

Розв'язки задач I туру Всеукраїнської олімпіади  
з фізики за 2024-2025 н.р. в ІФНТУНГ  
серед студентів 1-2 курсу

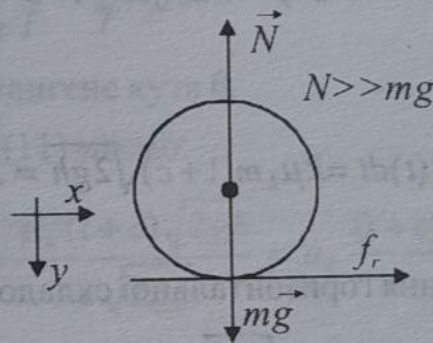
Задача №1.

$$\text{а) } mgh = \frac{mv_0^2}{2} \quad (1), \quad v_0 = \sqrt{2gh}. \quad (2)$$

б) Нехай  $v_{2x}, v_{2y}$  — горизонтальна і вертикальна складові швидкості центра мас після удару. Тоді:

$$v_{2y}^2 = 2g\alpha h \quad (3), \quad v_{2y} = \sqrt{2g\alpha h} = cv_0, \quad c = \sqrt{\alpha}. \quad (4)$$

в) На мал. 8 показані сили, що діють на м'яч під час удару.



Мал. 8

Візьмемо до уваги, що зміна імпульсу тіла дорівнює імпульсу сили, а зміна кутового моменту тіла визначається моментом сили. Тоді:

$$I_y = \int_{t_1}^{t_2} N(t)dt = mv_0 + mv_{2y} = m(1+c)\sqrt{2gh}, \quad (5)$$

$$I_x = \int_{t_1}^{t_2} f_r(t)dt = mv_{2x}, \quad (6)$$

$$I_\theta = \int_{t_1}^{t_2} Rf_r(t)dt = R \int_{t_1}^{t_2} f_r(t)dt = I(\omega_0 - \omega_2), \quad (7)$$

де  $I_x, I_y$  — компоненти імпульсу,  $I_\theta$  — компонента кутового моменту,  $\omega_2$  — кутова швидкість після удару.

На початку удару м'яч завжди буде проковзувати, оскільки він має певну кутову швидкість  $\omega_0$ . Тоді можливі два випадки:

- 1) протягом всього удару проковзування м'яча не припиняється;
- 2) в деякий момент  $t$  ( $t_1 < t < t_2$ ) проковзування припиняється, а отже, відповідна сила тертя зникає.

**ВИПАДОК 1.** М'яч проковзує протягом всього часу спіудару. Сила тертя ковзання:  $f_r = \mu_k N(t)$ . (8)

Підставляємо (8) в (6) і (7) і, використовуючи (5), знайдемо, що:

$$I_x = \mu_k \int_{t_1}^{t_2} N(t) dt = \mu_k I_y = \mu_k (1+c) \sqrt{2gh} = mv_{2x}, \quad (9)$$

$$I_\theta = R\mu_k \int_{t_1}^{t_2} N(t) dt = R\mu_k m(1+c) \sqrt{2gh} = I(\omega_0 - \omega_2). \quad (10)$$

Звідси маємо значення горизонтальної складової швидкості  $v_{2x}$  і кінцеву кутову швидкість:  $v_{2x} = \mu_k (1+c) \sqrt{2gh}$ , (11)

$$\omega_2 = \omega_0 - \frac{\mu_k m R (1+c)}{I} \sqrt{2gh}. \quad (12)$$

Область існування шуканого розв'язку може бути знайдена з тієї умови, що в кінці удару точка дотику м'яча мусить ще мати складову швидкості в напрямку від'ємної півосі  $x$ , тобто  $\omega_2 R > v_{2x}$ . Використовуючи (11) і (12), отримаємо:

$$\omega_0 - \frac{\mu_k m R (1+c)}{I} \sqrt{2gh} > \frac{\mu_k (1+c)}{R} \sqrt{2gh} \quad \text{або}$$

$$\omega_0 > \frac{\mu_k \sqrt{2gh} (1+c)}{R} \left( \frac{mR^2}{I} + 1 \right) \quad (13)$$

Отже,  $\omega_0$  має задовольняти умову (13).

