $2/9$.

3.7. На відрізку $[-1; 2]$ навмання взято 2 числа. Яка ймовірність того, що їх сума більша за 1, а добуток менший за 1?

3.8. У квадрат з вершинами $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(1, 1)$, $D(0, 1)$ навмання кинуто точку $M(p, q)$. Знайти ймовірність того, що корені квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$ будуть дійсними.

3.9. На глобусі випадково вибирається точка. Яка ймовірність того, що ця точка знаходиться між 10° і 40° західної довготи?

3.10. На глобусі випадково вибирається точка. Яка ймовірність того, що ця точка знаходиться між 30° і 60° північної широти?

3.11. Відрізок довжиною 20 см розділили на 3 частини, вибираючи дві точки поділу навмання. Знайти ймовірність того, що з утворених трьох відрізків можна скласти трикутник.

3.12. Всередину круга кинуто точку. Знайти ймовірність того, що вона потрапить у вписаний в цей круг квадрат.

3.13. На колі радіуса R навмання взято три точки A , B , C . Яка ймовірність, що трикутник ABC гострокутний?

3.14. Навмання взято два додатних числа x і y , кожне з яких не перевищує 2. Знайти ймовірність того, що добуток xy не більший за одиницю, а частка y/x не більша за 2.

3.15. Навмання взято два додатних числа x і y , кожне з яких не перевищує одиниці. Знайти ймовірність того, що сума $x + y$ не перевищує одиниці, а добуток xy не менший за 0,09.

3.16. Навмання вибирається число, яке міститься між нулем і одиницею. Знайти ймовірність того, що це число буде не менше від 0,25 і не більше від 0,75.

3.17. Між нулем і одиницею навмання вибирають два числа. Знайти ймовірність того, що сума цих чисел буде не більша від 1, а модуль їх різниці не менший від $1/2$.

3.18. У круг, радіус якого R , навмання кидають точку. Знайти ймовірність того, що ця точка опиниться поза квадратом, вписаним у цей круг.

3.19. На відрізку довжиною l , навмання вибирають дві точки. Знайти ймовірність того, що відстань між цими точками буде не менша від $l/2$.

3.20. На відрізку $[-1; 1]$ навмання беруть 2 числа. Знайти ймовірність того, що сума квадратів цих чисел буде не більша за одиницю.

3.21. Знайти ймовірність того, що точка, кинута у будь-яке місце всередині круга, потрапить у вписаний в цей круг правильний трикутник.

3.22. На відрізку завдовжки l взято будь-які дві точки. Знайти ймовірність того, що відстань між ними не перевищує kl , де $0 < k < 1$.

3.23. На колі взято будь-які три точки A, B, C . Знайти ймовірність того, що трикутник ABC – тупокутний.

3.24. На паркетну підлогу кидають монету діаметром d . Паркет складений з квадратів із стороною a ($d < a$). Знайти ймовірність того, що монета не перетне жодної із сторін квадратів паркету.

3.25. На площині накреслено паралельні прямі на відстані $2a$ одна від одної. На площину кидають монету радіуса r ($r < a$). Знайти ймовірність того, що монета не перетне жодної з прямих.

3.26. На площині проведено паралельні прямі, відстані між якими дорівнюють 8 см. На площину кидають навмання круг радіусом 2,5 см. Яка ймовірність того, що цей круг не перетне жодної з прямих?

3.27. Два судна повинні підійти до одного причалу. Прихід суден – незалежні випадкові події, рівноможливі протягом доби. Знайти ймовірність того, що одному з суден доведеться чекати звільнення причалу, якщо час стоянки першого судна – одна година, а другого дві години.

3.28. На відрізку AB завдовжки l випадковим чином вибрано дві точки L і M . Знайти ймовірність того, що точка L буде ближче до A , ніж точка M .

3.29. Знайти ймовірність того, що корені квадратного рівняння $x^2 + 2ax + b = 0$ дійсні, якщо значення коефіцієнтів рівноможливі у прямокутнику $|a| \leq n$, $|b| \leq m$.

3.30. Відрізок завдовжки l розділили на три частини, вибираючи дві точки поділу випадковим способом. Знайти ймовірність того, що довжина кожної з частин не перевищує заданої величини a ($l/3 \leq a \leq l$).

Задача 4.

4.1. З урни, яка містить 3 білі та 2 чорні кулі, перекладено дві кулі до урни, яка містить 4 білі та 4 чорні кулі. Яка ймовірність того, що з другої урни після такого перекладання буде взято білу кулю?

4.2. Є два однакових ящики з кулями. У першому ящику 2 білих та 1 чорна куля, у другому – 1 біла та 4 чорних кулі. Навмання вибирають один ящик і виймають з нього кулю. Яка ймовірність, що витягнута куля буде білою?

4.3. У правій кишені є три монети по 50 коп. і чотири по 25 коп., а в лівій кишені – шість монет по 50 коп. і три по 25 коп. З правої кишені в ліву навмання переклали п'ять монет. Визначити ймовірність вийняти після перекладання з лівої кишені монету 50 коп.

4.4. При дослідженні жирності молока корів все стадо було розбито на три групи. В першій групі виявилось 70%, в другій – 23%, в третій – 7% всіх корів. Ймовірність того, що молоко, яке дає окрема корова, має не менше, ніж 4% жирності, для кожної групи корів відповідно рівна 0,6; 0,35 і 0,1. Визначити ймовірність того, що для взятої навмання корови жирність молока складе не менше, ніж 4%.

4.5. Для сівби заготовлено насіння чотирьох сортів пшениці. Причому 20% всього насіння є 1-го сорту, 30% – 2-го сорту, 10% – 3-го сорту і 40% – 4-го сорту. Ймовірність того, що із зерна виросте колос, що містить не менше, ніж 40 зернин, для першого сорту рівна 0,5, для другого – 0,3, для третього – 0,2, для четвертого – 0,1. Знайти ймовірність того, що навмання взяте зерно дасть колос, що містить не менше, ніж 40 зернин.

4.6. З урни, яка містить 2 білих і 3 чорних кульки, навмання витягують 2 кульки і кладуть в урну одну білу кульку. Знайти ймовірність того, що після цього навмання витягнута з урни кулька виявиться білою.

4.7. Троє робітників виготовляють однотипні деталі. При цьому їх продуктивності співвідносяться, як 10:8:12. Ймовірність допустити брак при виготовленні однієї деталі для кожного із робітників відповідно дорівнює 0,02; 0,07; 0,01. Після зміни всі деталі, виготовлені робітниками, поміщають в один ящик. Яка ймовірність того, що навмання взята одна деталь із ящика виявиться стандартною?

4.8 Є три групи ящиків. До першої групи належить два ящики, в кожному з них міститься по 5 стандартних і 5 бракованих однотипних деталей; до другої групи належить три ящики, в кожному з них міститься по 8 стандартних і 2 браковані деталі; і до третьої групи належить п'ять ящиків, в кожному з них – по 4 стандартних і 6 бракованих деталей. Яка ймовірність того, що із випадковим чином вибраного ящика навмання взяті дві деталі виявляться стандартними?

4.9. Із 16 баскетболістів чотири влучають у кошик з імовірністю 0,9, сім – з імовірністю 0,8, три – з імовірністю 0,7 і два – з імовірністю 0,6. Яка імовірність того, що навмання відібраний спортсмен влучить у кошик?

4.10. Імовірність того, що двохкамерний холодильник не зіпсується протягом гарантійного терміну, дорівнює 0,8, а для однокамерного ця ймовірність на 10% більша. У магазині є шість двохкамерних і десять однокамерних холодильників. Знайти ймовірність того, що навмання куплений холодильник не зіпсується протягом гарантійного терміну.

4.11. Нехай маємо 2 урни: в першій 15 кульок, серед яких одна червона і 14 білих, а в другій 5 кульок, серед яких одна червона і 4 білих. З цих двох урн навмання вибирається одна урна, а потім з цієї урни навмання виймається одна кулька. Знайти ймовірність того, що ця кулька червона.

4.12. Є дві партії зошитів. У першій партії 11 зошитів, у другій 9, причому в кожній є 3 зошити в клітку, решта у лінійку. З першої партії навмання виймається один зошит і перекладається в другу, після чого з другої партії навмання береться один зошит. Знайти ймовірність того, що цей останній зошит виявиться в клітку.

4.13. Ймовірність влучення в мішень при кожному пострілі з двох з п'яти рушниць дорівнює 0,8. Ймовірність влучення з інших трьох рушниць 0,9. Знайти ймовірність влучення в мішень при одному пострілі із навмання взятої рушниці.

4.14. Є дві урни, в кожній з яких по 6 білих і по 4 червоних кульки. З кожної урни навмання виймається по одній кульці, а потім з цих двох кульок навмання береться одна. Знайти ймовірність того, що остання кулька біла.

4.15. Учень вивчив 25 екзаменаційних питань з 30. На екзамені він навмання вибирає білет, у якому є два питання. Знайти ймовірність того, що учень складе екзамен, якщо для цього досить відповісти на два вибрані питання, або ж на одне з них і на одне додаткове, яке вибирається навмання серед решти 28 питань.

4.16. В урну, що містить 20 куль, опущено білу кулю, після чого навмання вибирається одна куля. Знайти ймовірність того, що витягнута куля – біла, якщо рівноможливі всі припущення про початковий склад куль.

4.17. В урні, що містить 30 куль, опущено білу кулю, після чого навмання вибирається одна куля. Знайти ймовірність того, що витягнута куля – чорна, якщо рівноможливі всі припущення про початковий склад куль.

4.18. На фабриці виготовляють гвинти. Перша машина виготовляє 25%, друга – 35%, а третя – 40% усіх виробів. Частка браку відповідно 5%, 4%, 2%. Яка ймовірність того, що випадково вибраний гвинт бракований?

4.19. Є два однакових ящики з кулями. У першому ящику 20 білих і 10 чорних куль, у другому 10 білих і 40 чорних куль. Навмання вибирають один ящик і виймають з нього кулю. Яка ймовірність, що витягнута куля буде білою?

4.20. В урні знаходиться одна куля, про яку відомо, що вона або біла, або чорна. В урну поклали чорну кулю, а потім після ретельного перемішування взяли навмання одну кулю, яка виявилася білою. Яка ймовірність того, що після цього візьмуть з урни чорну кулю?

4.21. В піраміді 5 гвинтівок, три з яких оснащені оптичним прицілом. Ймовірність того, що стрілець попаде в мішень при пострілі з гвинтівки з оптичним прицілом, рівна 0,95; для гвинтівки без оптичного прицілу ця ймовірність рівна 0,7. Знайти

імовірність того, що стрілець попаде в мішень при пострілі з навмання взятої з піраміди гвинтівки.

4.22. В ящику міститься 12 деталей, виготовлених на заводі №1, 20 деталей – на заводі №2 і 18 деталей – на заводі №3. Імовірність того, що деталь, виготовлена на заводі №1, бездоганної якості, рівна 0,9; для деталей, виготовлених на заводах №2 і №3, ця ймовірність дорівнює відповідно 0,6 і 0,9. Знайти імовірність того, що вибрана навмання деталь буде бездоганної якості.

4.23. В першій урні міститься 10 кульок, з них 8 білих; в другій урні 20 кульок, з них 4 білих. З кожної урни навмання взяли по одній кульці, а потім з цих двох кульок взяли навмання одну кульку. Знайти імовірність того, що взяли білу кульку.

4.24. В кожній з трьох урн міститься 6 чорних і 4 білих кульок. З першої урни навмання витягнули одну кульку і переклали в другу, після чого з другої урни навмання витягнули одну кульку і переклали в третю. Знайти імовірність того, що кулька, навмання витягнута з третьої урни, є білою.

4.25. Імовірність того, що під час роботи цифрової електронної машини вийде збій в арифметичному обладнанні, в оперативній пам'яті і в іншому устаткуванні відносяться як 3:2:5. Імовірність виявлення збою в арифметичному обладнанні, в оперативній пам'яті, і в іншому устаткуванні відповідно дорівнюють 0,8; 0,9; 0,9. Знайти імовірність того, що збій, який виникне в машині, буде виявлено.

4.26. Із урни, що містила 20 білих і 30 чорних куль, загублено одну кулю про колір якої відомо, що він або білий, або чорний. Яка ймовірність витягнути навмання із урни білу кулю?

4.27. Є п'ять урн, у двох з них є по 2 білі кулі і одній чорній, в одній урні – 10 чорних куль, і в двох інших – по 3 білих і одній чорній кулі. Випадковим чином вибирається урна і з неї навмання виймається куля. Яка ймовірність витягнути білу кулю?

4.28. Є п'ять урн, у двох з них є по 3 білі і 2 чорні кулі, в одній є 15 чорних і 6 білих куль, а в інших двох – по 6 чорних і 5 білих куль. Навмання вибирається урна, з неї навмання вибирається куля. Яка ймовірність вибрати чорну кулю?

4.29. Є 2 однакові урни та 2 білі і 2 чорні кулі. Як потрібно розмістити кулі по урнах, щоб ймовірність витягнути білу кулю з навання взятої урни була найменшою?

4.30. Є 2 однакові урни та 2 білі і 2 чорні кулі. Як потрібно розмістити кулі по урнах, щоб ймовірність вибрати навання чорну кулю з навання вибраної урни була найбільшою?

Задача 5

5.1. Прилад, що знаходиться на борту літака може працювати в двох режимах: в умовах нормального крейсерського польоту та в умовах перевантаження. Крейсерський режим має місце протягом 80% всього часу польоту, умови перевантаження – протягом 20% всього часу польоту. Ймовірність відмови приладу під час польоту в нормальному режимі дорівнює 0.1, а в умовах перевантаження – 0.4. Обчислити надійність приладу (ймовірність безвідмовної роботи) за час польоту.

