Завдання I туру
Всеукраїнської студентської олімпіади з математики
серед студентів ІФНТУНГ

Задача 1. Задано послідовність комплексних чисел z_n на колі фіксованого радіуса 2025. Знайти суму $\sum_{n=1}^{2025} |a_n|$, де $a_n = \frac{\sum_{m=1}^{n} z_m}{\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{z_m}}$,

Задача 2. *Знайти границю виразу* $\lim\limits_{m\to\infty} \lim\limits_{n\to\infty} \cos^{2n}(\pi m! x)$ *та дослідити відповідну функцію на наперервність.*

Задача 3. *Відомо, що* $f'(\cos^2 x) = \sin 2x + \mathrm{ctg}^2\, x$. *Знайти* $f(x)$ *для* $0 < x < 1$.

Задача 4. *Обчислити* $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{2025}$

Задача 5. *Нехай* $ABCA'B'C'$ *— трикутна призма і точка* D *ділить бічне ребро* $C'C$ *у заданому відношенні* λ, *тобто* $\frac{S'D}{DC} = \lambda$. *У якому відношенні площина, що проходить через точку* D *і вершини* A *і* B' *призми ділить об'єм призми?*

Задача 6. *Чи існують функції* $u(x)$ *і* $v(x)$, *які не дорівнюють константі і задовольняють в деякому проміжку умову* $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)}{v'(x)}$.

Задача 7. *Знайти невизначений інтеграл* $\int \frac{(x-1)e^x}{x^2+e^{2x}} dx$.

Розв'язки задач із студентської олімпіади з математики

Задача 1. Запишемо z_n у показниковій формі: $z_n = 2025e^{i\varphi_n}$, де $\varphi_n \in [0, 2\pi]$. Тоді

$$a_1 = \frac{z_1}{1/z_1} = \frac{2025e^{i\varphi_1}}{1/2025e^{-i\varphi_1}} = 2025^2 e^{i2\varphi_2}, \text{ тобто } |a_1| = 2025^2,$$

$$a_2 = \frac{z_1 + z_2}{1/z_1 + 1/z_2} = \frac{2025e^{i\varphi_1} + 2025e^{i\varphi_2}}{1/2025e^{-i\varphi_1} + 1/2025e^{-i\varphi_2}} = 2025^2 \frac{e^{i\varphi_1} + e^{i\varphi_2}}{e^{-i\varphi_1} + e^{-i\varphi_2}} =$$

$$= 2025^2 \frac{e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}(e^{-i\varphi_1} + e^{-i\varphi_2})}{e^{-i\varphi_1} + e^{-i\varphi_2}} = 2025^2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \text{ тобто } |a_2| = 2025^2,$$

$$a_3 = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3} = 2025^2 \frac{e^{i\varphi_1} + e^{i\varphi_2} + e^{i\varphi_3}}{e^{-i\varphi_1} + e^{-i\varphi_2} + e^{-i\varphi_3}}, \text{ тобто } |a_3| = 2025^2,$$

бо у чисельнику та знаменнику комплексно спряжені числа, модулі яких рівні між собою. І так далі. Врешті-решт, $|a_n| = 2025^2$. Тоді $\sum_{n=1}^{2025} |a_n| = 2025^3$.

Задача 2. $\lim\limits_{m\to\infty} \lim\limits_{n\to\infty} \cos^{2n}(\pi m! x)$. Фіксуємо x та m. Тоді $\cos(\pi m! x) \in [-1, 1]$, тому $\cos^2(\pi m! x) \in [0, 1]$. А, отже, $\lim\limits_{n\to\infty} \cos^{2n}(\pi m! x) \in \{0, 1\}$. Відповідно , $\lim\limits_{m\to\infty} \lim\limits_{n\to\infty} \cos^{2n}(\pi m! x) \in \{0, 1\}$. Границя 1 може вийти лише у точках в яких $\cos(\pi m! x) = \pm 1$, тобто $m! x = k$, де $k \in \mathbb{Z}$. Звідсіля, $x = \frac{k}{m!}$, тобто x є раціональним числом. Зрозуміло, що для кожного раціонального $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ знайдеться $m \in \mathbb{N}$ (наприклад, $m \geq q$) що $m! x \in \mathbb{Z}$. Тоді $\cos(\pi m! x) = \pm 1$ для $m \geq q$ та $x = \frac{p}{q}$. Перейшовши до границі, отримаємо, що у раціональних точках наша границя дорівнює одиниці. Підводячи підсумки дослідження, маємо:

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \cos^{2n}(\pi m! x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus Q. \end{cases}$$

Ця функція має розриви першого роду у кожній дійсній точці, причому не існує ні границі справа, ні зліва, бо будь-яку точку можна наближувати послідовністю раціональних точок (тоді границя рівна 0), так і послідовністю ірраціональних (тоді границя рівна 1).

