

Ярослав Савчук, Андрій Бандура
Людмила Криштопа, Любов Шегда

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Враховуючи ще λ (5.21), бачимо, що координати точки умовного екстремуму повинні задовольняти систему рівнянь

$$\begin{cases} f'_x(x,y) + \lambda \varphi'_x(x,y) = 0, \\ f'_y(x,y) + \lambda \varphi'_y(x,y) = 0, \\ \varphi(x,y) = 0. \end{cases}$$

(5.24)

Аналізуючи цю систему, помічаємо, що її рівняння є необхідними умовами екстремуму функції

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda \varphi(x,y).$$

(5.25)

Функція (5.24) називається функцією Лагранжа, а число λ – множителем Лагранжа.



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**Івано-Франківський національний технічний університет
нафти і газу**

Я. І. Савчук, А. І. Бандура, Л. І. Криштопа, Л. М. Шегда

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ
ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ**

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

**Івано-Франківськ
2012**

УДК 517.51(075.8)
ББК 22.161.1
Д 50

Рецензенти:

Заторський Р. А.

доктор фізико-математичних наук, доцент кафедри алгебри і геометрії Прикарпатського національного університету ім. В. Стефаника;

Гургула С. І.

кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу

Рекомендовано методичною радою Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу (протокол № 2 від 14 грудня 2012 р.)

Савчук Я. І., Бандура А. І., Криштопа Л. І., Шегда Л. М.

Д 50 Диференціальне числення функцій декількох змінних: навчальний посібник. – Івано-Франківськ: Сімик, 2013. – 98 с.

МВ 02070855-3875-2012

Навчальний посібник розроблений відповідно до робочої програми дисципліни „Вища математика“. Він містить детальний виклад теоретичного матеріалу одного з розділів вищої математики — диференціального числення функцій кількох змінних.

Виклад відповідного матеріалу теоретичної частини ілюструється численними прикладами, зразками їх розв’язування. У практичній частині посібника наведено завдання для розрахункової графічної роботи із зразком їхнього розв’язування і типові тестові теоретичні та практичні питання, які використовуються кафедрою вищої математики під час колоквіумів та екзаменів.

Навчальний посібник призначено для студентів першого курсу усіх напрямів підготовки вищих технічних навчальних закладів.

УДК 517.51
ББК 22.161.1

МВ 02070855-3875-2012

© Савчук Я. І., Бандура А. І.,
Криштопа Л. І., Шегда Л. М.
© ІФНТУНГ, 2012

Зміст

Теоретична частина	5
Тема 1. Поняття функції багатьох змінних, її границя, неперервність та частинні похідні	5
Поняття функції декількох змінних	5
Лінії та поверхні рівня	8
Границя функції декількох змінних	9
Неперервність функції декількох змінних	12
Частинні та повний прирости функції декількох змінних	14
Частинні похідні та їх геометричний зміст	15
Тема 2. Диференційовність функції кількох змінних	18
Означення диференційовності, зв'язок з частинними похідними та неперервністю	18
Диференціал функції декількох змінних	21
Частинні похідні та диференціал складеної функції	24
Диференціювання неявних функцій	28
Тема 3. Деякі застосування частинних похідних	32
Дотична площина та нормаль до поверхні	32
Геометричний зміст диференціала функції двох змінних	34
Скалярне поле. Похідна за напрямком	35
Градiєнт, його властивості	39
Тема 4. Частинні похідні та диференціали вищих порядків. Формула Тейлора	41
Частинні похідні вищих порядків	41
Диференціали вищих порядків	45
Формула Тейлора для функції двох змінних	50
Тема 5. Екстремуми функцій декількох змінних	53
Необхідні умови локального екстремуму функцій кількох змінних	53
Достатні умови екстремуму	56
Глобальні екстремуми функцій декількох змінних	59
Умовний екстремум	62
Практична частина	67
Зразок розв'язання типових практичних завдань	67
Завдання для практичних занять	77
Завдання для самостійної роботи	78
Область визначення	79
Лінії рівня.	79
Повний диференціал	80
Мішані похідні	81

Гradient і похідна за напрямом	81
Похідна складеної функції	82
Похідна неявно заданої функції.	83
Рівняння дотичної площини та нормалі	84
Екстремум функції двох змінних	85
Умовний екстремум	86
Найбільше та найменше значення.	86
Завдання для контролю знань	87
Тестові теоретичні завдання	87
Тестові практичні завдання	91
Предметний покажчик	95
Перелік рекомендованих джерел	97

Теоретична частина

ТЕМА 1. ПОНЯТТЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ, ЇЇ ГРАНИЦЯ, НЕПЕРЕРВНІСТЬ ТА ЧАСТИННІ ПОХІДНІ

Поняття функції декількох змінних

У природі, техніці та науці досить часто бувають випадки, коли явища й процеси описуються двома та більше величинами. В цьому можна переконатись наступними простими прикладами, які відомі ще із школи. Просто раніше при розгляді цих формул прямо не згадувалося, що вони задають функції декількох змінних.

? Приклад 1.1.

Площа бічної поверхні S кругового конуса з радіусом основи x та твірною y визначається формулою $S = \pi xy$. Як бачимо, кожній парі значень x та y відповідає певне значення площі S .

У наведеному вище прикладі площа виражалася через дві величини - твірну та радіус основи, тобто була функцією двох змінних.

? Приклад 1.2.

Об'єм V прямокутного паралелепіпеда з ребрами x, y, z обчислюється за формулою $V = xyz$. У даному випадку кожній впорядкованій трійці значень x, y, z відповідає певне значення об'єму V .

Зазначимо, що на практиці виникають задачі з функціями не тільки від двох і трьох змінних, як у прикладах 1.1 та 1.2, а й від більшого, навіть нескінченного, числа змінних. Щоправда нескінченновимірний випадок ми розглядати не будемо, хоча такі функції знайшли своє застосування. Прикладом функції чотирьох змінних може слугувати формула для обчислення визначника другого порядку: $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

Дамо загальне означення.



Означення 1.1.

Якщо кожній точці $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ із деякої області D , яка є підмножиною евклідового простору $\mathbb{R}^n$, поставлено у відповідність одне дійсне число $u \in E$ (E — деяка підмножина множини дійсних чисел), то кажуть, що на множині D задано **функцію n змінних** і записують

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ або } u = u(M) = f(M);$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$ називають **незалежними змінними або аргументами**, множини D — **областю визначення або областю існування функції**, а множину E — **множиною значень функції**.

Як бачимо, означення легко переносяться з одновимірного випадку.



Зауваження 1.1.

Інколи зустрічаються випадки, коли точці $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ставиться у відповідність декілька дійсних чисел $u \in E$. У такому випадку говорять про багатозначні функції декількох змінних або про вектор-функції. Надалі ми ці випадки не розглядатимемо.

Прикладом вектор-функції може слугувати добуток двох узгоджених матриць.



Зауваження 1.2.

Надалі, оскільки не виникатиме порушення загальності міркувань, розглядатимемо функції двох або трьох змінних. Це дасть змогу спростити запис і виклад теорії. Для зручності функцію двох змінних записуватимемо у вигляді

$$z = f(x, y) \tag{1.1}$$

а функцію трьох змінних – у вигляді

$$u = f(x, y, z). \tag{1.2}$$

Такий розгляд обумовлений тим, що ми проживаємо у тривимірному просторі.



Зауваження 1.3.

Як правило, під областю визначення функції $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ розумітимемо так звану природну область визначення функції – множину всіх точок $M(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, для яких вираз $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ має зміст.

Область визначення функції $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ позначають $D(f)$, а область значень

— $E(f)$.

? Приклад 1.3.

Знайти область визначення функції $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.



Розв'язання.

Оскільки підкореневий вираз не може бути від'ємним, то областю визначення буде множина всіх точок $M(x, y)$ площини, для яких $4 - x^2 - y^2 \geq 0$ або $x^2 + y^2 \leq 2^2$, тобто замкнутий круг з центром в початку координат і радіусом 2 (рис. 1.1).

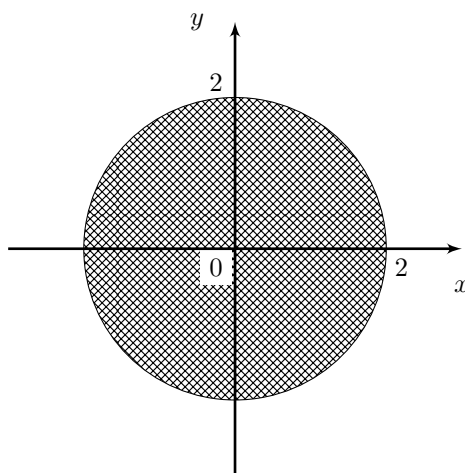


Рисунок 1.1 – Область визначення $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$



Означення 1.2.

Для функції двох змінних $z = f(x, y)$, визначеної в області D , геометричне місце точок $\widetilde{M}(x, y, z) \in R^3$ для всіх $M(x, y) \in D$ називатимемо графіком цієї функції.

Виходячи з цього означення, ми бачимо, що графіком функції двох змінних буде деяка поверхня в просторі. Наприклад, для розглянутої вище у прикладі 1.3 функції $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ її графіком буде верхня півсфера з центром в початку координат і радіусом $R = 2$ (рис. 1.2).

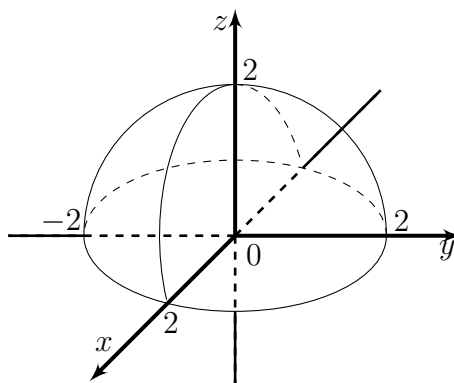


Рисунок 1.2 – Графік функції $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

Відзначимо, що в загальному випадку не вдається побудувати графік функції двох змінних та визначити його вигляд. Також слід зауважити, що функцію трьох і більше змінних геометрично зобразити вже не можна, оскільки наш простір тривимірний.

Лінії та поверхні рівня

Наочнішим способом геометричного задання функції двох змінних порівняно з побудовою її графіка є спосіб за допомогою ліній однакового рівня.

Нехай функцію $z = f(x, y)$ зображено деякою поверхнею. Перетнувши цю поверхню площиною $z = c$, отримаємо деяку поверхню. Ортогональна проекція її на площину xOy називається **лінією рівня функції** $z = f(x, y)$. Зрозуміло, що рівняння лінії рівня в площині xOy матиме вигляд $f(x, y) = c$.

Надаючи c різних дійсних значень, щоразу діставатимемо на площині xOy різні лінії рівня.

Чим більше побудовано ліній рівня, тим яскравіше можна уявити характер зміни функції, а саме, в тій частині області визначення функції, де густіше розміщені лінії рівня, функція швидше змінюється (частина поверхні крутіша), а там, де лінії рівня розміщені рідше, функція змінюється повільніше (частина поверхні пологіша).

? Приклад 14.

Для функції $z = x^2 + y^2$ рівняння ліній рівня матимуть вигляд $x^2 + y^2 = c$, де $c \geq 0$.

Очевидно, що це є рівняння кіл з центрами в початку координат і радіусами $R = \sqrt{c}$. Отже, лініями рівня функції $z = x^2 + y^2$ є концентричні кола (рис. 1.3).

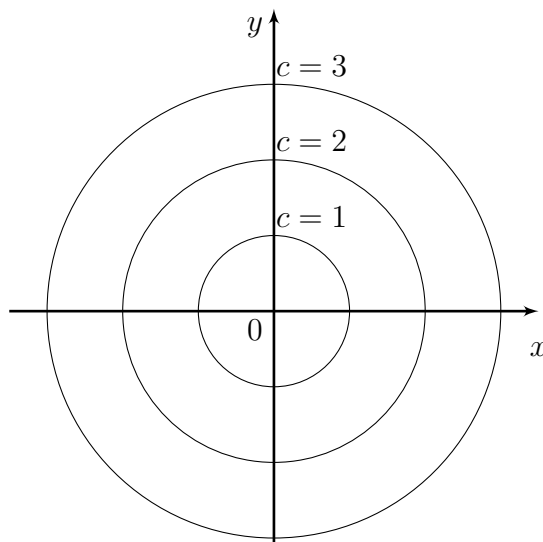


Рисунок 1.3 – Лінії рівня функції $z = x^2 + y^2$

Як уже відзначалось, функцію трьох змінних графічно зобразити не можна. Разом з тим, множина точок простору, в яких функція трьох змінних приймає одне і те саме значення, утворить деяку поверхню, яка називається поверхнею рівня. Таким чином, рівняння поверхні рівня для функції (1.2) матиме вигляд

$$f(x, y, z) = c.$$

? Приклад 15.

Для функції $u = x^2 + y^2 - z^2$ рівняння поверхонь рівня матимуть вигляд

$$x^2 + y^2 - z^2 = c. \quad (1.3)$$

При $c > 0$ рівняння (1.3) є рівнянням однопорожнинного гіперболоїда, при $c = 0$ — рівнянням кругового конуса і при $c < 0$ — рівнянням двопорожнинного гіперболоїда.

Границя функції декількох змінних

Введемо спочатку важливе поняття околу точки.

**Означення 13.**

Околом (δ -околом) точки M_0 називатимемо множину всіх точок M , таких що $|\overrightarrow{M_0 M}| < \delta$.

З цього означення випливає, що на площині δ -околом точки $M_0(x_0, y_0)$ буде множина всіх тих точок (x, y) , для яких

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta,$$

тобто відкритий круг з радіусом δ і центром в точці M_0 (рис. 1.4), а в просторі δ -околом точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ буде множина точок (x, y, z) , для яких

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \delta,$$

тобто відкрита куля з радіусом δ і центром в точці M_0 .

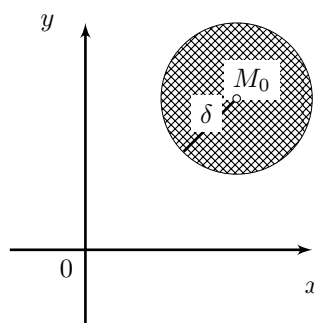


Рисунок 1.4 – δ -окіл точки M_0

Надалі δ -окіл точки M_0 позначатимемо $U_\delta(M_0)$.

**Зауваження 14.**

Якщо з δ -околу точки M_0 викинута сама точка M_0 , то такий окіл називатимемо **проколтим околом** (δ -околом) і позначатимемо $\mathring{U}_\delta(M_0)$.

Поняття околу дає змогу гнучко і строго перенести більшість означень із одновимір-

ного випадку.



Означення 14.



Точка M_0 називається **внутрішньою точкою** множини D , якщо вона належить цій множині разом зі своїм деяким околom.

Зазначимо, що множину всіх внутрішніх точок множини D часто називають внутрішністю D і позначають $\text{int} D$.



Означення 15.



Точка M_0 називається **межовою точкою** множини D , якщо в будь-якому її проколom околі є точки, які належать цій множині і є точки, які їй не належать.

Тепер можемо дати означення границі функції в точці.



Означення 16.



Нехай функція двох змінних $z = f(x, y)$ визначена в деякій області D , для якої точка $M_0(x_0, y_0)$ є внутрішньою або межовою. Число A називається **границею функції** $z = f(x, y)$ в точці M_0 при $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх точок $M(x, y) \in \overset{\circ}{U}_\delta(M_0) \cap D$ має місце нерівність

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon.$$

Це записують таким чином:

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(x, y) = A. \quad (1.4)$$

Умова $M \rightarrow M_0$ або $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ означає $|\overrightarrow{M_0 M}| \rightarrow 0$ або

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \rightarrow 0,$$

що в свою чергу рівносильне такому: $x \rightarrow x_0$ та $y \rightarrow y_0$. Тоді рівність (1.4) можна записати як подвійну границю:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A \quad (1.5)$$

(читається так: подвійна границя при $x \rightarrow x_0$ та $y \rightarrow y_0$ функції $f(x, y)$ дорівнює A).



Зауваження 15.

З наведеного вище означення випливає, що в випадку існування границі функції декількох змінних в точці M_0 ми отримуватимемо те саме значення границі, рухаючись до точки M_0 вздовж довільної лінії в межах області визначення функції. Відповідно, якщо нам вдасться вказати хоча б дві лінії, рухаючись вздовж яких до точки M_0 , ми отримаємо різні значення границь, то звідси випливатиме, що в точці M_0 границя функції не існує.

Зазначимо, що у n -вимірному випадку відстань між точками $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ та $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ обчислюється за формулою

$$\rho(M, M_0) = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2}.$$

Таке визначення відстані у багатовимірному просторі дозволяє легко дати означення околу точки, границі функції.



Зауваження 1.6.

Усі відомі теореми про границі для функцій однієї змінної узагальнюються на випадок функцій декількох змінних. Доведення цих теорем ми опускаємо, оскільки вони майже не відрізняються від доведення відповідних теорем для функцій однієї змінної.

Розглянемо приклад.



Приклад 1.6.

Знайти границю $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow a}} \frac{\sin(xy)}{x}$.



Розв'язання.

Використовуючи властивість границі для добутку функцій, а також першу важливу границю, матимемо:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow a}} \frac{\sin(xy)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow a}} \left(\frac{\sin(xy)}{xy} \cdot y \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow a}} \left(\frac{\sin(xy)}{xy} \right) \cdot \lim_{y \rightarrow a} y = 1 \cdot a = a.$$

Означення границі функції у випадку, коли $x \rightarrow \infty$ та $y \rightarrow \infty$, переноситься з одновимірного випадку. Тут просто вимагається, щоби $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} > M$, де M — як завгодно велике додатне число. Розглянемо приклад на обчислення подвійної границі на нескінченності.



Приклад 1.7.

Знайти границю $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$.



Розв'язання.

З очевидної нерівності $(x - y)^2 \geq 0$ отримуємо $x^2 - xy + y^2 \geq xy$. Звідси, при $x > 0, y > 0$, отримаємо $0 \leq \left| \frac{x+y}{x^2-xy+y^2} \right| \leq \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{y} + \frac{1}{x}$.

Оскільки $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{y} = 0$ та $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$, то за теоремою про границю проміжної функції $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2} = 0$.

Як видно, із попереднього прикладу обчислення подвійної границі вимагає більшої

аналітичної майстерності.

? Приклад 18.

Розглянемо функцію $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{якщо } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } x = y = 0. \end{cases}$ Довести, що ця функція в точці $O(0; 0)$ границі не має.



Зов'язання.

Як уже відзначалось вище, достатньо вказати два напрямки, рухаючись вздовж яких до точки $O(0; 0)$, отримаємо різні значення границь. Дійсно, вздовж прямої $y = 0$ маємо $f(x, 0) = 0$, тому й $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, 0) = 0$; а вздовж прямої $y = x$ маємо $f(x, x) = \frac{2x \cdot x}{x^2 + x^2} = 1$, тому й $\lim_{y=x \rightarrow 0} f(x, x) = 1$.

Неперервність функції декількох змінних

Нехай функція двох змінних $z = f(x, y)$ визначена в деякій області D . Точка $M_0(x_0, y_0) \in D$ і є внутрішньою або межевою для D .



Означення 17.

Функція $z = f(x, y)$ називається неперервною в точці M_0 , якщо

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0), \quad (1.6)$$

причому точка (x, y) прямує до точки $M_0(x_0, y_0)$ довільним чином, залишаючись в області визначення функції.

Якщо функція неперервна в кожній точці деякої області, то вона називається **неперервною** в цій області.

Якщо функція не є неперервною в точці, то вона називається **розривною** в цій точці, а сама точка називається **точкою розриву** даної функції.

Використовуючи означення неперервності функції декількох змінних та відповідні теореми про границі, можна довести, що арифметичні операції над неперервними функціями та побудова складеної функції з неперервних функцій приводять до неперервних функцій.

Функцію декількох змінних називатимемо **елементарною**, якщо вона є елементарною по кожному зі своїх аргументів.

Сформулюємо без доведення наступну важливу теорему.



Теорема 11.

Кожна елементарна функція декількох змінних є неперервною в усіх точках своєї області визначення.

Ця теорема дає нам можливість розглядати досить широкий клас неперервних функцій.

кцій.

? Приклад 1.9.

➤ Дослідити на неперервність розглянуту в прикладі 1.8 функцію.



Розв'язання.

В усіх точках площини, відмінних від початку координат, $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$, тобто є елементарною, а значить, і неперервною. Ми показали, що в точці $O(0; 0)$ наша функція не має границі, тому вона не може бути неперервною в цій точці, тобто є розривною.

Разом з тим, $f(x, 0) = 0$ та $f(0, y) = 0$, тому $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0 = f(0, 0)$ та $\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = 0 = f(0, 0)$, тобто в точці $O(0; 0)$ задана функція неперервна по кожному зі своїх аргументів.

Отже, на основі щойно розглянутого прикладу можемо зробити висновок, що з неперервності функції декількох змінних по кожному зі своїх аргументів в деякій точці ще не впливає неперервність її в цій точці, хоча навпаки, звичайно, вірно.

Для формулювання подальших властивостей неперервних функцій нам потрібні будуть наступні означення.



Означення 1.8.

◆ Область називається **відкритою**, якщо всі її точки внутрішні.

Прикладом відкритої області на площині є внутрішність круга, тобто усі точки (x, y) на площині, що задовольняють нерівність $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < R^2$.



Означення 1.9.

◆ Область називається **замкнутою**, якщо цій області належать всі її межові точки. Множина всіх межових точок області називається її **межею**.

Прикладом замкнутої області на площині є круга, тобто усі точки (x, y) на площині, що задовольняють нерівність $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq R^2$.



Означення 1.10.

◆ Область на площині (в просторі) називається **обмеженою**, якщо вона повністю міститься в деякому крузі (деякій кулі).



Означення 1.11.

◆ Область називається **зв'язною**, якщо дві її довільні точки можна з'єднати неперервною лінією, яка повністю належить цій області.

Сформулюємо теорему, яка є багатовимірним аналогом відомих теорем Больцано-Ко-

ші та Вейерштрасса, що описували властивості неперервних на відрізку функцій.



Теорема 1.2.

Нехай функція $u = f(M)$ декількох змінних визначена і неперервна в деякій обмеженій замкнутій області D . Тоді мають місце наступні властивості:

- 1) $u = f(M)$ — обмежена в D , тобто існує таке число $A > 0$, що для всіх $M \in D$ виконується нерівність $|f(M)| \leq A$;
- 2) дана функція досягає в D своїх найменшого та найбільшого значень, тобто існують такі точки $M_1 \in D$ та $M_2 \in D$, що для всіх $M \in D$ виконується нерівність $f(M_1) \leq f(M) \leq f(M_2)$.
- 3) якщо область D — зв'язна, то $f(M)$ приймає всі проміжні значення між своїми найменшим та найбільшим, тобто для довільного $c \in [f(M_1); f(M_2)]$ існує така точка $M_0 \in D$, що $f(M_0) = c$.

Частинні та повний прирости функції декількох змінних

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякій відкритій області D . Візьмемо в цій області довільну точку $M_0(x_0, y_0)$. Якщо зафіксувати $y = y_0$, то розглядувана функція $z = f(x, y_0)$ є функцією однієї змінної, а саме функцією від x .

Надамо x довільного приросту $\Delta x \neq 0$ так, щоб точка $\widetilde{M}(x_0 + \Delta x, y_0)$ належала області D . Тоді функція $f(x, y_0)$ отримає приріст $f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$, який називається **частинним приростом функції** $z = f(x, y)$ по x в точці $M_0(x_0, y_0)$ і позначають

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0), \quad (1.7)$$

або $\Delta_x f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$.

Аналогічно позначають **частинний приріст** по y в точці $M_0(x_0, y_0)$:

$$\Delta_y z = \Delta_y f(x_0, y_0) = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0). \quad (1.8)$$

Візьмемо точку $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ в області D , відмінну від M_0 . Різниця значень функції $z = f(x, y)$ в точках M та M_0 називається **повним приростом** функції $z = f(x, y)$ і визначається формулою

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0). \quad (1.9)$$

Слід відзначити, що, взагалі кажучи, повний приріст не дорівнює сумі частинних приростів.

Аналогічним чином визначаються частинні та повний прирости функцій довільної кількості змінних. Наприклад, для функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$ матимемо:

$$\Delta_x u = f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0),$$

$$\Delta_y u = f(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0),$$

$$\Delta_z u = f(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0),$$

$$\Delta u = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0).$$

Повернемось до означення неперервності функції. Якщо позначити $x - x_0 = \Delta x$, $y - y_0 = \Delta y$, то рівність (1.6) можна переписати так:

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} (f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)) = 0$$

або

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0. \quad (1.10)$$

Рівність (1.10) дає ще одне означення неперервності.

Аналогічно до (1.10) отримуємо, що функція $z = f(x, y)$ неперервна: по аргументу x в точці M_0 , якщо $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta_x z = 0$; по аргументу y в точці M_0 , якщо $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \Delta_y z = 0$.

Частинні похідні та їх геометричний зміст

Нехай функція декількох змінних визначена в деякій відкритій області D .



Означення 1.12.

Границю відношення частинного приросту функції по якомусь аргументу в точці $M_0 \in D$ до приросту цього аргумента за умови, що приріст прямує до нуля, в випадку існування та скінченності границі називають *частинною похідною* від розглядуваної функції по вказаному аргументу.

Для функції двох змінних частинну похідну по x позначають одним із символів

$$\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial x}; f'_x(x_0, y_0).$$

Аналогічно частинну похідну по y позначають відповідно

$$\frac{\partial z}{\partial y}; \frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial y}; f'_y(x_0, y_0).$$

Отже, за означенням 1.12, частинні похідні $f'_x(x_0, y_0)$ та $f'_y(x_0, y_0)$ визначаються такими співвідношеннями:

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Якщо замість фіксованої точки $M_0(x_0, y_0)$ беруть довільну точку $(x, y) \in D$, то частинні похідні відповідно записують $f'_x(x, y)$ та $f'_y(x, y)$.

Операцію знаходження частинних похідних функції декількох змінних називають її

диференціюванням.



Зауваження 1.7.

Оскільки в означенні частинної похідної функції по якомусь з аргументів усі інші аргументи вважаються сталими, то при диференціюванні даної функції по цьому аргументу треба її диференціювати як функцію цієї однієї змінної, вважаючи решту змінних сталими. Тому правила знаходження частинних похідних функції декількох змінних ті самі, що й правила диференціювання функції однієї змінної.

Таким чином, частина похідна від виразу, що залежить від однієї змінної, по іншій змінній дорівнює нулю.



Приклад 1.10.

Знайти частинні похідні функцій: а) $z = \arctg \frac{y}{x}$; б) $u = (x + y^2)^z$.



Розв'язання.

а) Обчислимо похідну по x , вважаючи y сталою:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)'_x = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)'_y = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2};$$

б) Обчислимо похідну по y , вважаючи x сталою:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = z \cdot (x + y^2)^{z-1} \cdot (x + y^2)'_x = z \cdot (x + y^2)^{z-1} \cdot 1 = z \cdot (x + y^2)^{z-1};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = z \cdot (x + y^2)^{z-1} \cdot (x + y^2)'_y = z \cdot (x + y^2)^{z-1} \cdot 2y = 2yz (x + y^2)^{z-1};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = (x + y^2)^z \cdot \ln(x + y^2).$$

Розглянутий приклад показує, що обчислення частинних похідних для функцій двох та трьох змінних підпорядковане одним і тим самим правилам.



Зауваження 1.8.

Як відомо, для функції однієї змінної неперервність її є необхідною умовою існування похідної в розглядуваній точці. Виявляється, що для функцій декількох змінних це не так.

В тому, що з існування частинних похідних у точці не впливає неперервність функції декількох змінних у тій самій точці можна переконатися, розглянувши наступний приклад

відомої нам функції з прикладу 1.9, де ми показали, що вона має розрив у точці $O(0, 0)$.

? Приклад 1.11.

Обчислити частинні похідні по x та y у точці $O(0, 0)$ функції

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{якщо } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } x = y = 0. \end{cases}$$



Розв'язання.

Для цієї функції її частинні прирости в точці $O(0; 0)$ дорівнюють:

$$\Delta_x z = f(\Delta x, 0) - f(0, 0) = 0 - 0 = 0; \Delta_y z = f(0, \Delta y) - f(0, 0) = 0 - 0 = 0.$$

$$\text{Тому існують } f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0, f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta y} = 0.$$

Але нам відомо (приклад 1.9), що дана функція в точці $O(0; 0)$ є розривна.

Відзначимо також, що із неперервності функції в точці ще не впливає існування її частинних похідних в цій точці. Дійсно, наприклад, функція $f(x, y) = |x| + |y|$ є визначена і неперервна в усіх точках площини, зокрема і в точці $O(0; 0)$. Але в цій точці не існує частинних похідних по жодному з аргументів.



Висновок 1.1.

Зі сказаного вище та зауваження 1.8 випливає, що ніякого зв'язку між неперервністю функції декількох змінних в точці та існуванням її частинних похідних в цій точці немає.

З'ясуємо тепер геометричний зміст частинних похідних функції двох змінних.

Нехай функція $z = f(x, y)$ зображена поверхнею (P) (рис. 1.5). В області D визначення функції візьмемо довільну точку $M_0(x_0, y_0)$. Цій точці на поверхні (P) відповідає точка $N_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

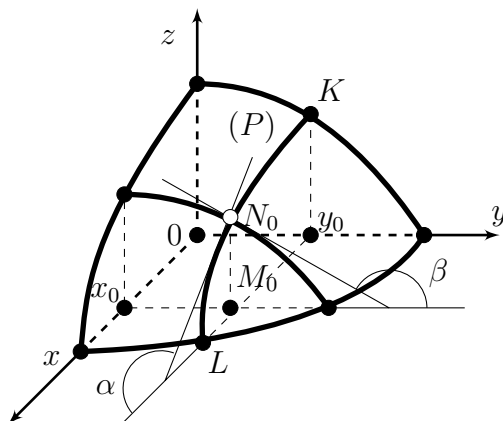


Рисунок 1.5 – Геометричний зміст частинних похідних

Враховуючи зауваження 1.7, при знаходженні частинної похідної по аргументу x функції $z = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$ змінна y вважається сталою, яка дорівнює y_0 . Отже, функція $z = f(x, y)$ при $y = y_0$ є функцією однієї змінної

$$z = f(x, y_0) = f_1(x).$$

Геометричним образом цієї функції є лінія перетину поверхні (P) площиною $y = y_0$. На рисунку 1.5 це лінія KN_0L . Похідна $f'_1(x)$ функції $z = f_1(x)$ в точці x_0 означає тангенс кута α , який утворює дотична до кривої KN_0L в точці N_0 з додатним напрямком осі Ox . Очевидно, що

$$f'_1(x_0) = f'_x(x_0, y_0).$$

Отже, зі сказаного вище та з останньої рівності випливає такий *геометричний зміст частинної похідної по x функції $z = f(x, y)$* : частинна похідна по x функції $z = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$ дорівнює тангенсу кута між додатним напрямком осі Ox і дотичною, проведеною в точці $N_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ до кривої KN_0L .

Якщо для функції $z = f(x, y)$ взяти $x = x_0$ і провести міркування, аналогічні до вище проведених, то отримаємо наступний *геометричний зміст частинної похідної по y функції $z = f(x, y)$ в точці $MM_0(x_0, y_0)$* : частинна похідна по y функції $z = f(x, y)$ в точці $MM_0(x_0, y_0)$ дорівнює тангенсу кута β між додатним напрямком осі Oy і дотичною, проведеною в точці $N_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ до кривої, яка утвориться при перетині поверхні (P) площиною, що проходить через точку N_0 і паралельна площині yOz .

ТЕМА 2. ДИФЕРЕНЦІЙОВНІСТЬ ФУНКЦІЇ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

Означення диференційовності, зв'язок з частинними похідними та неперервністю

Нехай функція двох змінних $z = f(x, y)$ визначена в деякій області D , для якої точка $M_0(x_0, y_0)$ є внутрішньою. Надамо аргументам x та y в даній точці приростів Δx та Δy , одночасно не рівних нулю, так, щоб точка $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ належала області D .



Означення 2.1.

