

ПРАКТИКУМ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ЧАСТИНА 2

За редакцією В.М.Мойсишина,
Я.І.Савчука

Рекомендовано
Вченою радою Івано-Франківського
національного технічного
університету нафти і газу

Івано-Франківськ
2022

УДК 51(075.8)
П 69

*Рекомендовано Вченою радою
Івано-Франківського національного технічного
університету нафти і газу (протокол №03/634
від 28.04.2022р.)*

А в т о р и:

В.М. Мойсишин, Я.І. Савчук, А.І. Бандура, І.М. Гураль,
Л.М. Мельничук, Л.А. Мойсеєнко, Л.Р. Смоловик, В.В. Тирлич

Р е ц е н з е н т и:

Бігун Я.Й. – завідувач кафедри прикладної математики та інформаційних технологій Чернівецького національного університету ім. Ю. Федьковича, доктор фіз.-мат. наук, професор;

Бомба А.Я. – професор кафедри комп'ютерних наук і прикладної математики Національного університету водного господарства та природокористування, доктор техн. наук, професор;

Никифорчин О.Р. – завідувач кафедри алгебри та геометрії Прикарпатського національного університету ім. В. Стефаника, доктор фіз.-мат. наук, професор.

П 69 **Практикум** з вищої математики. Частина 2: Навчальний посібник / В.М. Мойсишин, Я.І. Савчук, А.І. Бандура та ін.; За ред. В.М. Мойशिшина, Я.І. Савчука. – Івано-Франківськ: ІФНТУНГ, 2022. – 658с.

ISBN 978-966-694-411-8

Навчальний посібник містить задачі та вправи з наступних розділів вищої математики: ряди, кратні, криволінійні, поверхневі інтеграли та елементи теорії поля, теорія функцій комплексної змінної, операційне числення, рівняння математичної фізики, теорія ймовірностей та математична статистика. Наводяться необхідні теоретичні відомості, приклади розв'язання задач.

Для студентів технічних ВНЗ

УДК 51(075.8)

© В.М. Мойсишин, Я.І. Савчук
А.І. Бандура та ін., 2022

Зміст

Вступ	5
9 Ряди	7
§ 1. Числові ряди	7
§ 2. Функціональні ряди	29
10 Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли. Елементи теорії поля	64
§ 1. Подвійний інтеграл і його обчислення	64
§ 2. Потрійний інтеграл і його обчислення	96
§ 3. Криволінійні інтеграли першого роду	117
§ 4. Криволінійні інтеграли другого роду	133
§ 5. Поверхневі інтеграли першого роду	150
§ 6. Поверхневі інтеграли другого роду	166
§ 7. Елементи теорії поля	190
11 Теорія функцій комплексної змінної. Операційне числення	232
§ 1. Комплексні числа. Послідовності та числові ряди комплексних чисел	232
§ 2. Комплексна змінна. Аналітичні функції	253
§ 3. Інтегрування	287
§ 4. Ряд Тейлора. Ряд Лорана	300
§ 5. Нулі та ізольовані особливі точки	320
§ 6. Лишки, їх застосування до обчислення інтегралів	330
§ 7. Елементи операційного числення	342

12 Рівняння математичної фізики _____	365
§ 1. Основні поняття _____	365
§ 2. Деякі методи розв'язування задач математичної фізики _____	388
13 Теорія ймовірностей та математична статистика ____	491
§ 1. Основні поняття. Безпосередній підрахунок ймовірностей _____	491
§ 2. Теорема додавання і множення ймовірностей	510
§ 3. Повторні випробування. Схема Бернуллі ____	530
§ 4. Випадкові величини _____	545
§ 5. Математична статистика _____	598
Література _____	656

Вступ

Практикум спрямований на опанування студентами технічних ВНЗ основних методів дослідження та розв'язування математичних задач.

Посібник складається з двох частин. Друга частина містить розділи: «Ряди» (підготувала Гураль І.М.), «Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли. Елементи теорії поля» (Мойсеєнко Л.А., Смоловик Л.Р., Бандура А.І.), «Теорія функцій комплексної змінної. Операційне числення» (Савчук Я.І.), «Рівняння математичної фізики» (Мойсишин В.М., Мельничук Л.М.), «Теорія ймовірностей та математична статистика» (Тирлич В.В.).

Книга має наступну структуру. На початку кожного параграфа наводяться короткі теоретичні відомості (основні поняття, означення, формули, рівняння); далі подано приклади розв'язання задач різного ступеня складності, а також пропонується набір задач і вправ для самостійної роботи студентів та відповіді до них.

Зміст цього навчального посібника повністю відповідає типовій програмі з вищої математики для технічних спеціальностей. Ця книга цілком придатна і для студентів технологічних та економічних спеціальностей, які можуть пропустити ті розділи і задачі, які не входять до їхньої програми з вищої математики.

Відгуки, зауваження та побажання просимо надсилати за адресою:

кафедра вищої математики
Івано-Франківського національного
технічного університету нафти і газу;
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15.
e-mail: math@nung.edu.ua, тел. (0342) 72-71-31

**60-річчю
кафедри вищої математики
Івано-Франківського
національного технічного
університету нафти і газу
присвячується**

9 Ряди

§1. Числові ряди

1.1 Числові ряди. Сума і збіжність числового ряду. Необхідна умова збіжності. Критерій Коші збіжності ряду

Вираз $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, де $\{a_n\}$ – задана числова

послідовність, називається *числовим рядом*. При цьому числа $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ називають членами ряду. Для задавання ряду необхідно знати правило, яке б давало можливість кожному номеру n поставити у відповідність $a_n = f(n)$; аналітичний вираз такої функції називають *загальним членом* ряду.

Сума n перших членів ряду

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

називається n -ю *частинною сумою* цього ряду.

Якщо існує скінченна границя послідовності $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ частинних сум ряду $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, то ряд називається *збіжним*, а число S – *сумою* ряду. Якщо послідовність частинних сум границі не має або дорівнює нескінченності, то ряд називається *розбіжним*.

Різниця між сумою ряду S і його n -ю частинною сумою S_n називається n -м *залишком* ряду:

$$r_n = S - S_n.$$

Необхідна ознака збіжності числового ряду. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

збіжний, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Достатня ознака розбіжності ряду. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ або не існує,

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається.

Властивості збіжних рядів:

1. Нехай c – деяке число. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$,

який називається *добутком* даного ряду на число c , також збігається і

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

2. Нехай ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збігаються, тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, який

називається *сумою* даних рядів, також збігається і

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

3. Якщо ряд збігається, то будь-який його залишок збігається. Якщо будь-який залишок ряду збігається, то і сам ряд також збігається. При

цьому якщо $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $S_m = \sum_{n=1}^m a_n$, $r_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$, то

$$S = S_m + r_m.$$

Критерій Коші. Для того, щоб ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігався, необхідно і

достатньо, щоб для довільного $\varepsilon > 0$ існувало число $N = N(\varepsilon)$ таке, що для всіх $n > N$ і будь-якого натурального p виконувалась нерівність

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Приклади розв'язання задач

1. Знайти чотири перші і $(n+1)$ -й члени ряду за

формулою загального члена:

$$\text{а) } a_n = \frac{2^n}{n!}; \quad \text{б) } a_n = \frac{(-1)^n}{2n-1}.$$

► Щоб знайти певний член ряду, треба у формулу загального члена ряду a_n підставити номер цього члена.

$$\text{а) Нагадаємо, що } n! = \begin{cases} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n, & \text{якщо } n \in \mathbb{N}, \\ 1, & \text{якщо } n = 0. \end{cases}$$

$$a_1 = \frac{2}{1!} = 2, \quad a_2 = \frac{2^2}{2!} = \frac{2^2}{1 \cdot 2} = 2, \quad a_3 = \frac{2^3}{3!} = \frac{2^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{4}{3},$$

$$a_4 = \frac{2^4}{4!} = \frac{2^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{2}{3}, \quad a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}. \blacktriangleleft$$

$$\text{► б) } a_1 = \frac{(-1)^1}{2 \cdot 1 - 1} = -1, \quad a_2 = \frac{(-1)^2}{2 \cdot 2 - 1} = \frac{1}{3}, \quad a_3 = \frac{(-1)^3}{2 \cdot 3 - 1} = \frac{-1}{5},$$

$$a_4 = \frac{(-1)^4}{2 \cdot 4 - 1} = \frac{1}{7}, \quad a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{2 \cdot (n+1) - 1} = \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}. \blacktriangleleft$$

2. Написати, по можливості найпростішу, формулу загального члена рядів:

$$\text{а) } 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots; \quad \text{б) } \frac{2}{5} + \frac{4}{8} + \frac{6}{11} + \frac{8}{14} + \dots$$

► а) Даний ряд можна записати у вигляді $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$, звідки бачимо, що $a_n = \frac{1}{n^2}$ – найпростіша формула загального члена ряду. $\blacktriangleleft$

► б) У чисельники записані парні числа $2n$, знаменники

утворюють *арифметичну прогресію*, з першим членом, рівним 5, $d = 3$, отже, n -ий член дорівнює $3n + 2$. Тому найпростіший вигляд загального члена ряду буде $a_n = \frac{2n}{3n + 2}$. ◀

3. Користуючись означенням, довести збіжність ряду і знайти його суму:

а) $\frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \dots;$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ (ряд називають *сумою нескінченної*

геометричної прогресії).

► а) Загальний член ряду $a_n = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$. Маємо

правильний раціональний дріб. Розкладемо його на суму елементарних дробів

$$\frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1} \Rightarrow A(2n+1) + B(2n-1) = 2,$$

$$\begin{aligned} \text{при } n: \quad 2A + 2B &= 0, \\ \text{при } n^0: \quad A - B &= 2, \end{aligned} \Rightarrow A = 1, \quad B = -1.$$

Отже, $a_n = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$. Тоді

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = 1 - \frac{1}{2n+1}. \end{aligned}$$

Легко знаходимо $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$. Тому ряд збігається і його сума дорівнює 1. ◀

► б) Очевидно, при $a = 0$ ряд збігається і його сума $S = 0$.

Нехай $a \neq 0$. Розглянемо такі випадки:

1) $q = 1$; тоді $S_n = a + a + \dots + a = n \cdot a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, отже, ряд розбігається.

2) $q = -1$; тоді $S_1 = a$, $S_2 = a - a = 0$, $S_3 = a - a + a = a$ і т.д.

Утворена послідовність не прямує ні до якого числа, тобто вона границі не має. Тому ряд також розбігається.

$$3) |q| \neq 1, S_n = a + aq + \dots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1 - q}.$$

Якщо $|q| < 1$, то $q^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, тому існує $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1 - q}$. Отже, ряд збіжний і $S = \frac{a}{1 - q}$.

Якщо $|q| > 1$, то $q^n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, тому $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$. Це означає, що ряд розбігається.

Ми отримали, що ряд, члени якого складають нескінченну геометричну прогресію з першим членом a і знаменником q , збігається при $|q| < 1$ і його сума дорівнює

$\frac{a}{1 - q}$ і розбігається при $|q| \geq 1$, $a \neq 0$. ◀

4. Чи виконується необхідна умова збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n+4} ?$$

► Границя загального члена ряду

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n+4} = \frac{2}{3} \neq 0, \text{ отже, ряд розбігається. } \blacktriangleleft$$

5. Довести, що *гармонічний* ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ розбігається, хоча

загальний член ряду прямує до нуля при $n \rightarrow \infty$.

► Розглянемо різницю частинних сум з номерами $2n$ і n :

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Ця нерівність означає, що при $p = n$ для гармонічного ряду не виконується критерій Коші, тому ряд розбігається. ◀

Завдання для самостійного розв'язання

1. Знайти чотири перші і $(n+1)$ -й члени ряду за формулою загального члена:

$$\text{а) } a_n = \frac{2n-3}{n^2+1}; \quad \text{б) } a_n = \frac{(-1)^n n}{2^n}.$$

2. Написати, по можливості найпростішу, формулу загального члена ряду:

$$\text{а) } \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} \dots; \quad \text{б) } 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

3. Користуючись означенням, довести збіжність ряду

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{4n^2 - 9}$ і знайти його суму.

4. Чи виконується необхідна умова збіжності для ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{3n^2 - 1} ?$$

5. Користуючись критерієм Коші довести збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)2^n}.$$

1.2 Ознаки збіжності рядів з додатними членами

Ознака порівняння. Якщо $0 \leq a_n \leq b_n$, починаючи з деякого $n = N$, і

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збіжний, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ також збіжний, а якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбіжний, то розбіжний і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Ознака порівняння в граничній формі. Нехай ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

знакододатні, причому існує скінченна границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = q \neq 0$, то ряди

збігаються або розбігаються одночасно.

Для застосування ознак порівняння потрібно мати набір еталонних рядів з наперед відомим поведінням. Такими є:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$, $a \neq 0$ – $\begin{cases} \text{збіжний при } |q| < 1, \\ \text{розбіжний при } |q| \geq 1; \end{cases}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ – $\begin{cases} \text{збіжний при } \alpha > 1, \\ \text{розбіжний при } \alpha \leq 1. \end{cases}$

Перший з цих рядів, як відомо, називається геометричною

прогресією. Другий з рядів називається *рядом Діріхле* або *узагальненим гармонічним рядом*. Його ми дослідимо пізніше. Зокрема, при $\alpha = 1$ дістанемо гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, який розбігається.

Ознака Даламбера. Нехай задано ряд з додатними членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Тоді:

- 1) якщо існує таке число q , $0 < q < 1$, і такий номер N , що для всіх $n \geq N$ виконується нерівність $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$, то заданий ряд збігається;
- 2) якщо існує такий номер N , що для всіх $n \geq N$ виконується нерівність $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, то заданий ряд розбігається.

Ознака Даламбера у граничній формі. Якщо для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ з додатними членами існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, то цей ряд збіжний при $l < 1$ і розбіжний при $l > 1$. Зауважимо, що у випадку $l = 1$ про числовий ряд нічого сказати не можна.

На практиці зручніше користуватись ознакою Даламбера у граничній формі, яка є дещо слабшою за ознаку Даламбера.

Ознака Коші. Нехай задано ряд з додатними членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Тоді:

- 1) якщо існує таке число q , $0 < q < 1$, і такий номер N , що для всіх $n \geq N$ виконується нерівність $\sqrt[n]{a_n} \leq q$, то заданий ряд збігається;
- 2) якщо існує такий номер N , що для всіх $n \geq N$ виконується

нерівність $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, то заданий ряд розбігається.

Ознака Коші в граничній формі. Якщо для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ з додатними членами існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, то цей ряд збіжний при $l < 1$ і розбіжний при $l > 1$.

Інтегральна ознака Коші. Нехай для числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ виконується $a_n = f(n) > 0$ при всіх $n \in \mathbb{N}$. Якщо функція $f(x)$ неперервна, монотонно незростаюча на деякому проміжку $[a, +\infty)$ ($a \geq 1$), то ряд і невластний інтеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ збігаються або розбігаються одночасно.

Приклади розв'язання задач

6. Дослідити на збіжність ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^{n-1}}; \quad \text{б) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n + \ln n}.$$

► Очевидно, обидва ряди є з додатними членами.

а) Порівняємо загальний член $a_n = \frac{1}{n3^{n-1}}$ цього ряду із

загальним членом $b_n = \frac{1}{3^{n-1}}$ геометричної прогресії

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}} \left(q = \frac{1}{3} < 1 \right). \quad \text{Оскільки члени заданого ряду не}$$

перевищують членів збіжної геометричної прогресії

$$\frac{1}{n3^{n-1}} \leq \frac{1}{3^{n-1}}, \text{ то за ознакою порівняння ряд збігається. } \blacktriangleleft$$

► б) Порівняння з гармонічним рядом за звичайною ознакою порівняння нічого не дає, бо $\frac{1}{n + \ln n} < \frac{1}{n}$ і ніякого висновку про збіжність заданого ряду не можемо зробити. Скористаємось ознакою порівняння в граничній формі з тим же гармонічним рядом:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/(n + \ln n)}{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n + \ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + 1/n} = 1 \neq 0.$$

Отже, порівнювані ряди, заданий і гармонічний, в питанні збіжності, поведуться однаково. Але гармонічний ряд розбіжний, тому розбігається і заданий в умові ряд.

