

**ІВАНО-ФРАНКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ НАФТИ І ГАЗУ
КАФЕДРА ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ**

Гургула С.І., Лавинюкова Т.Г., Пилип'юк Р.Г.

СФЕРИЧНА ТРИГОНОМЕТРІЯ

**Конспект лекцій
для студентів спеціальностей
“Інженерна геодезія”, “Землевпорядкування і кадастр”**

**Івано-Франківськ
2002**

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ІВАНО-ФРАНКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ НАФТИ І ГАЗУ
КАФЕДРА ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ**

Гургула С.І., Лавинюкова Т.Г., Пилип'юк Р.Г.

СФЕРИЧНА ТРИГОНОМЕТРІЯ

**Конспект лекцій
для студентів спеціальностей
“Інженерна геодезія”, “Землевпорядкування і кадастр”**

МВ 02070855-974-2002

**м. Івано-Франківськ
2002**

Гургула С.І., Лавинюкова Т.Г., Пилип'юк Р.Г. Сферична тригонометрія. Конспект лекцій для студентів спеціальностей “Інженерна геодезія”, “Землевпорядкування та кадастр” – Івано-Франківськ: Факел, 2002, 27 с.

У конспекті лекцій викладено основні формули і теореми сферичної тригонометрії. Наведено приклади розв’язування сферичних трикутників. Рекомендовано для студентів спеціальностей “Інженерна геодезія” і “Землевпорядкування та кадастр”

Рецензент

Савчук Я.І. – кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри вищої математики

Дане видання – власність ІФНТУНГ.

Забороняється тиражувати та розповсюджувати без відома авторів

Гургула С.І., Лавинюкова Т.Г., Пилип'юк Р.Г. Сферична тригонометрія. Конспект лекцій для студентів спеціальностей “Інженерна геодезія”, “Землевпорядкування та кадастр” – Івано-Франківськ: Факел, 2002, - с.

У конспекті лекцій викладено основні формули і теореми сферичної тригонометрії. Наведено приклади розв’язування сферичних трикутників. Рекомендовано для студентів спеціальностей “Інженерна геодезія” і “Землевпорядкування та кадастр”

Рецензент кандидат фіз.-мат. наук, доцент Савчук Я.І.

Погоджено з навчально-методичним об’єднанням спеціальності

Р.М. Рудий

Нормоконтролер

О.Г. Гургула

Коректор

Н.Ф. Будуйкевич

Член експертно-рецензійної
комісії університету

Р.М.Рудий

Дане видання – власність ІФНТУНГ.

Забороняється тиражувати та розповсюджувати без відома авторів

ЗМІСТ

1 ЕЛЕМЕНТИ ГЕОМЕТРІЇ НА СФЕРІ.....	4
1.1 ВСТУП.....	4
1.2 ДУГИ І КУТИ НА СФЕРІ.....	5
1.3 СФЕРИЧНІ ТРИКУТНИКИ. ВЛАСТИВОСТІ СТОРІН І КУТІВ СФЕРИЧНОГО ТРИКУТНИКА.....	7
1.4 ПОЛЯРНІ СФЕРИЧНІ ТРИКУТНИКИ.....	8
1.5 РІВНІСТЬ І СИМЕТРІЯ СФЕРИЧНИХ ТРИКУТНИКІВ.....	10
2 ОСНОВНІ ФОРМУЛИ СФЕРИЧНОЇ ТРИГОНОМЕТРІЇ.....	11
2.1 ФОРМУЛА КОСИНУСА СТОРОНИ СФЕРИЧНОГО ТРИКУТНИКА.....	11
2.2 ФОРМУЛА КОСИНУСА КУТА СФЕРИЧНОГО ТРИКУТНИКА.....	12
2.3 ФОРМУЛА СИНУСІВ ДЛЯ СФЕРИЧНОГО СФЕРИЧНОГО ТРИКУТНИКА.....	12
2.4 ФОРМУЛА П'ЯТИ ЕЛЕМЕНТІВ.....	13
2.5 ФОРМУЛА ЧОТИРЬОХ ЕЛЕМЕНТІВ.....	15
2.6 ФОРМУЛИ ПОЛОВИННИХ КУТІВ.....	15
2.7 ФОРМУЛИ ГАУССА-ДЕЛАМБРА.....	17
2.8 АНАЛОГІЇ НЕПЕРА.....	18
3 ПРЯМОКУТНІ СФЕРИЧНІ ТРИКУТНИКИ. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СФЕРИЧНИХ ТРИКУТНИКІВ	20
3.1 КЛАСИФІКАЦІЯ СФЕРИЧНИХ ТРИКУТНИКІВ.....	20
3.2 ФОРМУЛИ ДЛЯ ПРЯМОКУТНИХ СФЕРИЧНИХ ТРИКУТНИКІВ.....	20
3.3 ПРАВИЛО НЕПЕРА.....	22
3.4 ДЕЯКІ НАСЛІДКИ ІЗ ФОРМУЛ ДЛЯ ПРЯМОКУТНИХ СФЕРИЧНИХ ТРИКУТНИКІВ.....	23
3.5 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СФЕРИЧНИХ ТРИКУТНИКІВ. ЗАГАЛЬНІ ЗАУВАЖЕННЯ.....	23
3.6 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СФЕРИЧНИХ ТРИКУТНИКІВ.....	24
ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	27

1 ЕЛЕМЕНТИ ГЕОМЕТРІЇ НА СФЕРІ

1.1 ВСТУП

Сферична тригонометрія є розділом сферичної геометрії, в якому вивчаються властивості трикутників, розташованих на сфері, і методи їх розв'язування.

Сферична тригонометрія виникла і розвинулась із потреб астрономії, частиною якої вона і була в науці древності і середньовіччя. Вивчаючи рух небесних тіл, астрономи древності розглядали його як такий, що відбувається на небесній сфері, яка оточує Землю і існує насправді (що, як методологічний засіб, зберігається і в наші дні).

Одним з перших поклав початок вченню про сферу великий давньогрецький астроном Гіппарх (II ст. до н.е.), який ввів географічні координати (широту і довготу) для визначення положення точки на земній поверхні, а також склав таблицю хорд, яка заміняла в ті часи таблицю синусів і яка була необхідна для виконання чисельних розрахунків на сфері. Дальший розвиток сферичної тригонометрії зв'язаний з іменем Менелая Александрійського (I ст. н.е.), який розглядає питання про рівність і нерівність кутів і сторін в одному або двох сферичних трикутниках подібно до того, як це робить Евклід для плоских трикутників. Клавдій Птолемей (II ст. н.е.) дає доведення кількох теорем про сферичні трикутники і складає нову таблицю хорд.

В середні віки першість в розвитку точних наук перейшла до арабських вчених. Багдадський математик Аль Баттіні (850-929) вже користується тригонометричною функцією “синус”, вводить нову тригонометричну функцію – тангенс і виводить одну із основних формул сферичної тригонометрії: формулу косинуса сторони сферичного трикутника. Відомий арабський вчений Абу-ль-Вефа (939-998) удосконалив методи обчислення синусів і тангенсів і дав доведення теореми синусів сферичної тригонометрії. Азербайджанський математик Насіреддін Тусі (1201-1274) вперше викладає сферичну тригонометрію як самостійну дисципліну. Він розв'язує задачу про знаходження сторін сферичного трикутника за даними трьома його кутами, користуючись побудовою допоміжного трикутника, полярного даному.

В епоху Відродження центр наукової діяльності переміщається в Європу. Тут розвиток сферичної тригонометрії значно прискорився. Першими із європейських математиків питаннями сферичної тригонометрії займалися Пурбах (1423-1461) і Регіомонтан (1436-1476), які вивели деякі нові формули для розв'язування сферичних трикутників, склали нові таблиці синусів і тангенсів, які послужили основою для дальшого розвитку сферичної тригонометрії і стали основою для багатьох астрономічних обчислень. Крім того, Регіомонтан випустив перший друкований астрономічний календар, яким користувались Колумб, Америго Веспуччі, Коперник.

В XVII ст. шотландський математик Непер (1550-1617) ввів свої аналогії – формули визначення двох кутів сферичного трикутника за тангенсами через

синуси або косинуси протилежних кутів і котангенс третього кута і для визначення двох сторін сферичного трикутника за їх тангенсами через синуси або косинуси протилежних кутів і тангенс третьої сторони. Пізніше голландський геодезист Снелліус (1580-1626) заново обґрунтував поняття про полярні сферичні трикутники і довів ряд теорем про них, що дало зручні методи для розв'язування багатьох задач сферичної тригонометрії.

Сучасного виду надав сферичній тригонометрії Ейлер (1707-1783). Встановлене ним “обмеження” розглядати тільки такі трикутники, сторони і кути яких менші 180° , впорядковує основи сферичної тригонометрії і спрощує формули. Французький астроном Делаамбр (1749-1822) одержав чотири важливі формули, які виражали синуси і косинуси півсум і піврізниць двох кутів сферичного трикутника через синуси і косинуси протилежних сторін і половинних значень третього кута. Ці формули, незалежно виведені також Гауссом (1777-1855), разом з аналогіями Непера є робочими формулами при розв'язуванні сферичних трикутників.

