

**Івано-Франківський національний технічний
університет нафти і газу**

Горгула В.І. , Сікора Б.С. , Воробйова В.О.

**МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ**

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

2004

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Івано-Франківський національний технічний
університет нафти і газу**

кафедра вищої математики

Горгула В.І. , Сікора Б.С. , Воробйова В.О.

**МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ
КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ**

Для студентів інженерно-технічних спеціальностей

Івано-Франківськ 2004

МВ 02070855 – 1399 – 2004

Горгула В.І., Сікора Б.С., Воробйова В.О. Диференціальні
рівняння: Конспект лекцій.- Івано-Франківськ : Факел, 2004.-165с.

При розв'язуванні багатьох задач математики, природознавства і техніки безпосередньо встановити закон, який би зв'язував шукані і задані змінні величини, як правило, не вдається із-за його складності або відсутності інформації про поведінку шуканих величин. Але проте вдається одержати зв'язок між цими величинами та їх похідними чи диференціалами. Такий зв'язок виражається рівняннями, що називаються диференціальними.

Пропонований Конспект лекцій покликаний допомогти студентам ознайомитись із втузівським курсом звичайних диференціальних рівнянь, навчитися розв'язувати (інтегрувати) ряд простіших типів таких рівнянь і їх систем, моделювати з їх допомогою деякі фізичні, природничо-наукові та технічні проблеми. Виклад матеріалу ілюструється численими прикладами, зразками їх розв'язування. Даються завдання для самостійної роботи і для розрахунково-графічних робіт.

Посібник розрахований на студентів перших курсів всіх спеціальностей вищих технічних навчальних закладів.

Рецензенти:

Малицька Г.П. –кандидат фізико-математичних наук ;
доцент Прикарпатського університету ім. В. Стефаника ;

Мазур М.П. –канд. фізико-математичних наук ; доцент Івано-
Франківського національного технічного університету нафти і газу .

Дане видання – власність ІФНТУНГ. Забороняється тиражування та розповсюдження.

Зміст.

Лекція 1. Загальні поняття і постановка задач.	5
1.1. Основні поняття і означення.	5
2.2. Постановка задач для диференціальних рівнянь.	8
3.3. Дослідження задачі Коші.	10
4.4. Задача про диференціальне рівняння сім'ї кривих.	12
Вправи.	15
Лекція 2. Розв'язування деяких рівнянь першого порядку, що розв'язуються відносно похідної.	16
1.1. Рівняння з відокремлюваними змінними.	16
2.2. Однорідні рівняння.	24
3.3. Лінійні рівняння.	30
4.4. Рівняння Бернуллі.	35
5.5. Рівняння в повних диференціалах.	36
6.6. Особливі точки і особливі розв'язки диференціальних рівнянь першого порядку.	39
Вправи.	45
Лекція 3. Розв'язування деяких диференціальних рівнянь вищих порядків.	46
1.1. Геометричне і механічне тлумачення задачі Коші для диференціальних рівнянь другого порядку.	46
3.2. Диференціальне рівняння виду	47
3.3. Диференціальне рівняння виду	49
3.4. Диференціальне рівняння виду	53
Вправи.	58
Лекція 4. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків (елементи загальної теорії).	59
1.1. Основні поняття. Класифікація лінійних диференціальних рівнянь.	59
4.1.1. Властивості розв'язків лінійних однорідних	

диференціальних рівнянь.	61
4.1.2. Властивості розв'язків лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь.	61
4.2. Лінійна залежність і лінійна незалежність системи функцій.	62
4.3. Лінійні однорідні диференціальні рівняння.	64
4.3.1. Визначник Вронського.	64
4.3.2. Будова загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння.	67
4.4. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння.	70
4.4.1. Будова загального розв'язку лінійних неоднорідних рівнянь.	70
4.4.2. Метод варіації довільних сталих знаходження час- тинного розв'язку.	73
Вправи.	76
Лекція 5. Розв'язування лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами.	77
5.1. Лінійні однорідні рівняння із сталими коефіцієнтами.	77
5.1.1. Характеристичне рівняння.	77
5.1.2. Знаходження фундаментальної системи розв'язків ЛОДР-2 із сталими коефіцієнтами.	78
5.2. Лінійні неоднорідні рівняння із сталими коефіцієнта- ми.	84
5.2.1. Знаходження частинного розв'язку ЛНДР-2 із ста- лими коефіцієнтами методом невизначених коефіцієнтів.	85
Вправи.	94
Лекція 6. Системи диференціальних рівнянь.	95
6.1. Загальні поняття.	95
6.2. Розв'язування нормальної системи диференціальних рівнянь.	98
6.3. Огляд основних фактів теорії систем лінійних дифе- ренціальних рівнянь.	103
6.4. Розв'язування системи лінійних однорідних рівнянь із сталими коефіцієнтами.	106
Вправи.	110
Лекція 7. Огляд наближених методів розв'язування диференціальних рівнянь.	111
7.1. Застосування формули Тейлора.	111
7.2. Метод ітерацій.	112

3.3. Метод спрощень.	115
7.4. Метод Ейлера.	115
7.5. Метод Рунге-Кутта.	117
7.6. Графоаналітичні методи розв'язування диференціальних рівнянь.....	117
Додатки.	119
1. Питання для самоперевірки	119
2. Завдання розрахунково – графічної роботи „Диференціальні рівняння”.	122

Лекція 1. Загальні поняття і постановка задач.

1.1. Основні поняття і означення.

Диференціальним рівнянням називається рівняння, що зв'язує між собою незалежні змінні із шуканою функцією та її похідними(диференціалами). Якщо шукана функція залежить від одного аргумента, то таке диференціальне рівняння називають звичайним, а якщо від декількох змінних – то диференціальним рівнянням в частинних похідних. При цьому порядок рівняння визначається порядком старшої похідної. В нашому курсі ми будемо розглядати лише звичайні диференціальні рівняння, тому будемо називати їх просто „диференціальні рівняння” і писати ДР або ДР- n , (якщо йтиме мова про рівняння n -го порядку).

В загальному вигляді диференціальне рівняння n -го порядку функції можна записати так :

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (1.1)$$

Тут y - функція від x , не відома нам, а x - незалежна змінна. Деякі з величин $y, y', \dots, y^{(n-1)}$, або навіть всі, можуть в (1.1) і не входити. Але обов'язково входить $y^{(n)}$ - та похідна.

В багатьох випадках рівняння (1.1) записується у вигляді рівності, розв'язаної відносно старшої похідної

(1.2)

Наприклад, рівняння другого порядку, записане в загальному вигляді (неявно), можна розв'язати відносно другої похідної

Але не кожне ДР- можна записати у вигляді, розв'язаному в елементарних функціях відносно старшої похідної ;

наприклад . Зауважимо, що йде мова лише про форму запису ДР, а не про його розв'язання.

Виділення класу ДР, розв'язаних відносно старшої похідної, в багатьох випадках дає можливість з'ясувати існування і встановити властивості розв'язків цих диференціальних рівнянь. При цьому, зрозуміло, під розв'язком ДР (1.1) розуміють функцію, яка перетворює цю рівність (1.1) в тотожність.

Розглянемо декілька прикладів ДР, для розв'язування яких не потрібні знання якихось спеціальних прийомів. Так наприклад, безпосередньою підстановкою в рівняння можна переконатись, що :

1) рівнянню першого порядку задовольняє функція (експонента) при довільній сталій C ;

2) диференціальному рівнянню другого порядку задовольняють тригонометричні (коливні)

функції , а також їх лінійна комбінація , де - довільні константи ;

3) розв'язком диференціального рівняння четвертого порядку є тригонометричні і гіперболічні

функції , або, загальніше,

лінійна комбінація цих чотирьох функцій

довільні сталі. , де - також

Звернемо увагу, що в одержаних розв'язках кількість довільних сталих співпадає з порядком диференціального рівняння.

У багатьох випадках довільні сталі появляются при розв'язуванні ДР в результаті послідовного знаходження невизначених інтегралів. Тому такі сталі називають сталими інтегрування, а сам процес розв'язування диференціального рівняння називають його інтегруванням. На кожному кроці інтегрування порядок ДР понижується на одиницю і появляется одна довільна стала. Природно, можна очікувати, що у розв'язку рівняння - го порядку кількість сталих інтегрування дорівнюватиме .

Розглянемо ще один приклад.

Приклад. Знайти закон руху матеріальної точки одиничної маси, що вільно падає в порожнечі.

Розв'язання. Прийmemo вертикальну пряму, по якій рухається точка за вісь . За початок координат візьmemo точку осі, що відповідає положенню точки в початковий момент часу. За додатній напрям осі візьmemo напрям руху до Землі (рис. 1.1).

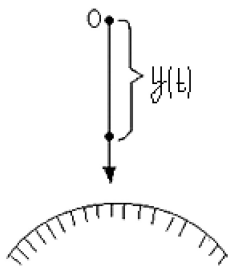


Рисунок 1.1

Пройдений точкою шлях є деякою функцією часу . Треба знайти цю функцію. З курсу механіки відомо, що при вільному падінні прискорення падаючого тіла величина стала і дорівнює m/s^2 . З іншої сторони відомо, що прискорення дорівнює другий похідний від шляху по часу, тобто . Прирівнюючи ці два вирази одержуємо :

- диференціальне рівняння руху матеріальної точки – ДР-2. (1.3)
Інтегруючи рівність (1.3) двічі, встановлюємо :

(1.4)

Отже, в результаті інтегрування рівняння другого порядку (1.3) ми одержали його так званий загальний розв'язок (означення загального розв'язку буде дано нижче), що містить дві довільні сталі інтегрування C_1 і C_2 . Цей розв'язок визначає характер руху, але не визначає конкретних числових значень ні величини пройденого шляху s , ні швидкості руху v .

Щоб розв'язок (1.4) набув конкретного змісту, в ньому необхідно сталим C_1 і C_2 надати фіксованих значень. Для цього задають так звані початкові умови : $s(0) = s_0$ - початкове значення шляху і $v(0) = v_0$ - початкова швидкість. Вважатимемо, що $s_0 = 0$; тоді з (1.4) знаходимо : $C_1 = -s_0$. Одержуємо так званий частинний і (конкретний) розв'язок :

Зокрема, якщо $v_0 = 0$ і $s_0 = 0$, то $C_2 = 0$.

1.2. Постановка задач для диференціальних рівнянь.

Як видно з наведених прикладів, розв'язок диференціального рівняння може залежати від багатьох параметрів – сталих інтегрування. Щоб знайти ці сталі інтегрування або щоб хоча встановити їх зміст, приходимо до так званих задач для диференціальних рівнянь. Не просто розв'язування диференціального рівняння, а знаходження такого його розв'язку, який би задовольняв деяким додатковим умовам.

Оскільки розв'язок ДР- може містити, взагалі кажучи, довільних сталих, то для їх визначення треба було б мати умов. В теорії диференціальних рівнянь розглядають,

наприклад, такі задачі.

1.2.1. Задаються так звані **початкові умови**. Шукають розв'язок ДР- n , який би в деякій фіксованій

(„початковій”) точці задовольняв умовам :

$$, \quad (1.5)$$

де n - наперед задані числа. Задача знаходження розв'язку ДР- n , який би задовольняв заданим початковим умовам (1.5), називається **задачею Коші**.

1.2.2. Задані умов на краях інтервалу $[a, b]$, всередині якого шукають розв'язок $y(x)$. Ці умови називаються **граничними** або **крайовими**. Зокрема, для рівнянь другого порядку можна ставити, наприклад, такі умови :

$$(1.6)$$

Крайові умови задають також у формі лінійних комбінацій. Наприклад, для рівняння другого порядку вони можуть мати вигляд :

$$(1.7)$$

Подібні лінійні комбінації складаються виходячи з фізичного змісту задачі, що розв'язується.

Задачі знаходження розв'язку диференціальних рівнянь n -го порядку, який би на краях інтервалу $[a, b]$ задовольняв умовам виду (1.7) називаються **крайовими (граничними)** задачами. Для диференціальних рівнянь можна ставити і інші задачі, наприклад, встановлення хоча б існування розв'язків, що мають відповідні властивості, якщо самих розв'язків не можна знайти.

Зрозуміло, що умови, які накладають на розв'язки диференціальних рівнянь, повинні бути несуперечливими

(щоб розв'язок задачі існував) і повними (щоб забезпечувалась його єдиність).

Надалі розглядатимемо лише задачі Коші. Уточнимо питання знаходження розв'язку диференціального рівняння ; точніше : означимо поняття його загального розв'язку.

Означення. Функція виду

(1.8)

що залежить від аргумента , і довільних сталих , і раз неперервно диференційовна по , називається **загальним** розв'язком диференціального рівняння, якщо :

1) вона задовольняє цьому рівнянню при будь-яких значеннях сталих ;

2) для будь-якої сукупності початкових умов з області існування відповідних розв'язків знайдуться такі значення , при яких функція задовольняє задані умови.

Іноді загальний розв'язок задають в **параметричному** виді :

(1.9)

Якщо загальний розв'язок задано в **неявному** виді :

(1.10)

то рівність (1.10) називають **загальним інтегралом** диференціального рівняння.

Якщо загальний розв'язок диференціального рівняння - го порядку можна знайти шляхом скінченного числа операцій інтегрування, то кажуть, що ДР- **інтегрується в квадратурах**.

Означення. Будь-яка функція, що одержується з загального розв'язку при конкретних значеннях сталих інтегрування , називається **частинним (конкретним)** розв'язком відповідного диференціального рівняння. Графік будь-якого частинного розв'язку

називається **інтегральною кривою** даного диференціального рівняння.

Загальні розв'язки (1.8), (1.9), (1.10) описують – **параметричні сім'ї інтегральних кривих**.

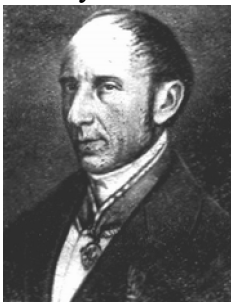
1.3. Дослідження задачі Коші.

Розглядатимемо ДР- , розв'язані відносно старшої похідної, тобто рівняння (1.2) :

Для таких рівнянь справджується **теорема існування і єдиності**, яку приймемо без доведення.

Теорема Коші (для ДР- n). Якщо в (1.2) функція та її частинні похідні по неперервні в - вимірній області зміни змінних , що містить точку , то **існує єдиний розв'язок** цього рівняння, який задовольняє початкові умови :

Зупинимось детальніше на диференціальних рівняннях першого порядку, які розв'язані відносно похідної : (1.11)



Коші Огюстен Луї (1789-1857)
французький математик

Для таких рівнянь теорема Коші формулюється так :

Теорема Коші. Якщо функція і її частинна похідна неперервні в плоскій області , що містить точку , то існує єдиний розв'язок диференціального рівняння

який задовольняє початкову умову (1.12)

(1.13)

(Зауважимо, що (1.12) і (1.13) - це фактично відповідно (1.2) і (1.11) при).

При цьому розрізняють : загальний розв'язок , що перетворює (1.12) в тотожність при будь-якому значенні довільної сталої , серед яких міститься значення , що задовольняє (1.13), і - частинний розв'язок, що одержується із загального при , тобто

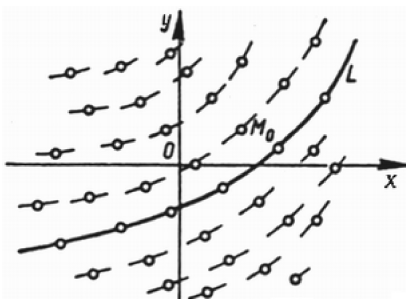


Рисунок 1.2

З геометричної точки зору загальний розв'язок - це однопараметрична сім'я ліній

де -параметр, а частинний розв'язок - лінія L :

(єдина!), що

проходить через точку , яка належить

області D (див. рис. 1.2).

Теорема Коші гарантує **існування і єдиність** серед однопараметричної сім'ї інтегральних ліній кривої, що

проходить через початкову точку , координати якої за-довольняють умову (1.13). Саме ж рівняння (1.12) визначає кутовий коефіцієнт дотичної до інтегральної кривої, що проходить через точку ,

Отже, якщо розглядати як функцію координат і біжучої точки , що належить області , то рівняння (1.12) ставить у відповідність кожній точці області

визначене значення похідної від шуканої функції ,

тобто напрям відповідної інтегральної кривої в цій точці. Таким чином, задачу Коші (1.11) – (1.12) можна тепер тлумачити з геометричної точки зору так : необхідно

побудувати так криву L , яка б проходила через точку (рис. 1.2), дотична до якої в будь-якій точці мала б напрям, що співпадає з напрямом поля в цій точці заданого диференціального рівняння. Це **поле напрямів** можна зобразити, нарисувавши у відповідних точках відрізки, що утворюють з віссю кути (рис 1.3).

Очевидно, в області існування функції можуть знайтись точки з однаковими числовими значеннями цієї функції. Геометричне місце таких точок називається **ізокліною** даного диференціального рівняння. Рівняння ізоклін можна записати у вигляді

Ізоклінами можна скорисатися для наближеної побудови інтегральних кривих.

Приклад. Побудувати наближено інтегральні криві диференціального рівняння

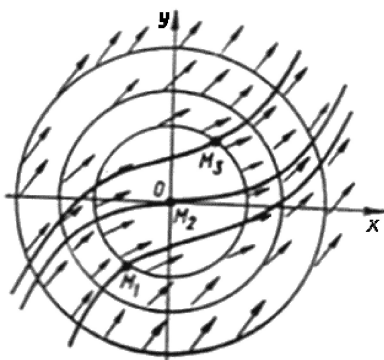


Рисунок 1.3

Розв'язання.