Зауважимо, що для знаходження останньої границі ми використали правило Лопіталя (замінюючи дискретну змінну n на неперервну x). ◀

7. Використовуючи ознаку Даламбера у граничній формі, дослідити на збіжність такі ряди:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \frac{1}{2 \cdot 1!} + \frac{2^2}{2^2 \cdot 2!} + \dots + \frac{n^n}{2^n \cdot n!} + \dots; & \text{б) } & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}; \\ \text{в) } & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (2n+5)}; & \text{г) } & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!}. \end{aligned}$$

$$\text{► а) Тут } a_n = \frac{n^n}{2^n \cdot n!}, \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1} \cdot (n+1)!}, \text{ отже,}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1} \cdot (n+1)!} : \frac{n^n}{2^n \cdot n!} = \frac{(n+1)^n \cdot (n+1)}{2^n \cdot 2 \cdot n! \cdot (n+1)} \cdot \frac{2^n \cdot n!}{n^n} = \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n =$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n, \text{ звідки } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \frac{e}{2} > 1. \text{ Тому ряд}$$

розбіжний. ◀

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \text{ б) Тут } a_n &= \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \quad a_{n+1} = \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \\ &= \frac{(n+1)^2 \cdot (n!)^2 \cdot (2n)!}{(2n)! \cdot (2n+1) \cdot (2n+2) \cdot (n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1) \cdot (2n+2)}. \end{aligned}$$

$$\text{Тому } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1) \cdot (2n+2)} = \frac{1}{4} < 1, \text{ тобто ряд}$$

збіжний. ◀

$$\blacktriangleright \text{ в) Тут } a_n = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (2n+5)},$$

$$a_{n+1} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2) \cdot (3n+1)}{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (2n+5) \cdot (2n+7)} = a_n \frac{(3n+1)}{(2n+7)},$$

$$\text{отже, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n+7} = \frac{3}{2} > 1. \text{ Тому ряд розбіжний.}$$

► г) Символ $k!!$ означає добуток усіх натуральних чисел, що не перевищують k і мають із ним однакову парність. Тому $(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)(2n+1) = (2n+1) \cdot (2n-1)!!$.

$$\text{У нас } a_{n+1} = \frac{(2n+1)!!}{(n+1)!} = \frac{(2n+1)(2n-1)!!}{(n+1)n!} = \frac{(2n+1)}{(n+1)} a_n. \text{ Тоді}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2 > 1, \text{ отже, ряд розбіжний. } \blacktriangleleft$$

8. Дослідити збіжність ряду $\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2^2 \cdot 3} + \frac{1}{2^2 \cdot 3^2} + \dots + \frac{1}{2^k \cdot 3^k} + \frac{1}{2^{k+1} \cdot 3^k} + \frac{1}{2^{k+1} \cdot 3^{k+1}} + \dots$ за допомогою ознаки Даламбера.

► Для даного ряду

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{якщо } n \text{ не парне,} \\ \frac{1}{3}, & \text{якщо } n \text{ парне.} \end{cases}$$

Отже, відношення $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ для всіх номерів не перевищує

$q = \frac{1}{2} < 1$, тому ряд збіжний. Зауважимо, що в цьому прикладі

ми не можемо скористатись ознакою Даламбера у граничній

формі, тому що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ не існує. ◀

9. Використовуючи ознаку Коші в граничній формі, дослідити на збіжність такі ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{5n+2} \right)^{2n-1} ; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} ; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\arcsin \frac{1}{n} \right)^n .$$

► а) Маємо $a_n = \left(\frac{2n+1}{5n+2} \right)^{2n-1}$, тому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{5n+2} \right)^{2-\frac{1}{n}} = \left(\frac{2}{5} \right)^2 = \frac{4}{25} < 1, \text{ отже, ряд збіжний. } \blacktriangleleft$$

$$\blacktriangleright \text{ б) Маємо } a_n = \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}, \text{ тому}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \frac{e}{2} > 1. \text{ Ряд розбіжний. } \blacktriangleleft$$

$$\blacktriangleright \text{ в) Маємо } a_n = n \left(\arcsin \frac{1}{n} \right)^n, \text{ тому}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \arcsin \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln n}{n}} \arcsin \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n}} \arcsin \frac{1}{n} = 0 < 1.$$

Ряд збіжний. $\blacktriangleleft$

10. Впевнитися в тому, що ознака збіжності Даламбера не вирішує питання про збіжність ряду

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^{n+1}} + \dots,$$

в той час як з допомогою ознаки Коші можна встановити, що цей ряд збіжний.

$$\blacktriangleright \text{ Загальний член ряду } a_n = \begin{cases} \frac{1}{3^n} & \text{при парному } n, \\ \frac{1}{2^n} & \text{при непарному } n. \end{cases}$$

$$\text{Тому } \sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{3} < 1 & \text{при парному } n, \\ \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1 & \text{при непарному } n. \end{cases}$$

Отже, заданий в умові ряд збіжний.

Легко бачити, що відношення

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \right)^n & \text{при парному } n, \\ \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^n & \text{при непарному } n \end{cases}$$

весь час «перестрибує» через одиницю, тобто ознакою Даламбера тут користуватися не можна. ◀

11. Використовуючи інтегральну ознаку Коші, дослідити на збіжність такі ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}; \quad \text{б) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}.$$

► а) 1. Якщо $p < 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = \infty$, тобто не

виконується необхідна умова збіжності; ряд розбігається.

2. Якщо $0 \leq p < 1$, то, взявши за $f(x) = \frac{1}{x^p}$, знаходимо

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \bigg|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{b^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1} \right) = \infty,$$

тобто інтеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$, а, отже, і ряд, розбігається.

3. При $p = 1$ ряд перетворюється в звичайний гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, що розбігається.

В цьому можна було б переконатись також за

інтегральною ознакою: $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln x \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b = \infty$,

тобто інтеграл розбіжний; тому розбіжний і ряд.

$$4. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1} \quad - \text{збіжний при усіх } p > 1; \text{ тому і ряд}$$

збіжний.

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ збіжний при $1 < p < \infty$ і розбіжний при

$p \leq 1$. Узагальнений гармонічний ряд часто використовують при дослідженні на збіжність рядів за порівняльною ознакою. Ми відноситимемо його до “еталонних” рядів. ◀

► 6) Візьмемо функцію $f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}$, $x \in [2; +\infty)$. Вона,

очевидно, задовольняє усім умовам інтегральної ознаки Коші.

Розглянемо невласний інтеграл

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \int_2^{+\infty} \frac{d \ln x}{\ln^2 x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\ln x} \right) \Big|_2^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\ln b} + \frac{1}{\ln 2} \right) = \frac{1}{\ln 2}.$$

Цей інтеграл збіжний, тому і даний ряд збіжний. ◀

12. Довести, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{3^n \cdot n!} = 0$.

► Розглянемо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n \cdot n!}$ з загальним

членом $a_n = \frac{n^n}{3^n \cdot n!}$, який дослідимо на збіжність за ознакою

Даламбера:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{3^{n+1} \cdot (n+1)!} : \frac{n^n}{3^n \cdot n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n \cdot (n+1)}{3^n \cdot 3 \cdot (n+1)!} \cdot \frac{3^n \cdot n!}{n^n} = \\ &= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \frac{e}{3} < 1,\end{aligned}$$

тому ряд збіжний. Тоді за необхідною ознакою збіжності його

загальний член прямує до нуля, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{3^n \cdot n!} = 0$, що й треба

було довести.

При дослідженні на збіжність рядів слід мати на увазі, що до одного і того ж ряду можна застосовувати різні достатні ознаки збіжності. Зрозуміло, вибирають найзручнішу ознаку для заданого ряду. ◀

Завдання для самостійного розв'язання

6. Використовуючи ознаки порівняння, дослідити на збіжність такі ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos^2 n}{n^3 + 3}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n - 1}.$$

7. Використовуючи ознаку Даламбера у граничній формі, дослідити на збіжність числові ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{5^n \cdot n!};$$

$$\text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}; \quad \text{г)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!}.$$

8. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$ за допомогою

ознаки Даламбера (*Вказівка.* $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$).

9. Використовуючи ознаку Коші у граничній формі, дослідити на збіжність числові ряди:

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^{3n+1}; \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n+3}\right)^{n^2};$$

$$\text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{n}{5^n}; \quad \text{г)} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin^n \frac{\pi}{2n}.$$

10. Використовуючи інтегральну ознаку Коші, дослідити на збіжність числові ряди:

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1}; \quad \text{б)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$$

Покажемо, як можна використати ряди при дослідженні деяких границь. Припустимо, нам треба довести, що границя

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Розглянемо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Якщо цей ряд

збіжний, то за необхідною ознакою його загальний член має прямувати до нуля при $n \rightarrow \infty$. Це і доводить, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

11. Дослідити на збіжність ряди

$$\begin{aligned} \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)3^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^2+1}; \quad \text{в) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln^3 n}}; \\ \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+2} \right)^{\frac{n}{2}}; \quad \text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}. \end{aligned}$$

12. Довести, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5n)!}{2^{n^2}} = 0$.

1.3 Числові ряди з довільними членами

Для числового ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1)$$

з довільними членами розглянемо ряд, складений з абсолютних величин членів цього ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \quad (2)$$

Виявляється, що із збіжності ряду (2) випливає збіжність ряду (1). Зворотне твердження, взагалі кажучи, не вірне. У зв'язку з цим дамо такі означення.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається *абсолютно збіжним*, якщо збігається ряд з модулів членів цього ряду, тобто збігається $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається *умовно збіжним*, якщо він збігається, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ розбігається.

Ряд називається *знакопереміжним*, якщо в ньому після кожного додатного члена йде від'ємний і після кожного від'ємного члена — додатний. Знакопереміжні ряди записують у вигляді $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ або

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n, \text{ де усі } u_n > 0.$$

Ознака Лейбніца. Якщо члени знакопереміжного ряду монотонно не зростають за абсолютною величиною і прямують до нуля при $n \rightarrow \infty$, то ряд збігається. При цьому його сума має той же знак що і перший член ряду, а за модулем вона не перевищує абсолютної величини цього члена.

Ряд, для якого виконуються умови ознаки Лейбніца, називається *рядом лейбніцевого типу*.

Приклади розв'язання задач

13. Встановити, які ряди збігаються абсолютно, умовно чи розбігаються:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n!}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{3n+1}.$$

► а) Складемо ряд з абсолютних величин членів даного ряду: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n!}$. Його загальний член $a_n = \frac{|\sin n|}{n!} \leq \frac{1}{n!} = b_n$. Ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ збігається за ознакою Даламбера у граничній формі:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Тоді, відповідно до ознаки порівняння, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n!}$

також збігається. Отже, вихідний ряд збігається абсолютно. ◀

► б) Легко бачити, що $a_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = a_{n+1}$, $n=1, 2, \dots$, і

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, тобто виконуються умови ознаки Лейбніца. Тому

заданий ряд збігається. Ряд з абсолютних величин членів цього

ряду є гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, який, як відомо, розбігається.

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ збігається умовно. ◀

► в) Для загального члена даного ряду $a_n = (-1)^{n-1} \frac{n}{3n+1}$

маємо $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n+1} = \frac{1}{3} \neq 0$, тобто не виконується

необхідна умова збіжності. Тому наш ряд розбіжний. ◀

Завдання для самостійного розв'язання

13. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність наступні ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n+2}{5n+1} \right)^n; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+3}{5n+2}.$$

1.4 Наближене обчислення суми ряду

При наближеному обчисленні суми ряду покладають, що $S \approx S_n$, де

$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ – n -а частинна сума ряду. При такому наближенні допускається

похибка, що дорівнює залишку ряду, тобто

$$r_n = S - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$$

Таким чином, оцінка точності наближення зводиться до оцінки залишку ряду. Наведемо деякі такі оцінки:

– для ряду лейбніцевого типу

$$|r_n| \leq |a_{n+1}|,$$

тобто абсолютна величина точності наближення $S \approx S_n$ не перевищує першого з відкинутих членів;

– для збіжного знакодоного ряду, члени якого $a_n = f(n)$ монотонно спадають, починаючи з $(n+1)$ -го,

$$r_n \leq \int_n^{\infty} f(x) dx;$$

– для збіжного знакодоного ряду замінюють залишок ряду залишком з дещо більших членів, сума яких може бути знайдена.

Приклади розв'язання задач

14. Обчислити суми заданих рядів з точністю 0,01:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

► а) Заданий ряд збіжний, як ряд лейбніцевого типу.

$$\text{Тоді } |r_n| \leq |a_{n+1}| = \frac{1}{(n+1)!}.$$

Щоб $r_n \leq 0,01$, досить покласти $n = 4$. Отже, з точністю

$$\text{до } |a_{n+1}| = \frac{1}{5!} < 0,01, \text{ маємо}$$

$$S \approx 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} \approx 0,63. \quad \blacktriangleleft$$

► б) Члени ряду є значеннями функції $f(x) = \frac{1}{(2x-1)^4}$

при $x = n$. Ця функція монотонно спадає, тому можна скористатися оцінкою

$$r_n \leq \int_n^{\infty} \frac{dx}{(2x-1)^4} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_n^b \frac{dx}{(2x-1)^4} = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{(2x-1)^{-3}}{-3} \Big|_n^b = \frac{1}{6(2n-1)^3}.$$

Щоб $r_n \leq 0,01$, достатньо покласти $n = 2$. Маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} \approx 1 + \frac{1}{81} \approx 1,01. \blacktriangleleft$$

► в) Оцінимо залишок ряду

$$\begin{aligned} r_n &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \dots = \frac{1}{(n+1)!} \times \\ &\times \left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots \right) < \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{(n+1) \cdot (n+1)!}. \end{aligned}$$

Потрібну кількість n доданків частинної суми знаходимо

$$\text{з нерівності } \frac{n+2}{(n+1) \cdot (n+1)!} \leq 0,01.$$

Методом підбору знаходимо, що $n = 4$. Отже, з точністю до 0,01, маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \approx 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \approx 1,71. \blacktriangleleft$$

Завдання для самостійного розв'язання

14. Обчислити суми заданих рядів з точністю 0,01:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{4^n (2n+1)}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4)^3}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}.$$

§2. Функціональні ряди

2.1 Функціональні ряди. Рівномірна збіжність

Ряд $u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, членами якого є функції

аргумента x , визначені на деякій множині E , називається *функціональним*. Якщо підставляти в ряд різні числові значення $x_0 \in E$, то одержуватимемо числові ряди, які можуть збігатись або розбігатись.

Множина D усіх значень x , для яких функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ збігається, називається *областю збіжності функціонального ряду*. Очевидно, $D \subset E$.

Може трапитись, що для деяких $x \in D_1 \subset D$ функціональний ряд збігається абсолютно, а для деяких $x \in D_2 \subset D$ – умовно. Тому розрізняють також області абсолютної збіжності D_1 і умовної збіжності D_2 .

Для знаходження областей збіжності функціональних рядів можна використовувати табличні ряди і достатні ознаки збіжності числових рядів.

Збіжний в області D функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ називається *рівномірно збіжним* в цій області до функції $S(x)$, якщо для будь-якого

$\varepsilon > 0$ існує такий незалежний від x номер $N(\varepsilon)$, що для всіх $n > N$ виконується нерівність $|r_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ одночасно для усіх $x \in D$.

Ознака Вейєрштрасса. Якщо члени функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на множині D за абсолютною величиною не перевищують відповідних членів збіжного знакододатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$, (тобто $|u_n(x)| \leq C_n$ для усіх $x \in D$), то на множині D функціональний ряд збігається абсолютно і рівномірно.

Числовий ряд, що має щодо функціонального ряду вказану властивість, називається *мажоруючим* числовим рядом.

Властивості рівномірно збіжних функціональних рядів:

1. Якщо всі члени функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ неперервні на $[a; b]$ і ряд збігається рівномірно на $[a; b]$, то його сума $S(x)$ також неперервна на $[a; b]$.

2. Якщо члени функціонального ряду неперервні на $[a; b]$ і ряд збігається рівномірно на $[a; b]$, то цей ряд можна почленно інтегрувати в межах від x_0 до x для будь-яких $x_0, x \in [a; b]$, тобто

$$\int_{x_0}^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^x u_n(x) dx.$$

При цьому отриманий ряд збігається рівномірно по x на $[a; b]$ при будь-якому $x_0 \in [a; b]$.

3. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ з неперервно диференційовними членами

збігається до функції $S(x)$ на $[a; b]$, а ряд похідних $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ збігається рівномірно до функції $\sigma(x)$ на $[a; b]$, то сума $S(x)$ ряду диференційовна на цьому відрізку і всюди на ньому виконується рівність $S'(x) = \sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$, тобто ряд можна почленно диференціювати.

Приклади розв'язання задач

15. Знайти області збіжності функціональних рядів:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n3^n \sqrt{(x+2)^n}}$; б) $1 + 2x + 3^2 x^2 + \dots + (n+1)^n x^n + \dots$

► а) Маємо $|u_n(x)| = \frac{1}{n3^n \sqrt{(x+2)^n}}$. Використовуючи

ознаку Коші в граничній формі, запишемо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n3^n \sqrt{(x+2)^n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3\sqrt{x+2} \sqrt[n]{n}} = \frac{1}{3\sqrt{x+2}}.$$

Отже, ряд збігається, якщо $\frac{1}{3\sqrt{x+2}} < 1$, тобто при

$x > -\frac{17}{9}$. При $x = -\frac{17}{9}$ отримаємо знакочередуючий ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$, який збігається за ознакою Лейбніца. Таким

чином, $\left[-\frac{17}{9}; +\infty\right)$ – область збіжності ряду. ◀

► б) До ряду, складеного з абсолютних величин даного ряду, тобто $1 + 2|x| + 3^2 x^2 + \dots + (n+1)^n |x|^n + \dots$, застосуємо ознаку Коші. Маємо $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(n+1)^n |x|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)|x| = \infty$, якщо $x \neq 0$, отже, не виконується необхідна умова збіжності і тому ряд розбіжний. При $x = 0$ всі члени ряду, крім першого, дорівнюють нулю, значить, ряд збігається.