Функція $z = f(x, y)$ називається *диференційовною в точці $M_0(x_0, y_0)$* , якщо її повний приріст в цій точці можна подати у вигляді

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y, \quad (2.1)$$

де A та B не залежать від приростів Δx та Δy , а $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y)$ та $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y)$ — нескінченно малі функції при $\Delta x \rightarrow 0$ та $\Delta y \rightarrow 0$, тобто

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \alpha(\Delta x, \Delta y) = 0, \quad \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \beta(\Delta x, \Delta y) = 0. \quad (2.2)$$

Як бачимо, означення диференційовності у точці подібне до одновимірного випадку. Відмінність у розгляді двох приростів по двох змінних x та y .



Приклад 2.1.



Дослідити на диференційовність функцію $z = x \cdot y^2$.



Зов'язання.

Для функції $z = x \cdot y^2$ повний приріст в довільній точці $M_0(x_0, y_0)$ можна записати так:

$$\Delta z = y_0^2 \Delta x + 2x_0 y_0 \Delta y + (2y_0 \Delta y + \Delta y^2) \Delta x + (x_0 \cdot \Delta y) \Delta y.$$

Легко бачити, що повний приріст для заданої функції записано в формі (2.1) з $A = y_0^2$, $B = 2x_0 y_0$, $\alpha = 2y_0 \Delta y + \Delta y^2$, $\beta = x_0 \cdot \Delta y$, які задовольняють всім умовам в означенні 2.1. Отже, наша функція диференційовна в усіх точках площини.

Нижченаведені теореми стосуватимуться зв'язку диференційовності з неперервністю та існуванням частинних похідних.



Теорема 2.1.

★ Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці $M_0(x_0, y_0)$, то вона неперервна в цій точці.

Доведення. Згідно означення 2.1 для повного приросту функції $z = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$ має місце рівність (2.1). Кожний з чотирьох доданків правої частини цієї рівності є нескінченно малою функцією при $\Delta x \rightarrow 0$ та $\Delta y \rightarrow 0$, тому їхня сума — нескінченно мала функція при $\Delta x \rightarrow 0$ та $\Delta y \rightarrow 0$, тобто

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0.$$

Ця рівність означає неперервність нашої функції в точці M_0 .

Теорему доведено. □



Зауваження 2.1.

Як впливає з цієї теореми, неперервність функції в точці є необхідною умовою диференційовності в цій точці.

Ми нижче переконаємось, що неперервність не є достатньою умовою диференційовності у точці.



Теорема 2.2.

★ Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці $M_0(x_0, y_0)$, то в цій точці існують частинні похідні функції, причому

$$f'_x(x_0, y_0) = A, f'_y(x_0, y_0) = B. \quad (2.3)$$

Доведення. Для нашої функції в точці $M_0(x_0, y_0)$ виконується рівність (2.1). Покладемо в цій рівності $\Delta y = 0$, а $\Delta x \neq 0$. Тоді повний приріст Δz співпадає з частинним приростом $\Delta_x z$ і рівність (2.1) набуде такого вигляду:

$$\Delta_x z = A \Delta x + \alpha \Delta x.$$

Розділивши обидві частини останньої рівності на Δx , матимемо:

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A + \alpha.$$

З врахуванням (2.2) ми бачимо, що існує $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A$.

Але за означенням $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = f'_x(x_0, y_0)$. Це означає, що існує

$$f'_x(x_0, y_0) = A.$$

Якщо ж в рівності (2.1) покласти $\Delta x = 0$, а $\Delta y \neq 0$, то отримаємо:

$$\Delta_y z = B\Delta y + \alpha\Delta y.$$

Розділивши обидві частини цієї рівності на Δy і перейшовши до границі при $\Delta y \rightarrow 0$, дістанемо

$$f'_y(x_0, y_0) = B.$$

Теорему доведено. □



Зауваження 2.2.

З останньої теореми випливає, що необхідною умовою диференційовності функції декількох змінних в точці є існування усіх частинних похідних в цій точці. Відзначимо, що для функції однієї змінної існування її похідної в точці є необхідною і достатньою умовою диференційовності функції в цій точці. Але для диференційовності функції декількох змінних в точці існування усіх її частинних похідних в цій точці не є достатньою умовою. Це впливає з наступних міркувань.

В зауваженні 1.8 ми вказали функцію

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{якщо } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } x = y = 0, \end{cases}$$

яка в точці $O(0; 0)$ має частинні похідні, але разом з тим розривна в цій точці, тому, відповідно до теореми 2.1, не може бути диференційовною в точці $O(0; 0)$.



Зауваження 2.3.

Як видно з попередніх міркувань, ніякого зв'язку між неперервністю функції декількох змінних в точці та існуванням частинних похідних в цій точці немає.

Сформулюємо достатні умови диференційовності у точці.



Теорема 2.3.

★ Якщо функція $z = f(x, y)$ в околі точки $M_0(x_0, y_0)$ має частинні похідні і ці частинні похідні є неперервними функціями в точці $M_0(x_0, y_0)$, то функція $z = f(x, y)$ диференційовна в даній точці.

Доведення. Повний приріст функції в точці $M_0(x_0, y_0)$ можемо записати так:

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \\ &= (f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)) + (f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Вираз у перших дужках – приріст в точці x_0 функції однієї змінної $f_1(x) = f(x, y_0 + \Delta y)$, а вираз в других дужках є приростом в точці y_0 функції однієї змінної $f_2(y) = f(x_0, y)$. Відповідно до умови теореми функції $f_1(x)$ та $f_2(y)$ мають відповідно похідні (це частинні похідні від функції $f(x, y)$) в деяких околах точок x_0 та y_0 . Тому за теоремою Лагранжа ці прирости можна записати так:

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) &= f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) \cdot \Delta x, \\ f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) &= f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) \cdot \Delta y, \end{aligned} \quad (2.5)$$

де θ_1 та θ_2 — деякі числа з інтервалу $(0; 1)$.

Розглянемо функції

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha(\Delta x, \Delta y) = f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) - f'_x(x_0, y_0), \\ \beta &= \beta(\Delta x, \Delta y) = f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) - f'_y(x_0, y_0). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Оскільки обидві частинні похідні $f'_x(x, y)$ та $f'_y(x, y)$ є неперервними функціями в точці $M_0(x_0, y_0)$, то

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \alpha(\Delta x, \Delta y) = 0, \quad \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \beta(\Delta x, \Delta y) = 0.$$

Рівності (2.6) можемо переписати так:

$$\begin{aligned} f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) &= f'_x(x_0, y_0) + \alpha(\Delta x, \Delta y), \\ f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) &= f'_y(x_0, y_0) + \beta(\Delta x, \Delta y). \end{aligned}$$

Тоді, з врахуванням (2.5), повний приріст (2.4) запишеться наступним чином:

$$\Delta z = f'_x(x_0, y_0) \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y) \Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y) \Delta y. \quad (2.7)$$

Отже, відповідно до означення 2.1, функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці $M_0(x_0, y_0)$.

Теорему доведено. □

Диференціал функції декількох змінних

Нехай функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці $M_0(x_0, y_0)$. Тоді її повний приріст в цій точці можна записати у вигляді (2.7)



Означення 2.2.



Вираз

$$dz = f'_x(x_0, y_0) \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \Delta y \quad (2.8)$$

називається **повним диференціалом** функції $z = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$.

Відзначимо, що, крім записаного позначення dz , часто повний диференціал позначають $df(x_0, y_0)$.

Якщо (x, y) – довільна точка області D , в якій функція диференційовна, то повний диференціал в цій точці записуватимемо

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y. \quad (2.9)$$



Зауваження 2.4.

Якщо покласти за означенням $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, то повний диференціал в довільній точці (x, y) запишеться у вигляді

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy, \quad (2.10)$$

або

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \quad (2.11)$$

Розглянемо приклади.



Приклад 2.2.

Знайти повний диференціал функції $z = \arctg \frac{y}{x}$ в точці $M_0(2; 1)$.



Возв'язання.

У прикладі 1.10 а) ми знайшли частинні похідні заданої функції. Значення їх в заданій точці дорівнюватимуть:

$$f'_x(2; 1) = -\frac{1}{2^2 + 1^2} = -\frac{1}{5}, \quad f'_y(2; 1) = \frac{2}{2^2 + 1^2} = \frac{2}{5}.$$

Тоді, відповідно до (2.10), шуканий диференціал в заданій точці буде таким:

$$df(2; 1) = -\frac{1}{5}dx + \frac{2}{5}dy.$$

Як бачимо з (2.11), повний диференціал функції двох змінних дорівнює сумі добутків частинних похідних по кожному з аргументів на диференціали цих аргументів.



Зауваження 2.5.

Ціком аналогічно визначається повний диференціал функції більшої кількості аргументів. Зокрема, повний диференціал для функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$ у випадку її диференційовності виглядатиме так:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz. \quad (2.12)$$

Легко бачити, як узагальнюється формула (2.12) на випадок довільного числа змінних.



Приклад 2.3.

Знайти повний диференціал функції $u = (x + y^2)^z$.



Возв'язання.

Підставивши знайдені в прикладі 1.10 б) частинні похідні для заданої функції в (2.12), отримаємо

$$du = z \cdot (x + y^2)^{z-1} \cdot dx + 2yz(x + y^2)^{z-1} dy + (x + y^2)^z \cdot \ln(x + y^2) dz.$$

Займемось оцінкою двох останніх доданків правої частини рівності (2.7).

Розглянемо величину $\Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} > 0$. Зрозуміло, що $\Delta r \rightarrow 0$ тоді і тільки тоді, коли одночасно $\Delta x \rightarrow 0$ та $\Delta y \rightarrow 0$.

Суму двох останніх доданків правої частини (2.7) можна записати в такому вигляді:

$$\alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y = \left(\alpha \frac{\Delta x}{\Delta r} + \beta \frac{\Delta y}{\Delta r} \right) \cdot \Delta r. \quad (2.13)$$

Позначимо

$$\gamma = \gamma(\Delta x, \Delta y) = \alpha \frac{\Delta x}{\Delta r} + \beta \frac{\Delta y}{\Delta r}. \quad (2.14)$$

Оскільки $|\Delta x| \leq \Delta r$, $|\Delta y| \leq \Delta r$, а на основі рівностей (2.2) $\alpha \rightarrow 0$ та $\beta \rightarrow 0$ при $\Delta r \rightarrow 0$, то й

$$\gamma \rightarrow 0 \text{ при } \Delta r \rightarrow 0. \quad (2.15)$$

З врахуванням (2.8), (2.13) та (2.14) рівність (2.7) можемо переписати так:

$$\Delta z = dz + \gamma \cdot \Delta r. \quad (2.16)$$

Тоді $\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta z - dz}{\Delta r} = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \gamma = 0$.



Висновок 2.1.

- Отже, у випадку диференційовності функції в деякій точці різниця між її повним приростом та повним диференціалом в цій точці є нескінченно малою вищого порядку, ніж Δr , при $\Delta r \rightarrow 0$. Тому повний диференціал функції dz ще називають головною частиною приросту функції.

Відповідно до зробленого висновку можемо записати

$$\Delta z \approx dz,$$

або

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y. \quad (2.17)$$

Цю формулу використовують для наближеного обчислення значення функції в незручній для обчислення точці $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ через значення функції та її частинних похідних в зручнішій для обчислення точці $M_0(x_0, y_0)$. Зрозуміло, що чим точка M_0 ближча до точки M , тим наближена рівність (2.17) точніша.



Приклад 2.4.

Обчислити наближено $\sqrt{2,04^3 + 0,97^2}$.



Розв'язання.

Розглянемо функцію двох змінних $f(x, y) = \sqrt{x^3 + y^2}$.

Нам потрібно знайти значення цієї функції в точці $M(2, 04; 0, 97)$. В точці $M_0(2; 1)$ значення функції обчислюється легко:

$$f(2; 1) = \sqrt{2^3 + 1^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Отже, візьмемо: $x_0 + \Delta x = 2, 04$; $x_0 = 2$; $y_0 + \Delta y = 0, 97$; $y_0 = 1$.

Тоді $\Delta x = 0, 04$; $\Delta y = -0, 03$.

Знайдемо частинні похідні розглядуваної функції:

$$f'_x(x, y) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + y^2}}, f'_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^3 + y^2}}.$$

Значення цих частинних похідних в точці $M_0(2; 1)$ дорівнюватимуть:

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_x(2; 1) = \frac{3 \cdot 2^2}{2\sqrt{2^3 + 1^2}} = \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 3} = 2;$$

$$f'_y(x_0, y_0) = f'_y(2; 1) = \frac{1}{\sqrt{2^3 + 1^2}} = \frac{1}{3}.$$

Підставивши обчислені значення в (2.17), знаходимо

$$\sqrt{2, 04^3 + 0, 97^2} \approx 3 + 2 \cdot 0, 04 + \frac{1}{3} \cdot (-0, 03) = 3, 07.$$

Частинні похідні та диференціал складеної функції

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякій області D , а аргументи x та y є функціями від t :

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), \quad (2.18)$$

визначеними в проміжку $\langle \alpha; \beta \rangle$, причому для всіх $t \in \langle \alpha; \beta \rangle$ точки $M(\varphi(t), \psi(t)) \in D$.

Якщо в функцію $z = f(x, y)$ замість x та y підставити їх значення з (2.18), то отримаємо складену функцію від одного аргумента t :

$$z = f(\varphi(t), \psi(t)) = F(t). \quad (2.19)$$



Теорема 2.4.

Якщо функції $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ в деякій точці $t \in \langle \alpha; \beta \rangle$ мають скінченні похідні, а функція $z = f(x, y)$ в точці $M(\varphi(t), \psi(t))$ диференційовна, то складена функція (2.19) має в точці t похідну, яка дорівнює

$$F'(t) = f'_x(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \varphi'(t) + f'_y(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \psi'(t). \quad (2.20)$$

Доведення. Надамо аргументу t довільного приросту Δt , такого щоб $t + \Delta t \in \langle \alpha; \beta \rangle$.

Тоді функції $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ отримають прирости відповідно $\Delta x = \Delta \varphi(t) = \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)$, $\Delta y = \Delta \psi(t) = \psi(t + \Delta t) - \psi(t)$. Оскільки функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці $M(\varphi(t), \psi(t))$, то її повний приріст $\Delta z = \Delta f(\varphi(t), \psi(t))$ в цій точці можна записати у вигляді (2.7), тобто

$$\Delta'(\varphi(t), \psi(t)) = f'_x(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \Delta \varphi(t) + f'_y(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \Delta \psi(t) + \alpha \cdot \Delta \varphi(t) + \beta \cdot \Delta \psi(t).$$

Розділивши обидві частини цієї рівності на Δt , отримаємо:

$$\frac{\Delta f'(\varphi(t), \psi(t))}{\Delta t} = f'_x(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \frac{\Delta \varphi(t)}{\Delta t} + f'_y(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \frac{\Delta \psi(t)}{\Delta t} + \alpha \cdot \frac{\Delta \varphi(t)}{\Delta t} + \beta \cdot \frac{\Delta \psi(t)}{\Delta t}. \quad (2.21)$$

Оскільки функції $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ в точці $t \in \langle \alpha; \beta \rangle$ мають похідні, то вони неперервні в цій точці, тобто $\Delta \varphi(t) \rightarrow 0$ та $\Delta \psi(t) \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$. Отже, $\alpha \rightarrow 0$ та $\beta \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$. Тому, переходячи до границі в рівності (2.21) при $\Delta t \rightarrow 0$, отримуємо рівність (2.20), чим і доводимо нашу теорему. $\square$



Зауваження 2.6.

Рівність (2.20) можна записати ще й так:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}. \quad (2.22)$$



Зауваження 2.7.

Щойно доведену теорему можна узагальнити на випадок, коли аргументи функції $z = f(x, y)$ є, в свою чергу, функціями декількох змінних, наприклад, двох.

Нижче наведено формулювання відповідного узагальнення.



Теорема 2.5.

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякій області D , а аргументи x та y є функціями двох змінних u та v : $x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v)$, які визначені в деякій області G , причому для всіх точок $M(u, v) \in G$ відповідні точки $M(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \in D$.

Тоді якщо функції $x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v)$ диференційовні в деякій точці $\tilde{M}(u, v) \in G$, а функція $z = f(x, y)$ диференційовна у відповідній точці $M(x, y) = M(\varphi(u, v), \psi(u, v))$, то складена функція $z = f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) = F(u, v)$ має частинні похідні по u та v в точці $\tilde{M}(u, v)$ і ці частинні похідні дорівнюють:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}. \quad (2.23)$$

Доведення. Доведення цієї теореми аналогічне доведенню попередньої теореми. $\square$

Розглянемо приклад на обчислення похідної складеної функції у випадку, коли аргу-

менти є функціями від однієї змінної.

? Приклад 2.5.

Знайти похідну $\frac{dz}{dt}$ функції $z = \arccos(x - 2y)$, якщо $x = 5t^3, y = 3t$.



Розв'язання.

Скориставшись формулою (2.22), маємо:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= (\arccos(x - 2y))'_x \cdot (5t^3)' + (\arccos(x - 2y))'_y \cdot (3t)' = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 - (x - 2y)^2}} \cdot 15t^2 - \frac{1}{\sqrt{1 - (x - 2y)^2}} \cdot (-3) = \frac{-15t^2 + 3}{\sqrt{1 - (5t^3 - 3t)^2}}. \end{aligned}$$

Обчислимо частинні похідні функції двох змінних у випадку, коли аргументи є функціями від двох змінних. Це просто спричинить додаткові обчислення. Сама ідея диференціювання не зміниться.

? Приклад 2.6.

Чи задовольняє співвідношенню $\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u-v}{u^2+v^2}$ функція $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$, де $x = u+v$, $y = u - v$?



Розв'язання.

Використовуючи формули (2.23), знаходимо

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right)'_x \cdot (u+v)'_u + \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right)'_y \cdot (u-v)'_u = \\ &= \frac{\frac{1}{y}}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot 1 + \frac{-\frac{x}{y^2}}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot 1 = \frac{y-x}{y^2+x^2} = -\frac{v}{u^2+v^2}, \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right)'_x \cdot (u+v)'_v + \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right)'_y \cdot (u-v)'_v = \\ &= \frac{\frac{1}{y}}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot 1 + \frac{-\frac{x}{y^2}}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot (-1) = \frac{y+x}{y^2+x^2} = \frac{u}{u^2+v^2}, \end{aligned}$$

звідки, додавши отримані рівності, переконуємось, що задана функція задовольняє вказаному співвідношенню.

Наведені приклади свідчать, що обчислення частинної похідної складеної функції декількох змінних проводиться, по суті, за тими самими правилами, що й обчислення похі-

дної складеної функції однієї змінної.



Зауваження 2.8.

Якщо функція $y = g(x)$ має похідну в деякій точці x , а функція $z = f(x, y)$ диференційовна у відповідній точці $M(x, y) = M(x, g(x))$, то, міркуючи відповідно до теореми 2.4, матимемо:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot g'(x). \quad (2.24)$$

Займемось зараз диференціалом складеної функції.



Теорема 2.6.

Нехай в деякій точці $\widetilde{M}(u, v) \in G$ функції $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ мають неперервні частинні похідні $\varphi'_u(u, v)$, $\varphi'_v(u, v)$, $\psi'_u(u, v)$, $\psi'_v(u, v)$, а функція $z = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні $f'_x(x, y)$ та $f'_y(x, y)$ у відповідній точці $M(x, y) = M(\varphi(u, v), \psi(u, v))$.
Тоді функція $z = f(x, y)$, розглядувана як складена функція в точці $\widetilde{M}(u, v)$, має диференціал

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Доведення. Відповідно до умов теореми функція $z = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ має неперервні частинні похідні по u та v в точці $\widetilde{M}(u, v)$. Отже, за теоремою 2.3, вона диференційовна в цій точці і її диференціал дорівнює

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv.$$

Підставивши в цю рівність значення похідних $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ з формул (2.23), після перегрупування доданків отримаємо:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) + \frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right).$$

Оскільки за умовою теореми функції $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$ є неперервними в точці $\widetilde{M}(u, v)$, то вирази в дужках останньої рівності є відповідно диференціали dx та dy .

Теорему доведено. □



Висновок 2.2.

Як бачимо з доведеної теореми, форма повного диференціала зберігається і у випадку складеної функції декількох змінних. Цю властивість називають інваріантністю форми повного диференціала функції декількох змінних.

Диференціювання неявних функцій

Ми звикли вивчати функції однієї чи багатьох змінних, які задавались рівняннями, розв'язаними відносно цієї функції, тобто рівнянням

$$y = f(x),$$

якщо йшлося про функцію однієї змінної, чи рівнянням (1.1) або (1.2) для функції двох або трьох змінних.

Відзначимо, що часто функцію задають рівнянням, нерозв'язаним відносно цієї функції,

$$F(x, y) = 0. \quad (2.25)$$

Розглянемо, наприклад, рівняння

$$y^2 - x = 0. \quad (2.26)$$

Оскільки кожному значенню $x \in (0; +\infty)$ дане рівняння ставить у відповідність два різних значення $y = \pm\sqrt{x}$, то воно при значеннях $x \in (0; +\infty)$ не задає y як функцію від x . Але якщо x та y брати з певного околу точки $M_0(x_0, y_0)$, яка лежить на параболі (рис. 2.1) і не збігається з її вершиною – точкою $O(0, 0)$, то в цьому околі рівняння (2.26) задає y як функцію від x . Разом з тим, в будь-якому околі точки O рівняння (2.26) не визначає y як функцію від x .

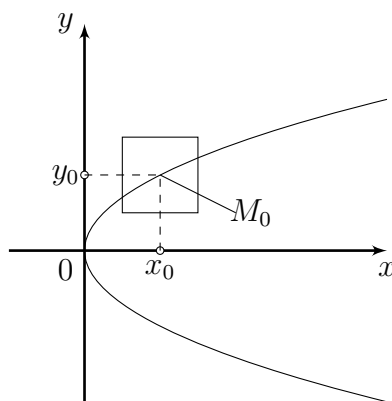


Рисунок 2.1 – Локальне визначення неявно заданої функції

З розглянутого прикладу випливає, що рівняння виду (2.26) може задавати y як функцію від x в околі однієї точки, координати якої задовольняють це рівняння, а в околі іншої точки рівняння (2.26) не задає y як функцію від x .

Природно поставити наступне запитання: яким умовам повинна задовольняти функція $F(x, y)$, щоб рівняння (2.25) в деякому околі точки, координати якої задовольняють цьому рівнянню, визначало y як функцію від x і щоб ця функція була неперервною та диференційовною?

Дамо наступне означення.



Означення 2.3.

◇ Нехай області визначення функції $F(x, y)$ належить прямокутник $\{M(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$. Якщо для кожного $x \in [a; b]$ рівняння (2.25) має один і тільки один корінь $y = f(x)$ з відрізка $[c; d]$, то $y = f(x)$ називається **неявною функцією від x** , заданою рівнянням (2.25).
 ◇ Таким чином, якщо функція $y = f(x)$, задана рівнянням (2.25), є неявною, то для всіх $x \in [a; b]$ виконується тотожність

$$F(x, f(x)) \equiv 0. \quad (2.27)$$

Виникає питання, за яких умов на функцію $F(x, y)$ рівняння (2.27) однозначно визначатиме неявно задану, неперервну і диференційовну функцію однієї змінної x .



Теорема 2.7.

★ Нехай функція $F(x, y)$ визначена, неперервна та має неперервні частинні похідні в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$, причому $F(x_0, y_0) = 0$, $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.
 ★ Тоді існує такий окіл точки $M_0(x_0, y_0)$, в якому рівняння (2.25) визначає єдину неявну функцію $y = f(x)$, неперервну та диференційовну в околі точки x_0 , і таку що $f(x_0) = y_0$.

Доведення. Доведення цієї теореми опускаємо. Його можна знайти, наприклад, в [5].

□

Знайдемо похідну неявної функції. Відповідно до умов теореми, на деякому інтервалі, якому належить точка x_0 , виконується тотожність (2.27). Оскільки похідна функції, що тотожно дорівнює нулю, також дорівнює нулю, то повна похідна $\frac{dF}{dx} = 0$. Але, використовуючи рівність (2.24), маємо $\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot f'(x)$, тому $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot f'(x) = 0$. Зокрема, в точці x_0 матимемо $F'_x(x_0, y_0) + F'_y(x_0, y_0) \cdot f'(x_0) = 0$, звідки, враховуючи, що $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, отримуємо

$$f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}. \quad (2.28)$$



Приклад 2.7.

~ Знайти похідну $\frac{dy}{dx}$ функції, заданої рівнянням $e^{2x} - e^y + xy^2 = 0$.



Розв'язання.

В нашому випадку

$$F(x, y) = e^{2x} - e^y + xy^2, \quad F'_x(x, y) = 2e^{2x} + y^2,$$

$$F'_y(x, y) = -e^y + 2xy.$$

Отже, відповідно до формули (2.28), матимемо

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2e^{2x} + y^2}{-e^y + 2xy} = \frac{2e^{2x} + y^2}{e^y - 2xy}.$$

Замість використання формули (2.28), можна було б безпосередньо обчислити похідну у відповідній рівності, вважаючи x — незалежною змінною, а y — функцією від x . У цьому випадку ми дістанемо після диференціювання рівняння відносно y' , розв'язавши яке отримаємо шукану похідну, що також залежатиме від x та y .



Зауваження 2.9.

Іноколи буває, що функція $F(x, y)$ задовольняє всім умовам теореми 2.7, тільки $F'_y(x_0, y_0) = 0$, але $F'_x(x_0, y_0) \neq 0$. Тоді рівняння (2.25) задає x як неявну функцію від y : $x = \varphi(y)$. Ця функція має ті ж властивості, що й функція $y = f(x)$, зокрема, $x = \varphi(y)$ має неперервну частинну похідну

$$\varphi'(y) = -\frac{F'_y(x, y)}{F'_x(x, y)}.$$

Ми розглянули питання про неявну функцію однієї змінної. Аналогічно можна розглянути неявну функцію багатьох змінних. Зупинимось, наприклад, на неявній функції двох змінних.

Розглянемо рівняння

$$F(x, y, z) = 0. \quad (2.29)$$



Означення 2.4.

Нехай області визначення функції $F(x, y, z)$ належить паралелепіпед $\{M(x, y, z) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, p \leq z \leq q\}$. Якщо для кожної точки $M(x, y)$ з прямокутника $\{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ рівняння (2.25) має один і тільки один корінь $z = f(x, y)$ з відрізка $[c; d]$, то $z = f(x, y)$ називається **неявною функцією від двох змінних x та y** , заданою рівнянням (2.29).

Отже, якщо функція $z = f(x, y)$, задана рівнянням (2.29), є неявною, то для всіх точок $\widetilde{M}(x, y)$ з прямокутника $\{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ виконується тотожність

$$F(x, y, f(x, y)) \equiv 0.$$

Аналогічно до теореми 2.7 має місце наступна теорема.



Теорема 2.8.

Нехай функція $F(x, y, z)$ визначена, неперервна та має неперервні частинні похідні в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, причому $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Тоді існує такий окіл точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, в якому рівняння (2.29) визначає єдину неявну функцію $z = f(x, y)$, неперервну та диференційовну в околі точки x_0 , і таку, що $f(x_0, y_0) = z_0$.

Доведення. Доведення цієї теореми також опускаємо. Відзначимо, що воно аналогічне доведенню теореми 2.7. □

Знайдемо частинні похідні неявної функції z від x та y , заданої рівнянням (2.29). Коли визначаємо $\frac{\partial z}{\partial x}$ (або $\frac{\partial z}{\partial y}$), то змінну y (або x) вважаємо сталою, тому, використовуючи (2.28), отримуємо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y) = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y) = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}. \quad (2.30)$$

? Приклад 2.8.



Знайти повний диференціал функції $z = f(x, y)$, якщо

$$\sin(xy^2z^3) = \ln(z - x) + 4. \quad (2.31)$$



Розв'язання.

Очевидно, рівність (2.31) можна переписати так: $\sin(xy^2z^3) - \ln(z - x) - 4 = 0$. Тому в нашому випадку маємо

$$F(x, y, z) = \sin(xy^2z^3) - \ln(z - x) - 4,$$

$$F'_x(x, y, z) = \cos(xy^2z^3) + \frac{1}{z - x},$$

$$F'_y(x, y, z) = 2y \cdot \cos(xy^2z^3),$$

$$F'_z(x, y, z) = 3z^2 \cdot \cos(xy^2z^3) - \frac{1}{z - x}.$$

Отже, відповідно до формул (2.30), знаходимо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\cos(xy^2z^3) + \frac{1}{z-x}}{3z^2 \cdot \cos(xy^2z^3) - \frac{1}{z-x}} = \frac{(z-x) \cos(xy^2z^3) + 1}{1 - 3z^2(z-x) \cos(xy^2z^3)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y \cdot \cos(xy^2z^3)}{3z^2 \cdot \cos(xy^2z^3) - \frac{1}{z-x}} = \frac{2y(z-x) \cos(xy^2z^3)}{1 - 3z^2(z-x) \cos(xy^2z^3)},$$

звідки, використовуючи (2.11), отримуємо

$$dz = \frac{((z-x) \cos(xy^2z^3) + 1) dx + 2y \cdot (z-x) \cos(xy^2z^3) dy}{1 - 3z^2(z-x) \cos(xy^2z^3)}.$$



Зауваження 2.10.

Якщо умова $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ не виконується, зате, наприклад, $F'_x(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ і виконуються всі інші умови теореми 2.8, то рівняння (2.29) в околі точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ задає x як функцію двох змінних $x = g(y, z)$. При цьому $\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_x}$,

$$\frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{F'_z}{F'_x}.$$

ТЕМА 3. ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ

Дотична площина та нормаль до поверхні

Нехай маємо деяку поверхню (P) , задану рівнянням

$$F(x, y, z) = 0. \quad (3.1)$$

Точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ належить цій поверхні і входить в область визначення функції $F(x, y, z)$ разом зі своїм якимось околom, а сама функція диференційовна в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$, причому не всі частинні похідні в цій точці дорівнюють нулю, тобто

$$(F'_x(x_0, y_0, z_0))^2 + (F'_y(x_0, y_0, z_0))^2 + (F'_z(x_0, y_0, z_0))^2 \neq 0. \quad (3.2)$$

Розглянемо довільну криву L , яка проходить через точку M_0 , має дотичну в цій точці, лежить на поверхні (3.1) і задається рівняннями

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t),$$

причому точці M_0 відповідає значення параметра t_0 .

Оскільки крива L лежить на поверхні, то координати її точок задовольняють рівнянню (3.1):

$$F(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \equiv 0. \quad (3.3)$$

На основі вищесказаного виконуються всі умови теореми по диференціювання складеної функції $F(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))$ в точці t_0 .

Тому, продиференціювавши рівність (3.3), отримуємо

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = 0. \quad (3.4)$$

Ця рівність означає перпендикулярність векторів $\vec{n} = F'_x(x_0, y_0, z_0) \vec{i} + F'_y(x_0, y_0, z_0) \vec{j} + F'_z(x_0, y_0, z_0) \vec{k}$ та $\vec{s} = \varphi'(t_0) \vec{i} + \psi'(t_0) \vec{j} + \chi'(t_0) \vec{k}$, причому другий з них є напрямним вектором дотичної до кривої L в точці M_0 .

Висновок 3.1.

- ☒ З рівності (3.4) випливає, що дотичні до всіх кривих, які лежать на
- ☒ поверхні (3.1) і проходять через точку M_0 , перпендикулярні до одного
- ☒ й того самого вектора $\vec{n}$. Отже, усі ці дотичні лежать в одній і тій
- ☒ самій площині, яка називається дотичною площиною до поверхні (P) в точці
- ☒ M_0 .

Запишемо рівняння дотичної площини як рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\vec{n}$:

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0. \quad (3.5)$$

означення 3.1.

- ☒ Нормаллю до поверхні (P) в точці M_0 називається пряма, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до дотичної площини в цій точці.

Як бачимо, геометрично нормаль як у просторі так і на площині є прямою.

Відповідно до цього означення запишемо рівняння нормалі як канонічні рівняння прямої, що проходить через точку M_0 і має напрямний вектор $\vec{N}$:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}. \quad (3.6)$$



Зауваження 3.1.