5.2. Два цехи штампують однотипні деталі. Перший цех дає 5% браку, другий – 10%. Для контролю відібрано 100 деталей з першого цеху та 300 з другого. Всі ці деталі змішали в одну партію і з неї навання вибрали одну деталь. Яка ймовірність того, що вона бракована?

5.3. В продаж надходять телевізори трьох заводів. Продукція першого заводу містить 20% телевізорів з прихованим дефектом, другого – 10% і третього – 5%. Яка ймовірність купити якісний телевізор, якщо в магазин надійшло 30% телевізорів з першого заводу, 20% з другого та 50% – з третього заводу?

5.4. Три стрільці, ймовірності влучення яких при одному пострілі в мішень при незмінних умовах постійні та відповідно дорівнюють $p_1 = 0,8$, $p_2 = 0,8$, $p_3 = 0,8$, по одному разу стріляють в одну і ту ж мішень. Обчислити ймовірність події $A = \{\text{в мішені буде рівно два отвори}\}$.

5.5. В ящику є 20 тенісних м'ячів, серед них 15 нових і 5 вживаних. Для гри навгад вибираються два м'ячі і після гри повертаються назад в ящик. Потім для другої гри та-

кож навгад вибирають ще два м'ячі. Яка ймовірність того, що друга гра буде проводитись новими м'ячами?

5.6. Із 10 студентів, що прийшли здавати екзамен, два знають 20 білетів із 30, один тільки 15, а решта студентів знають всі 30 білетів. Екзаменатор навмання викликає одного із студентів. Яка ймовірність того, що він здасть екзамен?

5.7. Людині, що має четверту групу крові, можна перелити кров любої групи; людині з другою або третьою групою крові можна перелити кров або тієї ж групи, або першої; людині з першою групою крові можна перелити лише кров першої групи. Серед населення 33,7% мають першу, 37,5% – другу, 20,9% – третю та 7,9% – четверту групи крові. Знайти ймовірність того, що випадково взятому хворому можна перелити кров випадково взятого донора.

5.8. Програма екзамену містить 30 різних питань, з яких студент знає тільки 15. Для успішної здачі екзамену досить відповісти на два запропонованих питання або на одне з них і на додаткове питання. Яка ймовірність того, що студент успішно здасть екзамен?

5.9. З множини чисел $E = \{1, 2, \dots, 10\}$ навгад послідовно і без повернення беруть два числа. Яка ймовірність того, що перше число більше від другого не менш ніж на 5?

5.10. Студент знає тільки 10 із 25 екзаменаційних білетів. В якому випадку шанси цього студента одержати знайомий білет більші: коли він підходить брати білет першим чи другим?

5.11. В трьох скриньках лежать білі та чорні кульки. У першій скриньці – 3 білі і одна чорна, у другій – 6 білих і 4 чорних, у третій – 9 білих і одна чорна. З навмання взятої скриньки виймають одну кульку. Знайти ймовірність того, що вона біла.

5.12. В першому ящику 5 білих і 10 чорних кульок, в другому – 3 білих і 7 чорних кульок. З другого ящика в перший переклали кульку, а потім з першого ящика ви-

тягли навмання одну кульку. Визначити ймовірність того, що витягнута кулька – біла.

5.13. В групі спортсменів 20 лижників, 6 велосипедистів і 4 легкоатлети. Ймовірності виконання норми майстра спорту для кожної групи спортсменів відповідно дорівнюють 0,9, 0,8, 0,75. Знайти ймовірність того, що навмання вибраний спортсмен виконає норму майстра спорту.

5.14. 10 студентів розв'язують задачу. Двоє з них вчать на 5, п'ятеро на 4, троє на 3. Ймовірність розв'язати задачу для кожного студента з цих груп дорівнює відповідно 0,95, 0,8, 0,5. Знайти ймовірність того, що задача буде розв'язана одним із студентів.

5.15. Маємо три скриньки. У першій міститься 8 білих і 2 чорних кульки, у другій – 5 білих і 5 чорних, у третій – 2 білих і 8 чорних. Навмання підкидають гральний кубик. Якщо випаде на грані число кратне 2, то навмання беруть дві кульки з першої скриньки, якщо випаде число 5 – дві кульки з другої скриньки, і якщо випаде число, яке не буде кратним 2 і не дорівнює 5 – дві кульки з третьої скриньки. Знайти ймовірність появи двох білих кульок в такому експерименті.

5.16. Два заводи виготовляють однакові реактиви, причому 8% пачок реактивів першого і 6% пачок реактивів другого заводу мають більшу від допустимої кількість домішок. На складі є 200 пачок реактивів виготовлених першим заводом і 300 пачок виготовлених другим заводом. Яка ймовірність того, що навмання вибрана пачка реактивів містить допустиму кількість домішок?

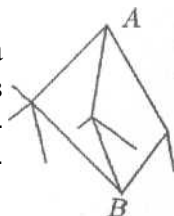
5.17. Перевіряється партія виробів, серед яких 10% бракованих. При перевірці бракований виріб виявляється з ймовірністю 0,92, а якісний виріб бракується з ймовірністю 0,06. Яка ймовірність того, що навмання вибраний виріб буде визнано бракованим?

5.18. Є три однакові на вигляд коробки. В першій коробці 10 білих і 5 чорних кульок, в другій – 8 білих і 8 чорних куль, а в третій – тільки чорні кульки. Навмання вибирається коробка, а в ній кулька. Яка ймовірність, що во-

на біла?

5.19. Проводяться три незалежні постріли снарядами по цілі з ймовірністю влучання 0,6 кожен. Ціль знищується з ймовірністю 0,5 при влученні одним снарядом, з ймовірністю 0,9 при влученні двома снарядами і з ймовірністю 1 – при влученні трьох снарядів. Знайти ймовірність знищення цілі.

5.20. Мандрівник виходить з пункту A і на кожному роздоріжжі вибирає навімання одне з можливих продовжень шляху (не повертаючись назад). Яка ймовірність того, що він попаде в пункт B ?



5.21. Студент приходить на лекцію з ймовірністю 0,8. Лекція читається на потоці з трьох груп. Залежно від настрою лектор робить переключку в усіх групах з ймовірністю 0,3, з тією ж ймовірністю тільки в одній, навімання взятій групі, і з ймовірністю 0,4 взагалі переключки не робить. Яка ймовірність, що у випадково взятий день, коли ця лекція є в розкладі, буде зафіксована відсутність студента на лекції?

5.22. Дві сестри ходять в ліс по чорниці з маленьким відерком. Разом вони завжди набирають повне відерко, старша сестра сама може набрати відерко в 40% випадків, а молодша – тільки в 5%. Мама може залишити незалежно одну від одної вдома з ймовірністю $2/3$. Яка ймовірність того, що у випадковий день буде назбирано повне відро чорниць?

5.23. Пасажир може звернутися за квитком в одну із трьох кас. Ймовірності звертання в кожну касу залежать від місця розташування каси і дорівнюють відповідно 0,25, 0,35, 0,4. Ймовірність того, що на момент звернення пасажир квитки в касі будуть розпродані, дорівнюють відповідно 0,65, 0,8, 0,9. Знайти ймовірність того, що пасажир купить квиток.

5.24. З повного набору кісточок доміно навмання без повернення беруть дві кісточки. Визначити ймовірність того, що другу кісточку можна прикласти до першої (за правилами доміно).

5.25. З трамвайного парку у випадковому порядку виходять 4 трамваї маршруту №1 і 8 трамваїв маршруту №2. Знайти ймовірність того, що трамвай, який вийшов на лінію за чергою другим, прямує маршрутом №1.

5.26. Іван та Петро – близькі друзі. Найчастіше (в 70% випадків) вони разом роблять домашнє завдання з математики і з ймовірністю 0,8 воно в них виконано правильно. Але часом завдання робить сам Іван (у 20% випадків), чи сам Петро (в 10% випадків), а інший просто переписує. Іван виконує завдання правильно з ймовірністю 0,6, а Петро – з ймовірністю 0,1. Яка ймовірність того, що на час перевірки у хлопців буде правильно виконане завдання?

5.27. Кількість вантажних машин, які проходять шосе відноситься до кількості легкових машин, як 3 до 2. Ймовірність того, що машина під'їде на заправку для вантажних машин дорівнює 0,1, а для легкових 0,2. Знайти ймовірність того, що до бензоколонки під'їде машина.

5.28. З 10 деталей 4 пофарбовані. Ймовірність того, що пофарбована деталь важча норми, дорівнює 0,3, а для не пофарбованої деталі ця ймовірність дорівнює 0,1. Знайти ймовірність того, що взята навмання деталь важча норми.

5.29. На вхід радіолокаційного пристрою з ймовірністю 0,8 надходить суміш корисного сигналу з шумом, а з ймовірністю 0,2 – тільки шум. Якщо надходить корисний сигнал з шумом, то пристрій реєструє наявність деякого сигналу з ймовірністю 0,7; якщо тільки шум, то – з ймовірністю 0,3. Знайти ймовірність того, що пристрій зареєструє наявність деякого сигналу.

5.30. Прилад складається з трьох вузлів, ймовірність наявності браку в яких одна і та ж і дорівнює 0,1. Ймовірність виходу з ладу приладу за деякий час T дорівнює відносній кількості бракованих вузлів. Знайти ймовір-

ність того, що під час випробування протягом часу T прилад працював безвідмовно.

Задача 6.

6.1. Урна містить 3 кулі. Усі припущення про число білих куль в урні однаково ймовірні. Навмання вийнята з урни куля виявилась білою. Обчислити ймовірності всіх припущень про склад куль в урні. Яке припущення найбільш імовірне?

6.2. Припустимо, що 5% усіх чоловіків і 0,25% усіх жінок дальтоніки. Навмання вибрана людина виявилась дальтоніком. Яка ймовірність того, що це чоловік? (Вважаємо, що чоловіків і жінок однакова кількість).

6.3. При дослідженні жирності молока корів все стадо було розбито на три групи. В першій групі виявилось 70%, в другій 23% і в третій 7% всіх корів. Ймовірність того, що молоко, яке дає окрема корова, має не менше, ніж 4% жирності, для кожної групи корів відповідно рівна 0,6; 0,35 і 0,1. Взята навмання корова дає молоко з жирністю не менше, ніж 4%. Знайти ймовірність того, що ця корова з першої групи.

6.4. Перед сівбою 90% всього зерна було оброблено спеціальними препаратами. Ймовірність ураження шкідниками для рослин з обробленого зерна рівна 0,08, для рослин з необробленого зерна – 0,4. Взята навмання рослина виявилась ураженою. Яка ймовірність того, що вона вирощена з обробленого зерна?

6.5. У спартакіаді бере участь 6 студентів з першої групи, 8 – із другої, 4 – із третьої. Студент першої групи буде зарахований до збірної інституту із ймовірністю 0,9, другої групи – із ймовірністю 0,85 і третьої – 0,95. Навмання вибраний студент був зарахований у збірну інституту. Яка ймовірність того, що цей студент із третьої групи?

6.6. Є чотири класи. В першому класі відмінники складають 50%, в другому – 30%, в третьому – 10%, а в четвертому немає відмінників. Із чотирьох класів випадковим чином вибирають один. І з нього навмання викликали одного учня, який не був відмінником. Яка ймовірність, що цей учень належить до першого класу?

6.7. Із 16 баскетболістів чотири влучають у кошик із штрафного кидка з ймовірністю 0,8, три – з ймовірністю 0,7 і два – з

імовірністю 0,6. Довільно відібраний баскетболіст виконав один штрафний кидок і не влучив у кошик. До якої групи імовірніше всього він належить?

6.8. При заповненні певного документу перший бухгалтер помиляється з імовірністю 0,05, а другий – з імовірністю 0,1. За певний час перший бухгалтер заповнив 80 таких документів, а другий – 120. Всі ці документи складені в одну папку. Навмання витягнутий з папки документ виявився з помилкою. Що більш імовірніше: помилку допустив перший чи другий бухгалтер?

6.9. У продаж поступили дискети трьох кольорів: чорного, синього і червоного. Чорних і червоних дискет порівну, а синіх у два рази менше, ніж чорних. Серед дискет чорного кольору 2% бракованих, червоного – 1%, синього – 0,5%. Навмання відібрана дискета виявилась якісною. Яка ймовірність того, що ця дискета чорного кольору?

6.10. У товарному поїзді 50 вагонів, завантажених вугіллям двох сортів: 25 вагонів містять 70%, 15 вагонів – 60% і 10 вагонів – 85% вугілля першого сорту. Випадково взятий для аналізу шматок вугілля виявився другого сорту. Знайти ймовірність того, що він взятий із вагону другої групи.

6.11. Є п'ять урн такого складу: 2 урни – по 2 білі і 3 чорні кульки (склад A_1); 2 урни – по 1 білій і 4 чорних кульки (склад A_2); 1 урна – 4 білі і 1 чорна кулька (склад A_3). Із однієї навмання вибраної урни витягнули кульку. Вона виявилась білою. Знайти ймовірність того, що кулька витягнута з урни третього складу.

6.12. Після того, як троє стрільців одночасно вистрілили по мішені, у ній виявилось лише 2 влучення. Знайти ймовірність того, що по мішені не влучив третій стрілець, якщо при кожному пострілі перший з них влучає з імовірністю 0,4, другий з імовірністю 0,5, третій з імовірністю 0,6.

6.13. Є 3 класи. В першому з них половина відмінників, в другому відмінники становлять $1/3$ частину учнів класу, в третьому – відмінників немає. З цих класів навмання вибрано один клас і з нього навмання викликано учня, який виявився відмінником. Знайти ймовірність того, що при цьому було взято другий клас.