Остаточно можемо сказати, що даний функціональний ряд збігається лише при $x = 0$. ◀

16. Довести рівномірну збіжність у зазначених проміжках таких функціональних рядів:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}$ на всій числовій осі;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ на відрізку $[-1; 1]$.

► а) Скористаємось ознакою Вейерштрасса. Оскільки при $-\infty < x < +\infty$ і усіх $n \in \mathbb{N}$ виконується $\left| \frac{\sin nx}{n!} \right| \leq \frac{1}{n!}$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ збіжний (за ознакою Даламбера), то заданий функціональний ряд абсолютно і рівномірно збіжний на всій числовій осі. ◀

► б) Для всіх $x \in [-1; 1]$ виконується нерівність $\left| \frac{x^n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$.

Збіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ слугує мажорантою заданого

функціонального ряду, тому цей функціональний ряд абсолютно і рівномірно збіжний на $[-1;1]$. ◀

17. Знайти суми рядів:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}.$$

► а) Даний ряд збігається при $|x| < 1$ (в цьому можна переконатись за ознакою Даламбера). Ряд, складений з похідних членів цього функціонального ряду, матиме вигляд $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Очевидно, це є сума нескінченної геометричної прогресії. Як відомо, він збігається на $(-1;1)$ і для будь-якого

додатного числа $q < 1$ мажорується збіжним рядом $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ на

$[-q; q]$, отже, рівномірно збігається на $[-q; q]$. Тому можемо

його почленно проінтегрувати від 0 до x для довільного $x \in (-1;1)$. Маємо

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \right)' = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1} + \dots = \frac{1}{1-x}, \quad \text{і тоді}$$

$$S(x) = \int_0^x S'(t) dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x).$$

До речі, ця рівність вірна і при $x = -1$, бо даний ряд збіжний за ознакою Лейбніца. Отже, для всіх $x \in [-1;1)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x). \quad (3) \quad \blacktriangleleft$$

► б) Поклавши в рівності (3) $x = \frac{1}{3}$, отримаємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n} = -\ln\left(1 - \frac{1}{3}\right) = -\ln \frac{2}{3} = \ln \frac{3}{2}. \quad \blacktriangleleft$$

Завдання для самостійного розв'язання

15. Знайти області збіжності функціональних рядів:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2};$$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!x^n}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n3^n(x-5)^n}.$$

16. Довести рівномірну збіжність у зазначених проміжках таких функціональних рядів:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \cdot \sqrt{1+n^x}}, \quad x \in (0; \infty);$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2} \text{ на всій числовій осі.}$$

17. Знайти суми рядів:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}.$$

2.2 Степеневі ряди

Степеневим рядом називається функціональний ряд виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots \quad (4)$$

або, загальніше, виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = c_0 + c_1 (x - x_0) + c_2 (x - x_0)^2 + \dots + c_n (x - x_0)^n + \dots, \quad (5)$$

де $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$ – дійсні числа, які називаються *коефіцієнтами* ряду.

Теорема Абеля. Якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ збіжний при $x = x_0 \neq 0$, то він абсолютно збіжний для всіх значень x , що задовольняють нерівність $|x| < |x_0|$. Якщо при $x = x_1$ ряд розбіжний, то він розбіжний всюди, де $|x| > |x_1|$.

З теореми Абеля випливає існування такого числа R ($0 \leq R \leq \infty$), що ряд (4) збігається, причому абсолютно, для усіх $x \in (-R; R)$ і розбігається при $|x| > R$. При $x = \pm R$ для кожного ряду питання про його збіжність розв'язується окремо. Це число R називають *радіусом збіжності* степеневого ряду. Його можна знаходити за однією із формул

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|, \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}},$$

у випадку існування відповідної границі.

Якщо $R = 0$, то ряд (4) збігається тільки в точці $x = 0$, а якщо $R = +\infty$, то він збігається на усій числовій осі.

Очевидно, степеневий ряд (5) загального вигляду набуває форми (4) після заміни $x - x_0 = t$, тому його інтервалом збіжності буде інтервал $(x_0 - R; x_0 + R)$.

Сформулюємо властивості степеневих рядів.

1. Степеневий ряд збігається рівномірно на будь-якому відрізку з інтервала збіжності.

2. Сума степеневого ряду $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ неперервна в кожній точці інтервала збіжності.

3. Степеневий ряд можна почленно диференціювати в кожній точці x його інтервалу збіжності, тобто

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}.$$

Радіус збіжності при цьому не змінюється. Отже, степеневий ряд можна почленно диференціювати будь-яку скінченну кількість разів.

4. Степеневий ряд можна почленно інтегрувати на будь-якому відрізку з інтервала збіжності, зокрема, для довільного $x \in (-R; R)$. Таким чином,

$$\int_0^x S(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Радіус збіжності зінтегрованого ряду буде такий же, як і ряду (4).

Приклади розв'язання задач

18. Знайти області збіжності степеневих рядів:

$$\text{а) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 (x-3)^n}{2^n}; \quad \text{б) } 1 + \sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n; \quad \text{в) } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{4^{n+1}}.$$

► а) Тут $c_n = \frac{n^2}{2^n}$, $c_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}$. Отже,

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 2^{n+1}}{2^n (n+1)^2} = 2.$$

Інтервал збіжності ряду – $(1;5)$. Дослідимо збіжність ряду на краях цього інтервалу. При $x=1$ степеневий ряд прийме вигляд $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n^2$, а при $x=5$ – $\sum_{n=0}^{\infty} n^2$. Обидва ряди розбігаються (не виконується необхідна умова збіжності). Отже, область збіжності ряду співпадає з його інтервалом збіжності, тобто $1 < x < 5$. ◀

► б) Тут $c_n = n^n$. $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Тому ряд збігається лише в одній точці $x = 0$. ◀

► в) *Перший спосіб*. Складемо ряд з абсолютних величин членів заданого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^{2n+1}}{4^{n+1}}$ і застосуємо ознаку Даламбера у граничній формі. Будемо мати

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{2n+3}}{4^{n+2}} \cdot \frac{4^{n+1}}{|x|^{2n+1}} = \frac{x^2}{4}.$$

Відповідно до ознаки Даламбера ряд збігатиметься для всіх значень x , що задовольняють нерівність

$$\frac{x^2}{4} < 1 \Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow |x| < 2.$$

Отже, інтервал збіжності ряду $(-2;2)$, радіус збіжності $R = 2$.

Дослідимо збіжність ряду на кінцях цього інтервалу:

якщо $x = -2$, то $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2}$; якщо $x = 2$, то $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2}$.

Обидва ряди розбігаються, тому що не виконується необхідна умова збіжності числового ряду, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$.

Отже, область збіжності $(-2; 2)$ ряду співпадає з його інтервалом збіжності.

Другий спосіб. Степеневий ряд містить лише непарні степені x , отже, нескінченне число коефіцієнтів цього ряду з парними степенями x дорівнює нулю. У цьому разі формули для обчислення радіуса збіжності не можуть бути застосовані безпосередньо.

Перепишемо заданий ряд у вигляді $\frac{x}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{4^n}$.

Вводячи нову змінну $y = x^2$, одержимо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{y^n}{4^n}$.

Радіус збіжності цього степеневого ряду тепер можна знайти,

наприклад, за формулою $R_y = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1}}{4^n} = 4$. Отже,

$|y| = x^2 < 4 \Leftrightarrow |x| < 2$ і радіус збіжності вихідного ряду $R_x = 2$. ◀

19. Знайти суми поданих рядів:

$$\text{а) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, |x| < 1; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}}{5^n (n+2)}.$$

► а) Позначимо суму даного ряду через $S(x)$, тоді

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

Цю суму можна розглядати як геометричну прогресію з першим членом $a=1$ і знаменником $q=-x^2$. Сума прогресії дорівнює $S'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Інтегруючи цю рівність на відрізку

$[0; x] \subset (-1; 1)$, маємо $\int_0^x S'(x) dx = \arctg x$. Отже,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \arctg x.$$

Зауважимо, що ця рівність виконується і на кінцях інтервала збіжності — точках $x_1 = -1$ та $x_2 = 1$. ◀

► б) Розглянемо степеневий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}}{5^n (n+2)} x^{n+2}$, який у

точці $x=1$ перетворюється в заданий числовий. Знайдемо радіус збіжності цього ряду:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n-1}}{5^n (n+2)} \cdot \frac{5^{n+1} (n+3)}{2^{2n+1}} = \frac{5}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n+2} = \frac{5}{4}.$$

Ряд збігається в інтервалі $\left(-\frac{5}{4}; \frac{5}{4}\right)$.

Нехай $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}}{5^n (n+2)} x^{n+2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n \frac{x^{n+2}}{n+2}$. Проди-

ференціюємо обидві частини цієї рівності за змінною x усередині інтервалу збіжності:

$$S'(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n x^{n+1} = \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n x^n = \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4x}{5}\right)^n.$$

Отримали геометричну прогресію, сума якої дорівнює

$$S'(x) = \frac{x}{2} \frac{\frac{4x}{5}}{1 - \frac{4x}{5}} = \frac{x}{2} \frac{4x}{5 - 4x} = \frac{2x^2}{5 - 4x}.$$

Проінтегрувавши для будь-якого $x \in \left(-\frac{5}{4}; \frac{5}{4}\right)$ обидві

частини цієї рівності від 0 до x , одержимо

$$\begin{aligned} S(x) &= \int_0^x \frac{2t^2}{5 - 4t} dt = -\frac{1}{2} \int_0^x \frac{t^2}{t - \frac{5}{4}} dt = -\frac{1}{2} \int_0^x \frac{t^2 - \frac{25}{16} + \frac{25}{16}}{t - \frac{5}{4}} dt = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^x \left(t + \frac{5}{4} + \frac{25}{16(t-5)} \right) dt = -\frac{1}{2} \left(\frac{t^2}{2} + \frac{5}{4}t + \frac{25}{16} \ln \left| t - \frac{5}{4} \right| \right) \Big|_0^x = \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{5}{4}x + \frac{25}{16} \ln \left| \frac{4x-5}{5} \right| \right). \end{aligned}$$

Поклавши $x=1$ в $S(x)$, знайдемо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}}{5^n (n+2)} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{4} + \frac{25}{16} \ln \frac{1}{5} \right) = \frac{25}{32} \ln 5 - \frac{7}{8}. \blacktriangleleft$$

Завдання для самостійного розв'язання

18. Знайти області збіжності степеневих рядів:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-5)^n}{n \cdot 3^n}; \quad \text{в) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}.$$

19. Знайти суми поданих рядів:

$$\text{а) } 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3x + 3 \cdot 4x^2 + \dots + n(n+1)x^{n-1} + \dots;$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)3^{n-1}} \quad (\text{Вказівка. Розглянути суму ряду}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \text{ при } x = \frac{1}{\sqrt{3}}).$$

2.3 Розвинення функцій у степеневі ряди

Функція $f(x)$ розвивається у степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ в інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$, якщо в цьому інтервалі степеневий ряд збігається і його сума дорівнює $f(x)$, тобто $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$.

Теорема. Якщо функцію $f(x)$ в інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$ можна подати у вигляді степеневого ряду $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$, то коефіцієнти

такого ряду мають вигляд $c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) (тут для зручності

запису вважають $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$).

$$\begin{aligned} \text{Ряд } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \dots \\ &+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + \dots \text{ називається рядом Тейлора функції } f(x). \end{aligned}$$

При $x_0 = 0$ ряд Тейлора $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots$ називають також *рядом Маклорена*.

Якщо функцію $f(x)$ можна розкласти в степеневий ряд, то ця функція нескінченно диференційована. Але обернене твердження місця не має. Тобто, якщо функція нескінченно диференційована в інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$ і для неї формально побудовано ряд Тейлора, то ще немає гарантії, що цей збіжний в інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$ ряд матиме сумою функцію $f(x)$.

Сформулюємо умови розкладу функції у степеневий ряд.

Теорема (необхідна і достатня умова розвинення функції у степеневий ряд). Для того, щоб функцію $f(x)$ можна було розвинути у степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ в інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$, $R \neq 0$, необхідно і достатньо, щоб $f(x)$ мала на цьому інтервалі похідні всіх порядків і щоб залишковий член $R_n(x)$ у формулі Тейлора

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x)$$

прямував до нуля для всіх $x \in (x_0 - R; x_0 + R)$, коли $n \rightarrow \infty$.

Для оцінки залишкового члена можна скористатися його виглядом у формі Лагранжа

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)), \text{ де } 0 < \theta < 1.$$

Теорема (достатня умова розвинення функції в степеневий ряд).

Якщо похідні довільного порядку функції $f(x)$ рівномірно обмежені на

$(x_0 - R; x_0 + R)$, тобто існує число $M > 0$, таке, що $|f^{(n)}(x)| \leq M$ при $n = 0, 1, 2, \dots$ і всіх $x \in (x_0 - R; x_0 + R)$, то ряд Тейлора, побудований для функції $f(x)$, збігається до неї.

Зауваження. Якщо функція має похідні усіх порядків в кожній точці інтервала збіжності її ряду Тейлора, то в усіх точках цього інтервала вона співпадає з цим рядом.

Приклади розв'язання задач

20. Розвинути функцію $f(x) = \operatorname{ch} x$ в ряд за степенями x .

► Знайдемо похідні даної функції $f'(x) = \operatorname{sh} x$, $f''(x) = \operatorname{ch} x$, $f'''(x) = \operatorname{sh} x, \dots$; тобто $f^{(n)}(x) = \operatorname{ch} x$, якщо n – парне, і $f^{(n)}(x) = \operatorname{sh} x$, якщо n – непарне. При $x_0 = 0$ отримаємо $f^{(n)}(0) = 1$, якщо n – парне, і $f^{(n)}(0) = 0$, якщо n – непарне. Звідси маємо

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (6)$$

Знайдемо інтервал збіжності утвореного ряду за ознакою Даламбера. Маємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} : \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)} = 0$$

для будь-яких x . Отже ряд збігається в інтервалі $-\infty < x < \infty$ і тому рівність. ◀

21. Розвинути в ряд за степенями x функції:

$$\text{а) } f(x) = \cos^2 x; \quad \text{б) } f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\text{в) } f(x) = \arcsin x; \quad \text{г) } f(x) = \frac{(2+x)^2}{1-x^2}.$$

► а) Як відомо, $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$. Скористаємося

розкладом

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

Поклавши у розкладі $2x$ замість x , дістанемо

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(2x)^4}{2 \cdot 4!} - \frac{(2x)^6}{2 \cdot 6!} + \dots = \\ &= 1 - \frac{2}{2!} x^2 + \frac{2^3}{4!} x^4 - \frac{2^5}{6!} x^6 + \dots \end{aligned}$$

Оскільки розклад в ряд функції $\cos x$ має місце для всіх x , то і розклад в ряд заданої функції справедливий для всіх x . ◀

► б) Запишемо функцію у вигляді $f(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Скористаємося біноміальним розкладом

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots \\ &\quad + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots \end{aligned}$$

Поклавши у розкладі $-x^2$ замість x , при $\alpha = -\frac{1}{2}$

одержимо

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}x^{2n} + \dots, \quad x \in (-1; 1). \blacktriangleleft$$

► в) Інтегруючи знайдений в попередньому прикладі ряд в межах від 0 до x , $|x| < 1$, будемо мати

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \quad x \in (-1; 1).$$

Можна довести, що ця рівність справедлива і в точках $x = \pm 1$. $\blacktriangleleft$

► г) Маємо неправильний раціональний дріб. Виділивши цілу частину

$$\frac{(2+x)^2}{1-x^2} = \frac{4+4x+x^2}{1-x^2} = -1 + \frac{4x+5}{(1-x)(1+x)},$$

отриманий правильний раціональний дріб розкладемо на суму найпростіших дробів:

$$\frac{4x+5}{(1-x)(1+x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} \Rightarrow A(1+x) + B(1-x) = 4x+5;$$

$$\text{при } x=1: 2A=9 \Rightarrow A=\frac{9}{2},$$

$$\text{при } x=-1: 2B=1 \Rightarrow B=\frac{1}{2}.$$

$$\text{Отже, } \frac{4x+5}{(1-x)(1+x)} = \frac{9}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)}.$$

Скориставшись розкладами

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots, \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots,$$

$$\begin{aligned} \text{отримаємо } \frac{(2+x)^2}{1-x^2} &= -1 + \frac{9}{2} (1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots) + \\ &+ \frac{1}{2} (1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots) = 4 + 4x + 5x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \dots, \end{aligned}$$

$$\text{тобто } \frac{(2+x)^2}{1-x^2} = 4 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n, \quad \text{де } c_n = \begin{cases} 4, & n = 2k-1; \\ 5, & n = 2k. \end{cases}$$

Хоча задана функція нескінченно диференційовна на всій числовій осі, за винятком точок $x = \pm 1$, отриманий розклад має місце тільки при $x \in (-1; 1)$, бо, як легко переконатись, областю збіжності степеневому ряду є саме цей інтервал. ◀

Завдання для самостійного розв'язання

20. Розвинути функцію $f(x) = \frac{1}{x}$ в ряд за степенями $x+2$.