Ізоклінами в цьому випадку є сім'я концентричних кіл

радіуса з центром в початку координат (рис .1 .3). Інтегральні криві необхідно рисувати так, щоб в кожній точці крива мала напрям поля.

1.4. Задача про диференціальне рівняння сім'ї кривих.

Іноді доводиться розв'язувати обернену задачу : задано довільну сім'ю кривих, наприклад ,

$$y = f(x, C), \quad (1.14)$$

яка залежить від одного параметра так, що кожній кривій відповідає певне значення цього параметра. Потрібно скласти диференціальне рівняння, для якого сім'я (1.14) є загальним інтегралом.

Припустимо, що функція диференційована в певній точці тривимірної області , а співвідношення (1.14) визначає як неявну функцію від і :

$$C = C(x, y),$$

причому , в свою чергу, диференційовна функція. Диференціюючи (1.14) по , одержимо

$$f_C(x, y, C) = 0. \quad (1.15)$$

Якщо співвідношення (1.15) не містить сталої , то воно і є шуканим диференціальним рівнянням сім'ї кривих (1.14).

Якщо ж в рівняння (1.15) входить стала , то складемо систему рівнянь

Виключивши звідси параметр , знайдемо

Це і є шуканим диференціальним рівнянням сім'ї кривих (1.14).

Приклад 1. Знайти диференціальне рівняння сім'ї прямих

Розв'язання. Диференціюємо задану функцію по θ .
Маємо

Підставляємо значення θ у задану формулу. Дістанемо
шукане диференціальне рівняння

Приклад 2. Знайти диференціальне рівняння сім'ї
верхніх і сім'ї нижніх кривих, заданих рівнянням :

Розв'язання. Оскільки в точці $(2C; 0)$ дотичні до
відповідного кола паралельні осі ординат - їх кутові
коефіцієнти в цих точках не існують (обертаються в
нескінченність),
то ці точки не розглядатимемо ! Задані в умові рівняння
визначатимуть сім'ю верхніх і сім'ю нижніх півкіл.
Диференціюємо по θ ліву і праву частини заданої
рівності. Маємо

Звідси

Підставимо значення θ у задане рівняння, дістанемо
шукане диференціальне рівняння

Якщо сім'я кривих залежить від декількох параметрів, то
вона може трактуватись як загальний розв'язок рівняння
порядку, вище першого. Розглянемо, наприклад, сім'ю ліній

$$(1.16)$$

що залежить від двох параметрів C_1 і C_2 . Спочатку
рівність (1.16) два рази диференціюємо по θ :

а потім із системи рівнянь

виключимо параметри i . В результаті матимемо диференціальне рівняння сім'ї кривих

яке i є шуканим диференціальним рівнянням сім'ї кривих (1.16).

Вправи.

1. Визначити порядок диференціальних рівнянь :

;

2. Перевірити чи вказані нижче функції є розв'язками відповідних диференціальних рівнянь :

(k і a - константи) ; рівняння ;

- константа) ; рівняння

3. Перевірити чи написані нижще вирази є загальними інтегралами диференціального рівняння :

; рівняння ;

; рівняння .

4. Знайти диференціальне рівняння, загальним розв'язком якого є криві, задані рівняннями :

5. Скласти рівняння сім'ї ліній, що проходять через точку і записати диференціальні рівняння цієї сім'ї :

- а) сім'я прямих, що проходять через точку $(1; 2)$;
- б) сім'я кіл, що дотикаються до осі , центр яких лежить на прямій.

6. Побудувати поле напрямків і наближено інтегральні криві диференціальних рівнянь :

а) б)
7. Знайти область єдиності розв'язку диференціальних рівнянь, чи край цієї області є інтегральною кривою даного рівняння ?

а)

б)

Лекція 2. Розв'язування деяких рівнянь першого порядку, розв'язаних відносно похідної.

Задачі розв'язування диференціальних рівнянь, взагалі кажучи, досить складні. По-перше, їх розв'язки не завжди існують, по-друге, якщо і існують, то не завжди їх можна досить просто знайти. Зупинимось тому на розв'язуванні лише деяких рівнянь першого порядку, розв'язаних відносно похідної.

(2.1)

при спеціальних видах функції . До речі, рівняння

(2.1) можна записати в іншій формі, наприклад,

$$, \quad (2.2)$$

$$, \quad (2.3)$$

$$, \quad (2.4)$$

$$. \quad (2.5)$$

В останньому записі ролі y і x помінялись: стало невідомою функцією, а x - незалежною змінною. Часто для повноти дослідження розв'язків рівняння (2.1) треба розглянути одночасно і рівняння (2.5).

2.1. Рівняння з відокремлюваними змінними.

Означення. Диференціальне рівняння (2.1) називається рівнянням з відокремлюваними змінними, якщо його права частина дорівнює добутку функції, залежної тільки від аргумента x , на функцію, залежну тільки від змінної y .

$$. \quad (2.6)$$

Функції $P(x)$ і $Q(y)$ вважатимемо неперервними при розглядуваних змінних x і y , причому $Q(y) \neq 0$. Помножимо обидві частини рівняння (2.6) на $\frac{1}{Q(y)}$ і поділимо на dx . Тоді одержимо рівняння з відокремленими змінними:

$$, \quad (2.6)$$

де коефіцієнт при dy є функцією тільки від y , а коефіцієнт при dx є функцією залежною тільки від x . Шукана функція (розв'язок) є функцією від x :

Оскільки в рівнянні (2.6) містяться тотожно рівні диференціали, то їх невизначені інтеграли відрізняються між собою на сталу величину :

Задачу інтегрування диференціального рівняння (2.6) зводять, таким чином, до квадратур. При цьому вважають, що задача інтегрування диференціального рівняння розв'язана і (2.7) - загальний інтеграл рівняння (2.6).

Зазначимо, що рівняння з відокремлюваними змінними може бути також задано у вигляді

або у вигляді (2.6)

де , (2.6) - неперервні функції,

Загальний інтеграл рівняння (2.6) має вигляд

$$. \quad (2.7)$$

Приклад 1. Проінтегрувати рівняння

Розв'язання. Відокремлюємо змінні, поділивши на добуток :

Інтегруємо кожний доданок (для цього не обов'язково один з них переносити в праву сторону) і прирівнюючи суму первісних до довільної сталої, дістанемо :

А тоді :

Позначимо тепер $y = \frac{1}{x}$, одержимо інтеграл рівняння

Щоб уникнути перепозначення сталої інтегрування, можна

було заздалегідь довільну сталу брати у вигляді C . В даному прикладі не трудно перейти від загального інтеграла до загального розв'язку рівняння : для цього треба з останньої рівності знайти явний вираз для y .

Повертаючись до початкового рівняння (2.6), зауважимо наступне : ліву і праву частини ми ділили на x^2 , а тому могли „загубити” деякі розв'язки. Такими розв'язками можуть бути $y = 0$, де $x = 0$ - дійсні корені рівняння $x^2 = 0$. Ці розв'язки можуть бути або частинними (одержуються із загального при певних значеннях сталої інтегрування) або такими, що із загального не можуть бути знайдені. Аналогічно, розв'язуючи рівняння (2.6), треба дослідити можливі такі розв'язки $y = 0$, де $x = 0$ - дійсні корені рівнянь $x^2 = 0$ і $x^2 = 1$ відповідно.

Приклад 2. Розв'язати рівняння

(2.8)

Розв'язання. Це рівняння з відокремлюваними змінними. Розглянемо два випадки.

а) Нехай $y = 0$. Помноживши обидві частини

заданого рівняння на x^2 , дістанемо рівняння з

відокремленими змінними
Його загальний інтеграл запишемо у вигляді :

Інтегруючи, одержимо : **, звідки**

;

, де ;

;

- загальний інтеграл рівняння. (2.9)

б) Нехай . Це квадратне рівняння має два дійсні корені , які обидва є розв'язками рівняння (2.8). Якщо в одержаному загальному розв'язку

покласти , то
А тому можемо вважати, що загальний інтеграл рівняння

(2.8) має вигляд , де – довільна стала.

Приклад 3. Швидкість охолодження тіла в повітрі пропорційна різниці між температурою тіла і температурою повітря. Температура повітря дорівнює С. Відомо, що на протязі 20 хвилин тіло охолоджується від до . Встановити закон зміни температури тіла в залежності від часу.

Розв’язання. Якщо позначити час через t , а температуру тіла через θ , то швидкість охолодження тіла, або іншими словами, швидкість зміни його температури

буде похідною $\frac{d\theta}{dt}$. За умовою задачі маємо

де k – коефіцієнт пропорційності. Відокремлюючи змінні, маємо

Інтегруючи ліву і праву частини, будемо мати

(оскільки в подальшому ми будемо потенціювати, то тут зручно писати $\ln C$ замість C)

або

Для визначення сталих k і C використаємо умови задачі :
 при $t=0$ і $\theta=\theta_0$ при $t=0$. Першу з цих умов прийнято називати „початковою”, з її допомогою знаходимо C . Друга умова допомагає встановити коефіцієнт пропорційності k :

З цієї системи рівнянь знаходимо спочатку k , а потім

Отже, закон зміни температури в залежності від часу має вигляд

В розглянутому прикладі при складанні диференціального рівняння ми мали справу безпосередньо з похідною шуканої функції. Наведемо тепер приклад, де міркування зручніше проводити, оперуючи з диференціалами шуканих величин.

Приклад 4. В резервуар, що містить 10 кг солі на 100 л суміші, кожну хвилину вливається 30 л води і витікає 20 л суміші (рис. 2.1).

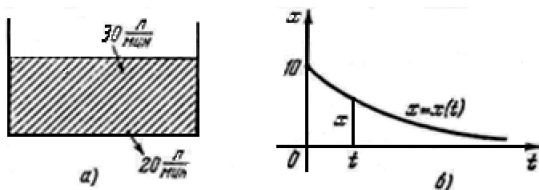


Рисунок 2.1

Визначити кількість солі, що залишиться в резервуарі через хв., вважаючи, що суміш миттєво перемішується.

Розв'язання. Нехай x – кількість солі в резервуарі в момент часу t ; $x(t)$ – кількість солі в момент часу t . Так як суміш витікає, то її кількість зменшується з часом і тому $x(t)$ при $t > 0$. Об'єм суміші в резервуарі в момент часу t , очевидно, дорівнює

$100 - 10t$, а тому **концентрація солі** (тобто кількість солі, що міститься в одиниці об'єму суміші) буде дорівнювати

$$\frac{x}{100 - 10t} \quad (2.10)$$

Зміну кількості солі (x) за нескінченно малий проміжок часу dt ми одержимо, якщо об'єм суміші, яка витекла за цей час ($20 dt$), помножимо на концентрацію солі (2.10). Одержимо диференціальне рівняння

$$dx = -\frac{2x}{10 - t} dt \quad (2.11)$$

Крім того, з умови задачі впливає **початкова умова**

Відокремлюючи змінні в рівнянні (2.11) і інтегруючи, (2.12)
 послідовно одержуємо :

;

;

;

.

Поклавши , з початкової умови (2.12) знаходимо

, тобто . Тому **закон зміни** кількості солі в кілограмах , що знаходиться в резервуарі, в залежності від пройденого часу в хвиликах (рис. 2.16) задається формулою

Зауважимо, що з формули (2.13) , знаючи кількість солі, що залишилась в резервуарі (останнє легко встановити, вимірявши об'єм резервуару і концентрацію солі в ньому), можна визначити кількість часу, яка пройшла від початку процесу. На цій ідеї ґрунтується обчислення віку морів і океанів.

Зауваження. До рівняння з відокремлюваними змінними зводиться рівняння виду

$$, \quad (2.14)$$

де - неперервна функція.

Досить розглянути випадок, коли (обґрунтуйте !).
 Робимо заміну

.

Тоді $y = \dots$, а саме рівняння (2.14) запишеться так :

Це рівняння з відокремлюваними змінними.

Приклад 5. Знайти розв'язок рівняння

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{x^2} \quad (2.15)$$

Розв'язання. Робимо заміну $u = \frac{y}{x}$. Тоді $y = ux$ і $y' = u + xu'$, а рівняння (2.15) перепишемо так : $u + xu' + u = \frac{1}{x^2}$, або в диференціальній формі

$$2u + xu' = \frac{1}{x^2} \quad (2.16)$$

а) Нехай $u = \frac{y}{x}$. Відокремлюємо змінні :

Почленно інтегруємо і знаходимо загальний інтеграл рівняння (2.16) :

$\int \frac{2u + xu'}{x^2} dx = \int \frac{1}{x^2} dx$. Для знаходження інтеграла

використовуємо універсальну підстановку $v = \frac{1}{x}$. Маємо :

Отже, загальний інтеграл рівняння (2.16) запишеться в

формі (2.15), а загальний інтеграл рівняння (2.15) після заміни $y = ux$ на $y = \dots$ набере вигляду :

б) Нехай $f(x)$. Знайдемо корені рівняння $f(x) = 0$. Ними будуть числа $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Тому функції $f(x)$ є розв'язками рівняння (2.16), а функції $x_1, x_2, \dots, x_n$ - розв'язками рівняння (2.15).

Відповідь : рівняння (2.15) має загальний інтеграл

і ще розв'язки $x_1, x_2, \dots, x_n$.

2.2. Однорідні рівняння (рівняння першого порядку, однорідні відносно змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$).

Введемо спочатку поняття однорідної функції.

Означення 1. Функція $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається однорідною функцією k -го виміру або k -го степеня відносно $x_1, x_2, \dots, x_n$, якщо із збільшенням $x_1, x_2, \dots, x_n$ в λ разів функція збільшується у λ^k раз, тобто

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.17)$$

Якщо $k=0$, то маємо однорідну функцію **нульового виміру** (нульового степеня), якщо $k=1$ - функція першого виміру і т. д. Наприклад, функція $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^k x_2^m \dots x_n^p$ є

функцією **другого виміру**, бо

;

функція - функція **нульового виміру**, бо

Відзначимо , якщо i є однорідні функції

однакового виміру, то їх відношення є
однорідна функція нульового виміру. Зауважимо, що
однорідну функцію нульового виміру завжди можна

зобразити як функцію **одного** змінного - або . В
цьому переконуємось, якщо в рівності

покласти або . Справді

(2.18)

Означення 2. Диференціальне рівняння першого порядку

(2.19)

називається **однорідним** (повніше: однорідним відносно
змінних i), якщо його права частина є
однорідною функцією нульового виміру.

Зважаючи на (2.18) , інтегрування рівняння (2.19)
здійснюється введенням нової змінної

(або) . (2.20)

Тоді $\int_{a_1}^{a_2} f(x) dx = 0$ і рівняння (2.19) зводиться до рівняння $f(x) = 0$, змінні в якому легко відокремлюються :

$$f(x) = 0. \quad (2.21)$$

Далі інтегруємо рівність (2.21)

і в одержаному загальному розв'язку (чи загальному інтегралі) замінюємо x на y .

Зауваження. В рівності (2.21) вважаємо, що $f(x) \neq 0$.

Якби $f(x) = 0$, тобто $f(x) \equiv 0$, то рівняння (2.19) мало

б вигляд $\int_{a_1}^{a_2} 0 dx = 0$. В такому разі змінні відокремлюються і немає потреби робити заміну.

Приклад 1. Розв'язати рівняння

Розв'язання. Запишемо рівняння (2.22) у вигляді $\int_{a_1}^{a_2} f(x) dx = 0$ (2.22)

Функція, що знаходиться у правій частині, однорідна нульового степеня, отже рівняння (2.22) - однорідне. Для його розв'язування покладемо $y = x^2$, де y – функція від x ;

тоді $\frac{dy}{dx} = 2x$. Підставляючи y і $\frac{dy}{dx}$ в рівняння (2.23), будемо мати :

$$, \quad (2.24)$$

$$. \quad (2.25)$$

Рівняння (2.24) є рівняння з відокремлюваними змінними. Інтегруємо його.

а) Нехай $y = y(x)$, тоді $y' = y'(x)$, звідки одержимо загальний інтеграл рівняння (2.23) у вигляді

.

Замінюючи в останній рівності $y = y(x)$, одержимо загальний

інтеграл рівняння (2.23) у вигляді $\int f(x) dx = C$ або, розв'язуючи його відносно x , знайдемо загальний розв'язок рівняння (2.22)

б) Нехай $y = y(x)$. Перевіримо, чи функція $y = y(x)$ є розв'язком рівняння (2.24). Підставляючи в (2.24) $y = y(x)$, одержимо тотожність. Отже, $y = y(x)$ є розв'язком рівняння (2.24). А тому рівняння (2.23) задовольняють : загальний

розв'язок $y = y(x)$ і функція $y' = y'(x)$.

Приклад 2. Нехай джерело світла поміщено в точку A . Якою повинна бути форма дзеркала, щоб відбиті промені були паралельні осі Ox ?

Розв'язання. Розглянемо криву, що утворюється в перерізі поверхні дзеркала площиною Oxy , і на цій кривій – довільну точку $M(x, y)$ (див. рис. 2.2).

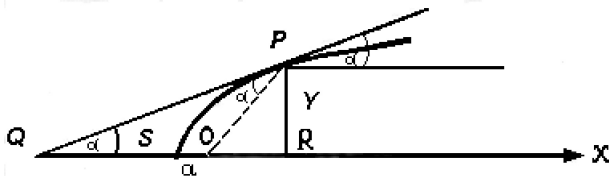


Рисунок 2.2

Кут падіння променя дорівнює куту відбивання і тому
. Оскільки , то - рівнобедрений.

Отже, .