6.14. Фермер заготував для посіву насіння пшениці в основному 1-го сорту з невеликими домішками 2-го, 3-го і 4-го

сортів. Ймовірність того, що з зерна пшениці 1-го сорту виросте колосок, в якому буде не менше 30 зерен, дорівнює 0,5, для зерна пшениці 2-го, 3-го і 4-го сортів ця ймовірність відповідно дорівнює 0,15; 0,10 та 0,05. Ймовірність того, що навання взята зернина виявиться 1-го сорту, дорівнює 0,96, 2-го сорту – 0,01, 3-го сорту – 0,02, 4-го сорту – 0,01. З навання вибраної для посіву зернини виріс колосок, в якому не менше 30 зерен. Яка ймовірність того, що зернина належала до пшениці 3-го сорту?

6.15. Є три партії деталей по 30 деталей в кожній. Число стандартних деталей в першій, другій і третій партіях рівне відповідно 30, 20, 15. З навання вибраної партії навання вибрана деталь виявилася стандартною. Деталь повернули в партію і повторно з цієї ж партії навання взяли деталь, яка теж стандартна. Знайти ймовірність того, що деталі виймали з третьої партії.

6.16. Три мисливці вистрілили незалежно один від іншого, причому дві кулі попали в ціль. Знайти ймовірність того, що перший мисливець не попав в ціль, якщо ймовірності попадання першим, другим і третім мисливцем відповідно рівні $p_1 = 0,45$, $p_2 = 0,35$, $p_3 = 0,55$.

6.17. Три стрільці зробили залп, причому дві кулі попали в мішень. Знайти ймовірність того, що третій стрілець попав у мішень, якщо ймовірності попадання в мішень першим, другим і третім стрільцем рівні відповідно 0,65; 0,45; 0,55.

6.18. Дві із чотирьох незалежно працюючих ламп пристрою відмовили. Знайти ймовірність того, що вийшли з ладу перша і друга лампи, якщо ймовірності відмови першої, другої, третьої і четвертої ламп дорівнюють відповідно: $p_1 = 0,2$, $p_2 = 0,25$, $p_3 = 0,4$, $p_4 = 0,5$.

6.19. Є три урни, в одній з них 6 білих і 4 чорних кульки, в другій 7 білих і 3 чорних, в третій лише 8 білих. Навання вибираємо одну урну, з неї знову навання вибираємо одну кульку. Вона виявилася біла. Яка ймовірність того, що кулька вийнята з другої урни?

6.20. З 10 учнів, які прийшли здавати екзамен з математики, троє підготувались відмінно, четверо добре, двоє задовільно, а ще один зовсім не готувався. Відмінно підготовлені учні можуть відповісти на всі 20 запитань, добре підготовле-

ні – на 16 запитань, задовільно – на 10 і непідготовлених – на 5 питань. Кожен учень одержує 3 різні питання з 20. Перший учень відповів на всі 3 запитання. Яка імовірність того, що він відмінник?

6.21. З урни, в якій міститься 3 білих і 2 чорних кульки, за схемою вибору без повернення взяли дві кульки. Кулька, взята навмання з цих двох, виявилася білою. Яка імовірність того, що друга кулька також біла?

6.22. Два з трьох незалежно працюючих елементів ЕОМ вийшли з ладу. Знайти імовірність того, що вийшли з ладу перший і другий елементи, якщо імовірності поломки першого, другого і третього дорівнюють 0,25; 0,3 і 0,45.

6.23. У рибалки є три улюблених місця, куди він приходить з однаковою імовірністю. Імовірність клювати на першому місці дорівнює $1/3$, на другому – $1/2$, на третьому – $1/4$. Рибалка закинув вудку у навмання вибраному місці і риба клюнула. Знайти імовірність того, що рибалка закинув вудку у першому місці.

6.24. У магазин надійшло 30% телевізорів із першого заводу, серед яких 20% – бракованих; 20% з другого заводу, 10% з яких браковані; 50% з третього, який має лише 5% браку. Яка імовірність купити справний телевізор недосвідченим покупцем?

6.25. Серед студентів IV курсу $2/5$ одружені та $3/5$ неодружені. Серед неодружених $1/2$ молодші 22 років, а $2/3$ одружених старші 22 років. Знайти імовірність того, що довільно обраний студент цього курсу одружений, якщо він старший 22 років.

6.26. Троє мисливців на полюванні одночасно зробили по одному пострілу у ведмедя, який був у результаті убитий однією кулею. Визначити імовірність того, що ведмідь був убитий першим мисливцем, якщо імовірності попадання для них дорівнюють відповідно 0,2; 0,4; 0,6.

6.27. Деталі, виготовлені на заводі, проходять перевірку на стандартність в одного з двох контролерів. Імовірність того, що деталь попаде до першого контролера, дорівнює 0,6, а до другого – 0,3. Імовірність того, що деталь буде визнана стандартною першим контролером, дорівнює 0,96, а другим 0,97. Деталь на перевірці визнана стандартною. Знайти імовірність того, що цю деталь перевіряв перший контролер.

6.28. При відхиленні від нормального режиму роботи автомата сигналізатор С-1 спрацьовує з імовірністю 0,8, а сигналізатор С-2 – з імовірністю 1. Імовірність того, що автомат оснащений сигналізатором С-1 дорівнює 0,6, а сигналізатором С-2 – 0,4. Зафіксовано відхилення від нормального режиму роботи автомата. Що імовірніше: автомат оснащений сигналізатором С-1 чи С-2?

6.29. Для участі у студентських відбіркових спортивних змаганнях виділено з першої групи курсу – 4, з другої – 6, а з третьої – 5 студентів. Імовірності того, що студент першої, другої і третьої групи попаде в збірну університету дорівнюють відповідно 0,9; 0,7; 0,8. Навмання вибраний студент у результаті змагань зарахований до збірної. До якої з груп найімовірніше належав цей студент?

6.30. Імовірність для виробів деякого підприємства підходити по стандарту дорівнює 0,97. Пропонується спрощена система перевірки на стандартність, яка дає позитивний результат з імовірністю 0,98 для виробів, які підходять по стандарту, а для виробів, які не підходять по стандарту 0,05. Знайти імовірність того, що виріб, визнаний в результаті перевірки стандартним, дійсно підходить по стандарту.

Задача 7.

7.1. Автомашини випускаються трьома заводами в кількостях 5000, 3000, 4000 за рік, причому ймовірності браку для цих заводів відповідно дорівнюють 0,05, 0,1, 0,2. Куплена автомашина виявилась бракованою. Яка ймовірність того, що вона виготовлена на першому заводі?

7.2. Кількість вантажних машин, які проходять шосе, відноситься до кількості легкових машин, як 3 і 2. Ймовірність того, що машина під'їде на заправку для вантажних машин дорівнює 0,1, а для легкових 0,2. До бензоколонки під'їхала машина. Знайти ймовірність того, що вона вантажна.

7.3. В скриньці лежать три кулі, які можуть бути білими або чорними. Всі чотири припущення про початковий склад скриньки рівноможливі. Три рази вийняли зі скри-

ньки по одній кулі з поверненням, причому перша куля виявилися чорною, решта – білі. Знайти апостеріорні ймовірності різних складів скриньки.

7.4. З 10 деталей 4 пофарбовані. Ймовірність того, що пофарбована деталь важча норми, дорівнює 0,3, а для не пофарбованої деталі ця ймовірність дорівнює 0,1. Взята навмання деталь виявилась важчою норми. Знайти ймовірність того, що вона пофарбована.

7.5. В спеціалізовану лікарню поступають в середньому 50% з захворюванням А, 30% – В, 20% – С. Ймовірність повного вилікування для А дорівнює 0,7, В – 0,8, С – 0,9. Пацієнта виписано здоровим. Знайти ймовірність того, що він хворів В.

7.6. Продуктивність першого автомата вдвічі перевищує продуктивність другого. Перший автомат в середньому дає 60% деталей, другий – 84% деталей відмінної якості. Навмання взята деталь виявилась відмінної якості. Знайти ймовірність того, що ця деталь виготовлена першим автоматом.

7.7. В коробці знаходяться два зовні однакові гральні кубики: один правильний, з однаковими ймовірностями випадання всіх шести цифр; другий неправильний. При підкиданні неправильного кубика одиниця з'являється з ймовірністю $1/9$. Навмання вибирають із коробки гральний кубик і підкидають; в результаті випало 1 очко. Знайти ймовірність того, що було підкинуто правильний кубик.

7.8. В скриньці знаходиться кулька невідомого кольору – з рівною ймовірністю біла або чорна. В скриньку кладуть білу кульку і після перемішування навгад витягують одну кульку. Вона виявилась білою. Яка ймовірність того, що в скриньці залишилась біла кулька?

7.9. На вхід радіолокаційного пристрою з ймовірністю 0,8 надходить суміш корисного сигналу з шумом, а з ймовірністю 0,2 – тільки шум. Якщо надходить корисний сигнал з шумом, то пристрій реєструє наявність деякого сигналу з ймовірністю 0,7; якщо тільки шум, то – з ймовірністю 0,3.

Відомо, що пристрій зареєстрував наявність деякого сигналу. Знайти ймовірність того, що в його складі є корисний сигнал.

7.10. Прилад складається з трьох вузлів, ймовірність наявності браку в яких одна і та ж і дорівнює 0,2. Ймовірність виходу з ладу приладу за деякий час T дорівнює відносній кількості бракованих вузлів. Під час випробування протягом часу T була зареєстрована відмова приладу. Знайти ймовірність події $A = \{\text{бракований один вузол}\}$.

7.11. Прилад складається із двох послідовно включених вузлів. Надійність (ймовірність безвідмовної роботи на протязі часу T) першого вузла дорівнює 0,9, другого – 0,8. За час випробування приладу на протязі часу T зареєстрована відмова приладу. Знайти ймовірність події $A = \{\text{відмовив тільки перший вузол}\}$.

7.12. Прилад складається з трьох вузлів, ймовірність наявності браку в яких одна і та ж і дорівнює 0,1. Ймовірність виходу з ладу приладу за деякий час T дорівнює відносній кількості бракованих вузлів. Під час випробування протягом часу T прилад працював безвідмовно. Знайти ймовірність події $A = \{\text{браковані два вузли}\}$.

7.13. Прилад складається із двох послідовно включених вузлів. Надійність (ймовірність безвідмовної роботи на протязі часу T) першого вузла дорівнює 0,9, другого – 0,8. За час випробування приладу на протязі часу T зареєстрована відмова приладу. Знайти ймовірність події $A = \{\text{відмовили обидва вузли}\}$.

7.14. В коробці знаходяться два зовні однакові гральні кубики: один правильний, з однаковими ймовірностями випадання всіх шести цифр; другий неправильний, з нерівномірним розподілом маси по об'єму. При підкиданні неправильного кубика шестірка появляється з ймовірністю $1/3$, одиниця – з ймовірністю $1/9$, решта цифри випадають з однаковими ймовірностями. Навгад вибирається із коробки гральний кубик і підкидається; в результаті випало 6 очок. Знайти ймовірність того, що було підкину-

то правильний кубик.

7.15. Однотипні прилади випускаються трьома заводами в кількісному співвідношенні 1:4:5, причому ймовірності браку для цих заводів відповідно дорівнюють 0,05, 0,01, 0,2. Куплений прилад виявився якісним. Яка ймовірність того, що цей прилад був виготовлений другим заводом?

7.16. Однотипні прилади випускаються трьома заводами в кількісному співвідношенні 2:3:5, причому ймовірності браку для цих заводів відповідно дорівнюють 0,05, 0,1, 0,2. Куплений прилад виявився бракованим. Яка ймовірність того, що цей прилад був виготовлений на першому заводі?

7.17. Число бракованих мікросхем з 10 апріорі вважається рівноможливим від 0 до 2. Навмання вибрані 3 мікросхеми виявились якісними. Яка ймовірність того, що всі мікросхеми якісні?

7.18. В групі із 25 чоловік 10 (відмінно підготовлені) знають всі 25 питань програми екзамену, 7 (добре підготовлені) знають 20, 5 (задовільно підготовлені) знають 15 і 3 (незадовільно підготовлені) знають тільки 10 питань. Викликаний навгад студент відповів на два задані питання. Знайти ймовірність того, що цей студент підготовлений незадовільно.

7.19. В групі із 25 чоловік 10 (відмінно підготовлені) знають всі 25 питань програми екзамену, 7 (добре підготовлені) знають 20, 5 (задовільно підготовлені) знають 15 і 3 (незадовільно підготовлені) знають тільки 10 питань. Викликаний навгад студент відповів на два задані питання. Знайти ймовірність того, що цей студент підготовлений відмінно чи добре.

7.20. Перевіряється партія виробів, серед яких 10% бракованих. При перевірці бракований виріб виявляється з ймовірністю 0,92, а якісний виріб бракується з ймовірністю 0,06. Нехай виріб забракований в процесі перевірки. Яка ймовірність того, що він дійсно бракований?

7.21. Два заводи виготовляють однакові реактиви, при-

чому 8% пачок реактивів першого і 6% пачок реактивів другого заводу мають більшу від допустимої кількість домішок. На складі є 2000 пачок реактивів виготовлених першим заводом і 3000 пачок виготовлених другим заводом. Нехай вибрана навмання пачка реактивів якісна. Яка ймовірність того, що вона виготовлена на першому заводі?

7.22. Є три однакові на вигляд коробки. В першій коробці 10 білих і 5 чорних кульок, в другій – 8 білих і 8 чорних куль, а в третій – тільки чорні кульки. Навмання вибирається коробка, а в ній кулька. Вона виявилась білою. Яка ймовірність, що вибрали першу коробку?

7.23. Проводяться три незалежні постріли снарядами по цілі з ймовірністю влучання 0,6 кожен. Ціль знищується з ймовірністю 0,5 при влученні одним снарядом, з ймовірністю 0,9 при влученні двома снарядами і з ймовірністю 1 – при влученні трьох снарядів. Нехай ціль знищена. Знайти ймовірність того, що в неї влучив тільки один снаряд.