Ми розглянули випадок, коли функція (3.1) диференційовна в точці M_0 і виконується (3.2). Якщо ці умови не виконуються в деякій точці (її називають особливою), то дотична площина та нормаль в такій точці можуть і не існувати.

Отримані формули для рівнянь дотичної площини та нормалі до поверхні є безпосереднім узагальненням відповідних формул для рівнянь дотичної та нормалі до кривої у випадку однієї змінної.



Зауваження 3.2.

Якщо для деякої функції $u = u(x, y, z)$ рівняння (3.1) є поверхнею рівня, тобто $F(x, y, z) = u(x, y, z) - c = 0$, то вектор

$$\vec{n} = (F'_x; F'_y; F'_z) = (u'_x; u'_y; u'_z)$$

буде напрямним вектором нормалі до цієї поверхні.

Для явного задання рівняння поверхні наведені формули рівнянь дотичної площини та нормалі спрощуються, бо частинна похідна по змінній z дорівнює -1 .



Зауваження 3.3.

Якщо рівняння поверхні задано в явній формі $z = f(x, y)$, то, взявши $F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$, маємо

$$F'_x(x_0, y_0, z_0) = f'_x(x_0, y_0), F'_y(x_0, y_0, z_0) = f'_y(x_0, y_0), F'_z(x_0, y_0, z_0) = -1.$$

Тоді рівняння (3.5) та (3.6) наберуть відповідно такого вигляду:

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0; \quad (3.7)$$

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \quad (3.8)$$

Зазначимо, що, крім дотичної площини та нормалі, для поверхонь та кривих можна вводити у розгляд різноманітні диференціальні характеристики на кшталт кривини, евольвенти, скруту, стичних поверхонь. Усі ці питання детально вивчаються у такому розділі математики як диференціальна геометрія (див. [3]), який у типовому курсі вищої математики не вивчається.

Розглянемо приклади.

? Приклад 3.1.

Записати рівняння дотичної площини та нормалі до гіперболоїда $3x^2 - 2y^2 + z^2 = 19$ в точці $M_0(2; 1; -3)$.



Розв'язання.

У нашому випадку маємо $F(M) = F(x, y, z) = 3x^2 - 2y^2 + z^2 - 19$, $F'_x = 6x$, $F'_y = -4y$, $F'_z = 2z$. Тому $F'_x(0) = 12$, $F'_y(0) = -4$, $F'_z(0) = -6$.

Отже, скориставшись рівняннями (3.5) та (3.6), шукані рівняння дотичної площини та нормалі матимуть вигляд:

$$12(x - 2) - 4(y - 1) - 6(z + 3) = 0,$$

або

$$6x - 2y - 3z - 19 = 0;$$

$$\frac{x - 2}{12} = \frac{y - 1}{-4} = \frac{z + 3}{-6},$$

або

$$\frac{x - 2}{6} = \frac{y - 1}{-2} = \frac{z + 3}{-3}.$$

Наведемо ще один приклад, але вже для явно заданої поверхні.

? Приклад 3.2.

Записати рівняння дотичної площини та нормалі до параболоїда $z = 2x^2 - 5y^2$ в точці $M_0(3; -2; -2)$.



Розв'язання.

У даному випадку $f(x, y) = 2x^2 - 5y^2$, $f'_x(x, y) = 4x$, $f'_y(x, y) = -10y$. Отже, $f'_x(x_0, y_0) = f'_x(3, -2) = 12$, $f'_y(x_0, y_0) = f'_y(3, -2) = 20$.

Тому, підставивши обчислені значення в формули (3.7) та (3.8), після спрощень матимемо:

$$12x + 20y - z + 2 = 0 - \text{рівняння дотичної площини};$$

$$\frac{x - 3}{12} = \frac{y + 2}{20} = \frac{z + 2}{-1} - \text{рівняння нормалі}.$$

Геометричний зміст диференціала функції двох змінних

З'ясуємо тепер геометричний зміст повного диференціала функції $z = f(x, y)$, диференційовної в точці $M_0(x_0, y_0)$.

Поклавши $x - x_0 = \Delta x$, $y - y_0 = \Delta y$, рівність (3.7) можемо переписати так:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Права частина останньої рівності є повним диференціалом функції $z = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$, отже $z - z_0 = dz$.

Таким чином, повний диференціал функції двох змінних у точці $M_0(x_0, y_0)$ дорівнює приросту аплікати точки на дотичній площині до поверхні в точці $\widetilde{M}_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, якщо від точки $M_0(x_0, y_0)$ перейти до точки $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ (рис. 3.1). У цьому полягає геометричний зміст повного диференціала функції двох змінних.

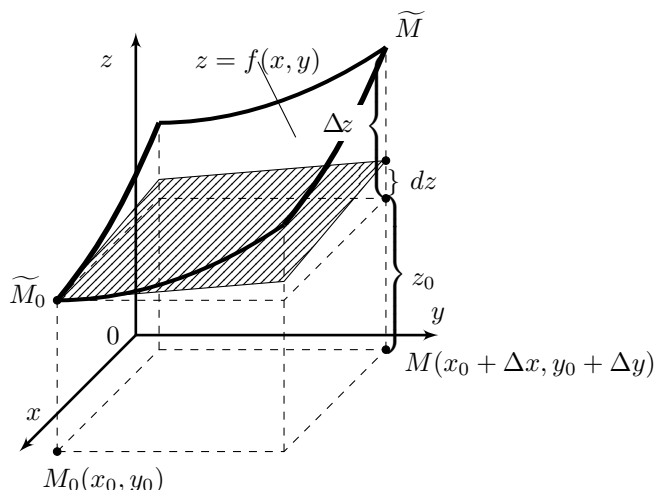


Рисунок 3.1 – Геометричний зміст повного диференціала

Скалярне поле. Похідна за напрямком



Означення 3.2.



Область простору, кожній точці M якої за певним правилом поставлено у відповідність одне єдине значення деякої скалярної фізичної величини $u = f(M)$, називається **скалярним полем** величини u .

Прикладами скалярних полів є поле густини даного неоднорідного середовища, поле вологості повітря, поле температури даного тіла, поле атмосферного тиску, поле потенціалів заданого електростатичного поля.

Якщо функція $u = f(M)$ не залежить від часу, то скалярне поле називають **стаціонарним**. Якщо ж u залежить від часу, то скалярне поле називають **нестационарним**.

Наприклад, коли в середовище, яке проводить тепло, помістити нагріте тіло, то воно буде з часом охолоджуватися. Температура в точках цього середовища залежатиме від розглядуваної точки та від плину часу. Отже, матимемо нестационарне поле температур.

Надалі розглядатимемо лише стаціонарні поля.



Зауваження 3.4.

Означення скалярного поля не відрізняється від означення функції. Термін „поле” перенесено з фізики і підкреслює походження розглядуваного поняття.

Якщо в просторі ввести прямокутну декартову систему координат $xOyz$, то точка M матиме в цій системі певні координати (x, y, z) і скалярне поле u стане функцією цих координат: $u = f(M) = f(x, y, z)$.

У випадку, коли скалярна функція $f(M)$ залежить тільки від двох змінних, наприклад x та y , то відповідне скалярне поле $f(x, y)$ називають **плоским**. Наприклад, поле температури навколо необмеженого в обох напрямках рівномірно нагрітого прямолінійного дроту є плоским. Якщо ж функція $f(M)$ залежить від трьох змінних x, y та z , то скалярне поле $f(x, y, z)$ називають **просторовим**.

Геометрично плоскі скалярні поля зображають за допомогою ліній рівня, а просторові – за допомогою поверхонь рівня.

Однією з найважливіших характеристик скалярного поля є похідна за напрямком. З'ясуємо це поняття.

Нагадаємо, що для функції однієї змінної $y = f(x)$ похідна $y' = f'(x_0)$ виражає швидкість зміни цієї функції в точці $x = x_0$. Отже, частинні похідні $f'_x(x_0, y_0, z_0)$, $f'_y(x_0, y_0, z_0)$, $f'_z(x_0, y_0, z_0)$ виражають швидкість зміни функції (поля) відповідно в напрямках, паралельних координатним осям.

Тому природно поставити питання про швидкість зміни функції $u = f(x, y, z)$ в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ в довільному напрямку, що виходить з цієї точки.

Нехай задано скалярне поле $u = f(x, y, z)$, причому область визначення функції є відкритою та зв'язною. Розглянемо якийсь фіксований вектор $\vec{l}$, який утворює з додатними напрямками координатних осей відповідно кути α, β, γ . Зафіксуємо в скалярному полі точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і візьмемо в цьому полі довільну точку $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$, таку щоб вектор $\overrightarrow{M_0M}$ був співнаправленим з вектором $\vec{l}$.

Позначимо $\Delta l = |\overrightarrow{M_0M}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$.

При переході від точки M_0 до точки M функція $f(M)$ отримає приріст в напрямі вектора $\vec{l}$, який дорівнює

$$\Delta_l u = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0).$$



Означення 3.3.

Якщо існує скінченна границя відношення $\frac{\Delta_l u}{\Delta l}$ при $\Delta l \rightarrow 0$, то ця границя називається **похідною функції (поля) $u = f(M)$ у точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ за напрямком вектора $\vec{l}$** і позначається

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta_l u}{\Delta l}.$$

Зрозуміло, що обчислювати похідну за напрямком згідно означення є незручно, тому сформулюємо та доведемо теорему, яка дає змогу звести ці розрахунки до обчислення частинних похідних та скалярного множення на напрямні косинуси відповідного вектора.



Теорема 3.1.

Якщо функція $u = f(x, y, z)$ диференційовна в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то в цій точці існує похідна функції $f(x, y, z)$ за напрямком вектора $\vec{l}$ і

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = f'_x(x_0, y_0, z_0) \cos \alpha + f'_y(x_0, y_0, z_0) \cos \beta + f'_z(x_0, y_0, z_0) \cos \gamma. \quad (3.9)$$

Доведення. Перш ніж приступити до доведення теореми, зауважимо, що рівність (3.9), яку потрібно довести, можна переписати ще й так:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z} \cos \gamma. \quad (3.10)$$

За умовою теореми функція $u = f(M)$ диференційовна в точці M_0 , тому її приріст $\Delta_l u$ в цій точці можна записати у вигляді

$$\Delta_l u = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z} \Delta z + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z, \quad (3.11)$$

де $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ — нескінченно малі функції при $\Delta l \rightarrow 0$.

Оскільки вектор $\overrightarrow{M_0 M} = \Delta x \cdot \vec{i} + \Delta y \cdot \vec{j} + \Delta z \cdot \vec{k}$ співнаправлений з вектором $\vec{l}$, то

$$\Delta x = \Delta l \cdot \cos \alpha, \Delta y = \Delta l \cdot \cos \beta, \Delta z = \Delta l \cdot \cos \gamma.$$

Тому, підставивши це в рівність (3.11) і розділивши обидві частини (3.11) на Δl , отримаємо

$$\frac{\Delta_l u}{\Delta l} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z} \cos \gamma + \varepsilon_1 \cos \alpha + \varepsilon_2 \cos \beta + \varepsilon_3 \cos \gamma.$$

Перейшовши тут до границі при $\Delta l \rightarrow 0$, дістанемо рівність (3.10).

Теорему доведено. □

Відзначимо, що рівність (3.10) в довільній точці M записуватимемо коротко у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma. \quad (3.12)$$



Зуваження 3.5.

Згідно означення 3.3, частинні похідні $f'_x(x_0, y_0, z_0)$, $f'_y(x_0, y_0, z_0)$, $f'_z(x_0, y_0, z_0)$ можна розглядати як похідні функції $u = f(M)$ за напрямками відповідно $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Дійсно, наприклад, якщо $\vec{l} = \vec{j}$, то $\alpha = \gamma = \frac{\pi}{2}$, $\beta = 0$, тому $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \frac{\pi}{2} + \frac{\partial u}{\partial y} \cos 0 + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \frac{\pi}{2} = \frac{\partial u}{\partial y}$. Отже, похідна за напрямком є узагальненням поняття про частинну похідну.

Відзначимо, що абсолютна величина $\left| \frac{\partial u}{\partial l} \right|$ відповідає значенню швидкості зміни скалярного поля $u = f(x, y, z)$ в точці (x, y, z) , а знак похідної визначає характер зміни в напрямку $\vec{l}$ (зростання чи спадання).

Легко бачити, що при зміні напрямку на протилежний $\vec{l}_1 = -\vec{l}$ похідна за напрямком також змінить свій знак.

Дійсно, при зміні напрямку на протилежний кути α, β, γ зміняться на π , тому

$$\frac{\partial u}{\partial l_1} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\alpha + \pi) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\beta + \pi) + \frac{\partial u}{\partial z} \cos(\gamma + \pi) = -\frac{\partial u}{\partial l}. \quad (3.13)$$

**Зауваження 3.6.**

Якщо поле плоске, тобто задається функцією $z = f(x, y)$, то напрям вектора $\vec{l}$ однозначно визначається кутом α , а $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$. З врахуванням цього рівність (3.11) набуде вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \alpha. \quad (3.14)$$

Розглянемо приклади на обчислення похідної за напрямом функції декількох змінних.

**Приклад 3.3.**

Знайти похідну функції $u = x^2 - y^3$ в точці $M_0(-1; 2)$ за напрямком $\vec{l}$, який утворює кут $\alpha = 30^\circ$ з додатним напрямком осі Ox .

**Розв'язання.**

Знаходимо частинні похідні в заданій точці:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (x^2 - y^3)'_x = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0) = 2 \cdot (-1) = -2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (x^2 - y^3)'_y = -3y, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(0) = -3 \cdot 2 = -6.$$

Тоді, скориставшись формулою (3.14), матимемо:

$$\frac{\partial f(-2; 1)}{\partial l} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = -2 \cos 30^\circ - 6 \sin 30^\circ = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 6 \cdot \frac{1}{2} = -\sqrt{3} - 3.$$

Як ми бачимо, $\frac{\partial f(-2; 1)}{\partial l} < 0$, тому наша функція в заданому напрямку спадає.

Таким чином, функція від двох змінних у точці може як зростати, так і спадати. Усе залежить від напрямку вздовж якого ми досліджуємо нашу функцію.

**Приклад 3.4.**

Знайти похідну функції $u = \ln(3x + y^2 - z)$ в точці $M_1(2; 1; 3)$ за напрямом від цієї точки до точки $M_2(3; -1; 5)$.

**Розв'язання.**

В нашому випадку вектор $\vec{l}$ та його довжина дорівнюють:

$$\vec{l} = \overrightarrow{l_1 l_2} = (3 - 2; -1 - 1; 5 - 3) = (1; -2; 2),$$

$$|\vec{l}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3.$$

Отже, напрямні косинуси будуть такими:

$$\cos \alpha = \frac{l_x}{|\vec{l}|} = \frac{1}{3}, \cos \beta = \frac{l_y}{|\vec{l}|} = -\frac{2}{3}, \cos \gamma = \frac{l_z}{|\vec{l}|} = \frac{2}{3}.$$

Тепер знайдемо частинні похідні та обчислимо їхні значення в точці M_1 .

$$f'_x(x, y, z) = (\ln(3x + y^2 - z))'_x = \frac{3}{3x + y^2 - z}, f'_x(2, 1, 3) = \frac{3}{4};$$

$$f'_y(x, y, z) = (\ln(3x + y^2 - z))'_y = \frac{2y}{3x + y^2 - z}, f'_y(2, 1, 3) = \frac{1}{2};$$

$$f'_z(x, y, z) = (\ln(3x + y^2 - z))'_z = \frac{-1}{3x + y^2 - z}, f'_z(2, 1, 3) = -\frac{1}{4}.$$

Підставивши обчислені значення в (3.10), знаходимо шукану похідну в точці M_1 в заданому напрямку:

$$\frac{\partial f(M_1)}{\partial l} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{2}{3} = -\frac{1}{4}.$$

Оскільки $\frac{\partial f(M_1)}{\partial l} < 0$, то функція в даному напрямку спадає.

Градiєнт, його властивостi

Припустимо, що частинні похідні функції $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ в якійсь точці M одночасно не дорівнюють нулю. Природно виникає питання, в якому напрямку $\vec{l}$ похідна $\frac{\partial u}{\partial l}$ має найбільше значення? Відповідь на це запитання має важливе практичне значення.

Дамо наступне означення, яке допоможе відповісти на поставлене питання.



Означення 3.4.

Вектор, координатами якого є значення частинних похідних функції $u = f(x, y, z)$ в точці (x, y, z) , називається **градiєнтом функції в цій точці** і позначається gradu або $\text{gradu}(M)$ чи $\text{grad}f(M)$. Отже,

$$\text{gradu} = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}. \quad (3.15)$$

Наступна теорема встановлює зв'язок між похідною функції в даній точці за довільним напрямком та градiєнтом функції в цій точці.



Теорема 3.2.

Похідна функції $u = f(x, y, z)$ в точці (x, y, z) за напрямком вектора $\vec{l}$ дорівнює проекції градiєнта функції в цій точці на вектор $\vec{l}$, тобто

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \text{pr}_{\vec{l}} \text{gradu}. \quad (3.16)$$

Доведення. Оскільки $\vec{l} = |\vec{l}| \cos \alpha \cdot \vec{i} + |\vec{l}| \cos \beta \cdot \vec{j} + |\vec{l}| \cos \gamma \cdot \vec{k}$, то, згідно властивості проекції та формули для обчислення скалярного добутку векторів через їхні

координати, матимемо:

$$\begin{aligned} \text{пр}_{\vec{l}} \text{grad} u &= \frac{1}{|\vec{l}|} \cdot \text{grad} u \cdot \vec{l} = \frac{1}{|\vec{l}|} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot |\vec{l}| \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot |\vec{l}| \cos \beta + \right. \\ &\left. + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot |\vec{l}| \cos \gamma \right) = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma. \end{aligned}$$

Враховуючи (3.12), отримуємо (3.16), чим і доводимо нашу теорему. $\square$

Розглянемо деякі властивості градієнта.

1. Градієнт функції в даній точці вказує напрямком, по якому похідна в цій точці має найбільше значення, яке дорівнює

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{\max} = |\text{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2}. \quad (3.17)$$

Доведення. Дійсно, з рівності (3.16) на основі означення проекції маємо

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \text{пр}_{\vec{l}} \text{grad} u = |\text{grad} u| \cdot \cos \varphi \leq |\text{grad} u|, \quad (3.18)$$

де φ – кут між напрямком вектора $\vec{l}$ та градієнтом функції в даній точці. З (3.18) видно, що у випадку $\text{grad} u \neq 0$ рівність $\frac{\partial u}{\partial l} = |\text{grad} u|$ виконуватиметься тоді і тільки тоді, коли $\varphi = 0$, тобто коли вектор $\vec{l}$ співнаправлений з градієнтом. Таким чином, скалярне поле в довільній точці зростає найшвидше в напрямку градієнта. Відповідно до (3.13) в напрямку, протилежному до градієнта, воно найшвидше зменшуватиметься. $\square$

2. Швидкість зміни скалярного поля в даній точці в напрямку, перпендикулярному градієнту в цій точці, дорівнює нулю.

Доведення. Справді, якщо $\vec{l} \perp \text{grad} u$, то з рівності (3.16) отримуємо $\frac{\partial u}{\partial l} = 0$. $\square$

3. Градієнт в кожній точці поля $u = f(x, y, z)$ перпендикулярний до поверхні рівня, яка проходить через цю точку.

Доведення. Ця властивість випливає безпосередньо з зауваження 3.2. $\square$

4. Нехай $u = u(x, y, z), v = v(x, y, z)$ – скалярні поля, задані в деякій області. Мають місце наступні рівності:

$$\text{grad} (u + v) = \text{grad} u + \text{grad} v; \quad \text{grad} (c \cdot u) = c \cdot \text{grad} u;$$

$$\text{grad} (u \cdot v) = v \cdot \text{grad} u + u \cdot \text{grad} v;$$

$$\text{grad} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \cdot \text{grad} u - u \cdot \text{grad} v}{v^2};$$

$$\text{grad} f(u) = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \text{grad} u.$$

Доведення. Доведення цих рівностей випливає з означення градієнта та правил диференціювання. Доведемо, наприклад, четверту рівність:

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} \left(\frac{u}{v} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u}{v} \right) \cdot \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u}{v} \right) \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u}{v} \right) \cdot \vec{k} = \\ &= \frac{u'_x v - v'_x u}{v^2} \cdot \vec{i} + \frac{u'_y v - v'_y u}{v^2} \cdot \vec{j} + \frac{u'_z v - v'_z u}{v^2} \cdot \vec{k} = \\ &= \frac{1}{v^2} \left((u'_x \vec{i} + u'_y \vec{j} + u'_z \vec{k}) \cdot v + (v'_x \vec{i} + v'_y \vec{j} + v'_z \vec{k}) \cdot u \right) = \\ &= \frac{v \cdot \operatorname{grad} u - u \cdot \operatorname{grad} v}{v^2}.\end{aligned}$$

□

? Приклад 3.5.

➤ Знайти найбільшу швидкість зростання поля $u = 3x + z^y$ в точці $M_0(-4; 2; 1)$.



Розв'язання.

Знайдемо градієнт поля в заданій точці. Відповідно до (3.15) маємо:

$$\operatorname{grad} u = (3x + z^y)'_x \vec{i} + (3x + z^y)'_y \vec{j} + (3x + z^y)'_z \vec{k} = 3 \vec{i} + yz^{y-1} \cdot \vec{j} + z^y \ln z \cdot \vec{k}.$$

$$\text{Отже, } \operatorname{grad} u(M_0) = 3 \vec{i} + 2 \vec{j}.$$

Тоді за формулою (3.17) знаходимо

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{\max} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}.$$

ТЕМА 4. ЧАСТИННІ ПОХІДНІ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

Частинні похідні вищих порядків

Нехай функція $z = f(x, y)$ задана в деякій відкритій області $D \subset \mathbb{R}^2$ і в усіх точках (x, y) цієї області має частинні похідні $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$. Ці похідні називають *частинними похідними першого порядку*.

Частинні похідні першого порядку, будучи функціями від x та y , в свою чергу, в якійсь

точці (x, y) можуть мати частинні похідні.



Означення 4.1.

Нехай функції $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ мають в точці (x, y) частинні похідні. Ці частинні похідні називають **частинними похідними другого порядку від функції** $z = f(x, y)$ і позначають $f''_{xx}(x, y)$, $f''_{xy}(x, y)$, $f''_{yx}(x, y)$, $f''_{yy}(x, y)$ або $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.
При цьому $f''_{xx}(x, y)$ називають **частинною похідною другого порядку по x^2** ; $f''_{xy}(x, y)$ — **частинною похідною другого порядку по xy** ; $f''_{yx}(x, y)$ — **частинною похідною другого порядку по yx** ; $f''_{yy}(x, y)$ — **частинною похідною другого порядку по y^2** .

Отже, згідно означення, маємо:

$$f''_{xx}(x, y) = (f'_x(x, y))'_x, f''_{xy}(x, y) = (f'_x(x, y))'_y,$$

$$f''_{yx}(x, y) = (f'_y(x, y))'_x, f''_{yy}(x, y) = (f'_y(x, y))'_y.$$

Таким чином, для знаходження частинних похідних другого порядку потрібно спочатку знайти частинні похідні першого порядку даної функції, а потім від них знайти відповідні частинні похідні першого порядку. Аналогічно, шукаючи частинні похідні першого порядку від частинних похідних другого порядку, знаходимо тим самим частинні похідні третього порядку.

Індуктивно можна означити частинні похідні n -го порядку як частинні похідні першого порядку від частинних похідних $(n - 1)$ -го порядку. Частинні похідні n -го порядку позначають так:

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^n}, \frac{\partial^n z}{\partial y^n}, \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1} \partial y}, \frac{\partial^n z}{\partial x \partial y^{n-1}} \text{ і т. д.}$$



Приклад 4.1.

Знайти частинні похідні другого порядку для функції $z = x^y$.



Розв'язання.

Знайдемо спочатку частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^y)'_x = y \cdot x^{y-1}, \frac{\partial z}{\partial y} = (x^y)'_y = x^y \cdot \ln x.$$

Тоді

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (y \cdot x^{y-1})'_x = y \cdot (y - 1) \cdot x^{y-2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (y \cdot x^{y-1})'_y = x^{y-1} + y \cdot x^{y-1} \cdot \ln x = x^{y-1} \cdot (1 + y \cdot \ln x),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (x^y \cdot \ln x)'_x = y \cdot x^{y-1} \cdot \ln x + x^y \cdot \frac{1}{x} = x^{y-1} \cdot (y \cdot \ln x + 1),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (x^y \cdot \ln x)'_y = x^y \ln x \cdot \ln x = x^y \ln^2 x.$$



Зауваження 4.1.

Ми бачимо, що для розглянутої в останньому прикладі функції $z = x^y$ частинні похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ та $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, які називаються **мішаними частинними похідними другого порядку**, рівні між собою. Постає природне запитання: чи завжди $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$? Виявляється, що це не завжди так.



Приклад 4.2.

Розглянемо функцію $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{якщо } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } x = y = 0. \end{cases}$

Покажемо, що для цієї функції в точці $O(0; 0)$ існують обидві мішані частинні похідні другого порядку та знайдемо їх.



Розв'язання.

Легко бачити, що частинні прирости в точці $O(0; 0)$ дорівнюють:

$$\Delta_x z = f(\Delta x, 0) - f(0, 0) = 0 - 0 = 0;$$

$$\Delta_y z = f(0, \Delta y) - f(0, 0) = 0 - 0 = 0.$$

Тому існують

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0,$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta y} = 0.$$

Якщо ж $x^2 + y^2 \neq 0$, тобто $x^2 + y^2 > 0$, то, використовуючи правила диференціювання, матимемо:

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= \left(xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)'_x = y \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + x \frac{2x(x^2 + y^2) - 2x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right) = \\ &= y \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right), \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} f'_y(x, y) &= \left(xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)'_y = x \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + y \frac{(-2y)(x^2 + y^2) - 2y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right) = \\ &= x \cdot \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Поклавши $x = 0, y \neq 0$ в рівності (4.1), отримаємо $f'_x(0, y) = -y$. Тоді, згідно означення частинної похідної, знаходимо

$$f''_{xy}(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f'_x(0, \Delta y) - f'_x(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-\Delta y - 0}{\Delta y} = -1.$$

При $y = 0, x \neq 0$ з рівності (4.2) маємо $f'_y(x, 0) = x$, звідки

$$f''_{yx}(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'_y(\Delta x, 0) - f'_y(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x - 0}{\Delta x} = 1.$$

Отже, для розглядуваної функції

$$f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0).$$

Якщо ж на функцію $z = f(x, y)$ накласти деякі додаткові умови, то на поставлене в зауваженні 4.1 можна отримати ствердну відповідь.



Теорема 4.1.

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена і має частинні похідні $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ в області $D \subset \mathbb{R}^2$, якій належить точка $M_0(x_0, y_0)$ разом зі своїм деяким околom, причому похідні f''_{xy}, f''_{yx} є неперервними функціями в точці M_0 . Тоді має місце рівність

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0). \quad (4.3)$$

Доведення. Виберемо в області D якийсь окіл точки M_0 і візьмемо в ньому довільну точку $(x_0 + h, y_0 + t)$ таку, щоб $h \neq 0, t \neq 0$. Побудуємо вираз

$$W = \frac{1}{ht} (f(x_0 + h, y_0 + t) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + t) + f(x_0, y_0)). \quad (4.4)$$

Розглянемо функцію

$$\varphi(x) = \frac{f(x, y_0 + t) - f(x, y_0)}{t}, \quad (4.5)$$

в область визначення якої, очевидно, входить відрізок $[x_0, x_0 + h]$ (або відрізок $[x_0 + h, x_0]$, якщо $h < 0$). Згідно умов теореми функція $\varphi(x)$ в усіх точках цього відрізка має похідну

$$\varphi'(x) = \frac{f'_x(x, y_0 + t) - f'_x(x, y_0)}{t}, \quad (4.6)$$

а отже, й неперервна на відрізку $[x_0, x_0 + h]$. Таким чином, на вказаному відрізку для $\varphi(x)$ виконуються всі умови теореми Лагранжа, відповідно до якої існує таке число $\theta_1 \in (0; 1)$, що виконується рівність

$$\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = \varphi'(x_0 + \theta_1 h) \cdot h. \quad (4.7)$$

Легко бачити, що за допомогою функції (4.5) вираз (4.4) можна записати так:

$$W = \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h}.$$

Тоді з рівності (4.5) з врахуванням (4.6) отримуємо

$$W = \varphi'(x_0 + \theta_1 h) = \frac{f'_x(x_0 + \theta_1 h, y_0 + t) - f'_x(x_0 + \theta_1 h, y_0)}{t}. \quad (4.8)$$

Розглянувши далі функцію $\psi(y) = f'_x(x_0 + \theta_1 h, y)$, яка в усіх точках відрізка $[y_0, y_0 + t]$ (або відрізка $[y_0 + t, y_0]$, якщо $t < 0$) має похідну $\psi'(y) = f''_{xy}(x_0 + \theta_1 h, y)$, тому, застосувавши теорему Лагранжа, матимемо

$$W = \frac{\psi(y_0 + t) - \psi(y_0)}{t} = \psi'(y_0 + \theta_2 t) =$$

$$= f''_{xy}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 t), \quad (4.9)$$

де $0 < \theta_2 < 1$.

Розглядаючи функцію

$$\chi(y) = \frac{f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)}{h},$$

аналогічно до (4.6) отримуємо

$$W = \chi'(y_0 + \theta_3 t) = \frac{f'_y(x_0 + h, y_0 + \theta_3 t) - f'_y(x_0, y_0 + \theta_3 t)}{t},$$

де $0 < \theta_3 < 1$, звідки, аналогічно до (4.9), дістанемо

$$W = f''_{yx}(x_0 + \theta_4 h, y_0 + \theta_3 t), \text{ де } 0 < \theta_4 < 1. \quad (4.10)$$

Тоді з рівностей (4.9) та (4.10) маємо

$$f''_{xy}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 t) = f''_{yx}(x_0 + \theta_4 h, y_0 + \theta_3 t). \quad (4.11)$$

Очевидно, що

$$x_0 + \theta_1 h \rightarrow x_0, x_0 + \theta_4 h \rightarrow x_0 \text{ при } h \rightarrow 0;$$

$$y_0 + \theta_2 t \rightarrow y_0, y_0 + \theta_3 t \rightarrow y_0 \text{ при } t \rightarrow 0.$$

Тому, переходячи в рівності (4.11) до границі при $h \rightarrow 0, t \rightarrow 0$ і враховуючи неперервність частинних похідних f''_{xy}, f''_{yx} в точці $M_0(x_0, y_0)$, отримуємо рівність (4.3), чим і доводимо нашу теорему. $\square$



Зауваження 4.2.

Щойно доведена теорема узагальнюється на випадок мішаних похідних третього і більш вищих порядків.

Диференціали вищих порядків

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена і має неперервні частинні похідні в області $D \subset \mathbb{R}^2$. Тоді за теоремою 2.3 вона диференційовна в кожній точці $M(x, y) \in D$, отже, має повний диференціал

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy \quad (4.12)$$

Цей диференціал називатимемо **диференціалом першого порядку**. Як бачимо, диференціал першого порядку dz є функцією від x та y ; $dx = \Delta x, dy = \Delta y$ — прирости незалежних змінних, і вони розглядаються як сталі числа. Якщо функція dz , або частинні похідні $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$ мають, в свою чергу, неперервні частинні похідні першого порядку, то можемо стверджувати, що dz має диференціал $d(dz)$.



Означення 4.2.