Вважаючи , дістаємо :

або . Одержане рівняння - однорідне. При
умові , тобто , його розв'язком є

- парабола симетрична відносно осі
з вершиною в точці $(-a; 0)$, а сама дзеркальна поверхня -
параболоїд обертання.

Зауваження про зведення деяких диференціальних
рівнянь до однорідних.

1. В деяких випадках використовують заміну .

Так рівняння заміною

набере вигляду , звідки .
Щоб права частина була однорідною функцією нульового
виміру, треба взяти .

2. , (2.26)

де α, β - дійсні числа, причому $\alpha > 0$,
а $f(x)$ - довільна неперервна функція в розглянутій області.

Якби $\alpha = 0$, то рівняння (2.26) було б однорідне. А в загальному випадку записуємо формули паралельного переносу координатних осей, тобто робимо заміну

Дістанемо диференціальне рівняння

Підбираємо α і β так, щоб „вільні члени” дорівнювали нулю, тобто

Оскільки $\alpha > 0$, то ця система рівнянь має розв'язок. Приходимо, отже, до однорідного рівняння

Інтегруючи останнє рівняння розглянутим вище методом, а саме заміною $y = u(x)$, знайдемо його загальний інтеграл

а потім „повертаючись до старих змінних”, дістанемо загальний інтеграл диференціального рівняння (2.26).

До речі, якби $\alpha = 0$, то рівняння (2.26) мало б вигляд

тобто це було б рівняння, що зводиться до диференціального рівняння з відокремленими змінними (див. рівняння (2.14) в п. 2.1).

Приклад 3. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння

Розв’язання. Перепишемо це рівняння у вигляді (2.27)

Тут рівнянь , тобто . Складаємо систему

Звідки . Застосовуємо підстановку (2.28)

В результаті цієї підстановки задане диференціальне рівняння набуде вигляду

(2.29)

Нехай . Тоді і рівняння (2.29) запишемо так :

або

Відокремлюючи в цьому рівнянні змінні, дістаємо таке диференціальне рівняння

Інтегруючи обидві частини, маємо

Після потенціювання дістаємо загальний інтеграл

Підставляємо сюди із (2.28) дістаємо загальний інтеграл диференціального рівняння (2.27)

2.3. Лінійне диференціальне рівняння першого порядку.

Означення. Диференціальне рівняння першого порядку ЛДР-1 називається **лінійним**, якщо воно є рівнянням першого степеня відносно шуканої функції та її похідної (і входять лінійно) :

(2.30)

де і - задані функції.

Якщо і неперервні на деякому проміжку, то для рівняння (2.30) виконуються умови теореми Коші про існування і єдиність розв'язку.

Тут, . При цьому за область можна взяти будь-який прямокутник

довільне дійсне число.

Функція називається **правою частиною** ЛДР. Якщо , то таке ЛДР-1 називається **лінійним однорідним** диференціальним рівнянням (позначатимемо ЛОДР). Якщо , то рівняння (2.30) називається **лінійним неоднорідним** диференціальним рівнянням (позначатимемо ЛНДР). Поділ ЛДР на однорідні і неоднорідні пов'язаний із способами їх розв'язування.

Якщо рівняння (2.30) однорідне, тобто має вигляд

$$(2.31)$$

то воно розв'язується як рівняння з відокремлюваними змінними. А саме, запишемо його так :

Далі відокремлюємо змінні і інтегруємо :

Потенціюючи, знаходимо загальний розв'язок ЛОДР (2.31)



Бернуллі Йоган
(1661-1746) - швей-
царський математик

(2.32)

Безпосередньою підстановкою в диференціальне рівняння можна переконатись, що стала інтегрування може дорівнювати і нулю.

Для розв'язування загального лінійного диференціального рівняння

першого порядку (2.30) Бернуллі запропонував шукати розв'язок такого рівняння у вигляді добутку двох функцій

$$(2.33)$$

Підставляючи цей добуток в (2.30) дістаємо диференціальне рівняння для визначення невідомих функцій i :

$$(2.34)$$

Таким чином, для визначення двох функцій i маємо лише **одну** умову - рівняння (2.30).

Маємо, отже, додатковий степінь свободи, який можна використати на свій розсуд. Скористаємось цим так. Знайдемо хоча б одне i таке, щоб вираз в дужках рівності (2.34) дорівнював нулю. Дістаємо, таким чином, замість одного рівняння (2.34) два диференціальні рівняння :

$$; \quad (2.35)$$

$$(2.36)$$

Рівняння (2.35) - це лінійне однорідне диференціальне рівняння ; таке рівняння ми вже розв'язували вище, його загальний розв'язок - див. (2.32). Однак, ми шукаємо не загальний розв'язок рівняння (2.35), а лише його частинний розв'язок (що не дорівнює нулю). Тому, покладаючи в (2.32) $i = 0$, одержуємо

Знайдене значення i підставимо в рівняння (2.36) :

звідки

Отже, загальним розв'язком ЛДР (2.30) є :

$$. \quad (2.37)$$

Тобто

$y = 0$, (2.38)
де y - довільна стала. Якщо $y \neq 0$, то дістаємо частинний розв'язок рівняння (2.30).

Зауваження. Останню рівність можна прочитати так : загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння (2.30) дорівнює сумі загального розв'язку відповідного однорідного рівняння (рівняння без „правой частини”) і частинного розв'язку заданого рівняння.

Формули (2.37) чи (2.38) не слід запам'ятовувати, треба лише знати ідею їх встановлення або скористатись останнім зауваженням.

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$y'' + y = 0. \quad (2.39)$$

Розв'язання. Це рівняння не є лінійним відносно y і y' , але воно є лінійним відносно y'' і y . Справді, так як $y'' + y = 0$, то (2.39) можна записати так :

$$y'' = -y. \quad (2.40)$$

Запишемо шукану функцію y добутком

Тоді $y = u \cdot v$ і рівняння (2.40) матиме вигляд

Функцію u знайдемо з умови, щоб вираз в дужках біля дорівнював нулю :

Знаходимо частинний розв'язок цього рівняння $u = \cos x$.

Тоді $y = \cos x \cdot v$, звідки $y' = -\sin x \cdot v + \cos x \cdot v'$. Отже, загальний розв'язок рівняння (2.40) матиме вигляд

Приклад 2. Знайти розв'язок рівняння

$$y'' + y = \sin x. \quad (2.41)$$

який би був обмежений при

Розв'язання. Розв'язок цього рівняння знайдемо, користуючись формулою (2.37):

Методом інтегрування частинами знаходимо:

В результаті

А тому загальний розв'язок рівняння (2.41) задається формулою

Для відшукування обмеженого розв'язку при треба покласти

Відповідь:

Приклад 3. Сила струму в колі з опором, самоіндукцією і електрорушійною силою задовольняє диференціальному рівнянню

Знайти залежність сили струму від часу, вважаючи і сталими, якщо електрорушійна сила зростає пропорційно до часу, тобто; сила струму в початковий момент дорівнює нулю.

Розв'язання. Задане диференціальне рівняння - лінійне, де невідомою функцією є. Покладемо, . Тоді, аналогічно до рекомендованої вище схеми, маємо:

Застосовуючи метод інтегрування частинами, одержуємо :

звідки

- загальний розв'язок диференціального рівняння.

Враховуючи початкову умову : , знаходимо

Отже, шукана залежність між силою струму і часом така :

2.4. Рівняння Бернуллі.

Означення. Рівнянням Бернуллі називається рівняння виду

$$y' + P(x)y = Q(x)y^\alpha, \quad (2.42)$$

де α - будь-яке дійсне число, $P(x)$ і $Q(x)$ - неперервні функції.

При $\alpha = 0$ рівняння (2.42) перетворюється в лінійне неоднорідне, а при $\alpha = 1$ - в лінійне однорідне рівняння.

Тому будемо розглядати випадки, коли $\alpha \neq 0, 1$.

Поділимо обидві частини рівняння (2.42) на y^n і зробимо підстановку $z = y^{1-n}$, одержимо $\frac{dz}{dx} + p(x)z = q(x)$. Рівняння Бернуллі перетворюється у лінійне рівняння відносно z :

Але практично при інтегруванні рівняння Бернуллі немає потреби перетворювати це рівняння в лінійне. Як і лінійне рівняння, його можна інтегрувати методом підстановки $z = y^{1-n}$. Тоді (2.42) набере вигляду

а потім розв'язуємо систему рівнянь:

Приклад 1. Розв'язати рівняння

Розв'язання. Використовуючи підстановку, $z = y^{1-n}$, одержуємо

Прирівнюючи вираз в дужках до нуля, знаходимо:

Послідовно інтегруючи, знаходимо:

Таким чином, загальний розв'язок має вигляд

2.5. Рівняння в повних диференціалах.

Розглянемо диференціальне рівняння першого порядку

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \quad (2.43)$$

де $M(x, y)$ і $N(x, y)$ - функції з неперервними частинними

похідними M'_x і N'_y . Якщо ліва частина цього рівняння - повний диференціал

$$dU(x, y) = 0, \quad (2.44)$$

деякої функції $U(x, y)$, то воно називається рівнянням в **повних диференціалах**.

Як переконатись в тому, що рівняння (2.43) справді є рівнянням в повних диференціалах? Для цього порівняємо (2.43) і (2.44), внаслідок чого, одержуємо :

Беручи в останніх рівностях частинні похідні від U по x і y , а від $Mdx + Ndy$ по x і y і застосовуючи теорему про незалежність змішаної похідної від послідовності диференціювання (спочатку по x , а потім по y чи навпаки) знайдемо :

$M = U'_x$ і $N = U'_y$ (2.45)
(умова приналежності (2.43) до рівнянь в повних диференціалах).

Таким чином, розв'язувати рівняння (2.43), треба починати з перевірки умови (2.45).

Нехай умова (2.45) виконується, тоді рівняння (2.43) можна записати у вигляді

$$dU(x, y) = 0, \quad (2.46)$$

тобто все зводиться до знаходження функції $U(x, y)$. Для

цього проінтегруємо вираз $\int \dots$ по x від a до b :

Одержаний вираз продиференціюємо по x : $\frac{d}{dx} \int_a^b \dots = \dots$ (2.47)

(тут приймаємо до відома теорему про похідну по параметру від інтеграла, залежного від параметра) і скористаємось умовою (2.45).

звідки $\dots$. Інтегруємо одержаний вираз від a до b :

Тоді, на основі (2.47), з точністю до сталого доданка,

А загальний інтеграл (2.46) рівняння в x повних диференціалах має вигляд : $\int \dots = \dots$ (2.48)

Приклад. Проінтегрувати диференціальне рівняння $\dots$

Розв’язання. Тут $\dots$. Функції $\dots$ і $\dots$ мають неперервні частинні похідні.

Умова повного диференціала виконується.
Отже, маємо диференціальне рівняння в повних диференціалах. За формулою (2.48) знаходимо функцію
, вибравши за початок координат :

Прирівнюючи до довільної сталої, знаходимо загальний інтеграл рівняння

2.6. Особливі точки і особливі розв'язки диференціальних рівнянь першого порядку.

Вище ми розглянули деякі типи диференціальних рівнянь, які широко використовуються при розв'язуванні різноманітних прикладних задач. При цьому ми бачили, що кожне з рівнянь має нескінченну множину частинних розв'язків, які одержуються при різних значеннях сталої і що через будь-яку точку відповідної області проходить тільки одна інтегральна крива – графік розв'язку диференціального рівняння.

Але для диференціальних рівнянь першого порядку можуть існувати точки, через які проходить більше ніж одна інтегральна крива або не проходить жодна. Такі точки називаються **особливими**. Вони можуть бути ізольованими або заповнювати цілі лінії, які також називаються особливими. Деякі з цих кривих можуть бути серед інтегральних кривих. Їх тоді називають **особливими інтегральними кривими**, а відповідні їм функції, що задовольняють задані диференціальні рівняння - **особливими розв'язками**.

Зупинимось на особливих точках і лініях рівнянь першого порядку, тобто на рівняннях, в яких

$$(2.49)$$

де і - неперервні функції. Для знаходження особливих точок використовують умови, коли функції і перетворюються в нуль одночасно.

Розглянемо чотири типи особливих точок : 1) вузол ; 2) сідло ; 3) центр ; 4) фокус. В першому і четвертому випадках через особливу точку проходить нескінченна множина інтегральних кривих, в другому - дві, а в третьому – ні однієї.

Приклади.

1. Диференціальне рівняння, або

має загальний розв’язок

, тобто . Одержана множина ліній – сім’я однопараметричних прямих, що проходять через початок координат (рис. 2.3 а).

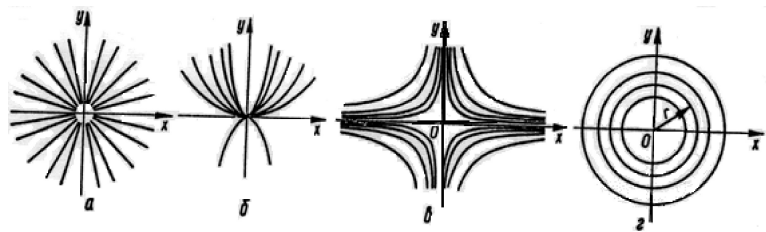


Рисунок 2.3

2. Рівняння, або,

, має загальний розв'язок -
однопараметрична сім'я парабол з вершинами в початку
координат (рис. 2.3 б). Точка $O(0;0)$ – також особлива типу
„вузол”.

3. Рівняння , або ,
має загальний розв'язок , описує
однопараметричну сім'ю рівнобічних гіпербол (рис. 2.3 в).
Точка $O(0;0)$ – особлива точка, через яку проходять дві лінії,
що задовольняють заданому диференціальному рівнянню, а
саме, координатні осі (асимптоти даної сім'ї
гіпербол). Особливу точку такого типу ми назвали „сідлом”
(розгляньте переріз „сідла” – гіперболічного параболоїда
площинами).

4. Загальний розв'язок рівняння описує
однопараметричну сім'ю концентричних кіл (рис 2.3 г) :
 . Початок координат - особлива точка.
В нашій класифікації - „центр”. Через цю точку не
проходить ні одна інтегральна крива.

5. Загальний розв'язок рівняння
описує сім'ю спіралей . Особлива точка
(„фокус”) – початок координат.

Говорячи про особливі розв'язки диференціальних
рівнянь треба відзначити, що вони, задовольняючи заданому
диференціальному рівнянню, не можуть бути одержані з
його загального розв'язку ні при якому значенні довільних
сталих.

Типовими прикладами особливих розв'язків є так звані
обвідні однопараметричних сімей

(2.50)

інтегральних кривих диференціальних рівнянь

Означення. Обвідною однопараметричної сім'ї кривих
називається така лінія, яка в кожній своїй точці дотикається

до якої-небудь кривої сім'ї і в різних точках цієї сім'ї до неї дотикаються різні лінії заданої сім'ї.

Таким чином, обвідна є особливою інтегральною кривою, що складається з особливих точок, через кожен з яких проходить дві криві – одна із ліній сім'ї і сама обвідна.

Для встановлення рівняння обвідної сім'ї кривих (2.50)

розглянемо деяку її точку . Координати цієї точки одночасно задовольняють рівнянню (2.50) при певному значенні (рівнянню однієї з інтегральних кривих). Отже, заданим і відповідає . Тому для всіх точок обвідної виконується рівність

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad (2.51)$$

Використаємо тепер умову, що в кожній точці дотичні до інтегральної кривої з сім'ї кривих (2.50) і до обвідної лінії (2.51) співпадають, тобто їх кутові коефіцієнти рівні, а тому

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad (2.52)$$

Диференціюючи тепер по x спочатку рівність (2.50), а потім (2.51) одержимо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad (2.53)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad (2.54)$$

Враховуючи (2.52), з останніх рівнянь одержуємо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad (2.55)$$

Але на обвідній , а тому, взагалі кажучи,

повна похідна по (повна !)

З рівності (2.55) тому випливає, що . Таким чином,

координати точок обвідної сім'ї ліній (2.50) задовольняють систему рівнянь

(2.56)

Залишається з цієї системи рівнянь виключити параметр C .

Приклад 6. Знайти особливий розв'язок рівняння

Розв'язання. Запишемо це рівняння у вигляді, розв'язаному відносно похідної (2.57)

Відокремлюємо змінні і інтегруємо

або

(2.58)

Загальний інтеграл рівняння (2.57) – це сім'я кіл радіуса з центром на осі Ox . Обвідну цієї сім'ї знайдемо, виключивши C із системи рівнянь (2.56), яка в нашому прикладі має вигляд :

Отже, обвідна сім'ї інтегральних кривих рівняння (2.57) є пара прямих (рис. 2.4). Безпосередньою підстановкою в рівняння (2.57), переконуємось, що функції є його розв'язками.

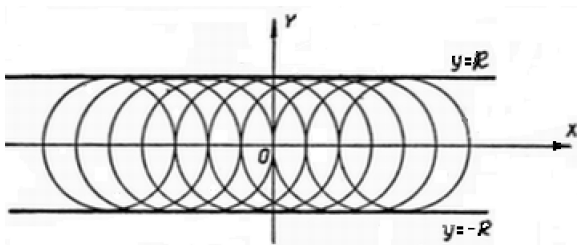


Рисунок 2.4

Приклад 7. Парабола безпеки. Знайти обвідну траекторій снарядів певного типу, випущених зі швидкістю під різними кутами нахилу вектора до горизонту (рис. 2.5).