7.24. Студент приходить на лекцію з ймовірністю 0,8. Лекція читається на потоці з трьох груп. Залежно від настрою лектор робить перекличку в усіх групах з ймовірністю 0,3, з тією ж ймовірністю тільки в одній, навмання взятій групі, і з ймовірністю 0,4 взагалі переклички не робить. У випадково взятий день, коли ця лекція є в розкладі, була зафіксована відсутність студента на лекції. З якою ймовірністю викладач робив перекличку в усіх групах?

7.25. Дві сестри ходять в ліс по чорниці з маленьким відерком. Разом вони завжди набирають повне відерко, старша сестра сама може набрати відерко в 40% випадків, а молодша – тільки в 5%. Мама може залишити незалежно одну від одної вдома з ймовірністю $2/3$. У один з випадково взятих днів було назбирано повне відро чорниць. Яка ймовірність того, що його назбирала сама старша сестра?

7.26. Пасажир може звернутися за квитком в одну із трьох кас. Ймовірності звертання в кожну касу залежать від місця розташування каси і дорівнюють відповідно

0,25, 0,35, 0,4. Ймовірність того, що на момент звернення пасажир квитки в касі будуть розпродані, дорівнюють відповідно 0,65, 0,8, 0,9. Пасажир купив квиток. Яка ймовірність того, що він купив його в першій касі?

7.27. Іван та Петро – близькі друзі. Найчастіше (в 70% випадків) вони разом роблять домашнє завдання з математики і з ймовірністю 0,8 воно в них виконано правильно. Але часом завдання робить сам Іван (у 20% випадків), чи сам Петро (в 10% випадків), а інший просто переписує. Іван виконує завдання правильно з ймовірністю 0,1, а Петро – з ймовірністю 0,6. У випадково вибраний день виявилось, що хлопці правильно виконали завдання. Яка ймовірність того, що вони його виконували разом?

7.28. В ящику є 20 тенісних м'ячів, серед них 15 нових і 5 вживаних. Для гри навгад вибираються два м'ячі і після гри повертаються назад в ящик. Потім для другої гри також навгад вибирають ще два м'ячі. Друга гра проходила новими м'ячами. Яка ймовірність того, що і перша гра проходила новими м'ячами?

7.29. З трамвайного парку у випадковому порядку виходять 4 трамваї маршруту №1 і 8 трамваїв маршруту №2. Другим за чергою на маршрут вийшов трамвай маршруту №2. Знайти ймовірність того, що першим з парку вийшов трамвай маршруту №1.

7.30. Програма екзамену містить 30 різних питань, з яких студент знає тільки 15. Для успішної здачі екзамену досить відповісти на два запропонованих питання або на одне з них і на додаткове питання. Студент здав екзамен. Яка ймовірність того, що йому було задано два питання?

Задача 8.

8.1. Деяка компанія володіє мережею дилерів на біржі. Ймовірність того, що дилер буде грати вдало, становить 0,8. Знайти ймовірність того, що з шести дилерів програватимуть хоча б два.

8.2. Встановлено, що 5% телевізорів виходять з ладу через перепади напруги в електромережі. Яка ймовірність того, що з п'яти придбаних телевізорів не вийдуть з ладу хоча б три?

8.3. Для студентського гуртожитку закуплено 6 холодильників. Імовірність того, що будь-який із них витримає гарантійний термін, дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що протягом гарантійного терміну з ладу вийдуть принаймні два холодильники.

8.4. Деяке автопідприємство має 12 машин. Ймовірність виходу на лінію кожної з них дорівнює 0,8. Знайти ймовірність нормальної роботи автопідприємства у найближчий день, якщо для цього треба мати на лінії не менше, ніж 8 машин.

8.5. Детектор неправди фіксує неправильну відповідь з імовірністю 95%. Яка імовірність того, що на 10 поставлених запитань неправильна відповідь буде зафіксована хоча б два рази?

8.6. Серед автомобілів, що ввозяться в Україну, 85% складають легкові. Протягом дня на митницю прибуло 10 автомобілів. Яка ймовірність того, що не більше, ніж 9 з них легкові?

8.7. У гуртожитку мешкає 60% студентів стаціонару. Яка імовірність того, що з 10 випадково вибраних студентів не більше, ніж 8 проживає в гуртожитку?

8.8. У середньому 70% студентів курсу складають залік з першої спроби. Знайти ймовірність того, що з п'яти студентів цього курсу з першого разу складуть залік не більше, ніж чотири.

8.9. Серед виробів деякого виробництва 5% браку. Знайти ймовірність того, що серед п'яти вибраних навмання виробів буде принаймні два бракованих.

8.10. Яка ймовірність того, що при десяти підкиданнях монети випаде герб не менше, ніж 4 рази?

8.11. Два рівносильні шахісти грають у шахи. Що ймовірніше виграти: дві партії з чотирьох чи три партії з шести (нічий до уваги не беруться)?

8.12. Імовірність виготовлення стандартного виробу 0,94. Яка ймовірність, що серед десяти виробів є не більше одного нестандартного?

8.13. Подія B настає тоді, коли подія A настане не менше чотирьох разів. Знайти ймовірність настання події B , якщо здійснюється 5 незалежних випробувань, у кожному з яких ймовірність настання події A дорівнює 0,8.

8.14. Що ймовірніше: виграти у рівносільного суперника: три партії з чотирьох чи п'ять з восьми?

8.15. Ймовірність появи деякої події в кожному з вісімнадцяти незалежних дослідів дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що подія з'явиться принаймні 3 рази.

8.16. Ймовірність виграшу по облігації позики за весь час її дії дорівнює 0,25. Яка ймовірність того, що придбавши 8 облігацій, можна виграти по 6-ти з них?

8.17. Яка ймовірність того, що при п'яти підкиданнях монети хоча б 2 рази випаде герб?

8.18. В телевізорі 10 ламп. Для кожної із ламп ймовірність того, що вона буде справною протягом року, дорівнює 0,7. Яка ймовірність того, що протягом року хоча б одна із ламп вийде з ладу?

8.19. У квартирі є 4 електролампочки. Для кожної лампочки ймовірність того, що вона буде справною протягом року, рівна $5/6$. Яка ймовірність того, що протягом року доведеться замінити не менше половини лампочок.

8.20. На відрізок довжини l кинуто 8 точок, відрізок поділений на 4 рівних частини. Знайти ймовірність того, що на кожную частину попаде рівно дві точки, якщо ймовірність попадання пропорційна довжині відрізка і не залежить від його розміщення.

8.21. Підводний човен атакує крейсер, випускаючи по ньому одну за одною 4 торпеди. Ймовірність попадання кожної торпеди рівна $3/4$. Крейсер буде потоплений, якщо в нього влучило не менше 2-х торпед. Знайти ймовірність затоплення крейсера.

8.22. Ймовірність попадання в мішень при одному пострілі рівна $1/8$. Яка ймовірність того, що при 12 пострілах буде хоча б 3 попадання?

8.23. В магазин зайшли 10 осіб. Знайти ймовірність того, що не менше 3 осіб що-небудь куплять. Ймовірність того, що будь-який відвідувач вийде з покупкою, рівна 0,3.

8.24. Яка ймовірність того, що при 24-разовому киданні двох гральних кубиків хоча б один раз з'являться дві трійки?

8.25. В магазин зайшло 8 відвідувачів. Знайти ймовірність того, що не менше, ніж чотири з них зроблять покупки, якщо ймовірність того, що будь-який із відвідувачів зробить покупку, рівна 0,2.

8.26. Робітник обслуговує 12 однакових верстатів. Ймовірність того, що протягом години верстат вийде із ладу, рівна $1/3$. Яка ймовірність того, що протягом години робітникові прийдеться ремонтувати не менше чотирьох верстатів?

8.27. Випадковий перехожий з ймовірністю 0,2 може бути брюнетом, з ймовірністю 0,3 – шатеном, з ймовірністю 0,4 – блондином і з ймовірністю 0,1 – рудим. Яка ймовірність того, що серед шести випадково зустріннутих людей не менше чотирьох блондинів?

8.28. Яка ймовірність того, що при 22 киданнях двох гральних кубиків хоча б 3 рази появляться 2 шестірки?

8.29. Випадковий перехожий з ймовірністю 0,3 може бути брюнетом, з ймовірністю 0,45 – шатеном, з ймовірністю 0,25 – блондином і з ймовірністю 0,1 – рудим. Яка ймовірність того, що серед 7 випадково зустріннутих людей хоча б двоє блондини?

8.30. Робітник обслуговує 10 верстатів. Ймовірність виходу з ладу верстата протягом години дорівнює 0,35. Яка ймовірність того, що робітникові прийдеться протягом години ремонтувати не менше п'яти верстатів?

Задача 9. В пункті а) описані випадковий експеримент і пов'язана з ним випадкова величина ξ , в пункті б) задана щільність $f_{\xi}(x)$ розподілу випадкової величини ξ . Знайти функцію розподілу $F_{\xi}(x)$, математичне сподівання $M\xi$, дисперсію $D\xi$ в обох випадках.

9.1. а) Двічі підкидають гральний кубик. ξ – сума очок, що випали;

$$\text{б) } f_{\xi}(x) = \begin{cases} 2(1-x), & \text{якщо } x \in (0; 1); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (0; 1). \end{cases}$$

9.2. а) Шість разів підкидається правильна монета. ξ – модуль різниці числа появ герба і числа появ цифри;

$$\text{б) } f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \sin^2 x, & \text{якщо } |x| \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \text{якщо } |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

9.3. а) Четверо студентів складають іспит з теорії ймовірностей. Ймовірність того, що перший із них складе іспит, дорівнює 0,9; для другого і третього ця ймовірність дорівнює 0,8; а для четвертого – 0,7. ξ – число студентів, котрі складуть іспит;

$$\text{б) } f_{\xi}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{9}{16}} - x^2, & \text{якщо } |x| \leq \sqrt[3]{\frac{3}{4}}; \\ 0, & \text{якщо } |x| > \sqrt[3]{\frac{3}{4}}. \end{cases}$$

9.4. а) Серед п'яти однотипних телевізорів є лише один справний. Щоб на нього потрапити, навмання беруть один із них і після відповідної перевірки відставляють його окремо від решти. Перевірка триває до появи справного телевізора, ξ – кількість перевірених телевізорів;

$$\text{б) } f_{\xi}(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{якщо } x \in (0; 1); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (0; 1). \end{cases}$$

9.5. а) Гральний кубик підкидають 3 рази. ξ — кількість появ шести очок;

$$\text{б) } f_{\xi}(x) = \begin{cases} \sqrt[4]{\frac{3}{2}} \sqrt{x}, & \text{якщо } x \in \left(0; \sqrt{\frac{3}{2}}\right); \\ 0, & \text{якщо } x \notin \left(0; \sqrt{\frac{3}{2}}\right). \end{cases}$$

9.6. а) Із скриньки, в якій лежать 4 білих та 6 чорних кульок беруть навмання 3 кульки. ξ — кількість білих кульок серед них;

$$\text{б) } f_{\xi}(x) = \begin{cases} 2x, & \text{якщо } x \in (0;1); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (0;1). \end{cases}$$

9.7. а) Садівник посадив три саджанці: одну яблуню, одну грушу й одну вишню. Ймовірність того, що саджанець яблуні прийметься, дорівнює 0,7. Для саджанців груші та вишні ця ймовірність становить відповідно 0,9 і 0,8. ξ — число саджанців, які приймуться;

$$\text{б) } f_{\xi}(x) = \begin{cases} \sin 2x, & \text{якщо } x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right); \\ 0, & \text{якщо } x \notin \left(0; \frac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$

9.8. а) Чотири однакові електролампочки тимчасово вкрутили з відповідних патронів і поклали в ящик. Потім із ящика навмання взяли по одній лампочці і навмання вкрутили в патрони. ξ — число лампочок, які вкручені в ті патрони, з яких вони були викручені;

$$\text{б) } f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \cos^2 x, & \text{якщо } |x| \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \text{якщо } |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

9.9. а) Випробовується 3 прилади. Ймовірність відмови кожного приладу не залежить від відмови інших і дорівнює 0,1. ξ — кількість приладів, що відмовили;

$$\text{б) } f_{\xi}(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{якщо } |x| \leq 1; \\ 0, & \text{якщо } |x| > 1. \end{cases}$$

9.10. а) Виконують три незалежні постріли в мішень, ймовірність влучення при кожному пострілі дорівнює 0,8. ξ — кількість влучень;

$$\text{б) } f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{3}{64}(x+1)^2, & \text{якщо } x \in (-1; 3); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (-1; 3). \end{cases}$$

9.11. а) На шляху машини 4 світлофори. Кожний з них з ймовірністю 0,5 або дозволяє або забороняє машині подальший рух. ξ — число світлофорів, пройдених машиною без зупинки;

$$\text{б) } f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}(1 - \cos x), & \text{якщо } x \in (0; \pi); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (0; \pi). \end{cases}$$

9.12. а) Мішень складається з трьох концентричних кілець. Попадання в центральний круг оцінюється в 4 очки, в середнє кільце — 3 очки, в крайнє — 2 очки і промах — в 0 очок. Відповідні ймовірності попадань в центральний круг, середнє кільце, крайнє кільце і промах дорівнюють 0,4, 0,3, 0,2, 0,1. ξ — сума вибитих очок в результаті двох пострілів;

$$\text{б) } f_{\xi}(x) = \begin{cases} 5e^{-5x}, & \text{якщо } x \in (0; +\infty); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (0; +\infty). \end{cases}$$