Диференціал першого порядку від диференціала першого порядку називається **диференціалом другого порядку функції** $z = f(x, y)$ в точці (x, y) і позначається символом $d^2 z$, тобто

$$d^2 z = d(dz). \quad (4.13)$$

Використовуючи це означення, введемо формулу для диференціала другого порядку. Підставляючи значення dz з (4.12) в (4.13), дістаємо

$$\begin{aligned} d^2z &= d(f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy) = d(f'_x(x, y)dx) + d(f'_y(x, y)dy) = \\ &= f''_{xx}(x, y)dx^2 + f''_{xy}(x, y)dxdy + f''_{yx}(x, y)dydx + f''_{yy}(x, y)dy^2. \end{aligned}$$

Ми позначили $dx^2 = dxdx$; $dy^2 = dydy$. За припущенням мішані частинні похідні неперервні в точці (x, y) , тому за теоремою 4.1 вони рівні між собою, тобто

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y).$$

Таким чином, для диференціала другого порядку маємо таку формулу:

$$d^2z = f''_{xx}(x, y)dx^2 + 2f''_{xy}(x, y)dxdy + f''_{yy}(x, y)dy^2. \quad (4.14)$$

Очевидно, диференціал другого порядку є функцією від x та y , тому він може мати диференціал першого порядку.

Відповідно до означення 4.2 диференціал першого порядку від диференціала другого порядку називається **диференціалом третього порядку** функції $z = f(x, y)$ в точці (x, y) і позначається символом d^3z , тобто

$$d^3z = d(d^2z). \quad (4.15)$$

Якщо функція $z = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні третього порядку в області D , то d^2z є диференційовною функцією, отже, має диференціал. Підставивши (4.14) в (4.15), дістанемо формулу для диференціала третього порядку:

$$d^3z = f'''_{xxx}(x, y)dx^3 + 3f'''_{xxy}(x, y)dx^2dy + 3f'''_{xyy}(x, y)dxdy^2 + f'''_{yyy}(x, y)dy^3. \quad (4.16)$$

Індуктивно можна означити диференціали четвертого, п'ятого і т.д., n -го порядків: якщо маємо диференціал $(n - 1)$ -го порядку функції $z = f(x, y)$, то диференціал першого порядку від цього диференціала називають **диференціалом n -го порядку функції** $z = f(x, y)$, тобто $d^n z = d(d^{n-1}z)$.

Відзначимо, що коли для позначення частинних похідних користуватися символами $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і т.д., то формули (4.12), (4.14) та (4.16) можна записати компактніше:

$$dz = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right) z,$$

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 z,$$

$$d^3z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^3 z.$$

Для диференціала n -го порядку матимемо

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n z. \quad (4.17)$$

Формулу (4.17) називають символічно **степеневою формулою**. В розгорнутому вигляді вона запишеться так:

$$d^n z = \frac{\partial^n z}{\partial x^n} dx^n + y_1^n \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1} \partial y} dx^{n-1} dy + y_2^n \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2} \partial y^2} dx^{n-2} dy^2 +$$

$$+ \dots + y_n^k \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-k} \partial y^k} dx^{n-k} dy^k + \dots + \frac{\partial^n z}{\partial y^n} dy^n,$$

де C_n^k — число комбінацій з n по k :

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}.$$



Зауваження 4.3.

Враховуючи зауваження 4.2, ми можемо, аналогічно до (4.17), записати диференціал n -го порядку у випадку його існування функції трьох і більшої кількості змінних. Зокрема, для функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$ матимемо:

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \right)^n u. \quad (4.18)$$

Розглянемо приклади.



Приклад 4.3.

Знайти $d^2 z$ функції $z = y \cos^2 x$ в точці $M_0 \left(\frac{\pi}{2}, -3 \right)$.



Розв'язання.

Ми скористаємось формулою (4.14). Для цього знайдемо частинні похідні першого та другого порядків:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (y \cos^2 x)'_x = -y \cdot \sin 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = (y \cos^2 x)'_y = \cos^2 x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (-y \sin 2x)'_x = -2y \cos 2x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (-y \sin 2x)'_y = -\sin 2x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (\cos^2 x)'_y = 0.$$

Тоді

$$d^2 z = -2y \cos 2x dx^2 - \sin 2x dx dy,$$

$$\text{звідки } d^2 z \left(\frac{\pi}{2}, -3 \right) = -6 dx^2.$$

Наведемо приклад на обчислення диференціала третього порядку.



Приклад 4.4.

Знайти $d^3 z$ функції $z = e^{xy^2}$ в довільній точці (x, y) .



Розв'язання.

Знайдемо усі частинні похідні до третього порядку включно:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (e^{xy^2})'_x = y^2 e^{xy^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = (e^{xy^2})'_y = 2xy e^{xy^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (y^2 e^{xy^2})'_x = y^4 e^{xy^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(y^2 e^{xy^2} \right)'_y = (2y + 2xy^3) e^{xy^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(2xy e^{xy^2} \right)'_y = (2x + 4x^2 y^2) e^{xy^2},$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \left(y^4 e^{xy^2} \right)'_x = y^6 e^{xy^2}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \left(y^4 e^{xy^2} \right)'_y = (4y^3 + 2xy^5) e^{xy^2},$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \left((2y + 2xy^3) e^{xy^2} \right)'_y = (2 + 10xy^2 + 4x^2 y^4) e^{xy^2},$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \left((2x + 4x^2 y^2) e^{xy^2} \right)'_y = (12x^2 y + 8x^3 y^3) e^{xy^2}.$$

Скориставшись формулою (4.16) та винісши e^{xy^2} за дужки, матимемо:

$$d^2 z = e^{xy^2} (y^6 dx^3 + (4y^3 + 2xy^5) dx^2 dy + (2 + 10xy^2 + 4x^2 y^4) dx dy^2 + (12x^2 y + 8x^3 y^3) dy^3).$$

З наведених прикладів видно, що аналітичні труднощі при обчисленні диференціалів вищих порядків є більшими, ніж для диференціала першого порядку.

? Приклад 4.5.

Знайти $d^2 u$ функції $u = \ln(2x - y + z)$.



Розв'язання.

Для заданої функції трьох змінних знаходимо спочатку усі частинні похідні до другого порядку включно:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (\ln(2x - y + z))'_x = \frac{2}{2x - y + z},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (\ln(2x - y + z))'_y = \frac{-1}{2x - y + z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = (\ln(2x - y + z))'_z = \frac{1}{2x - y + z},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{2}{2x - y + z} \right)'_x = \frac{-4}{(2x - y + z)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \left(\frac{2}{2x - y + z} \right)'_y = \frac{2}{(2x - y + z)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \left(\frac{2}{2x - y + z} \right)'_z = \frac{-2}{(2x - y + z)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\frac{-1}{2x - y + z} \right)'_y = \frac{-1}{(2x - y + z)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \left(\frac{-1}{2x - y + z} \right)'_z = \frac{1}{(2x - y + z)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \left(\frac{1}{2x - y + z} \right)'_z = \frac{-1}{(2x - y + z)^2}.$$

Тепер скористаємось формулою (4.18), яка в розгорнутому виді при $n = 2$ буде такою:

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} dx dz + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} dy dz + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz^2.$$

Підставивши в цю формулу знайдені частинні похідні, дістанемо

$$d^2u = \frac{-4dx^2 + 4dxdy - 4dxdz - dy^2 + 2dydz - dz^2}{(2x - y + z)^2}.$$

У диференціалів вищих порядків функцій декількох змінних є одна істотна відмінність від диференціалів першого порядку, яка також притаманна і для диференціалів функцій однієї змінної.

Наведемо її з детальним обґрунтуванням.



Зуваження 4.4.

Відзначимо, що на відміну від диференціала першого порядку диференціали вищих порядків не мають властивості інваріантності.

Доведення. Переконаємось в цьому на прикладі диференціала другого порядку.

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякій відкритій області D , а $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ – функції, визначені на проміжку $\langle \alpha; \beta \rangle$, причому для всіх $t \in \langle \alpha; \beta \rangle$ точки $M(\varphi(t), \psi(t)) \in D$.

Припустимо, що функція $f(x, y)$ має неперервні частинні похідні в області D до другого порядку включно, а функції $\varphi(t)$, $\psi(t)$ мають неперервні похідні на проміжку $\langle \alpha; \beta \rangle$ до другого порядку включно. Отже, функція $f(x, y)$ має диференціали першого та другого порядків. Отже,

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy.$$

Тут dx та dy на відміну від розглянутого вище випадку не є сталими величинами, а функціями від t :

$$dx = \varphi'(t)dt, dy = \psi'(t)dt.$$

Тоді, відповідно до означення диференціала другого порядку, матимемо

$$\begin{aligned} d^2z &= d(f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy) = d(f'_x(x, y)dx) + d(f'_y(x, y)dy) = \\ &= d(f'_x(x, y))dx + d(f'_y(x, y))dy + f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy. \end{aligned}$$

Розкриваючи диференціали, отримуємо

$$\begin{aligned} d^2z &= f''_{xx}(x, y)dx^2 + 2f''_{xy}(x, y)dxdy + f''_{yy}(x, y)dy^2 + \\ &+ f'_x(x, y)\varphi''(t)dt^2 + f'_y(x, y)\psi''(t)dt^2. \end{aligned}$$

Як бачимо, на відміну від формули (4.14), тут з'явилися нові доданки:

$$f'_x(x, y)\varphi''(t)dt^2, f'_y(x, y)\psi''(t)dt^2.$$

Очевидно, ці доданки не завжди рівні нулю. Отже, форма диференціала другого порядку не зберігається. □

Формула Тейлора для функції двох змінних

У теорії функцій однієї дійсної змінної важливу роль відіграє формула Тейлора. Не менш важливе значення має вона і для функцій декількох змінних. Ми виведемо формулу Тейлора, розглядаючи для спрощення викладок функцію двох змінних.

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена і має неперервні частинні похідні до $(n + 1)$ -го порядку включно в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$. Візьмемо в цьому околі якусь точку $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ і сполучимо її з точкою M_0 відрізком прямої лінії. Рівняння цієї прямої як прямої, що проходить через дві точки M_0 та M , буде таким:

$$\frac{x - x_0}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{\Delta y} = t.$$

Звідси,

$$x = x_0 + t\Delta x, y = y_0 + t\Delta y. \quad (4.19)$$

Якщо в рівностях (4.19) взяти $t = 0$, то дістанемо координати точки M_0 , а якщо $t = 1$, то координати точки M . Тому можемо вважати, що t змінюється на відрізку $[0; 1]$, тобто $0 \leq t \leq 1$.

Функція $z = f(x, y)$ вздовж відрізка M_0 змінюватиметься як функція однієї змінної t на відрізку $t \in [0; 1]$:

$$F(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y). \quad (4.20)$$

Згідно припущення функція $z = f(x, y)$ визначена і має неперервні частинні похідні до $(n + 1)$ -го порядку включно в околі точки $M_0(x_0, y_0)$, якому належить відрізок M_0 . Тому складена функція $F(t)$ має на відрізку $[0; 1]$ неперервні похідні до $(n + 1)$ -го порядку включно. Отже, для функції $F(t)$ можна записати формулу Маклорена n -го порядку з залишковим членом в формі Лагранжа:

$$F(t) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!}t + \frac{F''(0)}{2!}t^2 + \dots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!}t^n + \frac{F^{(n+1)}(\theta t)}{(n+1)!}t^{n+1},$$

де $0 < \theta < 1$.

Поклавши тут $t = 1$, з врахуванням (4.20) дістанемо:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \frac{F'(0)}{1!} + \frac{F''(0)}{2!} + \dots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + \frac{F^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}. \quad (4.21)$$

Знайдемо тепер $F'(0), F''(0), \dots, F^{(n)}(0), F^{(n+1)}(0)$.

Диференціюючи (4.20) та враховуючи рівність (2.20) в теоремі 2.4, матимемо

$$\begin{aligned} F'(t) &= f'_x(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y) \cdot (x_0 + t\Delta x)' + f'_y(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y) \cdot (y_0 + t\Delta y)' = \\ &= f'_x(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y) \cdot \Delta x + f'_y(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y) \cdot \Delta y. \end{aligned}$$

Беручи до уваги (4.18), останню рівність запишемо так:

$$F'(t) = f'_x(x, y) \cdot \Delta x + f'_y(x, y) \cdot \Delta y = df(x, y).$$

Тепер знаходимо $F''(t)$, пам'ятаючи, що $f'_x(x, y)$ та $f'_y(x, y)$ є складеними функціями (x і y залежать від t за формулами (4.18)), а Δx і Δy — сталі числа:

$$F''(t) = f''_{xx}(x, y) \cdot \Delta x^2 + 2f''_{xy}(x, y) \cdot \Delta x \cdot \Delta y + f''_{yy}(x, y) \cdot \Delta y^2 = d^2 f(x, y).$$

Аналогічно знаходимо

$$F'''(t) = d^3 f(x, y),$$

$$F^{(4)}(t) = d^4 f(x, y) \text{ і т. д.,}$$

$$F^{(n+1)}(t) = d^{n+1} f(x, y).$$

Поклавши $t = 0$ в отриманих формулах для $F'(t)$, $F''(t)$, $\dots$, $F^{(n)}(t)$ і $t = \theta$ для $F^{(n+1)}(t)$, з врахуванням (4.18) матимемо: $F'(0) = df(x_0, y_0)$, $F''(0) = d^2 f(x_0, y_0)$, $\dots$, $F^{(n)}(0) = d^n f(x_0, y_0)$, $F^{(n+1)}(\theta) = d^{n+1} f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y)$.

Тоді формулу (4.21) можна записати у такому диференціальному вигляді:

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = & f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0, y_0) + \dots + \frac{1}{n!} d^n f(x_0, y_0) + \\ & + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Формула (4.22) називається формулою Тейлора n -го порядку для функції двох змінних з залишковим членом в формі Лагранжа в околі точки $M_0(x_0, y_0)$.



Зауваження 4.5.

Відзначимо, що якщо умови, накладені на функцію $f(x, y)$, послабити, а саме, вимагати, щоб вона мала неперервні частинні похідні до $(n-1)$ -го порядку включно в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$, а в самій точці M_0 була диференційовною до n -го порядку, то функцію $f(x, y)$ можна розвинути за формулою Тейлора n -го порядку з залишковим членом в формі Пеано:

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = & f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0, y_0) + \\ & + \dots + \frac{1}{n!} d^n f(x_0, y_0) + \gamma(\Delta x, \Delta y) \cdot (\Delta r)^n, \end{aligned} \quad (4.23)$$

де $\gamma(\Delta x, \Delta y)$ – нескінченно мала функція при $\Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \rightarrow 0$.

Як бачимо, формула Тейлора у вигляді (4.22) чи (4.23) зовні нічим не відрізняється від формули Тейлора для функції однієї змінної, записаної в диференціальній формі.

Зауважимо, що хоча ми записали формулу Тейлора для функції двох змінних, проте насправді співвідношення (4.22) та (4.23) справедливі для довільної числа змінних. Ця інваріантність відносно кількості змінних обумовлена наявністю у цих формулах замість частинних похідних повних диференціалів, які мають однаковий запис.

Проте в розгорнутому вигляді для функції двох змінних формула Тейлора буде значно складніша.

Запишемо, наприклад, формулу (4.23) для випадку $n = 2$, позначивши $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, тобто $x - x_0 = \Delta x$, $y - y_0 = \Delta y$:

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \\ & + \frac{1}{2} (f''_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \\ & + f''_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2) + \gamma(\Delta x, \Delta y) \cdot (\Delta r)^2. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Зазначимо, що ця формула містить два доданки першого степеня, бо є дві можливі частинні похідні першого порядку, і три доданки другого степеня, бо є три можливі частинні похідні другого порядку і т.д. Тобто формула Тейлора для функції двох змінних міститиме $(n+1)$ доданок n -го степеня. Зрозуміло, що для трьох змінних кількість цих

доданків буде ще більшою. Можна показати, що кількість різних похідних n -го порядку для функції p змінних визначається такою формулою

$$\bar{C}_p^n = C_{n+p-1}^n = \frac{(n+p-1)!}{n!(p-1)!}.$$



Зауваження 4.6.

Для функції трьох і більшої кількості змінних також можна записати формулу Тейлора при відповідних умовах на функцію. Так, наприклад, якщо функція $u = f(x, y, z)$ визначена і має неперервні частинні похідні до $(n+1)$ -го порядку включно в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то, аналогічно до (4.22), можна записати:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) = f(x_0, y_0, z_0) + df(x_0, y_0, z_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0, y_0, z_0) + \dots + \frac{1}{n!} d^n f(x_0, y_0, z_0) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y, z_0 + \theta \Delta z).$$

Розглянемо приклад на використання формули Тейлора.



Приклад 4.6.

Розвинути за формулою Тейлора другого порядку функцію $z(x, y) = \cos(xy) - x + 2y$ в околі точки $M_0(-1; \pi)$.



Розв'язання.

Задана функція має неперервні частинні похідні будь-якого порядку в усіх точках (x, y) площини. Знайдемо усі частинні похідні до другого порядку включно та обчислимо їхні значення, а також значення функції в заданій точці $M_0(-1; \pi)$.

$$f(-1; \pi) = 2\pi;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (\cos(xy) - x + 2y)'_x = -y \sin(xy) - 1, f'_x(-1; \pi) = -1;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (\cos(xy) - x + 2y)'_y = -x \sin(xy) + 2, f'_y(-1; \pi) = 2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (-y \sin(xy) - 1)'_x = -y^2 \cos(xy), f''_{xx}(-1; \pi) = \pi^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (-y \sin(xy) - 1)'_y = -\sin(xy) - xy \cos(xy), f''_{xy}(-1; \pi) = -\pi;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (-x \sin(xy) + 2)'_y = -x^2 \cos(xy), f''_{yy}(-1; \pi) = 1.$$

Тоді, підставивши $x_0 = -1, y_0 = \pi$ та обчислені значення частинних похідних в заданій точці, матимемо:

$$\cos(xy) - x + 2y = 2\pi - (x + 1) + 2(y - \pi) +$$

$$+\frac{1}{2}(\pi^2(x+1)^2 - 2\pi(x+1)(y-\pi) + (y-\pi)^2) + \gamma(\Delta x, \Delta y) \cdot (\Delta r)^2.$$

ТЕМА 5. ЕКСТРЕМУМИ ФУНКЦІЙ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ

Необхідні умови локального екстремуму функцій кількох змінних

Як і для функції однієї змінної, для функції декількох змінних вводять поняття екстремальної точки.

Нехай функція декількох змінних визначена в деякій області D , для якої точка M_0 внутрішня.



Означення 5.1.

Якщо існує проколотий окіл точки M_0 , який повністю міститься в області D , і для всіх точок M з цього проколотого околу значення функції в точці M менше (більше) за значення функції в точці M_0 , то точка M_0 називається точкою **локального максимуму (мінімуму)** заданої функції, а значення самої функції в точці M_0 називається **локальним максимумом (мінімумом)** функції.

Точки локального максимуму чи мінімуму називають **точками локального екстремуму**, а максимум чи мінімум — **локальним екстремумом** даної функції.

Надалі, з метою більшої зручності викладок, слово локальний опускатимемо.

Як і раніше, для простоти розглядатимемо функцію двох змінних, хоча більшість міркувань та означень наведених нижче майже без змін переносяться на більше число змінних.

Отже, відповідно до означення 5.1, точка $M_0(x_0, y_0)$, яка є внутрішньою для області $D \subset \mathbb{R}^2$ визначення функції $z = f(x, y)$, буде точкою **максимуму (мінімуму)** цієї функції, якщо знайдеться такий окіл $U_\delta(M_0) \subset D$, що для всіх точок $(x, y) \in U_\delta(M_0)$, відмінних від точки M_0 , виконується нерівність

$$f(x, y) < f(x_0, y_0) \quad (5.1)$$

$$(f(x, y) > f(x_0, y_0)) \quad (5.2)$$

Розглянемо декілька прикладів функцій з дослідженням на мінімум та максимум.

Зазначимо, що перехід у багатовимірний простір дає значно складнішу структуру точок максимуму та мінімуму функції. Зокрема, можна навести приклади функцій, в яких

точки локального екстремуму утворюють цілу криву.

? Приклад 5.1.

Для функції

$$z = 4x^2 + y^2 + 3, \quad (5.3)$$

визначеної в усіх точках площини, для довільної точки $(x, y) \neq (0; 0)$, як легко бачити, виконується нерівність

$$f(x, y) = 4x^2 + y^2 + 3 > 3 = f(0, 0),$$

отже, $M_0(0; 0)$ — точка мінімуму для заданої функції.

У наступному прикладі проведено дослідження функції двох змінних на максимум без використання поняття похідних.

? Приклад 5.2.

Оскільки для функції

$$z = 6 - |x + 2| - |y - 1|, \quad (5.4)$$

також визначеної в усій площині, для довільної точки $(x, y) \neq (-2; 1)$ має місце нерівність

$$f(x, y) < 6 = f(-2; 1),$$

то $M_0(-2; 1)$ — точка максимуму для функції (5.4).

Наступний приклад показує, що можливі випадки функцій, де відповідна точка не є ні точкою максимуму, ні точкою мінімуму.

? Приклад 5.3.

Для функції

$$z = x^2 - y^2, \quad (5.5)$$

визначеної в усіх точках площини, в будь-якому околі точки $M_0(0; 0)$ є точки виду $M_1(x, 0) \neq M_0(0; 0)$ і $M_2(0, y) \neq M_0(0; 0)$.

Оскільки

$$z(M_1) = f(x, 0) = x^2 > 0 = f(0, 0) > -y^2 = f(0, y) = z(M_2),$$

то точка $M_0(0; 0)$ не може бути ні точкою максимуму, ні точкою мінімуму для функції $z = x^2 - y^2$.

Виникає запитання, як знаходити екстремальні точки функції $z = f(x, y)$, якщо вони існують. Зрозуміло, що ці точки будуть серед точок, підозрілих на екстремум. Для знаходження таких точок використовують необхідні умови існування екстремуму функції.



Теорема 5.1.

Якщо точка $M_0(x_0, y_0)$ є точкою екстремуму для функції $z = f(x, y)$ і в цій точці існують частинні похідні $f'_x(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$, то вони дорівнюють нулю:

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0. \quad (5.6)$$

Доведення. Зафіксуємо в функції $z = f(x, y)$ змінну y , поклавши $y = y_0$. Тоді наша

функція перетвориться в функцію однієї змінної x :

$$z = f(x, y_0) = f_1(x).$$

Очевидно, для функції $f_1(x)$ точка $x = x_0$ є точкою екстремуму. Також, відповідно до умов теореми, ця функція в точці $x = x_0$ має похідну

$$f'_1(x_0) = f'_x(x_0, y_0).$$

Тоді, згідно необхідної умови екстремуму для функції однієї змінної, $f'_1(x_0) = 0$, звідки робимо висновок, що $f'_x(x_0, y_0) = 0$.

Аналогічно доводимо, що $f'_y(x_0, y_0) = 0$. Тим самим теорему доведено. $\square$



Означення 5.2.



Точка, в якій усі частинні похідні функції декількох змінних дорівнюють нулю, називається **стаціонарною точкою** даної функції.

Отже, стаціонарна точка може бути точкою екстремуму. Щоб знайти стаціонарні точки функції $z = f(x, y)$, потрібно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0, \\ f'_y(x, y) = 0. \end{cases} \quad (5.7)$$



Приклад 5.4.



Знайти стаціонарні точки функції $z = e^{-y}(x^2 - y)$.



Розв'язання.

Частинні похідні заданої функції дорівнюють: $f'_x(x, y) = (e^{-y}(x^2 - y))'_x = 2xe^{-y}$, $f'_y(x, y) = (e^{-y}(x^2 - y))'_y = e^{-y}(y - x^2 - 1)$.

Тоді система рівнянь (5.7) матиме вигляд:

$$\begin{cases} 2xe^{-y} = 0, \\ e^{-y}(y - x^2 - 1) = 0. \end{cases}$$

З першого рівняння легко отримуємо $x = 0$. Тоді з другого рівняння маємо $y = 1$.

Отже, для заданої функції точка $M_0(0; 1)$ є стаціонарною. Інших стаціонарних точок немає.

Як відомо, для функцій однієї змінної стаціонарна точка не обов'язково була точкою локального екстремуму цієї функції. Аналогічне явище спостерігається у випадку функцій декількох змінних.



Зауваження 5.1.

Не кожна стаціонарна точка для заданої функції є точкою екстремуму цієї функції, тобто необхідні умови екстремуму не є достатніми. Дійсно, як ми побачили в прикладі 5.1, точка $M_0(0; 0)$ не є точкою екстремуму для функції (5.5), хоча $f'_x(x, y) = 2x$, $f'_y(x, y) = -2y$, звідки $f'_x(0; 0) = 0$, $f'_y(0; 0) = 0$, тому точка $M_0(0; 0)$ є стаціонарною.

Достатні умови екстремуму

Розглянемо умови, які гарантують екстремум функції декількох змінних в заданій точці.



Теорема 5.2.

Нехай для функції $z = f(x, y)$ точка $M_0(x_0, y_0)$ є стаціонарною і в деякому околі цієї точки дана функція має неперервні частинні похідні до другого порядку включно.

Якщо

$$\Delta(x_0, y_0) = f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0,$$

то функція $z = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$ має екстремум, причому максимум при $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ і мінімум при $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$.

Якщо $\Delta(x_0, y_0) < 0$, то функція $z = f(x, y)$ в стаціонарній точці M_0 екстремуму не має.

Доведення. Оскільки функція $z = f(x, y)$ в околі стаціонарної точки M_0 має неперервні частинні похідні до другого порядку включно, то її можна розвинути за формулою Тейлора першого порядку з залишковим членом в формі Лагранжа:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \Delta y + \frac{1}{2} (f''_{xx}(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) \Delta x^2 + 2f''_{xy}(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) \Delta x \Delta y + f''_{yy}(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) \Delta y^2), \quad (5.8)$$

де $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $0 < \theta < 1$.

Оскільки частинні похідні другого порядку є неперервними функціями в околі точки $M_0(x_0, y_0)$, то

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) &= f''_{xx}(x_0, y_0) + \alpha, \\ f''_{xy}(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) &= f''_{xy}(x_0, y_0) + \beta, \\ f''_{yy}(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) &= f''_{yy}(x_0, y_0) + \gamma, \end{aligned} \quad (5.9)$$

де α, β, γ – функції від Δx та Δy , такі що

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \alpha = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \beta = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \gamma = 0. \quad (5.10)$$

Позначимо для зручності

$$f''_{xx}(x_0, y_0) = A, f''_{xy}(x_0, y_0) = B, f''_{yy}(x_0, y_0) = C.$$

Точка $M_0(x_0, y_0)$ є стаціонарною, тобто $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$, тому, враховуючи (5.9), рівність (5.8) можна записати так:

$$\Delta f(x_0, y_0) = \frac{1}{2} (A \Delta x^2 + 2B \Delta x \Delta y + C \Delta y^2 + \alpha \Delta x^2 + 2\beta \Delta x \Delta y + \gamma \Delta y^2), \quad (5.11)$$

де

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0) \quad (5.12)$$

– повний приріст функції $z = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$.

Нехай φ – кут, який утворює вектор $\overrightarrow{M_0M} = \Delta x \cdot \vec{i} + \Delta y \cdot \vec{j}$ з додатнім напрямком осі Ox , $|\overrightarrow{M_0M}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \rho$. Тоді $\Delta x = \rho \cos \varphi$, $\Delta y = \rho \sin \varphi$ і рівність (5.11) набуде такого вигляду:

$$\Delta f(x_0, y_0) = \frac{\rho^2}{2} (A \cos^2 \varphi + 2B \cos \varphi \sin \varphi + C \sin^2 \varphi + \alpha \cos^2 \varphi + 2\beta \cos \varphi \sin \varphi + \gamma \sin^2 \varphi). \quad (5.13)$$

Розглянемо тепер два випадки.

$$1. \Delta(x_0, y_0) = \Delta = AC - B^2 > 0.$$

Тоді обов'язково $A \neq 0$ і суму перших трьох доданків у співвідношенні (5.13) можемо записати так:

$$A \cos^2 \varphi + 2B \cos \varphi \sin \varphi + C \sin^2 \varphi = \frac{1}{A} ((A \cos \varphi + B \sin \varphi)^2 + (AC - B^2) \sin^2 \varphi). \quad (5.14)$$

Очевидно, що вираз у зовнішніх дужках є строго додатним при усіх значеннях $\varphi \in [0; 2\pi]$. Тому функція, що являє собою ліву частину рівності (5.14), набуває ненульових значень, які за знаком збігаються зі знаком числа A , для всіх $\varphi \in [0; 2\pi]$. Оскільки $|A \cos^2 \varphi + 2B \cos \varphi \sin \varphi + C \sin^2 \varphi|$ є функцією, неперервною на відрізку $[0; 2\pi]$, то вона на цьому відрізку набуває найменшого значення m , яке є, зрозуміло, додатним, тобто

$$|A \cos^2 \varphi + 2B \cos \varphi \sin \varphi + C \sin^2 \varphi| \geq m > 0. \quad (5.15)$$

Оскільки $\cos^2 \varphi$, $2 \cos \varphi \sin \varphi$, $\sin^2 \varphi$ — обмежені, то, враховуючи (5.10), маємо

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} (\alpha \cos^2 \varphi + 2\beta \cos \varphi \sin \varphi + \gamma \sin^2 \varphi) = 0, \quad (5.16)$$

тобто існує такий окіл $U_\delta(M_0)$, що для всіх точок $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in \overset{\circ}{U}_\delta(M_0)$ виконується нерівність

$$|\alpha \cos^2 \varphi + 2\beta \cos \varphi \sin \varphi + \gamma \sin^2 \varphi| < m. \quad (5.17)$$

Тоді з рівності (5.13), а також з нерівностей (5.15) та (5.17) видно, що для всіх точок $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in \overset{\circ}{U}_\delta(M_0)$ значення $\Delta f(x_0, y_0)$ збігається за знаком зі знаком числа $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$.

Отже, якщо $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$, то $\Delta f(x_0, y_0) < 0$ або

$$f(x, y) < f(x_0, y_0),$$

тобто в стаціонарній точці $M_0(x_0, y_0)$ функція $z = f(x, y)$ має максимум.

Якщо ж $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$, то $\Delta f(x_0, y_0) > 0$ або

$$f(x, y) > f(x_0, y_0),$$

тобто в стаціонарній точці $M_0(x_0, y_0)$ функція $z = f(x, y)$ має мінімум.

2. $\Delta < 0$.

Якщо число $A \neq 0$ то виконується рівність (5.14). Очевидно, при $\varphi = \varphi_1 = 0$ вираз у дужках співвідношення (5.14) дорівнює A^2 , тобто додатний.

Нехай φ_2 — один з коренів рівняння

$$A \cos \varphi + B \sin \varphi = 0.$$

Тоді обов'язково $\sin \varphi_2 \neq 0$, тому при $\varphi = \varphi_2$ вираз у дужках співвідношення (5.14) від'ємний, бо дорівнює $\Delta \sin^2 \varphi_2$.

На основі рівності (5.16) при досить малих значеннях $|\Delta x|$ та $|\Delta y|$ знак виразу в дужках правої частини рівності (5.13) співпадатиме зі знаком виразу (5.14). Отже, приріст на променях $\varphi = \varphi_1$ та $\varphi = \varphi_2$ матиме значення протилежних знаків. Тому точка $M_0(x_0, y_0)$ не може бути точкою екстремуму.

Якщо число $A = 0$, то

$$A \cos^2 \varphi + 2B \cos \varphi \sin \varphi + C \sin^2 \varphi = \sin \varphi (2B \cos \varphi + C \sin \varphi). \quad (5.18)$$

Оскільки $\Delta = AC - B^2 = -B^2 < 0$, то $B \neq 0$, тому можемо вибрати такий кут φ_1 , що $|C \sin \varphi_1| < 2|B \cos \varphi_1|$. Тоді на променях $\varphi = \varphi_1$ та $\varphi = -\varphi_1$ вираз (5.18), знаком якого при досить малих значеннях $|\Delta x|$ та $|\Delta y|$ визначається знак $\Delta f(x_0, y_0)$, матиме значення, протилежні за знаком. Отже, приріст $\Delta f(x_0, y_0)$ на променях $\varphi = \varphi_1$ та $\varphi = -\varphi_1$ матиме значення протилежних знаків, тому точка $M_0(x_0, y_0)$ не буде екстремальною.

Теорему доведено. □



Зауваження 5.2.

У випадку, коли $\Delta = 0$, теорема 5.2 не дає відповіді на питання, чи є стаціонарна точка $M_0(x_0, y_0)$ точкою екстремуму. Ми цей випадок не досліджуватимемо. Відзначимо тільки, що в точці M_0 може бути екстремум, а може і не бути.