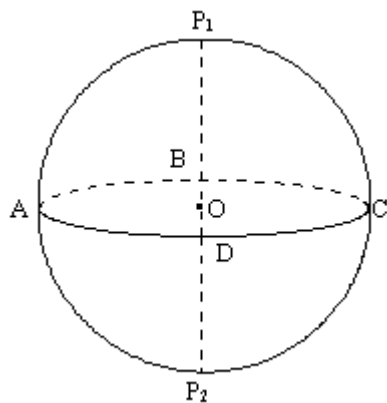
В практичних застосуваннях важливу роль відіграє також теорема Лежандра (1752-1833), у відповідності з якою розв'язування малих сферичних трикутників можна провести за формулами плоскої тригонометрії. Французький математик Модюї (1731-1815) сформулював прості і зручні мнемонічні правила для розв'язування прямокутних сферичних трикутників.

В XX столітті застосування сферичної тригонометрії значно розширилось завдяки створенню обчислювальних машин. В наш час сферична тригонометрія застосовується в астрономії, геодезії, маркшейдерії, мореплаванні, авіації і космонавтиці.

1.2 ДУГИ І КУТИ НА СФЕРІ

Сфера являє собою геометричне місце точок простору, рівновіддалених від деякої точки, яка називається її *центром*. Відрізок, що сполучає центр сфери з будь-якою її точкою, називається *радіусом*, а відрізок, що проходить через центр і сполучає дві точки на сфері, називається *діаметром* сфери.

Очевидно, всякий переріз сфери площиною є коло, причому радіус цього кола тим більший, чим ближче до центра сфери проходить січна площина. Якщо січна площина пройде через центр сфери, в перерізі одержиться коло найбільшого радіуса, який, очевидно, буде дорівнювати радіусу сфери, - так зване *коло великого круга*.



Якщо через центр сфери O провести перпендикуляр до площини ABCD (рис. 1.1) одного із її великих кругів і продовжити його в обидва боки, то він перетне сферу в двох діаметрально протилежних точках P₁ і P₂. Точки P₁ і P₂ називаються *полюсами* даного кола великого круга, а коло ABCD називається

полярною або екватором точок P₁ і P₂.

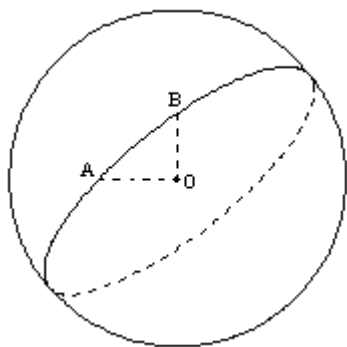


Рисунок 1.2

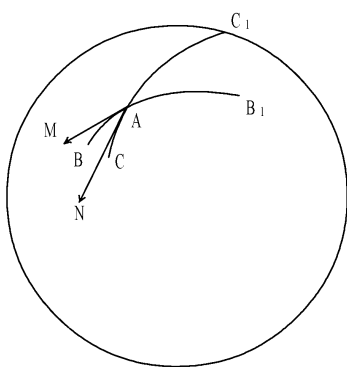


Рисунок 1.3

Відомо, що через три точки простору, які не лежать на одній прямій можна провести площину і притому тільки одну. Якщо на сфері взяти дві точки A і B , які не є кінцями одного діаметра, то через них і центр сфери O можна провести тільки одну площину. Звідси випливає, що через точки A і B проходить і притому єдине коло великого круга. При цьому менша із двох дуг, на які поділяють це коло точки A і B буде найкоротшою віддаллю між точками A і B , тобто найкоротшою лінією, яка лежить на сфері і сполучає точки (рис.1.2).

В сферичній тригонометрії вивчаються тільки фігури, утворені дугами кіл великих кругів. Всюди далі під терміном “дуга” ми будемо розуміти дугу кола великого круга. Очевидно, довжина дуги пропорційна величині центрального кута, який спирається на неї. Тому дуга на сфері вимірюється величиною кута між радіусами, проведеними до кінців цієї дуги (тобто в тих же одиницях, що і кути – градусах, радіанах і т.д.).

Як правило, в сферичній тригонометрії, за пропозицією Ейлера, розглядаються тільки дуги, менші 180° . Це правило носить назву “обмеження Ейлера”.

Дві дуги BB_1 і CC_1 , перетинаючись в точці A на сфері, утворюють *сферичний кут* BAC . Точка A називається вершиною, дуги AB і AC – сторонами сферичного кута. Величина сферичного кута вимірюється кутом між дотичними AM і AN до сторін сферичного кута BAC в точці їх перетину, тобто в вершині (рис. 1.3.):

$$\text{сф.}\angle BAC = \angle MAN.$$

Нехай дано сферичний кут BAC , сторони якого AB і AC , утворені при перетині сфери площинами (P_1) і (P_2) відповідно. Ці площини утворюють між собою двогранний кут α , який вимірюється в площині, перпендикулярній до лінії перетину цих площин. Провівши цю площину через вершину кута (точка A) одержуємо, що кут α дорівнює куту між дотичними AM і AN до сторін кута в точці їх перетину (рис. 1.4.). Таким чином, сферичний кут вимірюється двограним кутом між площинами, при перетині яких із сферою утворені сторони кута.

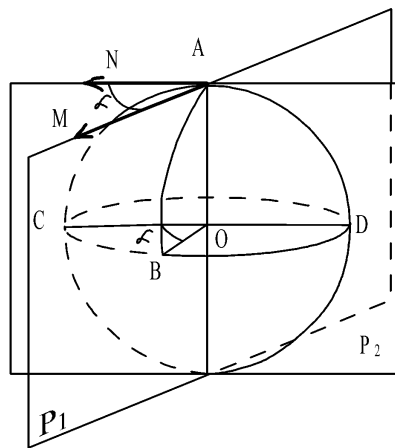


Рисунок 1.4

Цю площину можна провести і через центр сфери. Перетин цієї площини із сферою дасть великий круг B_1CD_1 , для якого точка A є полюсом.

Нехай цей круг перетинається із сторонами кута в точках B і C . Тоді кут між

площинами (P_1) і (P_2) буде дорівнювати центральному куту $\angle BOC$. Але центральним кутом $\angle BOC$ вимірюється також і дуга BC , отже,

$$\text{сф.}\angle BAC = \cup BC.$$

Таким чином, сферичний кут вимірюється дугою, яка міститься між його сторонами і для якої вершина кута є полюсом.

Якщо кут між дугами AB і AC прямий, то одна з дуг називається *сферичним перпендикуляром* до іншої.

Очевидні такі твердження:

1) дуга, яка проходить через полюс даного кола великого круга, перпендикулярна до цього кола і, навпаки -

2) сферичний перпендикуляр до даної дуги кола великого круга проходить через полюс цього кола;

3) віддаль від будь-якої точки полюри до кожного з її полюсів дорівнює 90° ;

4) якщо дана точка віддалена на 90° від двох яких-небудь точок даної дуги, які не є кінцями одного і того ж діаметра, то вона є полюсом цієї дуги великого круга;

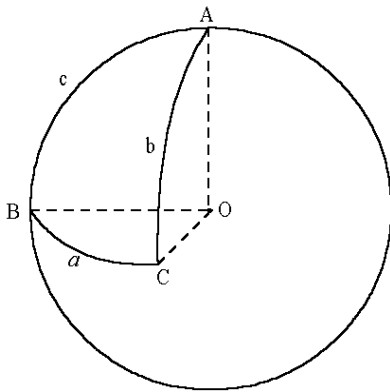
5) якщо $\cup AB = 90^\circ$, $\cup AC = 90^\circ$, то $\text{сф.}\angle BAC = \cup BC$.

Два сферичні кути називаються *вертикальними*, якщо сторони одного з них є продовженням сторін іншого. Очевидно, вертикальні сферичні кути рівні між собою.

Два сферичні кути називаються *суміжними*, якщо одна сторона в них спільна, а дві інші лежать на одному колі великого круга. Очевидно, суміжні сферичні кути в сумі становлять 180° .

1.3 СФЕРИЧНІ ТРИКУТНИКИ. ВЛАСТИВОСТІ СТОРІН І КУТІВ СФЕРИЧНОГО ТРИКУТНИКА

Сферичним трикутником називається фігура, утворена трьома дугами кіл великих кругів, які перетинаються в трьох точках. Точки перетину дуг називаються *вершинами* сферичного трикутника і позначаються великими буквами A , B , C . Протилежні їм дуги, що містяться між вершинами, називаються *сторонами* сферичного трикутника і позначаються одноіменними малими буквами a , b , c (рис.1.5.). Очевидно, як кути A , B , C , так і сторони a , b , c сферичного трикутника вимірюються кутовою мірою (як правило, градусною).



Фігура, що доповнює сферичний трикутник до повної сфери, теж є сферичний трикутник, сторони якого збігаються із сторонами даного, а кути доповнюють кути даного трикутника до 360° . Щоб уникнути непорозумінь, в сферичній тригонометрії

прийнято обмеження Ейлера: розглядаються тільки такі сферичні трикутники, сторони і кути яких менші 180° . Такі трикутники називають ще трикутниками Ейлера.