9.13. а) Задана множина $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

ξ — число дільників навмання вибраного натурального числа з множини Ω ;

$$\text{б) } f_{\xi}(x) = \begin{cases} \ln x, & \text{якщо } x \in (1; e); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (1; e). \end{cases}$$

9.14. а) Два стрільці стріляють кожен в свою мішень і роблять незалежно один від одного по одному пострілу. Ймовірність влучання для першого стрільця 0,85, для другого 0,9. $\xi = \xi_1 - \xi_2$, де ξ_1 – кількість влучань першого стрільця, ξ_2 – кількість влучань другого стрільця;

$$\text{б) } f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{18} \sqrt{x+2}, & \text{якщо } x \in (-2; 7); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (-2; 7). \end{cases}$$

9.15. а) Є 3 транзистори, кожен з яких з ймовірністю 0,1 має дефект. Транзистор вмикають і, якщо він має дефект, то замінюють іншим. ξ – кількість транзисторів, які будуть випробувані;

$$\text{б) } f_{\xi}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{36}(x+1)(x-5), & \text{якщо } x \in (-1; 5); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (-1; 5). \end{cases}$$

9.16. а) Є 3 ящики. У першому з них міститься 6 стандартних і 4 браковані однотипні деталі, у другому – 8 стандартних і 2 браковані, у третьому – 5 стандартних і 5 бракованих деталей. Із кожного ящика навмання беруть по одній деталі. ξ – число появ стандартних деталей серед трьох навмання взятих;

$$\text{б) } f_{\xi}(x) = \begin{cases} 3 \sin 3x, & \text{якщо } x \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right); \\ 0, & \text{якщо } x \notin \left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right). \end{cases}$$

9.17. а) Є партія з 10 виробів, серед яких 3 бракованих. Навмання беруть 4 вироби. ξ – кількість бракованих серед них;

$$\text{б) } f_{\xi}(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{2}, & \text{якщо } x \in (1; 2); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (1; 2). \end{cases}$$

9.18. а) Стріляють в ціль три рази. Влучання при окремих пострілах – незалежні події з ймовірністю $\frac{2}{3}$. ξ — кількість влучань при трьох пострілах.

$$\text{б) } f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}x}, & \text{якщо } x \in (0; +\infty); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (0; +\infty). \end{cases}$$

9.19. а) Підкидають два гральних кубики.
 $\xi = \xi_1 - \xi_2$, де ξ_1 – число, яке випало на першому кубики, ξ_2 – на другому кубики;

$$\text{б) } f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{2}{7} \cos \frac{2}{7}x, & \text{якщо } x \in \left(0; \frac{7}{4}\pi\right); \\ 0, & \text{якщо } x \notin \left(0; \frac{7}{4}\pi\right). \end{cases}$$

9.20. а) 3 ящика, в якому лежать 2 білі та 4 чорні кульки беруть навмання 3 кульки. ξ – різниця між кількістю білих та чорних кульок серед них;

$$\text{б) } f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{4}{9}(x^3 - x), & \text{якщо } x \in (1; 2); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (1; 2). \end{cases}$$

9.21. а) В ящику є 6 білих і 4 чорних кульки. З ящика 5 разів підряд беруть кульку, при цьому кожний раз вийняту кульку повертають в ящик і кульки перемішують. ξ – кількість вийнятих білих кульок;

$$\text{б) } f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{26}(x^4 - 1), & \text{якщо } x \in (1; 2); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (1; 2). \end{cases}$$

9.22. а) В скриньці є кульки з номерами від 1 до 4. Вийняли дві кульки. ξ – сума номерів кульок;

$$\text{б) } f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}(3x - x^2), & \text{якщо } x \in (0; 3); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (0; 3). \end{cases}$$

9.23. а) В мішень стріляють тричі. Ймовірність влучання в мішень при кожному пострілі дорівнює 0,3. ξ – кількість влучань;

$$\text{б) } f_{\xi}(x) = \begin{cases} 3(x - 2)^2, & \text{якщо } x \in (2; 3); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (2; 3). \end{cases}$$

9.24. а) Маємо чотири електролампочки, кожна з яких має дефект з ймовірністю 0,1. Послідовно беруть по одній лампочці, вгвинчують у патрон і вмикають електричний струм. Під час вмикання струму лампочка з дефектом перегорить, і її замінять на іншу. ξ – число лампочок, які будуть випробувані;

$$\text{б) } f_{\xi}(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & \text{якщо } x \in (0; +\infty); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (0; +\infty). \end{cases}$$

9.25. а) Спортсмен на змаганнях має чотири кулі і стріляє в ціль до першого влучання. Ймовірність влучання при одному пострілі дорівнює 0,7. ξ – число промахів;

$$\text{б) } f_{\xi}(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{4}x^3, & \text{якщо } x \in (0; 2); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (0; 2). \end{cases}$$

9.26. а) Ймовірність того, що футболіст реалізує одинадцятиметровий штрафний удар дорівнює 0,9. Футболіст виконав три такі удари. ξ – число реалізованих штрафних;

$$\text{б) } f_{\xi}(x) = \begin{cases} 6(x - x^2), & \text{якщо } x \in (0; 1); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (0; 1). \end{cases}$$

9.27. а) Один раз кинули три однакові гральні кубики. ξ приймає значення 1, якщо хоча б на одному кубіку випаде цифра 6, приймає значення 0, якщо цифра 6 не випала на жодному кубіку, але хоча б на одній з граней з'явилась цифра 5; і приймає значення – 1 в інших випадках;

$$\text{б) } f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}(2 - x)^2, & \text{якщо } x \in (0; 2); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (0; 2). \end{cases}$$

9.28. а) Тричі підкидається гральний кубик. $\xi = \xi_1 - \xi_2$, де ξ_1 – число появ шести очок, ξ_2 – число появ непарної цифри;

$$\text{б) } f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x - 1), & \text{якщо } x \in (1; 3); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (1; 3). \end{cases}$$

9.29. а) Стрілець має 5 куль і стріляє в мішень до першого влучання. Ймовірність влучання при кожному пострілі дорівнює 0,7. ξ — число витрачених куль;

$$\text{б) } f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}, & \text{якщо } x \in (0; +\infty); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (0; +\infty). \end{cases}$$

9.30. а) Робітник під час роботи обслуговує три верстат-автомати. Ймовірність того, що верстат-автомат потребує уваги робітника за певний проміжок часу, величина стала і дорівнює 0,8. ξ — число верстатів, які потребують уваги за певний проміжок часу;

$$\text{б) } f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} \sin \frac{2}{3} x, & \text{якщо } x \in \left(0; \frac{3}{2} \pi\right); \\ 0, & \text{якщо } x \notin \left(0; \frac{3}{2} \pi\right). \end{cases}$$

Задача 10. В пункті а) задано закон розподілу випадкового вектора (ξ, η) , в пункті б) задана щільність розподілу $f_{\xi\eta}(x, y)$ випадкового вектора (ξ, η) . Знайти коефіцієнти кореляції $r_{\xi\eta}$ в кожному з пунктів.

10.1. а)

$\eta \backslash \xi$	-1	0	1
0	0,1	0,2	0
1	0,2	0,3	0,2

$$\text{б) } f_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} 2(x + y), & \text{при } 0 \leq y \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

10.2. а)

$\eta \backslash \xi$	1	2	3
1	0	0,2	0,1
2	0,2	0,3	0,2

$$\text{б) } f_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{28}(xy + y^2), & \text{при } 0 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 2; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

10.3. а)

$\eta \backslash \xi$	2	3	4
2	0,2	0,1	0
3	0,2	0,3	0,2

$$\text{б) } f_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} \frac{120}{11}(xy + x^2), & \text{при } 0 \leq x \leq 1; x^2 \leq y \leq x; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

10.4. а)

$\eta \backslash \xi$	0	1	2
1	0,1	0,2	0
2	0,3	0,3	0,1

$$\text{б) } f_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} \frac{120}{11}(1 + xy), & \text{при } 0 \leq x \leq 1; x \leq y \leq \sqrt{x}; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

10.5. а)

$\eta \backslash \xi$	-2	-1	0
0	0,2	0,3	0
1	0,2	0,1	0,2

$$\text{б) } f_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} 8xy, & \text{при } 0 \leq y \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

10.6. а)

$\eta \backslash \xi$	-1	0	1
1	0,2	0,3	0,1
2	0	0,2	0,2

$$\text{б) } f_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} 3(x + y), & \text{при } x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

10.7. а)

$\eta \backslash \xi$	0	1	2
2	0,1	0,3	0,2
3	0,2	0,1	0,1

$$б) f_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} \frac{24}{5}(xy + x^2), & \text{при } x \geq 0; 0 \leq y \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

10.8. а)

$\eta \backslash \xi$	1	2	3
-1	0,2	0,1	0,2
0	0,1	0,2	0,2

$$б) f_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} \cos x \cos y, & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

10.9. а)

$\eta \backslash \xi$	0	1	2
-2	0,3	0,1	0,3
-1	0,1	0	0,2

$$б) f_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} \frac{12}{7}(x + y^2), & \text{при } 0 \leq x \leq y \leq 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

10.10. а)

$\eta \backslash \xi$	1	2	3
0	0,1	0,3	0,2
1	0,2	0	0,2

$$\text{б) } f_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} \frac{6}{5}(2y + x), & \text{при } 0 \leq x \leq y \leq 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

10.11. а)

$\eta \backslash \xi$	1	2	3
0	0,1	0,3	0,2
1	0,2	0	0,2

$$\text{б) } f_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin(x + y), & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

10.12. а)

$\eta \backslash \xi$	-2	1	2
1	0,3	0,1	0,2
2	0,2	0	0,2

$$\text{б) } f_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos(x - y), & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

10.13. а)

$\eta \backslash \xi$	2	3	4
-1	0,2	0,3	0,2
1	0,1	0	0,2

$$\text{б) } f_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} x + y, & \text{при } 0 \leq x \leq 1; x \leq y \leq 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

10.14. а)

$\eta \backslash \xi$	1	3	4
2	0,1	0,3	0,2
3	0,1	0	0,3

$$\text{б) } f_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}(x^2 + y^2), & \text{при } x^2 \leq y^2 \leq 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

10.15. а)

$\eta \backslash \xi$	-3	-2	1
-1	0,2	0,3	0,2
2	0,1	0	0,2

$$\text{б) } f_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} 24xy, & \text{при } x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

10.16. а)

$\eta \backslash \xi$	-2	0	3
-1	0,2	0,1	0
1	0,2	0,3	0,2

$$\text{б) } f_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} - x^2 - y^2, & \text{при } x^2 \leq y^2 \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

10.17. а)

$\eta \backslash \xi$	1	2	5
-1	0	0,1	0,2
3	0,2	0,3	0,2

$$\text{б) } f_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{\pi} \left(1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right), & \text{при } x^2 \leq y^2 \leq 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

10.18. а)

$\begin{smallmatrix} \xi \\ \eta \end{smallmatrix}$	1	3	5
2	0,2	0,1	0
3	0,5	0,1	0,1

$$\text{б) } f_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos(x + y), & \text{при } -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{4}; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

10.19. а)

$\begin{smallmatrix} \xi \\ \eta \end{smallmatrix}$	0	1	2
1	0,1	0,2	0
3	0,1	0,5	0,1

$$\text{б) } f_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin(x - y), & \text{при } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi; 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

10.20. а)

$\begin{smallmatrix} \xi \\ \eta \end{smallmatrix}$	-2	-1	2
-2	0,2	0,3	0
1	0,2	0,1	0,2

$$\text{б) } f_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} 2(y + 2x), & \text{при } x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

10.21. а)

$\eta \backslash \xi$	-1	1	3
1	0,1	0,4	0,1
2	0	0,2	0,2

$$\text{б) } f_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} 3(x^2 + y^2), & \text{при } 0 \leq x \leq y \leq 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

10.22. а)

$\eta \backslash \xi$	-2	1	2
2	0,1	0,4	0,2
3	0,1	0,1	0,1

$$\text{б) } f_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} \cos(2x + y), & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{2} \leq y \leq 0; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

10.23. а)

$\eta \backslash \xi$	1	2	3
-1	0,1	0,1	0,2
2	0,1	0,3	0,2

$$\text{б) } f_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(x^2 + y^2), & \text{при } 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

10.24. а)

$\eta \backslash \xi$	0	1	2
-2	0,3	0,1	0,4
-1	0,1	0	0,1

$$\text{б) } f_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} \frac{12}{5}(x^3 y + x), & \text{при } 0 \leq x \leq y \leq 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

10.25. а)

$\eta \backslash \xi$	1	2	3
-2	0,2	0,5	0,2
1	0,1	0	0,1

$$\text{б) } f_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} \frac{24}{5}(x^3 y + x), & \text{при } 0 \leq x \leq y \leq 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

10.26. а)

$\eta \backslash \xi$	1	2	4
-1	0,1	0,1	0,2
1	0,2	0,2	0,2

$$\text{б) } f_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(2y + x), & \text{при } 0 \leq y \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

10.27. а)

$\eta \backslash \xi$	-2	1	2
1	0,4	0,1	0,2
3	0,2	0	0,1

$$\text{б) } f_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} 8(xy + y^2), & \text{при } x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

10.28. а)

$\eta \backslash \xi$	1	3	5
-1	0,1	0,4	0,2
1	0,1	0	0,2

$$б) f_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} \frac{12}{5}(x + y^2), & \text{при } 0 \leq x \leq y \leq x; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

10.29. а)

$\eta \backslash \xi$	1	3	5
2	0,2	0,2	0,2
3	0,1	0	0,3

$$б) f_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} \sin(2x + y), & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

10.30. а)

$\eta \backslash \xi$	-3	-2	1
-1	0,1	0,5	0,1
2	0,1	0	0,2

$$б) f_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} \frac{12}{7}(x + x^2 y^3), & \text{при } 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Задача 11. За даною вибіркою з нормально розподіленої генеральної сукупності знайти: 1) об'єм вибірки n ;

2) розмах варіації; 3) медіану; 4) точкову оцінку математичного сподівання (вибіркове середнє); 5) точкову оцінку

дисперсії (вибіркову дисперсію); 6) інтервальну оцінку математичного сподівання при рівні надійності γ (розглянути два випадки: (а) дисперсія відома і дорівнює σ^2 ; (б) дисперсія невідома); 7) інтервальну оцінку дисперсії при рівні надійності γ ; 8) побудувати полігон частот та емпіричну функцію розподілу, розбивши варіаційний ряд на $\sqrt{n}$ рівних частин.