**ВИПАДОК 2.** Проконзування зникає через час  $t$  після початку спіудару. Тоді для  $v_{2x}$  і кінцевої кутової швидкості маємо зв'язок:

$$\omega_2 R = v_{2x}. \quad (14)$$

Підставимо (14) і (6) в (7) і дістанемо:

$$mRv_{2x} = I \left( \omega_0 - \frac{v_{2x}}{R} \right) \quad (15)$$

з якого маємо:

$$v_{2x} = \frac{I\omega_0}{mR + \frac{I}{R}} = \frac{I\omega_0 R}{mR^2 + I} = \frac{2}{7} \omega_0 R, \quad (16)$$

$$\omega_2 = \frac{I\omega_0}{mR^2 + I} = \frac{2}{7} \omega_0. \quad (17)$$

Визначаємо тепер тангенс кута  $\theta$ .

*I* ВИПАДОК. З (4) і (11) маємо:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta &= \frac{v_{2x}}{v_{2y}} = \frac{\mu_k (1+c) \sqrt{2gh}}{c \sqrt{2gh}} = \mu_k \frac{(1+c)}{c}, \\ \operatorname{tg} \theta &= \mu_k \frac{(1+c)}{c}, \end{aligned} \quad (18)$$

бто кут  $\theta$  не залежить від  $\omega_0$ .

*II* ВИПАДОК. З (4) і (16) отримаємо:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta &= \frac{v_{2x}}{v_{2y}} = \frac{I\omega_0 R}{I + mR^2} \frac{1}{c \sqrt{2gh}} = \frac{I\omega_0 R}{(I + mR^2) c \sqrt{2gh}}, \text{ або} \\ \operatorname{tg} \theta &= \frac{2\omega_0 R}{7c \sqrt{2gh}}. \end{aligned} \quad (19)$$

Видно, що  $\theta$  не залежить від  $\omega_0$ , якщо  $\omega_0 > \omega_{0 \min}$ , де

$$\omega_{0 \min} = \frac{\mu_k (1+c) \sqrt{2gh} \left( 1 + \frac{mR^2}{I} \right)}{R}, \text{ або}$$

$$\omega_{0 \min} = \frac{7\mu_k (1+c) \sqrt{2gh}}{2R}. \quad (20)$$

Визначаємо відстань між точками першого і другого зіткнення м'яча з підлогою.

**ВИПАДОК I.**

Час підйому і падіння м'яча:

$$t_v = 2 \frac{v_{2y}}{g} = \frac{2c\sqrt{2gh}}{g} = 2c\sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (21)$$

Тоді відстань:

$$d = v_{2x} t_v = \mu_k(1+c)\sqrt{2gh} \cdot 2c\sqrt{\frac{2h}{g}}, \text{ або} \quad (22)$$

$$d = 4\mu_k(1+c)ch$$

не залежить від  $\omega_0$ .

**ВИПАДОК II.**

Час підйому і падіння м'яча визначається виразом (21), шукана відстань:

$$d = v_{2x} t_v = \frac{I\omega_0 R}{mR^2 + I} \cdot 2c\sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{2\omega_0 R c}{1 + 5/2} \sqrt{\frac{2h}{g}}, \text{ або}$$

$$d = \frac{4}{7} c \sqrt{\frac{2h}{g}} R \omega_0$$

і залежить лінійно від  $\omega_0$ .

**Задача №2.**

а) Нехай  $S$  — лабораторна система відліку,  $S'$  — пов'язана з рамкою. Вісь  $X'$  направлена вздовж  $\vec{v}$ ,  $Y'$  — паралельна стороні  $DA$ ,  $Z'$  — перпендикулярна площині петлі.

1) Сторона  $AB$ .