Сферичний трикутник можна також розглядати як фігуру, утворену при перетині сфери з трьохгранним кутом $OABC$, вершина якого знаходиться у центрі сфери. Із сказаного вище випливає, що сторони сферичного трикутника вимірюються плоскими кутами при вершині трьохгранного кута, а кути - двограними кутами трьохгранного кута.

Щоб сукупність дуг і кутів на сфері могла утворювати сферичний трикутник, необхідно, щоб були виконані деякі співвідношення, які складають умови існування сферичного трикутника. Властивості елементів сферичного трикутника випливають із властивостей елементів трьохгранного кута, відомих із стереометрії:

1. Кожна сторона сферичного трикутника менша суми і більша різниці двох інших сторін, тобто

$$a + b > c, a + c > b, b + c > a; \quad (1.1)$$

$$a > b - c, b > a - c, c > b - a. \quad (1.2)$$

2. Сума сторін сферичного трикутника більша 0° і менша 360° , тобто

$$0^\circ < a + b + c < 360^\circ. \quad (1.3)$$

3. Сума кутів сферичного трикутника більша 180° і менша 540° , тобто

$$180^\circ < A + B + C < 540^\circ. \quad (1.4)$$

Величина $\varepsilon = A + B + C - 180^\circ$ називається *ексцесом* або *сферичним надлишком* сферичного трикутника.

Відмітимо ще кілька властивостей сферичного трикутника, деякі з яких аналогічні властивостям плоского трикутника. А саме, в сферичному трикутнику:

4. Проти рівних сторін лежать рівні кути.

5. Проти рівних кутів лежать рівні сторони.

6. Проти більшої сторони лежить більший кут.

7. Проти більшого кута лежить більша сторона.

Крім вищевказаних, трикутники Ейлера задовольняють ще так звані умови однорідності:

8. Якщо сума двох сторін сферичного трикутника більша, рівна або менша 180° , то і сума протилежних їм кутів більша, рівна або менша 180° і, навпаки -

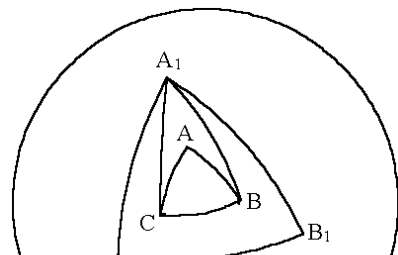
9. Якщо сума двох кутів сферичного трикутника більша, рівна або менша 180° , то і сума протилежних їм сторін більша, рівна або менша 180° .

1.4 ПОЛЯРНІ СФЕРИЧНІ ТРИКУТНИКИ

Сферичний трикутник $A_1B_1C_1$ називається *полярним* до сферичного трикутника ABC , якщо вершини трикутника ABC є полюсами сторін трикутника $A_1B_1C_1$.

Теорема 1.1. Якщо сферичний трикутник $A_1B_1C_1$ полярний до сферичного трикутника ABC , то сферичний трикутник ABC також буде полярним до сферичного трикутника $A_1B_1C_1$.

Доведення. З'єднаємо дугами вершину A_1 із вершинами B і C (рис.1.6.).



Оскільки C - полюс дуги A_1B_1 , то $\angle A_1C = 90^\circ$.

Аналогічно: B - полюс дуги A_1C_1 , отже, $\cup A_1B = 90^\circ$. Таким чином, точка A_1 віддалена на 90° від точок B і C , а, значить, A_1 - полюс дуги BC (див. п.1.2.). Аналогічно доводиться, що точка B_1 є полюс дуги AC , а точка C_1 - полюс дуги AB . Теорема доведена.

На основі цієї теореми можна зробити висновок, що полярність трикутників - властивість взаємна. Можна говорити про пари взаємно полярних трикутників.

Теорема 1.2. Сума кута даного сферичного трикутника і відповідної йому сторони полярного трикутника дорівнює 180° .

Доведення. Продовжимо сторони AB і AC даного трикутника ABC до перетину із стороною B_1C_1 полярного трикутника відповідно у точках E і D

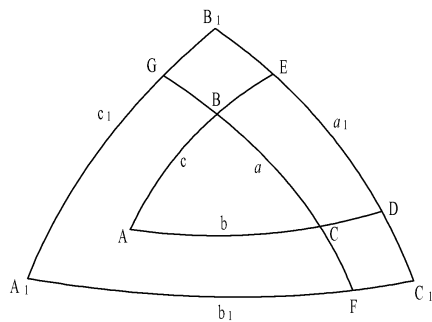


Рисунок 1.7

(рис.1.7.). Оскільки A - полюс дуги B_1C_1 , то $\cup AE = 90^\circ$ і $\cup AD = 90^\circ$, а, значить, $\angle A = \cup ED$ (див. п. 1.2.). Далі, оскільки B_1 - полюс дуги AC , то $\cup B_1D = 90^\circ$; C_1 - полюс дуги AB , то $\cup C_1E = 90^\circ$. Тоді $A + a_1 = ED + B_1E + ED + DC_1 = B_1D + C_1E = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.

Тобто

$$A + a_1 = 180^\circ. \quad (1.5)$$

Аналогічно одержуємо ще дві рівності:

$$B + b_1 = 180^\circ, \quad C + c_1 = 180^\circ. \quad (1.6)$$

Тепер продовжимо сторону BC в обидва боки до перетину із сторонами A_1B_1 і A_1C_1 в точках G і F відповідно. Оскільки A_1 - полюс дуги BC , то $\cup A_1G = 90^\circ$, $\cup A_1F = 90^\circ$. Звідси випливає, що (див. п. 1.2.) $\angle A_1 = \cup GF$. Далі, оскільки B - полюс дуги A_1C_1 , то $\cup BF = 90^\circ$; C - полюс дуги A_1B_1 , то $\cup CG = 90^\circ$. Тоді

$$A_1 + a = GF + BC = GB + BC = CF + BC = CG + BF = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ.$$

Тобто

$$A_1 + a = 180^\circ. \quad (1.7)$$

Аналогічно одержуємо

$$B_1 + b = 180^\circ, \quad C_1 + c = 180^\circ \quad (1.8)$$

Теорема доведена.

Дослідження показують, що, якщо всі сторони даного трикутника менші 90° , то він буде розташовуватись всередині полярного трикутника; якщо всі сторони даного трикутника більші 90° , то полярний трикутник буде розташовуватись всередині даного; якщо трикутник має сторони як менші, так і більші 90° , то полярний трикутник буде перетинати сторони даного трикутника.

Властивості взаємно полярних трикутників мають важливе значення у сферичній тригонометрії, полегшуючи виведення багатьох формул.

Зокрема, для полярного трикутника $A_1B_1C_1$ виконана умова

$$a_1 + b_1 > c_1.$$

Звідси, переходячи до даного трикутника ABC , маємо

$$180^\circ - A + 180^\circ - B > 180^\circ - C,$$

або

$$A + B - C < 180^\circ. \quad (1.9)$$

Аналогічно одержуємо ще дві нерівності

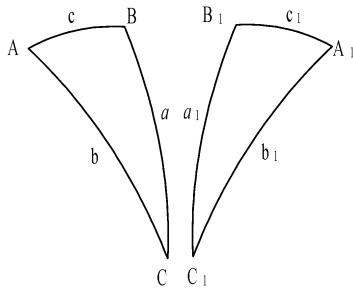
$$B + C - A < 180^\circ, \quad A + C - B < 180^\circ. \quad (1.10)$$

Таким чином, одержана ще одна з умов існування сферичного трикутника: *В сферичному трикутнику сума двох кутів без третього менше 180° .*

1.5 РІВНІСТЬ І СИМЕТРІЯ СФЕРИЧНИХ ТРИКУТНИКІВ

Розглядаємо трикутники, які лежать на одній і тій же сфері.

Рівними називаються сферичні трикутники, які при накладанні суміщаються. Очевидно, у рівних трикутників і всі елементи рівні.



Але обернене твердження не завжди справедливе, як наприклад, для трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ на рис.1.8. Хоча у цих трикутників всі елементи одного трикутника відповідно рівні всім елементам другого, але ці трикутники не рівні. Такі трикутники називаються *симетричними*. Очевидно, у симетричних трикутників рівні елементи розташовані неоднаково.

ок 1.8

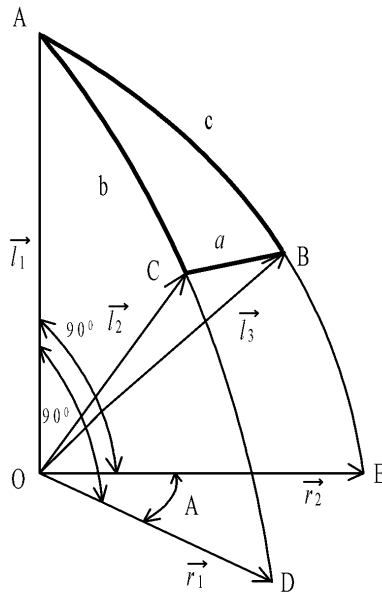
Умова рівності сферичних трикутників може бути сформульована так: *якщо які-небудь три елементи одного сферичного трикутника відповідно рівні трьом елементам іншого сферичного трикутника і розташовані в обох трикутниках однаково, то такі трикутники рівні.* Навпаки, *якщо три елементи одного трикутника відповідно рівні трьом елементам іншого, але розташовані в трикутниках неоднаково, то такі трикутники симетричні.*

Можна довести, що симетричні трикутники рівновеликі, тобто займають однакову частину сфери, на якій вони лежать.