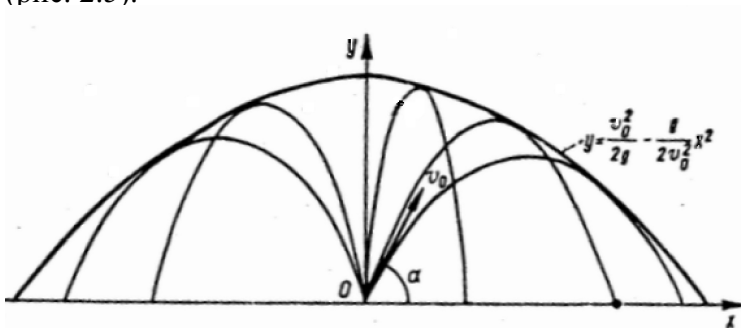


Рисунок 2.5

Розв'язання. Початок вектора (положення гармати, що стріляє) сумістимо з початком координат. Силу аеродинамічного опору враховувати не будемо. Рух снаряду в цьому випадку можна описати системою рівнянь

З першого рівняння знаходимо
це значення в друге рівняння. Тоді

і підставляємо

$$y = ax^2 + bx + c \quad (2.59)$$
 Це рівняння – рівняння сім’ї парабол, де параметром при x є a .
 Для знаходження обвідної сім’ї (2.59) виключимо параметр з системи рівнянь (див. (2.56)) :

При $a = 0$ з другого рівняння останньої системи встановлюємо

Одержане значення підставляємо в перше рівняння системи (фактично, в (2.59)), маємо

Таким чином, обвідною сім’ї (2.59) є парабола

яку називають „параболою безпеки” : точки за її межами не досяжні для снарядів, випущених з гармат даного типу з початковою швидкістю v_0 .

Вправи.

1. Для кожного з наступних рівнянь встановити

аргументовано його тип і метод розв'язання :

2. Знайти загальний розв'язок рівняння :

3. Розв'язати задачу Коші :

4. Визначити тип особливої точки для рівняння :

5. Знайти особливі розв'язки рівняння, якщо відомі їх загальні інтеграли :

6. Знайти обвідну сім'ї ліній :

Лекція 3. Розв'язування деяких диференціальних рівнянь вищих порядків.

3.1. Геометричне і механічне тлумачення задач Коші для диференціальних рівнянь другого порядку.

Розглянемо тепер диференціальне рівняння - го порядку

(3.1)

Зупинятимемось надалі здебільшого на диференціальних рівняннях другого порядку

(3.2)

Для таких рівнянь задачу Коші можна трактувати так : серед усіх інтегральних кривих рівняння (3.2) знайти ту інтегральну криву, яка проходила б через точку і мала б у цій точці заданий напрям дотичної, тобто

(рис. 3.1).

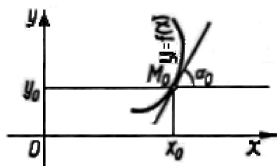


Рисунок 3.1

Дамо механічну трактовку задачі Коші. Для цього диференціальне рівняння (3.2) запишемо так :

(3.3)

Це рівняння описує рух точки вздовж прямої під дією сили

. Задача Коші для рівняння (3.3) полягає в тому, щоб з цих рухів (розв'язки диференціального рівняння (3.3) називають в механіці **рухами**), які визначаються цим рівнянням, треба знайти рух , який задовольняє початкові умови

, (3.4)

тобто, треба знайти такий рух, в якому рухома точка в заданий момент часу знаходилася б у положенні і мала б задану початкову швидкість . Як для диференціальних рівнянь першого порядку, так і для ДР- n природним є питання : яким умовам повинна задовольняти права частина рівняння (3.1), щоб задача Коші для даного рівняння мала розв'язок і цей розв'язок був би єдиним.

Ці умови даються теоремою Коші для (3.1) (лекція 1, п. 1.3). Там же було означено і загальний розв'язок ДР- n . Інтегрування в скінченному вигляді рівнянь вищого порядку вдається лише в деяких окремих випадках. Обмежимося тому виділенням окремих типів таких рівнянь.

3.2. Диференціальні рівняння виду .

Якщо функція неперервна на , то рівняння (3.5) інтегрується в квадратурах. Справді, записуючи (3.5) у вигляді , одержуємо

Тоді, аналогічно

де u , стали інтегрування. Продовжуючи цей процес через n кроків дістаємо функцію

де P_n - довільний многочлен (n) -го степеня, яка є загальним розв'язком диференціального рівняння (3.5).

Приклад1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

Розв'язання. Послідовно інтегруючи, дістаємо

або перепозначивши :

, де v - також довільні

сталі, дістаємо загальний розв'язок рівняння.

Приклад 2. Знайти розв’язок диференціального рівняння , який задовольняє початкові умови

Розв’язання. Знайдемо спочатку загальний розв’язок заданого диференціального рівняння. Маємо :

Отже,

є загальним розв’язком рівняння.

Для знаходження сталих використовуємо початкові умови. Маємо :

звідки Шуканий розв’язок

Далі зупинимось на розв’язуванні, точніше, на пониженні порядку, “неповних” диференціальних рівнянь другого порядку.

3.3 Диференціальні рівняння виду

Це рівняння (3.2), права частина яких явно не містить y . Зробимо заміну . Тоді , одержимо рівняння першого порядку

з невідомою функцією .

Приклад 1. Знайти розв'язок рівняння

$$, \quad (3.6)$$

що задовольняє початковим умовам : , при $x=1$.

Розв'язання. Якщо в рівнянні (3.6) взяти , то . Для визначення одержимо рівняння першого порядку

або (3.7)
Останнє рівняння - однорідне і лінійне. Розв'яжемо його як однорідне :

Підставляючи цю заміну в (3.6) , одержимо :

Інтегруючи, знаходимо :

Для визначення сталої використаємо початкову умову :

Дістаємо рівняння : . Таким чином,

Знову звертаємось до початкової умови :

Відповідь. Шуканий частинний розв'язок :

Приклад 2. Знайти форму важкої матеріальної нитки, кінці якої закріплені в точках і (рис. 3.2), під дією власної ваги.

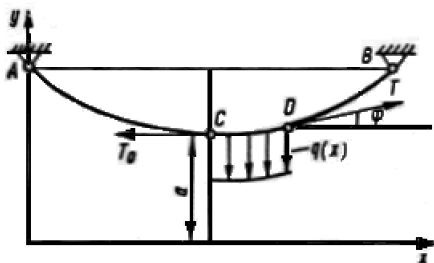


Рисунок 3.2.

Розв'язання. Вважатимемо нитку ідеально гнучкою. Для складання диференціального рівняння шуканої кривої розглянемо ділянку нитки і визначимо умови її статичної рівноваги. На цю ділянку діє розподільче навантаження (вага) і сили натягу в точці і - в точці , направлені по дотичній до лінії. Запишемо умови рівноваги ділянки . Для зручності вважатимемо, що координати точки дорівнюють :

Тоді з умов рівноваги

Отже, $\frac{dC_1}{dC_2} = -\frac{C_1}{C_2}$. Але $\frac{dC_1}{dC_2} = -\frac{C_1}{C_2}$, отже, $\frac{dC_1}{dC_2} = -\frac{C_1}{C_2}$.
Щоб скористатись формулою довжини дуги, продиференціюємо останню рівність по C_2 :

де $\frac{dC_1}{dC_2} = -\frac{C_1}{C_2}$. Одержали диференціальне рівняння другого порядку, що не містить в явному вигляді C_2 . Нехай $C_2 = 1$. Тоді $\frac{dC_1}{dC_2} = -\frac{C_1}{C_2}$. Приходимо до рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними

звідки $\frac{dC_1}{C_1} = -\frac{dC_2}{C_2}$,

Враховуючи початкову умову $C_1 = 0$, знаходимо $C_1 = -C_2$.

Отже, $C_1 = -C_2$.
З останньої рівності шукаємо C_2 :

Отже,

Враховуючи початкову умову $y(0) = 0$, маємо :

Тоді частинним розв’язком диференціального рівняння є

рівняння т. зв. “ланцюгової лінії”.

4.4. Диференціальне рівняння виду

Розглядуване рівняння – також неповне з серії рівнянь (3.2) : воно не містить явно незалежну змінну. Порядок такого рівняння можна понизити на одиницю, позначаючи також y . А вираз для другої похідної знайдемо з допомогою правила диференціювання складної функції. Матимемо

Останню рівність

варто запам’ятати.

Приклад 1. Проінтегрувати рівняння $y'' + y = 0$ при початкових умовах : $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

Розв’язання. Покладаючи $y = u$, прийдемо до рівняння $u'' + u = 0$.

загальний інтеграл якого має вигляд

Визначаємо C_1 з початкових умов, покладаючи в знайденому інтегралі $t=0$: $\dot{\varphi}(0)=\dot{\varphi}_0$, звідки

$C_1=0$. Отже, $\varphi(t)=\varphi_0 \cos \omega t$, або $\dot{\varphi}(t)=-\dot{\varphi}_0 \sin \omega t$.

Замінюючи $\varphi(t)$ на $\dot{\varphi}(t)$, для визначення C_2 приходимо до рівняння $\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0$ з відокремлюваними змінними

.

Тоді $\varphi(t)=\varphi_0 \cos \omega t$. Знову використовуючи початкову умову (при $t=0$), знаходимо $\dot{\varphi}(0)=\dot{\varphi}_0$.
Таким чином, шуканим розв'язком заданого рівняння є

або

.

Приклад 2. Знайти закон руху математичного маятника, нехтуючи дією сил опору.

Розв'язання. Математичний маятник - це матеріальна точка масою m , підвішена на нерозтяжній нитці довжиною l , яка закріплена нерухомо в деякій точці O (див. рис. 3.3).

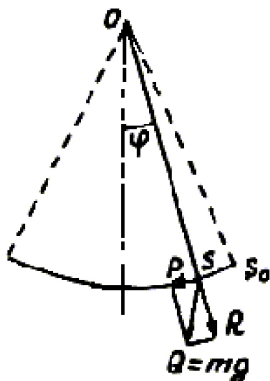


Рисунок 3.3

На матеріальну точку діє сила тяжіння , яку можна представити як векторну суму сил натягу нитки і нормальної до неї , що викликає рух маятника. Якщо зміщення маятника позначити , то на основі другого закону механіки маємо (в проекції на напрям сили) :

Розглядатимемо малі коливання. Для малих коливань , внаслідок чого одержуємо рівняння :

$$(3.8)$$

В початковий момент часу () маятник має максимальне відхилення і нульову швидкість, тобто початкові умови задачі Коші для розглядуваного випадку можна записати так :

$$(3.9)$$

В одержаному рівнянні (3.8) незалежна змінна явно не входить. Для пониження порядку цього рівняння покладемо . Тоді одержимо диференціальне рівняння

першого порядку

Відокремлюємо змінні і інтегруємо: (3.10)

Сталу інтегрування знаходимо з початкових умов (3.9) :

Тоді інтеграл рівняння (3.10) набере вигляду :

Звідки :

Сталу знаходимо з початкової умови
Отже,

Ця формула показує, що математичний маятник здійснює

гармонічні коливання з періодом $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, який не залежить від величини початкового відхилення θ_0 . Цей факт встановив юний Галілей, спостерігаючи за коливаннями люстр в церкві (за відмітник часу він використовував власний пульс).

Зауваження 1. Не зупиняючись на питаннях існування і єдиності розв'язку задач Коші для рівняння

(3.11)

відзначимо, що ідея пониження порядку цих рівнянь така ж як для рівнянь, що розв'язуються відносно похідної, а саме:

а) якщо ліва частина рівняння (3.11) явно не містить y , тобто рівняння (9.11) має вигляд

то воно зводиться до рівняння першого порядку заміною

$z = y'$; тоді

б) якщо ліва частина рівняння (3.11) явно не містить y , тобто це рівняння має вигляд

,

то покладаємо $y = z$;

Зауваження 2. Аналогічно можна понизити порядок неповних диференціальних рівнянь n -го порядку. А саме:

а) порядок рівняння

в якому явно не міститься y , понижають на одиницю заміною

і т. д. ;

якщо ж в рівнянні немає y перших похідних, то роблять заміну

б) порядок рівняння ;

що не містить явно , понижується' на одиницю заміною . Тоді

;

і т. д.

Зауваження 3. Якщо внаслідок деякої заміни вдається звести диференціальне рівняння –го порядку до рівняння нижчого порядку

(3.12)
то загальний інтеграл „пониженого” (в порядку) рівняння (3.12) називають **проміжним** інтегралом початкового диференціального рівняння. Для знаходження загального інтеграла диференціального рівняння –го порядку буває корисним знайти спочатку його проміжний інтеграл.

Приклад 1. Знайти загальний розв’язок рівняння

Розв’язання. Зауважимо, що , тобто задане в умові рівняння можна записати так : . Зробимо заміну ; одержимо рівняння

Значить - проміжний розв’язок заданого в умові диференціального рівняння. А тепер знаходимо загальний розв’язок заданого рівняння :

Хоча цей приклад можна було розв’язувати шляхом

заміни
змінної .

в рівнянні, що не містить явно

Приклад 2. Понизити порядок рівняння .

Розв'язання. Перепишемо це рівняння так

.

Заміною рівняння зводимо до вигляду

.

Вправи.

1. Скласти рівняння сім'ї парабол з вертикальною віссю, які :

- а) проходять через точки $O(0,0)$ і $A(a,0)$;
- б) проходять через точку $A(a,0)$

2. Скласти диференціальні рівняння :

а) сім'ї парабол, вісь яких паралельна осі Oy ;
виділити

інтегральну криву, що задовольняє початковим умовам

б) сім'ї прямих на площині ; виділити пряму, проходить через точку $M(2;1)$ і має в цій точці кутовий коефіцієнт .

3. Перевірити чи вказані функції є розв'язками диференціальних рівнянь :

а)

б)

4. Проінтегрувати рівняння :

а) б) .

в) , г) .

Лекція 4. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків(елементи загальної теорії)

4.1. Основні поняття. Класифікація лінійних диференціальних рівнянь.

Лінійним диференціальним рівнянням n -го порядку (ЛДР –) називається рівняння виду

$$(4.1) \quad y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = Q(x)$$

де y - шукана функція аргумента x , $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}, Q$ - задані функції, неперервні на I .

Функції $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}$ називаються коефіцієнтами рівняння, а Q - його правою частиною. Якщо $Q \equiv 0$, то таке рівняння, тобто

називають лінійним **однорідним** рівнянням (ЛОДР-) або рівнянням без правої частини. Кажуть також, що ЛОДР- (4.2) відповідає ЛНДР- (4.1).

Якщо розв'язати рівняння (4.1) відносно старшої похідної

то бачимо, що рівняння завжди задовольняє умовам теореми Коші для ЛДР- (лекція 1, п.1.3). Справді, в області неперервності коефіцієнтів рівняння (на проміжку) функція є неперервною функцією своїх аргументів, як сума неперервних функцій, а частинні похідні

неперервні на .
Отже, лінійне рівняння (4.2) має єдиний розв'язок при будь-яких початкових умовах

, (4.3)
де а - будь-які числа. Зокрема, якщо початкові умови нульові, то розв'язком ЛОДР- n (4.2) є тільки (тривіальний розв'язок).
Формулюватимемо теореми в загальному виді (для ЛДР- n), доводитимемо їх з метою спрощення записів, не зменшуючи при цьому загальності, для ЛДР-2, тобто для рівнянь

$$; \quad (4.4)$$

відповідно ЛНДР-2 і ЛОДР-2.

Для спрощення записів і для спрощення багатьох доведень введемо поняття лінійного диференціального оператора L :

,

Диференціальні рівняння (4.1) і (4.2) записуються в термінах (позначеннях) лінійного диференціального

оператора відповідно так :

Використовуючи правила диференціювання суми і добутку змінної на число, можна довести наступні дві властивості лінійності цих операторів :

де $c = \text{const.}$, або їх наслідок :

„Роботу” лінійних диференціальних операторів проілюструємо на доведенні властивостей розв’язків лінійних диференціальних рівнянь.

4.1.1. Властивості розв’язків ЛОДР - лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

1. Якщо y_1 - розв’язок ЛОДР $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, а C – число (стала величина), то $y = Cy_1$ - задовольняє цьому ж ЛОДР.
Справді,

2. Якщо y_1 - розв’язки ЛОДР $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, то сума $y = y_1 + y_2$ - також розв’язок цього рівняння.
Справді,

3. Як наслідок : якщо y_1 - розв’язки ЛОДР $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, то їх лінійна комбінація $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ задовольняє даному рівнянню.

4. Якщо комплексно значна функція дійсного аргумента $y = u + iv$, де u, v - дійсні (їх називають відповідно дійсна і уявна частини функції y), задовольняє ЛОДР з дійсними коефіцієнтами, то цьому рівнянню задовольняють її дійсна і уявна частини.

Доведення. Справді, якщо прийняти до відома, що правило диференціювання суми дійсних функцій

переноситься і на комплексно значні функції, то коефіцієнти ЛОДР - дійсні, безпосередньо переконаємось, що - дійсні. А тоді із і впливає, що .

4.1.2. Властивості розв'язків ЛНДР - лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь.

1. Властивість накладання частинних розв'язків ЛНДР : якщо і - розв'язки відповідно ЛНДР і , то їх сума - розв'язок ЛНДР .

Доведення.

2. Якщо і - розв'язки ЛНДР з однаковими правими частинами, то їх різниця є розв'язком відповідного ЛОДР.

Доведення.

3. Якщо - розв'язок ЛНДР , а - розв'язок відповідного ЛОДР, то їх сума - розв'язок заданого ЛНДР.

Доведення.

4.2. Лінійна залежність і лінійна незалежність систем функцій.