Нехай  $S'_{AB}$  — система відліку, де кульки, що рухаються вздовж  $AB$ , знаходяться в спокої.  $S''$  має швидкість  $u$  по відношенню до  $S'$ . Тоді відстань  $a$ , між сусідніми кульками на  $AB$ , виміряна в системі  $S''$ , така:

$$a_1 = \frac{a}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (1)$$

Спостерігач в системі  $S$  бачить кульки, які рухаються вздовж  $AB$  зі швидкістю:

$$u_{AB} = \frac{v + u}{1 + uv/c^2}. \quad (2)$$

Відстань між сусідніми кульками в системі  $S$ :

$$a_{AB} = \sqrt{1 - u_{AB}^2/c^2} a_r. \quad (3)$$

Підставляємо (1) і (2) в (3):

$$a_{AB} = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + uv/c^2} a. \quad (4)$$

2) Сторона  $CD$ .

Для спостерігача в  $S$  швидкість кульок:

$$u_{CD} = \frac{v - u}{1 - uv/c^2}. \quad (5)$$

Відстань між кульками:  $a_{CD} = \sqrt{1 - \frac{u_{CD}^2}{c^2}} a_r. \quad (6)$

Підставляємо (1) і (5) в (6):

$$a_{CD} = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - uv/c^2} a. \quad (7)$$

3) Сторона  $DA$ .

Нехай кулька  $S'$  в момент  $t'_0$  має координати  $x'_1 = y'_1 = z'_1 = 0$ . В той же момент часу сусідня кулька має координати  $x'_2 = z'_2 = 0$ ,  $y'_2 = a$ . Відповідно до перетворень Лоренца:

$$x = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} (x' + vt'), \quad y = y', \quad z = z', \quad (8)$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left( t' + \frac{x'v}{c^2} \right)$$

В системі  $S$  матимемо:

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} vt'_0, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = 0, \quad t_1 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} t'_0, \quad (9)$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} vt'_0, \quad v_2 = a, \quad z_2 = 0, \quad t_2 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} t'_0. \quad (10)$$

Якщо  $t_1 = t_2$ , то відстань в  $S$  між двома кульками:

$$a_{DA}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2. \quad (11)$$

Отже,  $a_{DA} = a$  (12)

4) Сторона  $BC$ .

Повторюючи попередню процедуру, отримаємо:  $a_{BC} = a$ . (13)

б) Заряд однієї із дротяних сторін рамки в системі рамки:

$$Q_{wire} = -\frac{L}{a} q, \quad (14)$$

де  $\frac{L}{a}$  — число кульок на цій стороні. Оскільки кількість заряду є інваріант, то такий же заряд буде на кожній із сторін в лабораторній системі відліку.

1) Сторона  $AB$ .

В лабораторній системі координат заряд кульок на стороні  $AB$ :

$$Q_{AB,balls} = \frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{a_{AB}} Lq, \quad (15)$$

де  $q$  — заряд кульки. Використавши (4):

$$Q_{AB,balls} = \left(1 + \frac{uv}{c^2}\right) \frac{Lq}{a}. \quad (16)$$

Складаючи (14) і (16), отримаємо повний заряд на цій стороні:

$$Q_{AB} = \frac{uv}{c^2} \frac{L}{a} q. \quad (17)$$

2) Сторона  $CD$ .

Аналогічно отримаємо:

$$Q_{CD, \text{balls}} = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{a_{CD}} Lq = \left(1 - \frac{uv}{c^2}\right) \frac{Lq}{a}, \quad (18)$$

$$Q_{CD} = -\frac{uv}{c^2} \frac{L}{a} q. \quad (19)$$

3) Сторони  $BC$  і  $DA$ .

Довжина цих сторін в системі  $S$  дорівнює  $L$ , відстань між кульками  $a$ , тому:

$$Q_{BC, \text{balls}} = Q_{DA, \text{balls}} = \frac{Lq}{a}. \quad (20)$$

Додаючи (14) і (20), отримаємо:  $Q_{BC} = 0.$  (21.1)

$$Q_{DA} = 0. \quad (21.2)$$

в) На сторону  $AB$  діє сила:  $\vec{F}_{AB} = Q_{AB} \vec{E} = \left(\frac{uv}{c^2}\right) \frac{L}{a} q \vec{E}.$  (22)