При розв'язуванні багатьох задач рекомендується користуватися наступними розкладами елементарних функцій:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (-\infty < x < +\infty);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad (-\infty < x < +\infty);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (-\infty < x < +\infty);$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad (-1 < x \leq 1);$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \quad (-1 \leq x \leq 1);$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (-1 < x < 1);$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (-1 < x < 1);$$

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \\ &\quad + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!} x^4 + \dots = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)}{n!} x^n \quad (-1 < x < 1). \end{aligned}$$

Для кожного випадку в дужках вказана область, в якій степеневий ряд збігається до відповідної функції. Останній ряд, який називається *біноміальним*, на кінцях інтервалу збіжності веде себе по-різному в залежності від $\alpha \in \mathbb{R}$: при $\alpha \geq 0$ абсолютно збігається в точках $x = \pm 1$; при $-1 < \alpha < 0$ розбігається в точці $x = -1$ і умовно збігається в точці $x = 1$; при $\alpha \leq -1$ розбігається в точках $x = \pm 1$.

Часто для розкладу функції в ряд зручно користуватись

диференціюванням чи інтегруванням відомих розкладів, а при розкладі раціонального дробу розкласти його на найпростіші.

21. Розвинути в ряд за степенями x функції:

$$\text{а) } f(x) = \frac{\sin 2x}{x}; \quad \text{б) } f(x) = \sqrt[3]{8+x};$$

$$\text{в) } f(x) = (1+x)\ln(1+x); \quad \text{г) } f(x) = \frac{2}{(1+x)(1-3x)}.$$

2.4 Застосування степеневих рядів

1. Розклад функції $f(x)$ в ряд Тейлора в околі точки x_0 дає змогу знаходити значення похідної будь-якого порядку $f^{(n)}(x)$ в точці $x = x_0$. З

формули для коефіцієнтів Тейлора $c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ випливає $f^{(n)}(x_0) = c_n n!$.

2. За допомогою розкладу функції $f(x)$ в ряд Тейлора можна наближено обчислювати значення функцій. Щоб знайти значення функції $f(x)$ в точці x_1 , поступають таким чином. Функцію $f(x)$ розкладають у степеневий ряд в околі точки x_0 , якому належить точка x_1 . Точку x_0 вибирають такою, щоб у ній легко обчислювались значення функції та усіх її похідних, а також, по можливості, щоб вона була якнайближче до точки x_1 . В одержаному розкладі покладають $x = x_0$. Потім для обчислення $f(x_0)$ з потрібною точністю беруть необхідне число його перших членів $(S_n(x_0))$. Похибку $|f(x_0) - S_n(x_0)|$ можна знайти, оцінюючи залишок ряду $|r_n(x_0)|$.

3. Для обчислення визначених інтегралів за допомогою розкладу підінтегральної функції у степеневий ряд вдаються не тільки тоді, коли

первісна функція не є елементарною, але й у випадках, коли пошуки первісної функції зв'язані з громіздкими перетвореннями або виникають труднощі з обчисленнями значень первісної функції в межах інтегрування. Зрозуміло, що проміжок інтегрування повинен знаходитись в області розкладу підінтегральної функції у степеневий ряд.

4. Степеневі ряди використовуються при розв'язуванні диференціальних рівнянь. Для цілого ряду диференціальних рівнянь показано, що розв'язок $y(x)$ можна представити у вигляді степеневого ряду

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n,$$

коефіцієнти якого можна визначити з урахуванням заданого рівняння різними способами.

а) Нехай диференціальне рівняння k -го порядку розв'язане відносно старшої похідної. Перші k коефіцієнтів $y(x_0)$, $y'(x_0)$, $\dots$, $y^{(k-1)}(x_0)$ задаються початковими умовами. Підставляючи ці коефіцієнти і $x = x_0$ у рівняння, знаходять $y^{(k)}(x_0)$. Далі, послідовно диференціюючи рівняння і підставляючи $x = x_0$, та обчислені при $x = x_0$ значення похідних, знаходять $y^{(k+1)}(x_0)$, $y^{(k+2)}(x_0)$, $\dots$.

б) Якщо диференціальне рівняння лінійне відносно шуканої функції та її похідних, і коефіцієнт при старшій похідній в точці x_0 не дорівнює нулю, то розв'язок можна шукати у вигляді степеневого ряду

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \text{ з невизначеними коефіцієнтами } c_n \text{ (} n = 0, 1, 2, \dots \text{)}.$$

Безпосередньо в диференціальне рівняння підставляють ряд і прирівнюють коефіцієнти при однакових степенях x в лівій і правій частинах рівності.

Приклади розв'язання задач

22. Знайти похідну 10-го порядку від функції

$$f(x) = x^4 \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) \text{ в точці } x = 0.$$

► Користуючись табличним розкладом

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \dots \quad (-1 < x \leq 1),$$

одержимо

$$\begin{aligned} x^4 \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) &= x^4 \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2^2 \cdot 2} + \frac{x^3}{2^3 \cdot 3} - \frac{x^4}{2^4 \cdot 4} + \frac{x^5}{2^5 \cdot 5} - \frac{x^6}{2^6 \cdot 6} + \frac{x^7}{2^7 \cdot 7} - \dots \right) = \\ &= \frac{x^5}{2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 2} + \frac{x^7}{2^3 \cdot 3} - \frac{x^8}{2^4 \cdot 4} + \frac{x^9}{2^5 \cdot 5} - \frac{x^{10}}{2^6 \cdot 6} + \frac{x^{11}}{2^7 \cdot 7} - \dots, \end{aligned}$$

$$\text{звідки} \quad f^{(10)}(0) = c_{10} \cdot 10! = -\frac{10!}{2^6 \cdot 6} = -\frac{10!}{384} = 9450. \quad \blacktriangleleft$$

23. Обчислити з точністю до 0,0001:

а) $\cos 10^\circ$; б) число e ; в) $\sqrt[5]{32}$.

► а) Використаємо розклад

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

В ньому під x розуміють радіанну міру кута, тобто

$$x = 10^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 10 = \frac{\pi}{18}. \text{ Тому}$$

$$\cos 10^\circ = \cos \frac{\pi}{18} = 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{18}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{\pi}{18}\right)^4}{4!} - \frac{\left(\frac{\pi}{18}\right)^6}{6!} + \dots$$

Одержали ряд лейбніцевого типу. Оскільки

$$|u_3| = \frac{\left(\frac{\pi}{18}\right)^4}{4!} < \frac{1}{10^4},$$

то для забезпечення заданої точності досить в ряді взяти два

$$\text{перші члени, тобто } \cos 10^0 = 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{18}\right)^2}{2!} \approx 1 - 0,0152 = 0,9848. \blacktriangleleft$$

► б) Підставимо $x=1$ в розклад

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty).$$

$$\text{Маємо } e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Оцінимо залишок

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \dots k} < \frac{1}{n!} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{k-n}} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{\frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!n}.$$

Отже, рівність $e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ має абсолютну похибку, яка не

перевищує $\frac{1}{n!n}$. Знайдемо n , для якого $\frac{1}{n!n} < 0,0001$ або

$n!n > 10000$. Отримаємо $n \geq 7$. Обчислюючи $2 + \sum_{k=2}^7 \frac{1}{k!}$ і

округлюючи, знаходимо з заданою точністю $e \approx 2,7183$. ◀

$$\text{► в) Очевидно, } \sqrt[5]{36} = \sqrt[5]{32+4} = \sqrt[5]{2^5+4} = 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{5}}.$$

Тому скористаємось розкладом для функції $(1+x)^\alpha$ при $x = \frac{1}{8}$,

$\alpha = \frac{1}{5}$. Отримаємо

$$\begin{aligned} 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{5}} &= 2 \cdot \left(1 + \frac{\frac{1}{5}}{1!} \cdot \frac{1}{8} + \frac{\frac{1}{5} \left(\frac{1}{5} - 1\right)}{2!} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \frac{\frac{1}{5} \left(\frac{1}{5} - 1\right) \left(\frac{1}{5} - 2\right)}{3!} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^3 + \dots\right) = \\ &= 2 + \frac{2}{5 \cdot 8} - \frac{2 \cdot 4}{2! \cdot 5^2 \cdot 8^2} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 9}{3! \cdot 5^3 \cdot 8^3} - \frac{2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 14}{4! \cdot 5^4 \cdot 8^4} + \dots \end{aligned}$$

Останній ряд є рядом лейбніцевого типу. Оскільки

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 14}{4! \cdot 5^4 \cdot 8^4} < 0,0001, \text{ то з точністю до } 0,0001 \text{ маємо}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{36} \approx 2 + \frac{1}{20} - \frac{1}{400} + \frac{3}{16000} &= 2,00000 + 0,05000 - 0,00250 + \\ &+ 0,00019 = 2,04769. \end{aligned}$$

Отже, $\sqrt[5]{36} \approx 2,0477$. ◀

24. Обчислити інтеграл $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ з точністю до

0,001.

► Обчислити даний визначений інтеграл з допомогою

формули Ньютона-Лейбніца не можна, бо $\int e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ не виражається через елементарні функції. Замінюючи x в

розкладі функції e^x на $-\frac{x^2}{2}$, знаходимо

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!} \left(\frac{x^2}{2} \right)^2 - \frac{1}{3!} \left(\frac{x^2}{2} \right)^3 + \dots \right) dx = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^5}{2! \cdot 2^2 \cdot 5} - \frac{x^7}{3! \cdot 2^3 \cdot 7} + \dots \right) \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} - \frac{1}{2^3 \cdot 3\sqrt{\pi}} + \frac{1}{2^7 \cdot 5\sqrt{\pi}} - \frac{1}{3! \cdot 2^9 \cdot 7\sqrt{\pi}} + \dots \end{aligned}$$

Одержали ряд лейбніцевого типу. З точністю до 0,001

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx &\approx \frac{1}{\sqrt{3,1415}} \left(1 - \frac{1}{24} \right) \approx \frac{1}{\sqrt{3,1415}} (1 - 0,0416) \approx \\ &\approx 0,5205 \approx 0,521. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

25. Знайти перші п'ять членів розкладу в ряд розв'язку

задачі Коші: $y'' = x \sin y'$, $y(1) = 0$, $y'(1) = \frac{\pi}{2}$.

► Ми розв'язуємо дану задачу Коші в припущенні, її розв'язок можна розвинути в ряд Тейлора

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(1)}{n!} (x-1)^n. \quad (7)$$

Використовуючи початкові умови $y(1) = 0$, $y'(1) = \frac{\pi}{2}$, із

заданого рівняння знаходимо $y''(1) = 1 \cdot \sin y'(1) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$.

Далі диференціюючи послідовно рівняння, маємо

$$y'''(x) = \sin y' + x \cos y' \cdot y'', \quad y'''(1) = \sin \frac{\pi}{2} + 1 \cdot \cos \frac{\pi}{2} \cdot 1 = 1,$$

$$y^{(IV)}(x) = \cos y' \cdot y'' + \cos y' \cdot y'' - x \cdot \sin y' \cdot (y'')^2 + x \cdot \cos y' \cdot y''',$$

$$y^{(IV)}(1) = 2 \cos \frac{\pi}{2} \cdot 1 - 1 \cdot \sin \frac{\pi}{2} \cdot (1)^2 + 1 \cdot \cos \frac{\pi}{2} \cdot 1 = -1,$$

.....

Підставивши задані та обчислені значення похідних в (7), отримуємо

$$y(x) = \frac{\pi}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 - \frac{1}{24}(x-1)^4 + \dots \blacktriangleleft$$

26. Знайти розв'язок (у вигляді степеневого ряду) рівняння $y'' - xy' + y = 1$, який задовольняє умови $y(0) = y'(0) = 0$.

► Шукаємо розв'язок у вигляді ряду $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, в якому з початкових умов $y(0) = y'(0) = 0$ маємо $c_0 = c_1 = 0$.

Тому $y(x) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n$. Підставимо цей вираз в задане рівняння,

$$\text{отримаємо } \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n c_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n = 1.$$

Звідси знаходимо, що $2 \cdot 1 \cdot c_2 = 1$, тобто $c_2 = \frac{1}{1 \cdot 2}$, і

$$(n+1)(n+2)c_{n+2} = (n-1)c_n, \text{ для } n = 1, 2, \dots$$

Оскільки $c_1 = 0$, то $c_{2m+1} = 0$ для всіх $m = 0, 1, \dots$, а для $n = 2m$, $m = 1, 2, \dots$, отримаємо рекурентну формулу

$$c_{2m+2} = \frac{(2m-1)c_{2m}}{(2m+1)(2m+2)}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

з якої виводимо рівність $c_{2m+2} = \frac{(2m-1)!!}{(2m+2)!}$.

Отже, шуканий розв'язок має вигляд

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m-1)!!}{(2m+2)!} x^{2m+2}.$$

Отриманий ряд збігається для всіх $x \in \mathbb{R}$. ◀

Завдання для самостійного розв'язання

22. Знайти похідну 11-го порядку від функції $f(x) = (1+x)e^x$ в точці $x = 0$.

23. Обчислити з точністю до 0,0001:

а) $\sin \frac{\pi}{5}$; б) $\sqrt[3]{520}$.

24. Обчислити інтеграл $\int_0^{0,3} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$ з точністю до

0,0001.

25. Знайти чотири перші члени розкладу у степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння $y' = xy + e^y$, $y(0) = 0$.

26. Знайти розв'язок (у вигляді степеневого ряду) рівняння $y'' + xy' + y = x$, якщо $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

2.5 Ряди Фур'є

Тригонометричний ряд $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$, коефіцієнти якого визначаються з формул

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

називається *рядом Фур'є* функції $f(x)$.

Функція $f(x)$ задовольняє умови Діріхле на відрізку $[a, b]$, якщо вона кусково-неперервна і кусково-монотонна на цьому відрізку.

Теорема Діріхле (достатня умова розкладу функції в ряд Фур'є). Якщо періодична функція $f(x)$ (період $T = 2l$) задовольняє на відрізку $[-l, l]$ умови Діріхле, то її тригонометричний ряд збігається в кожній точці x цього відрізка, причому для його суми

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

справедливі рівності:

- 1) $S(x) = f(x)$, якщо $-l < x < l$ і x є точкою неперервності функції $f(x)$;
- 2) $S(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$, якщо $-l < x < l$ і x є точкою розриву функції $f(x)$;

$$3) S(-l) = S(l) = \frac{f(-l+0) + f(l-0)}{2}.$$

При розкладі функції $f(x)$ у ряд Фур'є на довільному відрізку $[a; a+T]$ довжини $T = 2l$ межі інтегрування у формулах для коефіцієнтів Фур'є слід замінити відповідно на a та $a+2l$.

Для парної функції $f(x) = f(-x)$ всі коефіцієнти $b_n = 0$ і ряд Фур'є набуває вигляду

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Для непарної функції $f(x) = -f(-x)$ всі коефіцієнти $a_n = 0$ і ряд Фур'є набуває вигляду

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Результатом розкладу парних або непарних функцій є неповні ряди Фур'є. Але можна розглядати і задачі ціленаправленого розкладу в ряди тільки за синусами або тільки за косинусами. Такі задачі розглядають, якщо $f(x)$ задана на проміжку $[0; l]$ (рис. 1а). Для цього треба:

1) доозначити цю функції на проміжку $[-l; 0]$ так, щоб нова функція $F(x)$ вже на проміжку $[-l; l]$ була, наприклад, парною (рис. 1б), а на проміжку $[0; l]$ щоб $F(x) = f(x)$;

2) періодично продовжити функцію $F(x)$ на всю числову пряму, $T = 2l$, нехай $\varphi(x)$ – назване продовження (рис. 1в);

3) функцію $\varphi(x)$ розкладаємо в ряд Фур'є.

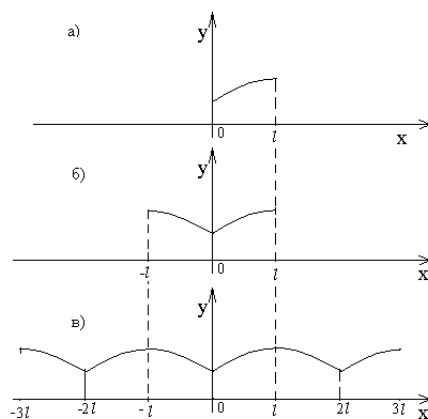


Рисунок 1

Зрозуміло, що для обчислення коефіцієнтів розкладу в ряд Фур'є аналітичного виразу "продовження" функції $f(x)$ не треба знати; досить обмежитись інформацією про $f(x)$ лише на проміжку $(0; l)$.

Аналогічно здійснюємо розклад в ряд Фур'є за синусами. Для цього треба функцію $f(x)$, що задана на $[0; l]$, продовжити на $[-l; 0]$ непарно.