2 ОСНОВНІ ФОРМУЛИ СФЕРИЧНОЇ ТРИГОНОМЕТРІЇ

2.1 ФОРМУЛА КОСИНУСА СТОРОНИ СФЕРИЧНОГО ТРИКУТНИКА

Формула косинуса сторони трикутника є основною формулою сферичної тригонометрії, оскільки з неї можуть бути виведені всі наступні формули. Вона встановлює залежність між трьома сторонами і одним з кутів сферичного трикутника. Розглянемо одне із доведень цієї формули, яке спирається на методи векторної алгебри.



Нехай маємо сферичний трикутник ABC , розташований на сфері радіуса R (рис. 2.1). Із центра сфери O проведемо до вершин A , B і C трикутника радіус-вектори $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$ відповідно. Очевидно, довжина кожного з них є R . В площинах OAC і OAB побудуємо вектори $\vec{r}_1 = \vec{OD}$ і $\vec{r}_2 = \vec{OE}$ відповідно, довжини R кожний, які складають з вектором $\vec{l}_1 = \vec{OA}$ прямий кут. Тоді, очевидно, $\sphericalangle A = \sphericalangle DOE$. Розкладемо вектор $\vec{l}_2 = \vec{OC}$ по векторах $\vec{l}_1$ і $\vec{r}_1$, а вектор $\vec{l}_3 = \vec{OB}$ по векторах $\vec{l}_1$ і $\vec{r}_2$. Як відомо,

$$\begin{aligned} \vec{l}_2 &= \vec{l}_1 \cos b + \vec{r}_1 \sin b, \\ \vec{l}_3 &= \vec{l}_1 \cos c + \vec{r}_2 \sin c. \end{aligned}$$

Розглянемо скалярний добуток векторів $\vec{l}_2$ і $\vec{l}_3$. З одного боку

$$\vec{l}_2 \cdot \vec{l}_3 = |\vec{l}_2| |\vec{l}_3| \cos a = R \cdot R \cos a = R^2 \cos a. \quad (2.1)$$

З іншого

$$\begin{aligned} \vec{l}_2 \cdot \vec{l}_3 &= (\vec{l}_1 \cos b + \vec{r}_1 \sin b) \cdot (\vec{l}_1 \cos c + \vec{r}_2 \sin c) = \\ &= \vec{l}_1^2 \cos b \cos c + \vec{l}_1 \vec{r}_2 \cos b \sin c + \vec{l}_1 \vec{r}_1 \cos c \sin b + \vec{r}_1 \vec{r}_2 \sin b \sin c. \end{aligned}$$

Врахуємо, що

$$\vec{l}_1^2 = |\vec{l}_1|^2 = R^2, \quad \vec{l}_1 \cdot \vec{r}_2 = 0, \quad \vec{l}_1 \cdot \vec{r}_1 = 0, \quad \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = |\vec{r}_1| |\vec{r}_2| \cos A = R^2 \cos A.$$

Тоді

$$\vec{l}_2 \cdot \vec{l}_3 = R^2 \cos b \cos c + R^2 \cos A \sin b \sin c. \quad (2.2)$$

Із (2.1) і (2.2) випливає

$$R^2 \cos a = R^2 \cos b \cos c + R^2 \cos A \sin b \sin c,$$

або

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \quad (2.3)$$

Це і є формула косинуса сторони сферичного трикутника. Аналогічні формули можна записати також для сторін b і c :

$$\begin{aligned}\cos b &= \cos a \cos c + \sin c \sin a \cos B, \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.\end{aligned}\quad (2.4)$$

Одержані формули читаються так: косинус сторони сферичного трикутника дорівнює добутку косинусів двох інших його сторін плюс добуток синусів цих же сторін, помножений на косинус кута між ними.

2.2 ФОРМУЛА КОСИНУСА КУТА СФЕРИЧНОГО ТРИКУТНИКА

Виведемо тепер формулу косинуса кута сферичного трикутника. Нехай є два взаємно полярні сферичні трикутники із сторонами і кутами a, b, c, A, B, C і $a_1, b_1, c_1, A_1, B_1, C_1$. Запишемо формулу косинуса сторони a_1 трикутника $A_1B_1C_1$:

$$\cos a_1 = \cos b_1 \cos c_1 + \sin b_1 \sin c_1 \cos A_1.$$

Але в силу формул (1.5)-(1.8) маємо:

$$a_1 = 180^\circ - A, \quad b_1 = 180^\circ - B, \quad c_1 = 180^\circ - C, \quad A_1 = 180^\circ - a.$$

Користуючись цими співвідношеннями, останню формулу можна записати у виді

$$\cos(180^\circ - A) = \cos(180^\circ - B) \cdot \cos(180^\circ - C) + \sin(180^\circ - B) \cdot \sin(180^\circ - C) \cdot \cos(180^\circ - a).$$

Враховуючи формули зведення, маємо:

$$-\cos A = \cos B \cos C - \sin B \sin C \cos a,$$

або, остаточно

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a. \quad (2.5)$$

Це і є формула косинуса кута сферичного трикутника. Аналогічні формули легко одержати для кутів B і C :

$$\begin{aligned}\cos B &= -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b, \\ \cos C &= -\cos B \cos A + \sin B \sin A \cos c.\end{aligned}\quad (2.6)$$

Ці формули читаються так: косинус кута сферичного трикутника дорівнює добутку косинусів двох інших кутів, взятому з протилежним знаком, плюс добуток синусів цих же кутів, помножений на косинус сторони між ними.

2.3 ФОРМУЛА СИНУСІВ ДЛЯ СФЕРИЧНОГО ТРИКУТНИКА

Формула синусів для сферичного трикутника читається так: в сферичному трикутнику синуси його сторін пропорціональні синусам протилежних їм кутів.

Стосовно трикутника ABC це можна записати так:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}. \quad (2.7)$$

Є різні доведення цієї формули. Ми розглянемо одне з них, яке ґрунтується на формулі косинуса сторони сферичного трикутника. Для цього формулу (2.3) запишемо у виді

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}.$$

Звідси

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \frac{(\cos a - \cos b \cos c)^2}{\sin^2 b \sin^2 c},$$

або

$$\sin^2 A = 1 - \frac{\cos^2 a - 2 \cos a \cos b \cos c + \cos^2 b \cos^2 c}{\sin^2 b \sin^2 c}.$$

Тобто

$$\begin{aligned} \sin^2 A &= \frac{\sin^2 b \sin^2 c - \cos^2 a + 2 \cos a \cos b \cos c - \cos^2 b \cos^2 c}{\sin^2 b \sin^2 c} = \\ &= \frac{(1 - \cos^2 b)(1 - \cos^2 c) - \cos^2 a + 2 \cos a \cos b \cos c - \cos^2 b \cos^2 c}{\sin^2 b \sin^2 c} = \\ &= \frac{1 - \cos^2 c - \cos^2 b + \cos^2 b \cos^2 c - \cos^2 a + 2 \cos a \cos b \cos c - \cos^2 b \cos^2 c}{\sin^2 b \sin^2 c}. \end{aligned}$$

Таким чином

$$\sin^2 A = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}{\sin^2 b \sin^2 c}.$$

Поділивши обидві частини цієї рівності на $\sin^2 a$, знаходимо

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c},$$

або

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}}{\sin a \sin b \sin c}. \quad (2.8)$$

Перед коренем взято знак “+”, оскільки кути і сторони сферичного трикутника менші 180° , а тому їх синуси додатні.

Права частина виразу (2.8) симетрична відносно a, b, c , отже, вона не змінить свого значення від перестановки сторін, тому

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} = M, \quad (2.9)$$

де

$$M = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}}{\sin a \sin b \sin c},$$

називається модулем сферичного трикутника.

Неважко бачити, що (2.9) еквівалентно (2.7).