На  $CD$ :  $\vec{F}_{CD} = Q_{CD} \vec{E} = -\left(\frac{uv}{c^2}\right) \frac{L}{a} q \vec{E}.$  (23)

$F_{CD}$  і  $F_{AB}$  утворюють пару сил. Момент цієї пари (мал. 9):

$$M = |\vec{F}_{AB}| L \sin \theta, \quad (24)$$

$$M = \frac{uv}{c^2} \frac{L^2}{a} |q| |\vec{E}| \sin \theta. \quad (25)$$

г) Нехай  $V_{AB}$  і  $V_{CD}$  — електростатичні потенціали в точках сторін  $AB$  і  $CD$ .

Тоді:  $W = V_{AB} Q_{AB} + V_{CD} Q_{CD}.$  (26)

Покладемо потенціал рівним нулю ( $V=0$ ) в площині, перпендикулярній до

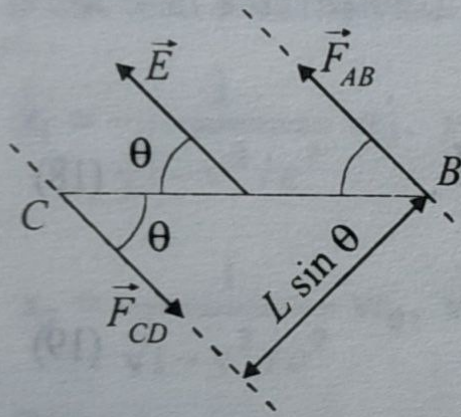
$\vec{E}$  на довільній відстані  $R$  від  $AB$  (мал. 10). (27)

Тоді:  $W = -ERQ_{AB} - E(R + L \cos \theta) Q_{CD}$  (28)

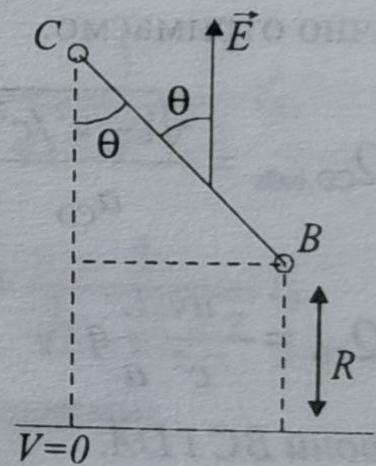
Але  $Q_{CD} = -Q_{AB}$ , тому  $W = -ELQ_{AB} \cos \theta.$

Підставляємо (17) в (28) і отримаємо:

$$W = \frac{uvL^2 qE}{c^2 a} \cos \theta. \quad (29)$$



Мал. 9



Мал. 10

### Задача №3.

а) Перший метод. В рівновазі маємо:  $\vec{F}_c = \vec{F}_g + \vec{N}$ , де  $\vec{N}$  — нормальна до поверхні. Проектуючи на горизонтальний і вертикальний напрями, отримаємо (мал. 6):

$$\begin{cases} F_g \cos \varphi = F_c + N \sin \alpha \\ F_g \sin \varphi = N \cos \alpha \end{cases} \Rightarrow F_g \cos \varphi = F_c + F_g \sin \alpha \cdot \operatorname{tga}.$$

З виразів:

$$F_g = \frac{GM}{r^2}, \quad F_c = \omega^2 r \cos \varphi, \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad \operatorname{tga} = \frac{dy}{dx}$$

знайдемо:  $y dy + \left(1 - \frac{\omega^2 r^3}{GM}\right) x dx = 0$ , де  $\frac{\omega^2 r^3}{GM} \approx 7 \times 10^{-4}$ . (1)

Це означає, що фактор в дужках перед  $x dx$  змінюється слабо, і ми можемо вважати його постійним. Тоді розв'язком рівняння (1) є еліпс:

$$\frac{x^2}{r_e^2} + \frac{y^2}{r_p^2} = 1 \Rightarrow \frac{r_p}{r_e} = \sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^3}{GM}} \approx 1 - \frac{\omega^2 r^3}{2GM}.$$

Звідси виходить, що  $\varepsilon = \frac{r_e - r_p}{r_e} = \frac{\omega^2 r^3}{2GM} \approx 3,7 \times 10^{-4}$ .