Приклади розв'язання задач

27. Розкласти з періодом 2 функцію $f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ в ряд Фур'є. За допомогою цього розкладу обчислити суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

► Обчислимо коефіцієнти Фур'є:

$$a_0 = \int_{-1}^0 1 dx + \int_0^1 x dx = x \Big|_{-1}^0 + \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \int_{-1}^0 \cos n\pi x dx + \int_0^1 x \cos n\pi x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & dv = \cos n\pi x dx \\ du = dx & v = \frac{1}{n\pi} \sin n\pi x \end{array} \right| = \\
 &= \frac{1}{n\pi} \sin n\pi x \Big|_{-1}^0 + x \cdot \frac{1}{n\pi} \sin n\pi x \Big|_0^1 - \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \sin n\pi x dx = \\
 &= -\frac{1}{n\pi} \left(-\frac{1}{n\pi} \cos n\pi x \right) \Big|_0^1 = \frac{(-1)^n - 1}{(n\pi)^2},
 \end{aligned}$$

тобто $a_{2k} = 0$, $a_{2k-1} = \frac{-2}{\pi^2 (2k-1)^2}$,

$$\begin{aligned}
 b_n &= \int_{-1}^0 \sin n\pi x dx + \int_0^1 x \sin n\pi x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & dv = \sin n\pi x \\ du = dx & v = -\frac{1}{n\pi} \cos n\pi x \end{array} \right| = \\
 &= -\frac{1}{n\pi} \cos n\pi x \Big|_{-1}^0 - x \cdot \frac{1}{n\pi} \cos n\pi x \Big|_0^1 + \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \cos n\pi x dx = \\
 &= -\frac{1 - (-1)^n}{n\pi} - \frac{(-1)^n}{n\pi} + \frac{\sin n\pi x}{(n\pi)^2} \Big|_0^1 = -\frac{1}{n\pi}.
 \end{aligned}$$

Отже, шуканий ряд Фур'є

$$S(x) = \frac{3}{4} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2 \cos(2n-1)\pi x}{\pi (2n-1)^2} + \frac{1}{n} \sin n\pi x \right). \quad (8)$$

До речі, задана функція неперервна на всьому відрізьку $[-1;1]$, за винятком точки $x=0$, в якій вона має розрив першого роду, і також $f(-1+0) = f(1-0) = 1$, тому для всіх $x \in [-1;1]$, $x \neq 0$, виконується $S(x) = f(x)$, а

$$S(0) = \frac{f(-0) + f(+0)}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Поклавши в (8) $x=0$, отримуємо $\frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2},$

звідки $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{4}.$ ◀

28. Розкласти функцію $f(x) = x$, задану на відрізку $[0; \pi]$, в ряд Фур'є:

а) за косинусами; б) за синусами.

► а) Продовжуючи парно функцію $f(x)$ на відрізок $[-\pi, 0]$, одержуємо $f(x) = |x|$, $x \in [-\pi; \pi]$. Продовжуючи її далі, вже періодично, обчислюємо коефіцієнти a_0, a_n :

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & dv = \cos nx \\ du = dx & v = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \right| = \frac{2}{\pi} \frac{x}{n} \sin nx \Big|_0^{\pi} -$$

$$- \frac{2}{\pi} \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin nx dx = \frac{2}{\pi n^2} (\cos n\pi - 1) = \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1), n=1, 2, \dots,$$

тобто $a_{2k} = 0$, $a_{2k-1} = \frac{-4}{\pi(2k-1)^2}.$

Розклад в ряд Фур'є за косинусами має вигляд

$$S_1(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}. \quad \blacktriangleleft$$

► б) Продовжимо непарно функцію $f(x)$ на відрізок $[-\pi, 0]$, одержуємо $f(x) = x$, $x \in [-\pi; \pi]$. Обчислюємо коефіцієнти

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = \left| \begin{array}{l} u = x \quad dv = \sin nx \\ du = dx \quad v = -\frac{1}{n} \cos nx \end{array} \right| = -\frac{2}{\pi} \frac{x}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx dx = -\frac{2}{n} (-1)^n + \frac{2}{\pi n^2} \sin nx \Big|_0^{\pi} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

Розклад в ряд Фур'є за синусами має вигляд

$$S_2(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin nx}{n}$$

Зауважимо, що в даному випадку розклад за косинусами зручніший для обчислень, ніж розклад за синусами, оскільки члени ряду розкладу за косинусами спадають швидше. Крім того, функція $S_1(x)$ неперервна на всій числовій осі, а $S_2(x)$ має розриви першого роду в точках $x_k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Тому $f(x) = S_1(x)$ при усіх $x \in [0; \pi]$, а $f(x) = S_2(x)$ при $x \in [0; \pi)$. ◀

Завдання для самостійного розв'язання

27. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = \pi - x$, задану на відрізку $[0; 2\pi]$.

28. Розкласти функцію $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1, \\ 2-x, & 1 < x < 2 \end{cases}$ в ряд Фур'є:

а) за косинусами; б) за синусами.

Відповіді до завдань для самостійного розв'язування

1. а) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{3}{10} + \frac{5}{17} + \dots$; $a_{n+1} = \frac{2n-1}{n^2+2n+2}$;

б) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \dots$; $a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{2^{n+1}}$.

2. а) $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$; б) $a_n = (-1)^{n-1}$. 3. $\frac{23}{45}$. 4. Ні.

6. а) збігається; б) розбігається; в) збігається; г) збігається.

7. а) розбігається; б) розбігається; в) збігається; г) збігається.

8. Розбігається.

9. а) збігається; б) розбігається; в) збігається; г) збігається.

10. а) розбігається; б) розбігається.

11. а) збігається; б) розбігається; в) збігається;

г) збігається; д) збігається.

13. а) збігається абсолютно; б) збігається умовною;

в) розбігається.

14. а) 0,06; б) 0,02; в) 0,69.

15. а) $(1; +\infty)$; б) $(-\infty; +\infty)$;

в) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; г) $\left(-\infty; \frac{14}{3}\right) \cup \left[\frac{16}{3}; +\infty\right)$.

17. а) $\frac{x}{(x-1)^2} (|x| > 1)$; б) $\ln 2$.

18. а) $(-\infty; +\infty)$; б) $(2; 8]$; в) $[1; 5)$.

19. а) $\frac{2}{(1-x)^3} (|x| < 1)$; б) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$. 20. $-\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2^n}$, $-4 < x < 0$.

21. а) $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m 2^{2m+1} x^{2m}}{(2m+1)!}$, $x \in R$;

б) $2 + \frac{2x}{2^3 \cdot 3 \cdot 1!} - \frac{2x^2}{2^5 \cdot 3^2 \cdot 2!} + \frac{2 \cdot 5x^3}{2^8 \cdot 3^3 \cdot 3!} + \dots$
 $\dots + \frac{(-1)^{n-1} \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-4)x^n}{2^{3n-1} \cdot 3^n \cdot n!} + \dots$ $x \in R$;

в) $x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(n-1)n}$, $|x| \leq 1$;

г) $\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} ((-1)^n + 3 \cdot 3^n) x^n$ $f(x) = \frac{2}{(1+x)(1-3x)}$.

22. 11. 23. а) 0,5878; б) 8,0414. 24. 0,2800.

25. $y(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x^3 + \frac{11}{24}x^4$.

26. $y(x) = x + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!!} x^{2m+1}$, $x \in R$. 27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \sin nx$.

28. а) $\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \pi(2n+1)x}{(2n+1)^2}$; б) $\frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin \frac{\pi(2n+1)x}{2}$.

10 Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли. Елементи теорії поля

§ 1. Подвійний інтеграл і його обчислення

1.1 Прямокутна система координат

Розглянемо обмежену функцію $z = f(x, y)$, яка визначена в деякій замкнутій області D площини xOy . Виконаємо наступні дії.

1. Розіб'ємо область D на n (скінченна кількість) елементарних ділянок $D_1, D_2, \dots, D_n$, які не мають спільних внутрішніх точок. Позначимо площі цих ділянок $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$, а їх діаметри відповідно $d_1, d_2, \dots, d_n$. Нехай d найбільший із діаметрів.

2. Виберемо в кожній з утворених ділянок D_i довільну точку $M_i(x_i, y_i)$ і обчислимо значення функції в ній $f(x_i, y_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

3. Складемо суму виду $\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i$. Така сума називається інтегральною сумою для функції $f(x, y)$ по області D .

Якщо існує границя інтегральної суми при $d \rightarrow 0$, яка не залежить від способу розбиття області D на ділянки $D_1, D_2, \dots, D_n$ і від вибору точок $M_i(x_i, y_i)$, то вона називається подвійним інтегралом від функції $f(x, y)$ по області D і позначається так: $\iint_D f(x, y) ds$, або $\iint_D f(x, y) dx dy$, тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Така границя існує, якщо функція $z = f(x, y)$ неперервна в замкнутій області D (теорема про існування подвійного інтеграла).

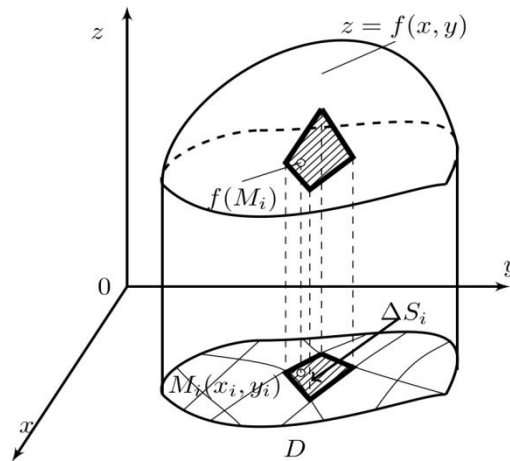


Рисунок 1.1

Геометричним змістом подвійного інтеграла у випадку $f(x, y) \geq 0$ в області D є об'єм циліндричного тіла з основою D і твірною, паралельною осі Oz , яке обмежене зверху поверхнею $z = f(x, y)$. В частинному випадку, коли $f(x, y) = 1$, подвійний інтеграл дорівнює площі області D , тобто

$$S_D = \iint_D dx dy.$$

Основні властивості подвійного інтеграла:

1. Якщо область D поділена на декілька частин $D_1, D_2, \dots, D_k$ без спільних внутрішніх точок, то
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^k \iint_{D_i} f(x, y) dx dy.$$
2. Якщо функція $z = f(x, y)$ неперервна в замкнутій області D , то у цій області знайдеться така точка (x_0, y_0) , що
$$\iint_D f(x, y) dx dy = f(x_0, y_0) S_D,$$

s_D – площа області D , при цьому $f(x_0, y_0) = \frac{1}{s_D} \iint_D f(x, y) dx dy$ називають середнім значенням функції $f(x, y)$ в області D .

Область D , яка визначається нерівностями $a \leq x \leq b$, $y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$, де $y_1(x), y_2(x)$ – однозначні неперервні функції на відрізку $[a, b]$, називається правильною у напрямку осі Oy . Аналогічно визначається область правильна у напрямку осі Ox . У випадку правильної області у напрямку осі Oy , будь-яка пряма, що проходить через внутрішню точку області, паралельно до осі Oy перетинає її межу лише у двох точках (рис. 1.2).

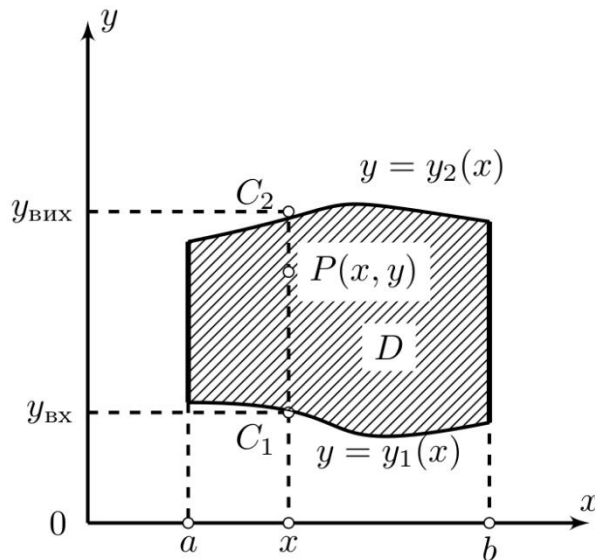


Рисунок 1.2

Якщо область правильна у напрямку осі Oy , то подвійний інтеграл по такій області обчислюється за формулою

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy. \quad (1.1)$$

Інтеграл, який розміщено справа називають повторним інтегралом.

Його обчислення потрібно розпочинати із обчислення внутрішнього інтеграла $(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy)$, вважаючи y змінною величиною, а x постійною.

Після такого інтегрування отримаємо деяку функцію від x , яку потім інтегруємо на відрізку $[a,b]$. Результатом цього інтегрування буде деяке число.

Якщо область правильна у напрямку осі Ox і задана нерівностями $c \leq y \leq d$, $x_1(y) \leq x \leq x_2(y)$, де $x_1(y), x_2(y)$ – однозначні неперервні функції на відрізку $[c,d]$, то подвійний інтеграл по такій області обчислюється за формулою

$$\iint_D f(x,y)dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx. \quad (1.2)$$

Якщо область є правильною в обох напрямках, то можна застосувати обидві формули. Як правило, використовують ту з них, яка призводить до простішого інтегрування. Якщо ж область не є правильною відносно жодної осі, то її розбивають на скінченну кількість областей $D_1, D_2, \dots, D_k$ правильних відносно осей і обчислюють інтеграл, користуючись першою властивістю.

Приклади розв'язання задач

1. Звести подвійний інтеграл $\iint_D f(x,y)dx dy$ до повторних двома способами, якщо область інтегрування D обмежена лініями $x = 2y$, $y = 2x$, $x = 1$.

► Побудуємо вказану область (рис 1.3)

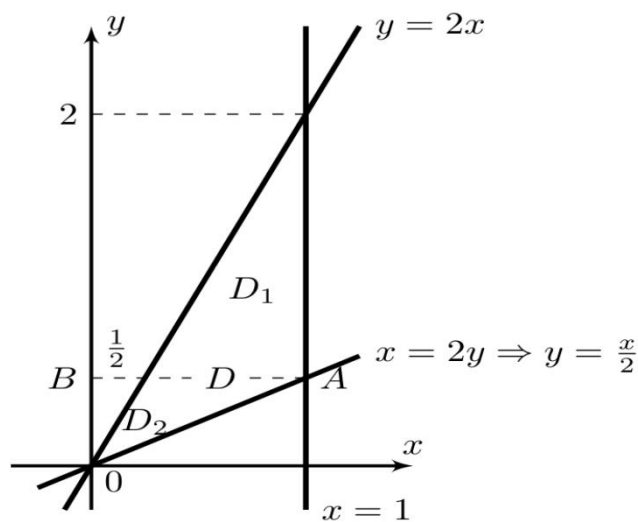


Рисунок 1.3

Перший спосіб. З рисунка видно, що вказана область D є правильною в напрямку осі Oy , тому

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_{\frac{x}{2}}^{2x} f(x, y) dy.$$

Другий спосіб. Ця ж область не є правильною у напрямку осі Ox , але її можна розділити по лінії BA на дві правильні області D_1 та D_2 . Враховуючи властивість 1 і те, що

$B(0; \frac{1}{2})$, $A(1; \frac{1}{2})$, отримаємо

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_{\frac{y}{2}}^{2y} f(x, y) dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^1 f(x, y) dx. \blacktriangleleft$$

2. Змінити порядок інтегрування у подвійному інтегралі

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 dy \int_{-1-\sqrt{1-y^2}}^{-y} f(x, y) dx.$$

► Із меж інтегрування у повторному інтегралі випливає, що область інтегрування D відповідного подвійного інтеграла обмежена прямими $y=0$, $y=1$, $x=-y$ та лінією $x=-1-\sqrt{1-y^2}$. Лінія $x=-1-\sqrt{1-y^2}$ є дугою кола $(x+1)^2 + y^2 = 1$ з центром в точці $C(-1;0)$ і радіусом, що дорівнює 1 (рис. 1.4).

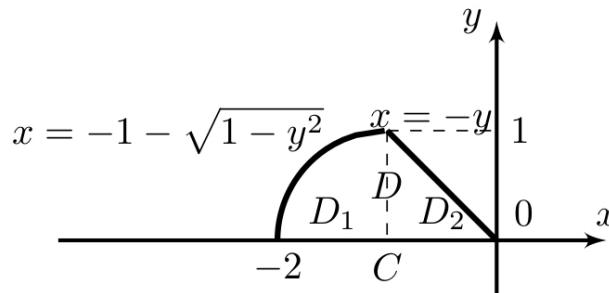


Рисунок 1.4

Область інтегрування D така, що функція $y_1(x)$ на відрізку $[-2;0]$ задана двома аналітичними виразами $x=-y$ і $x=-1-\sqrt{1-y^2}$, утворюючи при цьому (за допомогою прямої

$x = -1$) дві правильні області D_1 і D_2 у напрямі осі Ox . Застосовуючи до кожної з них формулу обчислення подвійного інтеграла, отримаємо

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{-2}^{-1} dx \int_0^{\sqrt{1-(x+1)^2}} f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_0^{-x} f(x, y) dy. \blacktriangleleft$$

3. Розставити границі інтегрування двома способами й обчислити подвійний інтеграл $\iint_D \cos x dx dy$, якщо область інтегрування обмежена лініями $y = x$; $y = 2x$; $x = \pi$.

► Область інтегрування зображена на рис. 1.5.