11.1. -1.6, -0.7, -0.1, -0.1, -0.2, -1.9, -0.3, -0.7, 0.4, 0.7, 0.7, 1.6, -0.5, -0.5, 1.7, -0.2, -0.6, -1.0, 0.5, 0.7, -1.7, 0.7, -0.2, 0.6, -0.6;

$$\gamma = 0.9, \quad \sigma = 1.$$

11.2. -2.9, 0.9, -1.2, 3.6, 1.3, -0.5, -0.5, 2.5, 0.1, -1.6, 2.2, 1.3, -5.1, 1.5, 1.5, 1.2, 1.3, -1.1, -0.1, 1.1, -1.2, 2.5, -0.2, 0.0, 0.9, -1.5, 1.9, -1.0, 1.1, -1.2, -1.4, 1.1, -1.1, -4.6, -1.5, 3.2;

$$\gamma = 0.91, \quad \sigma = 2.$$

11.3. 1.1, 1.3, 0.3, 2.0, -0.2, 0.9, 0.8, 1.5, 1.2, -0.8, 0.2, 0.9, -0.1, 1.1, 1.5, 0.7, 1.4, 1.3, 0.8, 0.9, 2.1, 1.5, 2.9, 1.0, 0.6;

$$\gamma = 0.92, \quad \sigma = 1.$$

11.4. -3.1, 1.3, 3.0, 1.5, 0.6, -1.4, -1.3, 0.8, 2.4, 2.3, -3.0, 1.3, 2.0, 2.4, 2.6, 2.0, 0.7, 0.8, -2.1, -4.2, 0.2, -0.3, -2.5, 3.8, 1.9, 1.1, 1.8, 0.9, 1.4, 0.8, 5.4, 2.3, 2.2, 1.1, -1.3, 0.9;

$$\gamma = 0.93, \quad \sigma = 2.$$

11.5. 1.6, 0.9, 1.2, 1.4, 1.2, 2.8, 0.7, 0.9, 1.1, 0.6, 1.8, 1.8, 1.1, 2.4, 2.7, 2.5, 3.0, 3.1, 1.7, 3.5, 2.4, 1.8, 0.0, 2.3, 2.3;

$$\gamma = 0.94, \quad \sigma = 1.$$

11.6. -1.2, -1.2, 1.4, 2.8, 4.7, 2.1, -0.1, -1.1, 0.4, 1.8, -0.3, -2.7, 5.4, 2.1, 5.3, 1.0, 1.3, 2.9, 3.4, 1.0, 3.6, 4.3, 4.3, 0.3, 3.7, 0.3, 4.5, -0.1, 3.3, 2.9, -1.3, 2.9, 3.8, 0.1, 1.4, 2.3;

$$\gamma = 0.95, \quad \sigma = 2.$$

11.7. 2.4, 4.0, 1.4, 2.2, 2.9, 3.8, 3.4, 1.0, 3.5, 1.8, 3.8, 2.4, 3.0, 3.1, 4.0, 3.2, 2.5, 3.1, 1.5, 2.2, 4.0, 3.0, 3.0, 3.1, 2.5;

$$\gamma = 0.96, \quad \sigma = 1.$$

11.8. 3.7, 2.9, 3.9, 6.1, 4.5, -0.7, 3.0, 1.2, 0.9, 2.4, 4.0, 3.8, 0.2, 0.2, 1.5, 2.7, 4.0, 2.6, 6.0, -0.8, -0.2, -2.2, 2.0, 6.1, 3.1, 3.7, 2.0, 4.4, 5.5, 4.3, 2.6, -0.7, 6.5, 3.7, 0.3, -0.3;

$$\gamma = 0.97, \quad \sigma = 2.$$

11.9. 5.1, 3.8, 7.6, 3.0, 4.5, 6.5, 3.6, 3.5, 4.7, 3.5, 4.7, 5.0, 4.7, 4.5, 4.8, 4.6, 4.0, 3.9, 4.6, 2.2, 3.7, 3.3, 3.8, 3.9, 4.1;

$$\gamma = 0.98, \quad \sigma = 1.$$

11.10. 2.5, 4.8, 8.5, 5.6, 5.1, 5.7, 3.9, 2.0, 4.8, 3.4, 5.8, 3.0, 3.1, 3.9, 6.9, 1.6, 7.6, 5.3, 5.7, 2.7, 1.7, 1.5, 6.6, 3.5, 7.0, 4.5, 6.1, 4.8, 7.0, 2.5, 0.9, 3.8, 3.2, 1.3, 3.3, 1.5;

$$\gamma = 0.99, \quad \sigma = 2.$$

11.11. 5.8, 2.1, 2.4, 5.9, 5.9, 3.8, 5.7, 10.2, 4.4, 2.6, 5.8, 5.9, 4.4, 3.8, 4.1, 2.9, 3.6, 3.3, 2.9, -0.3, 5.0, 2.3, 7.7, 2.0, 6.4;

$$\gamma = 0.9, \quad \sigma = 2.$$

11.12. 3.5, 4.5, 3.2, 6.3, 6.2, 3.9, 5.2, 3.9» 3.4, 4.4, 5.5, 5J, 5.6, 4.7, 5.7, 4.4, 7.0, 5.9, 4.3, 4.8, 5.0, 3.7, 5.9, 4.4, 3-7, 3.3, 4.1, 4.6, 3.7, 6.5, 6.5, 4.3, 4.0, 4.4, 5.4, 5.0;

$$\gamma = 0.99, \quad \sigma = 1.$$

11.13. 0.9, -1.1, -0.6, -4.3, 4.8, -1.6, -6.3, -7.3, 1.3, -7.2, 1.5, 2.6, -3.3, -5.4, -0.1, -0.2, -1.3, -0.1, 0.3, -0.9, -1.6, -2.8, 0.6, -4.2, -2.3, -5.3, -2.7, -7.3, -3.5, 1.9, -2.7, -5.9, -3.2, -3.2, 0.1, -6.0, -7.3, -1.8, 3.6, -3.5, -2.2, -7.1, 1.4, -1.4, -2.6, -0.3, -2.8, -4.4, -3.9;

$$\gamma = 0.98, \quad \sigma = 3.$$

11.14. 0.2, -1.7, -2.0, 2.7, -0.2, 0.9, 1.7, 2.1, 0.6, 2.2, 0.7, -1.6, 1.0, -1.2, 1.7, -1.3, 0.2, 0.3, 0.8, 1.1, 0.8, 1.4, 2.7, 0.7, 0.0;

$$\gamma = 0.97, \quad \sigma = 1.5.$$

11.15. -2.2, -6.8, 2.0, -0.9, 1.9, 1.8, 1.0, 0.7, -7.1, -2.6, -2.7, 7.8, -3.9, -6.2, 1.2, -0.6, -1.3, -1.2, 0.9, 8.2, 2.0, -1.9, 2.7, -3.0, 1.3, 3.5, -5.2, -5.6, 1.8, 0.7, -0.5, 3.4, -1.2, 5.6, 1.1, 0.6;

$$\gamma = 0.96, \quad \sigma = 3.5.$$

11.16. -5.4, -3.7, -8.2, 0.0, -5.6, -1.2, -8.1, -3.0, -4.0, -5.4, -6.8, -7.0, 1.7, -7.6, -0.9, -8.6, -8.4, -3.5, -1.0, -2.6, -

8.0, 0.7, -0.6, -3.5, -2.1, -5.5, -4.2, -0.1, -6.2, -4.5, -2.6, -7.0, 1.6, -6.7, -9.0, -4.0, -3.2, -3.6, -5.3, -8.6, 1.2, -5.6, -4.7, -0.7, -3.5, -4.1, -1.1, -3.7, -4.6;

$$\gamma = 0.95, \quad \sigma = 3.$$

11.17. 3.2, 4.2, 4.7, 0.8, 4.3, 3.3, 3.7, 3.9, 2.5, 4.3, 2.5, 2.8, 3.6, 4.2, 1.6, 0.9, 0.8, 0.9, 6.4, 1.0, 3.1, 5.0, -0.9, 3.6, 3.5;

$$\gamma = 0.94, \quad \sigma = 1.5.$$

11.18. -2.8, -0.7, 2.4, -3.1, -3.5, -1.3, -0.2, -5.1, -1.3, -0.4, -6.4, 0.7, 1.2, -0.0, 2.1, 0.4, -1.8, -3.5, 5.0, -3.6, 2.1, -5.3, 0.4, -2.8, -3.0, -1.3, -2.0, 0.2». -1.9, -0.9, -1.6, -1.0, -0.9, -2.5, -3.6, -1.5;'

$$\gamma = 0.93, \quad \sigma = 2.5.$$

11.19. 3.5, 4.8, 9.2, 9.0, 7.8, 6.7, 8.4, 5.3, 3.5, 5.2, 6.4, 5.8, 5.8, 5.6, 3.0, 4.3, 6.7, 4.4, 8.7, 9.8, 5.5, 5.0, 5.1, 6.1, 6.2, 9.8, 2.9, 6.1, 8.1, 6.0, 9.8, 5.7, 7.1, 6.2, 6.3, 3.8, 6.5, 5.7, 6.1, 8.2, 6.4, 6.8, 5.8, 3.9, 7.9, 5.0, 7.1, 2.7, 5.1;

$$\gamma = 0.92, \quad \sigma = 2.$$

11.20. -4.4, -1.0, 0.6, -3.3, -3.6, -5.7, -1.6, -1.3, 2.8, -2.6, 1.0, 1.0, -0.2, 0.7, 1.2, -6.8, -1.6, -5.3, -2.9, -1.5, -2.3, -3.6, -1.0, -4.1, -8.7, -0.3, -5.5, -1.9, -4.5, 0.7, -2.8, -5.4, -6.3, -3.1, 1.9, -1.9, -8.4, -1.9, -9.3, -5.3, -3.0, -5.0, -6.8, -3.0, 1.8, -2.7, -1.3, -5.5, -0.3;

$$\gamma = 0.91, \quad \sigma = 3.$$

11.21. -0.1, 1.6, -1.3, -0.6, -3.8, -3.0, -1.4, -2.5, -2.3, -0.5, -5.0, -4.6, 1.8, -1.0, 0.6, -0.0, -2.1, -4.5, 1.7, -3.7, -4.5, -3.1, -1.3, -4.7, -3.8;

$$\gamma = 0.99, \quad \sigma = 2.$$

11.22. -0.8, -1.7, 1.9, 1.2, 2.4, 0.7, 1.1, 2.1, -3.7, 2.4, 1.8, -1.7, 1.1, -0.0, 3.0, -0.7, 4.5, 1.8, -0.3, 0.6, 2.5, 4.3, 0.7, 1.5, 1.2, 2.0, 1.0, -0.5, 0.4, 6.3, 3.6, 4.2, -1.8, 2.6, -0.5, 4.9;

$$\gamma = 0.98, \quad \sigma = 2.$$

11.23. 5.4, 1.5, 0.5, 2.0, 2.0, 2.4, 3.7, 1.2, 1.1, 2.6, 3.1, 2.7, 0.4, 0.8, 1.4, 6.1, 4.0, 1.3, 1.8, 2.8, 1.9, 6.5, 1.1, -1.8, -2.1, LI, 4.4,