Лінійною комбінацією функцій називається функція

(4.6)
утворена із заданих функцій за допомогою лінійних операцій, тобто операцій множення на число і додавання.

Означення 1. Система функцій , визначених

на $x \in [a, b]$ називається **лінійно залежною** на цьому проміжку, якщо можна підібрати такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ не всі рівні нулю і такі, що лінійна комбінація

при $x \in [a, b]$ виконання цієї умови означає, що хоча б одну із заданих функцій можна виразити лінійно через інші. Наприклад, якщо $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, то

Означення 2. Якщо при всіх $x \in [a, b]$ лінійна комбінація $\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \dots + \alpha_n f_n(x)$ тільки тоді, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, то система функцій називається **лінійно незалежною** на $[a, b]$.

У цьому випадку жодну із заданих функцій не можна виразити лінійно через інші.

Наприклад, функції $f_1(x) = x$ і $f_2(x) = x^2$ лінійно залежні на $[0, 1]$, бо $f_2(x) = x \cdot f_1(x)$ при $x \in [0, 1]$.

Для двох функцій ($n=2$) можна записати таку умову лінійної залежності:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \text{const}, \text{ звідки } f_1(x) = C \cdot f_2(x).$$

Ця умова є рівнянням прямої лінії в координатах (x, y) , звідси і назва - лінійна залежність.

Приклади. Переконатись, що кожна з систем функцій

$$\{f_1(x) = x, f_2(x) = x^2\} \quad (4.7)$$

$$\{f_1(x) = x, f_2(x) = x^2, f_3(x) = x^3\} \quad (4.8)$$

лінійно незалежна на $[0, 1]$.

Розв'язання.

1. Продиференціюємо тотожність

З останнього рівняння цієї системи рівностей випливає, що
. Тоді з передостанньої рівності знаходимо, що
. Далі, „піднімаючись вгору”, з наступних рівностей
знаходимо

2. Розглянемо тотожність :

Маємо, після ділення обох частин на () :

Диференціюючи, знаходимо :

Ділимо тепер обидві частини рівності на :

Знову диференціюємо обидві частини, а потім ділимо на

Через і т. д.
кроків дістаємо :

Звідки . Тоді, „піднімаючись” по рівностях вгору,
одержуємо :

4.3. Лінійні однорідні диференціальні рівняння.

Для побудови загального розв'язку ЛОДР треба глибше вивчити питання лінійної залежності частинних розв'язків цих рівнянь. З цією метою введемо поняття так званого **вронскіана**.

4.3.1. Визначник Вронського.



Вронський Юзеф (1776-1853)
- польський математик

Означення. Якщо функції $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ диференційовані на проміжку I , то визначником Вронського або вронскіаном називається

(4.9)

Зокрема, при $n=2$

Відзначимо такі властивості вронскіана. (4.10)

Теорема 1. Якщо функції $y_1, y_2, \dots, y_n$ лінійно залежні на I , то їх визначник Вронського тотожно дорівнює нулю на цьому проміжку.

Доведення. При $n=2$ маємо $y_2 = C y_1$, звідси

що і треба було довести.

Теорема 2. Нехай функції $y_1, y_2, \dots, y_n$ є розв'язками

ЛОДР – n (4.2) на . Якщо для якогось
, то для всіх .
Доведення. Як і вище, розглянемо випадок $n=2$. Нехай
– розв’язок ЛОДР (4.2). Тоді

Помножимо перше рівняння на , а друге – на .
Віднімемо від отриманих другої рівності першу, одержимо :

Якщо врахувати (4.6) , то остання рівність набуде вигляду :
(4.11)

Знайдемо розв’язок цього рівняння при умові

Рівняння (4.11) – диференціальне рівняння (4.12)
з відокремлюваними змінними. Відокремлюємо змінні i ,
почленно інтегруючи, знаходимо



Остроградський М. В.
(1801-1862)
український математик

Враховуючи початкову умову (4.12),
одержуємо

(4.13)

Ця формула називається формулою
Остроградського – Ліувілля.

З неї видно, що для

, що і треба було довести.
Теорема 3.

Якщо функції є лінійно незалежними розв'язками ЛОДР– (4.2) на , то , для всіх

Доведення. Доведемо теорему „від противного” (при).

Нехай - лінійно незалежні розв'язки рівняння (4.2) і існує точка така, що .
Складемо таку систему рівнянь :

$$(4.14)$$

в якій невідомі - і . Система (4.14) – це система лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь, її визначник

. Отже вона має ненульовий розв'язок. Тому функція

є **ненульовим** розв'язком лінійного однорідного диференціального рівняння (див. теорему в п. 4.1). Але система умов (4.14) означає, що , тобто задовольняє таким же умовам , як і .

Зважаючи на єдиність розв'язку ЛОДР, приходимо до суперечності :

при ненульових .

Отже, наше припущення, що точка , в якій , неправильне, тобто визначник Вронського не перетворюється в нуль ні в одній точці на , що і треба було довести.

4.3.2. Будова загального розв'язку ЛОДР.

Переходимо тепер до питання про структуру загального

розв'язку ЛОДР. Зауважимо, що будь-яка сукупність
лінійно незалежних на частинних розв'язків

лінійного однорідного диференціального рівняння n -го
порядку (4.2) називається **фундаментальною** системою
розв'язків цього рівняння.

Можна показати, що для всякого ЛОДР- n з
неперервними коефіцієнтами фундаментальна система
розв'язків існує. Більше того, якщо рівняння має хоча б одну
фундаментальну систему розв'язків, то воно має їх
нескінченну множину. Звернемо увагу, що кількість лінійно
незалежних розв'язків ЛОДР - n , з яких складається
фундаментальна система розв'язків цього рівняння
співпадає з порядком цього рівняння. Назвемо цю вимогу
умовою **повноти** фундаментальної системи розв'язків.

Теорема (про будову загального розв'язку ЛОДР - n).

Якщо - фундаментальна система розв'язків
ЛОДР - n (4.2), то функція

$$, \quad (4.15)$$

де - довільні сталі, є загальним розв'язком
цього рівняння.

Доведення. Згідно нашої домовленості, зупинимось на
випадку . Нехай - лінійно незалежні
розв'язки рівняння (4.5), тоді, за властивістю розв'язків
ЛОДР (п. 4.1.1), функція

$$(4.15)$$

також буде розв'язком цього рівняння. Отже, для доведення
теорема достатньо показати, що для довільних початкових

умов , можна підібрати сталі
так, щоб функція (4.15) була розв'язком задачі Коші.

Маємо, таким чином, для визначення систему
рівнянь

(4.16)

Визначником цієї системи є визначник Вронського .
Такий визначник, згідно теореми 3, не дорівнює нулю.
Отже, система розв'язок має.

Зауваження. Не існує регулярного прийому для знаходження фундаментальної системи розв'язків ЛОДР, а тому і знаходження загального розв'язку таких рівнянь. Мусимо обмежуватись пошуками, що ґрунтуються на здогадці і кмітливості. Більше того, багато лінійних однорідних диференціальних рівнянь (із змінними коефіцієнтами) взагалі не інтегруються в елементарних функціях. Виняток складають лише однорідні рівняння із сталими коефіцієнтами. До інтегрування таких рівнянь перейдемо на наступній лекції.

А зараз зупинимось на деяких практичних питаннях.

Задача 1. Відомий один частинний розв'язок ЛОДР -

Знайти другий частинний розв'язок , який би був лінійно незалежний з

Розв'язання. Виходимо з формули (4.13) Остроградського-Ліувілля . Запишемо цю формулу в розгорнутому вигляді :

Поділивши почленно на , маємо :

тобто

; (4.17)

звідси, інтегруючи, знаходимо :

(4.18)

Оскільки нас цікавить частинний розв'язок, то поклавши
, маємо :

Як впливає з (4.17)

Тобто i - лінійно незалежні.

Приклади.

1. Знайти загальний розв'язок рівняння :

, якщо його частинний розв'язок.

Розв'язання. В тому, що є розв'язком заданого рівняння, переконуємось безпосередньо підстановкою його в задане рівняння.

Перепишемо диференціальне рівняння в „стандартному” вигляді :

Отже, . Тоді за формулою (4.18) знаходимо :

Ми шукаємо частинний розв'язок, а тому покладемо .

Отже другим розв'язком лінійного рівняння є .
Використовуючи тепер властивість розв'язків ЛОДР
(п. 4.1а), з точністю до „сталого множника”, знаходимо

Відповідь . Загальний розв'язок має вигляд :

Задача 2. Скласти лінійне диференціальне рівняння,
якщо функції утворюють фундаментальну
систему його розв'язків.

Розв'язання. Спочатку переконаємось чи утворюють ці
функції фундаментальну систему розв'язків деякого ЛОДР.
Розглянемо вронскіан

якщо
Отже, при функції утворюють
фундаментальну систему розв'язків ЛОДР **другого** порядку
(бо цих функцій **дві**).

Складемо це диференціальне рівняння, виходячи з
формули його загального розв'язку

Для цього останню рівність двічі диференціюємо :

і з останніх трьох рівностей виключаємо C_1 і C_2 .
Одержимо шукане диференціальне рівняння

4.4. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння.

**4.4.1. Будова загального розв'язку лінійного
неоднорідного диференціального рівняння.**

Поряд з ЛНДР -

(4.1)

будемо розглядати відповідне йому (з тією ж лівою частиною!) ЛОДР - n

(4.2)

Має місце наступна

Теорема (про будову загального розв'язку ЛНДР - n).
Загальний розв'язок ЛНДР (4.1) можна представити у вигляді суми якого-небудь його частинного розв'язку та загального розв'язку відповідного йому однорідного рівняння (4.2)

(4.19)

Доведення. Те, що (4.19) - розв'язок ЛНДР випливає із властивості розв'язків ЛНДР (п. 4.1.2) (нагадаємо:

Покажемо, що розв'язок (4.19) - загальний. Для цього досить показати, що функція (4.19) задовольняє будь-яким початковим умовам. Запишемо ці умови для випадку :

(де α лежить в області неперервності коефіцієнтів - довільні числа).

Якщо врахувати будову , то останню систему рівнянь перепишемо так :

або

Визначник цієї системи, будучи визначником Вронського лінійно незалежних розв'язків ЛНДР – 2, не дорівнює нулю. А тому C_1 і C_2 визначаються однозначно. Теорему доведено.

Ця теорема дає нам один із методів інтегрування ЛНДР. Його можна назвати методом **підбору** частинного розв'язку. Він полягає в наступному :

- а) знаходимо який-небудь частинний розв'язок ЛНДР ;
 - б) знаходимо загальний розв'язок відповідного ЛОДР.
- Їх сума буде шуканим загальним розв'язком ЛНДР.

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння

Розв'язання. Вигляд коефіцієнтів і правої частини даного рівняння „підказує”, що частинний розв'язок цього рівняння треба шукати в класі функцій . Безпосередньою підстановкою переконуємось, що одним з розв'язків заданого рівняння є . Розв'яжемо відповідне однорідне рівняння

Понижуємо його порядок заміною .
Одержимо :

звідки, враховуючи заміну, дістаємо :

тобто

Отже, загальним розв'язком заданого рівняння є

Зрозуміло, що на методі підбору „далеко не заїдеш”. Розглянемо ще один метод інтегрування ЛНДР, т.зв. метод варіації довільних сталих (запропонований Лагранжем).

4.4.2. Метод варіації довільних сталих знаходження частинного розв'язку.



Лагранж Жозеф Луї (1736-1813)
французький математик і
механік

Нехай нам відомий загальний розв'язок відповідного ЛОДР. Для ЛОДР-2

такий розв'язок має вигляд (див. (4.15), (4.15')):

$$y = y_0 + \sum_{i=1}^n c_i y_i, \quad (4.20)$$

де y_i - одна із фундаментальних систем розв'язків рівняння, а c_i - довільні сталі.

Поставимо таку задачу : знайти частинний розв'язок ЛНДР – 2

$$y = y_0 + \sum_{i=1}^n c_i y_i, \quad (4.21)$$

у вигляді

$$y = y_0 + \sum_{i=1}^n c_i y_i, \quad (4.22)$$

„подібному” до (4.20), замінюючи в (4.20) довільні сталі деякими функціями c_i , що підлягають визначенню. Покажемо, що ці функції можна знайти за допомогою операцій інтегрування. Основна ідея цього методу – не те, як здогадатись, що частинний розв'язок

неоднорідного рівняння треба шукати у вигляді (4.22), а те, що в такому вигляді його **можна знайти**.

Для складання рівнянь, з яких би можна було визначити i скористаємось ідеєю, опрацьованою нами у методі Бернуллі розв'язування лінійних рівнянь першого порядку (п. 2.3).

Для знаходження двох функцій i маємо лише **одну** умову: функція (4.22) повинна задовольняти рівняння (4.21). Маємо, отже, додаткову ступінь свободи, яку використаємо на свій розсуд. Найперше, функцію (4.22) треба підставити в рівняння (4.21). Для цього диференціюємо (4.22):

i , використовуючи, одержану ступінь свободи, накладемо умову:

Тоді:

$$\dots \quad (4.23)$$

Знайдені значення i підставляємо в (4.21):

Вирази в першій і другій дужках дорівнюють нулю (бо i - розв'язки ЛОДР). А тому маємо:

Дістали, таким чином, для визначення системи двох рівнянь (4.23) і (4.24). Оскільки визначник цієї системи

, як вронскіан лінійно незалежних розв'язків ЛОДР, то система рівнянь (4.23), (4.24) розв'язки має.

Зауважимо, що з цієї системи ми знайдемо i . Для визначення i

треба і проінтегрувати. Оскільки ми шукаємо лише частинний розв'язок ЛНДР, то при цьому інтегруванні довільними сталими можна нехтувати.

Приклад. Розв'язати задачу Коші

Розв'язання. а) Спочатку будемо шукати загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння .

Методом підбору переконуємось, що функції цьому рівнянню задовольняють і є лінійно незалежні. Отже, загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд :

б) За частинний розв'язок заданого неоднорідного рівняння беремо функцію

а функції і шукаємо з системи рівнянь

звідки

Тоді

Сталими інтегрування нехтуємо (шукаємо ж частинний! в'язок). Отже :

в) загальним розв'язком рівняння є :

Сталі інтегрування C_1 і C_2 визначаємо з початкових умов :

Відповідь: Маємо :

Зауваження. Аналогічно застосовується метод варіації довільних сталих для ЛНДР- n . Якщо фундаментальна система розв'язків ЛОДР- n (4.2), тобто - його загальний розв'язок, то частинний розв'язок ЛНДР- n шукаємо у вигляді суми , в якій функції знаходимо із системи рівнянь

Остання система розв'язок має, бо її визначник-вронскіан фундаментальної системи розв'язків ЛДР- n .

Вправи.

1. Скласти ЛОДР за заданою фундаментальною

а) б) .
2. Знайти загальний розв'язок ЛОДР , знаючи його один розв'язок :

a)

6)

2. Знайти загальний розв'язок ЛОДР , знаючи його один розв'язок :

3. Знайти загальний розв'язок ЛНДР, знаючи частинний розв'язок відповідного однорідного рівняння:

4. Знайти загальний розв'язок ЛНДР , знаючи загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння :

Лекція 5. Розв'язування лінійних диференціальних рівнянь з сталими коефіцієнтами.

Як ми вже відзначали в попередній лекції, не має єдиного методу розв'язування лінійних диференціальних рівнянь. Виняток становлять диференціальні рівняння із сталими коефіцієнтами.

5.1. Лінійні однорідні диференціальні рівняння із сталими коефіцієнтами.

5.1.1. Характеристичне рівняння.

Розглянемо ЛОДР– n із сталими коефіцієнтами
(5.1)

де a_i – довільні числа. Розв’язок задачі Коші для такого рівняння завжди існує і єдиний (див. п. 4.1).

Спочатку визначимо клас функцій C^n , що можуть бути розв’язками таких рівнянь. Оскільки підстановка $y = e^{\lambda x}$ в (5.1) перетворює цю рівність в тотожність, то доданки лівої частини (5.1) при такій підстановці повинні знищуватись. Тому розв’язками рівняння (5.1) можуть бути функції, що мають подібні до себе похідні. Такими функціями є показникові : $e^{\lambda_i x}$. Справді

тобто вони відрізняються сталими множниками – степенями λ_i .

В зв'язку з чим розв'язки ЛОДР (5.1) із сталими коефіцієнтами будемо шукати у вигляді
(5.2)

де λ стала величина, яку треба знайти. Підставляючи (5.2) в (5.1), дістанемо умову визначення λ :

Оскільки λ_i – різні, то остання рівність буде виконуватись, якщо

Дістали, таким чином, алгебраїчне рівняння $P(\lambda) = 0$ n -го степеня. Його називають **характеристичним рівнянням** ЛОДР (5.1) із сталими коефіцієнтами. Як відомо, алгебраїчне рівняння n -го степеня має n коренів. Якби всі корені цього рівняння були дійсні і різні (ще кажуть – „прості”), то ми б одержали фундаментальну систему розв’язків ЛОДР (5.1) :

Кількість розв’язків (5.4) дорівнює n , всі вони лінійно незалежні.
(5.4)

незалежні (див. приклад 2 п.4.9), отже, знайдено загальний розв'язок ЛОДР (5.1) :

Але, як відомо, не всі корені алгебраїчного рівняння – прості. Тому в системі може не бути різних лінійно незалежних розв'язків

а, отже, не будемо мати фундаментальної системи розв'язків ЛОДР - n : не виконується умова повноти (див. п. 4.3.2). Можливий також випадок, коли не всі корені характеристичного рівняння (5.3) – дійсні. Потребує, отже, дослідження на фундаментальність система розв'язків

ЛОДР із сталими коефіцієнтами в залежності від коренів характеристичного рівняння. Проведемо таке дослідження для рівнянь другого порядку.