Другий метод.

Для точкової маси в 1 кг на поверхні:

$$U_{\text{pot}} = -\frac{GM}{r}, \quad U_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \cos^2 \varphi.$$

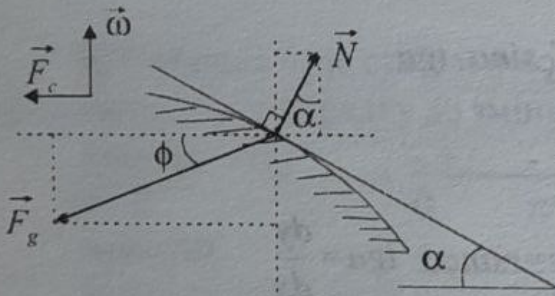


Форма поверхні повинна бути такою, щоб  $U_{pot} - U_{kin} = \text{const}$ . Для екватора ( $\phi = 0, r = r_e$ ) і для полюса ( $\phi = \pi/2, r = r_p$ ) маємо:

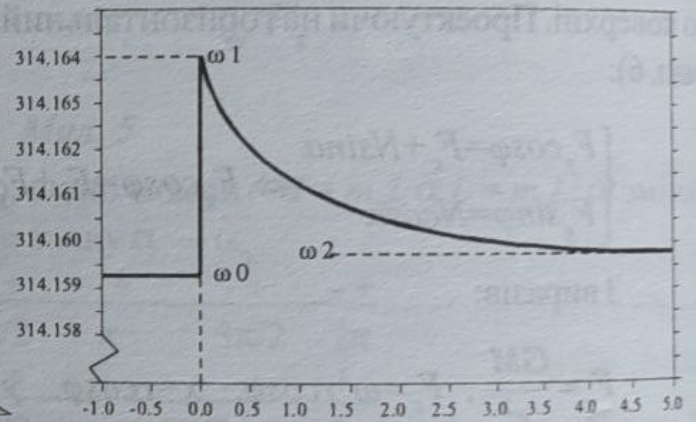
$$\frac{GM}{r_p} = \frac{GM}{r_e} + \frac{1}{2} \omega^2 r_e^2 \Rightarrow \frac{r_e}{r_p} = 1 + \frac{\omega^2 r_e^3}{2GM}$$

Тоді:

$$\varepsilon = \frac{r_e - r_p}{r_e} = \left(1 + \frac{\omega^2 r_e^3}{2GM} - 1\right) / \left(1 + \frac{\omega^2 r_e^3}{2GM}\right) \approx \frac{\omega^2 r_e^3}{2GM} \approx 3,7 \times 10^{-4}$$



Мал. 6



Мал. 7

б) Як наслідок «зоретрусу» (мал. 7) момент інерції кори  $I_m$  зменшується на  $\Delta I_m$ . Із закону збереження моменту імпульсу маємо:

$$I_m \omega_0 = (I_m - \Delta I_m) \omega_1 \Rightarrow \Delta I_m = I_m \frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega}$$

Після того, як внутрішнє тертя урівняє кутові швидкості кори і ядра, матимемо:

$$(I_m + I_c) \omega_0 = (I_m + I_c - \Delta I_m) \omega_2 \Rightarrow \Delta I_m = (I_m + I_c) \frac{\omega_2 - \omega_0}{\omega_2},$$

$$\frac{I_m}{I_m + I_c} = \frac{(\omega_2 - \omega_0) \omega_1}{(\omega_1 - \omega_0) \omega_2} \Rightarrow 1 - \frac{I_c}{I_m + I_c} = \frac{(\omega_2 - \omega_0) \omega_1}{(\omega_1 - \omega_0) \omega_2},$$

$$I \sim R^2,$$

$$\Rightarrow \frac{I_m}{I_m + I_c} = \frac{r_c^2}{r^2} \Rightarrow \frac{r_c}{r} = \sqrt{1 - \frac{(\omega_2 - \omega_0) \omega_1}{(\omega_1 - \omega_0) \omega_2}} \approx 0,95.$$