2.4 ФОРМУЛИ П'ЯТИ ЕЛЕМЕНТІВ

Ці формули дають залежність між п'ятьма елементами сферичного трикутника. Запишемо формули косинусів для сторін a і b сферичного трикутника ABC :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B.$$

Першу з цих рівностей домножимо на $\cos c$:

$$\cos a \cos c = \cos b \cos^2 c + \sin b \sin c \cos c \cos A$$

і підставимо одержаний вираз для $\cos a \cos c$ в другу рівність:

$$\cos b = \cos b \cos^2 c + \sin b \sin c \cos c \cos A + \sin a \sin c \cos B,$$

або

$$\begin{aligned}\cos b(1 - \cos^2 c) &= \sin b \sin c \cos c \cos A + \sin a \sin c \cos B, \\ \cos b \sin^2 c &= \sin b \sin c \cos c \cos A + \sin a \sin c \cos B.\end{aligned}$$

Скоротивши на $\sin c$, одержимо

$$\cos b \sin c = \sin b \cos c \cos A + \sin a \cos B,$$

або, остаточно

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A. \quad (2.10)$$

Співвідношення (2.10) називається формулою п'яти елементів (в нього входить три сторони і два кути сферичного трикутника). Ця формула читається так: *добуток синуса сторони на косинус прилеглого до неї кута дорівнює добутку косинуса протилежної цьому куту сторони на синус третьої сторони без добутку синуса протилежної сторони на косинус третьої сторони і на косинус кута між ними.*

Користуючись цим правилом, легко виписати ще п'ять формул для сферичного трикутника ABC :

$$\begin{aligned}\sin a \cos C &= \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A, \\ \sin b \cos C &= \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos B, \\ \sin b \cos A &= \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B, \\ \sin c \cos A &= \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C, \\ \sin c \cos B &= \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos C.\end{aligned} \quad (2.11)$$

Запишемо виведену вище формулу для трикутника $A_1B_1C_1$, полярного трикутнику ABC :

$$\sin a_1 \cos B_1 = \cos b_1 \sin c_1 - \sin b_1 \cos c_1 \cos A_1.$$

Але, згідно з формулами (1.5)-(1.8), можна записати:

$$a_1 = 180^\circ - A, \quad b_1 = 180^\circ - B, \quad c_1 = 180^\circ - C, \quad A_1 = 180^\circ - a, \quad B_1 = 180^\circ - b.$$

Тоді остання рівність запишеться так:

$$\begin{aligned}\sin(180^\circ - A) \cos(180^\circ - b) &= \cos(180^\circ - B) \sin(180^\circ - C) - \\ &- \sin(180^\circ - B) \cos(180^\circ - C) \cos(180^\circ - a),\end{aligned}$$

або

$$-\sin A \cos b = -\cos B \sin C - \sin B \cos C \cos a,$$

і остаточно

$$\sin A \cos b = \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a. \quad (2.12)$$

Це є ще одна формула п'яти елементів (вона зв'язує три кути і дві сторони сферичного трикутника), словами її можна сформулювати так: *добуток синуса кута на косинус прилеглої сторони дорівнює добутку косинуса кута, протилежного цій стороні, на синус третього кута плюс*

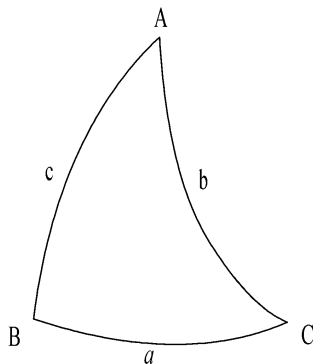
добуток синуса протилежного кута на косинус третього кута і на косинус сторони між ними.

Застосовуючи це правило, можна виписати ще п'ять формул для сферичного трикутника ABC :

$$\begin{aligned}\sin A \cos c &= \cos C \sin B + \sin C \cos B \cos a, \\ \sin B \cos c &= \cos C \sin A + \sin C \cos A \cos b, \\ \sin B \cos a &= \cos A \sin C + \sin A \cos C \cos b, \\ \sin C \cos a &= \cos A \sin B + \sin A \cos B \cos c, \\ \sin C \cos b &= \cos B \sin A + \sin B \cos A \cos c.\end{aligned}\quad (2.13)$$

2.5 ФОРМУЛА ЧОТИРЬОХ ЕЛЕМЕНТІВ

В цю формулу входять чотири елементи сферичного трикутника, які розташовані підряд - дві сторони і два кути, наприклад, сторона a , кут C , сторона b , кут A (рис. 2.2). При цьому сторона і кут, якими починається і закінчується цей ряд, наприклад, сторона a і кут A , називаються крайніми, а сторона і кут, розташовані між ними, наприклад, сторона b і кут C , - внутрішніми елементами.



Тоді формула чотирьох елементів буде читатись так: *добуток котангенса крайньої сторони на синус внутрішньої дорівнює добутку косинусів внутрішніх елементів плюс добуток синуса внутрішнього кута на котангенс крайнього.*

Стосовно чотирьох елементів a, C, b, A , це можна записати так:

$$\operatorname{ctg} a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \operatorname{ctg} A. \quad (2.14)$$

Для доведення цієї формули запишемо формулу п'яти елементів (2.11) для сторони c і прилеглого кута A :

$$\sin c \cos A = \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C. \quad (2.15)$$

Крім того, із формули синусів (2.7) випливає:

$$\sin c \sin A = \sin a \sin C. \quad (2.16)$$

Поділимо почленно (2.15) на (2.16):

$$\frac{\sin c \cos A}{\sin c \sin A} = \frac{\cos a \sin b}{\sin a \sin C} - \frac{\sin a \cos b \cos C}{\sin a \sin C},$$

або

$$\operatorname{ctg} A = \frac{\operatorname{ctg} a \sin b}{\sin C} - \frac{\cos b \cos C}{\sin C}.$$

Домноживши на $\sin C$, одержуємо

$$\sin C \operatorname{ctg} A = \operatorname{ctg} a \sin b - \cos b \cos C,$$

або, остаточно

$$\operatorname{ctg} a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \operatorname{ctg} A,$$

що і треба було довести.

Застосовуючи виведену формулу до всіх можливих в трикутнику випадків, одержуємо ще п'ять формул:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} a \sin c &= \cos c \cos B + \sin B \operatorname{ctg} A, \\ \operatorname{ctg} b \sin c &= \cos c \cos A + \sin A \operatorname{ctg} B, \\ \operatorname{ctg} b \sin a &= \cos a \cos C + \sin C \operatorname{ctg} B, \\ \operatorname{ctg} c \sin a &= \cos a \cos B + \sin B \operatorname{ctg} C, \\ \operatorname{ctg} c \sin b &= \cos b \cos A + \sin A \operatorname{ctg} C. \end{aligned} \quad (2.17)$$

2.6 ФОРМУЛИ ПОЛОВИННИХ КУТІВ

Із формули (2.3) виразимо $\cos A$:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}.$$

Віднімемо від одиниці обидві частини цієї рівності:

$$1 - \cos A = 1 - \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}.$$

Звідси

$$2 \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{\sin b \sin c + \cos b \cos c - \cos a}{\sin b \sin c}.$$

Але, оскільки

$$\sin b \sin c + \cos b \cos c = \cos(b - c),$$

то

$$2 \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{\cos(b - c) - \cos a}{\sin b \sin c}.$$

Різницю косинусів у чисельнику замінимо добутком:

$$2 \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{2 \sin \frac{a+b-c}{2} \sin \frac{a-b+c}{2}}{\sin b \sin c}.$$

Позначимо через $2p$ периметр сферичного трикутника, тобто $a + b + c = 2p$. Тоді неважко бачити, що

$$\frac{a+b-c}{2} = p - c, \quad \frac{a-b+c}{2} = p - b.$$

Підставивши ці вирази в попередню формулу, одержимо

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-c) \sin(p-b)}{\sin b \sin c}}. \quad (2.18)$$

Аналогічні формули одержуємо для двох інших кутів:

$$\begin{aligned} \sin \frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(p-a) \sin(p-c)}{\sin a \sin c}}, \\ \sin \frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(p-a) \sin(p-b)}{\sin a \sin b}}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Виконавши перетворення, аналогічні попереднім, можна одержати формули для косинуса половинного кута:

$$1 + \cos A = 1 + \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},$$

звідки

$$2 \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{\sin b \sin c - \cos b \cos c + \cos a}{\sin b \sin c},$$

або

$$2 \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{\cos a - \cos(b+c)}{\sin b \sin c},$$

і, нарешті,

$$2 \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{2 \sin \frac{a+b+c}{2} \sin \frac{b+c-a}{2}}{\sin b \sin c}.$$

Остаточно:

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-a)}{\sin b \sin c}}. \quad (2.20)$$

Аналогічні формули легко одержати для двох інших кутів:

$$\begin{aligned} \cos \frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-b)}{\sin a \sin c}}, \\ \cos \frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-c)}{\sin a \sin b}}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

2.7 ФОРМУЛИ ГАУССА-ДЕЛАМБРА

Ці формули виражають залежність між всіма шістьма елементами сферичного трикутника.