З теорем 5.1 та 5.2 випливає таке правило дослідження функції двох змінних $z = f(x, y)$ на екстремум:

- 1) знаходимо стаціонарні точки цієї функції, розв'язуючи систему рівнянь (5.7);
- 2) для кожної стаціонарної точки обчислюємо число $\Delta = AC - B^2$.

Якщо в стаціонарній точці $\Delta > 0$, то ця точка є точкою екстремуму, причому точкою максимуму при $A < 0$ або точкою мінімуму при $A > 0$.

Якщо в стаціонарній точці $\Delta < 0$, то ця точка не є точкою екстремуму.

Розглянемо приклади.



Приклад 5.5.

Для функції $z = x^2 - y^2$, розглянутої в прикладі 5.1, точка $M_0(0; 0)$ не є точкою екстремуму, хоча вона є стаціонарною (зауваження 5.1).



Висновок.

Частинні похідні другого порядку дорівнюють:

$$f''_{xx}(x, y) = (2x)'_x = 2, f''_{xy}(x, y) = (2x)'_y = 0,$$

$$f''_{yy}(x, y) = (-2y)'_y = -2.$$

Отже, $\Delta = 2 \cdot (-2) - 0^2 = -4 < 0$ в усіх точках (x, y) площини, зокрема і в стаціонарній точці $M_0(0; 0)$. Отже, теорема 5.2 підтверджує, що ця стаціонарна точка не є екстремальною для заданої функції.

? Приклад 5.6.

Дослідити на екстремум функцію $z = e^{-y}(x^2 + y)$.



Розв'язання.

В прикладі 5.4 ми встановили, що задана функція має одну стаціонарну точку $M_0(0; 1)$. Знайдемо частинні похідні другого порядку в цій точці.

$$f''_{xx}(x, y) = (2xe^{-y})'_x = 2e^{-y}, A = f''_{xx}(0; 1) = 2e^{-1} = \frac{2}{e};$$

$$f''_{xy}(x, y) = (2xe^{-y})'_y = -2xe^{-y}, B = f''_{xy}(0; 1) = 0;$$

$$f''_{yy}(x, y) = (e^{-y}(y - x^2 - 1))'_y = e^{-y}(x^2 - y + 2), C = f''_{yy}(0; 1) = 2e^{-1} = \frac{2}{e}.$$

Тоді $\Delta = AC - B^2 = \frac{2}{e} \cdot \frac{2}{e} - 0^2 = \frac{4}{e^2} > 0$. Отже, точка $M_0(0; 1)$ є екстремальною для заданої функції, а саме точкою мінімуму, бо $f''_{xx}(0; 1) = \frac{2}{e} > 0$.

Цей мінімум дорівнює $f(0; 1) = \frac{1}{e}$.

Глобальні екстремуми функцій декількох змінних

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена і неперервна в обмеженій замкнутій області D . Тоді за теоремою 1.2 вона обмежена і досягає своїх найменшого та найбільшого значень, тобто існує хоча б одна точка $M_1(x_1, y_1) \in D$, в якій значення функції серед усіх інших значень є найменшим і існує хоча б одна точка $M_2(x_2, y_2) \in D$, в якій значення функції серед усіх інших значень є найбільшим. Ці точки ще називаються відповідно точками **глобального мінімуму** та **глобального максимуму**, а значення функції в цих точках — **глобальним мінімумом** та **глобальним максимумом**.

Зазначимо, що теорема 1.2 не дає способу знаходження точок $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$, тоді як методи визначення екстремуму функції в окремих випадках дають змогу в деяких випадках знайти її найменше та найбільше значення.

Припустимо, що функція $z = f(x, y)$, крім перелічених вище умов, має ще й скінченні частинні похідні першого порядку в усіх внутрішніх точках області D . Якщо точка $M_0(x_0, y_0)$, в якій функція набуває свого найменшого (найбільшого) значення, знаходиться всередині області D , то вона є точкою екстремуму даної функції, тобто виконуються необхідні умови (5.6) існування екстремуму. Проте функція $z = f(x, y)$ може набувати свого найменшого (найбільшого) значення в точках, які знаходяться на межі області.

Враховуючи вище сказане, дістаємо наступне правило.

Щоб знайти найменше (найбільше) значення функції $z = f(x, y)$, визначеної і неперервної в обмеженій замкнутій області D , потрібно:

1. знайти всі внутрішні точки області D , в яких функція може мати екстремум, і, якщо цих точок скінченне число, обчислити значення функції в цих точках;
2. знайти, якщо це можна, значення функції, які є найменшим та найбільшим серед усіх значень функції, яких вона набуває на межі даної області;
3. серед усіх обчислених в п. 1 та 2 значень функції вибрати найменше та найбільше числа. Вони і будуть найменшим та найбільшим значеннями функції в області D .

? Приклад 5.7.

Знайти найменше та найбільше значення функції

$$z = 2x^2 + 3xy - y^2 - 10x + y + 1 \quad (5.19)$$

в трикутнику, обмеженому прямими $x = 2$, $y = 3$, $3x + 2y = 6$.



Розв'язання.

Знайдемо спочатку стаціонарні точки даної функції. Координати кожної з таких точок є розв'язками системи рівнянь виду (5.7). Оскільки

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= (2x^2 + 3xy - y^2 - 10x + y + 1)'_x = 4x + 3y - 10, \\ f'_y(x, y) &= (2x^2 + 3xy - y^2 - 10x + y + 1)'_y = 3x - 2y + 1, \end{aligned}$$

то система виду (5.7) буде такою:

$$\begin{cases} 4x + 3y - 10 = 0, \\ 3x - 2y + 1 = 0. \end{cases}$$

Її розв'язок — $x = 1$, $y = 2$.

Отже, функція (5.19) має одну стаціонарну точку $M_0(1; 2)$, яка знаходиться всередині заданого трикутника (рис. 5.1). Обчислюємо значення функції в цій точці:

$$z(M_0) = f(1; 2) = -3.$$

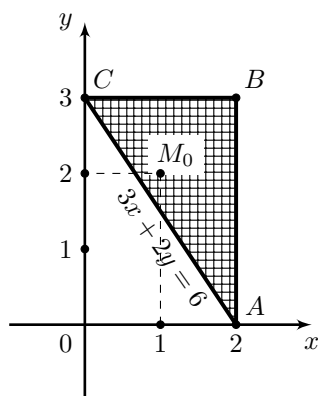


Рисунок 5.1 – Область до прикладу 5.7

Тепер досліджуємо нашу функцію на межі області, тобто на сторонах трикутника ABC .

- I. Візьмемо сторону AB . В цьому випадку $x = 2, 0 \leq y \leq 3$, тому задана функція (5.19) вироджується в функцію однієї змінної y , задану на відрізку $[0; 3]$:
 $f(2, y) = 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2y - y^2 - 10 \cdot 2 + y + 1 = 7y - y^2 - 11 = \varphi(y)$ Знаходимо точки, в яких функція $\varphi(y)$ може набувати найменше та найбільше значення і обчислюємо значення $\varphi(y)$ в цих точках.

$$\varphi'(y) = (7y - y^2 - 11)' = 7 - 2y = 0,$$

звідки $y = 3,5$. Ця точка не належить відрізку $[0; 3]$, тому обчислюємо значення функції $\varphi(y)$ тільки на кінцях відрізка $[0; 3]$:

$$\varphi(0) = 7 \cdot 0 - 0^2 - 11 = -11 = f(2; 0) = z(A),$$

$$\varphi(3) = 7 \cdot 3 - 3^2 - 11 = 1 = f(2; 3) = z(B).$$

- II. На стороні BC маємо $y = 3, 0 \leq x \leq 2$, отже функція (5.19) набуває вигляду

$$f(x; 3) = 2x^2 + 3x \cdot 3 - 3^2 - 10x + 3 + 1 = 2x^2 - x - 5 = \psi(x).$$

Тепер аналогічно до попереднього поступаємо з функцією $\psi(x)$ на відрізку $[0; 2]$.

$$\psi'(x) = (2x^2 - x - 5)' = 4x - 1 = 0,$$

звідки $x = \frac{1}{4}$. Ця точка знаходиться всередині відрізка $[0; 2]$. Тому обчислюємо

$$\psi\left(\frac{1}{4}\right) = 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} - 5 = -5,125 = f\left(\frac{1}{4}; 3\right),$$

а також

$$\psi(0) = 2 \cdot 0^2 - 0 - 5 = -5 = f(0; 3) = z(y).$$

$\psi(2) = z(B)$ уже обчислено вище.

- III. На стороні AC $3x + 2y = 6$, звідки $y = 3 - \frac{3}{2}x$. Отже, функція (5.19) виглядатиме так:

$$f\left(x; 3 - \frac{3}{2}x\right) = 2x^2 + 3x\left(3 - \frac{3}{2}x\right) - \left(3 - \frac{3}{2}x\right)^2 - 10x + \left(3 - \frac{3}{2}x\right) + 1 = -\frac{19}{4}x^2 + \frac{13}{2}x - 5 = \chi(x),$$

де x змінюється на відрізку $[0; 2]$. Оскільки на кінцях цього відрізка вище уже обчислено $\chi(0) = z(y), \chi(2) = z(A)$, то нам залишилось обчислити стаціонарні точки функції $\chi(x)$ на відрізку $[0; 2]$ та обчислити її значення в цих точках.

$$\chi'(x) = \left(-\frac{19}{4}x^2 + \frac{13}{2}x - 5\right)' = -\frac{19}{2}x + \frac{13}{2} = 0,$$

звідки $x = \frac{13}{19} \in [0; 2]$, тому обчислюємо

$$\chi\left(\frac{13}{19}\right) = -\frac{19}{4} \cdot \left(\frac{13}{19}\right)^2 + \frac{13}{2} \cdot \frac{13}{19} - 5 = \frac{127}{76} = f\left(\frac{13}{19}; \frac{75}{38}\right).$$

Тепер серед усіх обчислених значень функції (5.19) вибираємо найменше та найбільше. Вони і будуть шуканими її найменшим та найбільшим значеннями в заданій області.

Отже,

$$z_{\min} = f(2; 0) = -11, z_{\max} = f\left(\frac{13}{19}; \frac{75}{38}\right) = \frac{127}{76}.$$

Ми детально вивчили екстремум на прикладі функції двох змінних.



Зауваження 5.3.

Відзначимо, що значна частина міркувань залишається справедливою і для функцій більше ніж двох змінних. Зокрема, правило знаходження найменшого (найбільшого) значення функції залишається таким самим, як і для функції двох змінних. Проте достатні умови існування екстремуму функції $n > 2$ змінних значно складніші, ніж достатні умови для функції двох змінних.

Умовний екстремум

У попередніх пунктах цієї лекції ми розглянули екстремум функції, коли на незалежні змінні не накладалося ніяких додаткових умов. Але на практиці часто зустрічаються такі екстремальні задачі, коли на незалежні змінні накладаються ще додаткові умови.

Наприклад, для функції $z = f(x, y)$ треба знайти екстремум не в усій її області існування $D \subset \mathbb{R}^2$, а тільки в точках деякої кривої із цієї області

$$\varphi(x, y) = 0. \quad (5.20)$$

Такий екстремум називають **умовним** (розглянутий вище екстремум називають **безумовним**). Зауважимо, що якщо рівняння (5.20) допускає розв'язання відносно однієї зі змінних, то, підставивши це значення у функцію $z = f(x, y)$, матимемо безумовний екстремум для функції однієї змінної. Проте далеко не завжди це легко зробити.

Ми розглянемо метод дослідження функції на умовний екстремум, який не вимагає розв'язання рівнянь типу (5.20) чи системи таких рівнянь відносно деяких змінних — **метод невизначених множників Лагранжа**.

Не зменшуючи загальності, з'ясуємо суть цього метода на прикладі функції двох змінних.

Отже, нехай функція

$$z = f(x, y) \quad (5.21)$$

задана в деякій області $D \subset \mathbb{R}^2$, а на незалежні змінні x та y накладено умову (5.20). Зазначимо, що умов повинно бути менше, ніж незалежних змінних.

Рівняння (5.20) називається *рівнянням зв'язку*.



Означення 5.3.

Точка $M_0(x_0, y_0)$, координати якої задовольняють рівнянням зв'язку (5.22), називається *точкою умовного мінімуму (максимуму) функції* $z = f(x, y)$, якщо існує окіл цієї точки $U_\delta(M_0) \in D$, такий що для всіх точок $(x, y) \neq M_0(x_0, y_0)$ із цього околу, координати яких задовольняють рівнянню зв'язку (5.20), виконується нерівність

$$f(x, y) > f(x_0, y_0) \quad (f(x, y) < f(x_0, y_0))$$

Число $f(x_0, y_0)$ називається *умовним мінімумом (максимумом)*. Точка умовного мінімуму (максимуму) називається *точкою умовного екстремуму*, а число $f(x_0, y_0)$ - *умовним екстремумом*.

Виведемо необхідні умови того, щоб точка $M_0(x_0, y_0)$ була точкою умовного мінімуму (максимуму) функції $z = f(x, y)$.

Припустимо, що точка $M_0(x_0, y_0)$ є точкою умовного екстремуму і, крім того, виконуються умови:

1. функція $f(x, y)$ в $U_\delta(M_0)$ має неперервні частинні похідні першого порядку;
2. функція $\varphi(x, y)$ в $U_\delta(M_0)$ задовольняє умовам теореми 2.7 про існування неявної функції, заданої рівнянням (5.20).

Отже, згідно з припущенням 2 рівняння (5.20) задає в $U_\delta(M_0)$ функцію $y = \psi(x)$, яка в точці x_0 має похідну (розділ Тема 2)

$$\psi'(x_0) = -\frac{\varphi'_x(x_0, y_0)}{\varphi'_y(x_0, y_0)}. \quad (5.22)$$

Крім того, якщо значення $y = \psi(x)$ підставити в (5.21), то задача про умовний екстремум в точці $M_0(x_0, y_0)$ зводиться до задачі про безумовний екстремум для складеної функції однієї змінної

$$z = f(x, \psi(x)). \quad (5.23)$$

У цьому випадку похідна першого порядку від функції (5.23) в точці x_0 дорівнює нулю. За правилами диференціювання складеної функції (див. (2.24)) маємо:

$$\frac{dz}{dx} = f'_x(x, y) + f'_y(x, y) \cdot \psi'(x).$$

Поклавши в останній рівності $x = x_0$, з врахуванням (5.22) отримаємо

$$f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot \left(-\frac{\varphi'_x(x_0, y_0)}{\varphi'_y(x_0, y_0)} \right) = 0,$$

звідки

$$\frac{f'_x(x_0, y_0)}{\varphi'_x(x_0, y_0)} = \frac{f'_y(x_0, y_0)}{\varphi'_y(x_0, y_0)}.$$

Позначивши останні відношення через $-\lambda$ (знак мінус взято для зручності, а саме число λ може мати довільний знак), маємо

$$\frac{f'_x(x_0, y_0)}{\varphi'_x(x_0, y_0)} = \frac{f'_y(x_0, y_0)}{\varphi'_y(x_0, y_0)} = -\lambda,$$

тобто

$$f'_x(x_0, y_0) + \lambda \varphi'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) + \lambda \varphi'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Враховуючи ще й (5.21), бачимо, що координати точок умовного екстремуму повинні задовольняти систему рівнянь

$$\begin{cases} f'_x(x, y) + \lambda \varphi'_x(x, y) = 0, \\ f'_y(x, y) + \lambda \varphi'_y(x, y) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases} \quad (5.24)$$

Аналізуючи цю систему, помічаємо, що її рівняння є необхідними умовами екстремуму функції

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y). \quad (5.25)$$

Функція (5.25) називається **функцією Лагранжа**, а число λ – **множителем Лагранжа**.

Як уже сказано, умови (5.24) є лише необхідними. Вони дають змогу знайти стаціонарні точки умовного екстремуму. Враховуючи формулу Тейлора у вигляді (4.24), характер умовного екстремуму (достатні умови) можна встановити за знаком диференціала другого порядку функції Лагранжа в стаціонарній точці

$$d^2 F(x_0, y_0, \lambda_0) = F''_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0) dx^2 + 2F''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) dx dy + F''_{yy}(x_0, y_0, \lambda_0) dy^2,$$

причому dx та dy зв'язані співвідношенням

$$\varphi'_x(x_0, y_0) dx + \varphi'_y(x_0, y_0) dy = 0. \quad (5.26)$$

А саме, якщо $d^2 F(x_0, y_0, \lambda_0) > 0$ ($d^2 F(x_0, y_0, \lambda_0) < 0$), то точка $M_0(x_0, y_0)$ є точкою умовного мінімуму (максимуму).

? Приклад 5.8.

Знайти екстремуми функції $z = 2x - 3y$ при умові $x^2 + y^2 = 13$.



Розв'язання.

Очевидно, рівняння зв'язку буде таким:

$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 13 = 0.$$

Отже, функція Лагранжа (5.25) матиме вигляд

$$F(x, y, \lambda) = 2x - 3y + \lambda (x^2 + y^2 - 13).$$

Оскільки

$$\begin{aligned} F'_x(x, y, \lambda) &= (2x - 3y + \lambda (x^2 + y^2 - 13))'_x = 2 + 2\lambda x, \\ F'_y(x, y, \lambda) &= (2x - 3y + \lambda (x^2 + y^2 - 13))'_y = -3 + 2\lambda y, \\ F'_\lambda(x, y, \lambda) &= (2x - 3y + \lambda (x^2 + y^2 - 13))'_\lambda = x^2 + y^2 - 13, \end{aligned}$$

то система рівнянь (5.24) виглядатиме так:

$$\begin{cases} 2 + 2\lambda x = 0, \\ -3 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 - 13 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо два розв'язки: $x_1 = 2, y_1 = -3, \lambda_1 = -\frac{1}{2};$
 $x_2 = -2, y_2 = 3, \lambda_2 = \frac{1}{2}.$

Таким чином, точками умовного екстремуму можуть бути точки $M_1(2; -3)$ та $M_2(-2; 3)$. Перевіримо, чи це так, знайшовши для кожної з точок $d^2 F$.

Оскільки

$$\begin{aligned} F''_{xx}(x, y\lambda) &= (2 + 2\lambda x)'_x = 2\lambda, \\ F''_{xy}(x, y\lambda) &= (2 + 2\lambda x)'_y = 0, \\ F''_{yy}(x, y\lambda) &= (-3 + 2\lambda y)'_y = 2\lambda, \end{aligned}$$

то

$$d^2 F(x, y, \lambda) = 2\lambda dx^2 + 2\lambda dy^2 = 2\lambda (dx^2 + dy^2).$$

Отже, для точки $M_1(2; -3)$ матимемо

$$d^2 F\left(2; -3; -\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) (dx^2 + dy^2) = -(dx^2 + dy^2) < 0,$$

тому $M_1(2; -3)$ є точкою умовного максимуму, а для точки $M_2(-2; 3)$ матимемо

$$d^2 F\left(-2; 3; \frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} (dx^2 + dy^2) = dx^2 + dy^2 > 0,$$

тому $M_2(-2; 3)$ є точкою умовного мінімуму для заданої функції. При цьому

$$z_{\max} = f(2; -3) = 13, z_{\min} = f(-2; 3) = -13.$$



Зауваження 5.4.

У щойно розглянутому прикладі не було потреби знаходити співвідношення (5.26) між dx та dy , так як ми і без цього чітко встановили знак d^2F для кожної з точок M_1 та M_2 .



Зауваження 5.5.

Розглянутий метод невизначених множників Лагранжа можна поширити на дослідження функції довільного числа змінних на умовний екстремум. Зокрема, для функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$ з рівняннями зв'язку $\varphi(x, y, z) = 0$, $\psi(x, y, z) = 0$ функція Лагранжа буде такою:

$$\Phi(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = f(x, y, z) + \lambda_1 \varphi(x, y, z) + \lambda_2 \psi(x, y, z).$$

Тому стаціонарні точки умовного екстремуму потрібно знаходити із системи п'яти рівнянь з п'ятьма невідомими

$$\begin{cases} \varphi(x, y, z) = 0, \\ \psi(x, y, z) = 0, \\ f'_x(x, y, z) + \lambda_1 \varphi'_x(x, y, z) + \lambda_2 \psi'_x(x, y, z) = 0, \\ f'_y(x, y, z) + \lambda_1 \varphi'_y(x, y, z) + \lambda_2 \psi'_y(x, y, z) = 0, \\ f'_z(x, y, z) + \lambda_1 \varphi'_z(x, y, z) + \lambda_2 \psi'_z(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

а достатні умови існування умовного екстремуму в цих точках можна визначити за знаком диференціала $d^2\Phi$.

Практична частина

ЗРАЗОК РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ПРАКТИЧНИХ ЗАВДАНЬ

На практичних заняттях студентам необхідно виробити навички розв'язування типових задач з вищої математики. Нижче наведено детальний хід розв'язування задач, подібні до яких також пропонуються студентам в якості розрахункової графічної роботи.

Задача 1. Знайти та побудувати область визначення функції $z = \frac{\ln(x^2+y^2-1)}{\sqrt{y-x^2}}$.



Розв'язання.

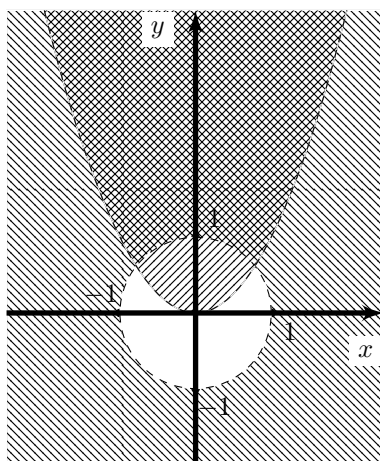


Рисунок 5.2 – Область визначення $z = \frac{\ln(x^2+y^2-1)}{\sqrt{y-x^2}}$

Область визначення D даної функції визначається з системи нерівностей

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 > 0, \\ y - x^2 > 0. \end{cases}$$

Нерівність $x^2 + y^2 > 1$ задовольняють точки, що лежать зовні кола з центром в точці $(0; 0)$ радіуса $r = 1$, а нерівність $y > x^2$ – точки, що лежать всередині параболи.

Отже, областю визначення даної функції є: частина площини між колом $x^2 +$

$y^2 = 1$ та параболою $y = x^2$ всередині параболі з вилученням точок параболі і кола (рис. 5.2).

Задача 2. Побудувати лінії рівня функції $z = |x| + |y|$.



Розв'язання.

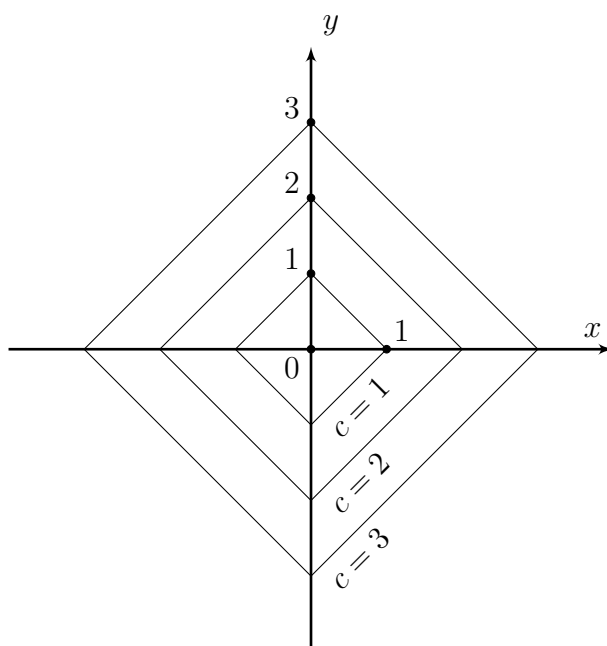


Рисунок 5.3 – Лінії рівня $z = |x| + |y|$

Лінії рівня зображаються як множина точок, що задовольняти рівняння виду $|x| + |y| = c$, де c – довільне фіксоване дійсне число. Оскільки $|x| \geq 0$, $|y| \geq 0$, то в якості значень c будемо брати невід'ємні числа.

Нехай $c = 0$. Тоді $|x| + |y| = 0 \Leftrightarrow x = 0, y = 0$, тобто отримали одну точку $O(0, 0)$ як лінію рівня нашої функції при $c = 0$.

Нехай $c = 1$. Тоді $|x| + |y| = 1$. Припустимо, що $x \geq 0, y \geq 0$, тобто що значення (x, y) лежать у першій чверті. Тоді отримаємо рівняння прямої $x + y = 1$. У нашому випадку це буде відрізок прямої $x + y = 1$ між точками $(1, 0)$ та $(0, 1)$ у першій чверті. Оскільки функція $z = |x| + |y|$ є парною по x та y , то решту точок, які задовольняють рівність $|x| + |y| = 1$, отримуються симетрією згаданого відрізка відносно осей Ox, Oy . В результаті отримаємо квадрат з діагоналями рівними 2 та розміщеними на осях координат.

Легко бачити, що аналогічні міркуванням повторюються для будь-якого $c > 0$. Отже, лініями рівня функції $z = |x| + |y|$ буде множина квадратів, діагоналі яких перетинаються у початку координат та лежать на осях координат (рис. 5.3).

Задача 3. Знайти повний диференціал заданої функції $z = \ln(2\sqrt{y} + 4x)$.



З'ясування.

Обчислимо частинні похідні першого порядку для заданої функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{y} + 4x} \cdot (2\sqrt{y} + 4x)'_x = \frac{1}{2\sqrt{y} + 4x} \cdot 4 = \frac{2}{\sqrt{y} + 2x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y} + 4x} \cdot (2\sqrt{y} + 4x)'_y = \frac{1}{2\sqrt{y} + 4x} \cdot \frac{2}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{y}(2\sqrt{y} + 4x)}.$$

Підставивши знайдені частинні похідні для заданої функції в (2.11), отримаємо

$$dz = \frac{2}{\sqrt{y} + 2x} dx + \frac{1}{\sqrt{y}(2\sqrt{y} + 4x)} dy.$$

Задача 4. Задана функція $z = e^{xy}$. Перевірити, чи задовольняє ця функція заданому рівнянню $x^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$; переконатись також, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.



З'ясування.

Знайдемо спочатку частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (e^{xy})'_x = y \cdot e^{xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = (e^{xy})'_y = x \cdot e^{xy}.$$

Тоді обчислимо частинні похідні другого порядку:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= (y \cdot e^{xy})'_x = y^2 \cdot e^{xy}, & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= (x \cdot e^{xy})'_y = x^2 \cdot e^{xy}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= (y \cdot e^{xy})'_y = (1 + xy) \cdot e^{xy}, & \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= (x \cdot e^{xy})'_x = (1 + xy) \cdot e^{xy}. \end{aligned}$$

Підставимо знайдені частинні похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ в задане рівняння, отримаємо $x^2 y^2 \cdot e^{xy} - y^2 x^2 \cdot e^{xy} = 0$, тобто $0 \equiv 0$.

Отже, задана функція задовольняє заданому рівнянню.

Бачимо, що мішані частинні похідні другого порядку рівні між собою, тобто $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (1 + xy) \cdot e^{xy}$.

Задача 5. Задані функція $z = f(x, y)$, точка $A(x_0, y_0)$ і вектор $\vec{a}$. Знайти: а) $\text{grad } z$ в точці A ; б) похідну функції в точці A за напрямом вектора $\vec{a}$.

$$z = \arcsin\left(\frac{x}{y^2}\right), \quad A(3; 3), \quad \vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}.$$



З'ясування.

$$\text{а) Відповідно до (3.15) маємо: } \text{grad } z = \frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j}.$$

Знайдемо спочатку частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{x}{y^2})^2}} \cdot \left(\frac{x}{y^2}\right)'_x = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{y^4}}} \cdot \frac{1}{y^2} = \frac{1}{\sqrt{y^4 - x^2}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{x}{y^2})^2}} \cdot \left(\frac{x}{y^2}\right)'_y = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{y^4}}} \cdot \left(-\frac{2x}{y^3}\right) = -\frac{2x}{y\sqrt{y^4 - x^2}}.$$

Тоді $\text{grad } z = \frac{1}{\sqrt{y^4 - x^2}} \vec{i} - \frac{2x}{y\sqrt{y^4 - x^2}} \vec{j}$.

Знайдемо градієнт поля в заданій точці:

$$\text{grad } z(A) = \frac{1}{\sqrt{3^4 - 3^2}} \vec{i} - \frac{2 \cdot 3}{3\sqrt{3^4 - 3^2}} \vec{j} = \frac{1}{6\sqrt{2}} \vec{i} - \frac{1}{3\sqrt{2}} \vec{j}.$$

б) Відповідно до (3.10) маємо: $\frac{\partial z(A)}{\partial l} = \frac{\partial z(A)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z(A)}{\partial y} \cos \beta$.

Частинні похідні та їхні значення в точці A знайдено в пункті а).

Довжина вектора $\vec{a}$ дорівнює: $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$.

Отже, напрямні косинуси будуть такими:

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \frac{2}{\sqrt{13}}, \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} = -\frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Знаходимо шукану похідну функції в точці A за напрямом вектора $\vec{a}$:

$$\frac{\partial z(A)}{\partial l} = \frac{1}{6\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} + \left(-\frac{1}{3\sqrt{2}}\right) \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{13}}\right) = \frac{4}{3\sqrt{26}}.$$

Задача 6. В пункті а) знайти $\frac{dz}{dt}$; в пункті б) знайти $\frac{dz}{dx}$; в пункті в) знайти $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$.

а) $z = \arccos(x - y)$, де $x = 4t^3$, $y = 3t$;

б) $z = \arcsin \frac{y}{x+1}$, де $y = \sqrt{1 - x^2}$;

в) $z = x^3 y^3$, де $x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2$.



Розв'язання.

а) Скориставшись формулою (2.22), маємо:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= (\arccos(x - y))'_x \cdot (4t^3)' + (\arccos(x - y))'_y \cdot (3t)' = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 - (x - y)^2}} \cdot 12t^2 + \frac{1}{\sqrt{1 - (x - y)^2}} \cdot 3 = \frac{-12t^2 + 3}{\sqrt{1 - (4t^3 - 3t)^2}}. \end{aligned}$$

б) Скориставшись формулою (2.24), маємо:

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx} &= \left(\arcsin \frac{y}{x+1} \right)'_x + \left(\arcsin \frac{y}{x+1} \right)'_y \cdot (\sqrt{1-x^2})' = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{x+1}\right)^2}} \cdot \left(-\frac{y}{(x+1)^2} \right) + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{x+1}\right)^2}} \cdot \frac{1}{x+1} \cdot \left(-\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2 - y^2}} \cdot \left(-\frac{y}{x+1} \right) + \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2 - y^2}} \cdot \left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right) = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2 - y^2}} \cdot \left(\frac{y}{x+1} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right) = -\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2 - 1 + x^2}} \times \\ &\times \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x+1} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2x^2 + 2x}} \cdot \frac{1+x}{(x+1)\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2x(x+1)(1-x^2)}}.\end{aligned}$$

в) Використовуючи формули (2.23), знаходимо

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= (x^3 y^3)'_x \cdot (u^2 + v^2)'_u + (x^3 y^3)'_y \cdot (u^2 - v^2)'_u = 3x^2 y^3 \cdot 2u + 3x^3 y^2 \cdot 2u = \\ &= x^2 y^2 (x+y) u = 6(u^2 + v^2)^2 (u^2 - v^2)^2 (u^2 + v^2 + u^2 - v^2) u = 12u^3 (u^4 - v^4)^2, \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= (x^3 y^3)'_x \cdot (u^2 + v^2)'_v + (x^3 y^3)'_y \cdot (u^2 - v^2)'_v = 3x^2 y^3 \cdot 2v - 3x^3 y^2 \cdot 2v = \\ &= 6x^2 y^2 (y-x) v = 6(u^2 + v^2)^2 (u^2 - v^2)^2 (u^2 - v^2 - u^2 - v^2) v = -12v^3 (u^4 - v^4)^2.\end{aligned}$$

Задача 7. В пункті а) знайти похідну $\frac{dy}{dx}$ функції, заданої неявно; в пункті б) знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції, заданої неявно.

а) $y \sin x + \cos(x-y) = 0$; б) $x^2 z - \arcsin(yz) = 0$.



Розв'язання.