1.9, 4.1, -0.7, 0.5, -0.8, -1.6, 1.6, 2.4, 3.7, -1.3, 6.5, 3.1, 0.7, -0.9,
0.5, 1.6, 3.8, 1.3, 2.0, 2.7, 0.3, -0.5;

$$\gamma = 0.97, \quad \sigma = 2.$$

11.24. 2.7, 3.7, 2.9, 3.8, 1.7, 2.4, 2.8, 2.7, 4.0, 3.8, 2.7, 2.5, 2.0,
3.5, 4.2, 1.2, 2.9, 1.9, 4.0, 3.7, 5.0, 3.5, 2.0, 4.0, 3.3, 3.8, 3.8, 5.1, 4.2,
4.2, 3.2, 4.0, 1.9, 3.3, 3.8, 3.6;

$$\gamma = 0.96, \quad \sigma = 1.$$

11.25. 3.2, 2.7, 7.2, 1.6, 7.7, 4.4, 1.2, 1.7, 4.2, 1.7, 0.8, 5.5, 4.5,
2.4, 0.9, 1.8, 2.4, 1.0, 2.9, 3.9, 5.1, 5.1, 1.9, 7.5, 4.2;

$$\gamma = 0.95, \quad \sigma = 2.$$

11.26. 5.4, 1.5, -2.4, 2.3, 0.1, -1.4, 8.7, 2.3, 0.6, 1.1,
3.4, -3.4, -3.7, -0.8, 5.7, -2.3, 0.6, 1.1, 0.4, 0.3, -0.1, 0.1, -
0.6, 5.1, 1.7, 4.2, 5.8, 3.8, -1.6, 6.7, 1.4, -2.9, 3.4, 0.7, 1.2,
3.6, -2.8, -2.6, 5.1, 3.0, -0.8, -4.0, -2.0, 2.1, 1.8, 4.7, 0.9, 1.4,
0.4;

$$\gamma = 0.94, \quad \sigma = 3.$$

11.27. 5.1, 2.2, 5.2, 0.1, 4.4, 0.8, 7.2, -1.9, 5.4, -2.9, 2.5,
5.5, 1.2, 9.2, 3.8, 2.6, -0.1, 3.8, -0.3, 6.0, 6.8, -1.0, -2.9, 2.0,
3.0, -5.4, 2.4, 1.0, 8.7, 2.7, 1.5, 1.5, 2.1, 5.0, 4.0, 2.0;

$$\gamma = 0.93, \quad \sigma = 3.$$

11.28. 0.4, 6.0, 6.0, 4.8, 3.5, -2.2, 5.2, 2.9, 2.9, 9.7, 3.5, 2.6,
5.5, 9.6, 2.1, 1.8, 2.2, 9.6, 5.7, 2.5, 3.9, 1.4, 3.3, 2.4, 5.6;

$$\gamma = 0.92, \quad \sigma = 3.$$

11.29. -3.7, -1.5, -1.7, -8.8, 1.8, -4.3, -4.4, -1.1, -5.1,
-6.6, -0.4, -7.9, -3.3, -10.7, -0.1, -3.0, -5.0, -6.8, 0.8, 3.6,
-4.1, -12.5, -5.3, -6.6, -3.9, -2.9, -1.8, 4.3, -1.3, -7.3, -
2.4, -0.4, -5.5, -4.2, 0.3, -3.6;

$$\gamma = 0.91, \quad \sigma = 4.$$

11.30. -3.1, 4.1, -0.3, -1.9, -3.0, -4.0, 1.2, 1.1, -1.1, -
1.5, -1.0, -1.7, 2.4, -0.4, -3.1, -3.5, -5.0, -2.6, -3.9, -
4.8, -0.8, -2.6, 0.3, -4.0, -5.1, 0.2, -2.0, 0.9, -3.1, -
1.2, -1.8, -3.4, -4.6, -3.6, -3.2, -5.0, 0.1, 3.5, 0.1, -2.2,
3.6, -1.8, -0.6, -0.6, 0.8, -4.1, 0.8, -0.9, -0.9;

$$\gamma = 0.9, \quad \sigma = 2.$$

Задача 12. Дано межі інтервалів та частота попадання вибірових значень в ці інтервали. Необхідно, використавуючи критерій Пірсона (χ^2) при рівні значущості α , перевірити, чи узгоджується гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності випадкової величини з емпіричним розподілом вибірки.

12.1. $\alpha = 0,1$

Інтервал	Частота
$[-5,05; -4,03)$	1
$[-4,03; -3,01)$	7
$[-3,01; -1,99)$	15
$[-1,99; -0,97)$	34
$[-0,97; 0,04)$	43
$[0,04; 1,06)$	36
$[1,06; 2,08)$	32
$[2,08; 3,10)$	20
$[3,10; 4,12]$	12

12.2. $\alpha = 0,025$

Інтервал	Частота
$[-4,59; -3,45)$	1
$[-3,45; -2,32)$	12
$[-2,32; -1,18)$	20
$[-1,18; -0,05)$	31
$[-0,05; 1,09)$	48
$[1,09; 2,22)$	39
$[2,22; 3,36)$	28
$[3,36; 4,49)$	15
$[4,49; 5,63]$	6

12.3. $\alpha = 0,05$

Інтервал	Частота
$[-0,49; 0,05)$	4
$[0,05; 0,60)$	10
$[0,60; 1,14)$	28
$[1,14; 1,68)$	34
$[1,68; 2,23)$	40
$[2,23; 2,77)$	43
$[2,77; 3,31)$	25
$[3,31; 3,86)$	11
$[3,86; 4,40]$	5

12.4. $\alpha = 0,025$

Інтервал	Частота
$[-1,16; -0,59)$	10
$[-0,59; -0,03)$	7
$[-0,03; 0,54)$	15
$[0,54; 1,10)$	23
$[1,10; 1,67)$	21
$[1,67; 2,23)$	9
$[2,23; 2,80)$	10
$[2,80; 3,36]$	5

12.5. $\alpha = 0,1$

Інтервал	Частота
$[-0,75; -0,17)$	4
$[-0,17; 0,41)$	6
$[0,41; 0,98)$	7
$[0,98; 1,56)$	17
$[1,56; 2,14)$	27
$[2,14; 2,72)$	21
$[2,72; 3,29)$	13
$[3,29; 3,87]$	5

12.6. $\alpha = 0,1$

Інтервал	Частота
$[-4,14; -2,60)$	9
$[-2,60; 1,06)$	17
$[-1,06; 0,48)$	31
$[0,48; 2,03)$	47
$[2,03; 3,57)$	30
$[3,57; 5,11)$	12
$[5,11; 6,65)$	3
$[6,65; 8,19]$	1

12.7. $\alpha = 0,05$

Інтервал	Частота
$[-5,16; -3,95)$	4
$[-3,95; -2,75)$	8
$[-2,75; -1,54)$	18
$[-1,54; -0,33)$	31
$[-0,33; 0,87)$	44
$[0,87; 2,08)$	26
$[2,08; 3,28)$	15
$[3,28; 4,49]$	4

12.8. $\alpha = 0,025$

Інтервал	Частота
$[-3,04; -2,44)$	9
$[-2,44; -1,84)$	10
$[-1,84; -1,23)$	26
$[-1,23; -0,63)$	24
$[-0,63; -0,03)$	11
$[-0,03; 0,57)$	12
$[0,57; 1,18)$	6
$[1,18; 1,78]$	2

12.9. $\alpha = 0,1$

Інтервал	Частота
$[-4,15; -3,30)$	2
$[-3,30; -2,45)$	6
$[-2,45; -1,61)$	18
$[-1,61; -0,76)$	34
$[-0,76; 0,09)$	25
$[0,09; 0,94)$	11
$[0,94; 1,78)$	3
$[1,78; 2,63]$	1

12.10. $\alpha = 0,025$

Інтервал	Частота
$[-3,26; -1,98)$	3
$[-1,98; -0,71)$	6
$[-0,71; 0,57)$	16
$[0,57; 1,84)$	23
$[1,84; 3,11)$	25
$[3,11; 4,39)$	10
$[4,39; 5,66)$	11
$[5,66; 6,94]$	6

12.11. $\alpha = 0,1$

Интервал	Частота
$[-2,01; -1,50)$	13
$[-1,50; -1,00)$	16
$[-1,00; -0,49)$	36
$[-0,49; 0,01)$	41
$[0,01; 0,52)$	36
$[0,52; 1,02)$	27
$[1,02; 1,53)$	19
$[1,53; 2,03)$	8
$[2,03; 2,54]$	4

12.12. $\alpha = 0,05$

Интервал	Частота
$[-3,67; -3,05)$	3
$[-3,05; -2,43)$	9
$[-2,43; -1,80)$	23
$[-1,80; -1,18)$	44
$[-1,18; -0,56)$	54
$[-0,56; 0,06)$	40
$[0,06; 0,69)$	18
$[0,69; 1,93)$	7
$[1,31; 1,93]$	2

12.13. $\alpha = 0,025$

Интервал	Частота
$[-4,01; -2,73)$	2
$[-2,73; -1,45)$	24
$[-1,45; -0,16)$	32
$[-0,16; 1,12)$	44
$[1,12; 2,40)$	51
$[2,40; 3,68)$	25
$[3,68; 4,97)$	14
$[4,97; 6,25)$	3
$[6,25; 7,53]$	2

12.14. $\alpha = 0,1$

Интервал	Частота
$[-6,63; -4,85)$	6
$[-4,85; -3,06)$	13
$[-3,06; -1,28)$	24
$[-1,28; 0,50)$	37
$[0,50; 2,29)$	50
$[2,29; 4,07)$	35
$[4,07; 5,85)$	25
$[5,85; 7,64)$	5
$[7,64; 9,42]$	5

12.15. $\alpha = 0,05$

Интервал	Частота
$[-8,22; -5,98)$	5
$[-5,98; -3,73)$	19
$[-3,73; -1,49)$	27
$[-1,49; 0,76)$	44
$[0,76; 3,00)$	38
$[3,00; 5,25)$	38
$[5,25; 7,49)$	21
$[7,49; 9,74)$	5
$[9,74; 11,98]$	3

12.16. $\alpha = 0,025$

Интервал	Частота
$[-1,47; -0,80)$	1
$[-0,80; -0,12)$	1
$[-0,12; 0,55)$	13
$[0,55; 1,22)$	30
$[1,22; 1,90)$	40
$[1,90; 2,57)$	53
$[2,57; 3,24)$	37
$[3,24; 3,92)$	18
$[3,92; 4,59]$	7

12.17. $\alpha = 0,05$

Інтервал	Частота
$[-8,22; -5,98)$	5
$[-5,98; -3,73)$	19
$[-3,73; -1,49)$	27
$[-1,49; 0,76)$	44
$[0,76; 3,00)$	38
$[3,00; 5,25)$	38
$[5,25; 7,49)$	21
$[7,49; 9,74)$	5
$[9,74; 11,98]$	3

12.18. $\alpha = 0,075$

Інтервал	Частота
$[-11,28; -8,23)$	5
$[-8,23; -5,19)$	13
$[-5,19; -2,14)$	22
$[-2,14; 0,91)$	40
$[0,91; 3,95)$	41
$[3,95; 7,00)$	46
$[7,00; 10,05)$	17
$[10,05; 13,09)$	9
$[13,09; 16,14]$	7

12.19. $\alpha = 0,1$

Інтервал	Частота
$[-15,26; -11,93)$	3
$[-11,93; -8,59)$	3
$[-8,59; -5,26)$	10
$[-5,26; -1,93)$	30
$[-1,93; 1,41)$	52
$[1,41; 4,74)$	45
$[4,74; 8,07)$	33
$[8,07; 11,44)$	20
$[11,41; 14,74]$	4

12.20. $\alpha = 0,05$

Інтервал	Частота
$[-12,03; -9,96)$	1
$[-9,96; -7,88)$	3
$[-7,88; -5,81)$	10
$[-5,81; -3,73)$	25
$[-3,73; -1,66)$	37
$[-1,66; 0,42)$	65
$[0,42; 2,49)$	35
$[2,49; 4,57)$	20
$[4,57; 6,64]$	4

12.21. $\alpha = 0,05$

Інтервал	Частота
$[-25,69; -20,76)$	4
$[-20,76; -15,82)$	6
$[-15,82; -10,89)$	22
$[-10,89; -5,95)$	30
$[-5,95; -1,02)$	56
$[-1,02; 3,92)$	42
$[3,92; 8,85)$	26
$[8,85; 13,79)$	11
$[13,79; 18,72]$	3

12.22. $\alpha = 0,025$

Інтервал	Частота
$[-10,21; -7,75)$	2
$[-7,75; -5,30)$	7
$[-5,30; -2,84)$	6
$[-2,84; -0,39)$	29
$[-0,39; 2,07)$	58
$[2,07; 4,52)$	49
$[4,52; 6,98)$	30
$[6,98; 9,43)$	15
$[9,43; 11,89]$	4

12.23. $\alpha = 0,1$

Інтервал	Частота
$[-8,38; -5,80)$	8
$[-5,80; -3,22)$	16
$[-3,22; -0,63)$	25
$[-0,63; 1,95)$	30
$[1,95; 4,53)$	40
$[4,53; 7,11)$	38
$[7,11; 9,70)$	22
$[9,70; 12,28)$	15
$[12,28; 14,86]$	6

12.24. $\alpha = 0,025$

Інтервал	Частота
$[-9,56; -6,47)$	11
$[-6,47; -3,39)$	16
$[-3,39; -0,30)$	33
$[-0,30; 2,79)$	36
$[2,79; 5,87)$	33
$[5,87; 8,96)$	34
$[8,96; 12,05)$	24
$[12,05; 15,13)$	10
$[15,13; 18,22]$	3

12.25. $\alpha = 0,05$

Інтервал	Частота
$[-14,25; -11,62)$	4
$[-11,62; -8,98)$	8
$[-8,98; -6,35)$	24
$[-6,35; -3,71)$	35
$[-3,71; -1,08)$	41
$[-1,08; 1,56)$	42
$[1,56; 4,19)$	27
$[4,19; 6,83)$	10
$[6,83; 9,46]$	9

12.26. $\alpha = 0,075$

Інтервал	Частота
$[-24,60; -19,39)$	3
$[-19,39; -14,18)$	8
$[-14,18; -8,97)$	26
$[-8,97; -3,76)$	48
$[-3,76; 1,45)$	47
$[1,45; 6,66)$	38
$[6,66; 11,87)$	18
$[11,87; 17,08)$	7
$[17,08; 22,29]$	5

12.27. $\alpha = 0,05$

Інтервал	Частота
$[-27,23; -21,66)$	4
$[-21,66; -16,09)$	9
$[-16,09; -10,52)$	24
$[-10,52; -4,95)$	43
$[-4,95; 0,61)$	51
$[0,61; 6,18)$	32
$[6,18; 11,75)$	23
$[11,75; 17,32)$	9
$[17,32; 22,89]$	5

12.28. $\alpha = 0,1$

Інтервал	Частота
$[-13,96; -11,27)$	10
$[-11,27; -8,58)$	22
$[-8,58; -5,89)$	37
$[-5,89; -3,20)$	46
$[-3,20; -0,50)$	39
$[-0,50; 2,19)$	29
$[2,19; 4,88)$	14
$[4,88; 7,57)$	2
$[7,57; 10,26]$	1

12.29. $\alpha = 0,1$

Інтервал	Частота
$[-16,49; -12,29)$	5
$[-12,29; -8,10)$	12
$[-8,10; -3,90)$	22
$[-3,90; 0,29)$	39
$[0,29; 4,49)$	38
$[4,49; 8,68)$	44
$[8,68; 12,88)$	19
$[12,88; 17,07)$	19
$[17,07; 21,27]$	2

12.30. $\alpha = 0,025$

Інтервал	Частота
$[-4,90; -4,32)$	4
$[-4,32; -3,74)$	5
$[-3,74; -3,15)$	21
$[-3,15; -2,57)$	34
$[-2,57; -1,99)$	48
$[-1,99; -1,41)$	34
$[-1,41; -0,82)$	29
$[-0,82; -0,24)$	19
$[-0,24; 0,34]$	6

Задача 13. Знайти точкові оцінки параметрів лінійної регресії $y = ax + b$ за вибірковими даними.