5.1.2. Знаходження фундаментальної системи розв'язків ЛОДР -2 із сталими коефіцієнтами.

Розглянемо ЛОДР-2 із сталими коефіцієнтами

Складаємо характеристичне рівняння (5.5)

(5.6)

(до речі, варто запам'ятати формальний запис характеристичного рівняння : в ЛОДР замість похідної k – го порядку пишуть k -й степінь).

1. Якщо , то дискримінант , і корені характеристичного рівняння – дійсні різні :

Тоді, як вже підкреслювалось вище, маємо фундаментальну систему розв'язків рівняння (5.5) : , а тому і його загальний розв'язок

(5.7)

2. Якщо , то дискримінант . Тоді корені характеристичного рівняння – дійсні рівні :

(тобто).

Маємо, отже, лише один розв'язок рівняння (5.5) : .
Покажемо, що розв'язком цього рівняння є також

Справді,

Оскільки, , то і утворюють фундаментальну систему розв'язків, а загальний розв'язок ЛОДР – 2 (5.5) має вигляд

(5.8)

3. Нехай , тобто Тоді корені характеристичного рівняння (як рівняння з дійсними коефіцієнтами !) комплексно спряжені

, де . Таким чином, ми одержим комплекснозначні розв'язки ЛОДР – 2 з дійсними коефіцієнтами . Користуючись формулою Ейлера, запишемо ці розв'язки у вигляді

або

Користуючись властивістю 4 розв'язків ЛОДР (п. 4.1.1),

переконаємось, що розв'язками ЛОДР – 2 є функції :

(або) ;

досить брати зі знаком „плюс” (властивість 1 розв'язків ЛОДР п. 4.4.1). Ці функції лінійно незалежні, бо

Отже, вони утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (5.5). А загальний розв'язок цього рівняння такий :

$$. \quad (5.9)$$

Приклади.

1. Знайти загальний розв'язок рівняння

Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння

. Його корені дійсні і різні ().
Тому загальний розв'язок такий :

2. Знайти загальний розв'язок рівняння

Розв'язання. Корені характеристичне рівняння такі : . Тому загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд :

3. Для рівняння знайти інтегральну криву, що проходить через точку (0;0) і дотикається в цій точці прямої .

Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння

. Його корені : . Отже, загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд: .
Щоб знайти відповідну інтегральну криву, використаємо

задані початкові умови: $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$. Маємо

Отже, при $x = 0$:

Звідси знаходимо

Таким чином, шукана інтегральна крива має рівняння

4. Знайти загальний розв'язок рівняння

Розв'язання. Розв'язуючи характеристичне рівняння $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, одержуємо комплексні корені $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$.

Тут $C_1 = C_2 = 0$. Отже, на основі формули (5.9) загальний розв'язок запишеться у вигляді :

5. Матеріальна точка маси m притягується до пружного центра O з силою, пропорційною віддалі точки від центра (рис. 5.1). Знайти закон руху цієї точки.

Розв'язання. За законом Ньютона маємо

де k — коефіцієнт пропорційності (знак „мінус” взято тому, що напрям дії сили обернений по знаку до зміщення x).
Звідки

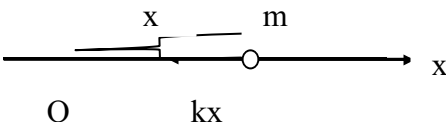
$$m \ddot{x} = -kx \quad (5.10)$$


Рисунок 5.1

Ми одержали лінійне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами. Корені відповідного характеристичного рівняння

є чисто уявними : . Тому за формулою (5.9)
 () дістаємо :

Останній вираз „нагадує” розклад синуса суми : .
 Тому перетворимо його так : замість сталих введемо
 нові сталі і , зв’язані співвідношеннями

(Очевидно, що). Тоді
 . Тобто матеріальна точка при наших
 умовах здійснює періодичні гармонічні коливання з
 амплітудою і початковою фазою .

Зауважимо, що з рівнянням виду (5.10) ми вже
 зустрічались в лекції 3 (див. рівняння (3.8), що
 характеризує коливання маятника). Ми там розв’язували
 його шляхом пониження порядку. Зате тепер, маючи апарат
 розв’язування лінійних однорідних рівнянь із сталими
 коефіцієнтами, ми добилися результату значно ефектив-
 ніше.

Зауваження. Можна показати, що в загальному випадку
 (для ЛОДР із сталими коефіцієнтами) фундаментальна
 система розв’язків в залежності від коренів
 характеристичного рівняння утворюється аналогічно. А
 саме :

а) якщо дійсний корінь характеристичного рівняння
 (5.3) кратності , то розв’язками ЛОДР (5.1) є функції
 ; (5.11)

б) якщо комплексний корінь характеристич-

ного рівняння (5.3) кратності , то розв’язками ЛОДР
 (5.1) із сталими коефіцієнтами будуть функції :

(5.12)

В порядку контролю треба мати на увазі, що загальна кількість розв'язків (5.11), (5.12) повинна дорівнювати (умова повноти).

Приклади.

6. Знайти загальний розв'язок рівняння

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння
. Знаходимо його корені :
Тому загальним розв'язком буде :

7. Знайти загальний розв'язок рівняння

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння
. Знаходимо його корені :
Оскільки корені кратні, то загальний розв'язок має вигляд :

8. Знайти загальний розв'язок рівняння
Яка інтегральна крива проходить через точку $(0;4)$, має в цій точці дотичну, нахилену до осі Ox під кутом α , і кривину рівну 0 .

Розв'язання. Характеристичне рівняння
має корені :
. Загальним розв'язком буде:

Знаходимо

Використовуючи початкові умови

складаємо для визначення систему
рівнянь :

Розв'язуючи, одержуємо :

Отже, шукана інтегральна крива має рівняння :

5.2. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння із сталими коефіцієнтами.

Як відомо, розв'язування лінійного неоднорідного рівняння зводиться :

1) до знаходження фундаментальної системи розв'язків відповідного однорідного рівняння ;

2) до знаходження хоча б одного частинного розв'язку заданого неоднорідного рівняння ;

Перша з цих задач нами тільки що розглянута. Друга задача може бути розв'язана методом варіації довільних сталих. Але цей метод здебільшого приводить до громіздких обчислень і складних квадратур. Тому виникає питання про те, як знайти один частинний розв'язок, не вдаючись до методу варіації. Для рівняння із сталими коефіцієнтами при певних видах правої частини частинний розв'язок вдається знайти відносно легко т. зв. **методом невизначених коефіцієнтів** (або методом підбору), до викладу якого ми і переходимо.

Як побачимо далі, цей прийом знаходження частинного розв'язку використовує лише елементарні операції : дифе-

ренціювання і розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Щоправда, він застосовується до розв’язування лише рівнянь із спеціальними правими частинами.

Нехай права частина неоднорідного рівняння має вигляд

$$P(x), \quad (5.13)$$

де i - дійсні числа, i - многочлени з дійсними коефіцієнтами степеня відповідно i ;

будемо вважати або тоді, коли або

є просто числами i , зокрема, можуть тотожно дорівнювати нулю. Наприклад, якщо , то

; якщо , то

(взагалі кажучи, тут можна надавати будь-

якого числового значення, оскільки , але завжди треба вибрати найменше із можливих значень).

Основна ідея методу : частинний розв’язок неоднорідного рівняння із сталими коефіцієнтами шукаємо у вигляді „подібному” в певному розумінні до правої частини , а саме

$$Q(x), \quad (5.14)$$

де i - ті ж числа, що i в формулі (5.13); - кратність

кореня для характеристичного многочлена відповід-

ного однорідного рівняння , причому , якщо

не є коренем многочлена (5.3); - більше з чисел

i , тобто більший із степенів многочленів i

у формулі (5.13); i - многочлени степеня з невизначеними коефіцієнтами, що підлягають числовому визначенню.

Доведення можливості знаходження частинного розв’язку опускаємо.

Проілюструємо цей метод для ЛНДР другого порядку.

5.2.1. Знаходження частинного розв’язку ЛНДР-2 із сталими коефіцієнтами методом невизначених коефіцієнтів.

Отже, зупинимось на знаходженні частинних розв’язків рівнянь

праві частини яких окремі випадки функції (5.13).
Поряд з рівнянням (5.13) розглядають відповідне ЛОДР – 2

Його характеристичне рівняння (5.16)

- алгебраїчне квадратне рівняння з дійсними коефіцієнтами. Як відомо, дійсні корені таких рівнянь або прості або двократні, а комплексні – завжди прості.

Для знаходження частинних розв’язків неоднорідних рівнянь другого порядку з правою частиною (5.13) не варто користуватись формулою (5.14) в загальному вигляді з наступним дослідженням в ній випадків :

а) і б) де - кратність коренів хароактеристичного рівняння (5.16).

Зручніше буде співставити тут функції (5.13) і (5.14) такою таблицею :

Вигляд правої частини	Корені харак-теристичного рівняння відповід-ного ЛОДР–2	Вигляд частинного розв’язку ЛНДР– 2
	Число не є к о р е н е м характеристично го рівняння.	

Число α є простим коренем характеристичного рівняння.

Число α є кратним коренем характеристичного рівняння.

Число α не є коренем характеристичного рівняння.

Число α є коренем характеристичного рівняння.

Знаходження частинного розв'язку ЛНДР доцільно починати із знаходження коренів характеристичного рівняння відповідного однорідного рівняння і їх співставлення з коефіцієнтами $a_1, a_2, \dots, a_n$ правої частини, записаної у формі (5.13).

І ще одне! Може трапитись, що функцію $y_p(x)$ - праву частину рівняння (5.15) не можливо зобразити формулою (5.13), але вона є сумою двох функцій $y_{p1}(x)$ і $y_{p2}(x)$ (або більшого їх числа), кожна з яких зображається за допомогою цієї формули. В такому разі ми знаходимо окремо частинний розв'язок $y_{p1}(x)$ рівняння з правою частиною $f_1(x)$ і частинний розв'язок $y_{p2}(x)$ рівняння з правою частиною $f_2(x)$.

. Тоді сума цих двох розв'язків буде частинним розв'язком рівняння (5.15) (властивість **накладання** розв'язків ЛНДР п. 4.1.2).

Приклади.

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння (5.17)

Розв'язання. Права частина цього рівняння – многочлен першого степеня. За нашою таблицею, . Корені характеристичного рівняння : . Тому загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння дорівнює

. Оскільки не є коренем цього рівняння, то частинний розв'язок заданого в умові рівняння має вигляд

(5.18)
де a і b - невідомі коефіцієнти. Підставляючи функцію (5.18) в рівняння (5.17), знаходимо і . Маємо :

, звідки

. Таким чином, загальний розв'язок рівняння (5.17) має вигляд :

2. Знайти загальний розв'язок рівняння

(5.19)

Розв'язання. Права частина рівняння (5.19) є добутком многочлена нульового степеня (в термінах нашої таблиці) і показникової функції з коефіцієнтом при показнику степеня . Корені характеристичного рівняння :

. Отже, число є простим коренем характеристичного рівняння. Тому частинний розв'язок

заданого диференціального рівняння має вигляд :

де a - невідомий коефіцієнт. Щоб знайти a , підставимо вираз (5.20) в рівняння (5.19), маємо :

отже, $a = 1$. Тому $y = \sin x$, і загальний розв'язок рівняння (5.19) запишеться у вигляді :

3. Знайти загальний розв'язок рівняння

Розв'язання. Права частина $\sin x$ рівняння (5.21) є добутком многочлена першого степеня і тригонометричної функції.

Згідно позначень в таблиці

$\sin x$. Корені характеристичного рівняння дорівнюють $\pm i$. Отже, число i є коренем характеристичного рівняння, тому частинний розв'язок заданого рівняння має вигляд :

$$y = \sin x, \quad (5.22)$$

де a невідомі коефіцієнти. Щоб знайти ці коефіцієнти, підставимо вираз (5.22) в рівняння (5.21). Маємо :

Для знаходження коефіцієнтів прирівнюємо тотож-

но но вирази в обох частинах біля i :

одержуємо систему рівнянь :

Тоді :

Отже, , а загальний розв'язок рівняння (5.21) має вигляд :

Приклад 4. Дослідити коливання матеріальної точки маси m , що знаходиться під дією пружної сили, величина якої пропорційна відхиленню точки від положення рівноваги, при наявності періодичної збурювальної сили, що чисельно дорівнює $F \sin \omega t$ (рис. 5.2). Опором середовища нехтуємо (рис. 5.2).

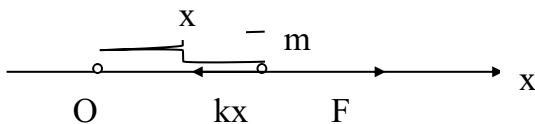


Рисунок 5.2

Розв’язання. За законом Ньютона диференціальне рівняння руху точки має вигляд :

(γ - коефіцієнт пропорційності) або :

$$m \ddot{x} + \gamma \dot{x} = F \cos(\omega t) \quad (5.23)$$

де m і γ . Запишемо однорідне рівняння, що відповідає неоднорідному рівнянню (5.23) :

$$m \ddot{x} + \gamma \dot{x} = 0 \quad (5.24)$$

Коренями його характеристичного рівняння є комплексно спряжені числа $\pm i \sqrt{\gamma/m}$. Тому загальний розв’язок ЛОДР (5.24) має вигляд :

$$x(t) = C_1 e^{i \sqrt{\gamma/m} t} + C_2 e^{-i \sqrt{\gamma/m} t} \quad (5.25)$$

де C_1 і C_2 довільні сталі. Він описує т. зв. **вільні коливання** точки(порівняйте з розв’язком прикладу 5 в п. 5.1.2).

Щоб знайти частинний розв’язок неоднорідного рівняння (5.23) „прочитаємо” його праву частину , як окремий випадок функції (5.13), в якій (многочлен нульового степеня),

Випадок 1. , тобто число не є коренем характеристичного рівняння. Фізичний „підтекст” цього випадку : частота коливань зовнішньої сили не співпадає з частотою вільних коливань (5.25). Виходячи з рекомендацій нашої таблиці, покладемо

$$F \cos(\omega t) = F_0 \cos(\omega t) \quad (5.26)$$

де F_0 і невідомі числа.

Підставляючи вираз (5.26) в рівняння (5.23), будемо мати :

або

Тоді, прирівнюючи коефіцієнти біля $\cos \omega t$ і $\sin \omega t$, одержимо :

звідки $\dots$. Таким чином,

А загальний розв'язок рівняння (5.23) (**вимушені** коливання матеріальної точки) задається формулою

(5.27)
і його можна витлумачити як накладання двох коливань з частотами ω_1 і ω_2 . При цьому коливання - **обмежені**.

Випадок 2. Нехай $\omega = \omega_0$, тобто число ω_0 є коренем характеристичного рівняння. А з фізичної точки зору це означає, що частота коливань **зовнішньої** сили співпадає з частотою вільних коливань (5.25). В цьому випадку, знову ж таки за рекомендаціями нашої таблиці, покладаємо

Звідси $\dots$

Підставляючи ці вирази в рівняння (5.23), дістанемо рівність

тобто

звідки знайдемо :

Отже, і, значить

(рис. 5.3).

Вимушені коливання матеріальної точки при цьому будуть :

$$x = \frac{a}{2\omega} \cos \omega t \quad (5.28)$$

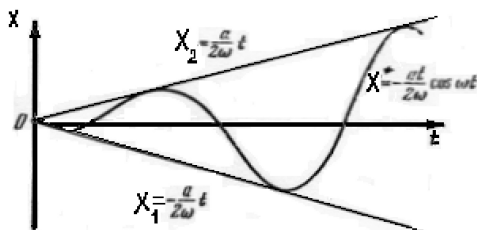


Рисунок 5.3

Формула (5.28) показує, що розмах коливань необмежено росте разом з часом. Таким чином, навіть дуже мала зовнішня сила у випадку 2 зумовлює необмежене зростання амплітуди коливань системи. Це явище носить назву **резонансу**. Фізичним наслідком резонансу є порушення роботи і навіть руйнування пружної системи.

Наприклад, відомі випадки, коли ритмічні стуки коліс поїзда, що їде залізничним мостом, приводили до руйнування цього мосту.

Приклад 5. Знайти частинний розв'язок рівняння

який би задовольняв таким початковим умовам :

Розв'язання. Знаходимо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Характеристичний многочлен цього рівняння $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ має корені λ_1 та λ_2 . Тому, за формулою (5.7), загальним розв'язком цього рівняння є $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$.

Шукаємо, тепер, частинний розв'язок неоднорідного рівняння. Його права частина $f(x)$ не зображується формулою (5.13), але є сумою двох функцій $f_1(x)$ і $f_2(x)$, кожна з яких цією формулою зображується. Тому, використовуючи властивість накладання розв'язків ЛНДР (п. 4.1.2), будемо шукати y_p як суму двох частинних розв'язків y_{p1} і y_{p2} , перший з яких є розв'язком рівняння $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x)$, а другий - розв'язком рівняння $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$. Для правої частини першого рівняння $f_1(x)$ не є коренем характеристичного рівняння; тому $y_{p1} = A(x)e^{\lambda_1 x}$. Для правої частини другого рівняння $f_2(x)$ не є коренем характеристичного рівняння; тому $y_{p2} = B(x)e^{\lambda_2 x}$. Сумуючи, одержуємо $y_p = A(x)e^{\lambda_1 x} + B(x)e^{\lambda_2 x}$. Підставляємо y_p в задане неоднорідне рівняння:

або

Звідси :

Тому . Отже,
Таким чином, загальний розв'язок заданого неоднорідного
рівняння має вигляд :

Тепер шукаємо частинний розв'язок, який задовольняє
заданим початковим умовам :

Розв'язуючи цю систему, знаходимо
Підставляючи ці значення в знайдений загальний розв'язок,
дістанемо шуканий частинний розв'язок :

Вправи.