а) В нашому випадку

$$F(x, y) = y \sin x + \cos(x-y),$$

$$F'_x(x, y) = y \cos x - \sin(x-y) \quad F'_y(x, y) = \sin x + \sin(x-y).$$

Отже, відповідно до формули (2.28), матимемо

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y \cos x - \sin(x-y)}{\sin x + \sin(x-y)} = \frac{\sin(x-y) - y \cos x}{\sin x + \sin(x-y)}.$$

б) В нашому випадку маємо

$$F(x, y, z) = x^2 z - \arcsin(yz),$$

$$F'_x(x, y, z) = 2xz, \quad F'_y(x, y, z) = -\frac{z}{\sqrt{1-(yz)^2}}, \quad F'_z(x, y, z) = x^2 - \frac{y}{\sqrt{1-(yz)^2}}.$$

Отже, відповідно до формул (2.30), знаходимо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xz}{x^2 - \frac{y}{\sqrt{1-(yz)^2}}} = -\frac{2xz\sqrt{1-(yz)^2}}{x^2\sqrt{1-(yz)^2} - y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{\sqrt{1-(yz)^2} \left(x^2 - \frac{y}{\sqrt{1-(yz)^2}} \right)} = \frac{z}{x^2\sqrt{1-(yz)^2} - y}.$$

Задача 8. Скласти рівняння дотичної площини та рівняння нормалі до заданої поверхні $3x^2 - 6y^2 + 4z^2 - xy + xz - yz - 9 = 0$ у вказаній точці $M(1; 4; 6)$.



Розв'язання.

У нашому випадку маємо

$$F(x, y, z) = 3x^2 - 6y^2 + 4z^2 - xy + xz - yz - 9,$$

$$F'_x = 6x - y + z, \quad F'_y = -12y - x - z, \quad F'_z = 8z + x - y.$$

$$\text{Тому } F'_x(M) = 8, \quad F'_y(M) = -55, \quad F'_z(M) = 45.$$

Отже, скориставшись рівняннями (3.5) та (3.6), шукані рівняння дотичної площини та нормалі матимуть вигляд:

$$8(x - 1) - 55(y - 4) + 45(z - 6) = 0,$$

або

$$8x - 55y + 45z - 58 = 0 - \text{рівняння дотичної площини};$$

$$\frac{x - 1}{8} = \frac{y - 4}{-55} = \frac{z - 6}{45} - \text{рівняння нормалі}.$$

Задача 9. Дослідити на екстремум функцію $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$.



Розв'язання.

Частинні похідні заданої функції дорівнюють:

$$f'_x(x, y) = (2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2)'_x = 6x^2 + y^2 + 10x,$$

$$f'_y(x, y) = (2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2)'_y = 2xy + 2y.$$

Тоді система рівнянь (5.7) матиме вигляд:

$$\begin{cases} 6x^2 + y^2 + 10x = 0, \\ 2xy + 2y = 0. \end{cases}$$

З другого рівняння легко отримуємо $y = 0$ або $x = -1$. Тоді підставляючи

знайдені значення в перше рівняння маємо, що при $y = 0 : x = 0$ або $x = -\frac{5}{3}$, а при $x = -1 : y = -2$ або $y = 2$.

Отже, для заданої функції точки $M_1(0; 0)$, $M_2(-\frac{5}{3}; 0)$, $M_3(-1; 2)$, $M_4(-1; -2)$ є стаціонарними.

Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$f''_{xx}(x, y) = (6x^2 + y^2 + 10x)'_x = 12x + 10,$$

$$f''_{xy}(x, y) = (6x^2 + y^2 + 10x)'_y = 2y,$$

$$f''_{yy}(x, y) = (2xy + 2y)'_y = 2x + 2.$$

Для точки $M_1(0; 0)$ матимемо

$$A = f''_{xx}(0; 0) = 10, \quad B = f''_{xy}(0; 0) = 0, \quad C = f''_{yy}(0; 0) = 2.$$

$$\text{Тоді } \Delta = AC - B^2 = 10 \cdot 2 - 0^2 = 20 > 0.$$

Отже, точка $M_1(0; 0)$ є екстремальною для заданої функції, а саме точкою мінімуму, бо $f''_{xx}(0; 0) = 10 > 0$.

Для точки $M_2(-\frac{5}{3}; 0)$ матимемо

$$A = f''_{xx}\left(-\frac{5}{3}; 0\right) = -10, \quad B = f''_{xy}\left(-\frac{5}{3}; 0\right) = 0, \quad C = f''_{yy}\left(-\frac{5}{3}; 0\right) = -\frac{4}{3}.$$

$$\text{Тоді } \Delta = AC - B^2 = (-10) \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - 0^2 = \frac{40}{3} > 0.$$

Отже, точка $M_2(-\frac{5}{3}; 0)$ є екстремальною для заданої функції, а саме точкою максимуму, бо $f''_{xx}(-\frac{5}{3}; 0) = -10 < 0$.

Для точки $M_3(-1; 2)$ матимемо

$$A = f''_{xx}(-1; 2) = -2, \quad B = f''_{xy}(-1; 2) = 4, \quad C = f''_{yy}(-1; 2) = 0.$$

$$\text{Тоді } \Delta = AC - B^2 = (-2) \cdot 0 - 4^2 = -16 < 0.$$

Отже, точка $M_3(-1; 2)$ не є екстремальною для заданої функції.

Для точки $M_4(-1; -2)$ матимемо

$$A = f''_{xx}(-1; -2) = -2, \quad B = f''_{xy}(-1; -2) = -4, \quad C = f''_{yy}(-1; -2) = 0.$$

$$\text{Тоді } \Delta = AC - B^2 = (-2) \cdot 0 - (-4)^2 = -16 < 0.$$

Отже, точка $M_4(-1; -2)$ не є екстремальною для заданої функції.

Отже,

$$z_{\max} = f\left(-\frac{5}{3}; 0\right) = \frac{125}{27}, \quad z_{\min} = f(0; 0) = 0.$$

Задача 10. Знайти умовні екстремуми функції $u = x - 2y + z$ за умови $x + y^2 - z^2 = 1$.



Розв'язання.

Очевидно, рівняння зв'язку буде таким:

$$\varphi(x, y, z) = x + y^2 - z^2 - 1 = 0.$$

Отже, функція Лагранжа (5.25) матиме вигляд

$$F(x, y, z, \lambda) = x - 2y + z + \lambda(x + y^2 - z^2 - 1).$$

Оскільки

$$\begin{aligned} F'_x(x, y, z, \lambda) &= (x - 2y + z + \lambda(x + y^2 - z^2 - 1))'_x = 1 + \lambda, \\ F'_y(x, y, z, \lambda) &= (x - 2y + z + \lambda(x + y^2 - z^2 - 1))'_y = -2 + 2\lambda y, \\ F'_z(x, y, z, \lambda) &= (x - 2y + z + \lambda(x + y^2 - z^2 - 1))'_z = 1 - 2\lambda z, \\ F'_\lambda(x, y, z, \lambda) &= (x - 2y + z + \lambda(x + y^2 - z^2 - 1))'_\lambda = x + y^2 - z^2 - 1, \end{aligned}$$

то система рівнянь (5.24) виглядатиме так:

$$\begin{cases} 1 + \lambda = 0, \\ -2 + 2\lambda y = 0, \\ 1 - 2\lambda z = 0, \\ x + y^2 - z^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо її розв'язок: $x = \frac{1}{4}$, $y = -1$, $z = -\frac{1}{2}$, $\lambda = -1$.

Таким чином, точкою умовного екстремуму може бути точка $M(\frac{1}{4}; -1; -\frac{1}{2})$. Перевіримо, чи це так, знайшовши $d^2 F$.

Оскільки

$$\begin{aligned} F''_{xx}(x, y, z, \lambda) &= (1 + \lambda)'_x = 0, & F''_{xy}(x, y, z, \lambda) &= (1 + \lambda)'_y = 0, \\ F''_{yy}(x, y, z, \lambda) &= (-2 + 2\lambda y)'_y = 2\lambda, & F''_{xz}(x, y, z, \lambda) &= (1 + \lambda)'_z = 0, \\ F''_{zz}(x, y, z, \lambda) &= (1 - 2\lambda z)'_z = -2\lambda, & F''_{yz}(x, y, z, \lambda) &= (-2 + 2\lambda y)'_z = 0, \end{aligned}$$

то

$$d^2 F(x, y, z, \lambda) = 2\lambda dy^2 - 2\lambda dz^2 = 2\lambda(dy^2 - dz^2).$$

Отже, для точки $M(\frac{1}{4}; -1; -\frac{1}{2})$ матимемо

$$d^2 F\left(\frac{1}{4}; -1; -\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot (-1)(dy^2 - dz^2) = -2(dy^2 - dz^2).$$

Для встановлення знаку диференціала слід врахувати таку умову

$$d\varphi\left(\frac{1}{4}; -1; -\frac{1}{2}\right) = d(x + y^2 - z^2 - 1)\Big|_{(\frac{1}{4}; -1; -\frac{1}{2})} =$$

$$= dx + 2ydy - 2zdz \Big|_{(\frac{1}{4}; -1; -\frac{1}{2})} = dx - 2dy + dz = 0.$$

Звідси, $dy = \frac{1}{2}(dx + dz)$. Підставимо це співвідношення у вираз для $d^2F(\frac{1}{4}; -1; -\frac{1}{2})$:

$$\begin{aligned} d^2F\left(\frac{1}{4}; -1; -\frac{1}{2}\right) &= -2\left(\frac{1}{4}(dx + dz)^2 - dz^2\right) = -2\left(\frac{dx^2}{4} + \frac{dxdz}{2} - \frac{3}{4}dz^2\right) = \\ &= -\frac{1}{2}(dx^2 + 2dxdz - 3dz^2). \end{aligned}$$

Щоб визначити знак отриманого виразу, винесемо dz^2 за дужки. Тоді отримаємо квадратичний тричлен відносно $\frac{dx}{dz}$:

$$d^2F\left(\frac{1}{4}; -1; -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}dz^2\left(\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + 2\frac{dx}{dz} - 3\right).$$

Розв'язавши відповідне квадратне рівняння $t^2 + 2t - 3 = 0$, отримаємо, що його коренями є $t_1 = 1$, $t_2 = -3$. Записавши відповідний квадратичний тричлен у вигляді добутку двочленів, дістанемо:

$$d^2F\left(\frac{1}{4}; -1; -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}(dx - dz)(dx + 3dz).$$

Отримали вираз, який в залежності від співвідношень між dz та dx може набувати як додатних, так і від'ємних значень. А саме при $dx > dz > 0$ $d^2F < 0$, а при $0 < dx < dz$ і $dz > 0$ $d^2F > 0$. Отже, вираз для другого диференціалу не зберігає знаку у точці $(\frac{1}{4}; -1; -\frac{1}{2})$, тому в цій точці немає умовного екстремуму.

Задача 11. Знайти найменше та найбільше значення функції $z = 0,5x^2 - xy$ в обмеженій замкненій області $D: y = 8, y = 2x^2$.



Розв'язання.

Знайдемо спочатку стаціонарні точки даної функції. Координати кожної з таких точок є розв'язками системи рівнянь виду (5.7). Оскільки

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= (0,5x^2 - xy)'_x = x - y, \\ f'_y(x, y) &= (0,5x^2 - xy)'_y = -x, \end{aligned}$$

то система виду (5.7) буде такою:

$$\begin{cases} x - y = 0, \\ -x = 0. \end{cases}$$

Її розв'язок: $x = 0, y = 0$.

Отже, функція має одну стаціонарну точку $M_0(0; 0)$, яка знаходиться на па-

раболі (рис. 5.4). Обчислюємо значення функції в цій точці:

$$z(M_0) = f(0; 0) = 0.$$

Тепер досліджуємо нашу функцію на межі області.

I. При $y = 8$ маємо $z = 0,5x^2 - 8x$, $-2 \leq x \leq 2$.

Задана функція вироджується в функцію однієї змінної x , задану на відрізку $[-2; 2]$. Знайдемо значення цієї функції в стаціонарній точці і на кінцях відрізка.

$$z' = (0,5x^2 - 8x)' = x - 8, \quad x - 8 = 0,$$

звідки $x = 8$. Ця точка не належить відрізку $[-2; 2]$, тому обчислюємо значення функції тільки на кінцях відрізка:

$$z(A) = f(-2; 8) = 0,5(-2)^2 - 8 \cdot (-2) = 18,$$

$$z(B) = f(2; 8) = 0,5(2)^2 - 8 \cdot 2 = -14.$$

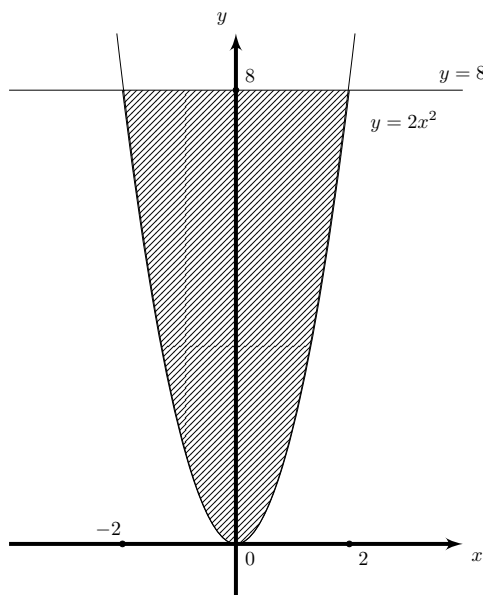


Рисунок 5.4 – Область D

II. При $y = 2x^2$ маємо $z = 0,5x^2 - 2x^3$, $-2 \leq x \leq 2$.

Задана функція вироджується в функцію однієї змінної x , задану на відрізку $[-2; 2]$. Знайдемо значення цієї функції в стаціонарній точці і на кінцях відрізка. Обчислимо похідну.

$$z' = (0,5x^2 - 2x^3)' = x - 6x^2, \quad x - 6x^2 = 0,$$

звідки $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{6}$. Ці точки знаходяться всередині відрізка $[-2; 2]$, тому обчислюємо значення функції в цих точках і на кінцях відрізка:

$$z(A) = f(-2; 8) = 0,5(-2)^2 - 8 \cdot (-2) = 18,$$

$$z(B) = f(2; 8) = 0,5(2)^2 - 8 \cdot 2 = -14.$$

$$z(C) = f(0; 0) = 0,5(0)^2 - 0 \cdot 0 = 0,$$

$$z(D) = f\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{18}\right) = 0,5 \left(\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{18} = \frac{1}{216}.$$

Тепер серед усіх обчислених значень функції вибираємо найменше та найбільше. Вони і будуть шуканими її найменшим та найбільшим значеннями в заданій області.

Отже,

$$z_{\min} = f(2; 8) = -14, \quad z_{\max} = f(-2; 8) = 18.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

Задача 1. Знайти та побудувати область визначення функції $z = f(x, y)$.

- 1.1) $z = \sqrt{x^2 + y} + \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.
- 1.2) $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$.
- 1.3) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$.
- 1.4) $z = \sqrt{2x + 3y} - \sqrt{x^2 + y}$.

Задача 2. Побудувати лінії рівня функції $z = f(x, y)$.

- 2.1) $z = \frac{1}{4x^2 + 9y^2}$;
- 2.2) $z = \frac{1}{9x^2 - 4y^2}$;
- 2.3) $z = \frac{1}{4x^2 - y}$;
- 2.4) $z = \frac{1}{9x + y^2}$;

Задача 3. Знайти повний диференціал заданої функції $z = f(x, y)$.

- 3.1) $z = \sqrt[3]{-x^2 + 10y^2}$.
- 3.2) $z = \sqrt[6]{5x^2 - 9y^2}$.
- 3.3) $z = \sqrt[4]{xy} \cdot \sin y^2$.
- 3.4) $z = \cos(3yx^3 - 4xy^2)$.

Задача 4. Задана функція $z = f(x, y)$. Перевірити, чи задовольняє ця функція заданому рівнянню; переконатись також, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

- 4.1) $z = e^{-2xy}, x^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2xyz = 0$.
- 4.2) $z = \sin y + (y + x) \cdot \cos y, (x - y) \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.
- 4.3) $z = e^{(x-5y)} \cos(x - 5y), 25 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.
- 4.4) $z = \cos(x + ay), \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$.

Задача 5. Задані функція $z = f(x, y)$, точка $A(x_0, y_0)$ і вектор $\vec{a}$. Знайти: а) $\text{grad } z$ в точці A ; б) похідну функції в точці A за напрямом вектора $\vec{a}$.

- 5.1) $z = \ln(-9x^2 + 2y^2), A(-1; 2), \vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$.
- 5.2) $z = 6yx^2 + 11xy^3, A(2; 0), \vec{a} = -\vec{i} + 5\vec{j}$.
- 5.3) $z = 3x^4y^2 + 5y^3x^2, A(-1; -1), \vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$.
- 5.4) $z = x^3 + 3xy - 5y^4, A(0; 2), \vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$.

Задача 6. В пункті а) знайти $\frac{dz}{dt}$; в пункті б) знайти $\frac{dz}{dx}$; в пункті в) знайти $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$.

- 6.1) а) $z = 2x^2 - 3xy + y^3$, де $x = e^{-2t^2}, y = \cos 8t$; б) $z = \ln(x^3 - y^3 + 4)$, де $y = e^{-2x^3}$; в) $z = x^2 \cdot \ln 5y$, де $x = \frac{v}{u}, y = u^2v^3$.

Завдання для самостійної роботи

6.2) а) $z = e^{2x-5y}$, де $x = \sqrt{t+1}$, $y = \sin 4t$; б) $z = (\cos 5x)^{y+2}$, де $y = \ln 3x$; в) $z = \operatorname{tg}(-3x + 5y)$, де $x = \frac{u+1}{v^2}$, $y = 3u + 5v$.

6.3) а) $z = \arcsin(x - 2y)$, де $x = t^3 - 6$, $y = 3t^4$; б) $z = \sqrt{x^4 + y^3}$, де $y = \sin^3 x$; в) $z = x^3 y^4$, де $x = 2u \cdot e^{3v}$, $y = -v \cdot e^{5u}$.

6.4) а) $z = \operatorname{arctg} \frac{2x}{y+1}$, де $x = 4t^2$, $y = 2t + 1$; б) $z = \operatorname{arctg}(2xy)$, де $y = e^{-4x}$; в) $z = x^2 + 6y^2$, де $x = \sqrt{3uv}$, $y = e^{2u+3v}$.

Задача 7. В пункті а) знайти похідну $\frac{dy}{dx}$ функції, заданої неявно; в пункті б) знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції, заданої неявно.

7.1) а) $\operatorname{arctg} \frac{x}{y} - \ln \sqrt{x^2 + y^2} = 0$; б) $x^2 + 2y^2 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0$.

7.2) а) $x^3 + y^3 - 3x^2 y^2 = 0$; б) $z^3 - 4xz + y^2 - 4 = 0$.

7.3) а) $x^2 y^2 - \ln y - 1 = 0$; б) $z \cdot \ln(x + z) = \frac{xy}{z}$.

7.4) а) $x^3 y - e^{3xy} = 0$; б) $z \cdot \ln(x + z) = \frac{x^2 y}{z}$.

Задача 8. Скласти рівняння дотичної площини та рівняння нормалі до заданих поверхонь у вказаних точках.

8.1) $z = 4 + 2x^2 - 3y^2$, $M(1; 2; -6)$

8.2) $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$, $M(1; 1; \frac{\pi}{4})$

8.3) $z = \cos x \sin y$, $M(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{1}{2})$

8.4) $z = \sqrt{4x^2 + 9y^2} - 5xy$, $M(2; 1; -5)$

Задача 9. Дослідити на екстремум функцію $z = f(x, y)$.

9.1) $z = 2x^2 - 3x^3 + 4y^2 + y$.

9.2) $z = 3x^3 + 2xy^2 - 16x - 10y$.

9.3) $z = 4x^3 - 2xy^2 + 3x^2 + 4y^2$.

9.4) $z = x^3 + 2y^3 - x^2 - 4xy - 2y^2$.

Задача 10. Знайти умовні екстремуми функції $z = f(x, y)$.

10.1) $z = 2x^2 + 3y^2 - 3xy + 2x + 3y$, за умови $2x + 3y + 6 = 0$.

10.2) $z = \frac{1}{x} - \frac{1}{2y}$, за умови $x + 2y - 4 = 0$.

10.3) $z = \frac{\sqrt{2}}{2}(2x - 3y + 9)$, за умови $9x^2 + 4y^2 = 1$.

10.4) $z = 3xy^3$, за умови $x - 4y = 9$.

Задача 11. Знайти найменше та найбільше значення функції $z = f(x, y)$ в обмеженій замкненій області D .

11.1) $z = 3x - 5y + 6$, $D: x = 0, y = 0, 3x + 2y - 6 = 0$.

11.2) $z = x^2 + y^2 - 2xy - 3x - 2y$, $D: x = 0, y = 0, 4x + y - 8 = 0$.

11.3) $z = x^2 y$, $D: x^2 + y^2 \leq 4$.

11.4) $z = x^2 - 4y^2 + 15$, $D: x = 0, y = 0, x + 4y - 8 = 0$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Самостійна робота студентів з дисципліни „Вища математика“ полягає у написанні ними розрахункової графічної роботи з відповідного розділу вищої математики та її захисті перед викладачем. Студенту пропонується розв’язати практичні вправи свого варіанту з наведених нижче 11 типових завдань у 30 варіантах, що дозволяє кожному студенту навчальної групи запропонувати індивідуальне завдання.

Задача 1. Знайти та побудувати область визначення функції $z = f(x, y)$.

- 1.1) $z = \sqrt{x^2 - y} + \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.
- 1.2) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$.
- 1.3) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$.
- 1.4) $z = \sqrt{x + y} - \sqrt{x^2 - y}$.
- 1.5) $z = \sqrt{x - y}$.
- 1.6) $z = \sqrt[3]{x^2 - 1} + \sqrt{y}$.
- 1.7) $z = \ln(y^2 - x + 2)$.
- 1.8) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$.
- 1.9) $z = \sqrt{x + 1} + \arccos y$.
- 1.10) $z = \ln xy$.
- 1.11) $z = \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{1 - y^2}$.
- 1.12) $z = \ln(4 - x^2 - y^2)$.
- 1.13) $z = \sqrt[4]{x^2 - y}$.
- 1.14) $z = \sqrt{x^2 - y} + 2$.
- 1.15) $z = \ln(x^2 + y^2 - 9)$.
- 1.16) $z = \sqrt{y^2 - x}$.
- 1.17) $z = \frac{x+y}{x^2-y}$.
- 1.18) $z = \frac{1}{x^2-y^2}$.
- 1.19) $z = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}$.
- 1.20) $z = \frac{x-y}{x^2+y}$.
- 1.21) $z = \sqrt{x^2 - y^2}$.
- 1.22) $z = \sqrt{2xy}$.
- 1.23) $z = \arcsin(2y(1 + x^2) - 1)$.
- 1.24) $z = \arcsin \frac{y}{x^2}$.
- 1.25) $z = \ln \frac{x^2+y^2}{xy}$.
- 1.26) $z = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(9 - x^2 - y^2)}$.
- 1.27) $z = \arcsin \frac{y-1}{x}$.
- 1.28) $z = \arccos \frac{y-1}{x^2}$.
- 1.29) $z = \frac{\ln(1-x^2-y^2)}{\sqrt{x-y^2}}$.
- 1.30) $z = \frac{\ln(x^2+y^2-1)}{\sqrt{y-x^2}}$.

Задача 2. Побудувати лінії рівня функції $z = f(x, y)$.

- 2.1) $z = \frac{1}{x^2+y^2}$;
- 2.2) $z = \frac{1}{x^2-y^2}$;
- 2.3) $z = \frac{1}{x^2+y}$;
- 2.4) $z = \frac{1}{x-y^2}$;
- 2.5) $z = xy^2$;
- 2.6) $z = \frac{x}{y}$;
- 2.7) $z = xy$;
- 2.8) $z = x^2y + x$;
- 2.9) $z = y^2x + x$;
- 2.10) $z = y(x^2 + 1)$;
- 2.11) $z = \frac{xy-1}{x^2}$;
- 2.12) $z = \frac{xy+x}{x^2+1}$;
- 2.13) $z = 5^{3x-y}$;

- 2.14) $z = 3^{2x+3y}$;
 2.15) $z = 2^{2x-y}$;
 2.16) $z = \operatorname{tg}(x^2 + y^2)$;
 2.17) $z = \operatorname{ctg}(x^2 - y^2)$;
 2.18) $z = \operatorname{tg}(x^2 - 2y^2)$;
 2.19) $z = \operatorname{ctg}(x + 2y)$;
 2.20) $z = \ln \frac{1+\sqrt{x^2+y^2}}{1-\sqrt{x^2+y^2}}$;
 2.21) $z = x + y \ln x$;
 2.22) $z = x - 5^y$;
 2.23) $z = \sqrt{xy}$;
 2.24) $z = \sqrt{2^{-x}(x-y)}$;
 2.25) $z = \sqrt{4^x(x+y)}$;
 2.26) $z = x^2 2^y + y$;
 2.27) $z = x 2^y - x$;
 2.28) $z = x^2 - 2y$;
 2.29) $z = \ln((x-5)^2 + y^2)$;
 2.30) $z = |x| + |y|$.

Задача 3. Знайти повний диференціал заданої функції $z = f(x, y)$.

- 3.1) $z = \sqrt[4]{x^2 + y^2}$.
 3.2) $z = \sqrt[4]{x^2 - y^2}$.
 3.3) $z = \sqrt[3]{x} \cdot \sin y$.
 3.4) $z = \cos(x^3 - 2xy)$.
 3.5) $z = \arccos \sqrt{xy}$.
 3.6) $z = \arcsin(x + y^2)$.
 3.7) $z = \operatorname{arctg}(x^2 + y^2)$.
 3.8) $z = \operatorname{arctg}(x^2 + \sqrt[3]{y})$.
 3.9) $z = \sqrt[3]{xy^2} \cdot \operatorname{tg} x$.
 3.10) $z = x^2 + y^2 + 5x^2 y^2$.
 3.11) $z = xy \cdot \ln(xy)$.
 3.12) $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.
 3.13) $z = \operatorname{arc} \sin \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
 3.14) $z = e^{\frac{x}{y}} \cdot \operatorname{tg}(x+y)$.
 3.15) $z = \arcsin(2x^3 y)$.
 3.16) $z = \arccos(x - y^2)$.
 3.17) $z = \cos(x^2 + 2xy)$.
 3.18) $z = \operatorname{tg}(x^3 y^2)$.
 3.19) $z = \operatorname{arctg} \frac{x^3}{y^2}$.
 3.20) $z = \operatorname{arc} \sin xy - 2x^2 y$.
 3.21) $z = \ln(3x^2 + y^2)$.
 3.22) $z = \sin \sqrt{x - y^2}$.
 3.23) $z = \ln(\sqrt{xy} - 1)$.
 3.24) $z = \arccos(x + y^2)$.
 3.25) $z = e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$.
 3.26) $z = \operatorname{arctg} \frac{2y-x^2}{y}$.
 3.27) $z = \sin(x^2 + y^2) + y^3$.
 3.28) $z = \operatorname{arctg}(x^2 + y^2)$.
 3.29) $z = \sqrt{3x^2 + y^2} - x$.

$$3.30) \quad z = \ln(2\sqrt{y} + 4x).$$

Задача 4. Задана функція $z = f(x, y)$. Перевірити, чи задовольняє ця функція заданому рівнянню; переконатись також, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

$$4.1) \quad z = e^{xy}, x^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2xyz = 0.$$

$$4.2) \quad z = \cos y + (y - x) \cdot \sin y, (x - y) \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

$$4.3) \quad z = e^{-(x+3y)} \sin(x + 3y), 9 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

$$4.4) \quad z = \sin(x + ay), \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0.$$

$$4.5) \quad z = \frac{x}{y}, x \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

$$4.6) \quad z = x e^{\frac{y}{x}}, x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

$$4.7) \quad z = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1), \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

$$4.8) \quad z = \ln(x^2 + (y + 1)^2), \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

$$4.9) \quad z = \arctg \frac{y}{x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

$$4.10) \quad z = \ln(x^2 + y^2), \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

$$4.11) \quad z = \ln(x + e^{-y}), \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0.$$

$$4.12) \quad z = x^y, y \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - (1 + y \ln x) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

$$4.13) \quad z = e^{xy}, x^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2xyz = 0.$$

$$4.14) \quad z = \frac{y}{x}, x^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

$$4.15) \quad z = y\sqrt{\frac{y}{x}}, x^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

$$4.16) \quad z = \frac{y^2}{3x} + \arcsin(xy), x^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - xy \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0.$$

$$4.17) \quad z = \frac{\cos y^2}{x^2}, x \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

$$4.18) \quad z = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

$$4.19) \quad z = e^x (x \cos y - y \sin y), \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

$$4.20) \quad z = x \cdot e^{-\frac{y}{x}}, x \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2 \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \right) - y \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

$$4.21) \quad z = x \ln \frac{y}{x}, x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2x - z = 0.$$

$$4.22) \quad z = e^{\frac{x}{y}}, \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + y \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$$

$$4.23) \quad z = \cos^2(y - 0,5x), 2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$$

$$4.24) \quad z = \sqrt{y^2 + 2xy}, \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x+2y}{\sqrt{y^2+2xy}}.$$

$$4.25) \quad z = \frac{xy}{x+y}, x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xy}{x+y}.$$

$$4.26) \quad z = e^{-\cos(x+3y)}, 9 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

$$4.27) \quad z = \ln \frac{x}{y} + x^3 - y^3, x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 3(x^3 - y^3).$$

$$4.28) \quad z = (x^2 + y^2) \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{y}, x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} - 2z = 0.$$

$$4.29) \quad z = \frac{y}{(x^2 - y^2)^5}, \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

$$4.30) \quad z = e^{xy}, x^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Задача 5. Задані функція $z = f(x, y)$, точка $A(x_0, y_0)$ і вектор $\vec{a}$. Знайти: а) $\operatorname{grad} z$ в точці A ; б) похідну функції в точці A за напрямом вектора $\vec{a}$.

$$5.1) \quad z = \ln(3x^2 + 4y^2), A(1; 3), \vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}.$$

$$5.2) \quad z = 5x^2 + 6xy, A(2; 1), \vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}.$$

$$5.3) \quad z = 3x^2y^2 + 5y^2x, A(1; 1), \vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}.$$

$$5.4) \quad z = x^2 + xy + y^2, A(1; 1), \vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}.$$

- 5.5) $z = \ln(5x^2 + 3y^2)$, $A(1; 1)$, $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$.
 5.6) $z = 2x^2 + 3xy + y^2$, $A(2; 1)$, $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$.
 5.7) $z = \operatorname{arctg}(xy^2)$, $A(2; 3)$, $\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$.
 5.8) $z = \ln(5x^2 + 4y^2)$, $A(1; 1)$, $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$.
 5.9) $z = \arcsin\left(\frac{x^2}{y}\right)$, $A(1; 2)$, $\vec{a} = 5\vec{i} - 12\vec{j}$.
 5.10) $z = 3x^4 + 2x^2y^3$, $A(-1; 2)$, $\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$.
 5.11) $z = 3x^2 - 6xy + y^2$, $A(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{2})$, $\vec{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$.
 5.12) $z = x^2 - xy + y^2$, $A(1; 1)$, $\vec{a} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$.
 5.13) $z = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$, $A(3; 1)$, $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$.
 5.14) $z = x^2 + y^2$, $A(3; 2)$, $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$.
 5.15) $z = \ln(3x^2 + 2y^2)$, $A(2; 2)$, $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$.
 5.16) $z = x^2 + xy - y^2$, $A(2; 2)$, $\vec{a} = 5\vec{i} + 3\vec{j}$.
 5.17) $z = 5x^2y^2 - 3y^2x$, $A(1; 1)$, $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}$.
 5.18) $z = \ln(2x^2 + y^2)$, $A(1; 3)$, $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$.
 5.19) $z = \arccos\left(\frac{x^2}{y}\right)$, $A(1; 2)$, $\vec{a} = 5\vec{i} - 2\vec{j}$.
 5.20) $z = 5x^3 + 2xy^3$, $A(-2; 1)$, $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$.
 5.21) $z = 3x^2 + 5xy^2$, $A(2; 2)$, $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$.
 5.22) $z = \operatorname{arctg}(xy^2)$, $A(3; 2)$, $\vec{a} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$.
 5.23) $z = x^2 - y^2$, $A(2; 3)$, $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$.
 5.24) $z = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$, $A(2; 5)$, $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$.
 5.25) $z = 3x^4 - 2x^3y^2$, $A(1; 3)$, $\vec{a} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$.
 5.26) $z = 3x^2 - 2y^3$, $A(3; 2)$, $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$.
 5.27) $z = 5x^3 - 2y^2$, $A(-3; 2)$, $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$.
 5.28) $z = x^2y^2 + 3xy^2$, $A(3; -3)$, $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$.
 5.29) $z = \ln(2x^2 + 3y^2)$, $A(3; 2)$, $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$.
 5.30) $z = \arcsin\left(\frac{x}{y^2}\right)$, $A(3; 3)$, $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$.