Як відомо,

$$\sin \frac{A+B}{2} = \sin \left(\frac{A}{2} \pm \frac{B}{2} \right) = \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \pm \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}.$$

Звідси, використавши формули, виведені в п.2.6, одержуємо

$$\sin \frac{A+B}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b) \sin(p-c)}{\sin b \sin c}} \cdot \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-b)}{\sin a \sin c}} + \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-a)}{\sin b \sin c}} \cdot \sqrt{\frac{\sin(p-a) \sin(p-c)}{\sin a \sin c}}.$$

Або

$$\sin \frac{A+B}{2} = \frac{\sin(p-b)}{\sin c} \sqrt{\frac{\sin(p-c) \sin p}{\sin a \sin b}} + \frac{\sin(p-a)}{\sin c} \sqrt{\frac{\sin(p-c) \sin p}{\sin a \sin b}}.$$

Але, в силу другої з формул (2.21),

$$\sqrt{\frac{\sin p \sin(p-c)}{\sin a \sin b}} = \cos \frac{C}{2},$$

отже,

$$\sin \frac{A+B}{2} = \frac{\sin(p-b)}{\sin c} \cos \frac{C}{2} + \frac{\sin(p-a)}{\sin c} \cos \frac{C}{2}.$$

Звідси

$$\sin \frac{A+B}{2} = \frac{\sin(p-b) + \sin(p-a)}{\sin c} \cos \frac{C}{2},$$

що можна записати так:

$$\sin \frac{A+B}{2} = \frac{2 \sin \frac{2p-a-b}{2} \cos \frac{a-b}{2}}{2 \sin \frac{c}{2} \cos \frac{c}{2}} \cos \frac{C}{2}.$$

Зауваживши, що

$$\frac{2p-a-b}{2} = \frac{c}{2},$$

одержуємо першу формулу Гаусса-Деламбра:

$$\sin \frac{A+B}{2} = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{c}{2}} \cos \frac{C}{2}. \quad (2.22)$$

Аналогічно одержується друга формула Гаусса-Деламбра:

$$\sin \frac{A-B}{2} = \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\sin \frac{c}{2}} \cos \frac{C}{2}. \quad (2.23)$$

Третя і четверта формули Гаусса-Деламбра виводяться із формул:

$$\cos \frac{A \pm B}{2} = \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \mp \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}.$$

Виконавши такі ж перетворення, як і при виведенні перших двох формул, одержимо

$$\begin{aligned} \cos \frac{A+B}{2} &= \frac{\cos \frac{a+b}{2}}{\cos \frac{c}{2}} \sin \frac{C}{2}, \\ \cos \frac{A-B}{2} &= \frac{\sin \frac{a+b}{2}}{\sin \frac{c}{2}} \sin \frac{C}{2}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Неважко бачити, що всього для сферичного трикутника ABC можна виписати дванадцять таких формул. Аналізуючи формули (2.22)-(2.24), можна підмітити мнемонічний закон складання таких формул. Якщо в лівій частині *синус*, то в правій повинен бути *мінус*, тобто піврізниця сторін; якщо ж в лівій частині *косинус*, то в правій буде *плюс*, тобто півсума сторін. І навпаки, якщо в лівій частині *плюс*, тобто півсума кутів, то в правій буде *косинус*; якщо в лівій частині *мінус*, тобто піврізниця кутів, то в правій буде стояти *синус*. Крім того,

функція, під якою стоїть в правій частині половина третього кута, не однакова з тією функцією, яка береться для півсуми чи піврізниці кутів у лівій частині.

Користуючись формулами Гаусса-Деламбра, неважко одержати умови однорідності сферичного трикутника Ейлера (див. п.1.3).

2.8 АНАЛОГІЇ НЕПЕРА

Аналогії Непера виражають залежність між п'ятьма елементами сферичного трикутника: трьома кутами і двома сторонами або двома кутами і трьома сторонами. Вони виводяться із формул Гаусса-Деламбра.

Поділивши почленно (2.22) на першу з формул (2.24), одержуємо

$$\operatorname{tg} \frac{A+B}{2} = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2}} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}. \quad (2.25)$$

Аналогічно з (2.23) і другої формули (2.24) маємо:

$$\operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\sin \frac{a+b}{2}} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}. \quad (2.26)$$

Записавши формули (2.22) і (2.23) у виді

$$\begin{aligned} \cos \frac{a-b}{2} &= \frac{\sin \frac{A+B}{2}}{\cos \frac{C}{2}} \cos \frac{c}{2}, \\ \sin \frac{a-b}{2} &= \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{C}{2}} \sin \frac{c}{2}, \end{aligned}$$

і поділивши почленно другу з них на першу, одержуємо

$$\operatorname{tg} \frac{a-b}{2} = \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{A+B}{2}} \operatorname{tg} \frac{c}{2}. \quad (2.27)$$

Аналогічно із формул (2.24) отримуємо

$$\operatorname{tg} \frac{a+b}{2} = \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{A+B}{2}} \operatorname{tg} \frac{c}{2}. \quad (2.28)$$

Тут наведено тільки чотири аналогії Непера, загальна їх кількість для трикутника ABC дорівнює дванадцяти. Можна навести мнемонічне правило складання таких формул, яке нагадує правило для формул Гаусса-Деламбра: “плюс-косинус, мінус-синус.” Крім того, функція, під знаком якої стоїть половина третього кута, не збігається з функцією в лівій частині, а для третьої сторони – збігається.

Почленно поділивши третю аналогію Непера (2.27) на четверту (2.28), одержуємо контрольну формулу Гаусса (теорема тангенсів):

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{a-b}{2}}{\operatorname{tg} \frac{a+b}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}}. \quad (2.29)$$

3 ПРЯМОКУТНІ СФЕРИЧНІ ТРИКУТНИКИ. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СФЕРИЧНИХ ТРИКУТНИКІВ

3.1 КЛАСИФІКАЦІЯ СФЕРИЧНИХ ТРИКУТНИКІВ

Класифікація сферичних трикутників аналогічна до класифікації плоских трикутників, але є деякі відмінності.

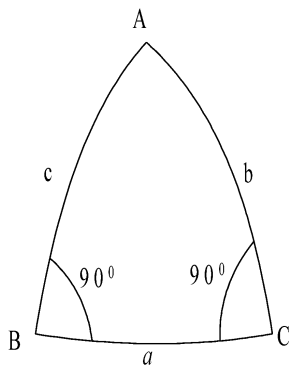
Якщо всі кути сферичного трикутника менші 90° , тобто гострі, то такий сферичний трикутник називається *гострокутним*.

Якщо хоча б один із кутів сферичного трикутника більший 90° , тобто тупий, то трикутник називається *тупокутним*. Тупокутні і гострокутні трикутники разом називаються *косокутними*.

Якщо в сферичному трикутнику хоча б один із кутів дорівнює 90° , то такий трикутник називається *прямокутним*.

На відміну від геометрії на площині, на сфері можуть бути такі косокутні трикутники, у яких два кути, або навіть всі три кути тупі.

Так само існують сферичні трикутники з двома і трьома прямими кутами, які називаються відповідно *двоюго* і *троюго прямокутними*.



Що стосується двоюго прямокутного трикутника (рис.3.1), то, якщо в ньому $B = C = 90^\circ$, то тоді $b = c = 90^\circ$ (див. п.1.3) і, отже, $A = a$ (див. п.1.2). Тобто такий трикутник буде цілком визначений, якщо буде заданий кут A , або протилежна сторона a .

Якщо ж, в частинному випадку, кут A теж прямий (тобто трикутник трюго прямокутний), то всі кути і

всі сторони такого прямокутника будуть рівні 90° . Такий трикутник займає одну восьму частину сфери і часто називається *октантом*.

Тому далі під терміном “*прямокутний сферичний трикутник*” ми будемо розуміти трикутник, у якого тільки один кут прямий. Прямий кут будемо позначати буквою A , протилежну йому сторону позначатимемо буквою a і називатимемо *гіпотенузою*. Дві інші сторони (b і c) будемо називати *катетами*.

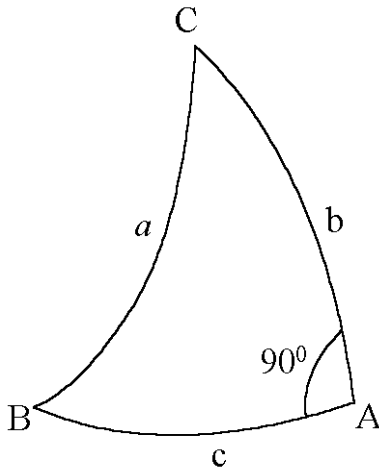
Поряд із прямокутними існують і *пряmostоронні* сферичні трикутники, у яких одна із сторін дорівнює 90° . Є також *двоюго* і *троюго пряmostоронні* трикутники. Всі залежності між сторонами і кутами пряmostороннього сферичного трикутника можна одержати, перейшовши до полярного йому трикутника, який буде, очевидно, прямокутним.

3.2 ФОРМУЛИ ДЛЯ ПРЯМОКУТНИХ СФЕРИЧНИХ ТРИКУТНИКІВ

Розглянемо прямокутний сферичний трикутник ABC , у якого кут $A=90^\circ$ (рис.3.2). Тоді

$$\sin A = 1, \quad \cos A = 0, \quad \operatorname{ctg} A = 0. \quad (3.1)$$

Якщо взяти ті формули сферичної тригонометрії, в які входить кут A , то вони значно спростяться після підстановки в них вищевказаних значень функцій кута A .



Запишемо формулу косинуса сторони a :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

що з урахуванням (3.1) приводить до рівності:

$$\cos a = \cos b \cos c, \quad (3.2)$$

тобто косинус гіпотенузи дорівнює добутку косинусів катетів. Співвідношення (3.2) називають ще теоремою Піфагора сферичної геометрії.