13.1.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	0,3	0,8	-1,2	-0,4	-1,8	-2,9	-4,5	-4,9	-7,1	-6,4

13.2.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	4,7	6,2	5,9	8,1	10,7	13,0	12,9	15,7	18,8	21,0

13.3.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	1,4	2,1	4,4	5,4	7,4	6,5	9,5	11,1	12,7	12,2

13.4.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	4,4	7,2	8,3	11,4	14,1	14,6	17,9	19,6	20,9	22,6

13.5.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	5,7	6,8	7,8	6,9	9,2	10,5	10,1	9,8	9,8	14,8

13.6.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	2,4	2,5	1,2	1,4	-0,4	-0,2	-2,1	-3,1	-5,3	-5,8

13.7.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	3,0	6,7	3,3	3,1	0,8	-0,6	-1,9	-2,7	-2,8	-5,6

13.8.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	2,7	2,5	4,6	4,8	8,2	7,4	6,3	7,9	11,3	10,4

13.9.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	1,9	-0,9	-4,8	-5,1	-6,4	-9,1	-10,8	-16,0	-16,7	-15,7

13.10.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	0,8	2,5	4,7	3,6	5,6	5,1	7,4	9,0	9,3	9,7

13.11.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	2,7	2,8	5,4	7,0	10,2	12,5	14,4	14,5	17,4	19,6

13.12.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	-1,6	2,2	4,3	2,2	2,8	4,6	7,4	7,9	10,8	6,8

13.13.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	-0,1	3,6	5,8	8,4	7,1	11,8	13,4	15,7	16,7	18,2

13.14.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	4,2	6,5	8,2	9,2	10,5	13,1	16,1	17,3	20,1	20,2

13.15.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	2,9	4,2	6,3	4,2	5,2	5,3	8,8	9,8	8,5	11,2

13.16.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	0,1	0,3	-1,6	-2,7	-4,4	-3,5	-6,7	-6,7	-9,0	-11,3

13.17.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	-0,2	0,6	-2,2	-2,5	-2,6	-5,2	-4,6	-6,5	-5,3	-7,5

13.18.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	0,5	-0,8	-4,8	-4,9	-7,5	-11,0	-10,6	-12,9	-16,0	-19,3

13.19.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	-1,1	-2,8	-4,4	-6,4	-9,9	-11,2	-12,3	-15,7	-15,3	

13.20.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	1,9	-0,6	-3,9	-4,2	-6,4	-7,7	-11,1	-12,7	-15,4	-16,4

13.21.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	1,6	-1,6	-1,8	-4,1	-5,3	-7,3	-9,0	-13,4	-15,1	-16,3

13.22.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	3,6	1,4	-0,5	0,0	-0,6	-1,4	-2,8	-4,9	-5,0	-8,1

13.23.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	2,4	3,6	1,0	0,8	-0,3	0,8	-1,2	-2,1	-3,3	-6,5

13.24.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	-4,0	-4,5	-2,2	0,1	1,1	1,4	1,6	2,1	3,7	5,0

13.25.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	-3,4	1,1	0,3	3,8	3,4	7,6	9,4	13,4	14,4	14,2

13.26.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	-7,4	-3,7	-1,7	-0,7	3,3	4,1	6,6	7,6	9,2	11,2

13.27.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	-6,3	-6,5	-5,3	-2,8	-0,8	-1,5	-0,6	-0,3	-0,3	2,3

13.28.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	-9,3	-6,9	-2,4	0,2	3,4	7,0	8,5	11,0	14,8	18,0

13.29.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	-7,0	-1,0	1,4	5,5	10,5	10,9	16,0	21,1	25,7	29,1

13.30.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	4,1	2,7	0,1	-1,6	-4,1	-4,1	-9,0	-9,3	-9,4	-14,2

Задача 14. Дано двічі диференційовний в середньому квадратичному випадковий процес $\xi(t)$, що має характеристики $m_\xi(t)$ і $K_\xi(t_1, t_2)$, та випадковий процес $\eta(t)$. Визначити математичне сподівання, автоковаріаційну функцію, дисперсію випадкового процесу $\eta(t)$. Знайти взаємну коваріаційну функцію процесів $\xi(t)$ і $\eta(t)$.

$$14.1. \quad m_\xi(t) = t^2 + 1, \quad K_\xi(t_1, t_2) = 3e^{-5(t_1 - t_2)^2}, \\ \eta(t) = (t+1)\xi'(t).$$

$$14.2. \quad m_\xi(t) = t^3, \quad K_\xi(t_1, t_2) = 2e^{-(t_1 - t_2)^2}, \\ \eta(t) = (t+1)\xi'(t) + (t-1)^2.$$

$$14.3. \quad m_\xi(t) = t^3 - 1, \quad K_\xi(t_1, t_2) = e^{-2(t_1 - t_2)^2}, \\ \eta(t) = \xi''(t).$$

$$14.4. \quad m_\xi(t) = t^2 + t, \quad K_\xi(t_1, t_2) = 4e^{-(t_1 - t_2)^2}, \\ \eta(t) = 2t\xi''(t).$$

$$14.5. \quad m_\xi(t) = t^3 - t^2, \quad K_\xi(t_1, t_2) = 5e^{-2(t_1 - t_2)^2}, \\ \eta(t) = (t-1)^2 + (t+1)\xi''(t).$$

$$14.6. \quad m_\xi(t) = t^2 + 8t, \quad K_\xi(t_1, t_2) = 3e^{-4(t_1 - t_2)^2}, \\ \eta(t) = t + 1 - 2t\xi''(t).$$

$$14.7. \quad m_\xi(t) = t^2 + 2t + 1, \quad K_\xi(t_1, t_2) = 2e^{-3(t_1 - t_2)^2},$$

$$\eta(t) = t\xi'(t) + 2t.$$

$$14.8. \quad m_{\xi}(t) = t^2 - 4, \quad K_{\xi}(t_1, t_2) = 4e^{-2(t_1 - t_2)^2},$$

$$\eta(t) = t^2\xi''(t) + 3t + 1.$$

$$14.9. \quad m_{\xi}(t) = t^3 - 8, \quad K_{\xi}(t_1, t_2) = e^{-3(t_1 - t_2)^2},$$

$$\eta(t) = t\xi'(t) + 3t^2.$$

$$14.10. \quad m_{\xi}(t) = t^2 - 2t + 1, \quad K_{\xi}(t_1, t_2) = 3e^{-(t_1 - t_2)^2},$$

$$\eta(t) = t^2\xi'(t) - (t + 1)^2.$$

$$14.11. \quad m_{\xi}(t) = t^2 + 1, \quad K_{\xi}(t_1, t_2) = 3e^{-5(t_1 - t_2)^2},$$

$$\eta(t) = (t + 1)\xi'(t) - 2.$$

$$14.12. \quad m_{\xi}(t) = t^3, \quad K_{\xi}(t_1, t_2) = 2e^{-(t_1 - t_2)^2},$$

$$\eta(t) = (t + 1)\xi'(t) + (t - 1)^2 + 1.$$

$$14.13. \quad m_{\xi}(t) = t^3 - 1, \quad K_{\xi}(t_1, t_2) = e^{-2(t_1 - t_2)^2},$$

$$\eta(t) = \xi''(t) - 2t.$$

$$14.14. \quad m_{\xi}(t) = t^2 + t, \quad K_{\xi}(t_1, t_2) = 4e^{-(t_1 - t_2)^2},$$

$$\eta(t) = 2t\xi''(t) + 1.$$

$$14.15. \quad m_{\xi}(t) = t^3 - t^2, \quad K_{\xi}(t_1, t_2) = 5e^{-2(t_1 - t_2)^2},$$

$$\eta(t) = (t - 1)^2 - (t + 1)\xi''(t).$$

$$14.16. \quad m_{\xi}(t) = t^2 + 8t, \quad K_{\xi}(t_1, t_2) = 3e^{-4(t_1 - t_2)^2},$$

$$\eta(t) = t + 1 + 2t\xi''(t).$$

$$14.17. \quad m_{\xi}(t) = t^2 + 2t + 1, \quad K_{\xi}(t_1, t_2) = 2e^{-3(t_1 - t_2)^2},$$

$$\eta(t) = t\xi'(t) - 2t.$$

$$14.18. \quad m_{\xi}(t) = t^2 - 4, \quad K_{\xi}(t_1, t_2) = 4e^{-2(t_1 - t_2)^2},$$

$$\eta(t) = t^2 \xi''(t) - 3t + 1.$$

$$14.19. \quad m_{\xi}(t) = t^3 - 8, \quad K_{\xi}(t_1, t_2) = e^{-3(t_1 - t_2)^2},$$

$$\eta(t) = t\xi'(t) - 3t^2.$$

$$14.20. \quad m_{\xi}(t) = t^2 - 2t + 1, \quad K_{\xi}(t_1, t_2) = 3e^{-(t_1 - t_2)^2},$$

$$\eta(t) = t^2 \xi'(t) - (t - 1)^2.$$

$$14.21. \quad m_{\xi}(t) = t^2 + 1, \quad K_{\xi}(t_1, t_2) = 3e^{-5(t_1 - t_2)^2},$$

$$\eta(t) = (t - 1)\xi'(t).$$

$$14.22. \quad m_{\xi}(t) = t^3, \quad K_{\xi}(t_1, t_2) = 2e^{-(t_1 - t_2)^2},$$

$$\eta(t) = (t - 1)\xi'(t) + (t - 1)^2.$$

$$14.23. \quad m_{\xi}(t) = t^3 - 1, \quad K_{\xi}(t_1, t_2) = e^{-2(t_1 - t_2)^2},$$

$$\eta(t) = \xi''(t) - t.$$

$$14.24. \quad m_{\xi}(t) = t^2 + t, \quad K_{\xi}(t_1, t_2) = 4e^{-(t_1 - t_2)^2},$$

$$\eta(t) = 2t\xi''(t) + 1.$$

$$14.25. \quad m_{\xi}(t) = t^3 - t^2, \quad K_{\xi}(t_1, t_2) = 5e^{-2(t_1 - t_2)^2},$$

$$\eta(t) = (t - 1)^2 - (t + 1)\xi''(t).$$

$$14.26. \quad m_{\xi}(t) = t^2 + 8t, \quad K_{\xi}(t_1, t_2) = 3e^{-4(t_1 - t_2)^2},$$

$$\eta(t) = t + 1 + 2t\xi''(t).$$

$$14.27. \quad m_{\xi}(t) = t^2 + 2t + 1, \quad K_{\xi}(t_1, t_2) = 2e^{-3(t_1 - t_2)^2},$$

$$\eta(t) = t\xi'(t) - 2t.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{14.28.} \quad m_{\xi}(t) &= t^2 - 4, \quad K_{\xi}(t_1, t_2) = 4e^{-2(t_1 - t_2)^2}, \\ \eta(t) &= t^2 \xi''(t) - 3t + 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{14.29.} \quad m_{\xi}(t) &= t^3 - 8, \quad K_{\xi}(t_1, t_2) = e^{-3(t_1 - t_2)^2}, \\ \eta(t) &= t\xi'(t) - 3t^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{14.30.} \quad m_{\xi}(t) &= t^2 - 2t + 1, \quad K_{\xi}(t_1, t_2) = 3e^{-(t_1 - t_2)^2}, \\ \eta(t) &= t^2 \xi'(t) - (t - 1)^2. \end{aligned}$$

Література

1. Тестові завдання з вищої математики: Навчальний посібник / С.І. Гургула, В.М. Мойсишин, В.О. Воробйова та ін.; За ред. С.І. Гургули, В.М. Мойशिшина. – Івано-Франківськ: Факел, 2008. – 737 с.
2. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчёты): Учебн. пособие для втузов. – М. Высш. школа, 1983. – 175 с.
3. Чудесенко В.Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики (типовые расчёты): Учебн. пособие для втузов. – М.: Высш. школа, 1983. – 112 с.
4. Івасишин Л.М., Шарин С.В., Малицька Г.П. Теорія ймовірностей та математична статистика: Методичні вказівки та завдання для розрахунково-графічних робіт. – Івано-Франківськ: Факел, 2004. – 86 с.

УДК 51(075.8)

ББК 22.11

3 41

Гургула Степан Іванович, Мойсишин Василь Михайлович,
Гулька Степан Степанович, Гураль Інеса Михайлівна,
Камаєва Лідія Іванівна, Лавинюкова Тетяна Григорівна,
Лялюк Дмитро Федорович, Матієшин Дмитро Дмитрович,
Маковійчук Микола Васильович, Мельниченко Лідія
Дмитрівна, Мойсєнко Лідія Анатолівна, Осипчук Михайло
Михайлович, Савчук Ярослав Іванович, Смоловик Ліана
Романівна, Тимків Іван Романович, Тирлич Володимир
Васильович, Яцишин Василь Дмитрович

ЗБІРНИК ЗАВДАНЬ ДЛЯ РОЗРАХУНКОВИХ РОБІТ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Навчальний посібник

За редакцією С.І.Гургули, В.М.Мойсишина

Відповідальний за випуск	В.М.Мойсишин
Набір та макетування	Б.В. Демківа
Комп'ютерна правка	Л.Я.Дяків

ISBN 978-966-694-123-0