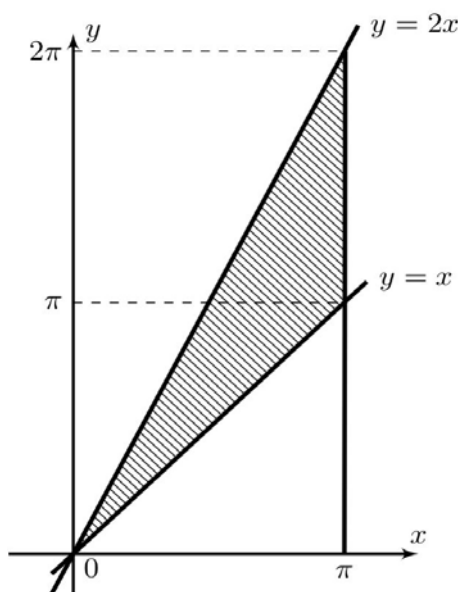


Рисунок 1.5

Для обчислення заданого інтеграла скористаємось

спочатку формулою (1.1)

$$\iint_D \cos x \, dx \, dy = \int_0^\pi dx \int_x^{2x} \cos x \, dy = \int_0^\pi \cos x \cdot (y) \Big|_x^{2x} dx = \int_0^\pi x \cdot \cos x \, dx.$$

Останній інтеграл інтегруємо за частинами ($u = x$;
 $dv = \cos x \, dx$; $du = dx$; $v = \sin x$). Тоді

$$\iint_D \cos x \, dx \, dy = (x \cdot \sin x) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x \, dx = (\cos x) \Big|_0^\pi = -1 - 1 = -2.$$

Якщо для обчислення даного інтеграла скористатися
 формулою (1.2), то $x = \frac{y}{2}$ і $x = y$ при $0 \leq y \leq \pi$; $x = \frac{y}{2}$ і $x = \pi$
 при $\pi \leq y \leq 2\pi$.

Отже, область D треба розбити на дві області, після чого
 одержимо

$$\begin{aligned} \iint_D \cos x \, dx \, dy &= \int_0^\pi dy \int_{\frac{y}{2}}^y \cos x \, dx + \int_\pi^{2\pi} dy \int_{\frac{y}{2}}^\pi \cos x \, dx = \int_0^\pi (\sin x) \Big|_{\frac{y}{2}}^y dy + \int_\pi^{2\pi} (\sin x) \Big|_{\frac{y}{2}}^\pi dy = \\ &= \int_0^\pi \left(\sin y - \sin \frac{y}{2} \right) dy + \int_\pi^{2\pi} \left(-\sin \frac{y}{2} \right) dy = \left(-\cos y + 2 \cos \frac{y}{2} \right) \Big|_0^\pi + 2 \left(\cos \frac{y}{2} \right) \Big|_\pi^{2\pi} = \\ &= 1 + 1 - 2 + 2 \cdot (-1) = -2. \end{aligned}$$

Тобто ми одержали такий же результат, що й раніше. ◀

4. Змінити порядок інтегрування й обчислити подвійний
 інтеграл

$$I = \int_0^1 dy \int_0^{y^3} x dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} x dx.$$

► Побудуємо область інтегрування D , яка обмежена кривою $x = y^3$, прямою $x = 2 - y$ та віссю Oy (рис. 1.6).

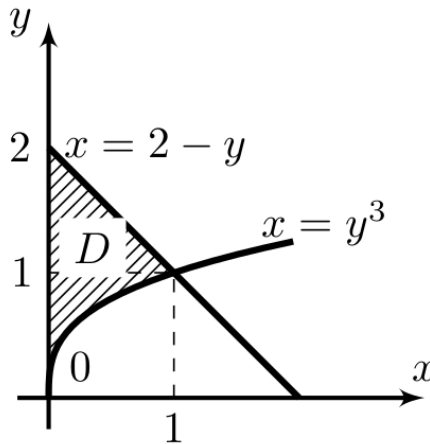


Рисунок 1.6

Спроектуємо область D на вісь Ox у відрізок $[0;1]$, на якому y змінюється від $\sqrt[3]{x}$ до $2-x$.

Таким чином:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \int_{\sqrt[3]{x}}^{2-x} x dy = \int_0^1 x \cdot (y) \Big|_{\sqrt[3]{x}}^{2-x} dx = \int_0^1 \left(2x - x^2 - x^{\frac{4}{3}} \right) dx = \\ &= \left(2 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{3}{7} \sqrt[3]{x^7} \right) \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{3}{7} = \frac{5}{21}. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

5. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D (\sin x - 2y) dx dy$,

якщо область інтегрування D обмежена лініями

$$y = x^2, \quad y = 2 + x^2, \quad x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2}.$$

► Область інтегрування D обмежена параболою

$$y = x^2, \quad y = 2 + x^2, \quad \text{і прямими } x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} \quad (\text{рис. 1.7}).$$

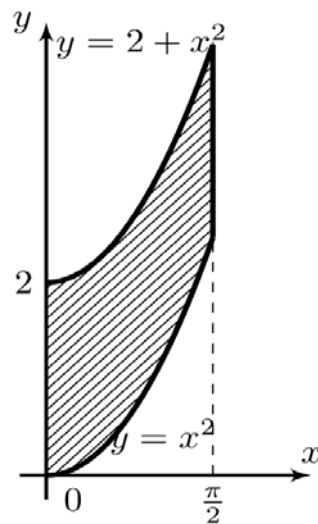


Рисунок 1.7

Застосовуючи формулу обчислення подвійного інтеграла, отримаємо

$$\begin{aligned} \iint_D (\sin x - 2y) dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y \sin x - y^2) \Big|_{x^2}^{2+x^2} dx = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((2+x^2) \sin x - x^2 \sin x - (2+x^2)^2 + x^4) dx = \end{aligned}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin x - 4x^2 - 4) dx = 2(1 - \pi) - \frac{\pi^3}{6}. \blacktriangleleft$$

Завдання для самостійного розв'язання

1. Змінити порядок інтегрування $\int_0^1 dx \int_{x^2}^1 f(x, y) dy$.

2. Обчислити $\iint_D y \sin x dx dy$, якщо D – прямокутник

$$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

3. Обчислити подвійний інтеграл по області D , обмеженій вказаними лініями

$$\iint_D xy dx dy, D: y = x - 4, y^2 = 2x.$$

4. Обчислити подвійний інтеграл по області D , обмеженій вказаними лініями

$$\iint_D x^2 y dx dy, D: y = 0, y = \sqrt{2x - x^2}.$$

5. Обчислити подвійний інтеграл по області D , обмеженій вказаними лініями

$$\iint_D \sin(x + y) dx dy, D: y = 0, y = x, x + y = \frac{\pi}{2}.$$

1.2 Заміна змінних у подвійному інтегралі. Обчислення подвійного інтеграла в полярній системі координат

Одним із методів спрощення обчислення подвійного інтеграла є метод заміни змінних у подвійному інтегралі. Нехай у деякій області D для функції $z = f(x, y)$ існує подвійний інтеграл

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Припустимо далі, що подвійний інтеграл перетворюється від декартових координат $(x; y) \in D$, $D \subset \mathbb{R}^2$ до криволінійних координат $(u; v)$ в деякій області D^* пов'язаних з декартовими координатами співвідношеннями

$$x = x(u, v);$$

$$y = y(u, v).$$

Якщо таке перетворення переводить замкнену обмежену область D в замкнену обмежену область D^* і є взаємно однозначним, а функції $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ мають в області D^* неперервні частинні похідні першого порядку і відмінний від нуля визначник

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad (1.3)$$

функція $z = f(x, y)$ неперервна в області D , то справедлива така формула заміни змінних

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv. \quad (1.4)$$

Функціональний визначник (1.3) називається визначником Остроградського-Якобі. Таким чином, виконуючи заміну змінних в

інтегралі за формулами (14), ми маємо елемент площі в $dx dy$ координатах x, y замінити елементом площі $|J(u, v)| du dv$ в координатах u, v і стару область інтегрування D замінити відповідною їй областю D^* .

У випадку полярної системи координат $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, & \rho \geq 0, \\ y = \rho \sin \varphi, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$

Тоді елемент площі в полярних координатах має вигляд $dS = \rho d\rho d\varphi$.

Подвійний інтеграл в полярній системі координат обчислюється за формулою

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho, \quad (1.5)$$

де α і β – відповідно найменше й найбільше значення змінної φ в області D ; $\rho = \rho_1(\varphi)$ і $\rho = \rho_2(\varphi)$ – рівняння межі D .

Приклади розв'язання задач

6. Перейти до полярних координат і обчислити подвійний інтеграл $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}$, де область D обмежена колом $x^2 + y^2 = 1$.

► Покладемо $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ і застосуємо формулу (1.5). Оскільки $x^2 + y^2 = \rho^2$, то

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy = \iint_D \sqrt{1-\rho^2} \rho d\rho d\varphi.$$

Для рівняння кола $0 \leq \varphi < 2\pi$; $0 \leq \rho \leq 1$. Тоді подвійний інтеграл буде мати вигляд

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} \, dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2} \, \rho \, d\rho.$$

Для інтеграла $I = \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2} \, \rho \, d\rho$ введемо заміну $1-\rho^2 = t$,

$$-2\rho \, d\rho = dt, \quad \rho \, d\rho = -\frac{dt}{2}, \quad 1 \leq t \leq 0.$$

$$\text{Тоді } I = -\frac{1}{2} \int_1^0 \sqrt{t} \, dt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{t^3} \Big|_1^0 = \frac{1}{3}.$$

Шуканий інтеграл дорівнює

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} d\varphi = \frac{1}{3} d\varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{3} \cdot 2\pi = \frac{2\pi}{3}. \blacktriangleleft$$

Завдання для самостійного розв'язання

6. Обчислити подвійний інтеграл по області D , перейшовши до полярних координат:

а) $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4;$

б) $\iint_D xy^2 dx dy, \quad D: x^2 + (y-1)^2 = 1, \quad x^2 + y^2 \leq 4y;$

в) $\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq 9;$

г) $\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq ax;$

д) $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq 2ax.$

1.3 Застосування подвійних інтегралів

Об'єм тіла. Для циліндричного тіла з твірними паралельними осі Oz , яке обмежене знизу областю D площини xOy , а зверху – поверхнею $z = f(x, y) > 0$, об'єм обчислюється за формулою

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy, \quad (1.6)$$

де $f(x, y)$ – функція неперервна в області D .

Площа поверхні. Якщо поверхня $z = f(x, y)$ проєктується на площину xOy у вигляді замкненої області D , а функція $z = f(x, y)$ неперервна в області D і має там неперервні похідні, то площа поверхні $z = f(x, y)$ обчислюється за формулою

$$P = \iint_D \sqrt{1 + f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y)} dx dy. \quad (1.7)$$

Площа плоскої фігури. Якщо $f(x, y) = 1$, а $(x, y) \in D$, то циліндричне тіло, об'єм якого обчислюється за формулою (1.4), перетворюється в прямий циліндр з висотою, яка дорівнює 1. Об'єм такого циліндра дорівнює площі його основи. Отже, площа області D буде обчислюватися за формулою

$$S = \iint_D dx dy. \quad (1.8)$$

У полярній системі координат

$$S = \iint_D \rho d\rho d\varphi. \quad (1.9)$$

Фізичним змістом подвійного інтеграла у випадку, коли D є плоскою пластинкою з густиною $f(x, y)$, розміщеною в площині xOy є **маса** такої пластинки, тобто

$$m = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (1.10)$$

При цьому *статичні моменти пластинки відносно осей Ox , Oy* знаходять за формулами

$$M_x = \iint_D y f(x, y) dx dy, \quad M_y = \iint_D x f(x, y) dx dy, \quad (1.11)$$

координати центра мас пластинки

$$x_c = \frac{M_y}{m}, \quad y_c = \frac{M_x}{m}, \quad (1.12)$$

а моменти інерції пластинки відносно осей координат і початку координат

$$I_x = \iint_D y^2 f(x, y) dx dy, \quad I_y = \iint_D x^2 f(x, y) dx dy, \quad I_0 = I_x + I_y. \quad (1.13)$$

Приклади розв'язання задач

7. Обчислити площу області D , обмежену лініями $y = x^2$ і $x + y = 2$.

► Область являє собою фігуру, обмежену знизу параболою $y = x^2$, а зверху прямою $y = 2 - x$ (рис. 1.9).

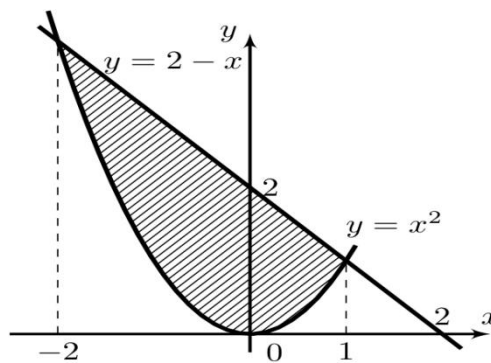


Рисунок 1.9

Розв'язуючи сумісно рівняння параболи й прямої, знаходимо абсциси точок їх перетину

$$\begin{cases} y = x^2; \\ y = 2 - x, \end{cases} \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0; \quad x_1 = -2; \quad x_2 = 1.$$

Згідно (1.8) маємо

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^1 dx \int_{x^2}^{2-x} dy = \int_{-2}^1 y \Big|_{x^2}^{2-x} dx = \int_{-2}^1 (2 - x - x^2) dx = \left(2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^1 = \\ &= 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \left(-4 - 2 + \frac{8}{3} \right) = 4,5 \text{ (кв.од.)}. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

8. Обчислити площу області D , обмежену лініями $y^2 + 2y - 3x + 1 = 0$ і $3x - 3y - 7 = 0$.

► Область D обмежена прямою $3x - 3y - 7 = 0$ і параболою $y^2 + 2y - 3x + 1 = 0$, або $\frac{(y+1)^2}{3} = x$ з вершиною в точці $M(0; -1)$.

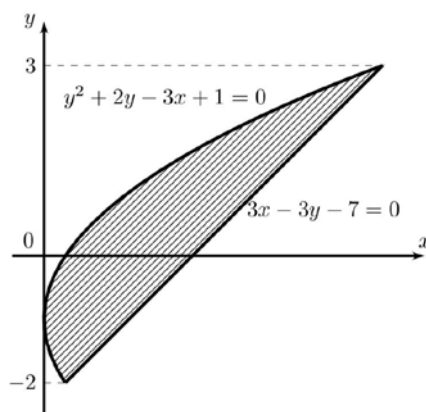


Рисунок 1.10

Розв'язуючи систему рівнянь $\begin{cases} \frac{(y+1)^2}{3} = x, \\ 3x - 3y - 7 = 0 \end{cases}$, отримаємо

дві точки перетину: $A\left(\frac{16}{3}; 3\right)$ і $B\left(\frac{1}{3}; -2\right)$, а застосовуючи

формулу для обчислення площі фігури і те, що $x_1 = \frac{(y+1)^2}{3}$, а

$x_2 = \frac{7+3y}{3}$, отримаємо

$$\begin{aligned} S_D &= \int_{-2}^3 dy \int_{\frac{(y+1)^2}{3}}^{\frac{7+3y}{3}} dx = \int_{-2}^3 \left(\frac{7+3y}{3} - \frac{(y+1)^2}{3} \right) dy = \\ &= \frac{1}{3} \left(7y + 3 \frac{y^2}{2} - \frac{(y+1)^3}{3} \right) \Big|_{-2}^3 = \frac{125}{18} \text{ (кв.од.)}. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

9. Обчислити площу фігури, обмежену лінією $(x^2 + y^2)^2 = 2ax^3$, ($a > 0$), перейшовши до полярної системи координат.

► Покладемо $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ і запишемо рівняння даної кривої у вигляді $\rho^4 = 2a \cdot \rho^3 \cos^3 \varphi$. Отже, $\rho = 2a \cos^3 \varphi$.

Побудуємо отриману криву на площині xOy (рис. 1.11).