1. Проінтегрувати рівняння :

2. Знайти частинний розв'язок рівняння, що задовольняє
початковим умовам :

;

3. Методом варіації сталих знайти загальний розв'язок диференціального рівняння :

4. Для кожного із заданих рівнянь написати його частинний розв'язок з невизначеними коефіцієнтами (числових значень коефіцієнтів не знаходити) :

а) $y'' + 4y' + 4y = 0$;

б) $y'' - 4y' + 4y = 0$;

в) $y'' + 2y' + 2y = 0$;

5. Проінтегрувати рівняння :

а) $y'' + 2y' + 2y = 0$;

б) $y'' - 2y' + 2y = 0$;

6. Знайти частинний розв'язок рівняння, що задовольняє початковим умовам :

Лекція 6. Системи диференціальних рівнянь.

6.1. Загальні поняття.

В процесі розв'язування багатьох науково-технічних задач виникає необхідність вивчення взаємодії декількох процесів або випадків, коли шукана функція є вектором, що приводить до розв'язування не одного диференціального рівняння, а системи таких рівнянь.

Приклад 1. Рівняння руху деякого об'єкта у векторній формі має вигляд :

де $\dot{x}$ – швидкість, F – зовнішня сила.

Проектуючи це співвідношення на осі координат, одержуємо систему диференціальних рівнянь :

(6.1)

Надалі ми обмежимося розглядом так званих **канонічних систем**, в яких всі рівняння розв'язані відносно старшої похідної. Канонічну систему завжди можна замінити еквівалентною їй системою рівнянь першого порядку, число рівнянь якої дорівнює сумі порядків рівнянь вихідної системи.

Проілюструємо цей факт на наведеному вище прикладі.

Для цього позначимо : $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$. Тоді система рівнянь (6.1) набере вигляду :

(6.2)

Зрештою, подібний прийом ми вже використовували. Так,

інтегруючи диференціальне рівняння другого порядку
методом пониження порядку (лекція 3), ми
фактично одержували систему рівнянь першого порядку

У зв'язку з цим будемо розглядати тільки системи
першого порядку, розв'язані відносно похідних ; такі
системи називаються **нормальними**, їх вигляд :

Під розв'язком системи диференціальних рівнянь (6.3)
розумітимемо систему функцій (6.3)

що перетворює (6.3) в тотожність при будь-яких (6.4)
значеннях довільних сталих . При цьому, які б не були
початкові умови :

(6.5)
ці сталі визначаються однозначно. Названа система
функцій (6.4) при сформульованих умовах (6.5) є **загаль-**
ним розв'язком. Будь-які функцій, що одержуються із
загального розв'язку (6.4) при конкретних значеннях сталих
називаються **частинним розв'язком** системи
диференціальних рівнянь.

Пошук частинного розв'язку системи рівнянь (6.3) при початкових умовах (6.5) називається **задачею Коші**. Сформулюємо теорему про існування і єдиність розв'язку задачі Коші системи диференціальних рівнянь.

Теорема Коші. Розв'язок задачі Коші існує і єдиний, якщо функції неперервні разом із своїми частинними похідними по аргументах в області вимірного простору, яка містить точку .

6.2. Розв'язування нормальної системи диференціальних рівнянь.

Вище ми вже зауважували про можливість “розгортання” диференціального рівняння n -го порядку у систему диференціальних рівнянь першого порядку. В свою чергу при певних умовах нормальну систему рівнянь (6.3) можна звести до еквівалентного одного диференціального рівняння n -го порядку з однією шуканою функцією. Це буде одним із методів розв'язування (інтегрування) такої системи рівнянь т. зв. **метод виключень**.

Здійснюється це таким чином. Перше рівняння системи (6.3) диференціюємо по x (знаходимо від обох частин першої рівності **повну** похідну по x) :

y_1 і замість y_1 підставляємо їх значення із системи (6.3). В результаті одержуємо рівняння

Одержану рівність знову диференціюємо по x і поступаємо аналогічно вищезгаданому ; одержуємо :

Так ми діятимо до тих пір, доки не одержимо рівняння :

Потім із одержаних на проміжних етапах $\dots$ - x
рівнянь

$\dots$ і рівняння
знаходимо $\dots$ і підставляємо в останнє рівняння
 $\dots$, внаслідок чого дістанемо рівняння :

Розв'язуємо його і одержимо функцію

Інші невідомі функції $\dots$ шукаємо за допомогою
допоміжних рівнянь, що одержувались на проміжних
етапах.

Приклади.

1. Знайти загальний розв'язок системи рівнянь :

Розв'язання. Диференціюємо перше рівняння по x :
 $\dots$ і підставляємо в нього похідну $\dots$, взяту з
другого рівняння : $\dots$. Невідому y виключаємо
за допомогою першого рівняння. В результаті маємо ЛОДР
 -2 із сталими коефіцієнтами, еквівалентне заданій системі:
 $\dots$. Його загальний розв'язок

Невідому y знаходимо не з другого рівняння (y ж неві-
дома!), а із першого рівняння системи :

2. Проінтегрувати систему рівнянь .

Розв’язання. Диференціюємо перше рівняння по :

З першого рівняння даної системи визначаємо : (6.6)

. Підставляємо це значення в друге рівняння системи. Одержимо :

або

Підставляємо знайдене значення в рівняння (6.6) :

або

Це рівняння другого порядку. Інтегруючи його двічі, знаходимо

Підставляючи і в рівняння (6.2) , знайдемо

Відповідь. Розв’язком системи є функції

3. Речовина розкладається на дві речовини і із швидкістю утворення кожної з них пропорційно кількості нерозкладеної на даний момент речовини. Знайти закон зміни кількості і речовини і в залежності від часу , якщо при , а через 1 годину і до-

рівнюють відповідно і , де - початкова кількість речовини .

Розв'язання. На момент часу кількість речовини дорівнює . Отже, для встановлення закону зміни кількості речовин і маємо систему диференціальних рівнянь

Можна було б при розв'язуванні цієї системи використати загальний метод виключення, але тут простіше поділити обидві частини другого рівняння на відповідні частини першого рівняння. Одержуємо :

звідки ,

Оскільки при маємо , то , а тому

(6.8)

Замінюючи в першому рівнянні на , одержимо

(6.9)

Це лінійне рівняння першого порядку із сталими коефіцієнтами. Складемо характеристичне рівняння відповідного однорідного рівняння :

а тому загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння буде

Частинний розв'язок даного неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді . Тоді і

Отже, загальний розв'язок неоднорідного рівняння (6.9) має вигляд

Використовуючи початкову умову , матимемо

і , отже,

Підставляючи цей вираз в (6.8), одержимо

Коефіцієнти a_{ij} і b_i можна визначити, якщо врахувати умову : $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 0$. Одержимо :

Тоді $a_{ij} = -a_{ji}$, а потім
Запишемо тепер розв'язок задачі :

Зауваження. До одного рівняння n – го порядку можна зводити не тільки нормальні системи рівнянь, але й системи рівнянь вищих порядків. Але робити це треба безпосередньо.

Приклад 5. Розв'язати систему рівнянь

Розв'язання. Перше рівняння двічі диференціюємо по

t і виключаємо x за допомогою другого рівняння.
Одержимо

.

А далі складаємо і розв'язуємо характеристичне рівняння :

Тоді,

6.3. Огляд основних фактів теорії системи лінійних диференціальних рівнянь.

Найбільше вивченою нормальною системою диференціальних рівнянь є система **лінійних** рівнянь. Це система виду

(6.3), в якій функції лінійні відносно шуканих функцій :

;

називаються коефіцієнтами, - правими частинами лінійних рівнянь.

Очевидно, що якщо коефіцієнти і праві частини - неперервні на , то при умови теореми Коші для такої системи будуть виконуватись. Запишемо систему лінійних рівнянь в розгорнутому вигляді:

6.10)

Відзначимо, насамперед, що рівняння го порядку, до якого зводиться система лінійних рівнянь (6.10) , також лінійне.

Багато питань теорії системи лінійних рівнянь перегукуються з аналогічними питаннями теорії лінійних

диференціальних рівнянь n -го порядку, які розглядались в лекції 4.

Почнемо із скорочених записів лінійних систем, використовуючи при цьому векторно-матричну символіку. Запишемо коефіцієнти лінійної системи (6.10) у вигляді матриці :

а сукупність невідомих функцій $y_1, y_2, \dots, y_n$ у вигляді вектор-функції :

Тоді, використовуючи правило множення матриць, систему (6.10) можна записати так :

де A - стовпець похідних, а B - стовпець з правих частин.

Система лінійних рівнянь без правих частин, тобто при $B=0$, називається однорідною ; вона записується так :

Безпосередньо перевіряються такі властивості системи ЛОДР (6.11) :

1) якщо вектор-функція Y є розв'язком системи (6.11) , то C , де C довільне число також є її розв'язком.

2) якщо вектор-функції y_i є розв'язками системи (6.11), то їх сума також задовольняє цій системі.

З цих властивостей випливає: якщо $y_1, y_2, \dots, y_n$ - розв'язки системи (6.11), то їх лінійна комбінація

є розв'язком цієї системи.

За аналогією з векторною алгеброю, система вектор-функцій $y_1, y_2, \dots, y_n$ називається лінійно незалежною на D , якщо рівність

виконується тільки при $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$.
Будь-яку сукупність $y_1, y_2, \dots, y_n$ лінійно незалежних розв'язків

системи (6.11) називають **фундаментальною** системою розв'язків. (6.12)

Існування і умови фундаментальності розв'язків системи (6.11) встановлюються аналогічно до подібних тверджень для розв'язків лінійних рівнянь $y' = Ay$ - порядку n . Якщо сукупність розв'язків (6.12) утворює фундаментальну систему розв'язків, то їх лінійна комбінація

є загальним розв'язком системи (6.11), тобто, множина (6.11) вичерпує всі можливі її частинні розв'язки. (6.13)

Як і для одного рівняння $y' = Ay$ го порядку, можна довести, що загальний розв'язок неоднорідної системи (6.10) є сумою загального розв'язку відповідної однорідної системи (6.11) і частинного розв'язку неоднорідної системи. При цьому частинні розв'язки неоднорідної системи можна знайти методом варіації довільних сталих.

6.4. Розв'язування системи лінійних однорідних рівнянь із сталими коефіцієнтами.

Зрозуміло, що систему (6.11) можна розв'язати методом зведення її до одного рівняння - порядку методом виключень. Але, враховуючи, що коефіцієнти сталі розглянемо ще й такий спосіб (назвемо його матричним). Для зручності обмежимося випадком , тобто обмежимося трьома рівняннями. Запишемо їх в таких позначеннях :

Шукатимемо окремі розв'язки системи у вигляді : (6.14)

де - невизначені сталі, які треба знайти.
Підставляючи функції (6.15) в (6.14) і скорочуючи на множник , дістанемо : (6.15)

або

Нас, природньо, цікавить ненульовий розв'язок цієї системи, бо при одержуємо тривіальний (6.16)

розв'язок : . Щоб система лінійних алгебраїчних однорідних рівнянь мала ненульовий розв'язок, потрібно, щоб її визначник дорівнював нулю :

Рівняння (6.17) є алгебраїчним рівнянням відносно λ (6.17). Його називають **характеристичним рівнянням** системи лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами. В нашому випадку це рівняння третього степеня.

Розглянемо випадок, коли рівняння (6.17) має три дійсні різні корені . Кожний з цих коренів по чергово підставляємо в систему (6.16) і визначаємо невідомі

. Можна довести, що загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь (6.14) в даному випадку має вигляд :

У векторній формі загальний розв'язок запишемо так : (6.18)

$$C_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + C_2 e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + C_3 e^{\lambda_3 t} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}, \quad (6.19)$$

де C_1, C_2, C_3 — довільні константи, а $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$ — вектори, що визначаються з системи (6.16) для $\lambda = \lambda_i$.

$$(6.20)$$

Вважаємо, отже, що вектор-функції утворюють фундаментальну систему розв'язків заданої системи диференціальних рівнянь.

Зауваження. Оскільки визначник системи (6.16) дорівнює нулю, то хоча б один з його рядків є лінійною комбінацією інших. А тому в однорідній системі (6.16) є „зайві” рівняння. Цей факт можна використати ще й так : одну із змінних можна брати довільною, наприклад, рівною (одна лише вимога : коефіцієнт біля цієї змінної при підстановці в систему (6.16) не повинен дорівнювати нулю).

Приклад. Розв'язати задачу Коші :

Розв'язання. Шукаємо спочатку загальний розв'язок системи. В нашому прикладі :

Нехай один з розв'язків. Тоді для знаходження одержуємо систему рівнянь :

в якій корінь характеристичного рівняння :

Корені характеристичного рівняння :

Підставляємо в (6.16) . Тоді :

Якщо взяти , тоді . Отже, одним з розв'язків системи (6.14) є

Якщо в (6.16) покласти , то

Візьмемо , тоді . Одержуємо другий розв'язок

системи :

Загальний розв'язок дорівнює лінійній комбінації знайдених розв'язків :

В скалярній формі це можна записати так :

і знаходимо з початкових умов :

Отже,
Відповідь :

Вправи.

1. Розв'язати систему диференціальних рівнянь :

a)

б)

2. Розв'язати задачі Коші :

a)

б)

3. Розв'язати систему рівнянь :

а)

б)

4. Проінтегрувати систему рівнянь :

а)

б)

Лекція 7. Огляд наближених методів розв'язування диференціальних рівнянь.

7.1. Застосування формули Тейлора.

Розглянемо задачу Коші для рівняння

(7.1)

з початковими умовами

(7.2)

Згідно формули Тейлора розв'язок цієї задачі шукаємо у вигляді

(7.3)



Тейлор Брук (1685-1731)
англійський математик

Коефіцієнти розкладу

відомі з початкових умов (7.2). Коефіцієнт визначається з (7.1) при . Коефіцієнти розкладу більш високих порядків визначаються повним (!) диференціюванням (7.1) і підстановкою в одержувані вирази .

Приклад. Розв'язати задачу Коші

Розв'язання. Розв'язок цієї задачі записуємо у вигляді

З початкової умови маємо , з рівняння одержуємо . А далі, диференціюємо рівняння по : . Замість підставляємо число 0, тоді і т.д. Таким чином, розв'язок має вигляд :

Зауважимо, що формула Тейлора передбачає вельми сильні вимоги до гладкості функції .

7.2. Метод ітерацій.

Сутність методу ітерацій (в перекладі з латинської „повторення”) розглянемо на прикладі задачі Коші для рівняння першого порядку :

Проінтегруємо по (7.4) : (7.4)

Останнє співвідношення до певної міри формальне, бо інтегралу в правій частині ми „взяли” не можемо із-за незнання функції у виразі . Але, покладаючи, (під інтегралом) , ми можемо знайти перше наближення

Використовуючи його, аналогічно знаходимо друге наближення

(7.5)

і т.д., а за допомогою - наближення одержуємо - наближення

Це і є „робоча формула” методу ітерацій.

Число необхідних ітерацій визначаємо заданою точністю обчислень. Наприклад, якщо максимальна абсолютна похибка дорівнює , то число ітерацій знаходиться з виразу

(7.6)

Зауваження. Треба звернути увагу ось на що : функція стоїть під інтегралом, тобто повинна забезпечувати його існування. Це набагато слабша вимога до , ніж в методі формули Тейлора. Тому метод ітерацій використовується в тих випадках, коли розв’язок за допомогою формули Тейлора не можна побудувати. Програючи попередньому

методу в простоті (все ж таки інтегрувати складніше, ніж диференціювати), метод ітерацій виграє по широті застосування.

Приклад. Розв'язати задачу Коші :

Розв'язання. У відповідності з формулою (7.5) перше наближення має вигляд

Використовуючи це, дістаємо друге наближення

а потім третє

Зауваження 2. Метод ітерацій застосовується і для розв'язування систем рівнянь :

Інтегруємо обидва рівняння системи і використовуючи початкові умови, одержимо першу ітерацію :

Повторюємо цей процес необхідне число разів і знаходимо **робочу формулу** методу ітерацій для розглядуваної системи диференціальних рівнянь :

7.3. Метод спрощень.

Цей метод застосовується при грубій оцінці розв'язку диференціального рівняння. Рівняння спрощується лінеаризацією функції, усередненням слабо змінних коефіцієнтів на заданому відрізку, відкиданням малих членів і т.д. Користуватись цим методом треба вельми обережно.

Приклад. Розв'язати задачу Коші

Розв'язання. Розв'язок задачі будемо шукати на відрізку $[-1; 1]$. Якщо ϵ має порядок 1 (а це потім треба перевірити!), то третій член рівняння можна відкинути. Усереднюємо також коефіцієнт при другому члені :

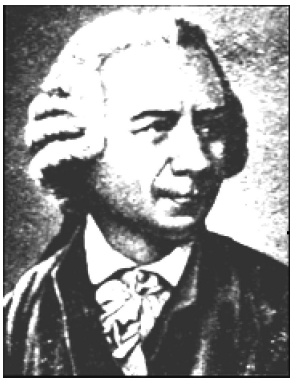
Таким чином, одержуємо рівняння

розв'язок якого шукаємо елементарно :

Зауваження. Метод спрощень, як і методи ітерацій і формули Тейлора, відносяться до аналітичних методів наближеного розв'язування рівнянь.