Задача 6. В пункті а) знайти $\frac{dz}{dt}$; в пункті б) знайти $\frac{dz}{dx}$; в пункті в) знайти $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$.

- 6.1) а) $z = x^2 - xy + y^2$, де $x = e^{-3t}$, $y = \cos 2t$; б) $z = \ln(x^2 - y^2 + 1)$, де $y = e^{-x^2}$; в) $z = x^3 \cdot \ln y$, де $x = \frac{v}{u}$, $y = u^2v$.
 6.2) а) $z = e^{2x-y}$, де $x = \sqrt{t}$, $y = \sin 2t$; б) $z = (\sin x)^y$, де $y = \ln x$; в) $z = \operatorname{tg}(2x + 3y)$, де $x = \frac{u}{v^2}$, $y = 2u - v$.
 6.3) а) $z = \arcsin(x - y)$, де $x = t^3 - 1$, $y = t^2$; б) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, де $y = \sin^2 x$; в) $z = x^2y^2$, де $x = u \cdot e^v$, $y = v \cdot e^u$.
 6.4) а) $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, де $x = t^2$, $y = t + 1$; б) $z = \operatorname{arctg}(xy)$, де $y = e^x$; в) $z = x^2 + y^2$, де $x = \sqrt{uv}$, $y = e^{u+v}$.
 6.5) а) $z = x^2 + y^2$, де $x = \sin t$, $y = \ln t$; б) $z = \arcsin \frac{x}{y}$, де $y = \sqrt{x^2 + 1}$; в) $z = x^2 \ln y$, де $x = \frac{v}{u}$, $y = u^2 + v^2$.
 6.6) а) $z = e^{2y-3x}$, де $x = t^2 - 1$, $y = \operatorname{tg} t$; б) $z = \arccos \frac{y}{x+1}$, де $y = \sqrt{1-x^2}$; в) $z = \ln(x^2 + y^2)$, де $x = uv$, $y = \frac{u}{v}$.
 6.7) а) $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, де $x = e^{2t} - 1$, $y = e^{2t} + 1$; б) $z = \operatorname{tg}(2x + y)$, де $y = e^x$; в) $z = \ln(x^2 + y^2)$, де $x = u \cos v$, $y = v \sin u$.
 6.8) а) $z = 0,5 \ln \frac{x}{y}$, де $x = \operatorname{tg}^2 t$, $y = \operatorname{ctg}^2 t$; б) $z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$, де $y = \cos x$; в) $z = xy^2$, де $x = \sin \frac{u}{v}$, $y = \sqrt{\frac{u}{v}}$.

- 6.9) а) $z = y^x$, де $x = \sin t$, $y = \ln t$; б) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, де $y = \cos^2 x$; в) $z = \arctg \frac{x}{y}$, де $x = v \sin u$, $y = u \cos v$.
- 6.10) а) $z = e^{x-2y}$, де $x = \sin t$, $y = t^3$; б) $z = x^y$, де $y = \cos 2x$; в) $z = x^2 y$, де $x = \cos uv$, $y = u^2 - 2v$.
- 6.11) а) $z = tg(3t + 2x^2 - y)$, де $x = \frac{1}{t}$, $y = \sqrt{t}$; б) $z = \frac{x^2 - y}{x^2 + y}$, де $y = 3x + 1$; в) $z = x^2 y - xy^2$, де $x = u \cos v$, $y = u \sin v$.
- 6.12) а) $z = \arctg x + \ln y$, де $x = \cos 2t$, $y = e^t$; б) $z = x^2 y$, де $y = \cos x$; в) $z = x^2 \ln y$, де $x = \frac{u}{v}$, $y = 3u - 2v$.
- 6.13) а) $z = e^{x+y^2}$, де $x = \ln t$, $y = \sin t$; б) $z = \ln(x^2 - y^2)$, де $y = e^x$; в) $z = x^2 + y^2$, де $x = u + v^2$, $y = u^2 - v$.
- 6.14) а) $z = \ln(x + y)$, де $x = e^t$, $y = e^{-t}$; б) $z = xy^2$, де $y = \sin 2x$; в) $z = tg(2x + 3y)$, де $x = \frac{u}{v^2}$, $y = 2u - v$.
- 6.15) а) $z = x^y$, де $x = \ln t$, $y = \sin t$; б) $z = \ln \frac{x - \sqrt{x^2 - y^2}}{x + \sqrt{x^2 - y^2}}$, де $y = \frac{x}{\sqrt{2}}$; в) $z = x^2 \ln y$, де $x = \frac{u}{v}$, $y = u^2 + v^2$.
- 6.16) а) $z = \frac{1}{2} \ln \frac{x}{y}$, де $x = tg^2 t$, $y = ctg^2 t$; б) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, де $y = \sin^2 x$; в) $z = x^2 y - xy^2$, де $x = u \sin v$, $y = v \cos u$.
- 6.17) а) $z = \ln(e^t + e^y)$, де $y = t^3$; б) $z = x^y$, де $y = \ln x$; в) $z = x^2 y^2$, де $x = u \cdot e^v$, $y = v \cdot e^u$.
- 6.18) а) $z = e^{xy} \cdot \ln(x + y)$, де $x = t^2$, $y = 1 - t^3$; б) $z = e^{\frac{x}{y}}$, де $y = \sin^3 x$; в) $z = x^2 + y^2$, де $x = \sqrt{uv}$, $y = e^{u+v}$.
- 6.19) а) $z = \frac{t^2 - y}{t^2 + y}$, де $y = 3t + 1$; б) $z = \ln(x^2 + y^2)$, де $y = e^{x^2}$; в) $z = \ln(x^2 + y^2)$, де $x = u \cdot v$, $y = \frac{u}{v}$.
- 6.20) а) $z = \ln(e^x + e^y)$, де $x = t$, $y = t^2$; б) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, де $y = \cos^2 x$; в) $z = y^2 \ln x$, де $x = 3u - 2v$, $y = \frac{u}{v}$.
- 6.21) а) $z = \frac{x+y}{1-xy}$, де $x = tg t$, $y = -ctg t$; б) $z = e^{\frac{x}{y}}$, де $y = \sin^2 x$; в) $z = x^2 y^2$, де $x = u^2 + v$, $y = u - v^2$.
- 6.22) а) $z = x^2 - xy + y^2$, де $x = e^{-3t}$, $y = \cos 2t$; б) $z = \ln(x^2 - y^2)$, де $y = e^{x^2}$; в) $z = xy$, де $x = \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$, $y = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$.
- 6.23) а) $z = \arcsin(x - y)$, де $x = 3t$, $y = 4t^3$; б) $z = \sin \frac{x}{y}$, де $z = \ln^2 x$; в) $z = \sin(x - y)$, де $x = u^2 - v$, $y = u - v^2$.
- 6.24) а) $z = y^x$, де $x = \sin t$, $y = \ln t$; б) $z = x^2 + xy$, де $y = \sin^2 x$; в) $z = xy$, де $x = e^u \cos v$, $y = e^u \sin v$.
- 6.25) а) $z = \arctg \frac{y}{x}$, де $x = e^{2t} + 1$, $y = e^{2t} - 1$; б) $z = x^2 + xy + y^2$, де $y = \cos^2 x$; в) $z = x^2 \ln y$, де $x = 3u - 2v$, $y = \frac{v}{u}$.
- 6.26) а) $z = tg(3t + 2x^2 - y)$, де $x = \frac{1}{t}$, $y = \sqrt{t}$; б) $z = \arccos \frac{y}{x+1}$, де $y = \sqrt{1 - x^2}$; в) $z = x^2 + y^2$, де $x = e^{u+v}$, $y = \sqrt{uv}$.
- 6.27) а) $z = \frac{y}{x}$, де $x = e^t$, $y = \ln t$; б) $z = \ln(x^2 - y^2 + 1)$, де $y = e^{-x^2}$; в) $z = \ln(x^2 + y^2)$, де $x = \frac{u}{v}$, $y = u \cdot v$.
- 6.28) а) $z = e^{2x-y}$, де $x = \sin t$, $y = t^2$; б) $z = \ln(e^x + e^y)$, де $y = x^3$; в) $z = xy^2 - x^2 y$, де $x = u \sin v$, $y = v \cos u$.
- 6.29) а) $z = x + xy + y$, де $x = \sin t$, $y = e^t$; б) $z = xy^2$, де $y = \sin 2x$; в) $z = y^2 \ln x$, де $x = u^2 + v^2$, $y = \frac{v}{u}$.
- 6.30) а) $z = \arccos(x - y)$, де $x = 4t^3$, $y = 3t$; б) $z = \arcsin \frac{y}{x+1}$, де $y = \sqrt{1 - x^2}$; в) $z = x^3 y^3$, де $x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2$.

Задача 7. В пункті а) знайти похідну $\frac{dy}{dx}$ функції, заданої неявно; в пункті б) знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції, заданої неявно.

- 7.1) а) $\arctg \frac{x}{y} - \ln \sqrt{x^2 + y^2} = 0$; б) $x^2 + 2y^2 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0$.
 7.2) а) $x^3 + y^3 - 3x^2y^2 = 0$; б) $z^3 - 4xz + y^2 - 4 = 0$.
 7.3) а) $x^2y^2 - \ln y - 1 = 0$; б) $z \cdot \ln(x + z) = \frac{xy}{z}$.
 7.4) а) $x^3y - e^{3xy} = 0$; б) $z \cdot \ln(x + z) = \frac{x^2y}{z}$.
 7.5) а) $(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0$; б) $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y = 0$.
 7.6) а) $x^2e^{2y} - y^2e^{2x} = 0$; б) $3x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xz + 2z - 5 = 0$.
 7.7) а) $y \sin x - \cos(x - 2y) = 0$; б) $x^2 + y^2 + z^2 = e^z$.
 7.8) а) $x^2 + y^2 = e^{x-2y}$; б) $x^2z - \arctg(xz) = 0$.
 7.9) а) $x^2 - y + \arctg y = 0$; б) $z^3 + 5xyz^2 = 4$.
 7.10) а) $1 + xy = (e^{xy} + e^{-xy})$; б) $e^z - xyz^2 = z$.
 7.11) а) $x^2 + 2xy^2 + x^4 = 0$; б) $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z + 10 = 0$.
 7.12) а) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$; б) $z^3 + 3xyz = 8$.
 7.13) а) $xy - \ln y = 0$; б) $yz = \arctg(xz)$.
 7.14) а) $x^2y = e^y$; б) $xz - e^{\frac{z}{y}} + x^3 + y^3 = 0$.
 7.15) а) $x^3e^{2y} - y^3e^{2x} = 0$; б) $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 3 = 0$.
 7.16) а) $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$; б) $x + y + z^2 = e^z$.
 7.17) а) $x^3y - xy^3 = 10$; б) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$.
 7.18) а) $xe^y + ye^x - e^{xy} = 0$; б) $z^3 - 4xz + y^2 = 4$.
 7.19) а) $xy^2 - \ln y = 1$; б) $y \cos x - \sin(y - z) + y^2 = 0$.
 7.20) а) $x^2 + y^2 + \ln(x^2 + y^2) = 0$; б) $e^z - x^2yz = 0$.
 7.21) а) $\frac{y}{x} + \sin(\frac{y}{x}) = a, (a = \text{const})$; б) $x^2 + y^2 - z^2 = xyz$.
 7.22) а) $x^3 + 2y^3 - 2xy\sqrt{2xy} + 1 = 0$; б) $x^2y^2 - \ln z = z^2$.
 7.23) а) $\ln(x^2 + y^2) - 2\arctg(\frac{y}{x}) = 0$; б) $x^3 + y^3 + z^3 = \ln xy$.
 7.24) а) $x^2 + y^2 - e^{x^2+y^2} = 0$; б) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
 7.25) а) $(x^2 + y^2 - 2x)^2 = 2(x^2 + y^2)$; б) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{z^2} + z = 0$.
 7.26) а) $x^2 - 3xy + 4y^2 - 2x + 3y + 3 = 0$; б) $x^3 - 3xy^3 - z^3 = xz^2$.
 7.27) а) $x^3 + y^3 - 3axy = 0, (a = \text{const})$; б) $x^2 + xy + y^2 - z^2 + xz = 0$.
 7.28) а) $\sin x \cdot \ln y + \cos y \cdot \ln x = 0$; б) $z^2 \cdot \ln(x - y) - x^2yz = 0$.
 7.29) а) $x \cdot \sin y - \cos y + \cos 2y = 0$; б) $\ln(x + y) - x^2yz^3 = 0$.
 7.30) а) $y \cdot \sin x + \cos(x - y) = 0$; б) $x^2z - \arcsin(yz) = 0$.

Задача 8. Скласти рівняння дотичної площини та рівняння нормалі до заданих поверхонь у вказаних точках.

- 8.1) $z = 3 + x^2 - y^2, \quad M(1; 2; 0)$
 8.2) $z = \arctg \frac{x}{y}, \quad M(1; 1; \frac{\pi}{4})$
 8.3) $z = \sin x \cos y, \quad M(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{1}{2})$
 8.4) $z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy, \quad M(3; 4; -7)$
 8.5) $z = x^2 + y^2, \quad M(1; -2; 5)$
 8.6) $z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y, \quad M(1; 1; 1)$
 8.7) $z = 2x^2 - 4y^2, \quad M(2; 1; 4)$
 8.8) $z = xy, \quad M(1; 1; 1)$
 8.9) $z = \ln(x^2 + y^2), \quad M(1; 0; 0)$
 8.10) $z = e^{x \cos y}, \quad M(1; \pi; \frac{1}{e})$
 8.11) $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10, \quad M(1; 2; 3)$
 8.12) $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y, \quad M(0; -1; 7)$
 8.13) $z = 3x^2 - 4y^2 - xy, \quad M(-1; 2; 0)$
 8.14) $z = x^2 + 6y^2 + 6x - 3y, \quad M(1; 4; 2)$

- 8.15) $z = -x^2 - 6y^2 + 8x$, $M(2; 2; 0)$
 8.16) $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$, $M(2; 2; 3)$
 8.17) $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$, $M(1; 2; -1)$
 8.18) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{8} = 0$, $M(4; 3; 4)$
 8.19) $x^3 + xy^2 + x^2y - z^3 - 7 = 0$, $M(2; 0; 1)$
 8.20) $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy + yz - 2xz + 16 = 0$, $M(1; 2; 3)$
 8.21) $2x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 5 = 0$, $M(1; 1; -1)$
 8.22) $x^2 + 2xy + y^2 - z^2 = 0$, $M(0; 1; 1)$
 8.23) $x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y - z^2 = 0$, $M(1; 1; 1)$
 8.24) $x^2 - y^2 + 4z - xy = 0$, $M(1; 3; 1)$
 8.25) $x^3 - y^2 + zx - zy + 8 = 0$, $M(1; 4; -2)$
 8.26) $x^2z - xy^2 + zy - 7 = 0$, $M(-1; -2; 0)$
 8.27) $x^3y - xy^2 + z^2 - 9 = 0$, $M(1; 1; -1)$
 8.28) $x^2 + 4y^2z - z^2 + 5 = 0$, $M(1; 2; -3)$
 8.29) $x^2 - y^2z + zx - z^2 + 4 = 0$, $M(3; 2; 0)$
 8.30) $3x^2 - 6y^2 + 4z^2 - xy + xz - yz - 9 = 0$, $M(1; 4; 6)$

Задача 9. Дослідити на екстремум функцію $z = f(x, y)$.

- 9.1) $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$.
 9.2) $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.
 9.3) $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$.
 9.4) $z = x^3 + y^3 - x^2 - 2xy - y^2$.
 9.5) $z = x^3 - 2x^2y^2 + y^4$.
 9.6) $z = x^3 - 2y^3 - 3x + 6y$.
 9.7) $z = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x$.
 9.8) $z = x^2 - xy + y^2$.
 9.9) $z = x^2 - xy - y^2$.
 9.10) $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5$.
 9.11) $z = 6(x - y) - 3x^2 - 3y^2$.
 9.12) $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$.
 9.13) $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$.
 9.14) $z = xy(6 - x - y)$.
 9.15) $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$.
 9.16) $z = 6x - x^2 - xy - y^2 - 3x - 6y$.
 9.17) $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.
 9.18) $z = xy^2(1 - x - y)$.
 9.19) $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$.
 9.20) $z = x^2 + y^2 - 2 \ln x - 18 \ln y, (x > 0, y > 0)$.
 9.21) $z = x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y$.
 9.22) $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$.
 9.23) $z = x^3 - y^3 - 3xy$.
 9.24) $z = x^3y^2(12 - x - y)$.
 9.25) $z = xy(xy(x + y - 1))$.
 9.26) $z = -y^2 - x^2 - xy + 6x + 1$.
 9.27) $z = 14x^3 + 27xy^2 - 69x - 54y$.
 9.28) $z = x^3 + y^3 - 15xy$.
 9.29) $z = 4 - (x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}$.
 9.30) $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$.

Задача 10. Знайти умовні екстремуми функції $z = f(x, y)$ (10.1 – 10.18), або функції $u =$

$f(x, y, z)$ (10.19 – 10.30).

- 10.1) $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$, за умови $x + y + 3 = 0$.
- 10.2) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, за умови $x + y - 2 = 0$.
- 10.3) $z = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y - 4)$, за умови $x^2 + y^2 = 1$.
- 10.4) $z = xy^2$, за умови $x + 2y = 1$.
- 10.5) $z = 2x + y$, за умови $x^2 + y^2 = 1$.
- 10.6) $z = x^2 + y^2$, за умови $3x + 4y - 12 = 0$.
- 10.7) $z = xy$, за умови $x^2 + y^2 = 1$.
- 10.8) $z = x^2 + y^2$, за умови $x + y = 2$.
- 10.9) $z = xy$, за умови $2x + 3y = 5$.
- 10.10) $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$, за умови $x + y = 3$.
- 10.11) $z = x^2 + y^2$, за умови $3x + 2y - 6 = 0$.
- 10.12) $z = xy$, за умови $x + y = 1$.
- 10.13) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, за умови $x + y = 2$.
- 10.14) $z = \cos^2 x + \cos^2 y$, за умови $y - x = \frac{\pi}{4}$.
- 10.15) $z = x + 2y$, за умови $x^2 + y^2 = 5$.
- 10.16) $z = xy^2$, за умови $x + 2y = 1$.
- 10.17) $z = x + y$, за умови $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{4}$.
- 10.18) $z = \sin^2 x + \sin^2 y$, за умови $y - x = \frac{\pi}{4}$.
- 10.19) $u = 2x + y - 2z$, за умови $x^2 + y^2 + z^2 = 36$.
- 10.20) $u = x^2 + y^2 + z^2$, за умови $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$.
- 10.21) $u = xy^2z^3$, за умови $x + 2y + 3z = 12$ ($x > 0, y > 0, z > 0$).
- 10.22) $u = x - y + 2z$, за умови $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.
- 10.23) $u = x^2y^3z^4$, за умови $2x + 3y + 4z = 12$.
- 10.24) $u = xyz$, за умов $x + y + z = 5, xy + xz + yz = 8$.
- 10.25) $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, за умов $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + 2y + 3z = 0$.
- 10.26) $u = xyz$, за умов $x + y + z = 4, xy + yz + xz = 5$.
- 10.27) $u = xy^2z^3$, за умови $x + 2y + 3z = 6$ ($x > 0, y > 0, z > 0$).
- 10.28) $u = x - 2y + 2z$, за умови $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
- 10.29) $u = x^2 + y^2 + 2z^2$, за умови $x - y + z = 1$.
- 10.30) $u = x - 2y + z$, за умови $x + y^2 - z^2 = 1$.

Задача 11. Знайти найменше та найбільше значення функції $z = f(x, y)$ в обмеженій замкненій області D .

- 11.1) $z = x - 2y + 5, D : x = 0, y = 0, x + y - 1 = 0$.
- 11.2) $z = x^2 + y^2 - xy - x - y, D : x = 0, y = 0, x + y - 3 = 0$.
- 11.3) $z = xy, D : x^2 + y^2 \leq 1$.
- 11.4) $z = x - 2y + 5, D : x = 0, y = 0, x - y - 1 = 0$.
- 11.5) $z = x^2 + 2y^2 + 1, D : x = 0, y = 0, x + y - 3 = 0$.
- 11.6) $z = x^3 + y^3 - 3xy, D : x = 0, x = 2, y = 0, y = 2$.
- 11.7) $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2, D : x = 0, y = 0, x + y + 1 = 0$.
- 11.8) $z = x^2 + 2xy - 10, D : y = 0, y = x^2 - 4$.
- 11.9) $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1, D : x = 0, y = 0, x + y = 3$.
- 11.10) $z = 2x^3 - xy^2 + y^2, D : x = 0, x = 1, y = 0, y = 6$.
- 11.11) $z = xy - 2x - y, D : x = 0, x = 3, y = 0, y = 4$.
- 11.12) $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1, D : x = -3, y = 0, x + y + 1 = 0$.
- 11.13) $z = x^2 + xy - 2, D : y = 0, y = 4x^2 - 4$.
- 11.14) $z = xy - x - 2y, D : x = 3, y = 0, y = x$.
- 11.15) $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y, D : x = 0, x = 1, y = 0, y = 2$.

- 11.16) $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8, D : x = 0, y = 0, x + y = 1.$
 11.17) $z = x^2 + 3y^2 + x - y, D : x = 1, y = -1, x + y = 1.$
 11.18) $z = x^2 - 2xy + 2, 5y^2 - 2x, D : x = 0, x = 2, y = 0, y = 2.$
 11.19) $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4, D : x = -1, y = -1, x + y - 1 = 0.$
 11.20) $z = 10 + 2xy - x^2, D : y = 0, y = 4 - x^2.$
 11.21) $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4, D : x = -1, x = 1, y = -1, y = 1.$
 11.22) $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x, D : x = 3, y = 0, x - y + 1 = 0.$
 11.23) $z = 4y - xy - y^2, D : x = 0, y = 0, x + y - 6 = 0.$
 11.24) $z = 3x^2 + 3y^2 - x - y + 1, D : x = 5, y = 0, x - y - 1 = 0.$
 11.25) $z = 2x^2 + 2xy - 0, 5y^2 - 4x, D : x = 0, y = 2, y = 2x.$
 11.26) $z = x^2 - xy + y^2 - 4x, D : x = 0, y = 0, 2x + 3y - 12 = 0.$
 11.27) $z = 1 - x^2 - y^2, D : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 1.$
 11.28) $z = 4(x - y) - x^2 - y^2, D : x + 2y = 4, x - 2y = 4, x = 0.$
 11.29) $z = xy + x + y, D : x = 1, x = 2, y = 2, y = 3.$
 11.30) $z = 0, 5x^2 - xy, D : y = 8, y = 2x^2.$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ ЗНАНЬ

Вивчення диференціального числення функцій декількох змінних завершується такими видами контролю знань студентів, як колоквиум та контрольна робота. Завдання для цих форм контролю формуються на основі наведеної нижче бази тестових завдань, призначених для перевірки глибини засвоєння студентами теоретичного матеріалу та перевірки вироблення ними навичок розв'язування типових задач цього розділу.

Фінобі тестові теоретичні завдання

- Функція $z = f(x, y)$ зображається графічно: а) деякою лінією в просторі; б) деякою лінією на площині; в) деякою поверхнею в просторі; г) деякою областю на площині; д) інша відповідь.
- Вставити пропущений вираз. Означення границі функції: число A називається границею функції $z = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$, якщо _____, що для всіх точок $M(x; y)$ таких, що $\rho(M; M_0) < \delta$ виконується нерівність $|f(x, y) - A| < \varepsilon$.
 а) для будь-якого $\varepsilon > 0$, для будь-якого $\delta > 0$;
 б) для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$;
 в) існує таке $\varepsilon > 0$, існує таке $\delta > 0$;
 г) існує таке $\varepsilon > 0$, що для будь-якого $\delta > 0$;
 д) інша відповідь.
- Точка $M_0(x_0; y_0)$ є точкою розриву функції $z = f(x, y)$, якщо із умов: 1) Функція визначена в точці M_0 ; 2) Існує $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M)$; 3) $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0)$;
 порушується:
 а) тільки 1; б) тільки 2; в) тільки 3; г) хоча б одна; д) інша відповідь.
- Якщо функція $z = f(x, y)$ неперервна в обмеженій замкненій області D , то вона там: а) обмежена; б) додатна; в) необмежена; г) постійна; д) інша відповідь.
- Функція виду $z = f(x, y)$ називається функцією: а) двох змінних; б) однієї змінної; в) трьох змінних; г) нескінченного числа змінних; д) вектор-функцією.
- Функція виду $u = f(x, y, z)$ називається функцією: а) двох змінних; б) однієї змінної; в) трьох змінних; г) нескінченного числа змінних; д) вектор-функцією.

7. δ -околом точки $M_0(x_0, y_0)$ називається множина всіх точок $M(x, y)$, таких що
 - а) $|\overrightarrow{M_0M}| < \delta$; б) $|x - x_0| < \delta$; в) $|\overrightarrow{M_0M}| > \delta$; г) $|\overrightarrow{M_0M}| = \delta$; д) інша відповідь.
8. якщо точка $M_0(x_0, y_0)$ належить множині D разом зі своїм деяким околом, то вона називається а) точкою дотику; б) межевою; в) граничною; г) внутрішньою; д) інша відповідь.
9. Якщо будь-якому проколотому околі точки $M_0(x_0, y_0) \in D$ є точки, які належать множині D і є точки, які не належать D , то ця точка називається а) точкою дотику; б) межевою; в) граничною; г) внутрішньою; д) інша відповідь.
10. Якщо всі точки області є внутрішніми, то область називається а) замкнутою; б) зв'язною; в) відкритою; г) обмеженою; д) інша відповідь.
11. Якщо всі межові точки області належать самій області, то область називається а) замкнутою; б) обмеженою; в) відкритою; г) зв'язною; д) інша відповідь.
12. Якщо область на площині повністю міститься в деякому крузі, то вона називається а) обмеженою; б) замкнутою; в) відкритою; г) внутрішньою; д) інша відповідь.
13. Якщо дві довільні точки області можна з'єднати неперервною лінією, яка повністю належить цій області, то вона називається а) обмеженою; б) замкнутою; в) відкритою; г) зв'язною; д) інша відповідь.
14. Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці $M_0(x_0, y_0)$, то вона в цій точці а) інтегровна; б) розривна; в) необмежена; г) неперервна; д) інша відповідь.
15. Яка з наведених нижче рівностей завжди виконується для функції $z = f(x, y)$ при умові, що відповідні похідні неперервні: а) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}$; б) $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$; в) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; г) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$; д) інша відповідь.
16. Яка з наведених нижче рівностей завжди виконується для функції $z = f(x, y)$ при умові, що відповідні похідні неперервні: а) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; б) $\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$; в) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; г) $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$; д) інша відповідь.
17. Повний диференціал функції $z = f(x, y)$ знаходиться за формулою: а) $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx - \frac{\partial z}{\partial y} dy$; б) $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$; в) $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx^2 + \frac{\partial z}{\partial y} dy^2$; г) $dz = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} dx dy$; д) інша відповідь.
18. Яка з наступних формул використовується в наближених обчисленнях?
 - а) $f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y$;
 - б) $f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) - f'_x(x, y)\Delta x - f'_y(x, y)\Delta y$;
 - в) $f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y$;
 - г) $f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + f'_x(x, y) \cdot f'_y(x, y)\Delta x \Delta y$;
 - д) інша відповідь.
19. Яке з рівнянь визначає дотичну площину до поверхні $z = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$?
 - а) $f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) = f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + z - z_0$;
 - б) $f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + z - z_0$;
 - в) $z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$;
 - г) $z - z_0 = f'_y(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_x(x_0, y_0)(y - y_0)$;
 - д) інша відповідь.
20. Пряма, що проходить через точку M_0 на поверхні, перпендикулярно до дотичної площини в цій точці, називається а) дотичною до поверхні; б) паралеллю до поверхні; в) напрямною до поверхні; г) нормаллю до поверхні; д) інша відповідь.
21. Область простору, кожній точці M якої за певним правилом поставлено у відповідність одне єдине значення деякої скалярної фізичної величини $u = f(M)$, називається а) скалярним полем; б) полем напрямків; в) векторним полем; г) фізичним полем; д) інша відповідь.
22. Яке з рівнянь визначає нормаль до поверхні $z = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$?