Оскільки крива $\rho = 2a \cos^3 \varphi$ симетрична відносно осі Ox і розташована в I та IV квадрантах, то площа області, яку утворює крива, можна знаходити як $2 \cdot S_1$, де S_1 – площа

відповідної області D_1 в межах $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Отже, маємо

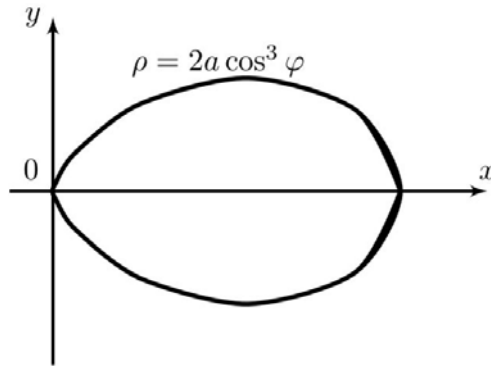


Рисунок 1.11

$$\begin{aligned}
 S &= 2 \cdot \iint_D \rho \, d\rho \, d\varphi = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2a \cos^3 \varphi} \rho \, d\rho = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^{2a \cos^3 \varphi} d\varphi = 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 \varphi \, d\varphi = \\
 &= 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right)^3 d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 3\cos 2\varphi + 3\cos^2 2\varphi + \cos^3 2\varphi) d\varphi = \\
 &= \frac{a^2}{2} \left(\varphi + \frac{3}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2\varphi \, d\varphi + \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 2\varphi) \cos 2\varphi \, d\varphi.
 \end{aligned}$$

Обчислимо останній інтеграл окремо

$$\begin{aligned}
 \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 2\varphi) \cos 2\varphi \, d\varphi &= \left| \begin{array}{l} d \sin 2\varphi = 2 \cos 2\varphi \, d\varphi, \\ \cos 2\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2} d \sin 2\varphi \end{array} \right| = \\
 &= a^2 \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 2\varphi) d \sin 2\varphi = a^2 \left(\sin 2\varphi \Big|_0^{\pi/2} - \frac{\sin^3 2\varphi}{3} \Big|_0^{\pi/2} \right) = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Тоді } S &= \frac{\pi a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 4\varphi) d\varphi = \frac{\pi a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} \left(\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{4} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{\pi a^2}{4} + \frac{3\pi a^2}{8} = \frac{5\pi a^2}{8} \text{ (кв.од.)}. \blacktriangleleft\end{aligned}$$

10. Обчислити об'єм тіла, обмеженого циліндричною поверхнею $z = 2 - x^2$ і площинами $y = 0$, $y = 2$, $z = 0$.

► Дане тіло і його проєкція зображені на рис. 1.12.

Так як функція $z = 2 - x^2$ в області $D = \{-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}, 0 \leq y \leq 2\}$ знакододатна, то згідно з геометричним змістом подвійного інтеграла об'єм тіла складе

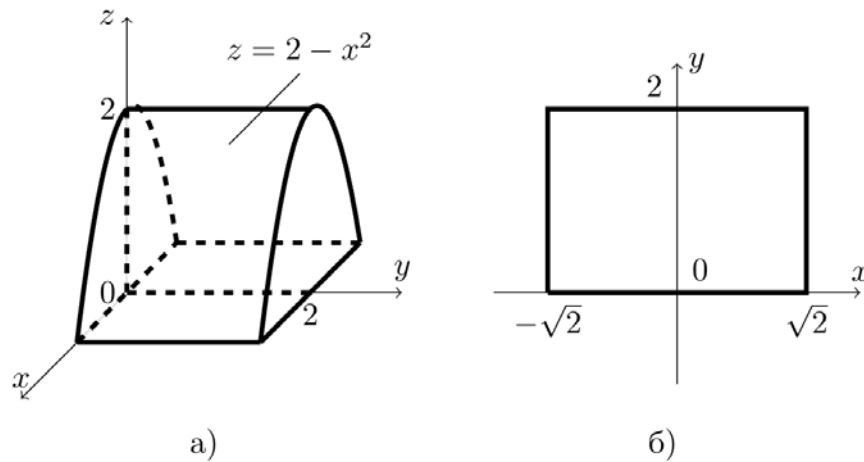


Рисунок 1.12

$$V = \iint_D (2 - x^2) dx dy = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (2 - x^2) dx \int_0^2 dy = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (2 - x^2) dx \cdot y \Big|_0^2 =$$

$$= 2 \left(2x - \frac{x^3}{3} \right) \bigg|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \frac{16\sqrt{2}}{3} \text{ (куб.од.)} \blacktriangleleft$$

11. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z = x^2 + y^2 + 1$; $x + y - 3 = 0$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$.

► Задане тіло обмежено зверху частиною параболоїда обертання $z = x^2 + y^2 + 1$, а знизу – частиною площини xOy , вміщеною між прямою $y = 3 - x$ та осями координат x і y (рис. 1.13).

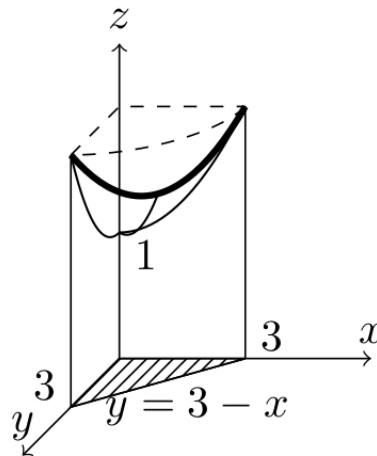


Рисунок 1.13

За формулою (1.6) одержимо $V = \iint_D (x^2 + y^2 + 1) dx dy$.

Розставляючи межі інтегрування в подвійному інтегралі, отримаємо

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^3 dx \int_0^{3-x} (x^2 + y^2 + 1) dy = \int_0^3 \left(x^2 \cdot y + \frac{y^3}{3} + y \right) \bigg|_0^{3-x} dx = \\
 &= \int_0^3 \left(x^2 \cdot (3-x) + \frac{(3-x)^3}{3} + 3-x \right) dx = \int_0^3 \left(3x^2 - x^3 + 9 - 9x + 3x^2 - \frac{x^3}{3} + 3 - x \right) dx = \\
 &= \int_0^3 \left(6x^2 - \frac{4}{3}x^3 - 10x + 12 \right) dx = \left(6 \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{4}{3} \cdot \frac{x^4}{4} - 10 \cdot \frac{x^2}{2} + 12x \right) \bigg|_0^3 = \\
 &= 54 - 27 - 45 + 36 = 18 \text{ (куб.од.)}. \blacktriangleleft
 \end{aligned}$$

12. Обчислити площу бічної поверхні, обмеженої конусом $z^2 = x^2 + y^2$ та площиною $z = \sqrt{2}$.

► Тіло обертання, площу бічної поверхні якого треба знайти, зображено на рис. 1.14.

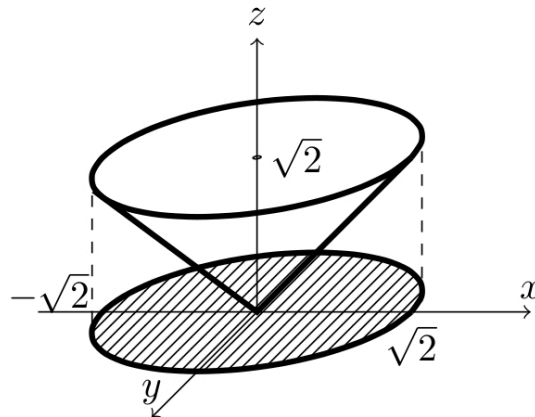


Рисунок 1.14

Знайдемо частинні похідні функції $z = \sqrt{x^2 + y^2}$:

$$f'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad f'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Підставивши f'_x і f'_y у формулу (1.7), одержуємо

$$P = \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dx dy = \iint_D \sqrt{\frac{2x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2}} dx dy = \sqrt{2} \iint_D dx dy.$$

В останньому інтегралі перейдемо до полярної системи координат $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, тоді

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{2} \iint_D \rho d\rho = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \rho d\rho = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left. \frac{\rho^2}{2} \right|_0^{\sqrt{2}} d\varphi = \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\sqrt{2}\pi \text{ (кв.од.)}. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

13. Знайти масу однорідної пластини, обмеженої лініями $y = \cos x$; $y = \sin x$; $x = 0$.

► Область D , яку займає пластина в площині xOy , зображена на рис. 1.15.

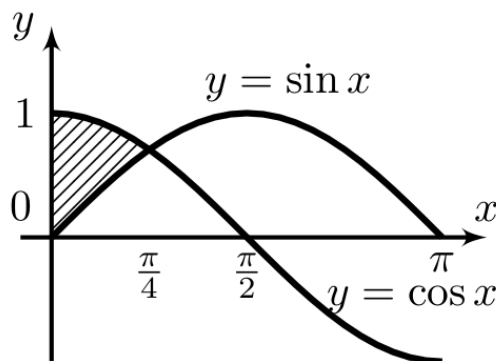


Рисунок 1.15

Точка перетинання кривих $y = \cos x$ і $y = \sin x$ має абсцису $x = \frac{\pi}{4}$. За формулою (1.10) для $\gamma = 1$ маємо

$$m = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int_{\sin x}^{\cos x} dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} y \bigg|_{\sin x}^{\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx = (\sin x + \cos x) \bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - 1 \approx 0,4 \text{ (од.маси).} \blacktriangleleft$$

14. Пластина обмежена параболою $y^2 = 2x$ та прямою, яка проходить через фокус парабoli перпендикулярно до її осі. Знайти масу пластини, якщо в кожній її точці густина обернено пропорційна відстані точки від директриси парабoli.

► За умовами задачі густину можна виразити так $\gamma = \frac{1}{x + \frac{1}{2}}$.

Дана пластина симетрична відносно осі Ox (рис. 1.16).

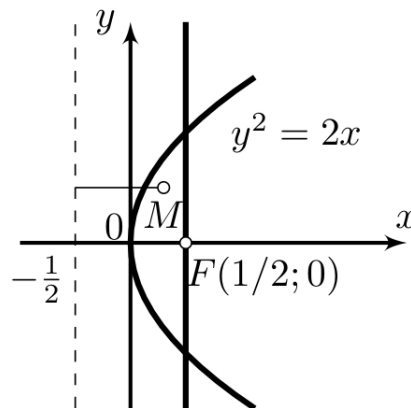


Рисунок 1.16

Знайдемо масу половини пластини

$$\frac{1}{2}m = \iint_D \frac{dx dy}{x + \frac{1}{2}} = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{\sqrt{2x}} \frac{dy}{x + \frac{1}{2}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{y}{x + \frac{1}{2}} \bigg|_0^{\sqrt{2x}} dx = \sqrt{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{x}}{x + \frac{1}{2}} dx.$$

Введемо заміну $x = t^2$, $dx = 2t dt$, $0 \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Тоді

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m &= 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t^2 dt}{t^2 + \frac{1}{2}} = 2\sqrt{2} \left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dt - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dt}{t^2 + \frac{1}{2}} \right) = 2\sqrt{2} \times \\ &\times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \arctg \sqrt{2}t \bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \right) = \left(1 - \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

Отже, $m = 4 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right)$ (од.маси). ◀

15. Знайти координати центра мас однорідної пластини, обмеженої кривими $y^2 = x$, $x^2 = y$.

► Параболи перетинаються у точках (0;0) і (1;1) (рис. 1.17).

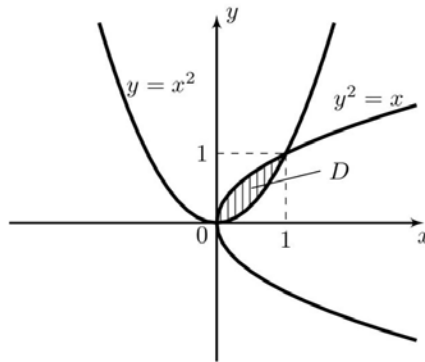


Рисунок 1.17

Оскільки пластина однорідна, то $\gamma = 1$, і маса пластини знаходиться за формулою $m = \iint_D dx dy$, тобто

$$m = \iint_D dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left(\frac{2}{3} \sqrt{x^3} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Статичні моменти знаходяться за формулами (1.9)

$$M_x = \iint_D y dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} y dy = \int_0^1 \frac{y^2}{2} \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x - x^4) dx = \frac{3}{20},$$

$$\begin{aligned} M_y = \iint_D x dx dy &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} x dy = \int_0^1 x \cdot (y) \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \left(x^{\frac{3}{2}} - x^3 \right) dx = \\ &= \left(\frac{2}{5} \sqrt{x^5} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{20}. \end{aligned}$$

Отже, за формулою (1.12), координати центра мас дорівнюють $x_c = \frac{9}{20}$; $y_c = \frac{9}{20}$. ◀

16. Знайти моменти інерції відносно координатних осей, полярний і відцентровий моменти інерції однорідної пластини, обмеженої лініями $y = \frac{x^2}{2}$, $y = x$.

► Парабола і пряма перетинаються у точках з абсцисами $x = 0$ і $x = 2$ (рис. 1.18).

Оскільки пластина однорідна, то будемо вважати $\gamma = 1$. За формулами (1.13) маємо:

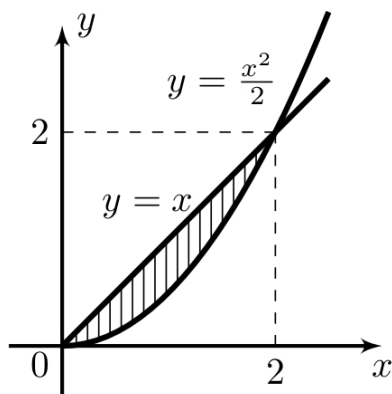


Рисунок 1.18

$$I_x = \iint_D y^2 dx dy = \int_0^2 dx \int_{\frac{x^2}{2}}^x y^2 dy = \int_0^2 \frac{y^3}{3} \Big|_{\frac{x^2}{2}}^x dx = \frac{1}{3} \int_0^2 \left(x^3 - \frac{x^6}{8} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^7}{56} \right) \Big|_0^2 = \frac{16}{3} \cdot \frac{14-8}{56} = \frac{4}{7}.$$

$$I_y = \iint_D x^2 dx dy = \int_0^2 dx \int_{\frac{x^2}{2}}^x x^2 dy = \int_0^2 x^2 \cdot (y) \Big|_{\frac{x^2}{2}}^x dx = \int_0^2 \left(x^3 - \frac{x^4}{2} \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10} \right) \Big|_0^2 = \frac{4}{5}.$$

$$I_{xy} = \iint_D xy dx dy = \int_0^2 dx \int_{\frac{x^2}{2}}^x x \cdot y dy = \int_0^2 x \cdot \left(\frac{y^2}{2} \right) \Big|_{\frac{x^2}{2}}^x dx = \frac{1}{2} \int_0^2 \left(x^3 - \frac{x^5}{4} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{24} \right) \Big|_0^2 = \frac{2}{3}; \quad I_0 = \frac{4}{7} + \frac{4}{5} = \frac{48}{35}. \blacktriangleleft$$

17. Однорідна пластина обмежена лініями $x^2 + y^2 = 1$,

$x \leq 0, y \leq 0$. Знайти координати центра мас пластини, її моменти інерції відносно координатних осей, полярний та відцентровий моменти інерції.

► Оскільки пластина симетрична відносно прямої $y = x$ (рис. 1.19), то її центр мас знаходиться на цій прямій, звідси випливає, що $x_c = y_c$, $M_x = M_y$, $I_x = I_y$.

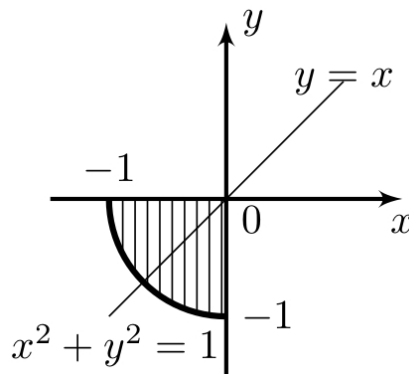


Рисунок 1.19

Якщо пластина однорідна, то будемо вважати $\gamma = 1$.

Маса пластини $m = \frac{\pi}{4}$. Зважаючи на форму і розташування пластини, обчислення будемо здійснювати у полярній системі координат

$$M_x = M_y = \iint_D y dx dy = \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \rho^2 \sin \varphi d\rho = \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sin \varphi \cdot \left(\frac{\rho^3}{3} \right) \bigg|_0^1 d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3}(-\cos \varphi) \Big|_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} = -\frac{1}{3}. \text{ Тоді } x_c = y_c = -\frac{4}{3\pi}.$$

Осьові моменти інерції пластини відносно Ox та Oy дорівнюють

$$\begin{aligned} I_x = I_y &= \iint_D y^2 dx dy = \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \rho^3 \sin^2 \varphi d\rho = \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sin^2 \varphi \cdot \left(\frac{\rho^4}{4} \right) \Big|_0^1 d\varphi = \\ &= \frac{1}{8} \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi = \frac{1}{8} \left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \Big|_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{\pi}{16}. \text{ При цьому } I_0 = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

Відцентровий момент інерції пластини дорівнює

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \iint_D xy dx dy = \frac{1}{2} \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \rho^3 \sin 2\varphi d\rho = \frac{1}{2} \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sin 2\varphi \cdot \left(\frac{\rho^4}{4} \right) \Big|_0^1 d\varphi = \\ &= \frac{1}{8} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos 2\varphi \right) \Big|_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{1}{8}. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

18. Визначити масу, статичні моменти, координати центра мас та моменти інерції для пластинки, яка обмежена лініями $y = x$, $y = x + 4$, $x = 1$, $x = 4$, а її густина $\gamma(x, y)$ розподілу маси речовини дорівнює сумі координат точки.

► З умови задачі випливає, що густина $\gamma(x, y) = x + y$. Згідно фізичного змісту подвійного інтеграла, маса пластинки дорівнює $m = \iint_D f(x, y) dx dy$.