7.4. Метод Ейлера.

Метод Ейлера



Ейлер Леонард (1707-1783)
швейцарський математик,
механік, фізик

один з перших числових розв'язків диференціальних рівнянь.

Розглянемо його на прикладі задачі Коші для рівняння першого порядку :

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (7.7)$$

Розіб'ємо відрізок $[x_0, x_1]$ на n рівних проміжків (рис. 7.1)

і приймемо наближено

звідки

або

(7.8)

Це і є **робоча формула** методу Ейлера.

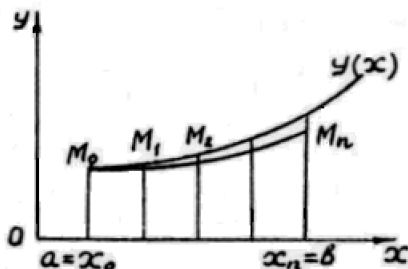


Рисунок 7.1

Зауваження. Оскільки при одержанні формули (7.8) ми користувались рівністю , то похибка, що допускається при цьому, має порядок першого відкинутого члена в розкладі Тейлора, тобто , а при кроках порядок

похибки стане . З цієї оцінки випливає, що для збільшення точності, наприклад, в разів, число кроків також треба збільшити в разів.

7.5. Метод Рунге-Кутта.

Метод Рунге-Кутта є удосконаленим методом Ейлера і забезпечує більш високу точність обчислення при незначному його ускладненні (тут порядок похибки

становить). Це покращення досягається за рахунок того, що на кожному кроці враховується зміна похідної (рис. 7.2). **Робоча формула** цього методу має вигляд

(7.9)

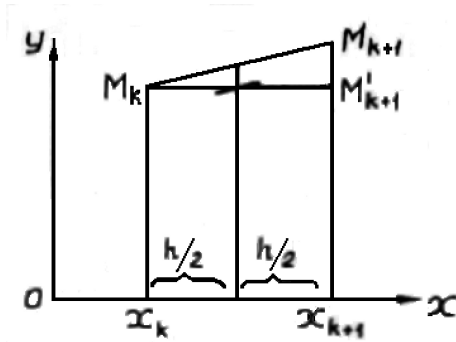


Рисунок 7.2

7.7. Графоаналітичні методи розв'язування диференціальних рівнянь.

Хоча з розвитком ЕОМ ці методи втратили свою актуальність, вони все ж таки знаходять застосування в інженерній практиці і дають можливість швидко одержати необхідні результати (щоправда, з невисокою точністю). Але, для ілюстративності, і це буває корисно.

Розглянемо один з таких методів на прикладі розв'язування задачі Коші для рівняння другого порядку :

(7.10)

Скористаємося формулою радіуса кривини кривої

(7.11)

і пам'ятаючи, що , формулу (7.11) запишемо так :

(7.12)

Це і буде нашою **робочою формулою**.

Розв'язок будується таким чином. За допомогою початкових умов із заданої точки проводимо дотичну і нормаль (використовуючи трикутник). Потім за допомогою (7.12) визначаємо радіус кривини кривої в початковій точці і пишемо рівняння дуги (рис. 7.3).

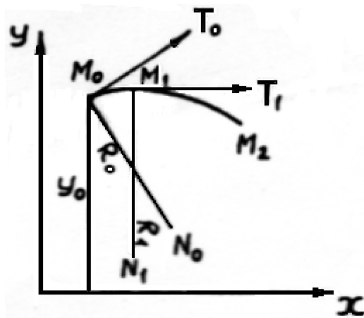


Рисунок 7.3

В точці проводимо дотичну і нормаль, визначаємо за (7.12) радіус кривини і знову проводимо дугу кола

Додаток

Контроль самостійної роботи студентів.

1. Питання для самоперевірки.

1. Дайте означення диференціального рівняння. Порядок рівняння.

2. Що називається розв'язком (інтегралом)

диференціального рівняння, загальним і частинним розв'язком?

3. Постановка задач для диференціальних рівнянь.

4. Сформулюйте теорему Коші для рівняння, розв'язаного відносно старшої похідної.

5. В чому полягає геометричний зміст теореми Коші для диференціального рівняння першого порядку.

6. Що таке поле напрямів, ізокліни? Як виражаються рівняння ізоклін?

7. Складання диференціальних рівнянь сім'ї кривих.

8. Чим відрізняються рівняння з відокремленими і відокремлюваними змінними? Як розв'язуються такі рівняння?

9. Які рівняння зводяться до рівнянь з відокремлюваними змінними?

10. Які рівняння відносяться до однорідних?

11. Як розв'язуються однорідні рівняння?

12. Які рівняння зводяться до однорідних?

13. Яке диференціальне рівняння називається лінійним?

14. Як розв'язується лінійне рівняння?

15. Яке рівняння носить ім'я Бернуллі?

16. Якою підстановкою розв'язується рівняння Бернуллі?

17. Яке рівняння носить назву рівняння в повних диференціалах?

18. Як встановити чи є задане рівняння рівнянням в повних диференціалах?

19. Як розв'язується рівняння в повних диференціалах?

20. Які точки і розв'язки диференціального рівняння першого порядку називаються особливими?

21. Назвіть типи особливих точок.

22. Що таке обвідна?

23. Як знайти рівняння обвідної?

24. Геометричний зміст і механічне тлумачення задачі Коші для рівняння другого порядку?

25. Розв'язування диференціального рівняння виду

26. Розв'язування диференціального рівняння виду

27. Розв'язування диференціального рівняння виду
28. Поняття проміжного інтеграла.
29. Напишіть диференціальне рівняння коливань математичного маятника. Чому порядок такого рівняння можна понизити?
30. Чи залежить період коливань математичного маятника від початкового відхилення?
31. Що називається ЛНДР- n і ЛОДР- n ? Сформулюйте теорему Коші для цих рівнянь?
32. Властивості розв'язків ЛОДР.
33. Властивості розв'язків ЛНДР
34. Лінійний диференціальний оператор (ЛДО), його властивості. Чим відрізняється ЛДО від функції?
35. З яких функцій можна побудувати вронскіан n – порядку?
36. Чим відрізняється лінійна залежність від лінійної незалежності системи функцій?
37. Основні властивості вронскіана.
38. Які властивості вронскіана роблять його індикатором лінійної залежності і лінійної незалежності системи розв'язків ЛОДР - n ?
39. Формула Остроградського-Ліувілля?
40. Фундаментальна система розв'язків.
41. Будова загального розв'язку ЛОДР - n .
42. Будова загального розв'язку ЛНДР - n .
43. Знаходження частинного розв'язку ЛНДР методом Лагранжа.
44. Що таке характеристичне рівняння ЛОДР – n із сталими коефіцієнтами?
45. Які три випадки коренів характеристичного рівняння для ЛОДР-2 ви можете назвати?
Який вигляд має загальний розв'язок для цих випадків?
46. Сформулюйте алгоритм розв'язування ЛОДР – 2 із сталими коефіцієнтами.
47. Що таке власні коливання системи?

48. Чи залежить амплітуда власних коливань системи від часу?
49. Чи залежать частота і період власних коливань системи від часу?
50. При яких спеціальних видах правої частини ЛНДР із сталими коефіцієнтами можемо назвати вигляд частинного розв'язку цього рівняння?
51. Чим відрізняються вимушені коливання системи від власних її коливань?
52. Що таке резонанс? В яких відомих вам процесах це явище небезпечне?
53. Яка система диференціальних рівнянь називається канонічною?
54. Чим відрізняється нормальна система рівнянь від канонічної?
55. Сформулюйте задачу і теорему Коші для нормальної системи диференціальних рівнянь.
56. Як розв'язується нормальна система диференціальних рівнянь?
57. Записати загальний вигляд системи ЛНДР і ЛОДР.
58. Який вигляд має характеристичне рівняння системи ЛОДР із сталими коефіцієнтами?
59. В чому полягає алгоритм розв'язування системи ЛОДР із сталими коефіцієнтами?

2. Завдання розрахунково-графічної роботи “Диференціальні рівняння”.

Завдання 1. Встановити аргументовано тип рівняння першого порядку і метод його розв’язування. Знайти загальний або частинний розв’язок.

Завдання 2. Розв’язати задачу.

Завдання 3. Знайти загальний або частинний розв’язок рівняння другого порядку.

Завдання 4. Задано систему функцій. Знайти визначник Вронського; встановити чи утворюють ці функції фундаментальну систему розв’язків даного ЛОДР.

Завдання 5. Відомі корені характеристичного рівняння ЛОДР із сталими коефіцієнтами. Написати загальний розв’язок цього рівняння.

Завдання 6. Знайти загальний або частинний розв’язок ЛОДР.

Завдання 7. Знайти частинний розв’язок ЛНДР методом варіації довільних сталих.

Завдання 8. Записати вид частинного розв’язку ЛНДР, якщо відомі корені характеристичного рівняння відповідного ЛОДР і права частина.

Завдання 9. Знайти загальний або частинний розв’язок ЛНДР.

Завдання 10. Розв’язати систему диференціальних рівнянь.

Варіант 1.

2. Матеріальна точка маси m рухається прямолінійно до центра, що притягує її з силою $F = \frac{k}{r^2}$, де k - віддаль точки від центра. Рух починається із стану спокою при $r = r_0$. Знайти час, за який точка досягне центра.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

Варіант 2.

2. Швидкість розпаду радіо пропорційна його кількості.

Протягом року з кожного грама радію розпадається 0,44 мг.
Через скільки років розпадеться половина наявної кількості радію?

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

Варіант 3.

Швидкість розпаду деяких бактерій пропорційна їх кількості в розглядуваний момент часу . За 5 год. кількість бактерій збільшилась втричі. Знайти залежність кількості бактерій від часу.

8.

10.

Варіант 4.

Моторний човен рухається в стоячій воді з швидкістю .
Опір води пропорційний швидкості руху човна . Описати
подальший рух човна, якщо двигун вимкнено. Знайти час
руху човна до зупинки і пройдений шлях.

10.

Варіант 5.

Човен розганяють в стоячій воді до швидкості v_0 , після чого вимикають мотор. Опір води пропорційний швидкості руху човна. Описати подальший рух човна. Знайти час руху човна до зупинки і пройдений шлях.

8.

10.

Варіант 6.

Температура вийнятої з печі хлібини протягом 20 хв. падає від до С. Температура повітря дорівнює С. Через скільки часу від початку охолодження температура хліба понизилась до С?

Варіант 7.

Куля входить в дошку завтовшки $\dots$ м із швидкістю $\dots$ м/с і вилітає, пробивши її, із швидкістю $\dots$ м/с. Знайти час руху кулі через дошку, якщо сила опору руху пропорційна квадрату швидкості.

Варіант 8.

Відомо, що швидкість приросту населення прямо пропорційна кількості населення. Знайти залежність між чисельністю населення і часом, якщо відомо, що в деякий момент, що приймається за початковий, кількість населення дорівнювала , а через рік вона збільшилась на (%). Прийняти мільярдів, %. Якою буде чисельність населення через 10 років, відраховуючи від ?

Варіант 9.

Поїзд, вага якого разом з тепловозом дорівнює G , рухається по прямолінійному шляху. Сила тяги тепловоза постійна і дорівнює F . Сила опору при русі задається як лінійна функція від швидкості поїзда. Знайти закон руху, якщо в початковий момент швидкість v_0 і пройдений шлях s_0 .

дорівнюють нулю.

Варіант 10.

Тіло масою m рухається прямолінійно під дією сили F , яка пропорційна часу руху тіла (коефіцієнт пропорційності дорівнює 3). Крім цього на тіло діє сила опору середовища, яка пропорційна швидкості (коефіцієнт пропорційності дорівнює 2). Знайти залежність швидкості від часу.

Варіант 11.

Точка масою m рухається прямолінійно під дією сили, яка дорівнює потроєному кубові часу. В момент часу t_0 швидкість точки дорівнює нулю. Крім того на точку діє сила опору середовища пропорційна добутку часу і швидкості (коефіцієнт пропорційності k). Знайти залежність швидкості від часу.

Варіант 12.

Тіло масою m падає з деякої висоти з швидкістю v . В момент часу t на тіло діє сила опору середовища пропорційна квадратові швидкості тіла. Знайти залежність швидкості від часу.

Варіант 13.

У культурі пивних дріжджів швидкість приросту діючого ферменту пропорційна наявній його кількості. Якщо ця кількість подвоюється протягом години, то у скільки разів вона збільшиться протягом 2,5 год.

Варіант 14.

Конденсатор ємністю пф вмикається в коло з напругою $E=100$ В і опором $R=103$ Ом. Визначити заряд q конденсатора в момент t після вмикання.

Варіант 15.

Сталева куляка радіуса r падає з висоти h без початкової швидкості на сталеву плиту. Опір повітря пропорційний квадратові швидкості. Знайти швидкість кульки в момент удару в плиту.

Варіант 16.

Тіло рухається прямолінійно з прискоренням, яке пропорційне добутку квадрата швидкості на час . Знайти залежність між швидкістю і часом, якщо при

Варіант 17.

Маса пілота з парашутом становить 80 кг. Опір повітря при опусканні парашута пропорційний квадрату його швидкості($k=400$). Визначити швидкість опускання залежно від часу і встановити максимальну швидкість опускання.

Варіант 18.

Знайти лінію, яка проходить через точку (x_0, y_0) , якщо відрізок дотичної між точкою дотику і віссю ординат має сталу довжину a .

Варіант 19.

Конденсатор ємністю C пФ вмикається в коло з напругою U В і опором R Ом. Визначити заряд конденсатора в момент t після вмикання.

Варіант 20.

Моторний човен рухається в стоячій воді з швидкістю 5 м/с. На повному ході двигун вимикається і через 40 с після цього швидкість човна зменшується до 2 м/с. Визначити швидкість човна через 2 хв. після зупинки двигуна, вважаючи, що опір води пропорційний швидкості руху човна.

Варіант 21.

Матеріальна точка масою $0,2$ кг занурюється в воду з початковою швидкістю $0,05$ м/с. Знайти шлях пройдений точкою за 2 с, якщо сила опору води пропорційна швидкості (коефіцієнт пропорційності 2).

Варіант 22.

Швидкість розпаду радію пропорційна його наявній кількості. Відомо, що половина його початкового запасу розпадається протягом 1600 років. Визначити яка кількість радію нерозпалась за 100 років, якщо початкова його кількість дорівнювала 1 кг.

Варіант 23.

Футбольний м'яч вагою 0,4 кг підкинуто вгору з швидкістю 20 м/с. Опір повітря пропорційний квадрату швидкості і дорівнює 0,48 г при швидкості 1 м/с. Обчислити

час підйому м'яча.

Варіант 24.

Швидкість здешевлення обладнання внаслідок його зношування пропорційна в кожний момент часу його фактичній вартості. Початкова вартість обладнання 2 млн. грн. Якою буде вартість обладнання через 10 років.

Варіант 25.

Тіло масою m падає з деякої висоти з швидкістю v . Сила опору, яка діє на тіло, пропорційна квадратові швидкості. Знайти залежність між швидкістю і часом падіння.

Варіант 26.

Знайти лінію, яка проходить через точку , якщо відрізок дотичної між точкою дотику і віссю ординат має сталу довжину .

Варіант 27.

У воді, температура якої , за 10 хв. тіло охолоджується від до . За скільки часу тіло охолodиться до , якщо за законом Ньютона швидкість охолодження пропорційна різниці температур тіла і середовища.

Варіант 28.

У культурі пивних дріжджів швидкість приросту діючого ферменту пропорційна наявній його кількості. Якщо ця

кількість подвоюється протягом години, то у скільки разів вона збільшиться протягом 2,5 год.

Варіант 29.

Матеріальна точка масою m рухається прямолінійно під дією сили F , яка прямо пропорційна часу руху t і обернено пропорційна швидкості руху v . Встановити залежність між швидкістю v і часом t , якщо при $t = 0$ $v = v_0$.

Варіант 30.

Знайти рівняння кривої, що проходить через точку $(3;4)$, якщо кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної в будь-якій точці кривої, дорівнює квадратові ординати точки дотику.

Перелік посилань на джерела

Підручники

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. – М.: Наука, 1989. – 464с.
2. Долгов Н.М. Высшая математика . – К.: Вища школа, 1988. – 416с.
3. Дубовик С.П., Юрик І.І. Вища математика. К.: А.С.К.,

2001. – 648с.

4. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 1986. – 576с.

5. Овчинников П.П., Лисицин Б.М., Михайленко В.М. Вища математика ч. 2. – К.: Техніка, 2000. – 792с.

6. Пак В.В., Носенко Ю.Л. Вища математика. – К.: Либідь, 1996. 440с.

7. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. Т.2 – М.: Наука, 1985.

8. Шкіль М.І. Колесник Т.В. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. Диференціальні рівняння. Ряди. К.: Вища школа, 1988. – 416с.

Задачники, практикуми, методичні вказівки.

1. Демидович Б.П., ред. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов. – М.: Наука, 1974. – 472с.

2. Дубовик С.М., Юрик І.І. Вища математика. Збірник задач. – К.: А.С.К., 2001. – 480с.

3. Пак В.В., Косилова Е.Ф., Медовникова А.А. Методические указания к самостоятельной работе по разделу курса высшей математики "Обыкновенные дифференциальные уравнения". – К.: УМК ВО, 1986. – 112с.