- а) $\frac{z-z_0}{f'_z(x_0,y_0)} = \frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)} = \frac{x-x_0}{-1}$; б) $\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)} = \frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)} = \frac{z-z_0}{-1}$; в) $\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)} = \frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)} = \frac{z-z_0}{1}$; г) $\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)} = \frac{z-z_0}{f'_z(x_0,y_0)} = \frac{y-y_0}{-1}$; д) інша відповідь.
23. Яке з рівнянь визначає дотичну площину до поверхні, задану рівнянням $F(x, y, z) = 0$, в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$?
- а) $F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0$;
 б) $F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) - F'_z(M_0)(z - z_0) = 0$;
 в) $F'_x(M_0)(y - y_0) + F'_y(M_0)(x - x_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0$;
 г) $F'_z(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_x(M_0)(z - z_0) = 0$;
 д) інша відповідь.
24. Яке з рівнянь визначає нормаль до поверхні, заданої рівнянням $F(x, y, z) = 0$ в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$? а) $\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y-y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z-z_0}{-F'_z(M_0)}$; б) $\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y-y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}$; в) $\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y-y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}$; г) $\frac{x-x_0}{F'_y(M_0)} = \frac{y-y_0}{F'_x(M_0)} = \frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}$; д) інша відповідь.
25. Якщо $z = f(x, y)$, де $y = \varphi(x)$, то яка з рівностей є правильною: а) $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{dy}{dx}$; б) $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dy}{dx}$; в) $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx}$; г) $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx}$; д) інша відповідь.
26. Якщо $z = f(x, y)$, де $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то яка з рівностей є правильною: а) $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$; б) $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$; в) $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt}$; г) $\frac{dz}{dt} = (\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y})(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt})$; д) інша відповідь.
27. Якщо $z = f(x, y)$, де $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, то яка з рівностей є правильною: а) $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$; б) $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u}$; в) $\frac{\partial z}{\partial u} = (\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y})(\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial u})$; г) $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$; д) інша відповідь.
28. Якщо $z = f(x, y)$, де $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, то яка з рівностей є правильною: а) $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v}$; б) $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$; в) $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$; г) $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$; д) інша відповідь.
29. Яка з формул є правильною, якщо неявна функція однієї змінної задана рівнянням $F(x, y) = 0$: а) $y'_x = \frac{F'_x}{F'_y}$; б) $y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}$; в) $y'_x = \frac{F'_y}{F'_x}$; г) $y'_x = -\frac{F'_y}{F'_x}$; д) інша відповідь.
30. Яка з формул є правильною, якщо неявна функція двох змінних задана рівнянням $F(x, y, z) = 0$: а) $z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}$; б) $z'_x = \frac{F'_x}{F'_z}$; в) $z'_x = -\frac{F'_y}{F'_z}$; г) $z'_x = -\frac{F'_z}{F'_x}$; д) інша відповідь.
31. Яка з формул є правильною, якщо неявна функція двох змінних задана рівнянням $F(x, y, z) = 0$: а) $z'_y = \frac{F'_y}{F'_z}$; б) $z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$; в) $z'_y = -\frac{F'_x}{F'_z}$; г) $z'_y = \frac{F'_z}{F'_y}$; д) інша відповідь.
32. Градієнтом функції $z = f(x, y)$ називається:
- а) скаляр $\text{grad} z = \sqrt{(\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2}$; б) вектор $\text{grad} z = \frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j}$; в) вектор $\text{grad} z = (\frac{\partial z}{\partial x})^2 \vec{i} + (\frac{\partial z}{\partial y})^2 \vec{j}$; г) скаляр $\text{grad} z = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$; д) інша відповідь.
33. Градієнтом функції $u = f(x, y, z)$ називається: а) вектор $\text{grad} u = |\frac{\partial u}{\partial x}| \vec{i} + |\frac{\partial u}{\partial y}| \vec{j} + |\frac{\partial u}{\partial z}| \vec{k}$; б) скаляр $\text{grad} u = \sqrt{(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2 + (\frac{\partial u}{\partial z})^2}$; в) скаляр $\text{grad} u = |\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}|$; г) вектор $\text{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}$; д) інша відповідь.
34. Похідна функції $z = f(x, y)$ за напрямом вектора $\vec{l}$, який складає кути α і β з координатними осями знаходиться за формулою: а) $\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \beta$; б) $\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \sin \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \beta$; в) $\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \beta$; г) $\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \sin \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \beta$; д) інша відповідь.
35. Похідна функції $u = f(x, y, z)$ за напрямом вектора $\vec{l}$, який складає кути α , β і γ з координатними осями знаходиться за формулою: а) $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \sin \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \sin \gamma$; б) $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$; в) $\frac{\partial u}{\partial l} = |\frac{\partial u}{\partial x}| \sin \alpha + |\frac{\partial u}{\partial y}| \sin \beta + |\frac{\partial u}{\partial z}| \sin \gamma$; г) $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos \alpha + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cos \beta + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \cos \gamma$; д) інша відповідь.
36. Повний диференціал n -го порядку функції $z = f(x, y)$ знаходиться за формулою: а) $d^n z = \frac{\partial^n z}{\partial x^n} dx^n + \frac{\partial^n z}{\partial y^n} dy^n$; б) $d^n z = (\frac{\partial^n z}{\partial x^n} + \frac{\partial^n z}{\partial y^n})(dx^n + dy^n)$; в) $d^n z = (\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy)^n z$;

- г) $d^n z = \frac{\partial^n z}{\partial x^n \partial y^n} dx^n dy^n$; д) інша відповідь.
37. Повний диференціал другого порядку функції $z = f(x, y)$ знаходиться за формулою:
 а) $d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$; б) $d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$; в) $d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$; г) $d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dx^2 dy^2$; д) інша відповідь.
38. Повний диференціал третього порядку функції $z = f(x, y)$ знаходиться за формулою:
 а) $d^3 z = (\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3})(dx^3 + dy^3)$;
 б) $d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3$;
 в) $d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3$;
 г) $d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3$;
 д) інша відповідь.
39. Функція $z = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні до четвертого порядку включно. Які з поданих нижче похідних співпадають?
 1) $\frac{\partial^4 z}{\partial x \partial y^2 \partial x}$; 2) $\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y \partial x}$; 3) $\frac{\partial^4 z}{\partial x \partial y^3}$; 4) $\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2}$; 5) $\frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y}$; 6) $\frac{\partial^4 z}{\partial y \partial x \partial y^2}$.
 а) 1 і 4, 2 і 5, 3 і 6; б) 1 і 5, 2 і 4, 3 і 6; в) 1 і 6, 2 і 5, 3 і 4; г) 1 і 3, 2 і 4, 5 і 6; д) інша відповідь.
40. Функція $z = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні до п'ятого порядку включно. Які з поданих нижче похідних співпадають?
 1) $\frac{\partial^5 z}{\partial x^3 \partial y^2}$; 2) $\frac{\partial^5 z}{\partial x^2 \partial y^3}$; 3) $\frac{\partial^5 z}{\partial x \partial y^4}$; 4) $\frac{\partial^5 z}{\partial y^2 \partial x \partial y^2}$; 5) $\frac{\partial^5 z}{\partial x^2 \partial y^2 \partial x}$; 6) $\frac{\partial^5 z}{\partial x \partial y^2 \partial x \partial y}$;
 а) 1 і 2, 3 і 4, 5 і 6; б) 1 і 5, 2 і 6, 3 і 4; в) 1 і 4, 2 і 5, 3 і 6; г) інша відповідь.
41. Стаціонарною точкою функції $z = f(x, y)$ називається точка $M_0(x_0, y_0)$, в якій:
 а) $f'_x(M_0)$ не існує, $f'_y(M_0) = 0$; б) $f'_x(M_0) = 0$, $f'_y(M_0)$ не існує; в) $f'_x(M_0)$, $f'_y(M_0)$ не існують; г) $f'_x(M_0) = 0$, $f'_y(M_0) = 0$; д) інша відповідь.
42. Нехай функція $z = f(x, y)$ має в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$ неперервні частинні похідні першого і другого порядків, причому $f'_x(M_0) = f'_y(M_0) = 0$. Тоді функція має в точці M_0 екстремум, якщо: а) $f''_{xx}(M_0) \cdot f''_{yy}(M_0) - (f''_{xy}(M_0))^2 = 0$; б) $f''_{xx}(M_0) \cdot f''_{yy}(M_0) - (f''_{xy}(M_0))^2 < 0$; в) $f''_{xx}(M_0) \cdot f''_{yy}(M_0) - (f''_{xy}(M_0))^2 > 0$; г) $f''_{xx}(M_0) \cdot f''_{yy}(M_0) - (f''_{xy}(M_0))^2 \leq 0$;
43. Нехай функція $z = f(x, y)$ має в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$ неперервні частинні похідні першого і другого порядків, причому $f'_x(M_0) = f'_y(M_0) = 0$. Тоді функція має в точці M_0 максимум, якщо:
 а) $\Delta = f''_{xx}(M_0) \cdot f''_{yy}(M_0) - (f''_{xy}(M_0))^2 = 0$, $A = f''_{xx}(M_0) > 0$;
 б) $\Delta = f''_{xx}(M_0) \cdot f''_{yy}(M_0) - (f''_{xy}(M_0))^2 > 0$, $A = f''_{xx}(M_0) > 0$;
 в) $\Delta = f''_{xx}(M_0) \cdot f''_{yy}(M_0) - (f''_{xy}(M_0))^2 > 0$, $A = f''_{xx}(M_0) < 0$;
 г) $\Delta = f''_{xx}(M_0) \cdot f''_{yy}(M_0) - (f''_{xy}(M_0))^2 > 0$, $B = f''_{xy}(M_0) > 0$;
 д) інша відповідь.
44. Нехай функція $z = f(x, y)$ має в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$ неперервні частинні похідні першого і другого порядків, причому $f'_x(M_0) = f'_y(M_0) = 0$. Тоді функція має в точці M_0 мінімум, якщо:
 а) $\Delta = f''_{xx}(M_0) \cdot f''_{yy}(M_0) - (f''_{xy}(M_0))^2 = 0$, $A = f''_{xx}(M_0) < 0$;
 б) $\Delta = f''_{xx}(M_0) \cdot f''_{yy}(M_0) - (f''_{xy}(M_0))^2 > 0$, $A = f''_{xx}(M_0) > 0$;
 в) $\Delta = f''_{xx}(M_0) \cdot f''_{yy}(M_0) - (f''_{xy}(M_0))^2 > 0$, $A = f''_{xx}(M_0) = 0$;
 г) $\Delta = f''_{xx}(M_0) \cdot f''_{yy}(M_0) - (f''_{xy}(M_0))^2 > 0$, $B = f''_{xy}(M_0) > 0$;
 д) інша відповідь.
45. Нехай функція $z = f(x, y)$ має в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$ неперервні частинні похідні першого і другого порядків, причому $f'_x(M_0) = f'_y(M_0) = 0$. Тоді функція не має в точці M_0 екстремуму, якщо:
 а) $\Delta = f''_{xx}(M_0) \cdot f''_{yy}(M_0) - (f''_{xy}(M_0))^2 < 0$;

- б) $\Delta = f''_{xx}(M_0) \cdot f''_{yy}(M_0) - (f''_{xy}(M_0))^2 > 0$;
 в) $\Delta = f''_{xx}(M_0) \cdot f''_{yy}(M_0) - (f''_{xy}(M_0))^2 > 0, A = f''_{xx}(M_0) < 0$;
 г) $\Delta = f''_{xx}(M_0) \cdot f''_{yy}(M_0) - (f''_{xy}(M_0))^2 > 0, C = f''_{yy}(M_0) < 0$;
 д) інша відповідь.
46. Формула Тейлора для функції $z = f(x, y)$ має вид:
 а) $f(x, y) = df(x_0, y_0) + \frac{d^2 f(x_0, y_0)}{2!} + \dots + \frac{d^n f(x_0, y_0)}{n!} + \frac{d^{n+1} f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y)}{(n+1)!}, 0 < \theta < 1$;
 б) $\Delta f(x_0, y_0) = df(x_0, y_0) + \frac{d^2 f(x_0, y_0)}{2!} + \dots + \frac{d^n f(x_0, y_0)}{n!} + \frac{d^{n+1} f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y)}{(n+1)!}, 0 < \theta < 1$;
 в) $\Delta f(x_0, y_0) = df(x_0, y_0) + d^2 f(x_0, y_0) + \dots + d^n f(x_0, y_0) + d^{n+1} f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y), 0 < \theta < 1$;
 г) $f(x, y) = df(x_0, y_0) + 2d^2 f(x_0, y_0) + \dots + nd^n f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y), 0 < \theta < 1$;
 д) інша відповідь.
47. Якщо існує проколтий окіл точки M_0 , який повністю міститься в області D , і для всіх точок M з цього проколтого околу значення функції в точці M менше за значення функції в точці M_0 , то точка M_0 називається а) точкою глобального мінімуму; б) точкою локального мінімуму; в) точкою локального максимуму; г) точкою умовного максимуму; д) інша відповідь.
48. Якщо існує проколтий окіл точки M_0 , який повністю міститься в області D , і для всіх точок M з цього проколтого околу значення функції в точці M більше за значення функції в точці M_0 , то точка M_0 називається а) точкою глобального максимуму; б) точкою локального максимуму; в) точкою локального мінімуму; г) точкою умовного мінімуму; д) інша відповідь.
49. При знаходженні екстремуму функції $z = f(x, y)$ при умові $\varphi(x, y) = 0$ складається функція Лагранжа $F(x, y, \lambda)$, яка має вид: а) $\lambda f(x, y) + \varphi(x, y)$; б) $f(x, y) + \frac{\lambda}{\varphi(x, y)}$; в) $\frac{f(x, y)}{\lambda} + \varphi(x, y)$; г) $f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$; д) інша відповідь.
50. Координати точок, підозрілих на екстремум функції $z = f(x, y)$ при умові $\varphi(x, y) = 0$ знаходяться із системи рівнянь:
 а) $\begin{cases} \varphi(x, y) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \varphi(x, y) = 0, \\ f(x, y) = 0. \end{cases}$ в) $\begin{cases} \varphi(x, y) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \end{cases}$ г) $\begin{cases} \varphi(x, y) = 0, \\ f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0. \end{cases}$
 д) інша відповідь.

Формі тестові практичні завдання

- Встановити відповідність між функціями 1) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$; 2) $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}$; 3) $z = \sqrt[4]{x^2 + y^2 - 4}$ і областями визначення 1) $x^2 + y^2 \geq 4$; 2) $x^2 + y^2 \leq 4$; 3) $x^2 + y^2 > 4$:
 а) 1-2, 2-1, 3-3; б) 1-2, 2-3, 3-1; в) 1-3, 2-1, 3-2; г) 1-1, 2-3, 3-2; д) інша відповідь.
- Встановити відповідність між функціями 1) $z = \arccos(x+y)$; 2) $z = \ln(1 - (x+y)^2)$; 3) $z = \sqrt{(x+y)^2 - 1}$ і областями визначення 1) $|x+y| < 1$; 2) $|x+y| \geq 1$; 3) $|x+y| \leq 1$:
 а) 1-2, 2-1, 3-3; б) 1-2, 2-3, 3-1; в) 1-3, 2-1, 3-2; г) 1-1, 2-3, 3-2; д) інша відповідь.
- Знайти область визначення функції $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$: а) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \geq 1$; б) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$; в) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \leq 1$; г) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \geq 1$; д) інша відповідь.
- Вказати точки або лінії розриву функції $z = \frac{10x}{(x-1)^2 + (y+1)^2}$: а) $(0; 0)$; б) $(1; -1)$; в) $(-1; 1)$; г) $(-1; -1)$; д) інша відповідь.
- Вказати точки або лінії розриву функції $z = \frac{1}{(x-y)^2}$: а) $y = x$; б) $y = -x$; в) $y = 0$; г) $x = 0$; д) інша відповідь.

6. Знайти значення похідних $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції $z = xy + \frac{y}{x}$ в точці $M_0(-2; 3)$: а) $\frac{9}{4}; \frac{5}{2}$; б) $\frac{9}{4}; -\frac{5}{2}$; в) $\frac{15}{4}; -\frac{5}{2}$; г) $-\frac{9}{4}; -\frac{5}{2}$; д) інша відповідь.
7. Знайти значення похідних $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції $z = \frac{5}{x^3+y^2}$ в точці $M_0(2; -1)$: а) $-\frac{20}{27}; \frac{10}{81}$; б) $\frac{20}{27}; -\frac{10}{81}$; в) $-\frac{20}{27}; -\frac{10}{81}$; г) $\frac{2}{7}; \frac{1}{81}$; д) інша відповідь.
8. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \cos y$ для функції: а) $z = x^2 \sin y + y^3$; б) $z = x^2 \cos y + y^2$; в) $z = 2x \sin y + x$; г) $z = x^2 \cos y + xy^2$; д) інша відповідь.
9. $\frac{\partial z}{\partial y} = -x \sin(x^2 y)$ для функції: а) $z = \frac{1}{x^2} \cos(x^2 y)$; б) $z = \frac{1}{x} \cos(x^2 y)$; в) $z = x \cos(x^2 y)$; г) $z = \frac{1}{2} x \cos(x^2 y)$; д) інша відповідь.
10. Знайти значення частинних похідних $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ функції $u = \frac{5}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ в точці $M_0(2; -2; 1)$: а) $\frac{10}{27}; \frac{5}{27}; -\frac{10}{27}$; б) $-\frac{10}{27}; \frac{10}{27}; -\frac{5}{27}$; в) $-\frac{5}{27}; -\frac{10}{27}; \frac{1}{27}$; г) $\frac{5}{27}; \frac{10}{27}; \frac{10}{27}$; д) інша відповідь.
11. Знайти значення частинних похідних $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ функції $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ в точці $M_0(3; 0; 4)$: а) $\frac{3}{5}; 0; \frac{4}{5}$; б) $\frac{3}{10}; 0; \frac{2}{5}$; в) $\frac{1}{5}; 0; \frac{1}{5}$; г) $0; \frac{1}{5}; \frac{4}{5}$; д) інша відповідь.
12. Знайти $\frac{dz}{dt}(t_0)$, якщо $z = e^{2x-3y}$, де $x = \operatorname{tg} t, y = t^2 - t$ і $t_0 = 0$: а) -1 ; б) -5 ; в) 5 ; г) 0 ; д) інша відповідь.
13. Знайти $\frac{dz}{dx}$, якщо $z = \ln \frac{x}{y}$, де $y = x^3 + 1$: а) $\frac{x^3-3x^2+1}{x(x^3+1)}$; б) $\frac{x^3+4}{x(x^3+1)}$; в) $\frac{3x^2}{x^3+1}$; г) $\frac{1}{x}$; д) інша відповідь.
14. Знайти $\frac{\partial z}{\partial u}$, якщо $z = x^2 y - y^2 x$, де $x = u \cos v, y = u \sin v$: а) $3u^2 \sin v \cos v (\cos v - \sin v)$; б) $3u^2 (\cos v + \sin v)$; в) $3 \sin v (\cos v - \sin v)$; г) $u^2 (\cos v - \sin v)$; д) інша відповідь.
15. Знайти $\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо $z = x^2 \cdot \ln y$, де $x = \frac{v}{u}, y = u^2 + v^2$: а) $\frac{2v}{u^2} \ln(u^2 + v^2) + \frac{v^2}{u^2+v^2}$; б) $\frac{2u}{v^2} \ln(u^2 + v^2)$; в) $\frac{v^2}{u^2+v^2}$; г) $\frac{2v}{u^2} \ln(u^2 + v^2)$; д) інша відповідь.
16. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$, якщо $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$: а) $-\frac{cx}{a^2z}$; б) $-\frac{c^2x}{a^2z}$; в) $-\frac{c^2x}{az}$; г) $\frac{c^2}{az}$; д) інша відповідь.
17. Знайти $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0$: а) $\frac{2z}{y+1}$; б) $\frac{2y}{z+1}$; в) $\frac{2}{y+1}$; г) $\frac{z}{2y-1}$; д) інша відповідь.
18. Знайти похідну функції $z = x^2 - xy + y^2$ в точці $M(1; 1)$ за напрямом вектора $\vec{l} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$: а) $\frac{7}{5}$; б) $\frac{5}{7}$; в) $-\frac{1}{5}$; г) $\frac{4}{5}$; д) інша відповідь.
19. Знайти похідну функції $z = x\sqrt{x} - \sqrt{y}$ в точці $M(3; 1)$ за напрямом, що утворює кут $\alpha = 30^\circ$ з додатнім напрямом осі OX : а) 2 ; б) $\frac{9}{4}$; в) $\frac{1}{4}$; г) -2 ; д) інша відповідь.
20. Знайти похідну функції $u = -xyz + xy^2 + z^3$ у точці $M(1; 1; 2)$ в напрямі, який утворює з координатними осями кути відповідно в $60^\circ, 45^\circ, 60^\circ$: а) 5 ; б) 6 ; в) $5 + \frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $5 + 2\sqrt{2}$; д) інша відповідь.
21. Знайти градієнт функції $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ у точці $M(1; 1; -1)$: а) $\frac{2}{3}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$; б) $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$; в) $\frac{2}{3}(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$; г) $2(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$; д) інша відповідь.
22. Знайти градієнт функції $u = x^2 + y^2 - 3z^2$ у точці $M(1; 1; 1)$: а) $2(\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k})$; б) $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$; в) $2(\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k})$; г) $3(\vec{i} - \vec{j})$; д) інша відповідь.
23. Знайти кут між градієнтами функції $z = xy$ у точках $A(3; 4)$ і $B(-4; 3)$: а) $\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{2}$; в) $\frac{\pi}{4}$; г) $\frac{\pi}{6}$; д) інша відповідь.
24. Знайти похідну функції $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ в точці $M(3; 4)$ за напрямом її градієнта. а) 2 ; б) 3 ; в) 1 ; г) 4 ; д) інша відповідь.
25. Знайти $dz(1; 2)$, якщо $z = x^3 y^4$: а) $48dx + 32dy$; б) $3dx + 4dy$; в) $48dx - 3dy$; г) $-48dx + 32dy$; д) інша відповідь.
26. Знайти $du(1; 0; 1)$, якщо $U = xy + yz + xz$: а) $dx + 2dy + dz$; б) $dx + dy + dz$; в) $2dx + 2dy + dz$; г) $dx - dy + dz$; д) інша відповідь.
27. Скласти рівняння дотичної площини до поверхні $z = 3 + x^2 - y^2$ в точці $M(1; 2; 0)$: а) $2x - 4y - z + 6 = 0$; б) $x - 4y - 2z - 1 = 0$; в) $x + 4y + z - 6 = 0$; г) $2x - 3y - z + 6 = 0$; д) інша відповідь.

28. Скласти рівняння дотичної площини до поверхні $z = e^{x \cos y}$ в точці $M(1; \pi; \frac{1}{e})$: а) $x - y - 2z + 1 = 0$; б) $x + ez - 2 = 0$; в) $2x - ez + 2 = 0$; г) $x - ey + z = 0$; д) інша відповідь.
29. Скласти рівняння нормалі до поверхні $z = xy$ в точці $M(1; 1; 1)$: а) $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$; б) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$; в) $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$; г) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{1}$; д) інша відповідь.
30. Скласти рівняння нормалі до поверхні $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$ в точці $M(0; -1; 7)$: а) $\frac{x}{-4} = \frac{y+1}{-8} = \frac{z-7}{-1}$; б) $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-7}{8}$; в) $\frac{x}{4} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+7}{1}$; г) $\frac{x}{4} = \frac{y-1}{8} = \frac{z+7}{1}$; д) інша відповідь.
31. Скласти рівняння дотичної площини до поверхні $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$ в точці $M(2; 2; 3)$: а) $x + y - z + 1 = 0$; б) $2x + y - 3z - 1 = 0$; в) $2x + 2y - 3z + 1 = 0$; г) $2x + 3y - z - 2 = 0$; д) інша відповідь.
32. Скласти рівняння дотичної площини до поверхні $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy + yz - 2xz + 16 = 0$ в точці $M(1; 2; 3)$: а) $x - 6y + 9z - 16 = 0$; б) $x + 9y - 6z - 16 = 0$; в) $x + 6y - 9z - 1 = 0$; г) $x - y + z - 6 = 0$; д) інша відповідь.
33. Скласти рівняння нормалі до поверхні $2x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 5 = 0$ в точці $M(1; 1; -1)$: а) $\frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{-3}$; б) $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+1}{3}$; в) $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+1}{-3}$; г) $\frac{x-1}{-5} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+1}{3}$; д) інша відповідь.
34. Скласти рівняння нормалі до поверхні $x^3 + xy^2 + x^2y - z^3 - 7 = 0$ в точці $M(2; 0; 1)$: а) $\frac{x-2}{12} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{-3}$; б) $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{-12}$; в) $\frac{x+2}{-12} = \frac{y}{-4} = \frac{z-1}{-3}$; г) $\frac{x+2}{-3} = \frac{y}{-4} = \frac{z+1}{12}$; д) інша відповідь.
35. Знайти значення похідної $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ функції $z = \sin(x + \cos y)$ в точці $M_0(0; \frac{\pi}{2})$: а) $\sin 1$; б) 1 ; в) 0 ; г) $-\frac{\pi}{2}$; д) інша відповідь.
36. Знайти значення похідної $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ функції $z = \sin(xy)$ в точці $M_0(0; -1)$: а) 0 ; б) -1 ; в) -2 ; г) 1 ; д) інша відповідь.
37. Знайти $d^2 z(2; 1)$, якщо $z = \frac{x}{x-y}$: а) $2dx^2 - 6dxdy - 6dy^2$; б) $3dx^2 - 6dxdy$; в) $2dx^2 - 6dxdy + 4dy^2$; г) $2dx^2 + 4dy^2$; д) інша відповідь.
38. Знайти $d^2 z(1; 0)$, якщо $z = x \sin^2 y$: а) $2dxdy$; б) $4dy^2$; в) $2dy^2$; г) $2dxdy + 2dy^2$; д) інша відповідь.
39. Знайти критичні точки функції $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y$: а) $(0; 0)$; б) $(0; 1)$; в) $(1; 1)$; г) $(1; 0)$; д) інша відповідь.
40. Знайти критичні точки функції $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x - 1$: а) $(0; 1)$; б) $(-1; 1)$; в) $(1; -1)$; г) $(1; 1)$; д) інша відповідь.
41. Дослідити функцію $z = x^3 + y^3 - 3xy$ на екстремум: а) $z_{\min} = z(1; 1) = -1$; б) $z_{\max} = z(1; 1) = -1$; в) $z_{\min} = z(-1; 1) = -2$; г) $z_{\max} = z(-1; 1) = 2$; д) інша відповідь.
42. Знайти точки екстремуму функції $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$: а) $(-2; 2)$ —точка мінімуму; б) $(2; -2)$ —точка максимуму; в) $(-2; -2)$ —точка мінімуму; г) екстремуму немає; д) інша відповідь.
43. Дослідити функцію $z = x^2 + 2xy - 2y^2 + 4x + 1$ на екстремум: а) $z_{\min} = z(-1; 1) = -5$; б) $z_{\max} = z(-2; 2) = 1$; в) екстремуму немає; в) $z_{\min} = z(1; -1) = 3$; г) інша відповідь.
44. Знайти точки умовного мінімуму функції $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$ при $x + y + 3 = 0$: а) $(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2})$; б) $(-2; -1)$; в) $(-1; -2)$; г) $(-\frac{5}{2}; -\frac{1}{2})$; д) інша відповідь.
45. Знайти точки умовного максимуму функції $z = xy$ при $x + y = 1$: а) $(2; -1)$; б) $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$; в) $(\frac{1}{4}; \frac{3}{4})$; г) $(-1; 2)$; д) інша відповідь.
46. Визначити умовний мінімум функції $z = 6 - 4x - 3y$ при $x^2 + y^2 = 1$: а) -1 ; б) 1 ; в) 3 ; г) 4 ; д) інша відповідь.
47. Знайти найбільше значення функції $z = xy + x + y$ у замкненій області D , обмеженій прямими $x = 1$; $x = 2$; $y = 2$; $y = 3$: а) 10 ; б) 11 ; в) 5 ; г) -11 ; д) інша відповідь.

48. Знайти найменше значення функції $z = x^2y(4 - x - y)$ у замкненій області D , обмеженій прямими $x = 0$; $y = 0$; $x + y = 6$: а) 64; б) 4; в) -4; г) -64; д) інша відповідь.
49. Знайти суму найбільшого і найменшого значень функції $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1$ у замкненій області D , обмеженій прямими $x + y + 1 = 0$; $y = 0$ і $x = -3$: а) 3; б) -3; в) 6; г) -6; д) інша відповідь.
50. Знайти середнє арифметичне найбільшого і найменшого значень функції $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$ в замкненій області D , обмеженій прямими $x = -1$; $y = -1$; $x + y = 1$: а) $23\frac{1}{20}$; б) $32\frac{29}{36}$; в) 35; г) 30; д) інша відповідь.

Предметний покажчик

- δ -окіл точки, 9
- аргумент, 6
- вектор-функція, 6
- властивості неперервної функції, 14
- геометричний зміст
 - околу точки на площині, 9
 - околу точки у просторі, 9
 - повного диференціала, 35
 - частинної похідної, 18
- головна частина приросту функції, 23
- градієнт, 39
 - властивості, 40
- границя функції у точці, 10
- графік функції двох змінних, 7
- диференціал
 - n -го порядку, 46
 - другого порядку, 45
 - першого порядку, 45
 - повний, 21
 - інваріантність форми, 27
 - степенева формула, 46
 - третього порядку, 46
- диференціювання функції кількох змінних, 15
- достатні умови
 - диференційовності у точці, 20
 - локального екстремуму, 56
 - умовного екстремуму
 - для функції двох змінних, 64
 - для функції трьох змінних, 66
- дотична площина до поверхні, 32
- екстремум
 - безумовний, 62
 - локальний, 53
 - умовний, 62, 63
- залишковий член
 - у формі Лагранжа, 51
 - у формі Пеано, 51
- лінія рівня функції, 8
- максимум
 - глобальний, 59
 - локальний, 53
 - умовний, 63
- межа області, 13
- метод множників Лагранжа, 62
- множник Лагранжа, 64
- мінімум
 - глобальний, 59
 - локальний, 53
 - умовний, 63
- незалежні змінні, 6
- необхідні умови
 - локального екстремуму, 54
 - умовного екстремуму
 - для функції двох змінних, 64
 - для функції трьох змінних, 66
- неявно задана функція
 - двох змінних, 30
 - однієї змінної, 29
- нормаль до поверхні, 32
- область
 - відкрита, 13
 - замкнута, 13
 - зв'язна, 13
 - обмежена, 13
- окіл точки, 9
 - проколотий, 9
- поверхня рівня функції, 8
- повний приріст функції, 14
- поле
 - нестационарне, 35
 - скалярне, 35
 - плоске, 36
 - просторове, 36
 - стационарне, 35
- похідна за напрямом, 36
- правило дослідження на екстремум, 58
- рівняння зв'язку, 63
- схема пошуку найбільшого (найменшого) значення функції у області, 60
- теорема
 - про диференціал складеної функції, 27

- про зв'язок диференційовності та неперервності, 19
- про зв'язок диференційовності у точці та існуванням частинних похідних, 19
- про зв'язок між похідною за напрямом та градієнтом, 39
- про неперервність класу елементарних функцій, 12
- про похідні складеної функції, 24, 25
- про рівність мішаних похідних, 44
- про існування неявної функції, 29
- про існування похідної за напрямом, 36
- точка
 - внутрішня, 10
 - глобального максимуму, 59
 - глобального мінімуму, 59
 - локального екстремуму, 53
 - локального максимуму, 53
 - локального мінімуму, 53
 - межова, 10
 - розриву функції, 12
 - стаціонарна, 55
 - умовного екстремуму, 63
 - умовного мінімуму (максимуму), 63
- формула Тейлора для функції двох змінних, 51
- функція
 - n змінних, 6
 - Лагранжа
 - для двох змінних, 64
 - для трьох змінних, 66
 - двох змінних, 6
 - диференційовна в точці, 18
 - елементарна, 12
 - множина значень, 6
 - неперервна в точці, 12
 - неперервна у області, 12
 - область визначення, 6
 - область існування, 6
 - розривна у точці, 12
 - трьох змінних, 6
- частинна похідна, 15
 - n -го порядку, 42
 - другого порядку, 42
 - мішана другого порядку, 43
 - першого порядку, 41
- частинний приріст функції, 14
- частинний приріст функції по x , 14

ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – К.: А.С.К., 2003. – 648 с.
2. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика. – К.: Техніка, 2000. – 592 с.
3. Кованцов М. І. Диференціальна геометрія. – К.: Вища школа, 1973. – 276 с.
4. Пак В.В., Косенко Ю.Л. Вища математика: Підручник. – К.: Либідь, 1996. – 440 с.
5. Шкіль М.І. Математичний аналіз. Ч.ІІ. – К.: Вища школа, 1995. – 512 с.
6. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Том 2. — М.: Наука, 1978. – 456 с.
7. Шипачев В.С. Высшая математика. — М.: Высш. шк., 1991.- 479 с.
8. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. Т.І. — М.: Высш. шк., 1970. – 688 с.
9. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т.І. – М.: Гостехиздат, 1955. – 696 с.
10. Кудрявцев В.Ф., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 1989. – 656 с.

Я. І. Савчук, А. І. Бандура, Л. І. Криштопа, Л. М. Шегда

Диференціальне числення функцій декількох змінних

Навчальний посібник

Комп'ютерна верстка: А. І. Бандура, Л. М. Шегда

Дизайн обкладинки: А. І. Бандура

Підписано до друку: 30.03.2013. Формат 61ч84/16

Папір офсетний, друк цифровий.

Гарнітура Xe_{La}TeX. Умовн. друк. арк. 11,5 Тираж 100 прим. Зам. №64 від 30.03.2013.

Видавництво „Сімик“

76000, м. Івано-Франківськ, вул. Незалежності, 46/111

тел. (0342)3-25-91, e-mail:symykcom.if.ua

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єкта

Видавничої справи серія ІФ № 11 від 27.03.2001 року

Віддруковано: підприємець Голіней О. М.

76008, м. Івано-Франківськ, вул. Галицька, 128

тел. (0342) 58 04 32

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

ФУНКЦІЇ

ДЕКЛАРИКАЦІЯ ЗМІСТУ

$$f'_y(0,0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta y} = 0.$$

Оскільки $x^2 + y^2 \neq 0$, тобто $x^2 + y^2 > 0$, то, використовуючи диференціювання, матимемо:

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= \left(xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)'_x = y \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + x \frac{2x(x^2 + y^2) - 2x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right) \\ &= y \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right), \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} f'_y(x,y) &= \left(xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)'_y = x \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + y \frac{(-2y)(x^2 + y^2) - 2y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right) \\ &= x \cdot \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right). \end{aligned}$$

Поклавши $x = 0$, $y \neq 0$ в рівності (4.1), отримаємо $f'_x(0,y)$. Згідно означення частинної похідної, знаходимо

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f'_x(0,\Delta y) - f'_x(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-\Delta y}{\Delta y} = -1.$$