Із формул (2.6):

$$\cos B = -\cos A \cos C + \sin C \sin A \cos b,$$

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c$$

аналогічно одержуємо:

$$\cos B = \cos b \sin C,$$

$$\cos C = \cos c \sin B.$$

(3.3)

За формулою синусів (2.7) можна записати

$$\sin A \sin b = \sin a \sin B,$$

$$\sin A \sin c = \sin a \sin C.$$

Звідси одержуємо

$$\sin b = \sin a \sin B,$$

$$\sin c = \sin a \sin C.$$

(3.4)

Взявши формулу (2.5):

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a,$$

спочатку запишемо:

$$\cos a \sin B \sin C = \cos B \cos C,$$

а потім, поділивши обидві частини рівності на $\sin B \sin C$, одержимо

$$\cos a = \operatorname{ctg} B \cdot \operatorname{ctg} C \quad (3.5)$$

Із формул чотирьох елементів (2.14), (2.17) візьмемо такі:

$$\operatorname{ctg} a \sin c = \cos c \cos B + \sin B \operatorname{ctg} A,$$

$$\operatorname{ctg} a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \operatorname{ctg} A,$$

$$\operatorname{ctg} c \sin b = \cos b \cos A + \sin A \operatorname{ctg} C,$$

$$\operatorname{ctg} b \sin c = \cos c \cos A + \sin A \operatorname{ctg} B.$$

Після врахування значень функцій кута A вони набудуть вигляду:

$$\operatorname{ctg} a \sin c = \cos c \cos B,$$

$$\operatorname{ctg} a \sin b = \cos b \cos C,$$

$$\operatorname{ctg} c \sin b = \operatorname{ctg} C,$$

$$\operatorname{ctg} b \sin c = \operatorname{ctg} B,$$

що можна записати так:

$$\begin{aligned}
\cos B &= \operatorname{ctga} \cdot \operatorname{tgc}, \\
\cos C &= \operatorname{ctga} \cdot \operatorname{tgb}, \\
\sin b &= \operatorname{tgc} \cdot \operatorname{ctgC}, \\
\sin c &= \operatorname{tgb} \cdot \operatorname{ctgB}.
\end{aligned}
\tag{3.6}$$

Таким чином, одержано 10 формул, по дві для кожного із п'яти елементів сферичного прямокутного трикутника:

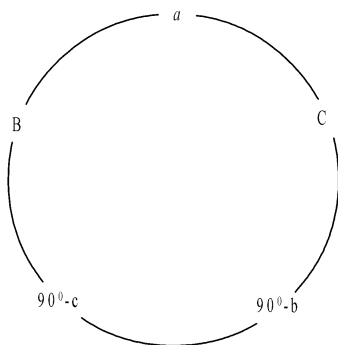
$$\begin{aligned}
\cos a &= \cos b \cos c, \\
\cos B &= \cos b \sin C, \\
\cos C &= \cos c \sin B, \\
\sin b &= \sin a \sin B, \\
\sin c &= \sin a \sin C.
\end{aligned}
\tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
\cos a &= \operatorname{ctgB} \operatorname{ctgC}, \\
\cos B &= \operatorname{ctga} \operatorname{tgc}, \\
\cos C &= \operatorname{ctga} \operatorname{tgb}, \\
\sin b &= \operatorname{tgc} \operatorname{ctgC}, \\
\sin c &= \operatorname{tgb} \operatorname{ctgB}.
\end{aligned}
\tag{3.8}$$

Можна довести, що цими формулами вичерпуються всі співвідношення між елементами прямокутного сферичного трикутника.

3.3 ПРАВИЛО НЕПЕРА

Правило Непера служить для полегшення запам'ятовування формул прямокутного сферичного трикутника. Надамо формулам (3.7), (3.8) більш однорідного виду, замінивши катети b і c їх доповненнями до 90° , тобто $90^\circ - b$, $90^\circ - c$. Тоді формули наберуть вигляду:



$$\begin{aligned}
\cos a &= \sin(90^\circ - b) \sin(90^\circ - c), \\
\cos B &= \sin(90^\circ - b) \sin C, \\
\cos C &= \sin(90^\circ - c) \sin B, \\
\cos(90^\circ - b) &= \sin a \sin B, \\
\cos(90^\circ - c) &= \sin a \sin C.
\end{aligned}
\tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
\cos a &= \operatorname{ctgB} \operatorname{ctgC}, \\
\cos B &= \operatorname{ctga} \operatorname{ctg}(90^\circ - c), \\
\cos C &= \operatorname{ctga} \operatorname{ctg}(90^\circ - b), \\
\cos(90^\circ - b) &= \operatorname{ctg}(90^\circ - c) \operatorname{ctgC}, \\
\cos(90^\circ - c) &= \operatorname{ctg}(90^\circ - b) \operatorname{ctgB}.
\end{aligned}
\tag{3.10}$$

Розташуємо п'ять елементів $a, B, C, 90^\circ - b, 90^\circ - c$ по колу (прямий кут, як відомий, з розгляду виключається) як показано на рис. 3.3. В одержаній фігурі кожний елемент має два суміжних і два дальніх елементи.

Правило Непера можна сформулювати так: косинус кожного елемента прямокутного сферичного трикутника дорівнює добутку котангенсів суміжних з ним елементів або добутку синусів дальніх елементів.

Неважко переконатись, що, керуючись цим правилом, ми одержимо всі 10 формул (3.9), (3.10). Правило Непера називають ще правилом Модюї або правилом Непера-Модюї.

3.4 ДЕЯКІ НАСЛІДКИ ІЗ ФОРМУЛ ДЛЯ ПРЯМОКУТНИХ СФЕРИЧНИХ ТРИКУТНИКІВ

Із формул (3.7), (3.8) випливають деякі наслідки, які корисно пам'ятати при розв'язуванні прямокутних сферичних трикутників.

Візьмемо першу з формул (3.7):

$$\cos a = \cos b \cos c.$$

Якщо $\cos a > 0$, то косинуси катетів повинні бути одного знаку, а це може бути, коли обидва катети менші 90° , або коли вони більші 90° . Якщо ж $\cos a < 0$, що може бути при дузі a більшій 90° , то косинуси катетів повинні мати різні знаки, тобто один катет повинен бути меншим 90° , а другий – більший 90° .

На основі цього приходимо до висновку, що в прямокутному сферичному трикутнику або всі три сторони менші 90° , або тільки одна сторона менша 90° . Іншими словами – кількість сторін, більших 90° , є парною, а менших 90° - непарною.

Розглянемо четверту і п'яту формули (3.8):

$$\sin b = \operatorname{tg} c \cdot \operatorname{ctg} C,$$

$$\sin c = \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{ctg} B,$$

що можна записати так:

$$\operatorname{tg} c = \sin b \cdot \operatorname{tg} C,$$

$$\operatorname{tg} b = \sin c \cdot \operatorname{tg} B.$$

Оскільки $\sin b$ і $\sin c$ завжди додатні, то знак $\operatorname{tg} c$ такий же, як і знак $\operatorname{tg} C$, а знак $\operatorname{tg} b$ збігається із знаком $\operatorname{tg} B$.

Звідси можна зробити висновок, що катет прямокутного сферичного трикутника і протилежний йому кут розташовані в одній чверті круга(або обидва менші 90° , або обидва більші 90°).

3.5 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СФЕРИЧНИХ ТРИКУТНИКІВ. ЗАГАЛЬНІ ЗАУВАЖЕННЯ

Розв'язати сферичний трикутник означає знайти всі його елементи за заданими. Кожний сферичний трикутник містить шість елементів; щоб

розв'язати трикутник, потрібно знати три з них. Зрозуміло, що може бути шість основних варіантів розв'язання сферичного трикутника:

- 1) за трьома сторонами;
- 2) за трьома кутами;
- 3) за двома сторонами і кутом між ними;
- 4) за двома кутами і стороною між ними;
- 5) за двома сторонами і кутом, протилежним одній з них;
- 6) за двома кутами і стороною, протилежною одному з них.

В ході розв'язування сферичного трикутника потрібно перевіряти, чи задовольняють знайдені величини разом із заданими всім умовам, наведеним в п. п. 1.3, 1.4. Результати розв'язування, які не задовольняють хоча б одній з цих умов, повинні бути відкинуті. Може статись, що всі розв'язки непридатні, що означає, що трикутника з даними значеннями елементів не існує.

Розв'язування прямокутного сферичного трикутника підпорядковується тим же правилам, що і загальний випадок розв'язування сферичного трикутника. Відмінність полягає в тому, що в прямокутному сферичному трикутнику один елемент прямий кут – завжди відомий, отже, для розв'язування трикутника досить знати два інших його елементи. У відповідності з цим є шість основних варіантів розв'язування прямокутного сферичного трикутника:

- 1) за двома катетами;
- 2) за гіпотенузою і катетом;
- 3) за катетом і протилежним кутом;
- 4) за катетом і прилеглим кутом;
- 5) за гіпотенузою і одним кутом;
- 6) за двома кутами.

При розв'язуванні прямокутного сферичного трикутника повинні задовольнятись, крім загальних умов(п.п. 1.3, 1.4), ще і додаткові умови, наведені в п. 3.4.