Задача 3. Відомо, що $f'(\cos^2 x) = \sin 2x + \operatorname{ctg}^2 x$. Знайти $f(x)$ для $0 < x < 1$ за умови, що $f(0) = 0$. Зрозуміло, що $\cos^2 x \in [0, 1]$. Введемо формальне позначення $t = \cos^2 x$. Тоді $\sin 2x = 2\sin x \cos x = 2t\sqrt{1-t^2}$, бо $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{1-t^2}$. А $\operatorname{ctg}^2 x = \frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x} = \frac{t^2}{1-t^2}$. Отже, $f'(t) = 2t\sqrt{1-t^2} + \frac{t^2}{1-t^2}$.

$$f(x) = \int_0^x (2t\sqrt{1-t^2} + \frac{t^2}{1-t^2})dt = -\int_0^x \sqrt{1-t^2}d(1-t^2) + \int_0^x (-1)dt - \int_0^x \frac{1}{t^2-1}dt =$$
$$= 1 - \frac{2}{3}(1-x^2)^{3/2} - x - \frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}$$

Задача 4.

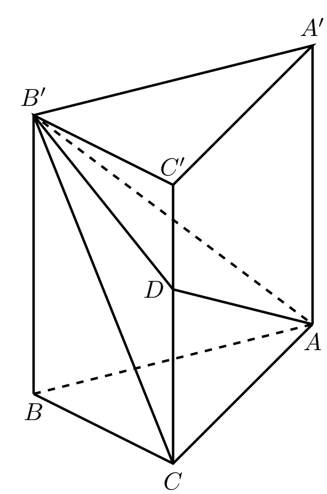
$$\begin{pmatrix}3&1&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}3&1&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3&1&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3^2&1+3&0\\0&1&0\\0&0&3^2\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}3&1&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix}3&1&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix}3&1&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3^2&1+3&0\\0&1&0\\0&0&3^2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3&1&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}3^3&1+3+3^2&0\\0&1&0\\0&0&3^3\end{pmatrix}^2.$$

$$\begin{pmatrix}3&1&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix}3^n&1+3+3^2+\ldots+3^{n-1}&0\\0&1&0\\0&0&3^n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3^n&\frac{3^n-1}{2}&0\\0&1&0\\0&0&3^n\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}3&1&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}^{2025} = \begin{pmatrix}3^{2025}&\frac{3^{2025}-1}{2}&0\\0&1&0\\0&0&3^{2025}\end{pmatrix}.$$

Задача 5. Нехай b — бічне ребро. Тоді $C'D = \lambda DC$, $(\lambda+1)DC = C'C = b$, тому $CD = \frac{b}{\lambda+1}$. Відповідно, $S_{\triangle CAD} = \frac{1}{\lambda+1}S_{\triangle C'CA} = \frac{1}{2(\lambda+1)}S_{CAA'C'}$. Тепер знайдемо об'єми ($V_{\text{призми}} = V$):



$$V_{B'CAD} = \frac{1}{2(\lambda+1)} \cdot V_{B'CAA'C'} = \frac{1}{2(\lambda+1)} \cdot \frac{2}{3}V = \frac{1}{3(\lambda+1)}V,$$
$$V_{B'BCA} = \frac{V}{3},$$
$$V_{ABCDB'} = V_{B'CAD} + V_{B'BCA} = \frac{V}{3}(\frac{1}{\lambda+1}+1) = \frac{V}{3} \cdot \frac{\lambda+2}{\lambda+1},$$
$$V_{A'B'C'DA} = V - V_{ABCDB'} = \frac{2\lambda+1}{3(\lambda+1)}V.$$

Отже, $\frac{V_{ABCDB'}}{V_{A'B'C'DA}} = \frac{2\lambda+1}{\lambda+2}$.

Задача 6. Так, існують. Візьмемо $u(x) = e^{g(x)}$, $v(x) = e^{f(x)}$. Тоді

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = (e^{g(x)-f(x)})' = e^{g(x)-f(x)}(g'(x) - f'(x)) = \frac{u'(x)}{v'(x)} = \frac{e^{f(x)}f'(x)}{e^{g(x)}g'(x)} = e^{g(x)-f(x)}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Звідси $g'(x) - f'(x) = \frac{f'(x)}{g'(x)}$, тобто $f'(x) = \frac{(g'(x))^2}{g'(x)+1}$. Візьмемо, наприклад, $g(x) = x^2$. Тоді $g'(x) = 2x$, $f'(x) = \frac{4x^2}{2x+1} = 2x + 1 - \frac{1}{2x+1}$, $f(x) = x^2 + x - \frac{1}{2}\ln(2x+1)$. Відповідно, $u(x) = e^{x^2}$, $v(x) = e^{x^2+x}\sqrt{2x+1}$.

Задача 7. Беручи до уваги, що $(xe^{-x})' = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$, отримуємо $\int \frac{(x-1)e^x}{x^2+e^{2x}}dx = \int \frac{(x-1)e^{-x}}{1+(xe^{-x})^2}dx = -\int \frac{d(xe^{-x})}{1+(xe^{-x})^2} = -\operatorname{arctg}(xe^{-x}) + C$.

Дата: 5 березня 2025 року.

Організатор: кафедра фізико-математичних наук

Голова журі: зав. кафедри ФМН, проф. Андрій Бандури,

члени журі: доц. Іван Тимків, доц. Любов Шегда.