3.6 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СФЕРИЧНИХ ТРИКУТНИКІВ

Задача 1. Розв'язування сферичного трикутника за трьома сторонами

Дано:	Знайти:
$a = 38^{\circ}15'13''$	$A, B, C.$
$b = 19^{\circ}47'32''$	
$c = 44^{\circ}50'49''$	

Неважко впевнитись, що задані значення сторін задовольняють умови (1.1) - (1.3). Знаходимо

$$\cos a = 0.78527791, \quad \cos b = 0.94092674, \quad \cos c = 0.70899317,$$

$$\sin a = 0.61914344, \quad \sin b = 0.33861019, \quad \sin c = 0.70521535.$$

Для обчислення кутів використовуємо формули (2.2), (2.3):

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} = 0.49485214,$$

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c} = 0.87985375,$$

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b} = -0.14259985.$$

Тоді $A = 60^{\circ}20'24''$, $B = 28^{\circ}22'31''$, $C = 98^{\circ}11'54''$.

Для контролю можна використати формули синусів. Знаходимо

$$\sin A = 0.86897719, \quad \sin B = 0.47524455, \quad \sin C = 0.98978042,$$

$$\frac{\sin a}{\sin A} = 0.71249677, \quad \frac{\sin b}{\sin B} = 0.71249673, \quad \frac{\sin c}{\sin C} = 0.71249677.$$

Легко перевірити, що задовольняються всі умови існування сферичного трикутника, наведені в п. 1.3, 1.4.

Відповідь: $A = 60^{\circ}20'24''$, $B = 28^{\circ}22'31''$, $C = 98^{\circ}11'54''$.

Задача 2. Розв'язування сферичного трикутника за сторонами і кутом між ними.

Дано:	Знайти:
$a = 64^{\circ}20'25''$	$c, A, B.$
$b = 34^{\circ}18'01''$	
$C = 33^{\circ}40'50''$	

За формулою (2.4)

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.$$

визначаємо третю сторону. Оскільки

$$\cos a = 0.43302554, \quad \cos b = 0.82609556, \quad \cos C = 0.83214237,$$

$$\sin a = 0.90138165, \quad \sin b = 0.56353005, \quad \sin C = 0.55456206,$$

то

$$\cos c = 0.78041149, \quad c = 38^{\circ}42'06'',$$

і

$$\sin c = 0.62526577.$$

Кути A і B знаходимо за формулою синусів:

$$\sin A = \frac{\sin C \sin a}{\sin c}, \quad \sin B = \frac{\sin C \sin b}{\sin c}.$$

Одержуємо $\sin A = 0.79945535$, $\sin B = 0.49980728$,

звідки

$$A_1 = 53^{\circ}04'41'', \quad B_1 = 29^{\circ}59'14'',$$

$$A_2 = 126^{\circ}55'19'', \quad B_2 = 150^{\circ}00'46''.$$

Розв'язок A_1 і B_1 відкидаємо, оскільки не виконана умова (1.4):

$$A_1 + B_1 + C_1 = 116^\circ 44' 45'' < 180^\circ.$$

Значення A_2 та B_2 також разом існувати не можуть, бо

$$A_2 + B_2 - C = 243^\circ 15' 15'' > 180^\circ$$

- не виконана умова (1.9).

Щоб визначити, яка з пар A_2, B_1 чи A_1, B_2 складає розв'язок, розглянемо різницю

$$a - b = 30^\circ 02' 24'' > 0^\circ,$$

отже, і різниця $A-B$ повинна бути додатна. Таким чином,

$$A = 126^\circ 55' 19'', B = 29^\circ 59' 14''.$$

Для контролю можна використати формулу п'яти елементів (2.11):

$$\sin b \cos A = \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B.$$

Знайшовши $\cos A = -0.60072646, \cos B = 0.86613689$, обчислюємо

$$\sin b \cos A = -0.33852741, \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B = -0.33852704.$$

Умови, наведені в п. п. 1.3, 1.4 теж виконуються.

Відповідь: $c = 38^\circ 42' 06'', A = 126^\circ 55' 19'', B = 29^\circ 59' 14''.$

Задача 3. Розв'язування сферичного трикутника за двома кутами і стороною, протилежною одному з них.

Дано:	Знайти:
$A = 73^\circ 56' 15''$	$b, c, C.$
$B = 52^\circ 13' 29''$	
$a = 48^\circ 35' 17''$	

Знаходимо

$$\sin A = 0.96096045, \sin B = 0.79041940, \sin a = 0.74997319.$$

За формулою синусів знаходимо сторону b :

$$\sin b = \frac{\sin a \sin B}{\sin A} = 0.61687592,$$

тоді $b_1 = 38^\circ 05' 18'', b_2 = 141^\circ 54' 42''.$

Оскільки $B < A$, то беремо b_1 (бо b_2 більше a , див. п. 1.3). Отже, $b = 38^\circ 05' 18''.$

Для знаходження кута C і сторони c застосуємо аналогії Непера. Із (2.25) маємо

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \operatorname{ctg} \frac{A+B}{2} \cdot \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2}}.$$

Враховавши, що

$$\cos \frac{a-b}{2} = 0.99580515, \cos \frac{a+b}{2} = 0.72731542, \operatorname{ctg} \frac{A+B}{2} = 0.50774355,$$

$$\text{маємо } \operatorname{tg} \frac{C}{2} = 0.69517795.$$

$$\text{Звідси } C = 69^{\circ}36'44''.$$

Із (2.28) визначаємо

$$\operatorname{tg} \frac{c}{2} = \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} \cdot \frac{\cos \frac{A+B}{2}}{\cos \frac{A-B}{2}}.$$

Знайшовши

$$\operatorname{tg} \frac{a+b}{2} = 0.94361171, \cos \frac{A+B}{2} = 0.45272869, \cos \frac{A-B}{2} = 0.98210236,$$

обчислюємо $\operatorname{tg} \frac{c}{2} = 0.43498530$. Тоді $c = 47^{\circ}01'00''$. Для контролю можна використати контрольну формулу Гаусса (2.29).

$$\text{Відповідь: } b = 38^{\circ}05'18'', c = 47^{\circ}01'00'', C = 69^{\circ}36'44''.$$

Задача 4. Розв'язування прямокутного сферичного трикутника за гіпотенузою і катетом.

Дано:	Знайти:
$a = 83^{\circ}04'25''$	$c, B, C.$
$b = 142^{\circ}17'10''$	

Знаходимо

$$\sin a = 0.99270290, \cos a = 0.12059406, \operatorname{tga} = 8.23176430, \\ \sin b = 0.61171882, \cos b = -0.79107527, \operatorname{tg} b = -0.77327511.$$

Із третьої формули групи (3.8) маємо

$$\cos C = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tga}} = -0.09393795, C = 95^{\circ}23'25''.$$

Із

четвертої формули групи (3.7) маємо

$$\sin B = \frac{\sin b}{\sin a} = 0.61621603, B_1 = 38^{\circ}02'25'',$$

$B_2 = 141^{\circ}57'35''$. Для сторони c із першої формули групи (3.7) одержуємо

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b} = -0.15244322, c = 98^{\circ}46'07''.$$

Очевидно, значення B_1 не задовольняє умові існування сферичного три-кутника, бо $A + B_1 = 128^{\circ}02'25'' < 180^{\circ}$, в той же час $a + b = 225^{\circ}21'35'' > 180^{\circ}$ (див.п. 1.3). Отже, $B = 141^{\circ}57'35''$.

$$\text{Відповідь: } c = 98^{\circ}46'07'', B = 141^{\circ}57'35'', C = 95^{\circ}23'25''.$$

Задача 5. Розв'язування прямокутного сферичного трикутника за катетом і прилеглим кутом.

Дано:	Знайти:
-------	---------

$b = 44^{\circ}26'21''$	$a, c, B.$
$C = 50^{\circ}00'00''$	

Знаходимо

$$\sin b = 0.70015156, \cos b = 0.71399423, \operatorname{ctg} b = 1.01977093,$$

$$\sin C = 0.76604444, \cos C = 0.64278761, \operatorname{tg} C = 1.19175359.$$

За другою формулою групи (3.7) маємо

$$\cos B = \cos b \sin C = 0.54695131, \quad B = 56^{\circ}50'31''.$$

Гіпотенузу a обчислюємо за третьою формулою групи (3.8):

$$\operatorname{ctg} a = \cos C \operatorname{ctg} b = 0.65549612, \quad a = 56^{\circ}45'19''.$$

Із четвертої формули групи (3.8) одержуємо

$$\operatorname{tg} c = \sin b \operatorname{ctg} C = 0.83440813, \quad c = 39^{\circ}50'31''.$$

Відповідь: $a = 56^{\circ}45'19'', c = 39^{\circ}50'31'', B = 56^{\circ}50'31''.$

Всі розрахунки виконано на мікрокалькуляторі.

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Вентцель М.К. Сферическая тригонометрия.-М.: Геодизиздат, 1948.
2. Волынский Б.А. Сферическая тригонометрия.-М.: Наука, 1977.
3. Корн Г. и Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров.-М.: Наука, 1973.