З рис. 1.20 видно, що для обчислення цього інтеграла

доцільно скористатися формулою

$$m = \int_1^4 dx \int_x^{x+4} (x+y) dy = \int_1^4 \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_x^{x+4} dx = \int_1^4 \left(x(x+4-x) + \frac{(x+4)^2}{2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \int_1^4 (8x+8) dx = 84 \text{ (од.маси).}$$

Статичні моменти пластинки відносно осей Ox та Oy знаходимо за відповідними формулами

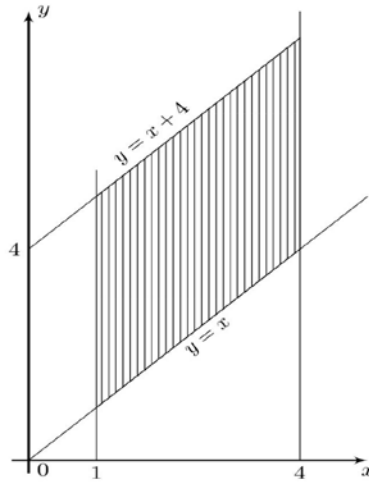


Рисунок 1.20

$$\begin{aligned} M_x &= \iint_D y(x+y) dx dy = \int_1^4 dx \int_x^{x+4} (xy + y^2) dy = \int_1^4 \left(\frac{1}{2} xy^2 + \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_x^{x+4} dx = \\ &= \int_1^4 \left(\frac{x}{2} ((x+4)^2 - x^2) + \frac{1}{3} ((x+4)^3 - x^3) \right) dx = \int_1^4 \left(8x^2 + 24x + \frac{64}{3} \right) dx = 412. \end{aligned}$$

$$M_y = \iint_D x(x+y) dx dy = \int_1^4 x dx \int_x^{x+4} (x+y) dy = \int_1^4 x \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_x^{x+4} dx =$$

$$= \int_1^4 x(8x+8)dx = 228.$$

Координати центра мас пластинки обчислюємо за формулами

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{228}{84} = \frac{18}{7}; \quad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{412}{84} = \frac{103}{21}.$$

Для обчислення моментів інерції пластинки відносно осей Ox та Oy застосуємо відповідні формули і отримаємо

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_D y^2(x+y)dxdy = \int_1^4 dx \int_x^{x+4} (xy^2 + y^3)dy = \\ &= \int_1^4 \left(\frac{1}{3}xy^3 + \frac{1}{4}y^4 \right) \Big|_x^{x+4} dx = \int_1^4 \left(\frac{1}{3}x(x+4)^3 + \frac{1}{4}(x+4)^4 - \frac{x^4}{3} - \frac{1}{4}x^4 \right) dx = \\ &= \int_1^4 \left(8x^3 + 40x^2 + \frac{256}{3}x + 64 \right) dx = \left(2x^4 + \frac{40}{3}x^3 + \frac{128}{3}x^2 + 64x \right) \Big|_1^4 = 2182. \\ I_y &= \iint_D x^2(x+y)dxdy = \int_1^4 dx \int_x^{x+4} (x^3 + yx^2)dy = \\ &= \int_1^4 \left(x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 \right) \Big|_x^{x+4} dx = \int_1^4 \left(\frac{1}{3}x^3(x+4) + \frac{1}{2}(x+4)^2x^2 - x^4 - \frac{1}{2}x^4 \right) dx = \\ &= \int_1^4 \left(-\frac{2}{3}x^4 + \frac{16}{3}x^3 + 8x^2 \right) dx = \left(-\frac{2}{15}x^5 + \frac{4}{3}x^4 + \frac{8}{3}x^3 \right) \Big|_1^4 = 1050. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Завдання для самостійного розв'язання

7. Обчислити площу області D , обмежену лініями:

а) $3x^2 - 25y = 0, \quad 5y^2 = 9;$

б) $x + y - 1 = 0, \quad x + 3y - 1 = 0, \quad x = y, \quad x = 2y;$

в) $\rho = 3 \cos 2\varphi$;

г) $\rho = 4 \sin \varphi, \quad \rho = 2 \sin \varphi$;

д) $(x^2 + y^2)^2 = 2y^3$.

8. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

а) $y = x^2, \quad y = 1, \quad x + y + z = 8, \quad z = 0$;

б) $x^2 + y^2 = a^2, \quad x + y + z = 2a, \quad z = 0$;

в) $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2, \quad x^2 + y^2 = a^2$.

9. Знайти масу прямокутника із сторонами a і b , в кожній точці якого поверхнева густина пропорційна квадрату її відстані від однієї з його вершин.

10. Знайти масу пластинки. Пластинка D задана лініями, що її обмежують, γ – поверхнева густина. $D = \{x = 1, y = 0, y^2 = 4x (y \geq 0), \gamma = 7x^2 + y\}$.

11. Знайти моменти інерції прямокутного трикутника з катетами a і b відносно: 1) вершин трикутника; 2) катета a .

12. Знайти координати центра ваги фігури, обмеженої лініями $y^2 = 4x + 4, \quad y^2 = -2x + 4$ (поверхнева густина $\gamma = 1$).

13. Знайти моменти інерції та координати центра мас пластинки рівнобедреного прямокутного трикутника з гіпотенузою $2a$, якщо в кожній точці його поверхнева густина пропорційна відстані до його гіпотенузи. (Вказівка: розмістіть гіпотенузу на осі абсцис, а вершину прямого кута на осі Oy).

14. Знайти момент інерції відносно осі Oy однорідного

тіла V (густина $\gamma(x, y, z) = 1$), обмеженого параболоїдом $y = 5 - x^2 - z^2$ і площиною $y = 1$.

§ 2. Потрійний інтеграл і його обчислення

2.1 Прямокутна система координат

Нехай $u = f(x, y, z)$ довільна функція визначена і обмежена в замкненій обмеженій області $G \subset \mathbb{R}^3$. Розіб'ємо область G довільним чином сіткою поверхонь на частин $G_1, G_2, G_3, \dots, G_n$, які не мають спільних внутрішніх точок, і об'єми яких дорівнюють $\Delta V_1, \Delta V_2, \Delta V_3, \dots, \Delta V_n$. У кожній частині G_i візьмемо довільну точку $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ і складемо суму, яка називається інтегральною сумою для функції $f(x, y, z)$ по області G ,

$$I_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i.$$

Нехай $d(G_i)$ діаметр i -тої частини.

Означення. Якщо інтегральна сума має скінченну границю при $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} d(G_i) \rightarrow 0$, яка не залежить ні від способу розбиття області на частини, ні від вибору в них точок $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, то ця границя називається потрійним інтегралом від функції $f(x, y, z)$ по області G і позначається одним із таких символів: $\iiint_G f(x, y, z) dv$ або

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz.$$

Таким чином, за означенням

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i,$$

де функція $f(x, y, z)$ називається інтегрованою в області G ; G – область інтегрування; x, y, z – змінні інтегрування; dV – елемент об'єму.

Потрійний інтеграл є безпосереднім узагальненням подвійного інтеграла на тривимірний простір. Теорія потрійного інтеграла аналогічна теорії подвійного інтеграла, тому в більшості випадків ми обмежимося лише формулюваннями тверджень і короткими поясненнями.

Якщо функція $f(x, y, z)$ неперервна в замкненій обмеженій області, то вона в цій області інтегрована (достатня умова інтегрованості функції).

Геометричний зміст потрійного інтеграла. Якщо $f(x, y, z) \equiv 1$, $(x, y, z) \in G$, то потрійний інтеграл дорівнює об'єму тіла

$$V = \iiint_G dx dy dz. \quad (2.1)$$

Механічний зміст потрійного інтеграла. Якщо по тілу розподілено масу з об'ємною густиною $\gamma = \gamma(x, y, z)$, $(x, y, z) \in G$, то маса цього тіла знаходиться за формулою

$$m = \iiint_G \gamma(x, y, z) dx dy dz. \quad (2.2)$$

Оскільки довільну функцію можна тлумачити як густину деякого розподілу маси, то формула (2.2) дає нам *механічний зміст* потрійного інтеграла, якщо $f(x, y, z) > 0$.

Основні властивості потрійного інтеграла

1. Сталій множник можна винести за знак потрійного інтеграла:

$$\iiint_G c f(x, y, z) dV = c \iiint_G f(x, y, z) dV, \quad c = \text{const.}$$

2. Потрійний інтеграл від алгебраїчної суми скінченної кількості інтегрованих в області функцій дорівнює алгебраїчній сумі потрійних інтегралів від цих функцій

$$\begin{aligned} & \iiint_G (f_1(x, y, z) \pm f_2(x, y, z) \pm \dots \pm f_n(x, y, z)) dV = \\ & = \iiint_G f_1(x, y, z) dV \pm \iiint_G f_2(x, y, z) dV \pm \dots \pm \iiint_G f_n(x, y, z) dV. \end{aligned}$$

3. Якщо $f(x, y, z) \leq \varphi(x, y, z)$, $(x, y, z) \in G$ у довільній точці, то

$$\iiint_G f(x, y, z) dV \leq \iiint_G \varphi(x, y, z) dV.$$

4. Якщо область інтегрування функції G є об'єднанням областей $G_1, G_2, G_3, \dots, G_n$, що не мають спільних внутрішніх точок, то

$$\iiint_G f(x, y, z) dV = \iiint_{G_1} f(x, y, z) dV + \iiint_{G_2} f(x, y, z) dV + \dots + \iiint_{G_n} f(x, y, z) dV.$$

5. Якщо функція $f(x, y, z)$ неперервна в замкненій обмеженій області G , яка має об'єм V , а m і M відповідно найменше і найбільше значення функції в даній області, то

$$mV \leq \iiint_G f(x, y, z) dV \leq MV.$$

6. Якщо функція неперервна в замкненій обмеженій області G , яка має об'єм V , то в цій області існує така точка (x_0, y_0, z_0) , що

$$\iiint_G f(x, y, z) dV = f(x_0, y_0, z_0) V.$$

Як і у випадку подвійних інтегралів, обчислення потрійних інтегралів зводять до обчислення повторних, тобто до інтегрування по кожній змінній окремо. Нехай замкнена область обмежена знизу і зверху відповідно поверхнями $z = z_1(x, y)$, $z = z_2(x, y)$, де функції визначені і неперервні в області D , яка є проєкцією області G на площину xOy , причому $z_1(x, y) < z_2(x, y)$, $(x, y) \in D$. З боків область обмежена циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі Oz . Кожна пряма, паралельна осі, перетинає границю області не більше, ніж у двох точках (рис. 2.1). Якщо при цьому область D є правильною, то область G називається *правильною* в напрямі осі Oz . Тоді для будь-якої неперервної в

області G функції $f(x, y, z)$ має місце формула

$$\iiint_G f(x, y, z) dV = \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (2.3)$$

Тут у внутрішньому інтегралі x, y вважають сталими.

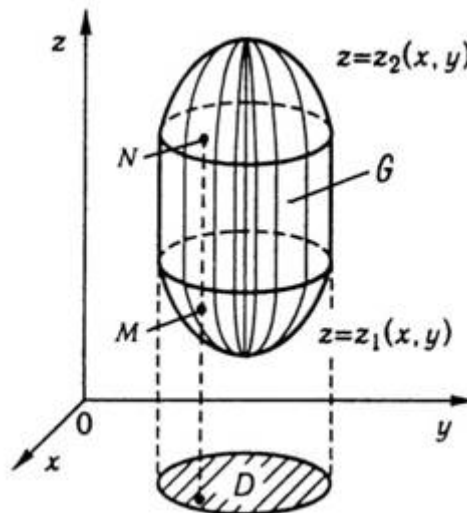


Рисунок 2.1

Якщо, крім цього, область D є правильною в напрямі осі Oy , тобто $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$, $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ неперервні функції на відрізку $[a, b]$, то

$$\iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

Таким чином,

$$\iiint_G f(x, y, z) dV = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (2.4)$$

Права частина формули називається трикратним інтегралом від

функції $f(x, y, z)$ по області G .

Порядок інтегрування може бути й іншим. Якщо область D правильна в напрямі Ox , тобто $D = \{(x, y) | c \leq y \leq d, \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y)\}$, $\varphi_1(y), \varphi_2(y)$ неперервні функції на відрізку $[c, d]$, то

$$\iiint_G f(x, y, z) dV = \int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} dx \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (2.5)$$

Область G можна спроектувати на інші координатні площини xOz та yOz і, якщо виявиться, що проєкції правильні області, то у подальшому представляємо потрібний інтеграл за допомогою подібних формул трикратним інтегралом. Назагал можна вибрати один із шести варіантів. Такі варіанти будуть відрізнятися порядком інтегрування у трикратних інтегралах. Логічно вважати, що деякі з них будуть простішими, а деякі – складнішими.

Якщо областю інтегрування є паралелепіпед

$$\Pi = \{(x, y, z) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, k \leq z \leq l\},$$

то у цьому випадку інтегрування виконується в будь-якому порядку.

$$\iiint_{\Pi} f(x, y, z) dV = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_k^l f(x, y, z) dz.$$

Приклади розв'язання задач

19. Обчислити інтеграл

$$\iiint_{\Pi} (x + y - z) dx dy dz,$$

де Π – паралелепіпед, обмежений площинами $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 2$.

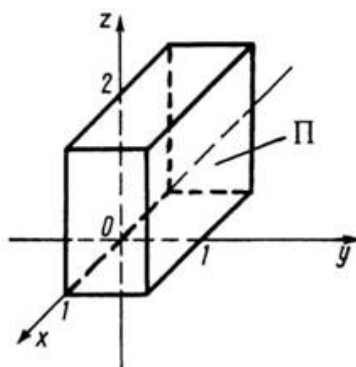


Рисунок 2.2

► За формулою (2.5) маємо:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Pi} (x + y - z) dx dy dz &= \int_{-1}^1 dx \int_0^1 dy \int_0^2 (x + y - z) dz = \int_{-1}^1 dx \int_0^1 \left(xz + yz - \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^2 dy = \\ &= \int_{-1}^1 dx \int_0^1 (2x + 2y - 2) dy = \int_{-1}^1 (2xy + y^2 - 2y) \Big|_0^1 dx = \int_{-1}^1 (2x - 1) dx = -2. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

20. Обчислити $\iiint_T 15(y^2 + z^2) dx dy dz$, $T = \{z = x + y,$

$x + y = 1, x = 0, y = 0, z = 0\}.$

► Спроекуємо тіло на площину xOy . Проекцією тіла на площину xOy буде трикутник (рис. 2.3).

Зверху тіло обмежене площиною $z = x + y$, яка проходить через початок координат. У таких випадках необхідно перевірити, чи ця площина не зрізає частину трикутника. Для цього знайдемо її лінію перетину з координатною площиною xOy , тобто розв'яжемо систему

$\begin{cases} z = x + y \\ z = 0 \end{cases}$. Її розв'язок: $y = -x$. Така пряма відсутня на

креслені, тобто, вона не перетинає трикутник, а, отже, проєкцією тіла на площину xOy буде зображений трикутник.

Таким чином,
$$\iiint_T 15(y^2 + z^2) dx dy dz = 15 \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \int_0^{x+y} (y^2 + z^2) dz.$$

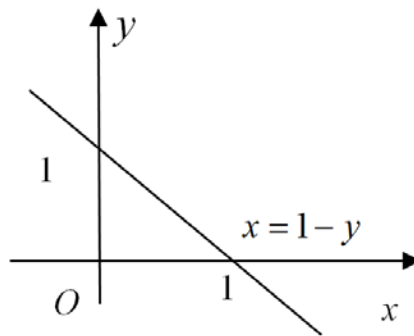


Рисунок 2.3

Спочатку обчислимо внутрішній інтеграл по змінній z , вважаючи x та y константами.

$$\begin{aligned} 1) \int_0^{x+y} (y^2 + z^2) dz &= \left(y^2 z + \frac{z^3}{3} \right) \Big|_0^{x+y} = y^2(x+y) + \\ &+ \frac{(x+y)^3}{3} - \left(y^2 \cdot 0 + \frac{0^3}{3} \right) = y^2(x+y) + \frac{(x+y)^3}{3}. \end{aligned}$$

Після цього проведемо інтегрування по змінній x .

$$2) \int_0^{1-y} \left(y^2(x+y) + \frac{(x+y)^3}{3} \right) dx = y^2 \int_0^{1-y} (x+y) dx + \frac{1}{3} \int_0^{1-y} (x+y)^3 dx =$$

$$= y^2 \frac{(x+y)^2}{2} \Big|_0^{1-y} + \frac{1}{3} \cdot \frac{(x+y)^4}{4} \Big|_0^{1-y} = \frac{y^2}{2} - \frac{7y^4}{12} + \frac{1}{12}.$$

Завершуємо, інтегруючи третій раз по змінній y .

$$\begin{aligned} 3) \quad & 15 \int_0^1 \left(\frac{1}{12} + \frac{y^2}{2} - \frac{7y^4}{12} \right) dy = 15 \left(\frac{y}{12} + \frac{y^3}{2 \cdot 3} - \frac{7y^5}{12 \cdot 5} \right) \Big|_0^1 = \\ & = 15 \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{6} - \frac{7}{12 \cdot 5} - (0+0-0) \right) = 15 \left(\frac{1}{4} - \frac{7}{12 \cdot 5} \right) = \frac{15}{4} - \frac{7}{4} = \frac{8}{4} = 2. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

21. Обчислити інтеграл $\iiint_T 8y^2 z e^{2xyz} dx dy dz$,

$$T = \left\{ \begin{array}{l} x = -1, y = 0, z = 0, \\ x = 0, y = 2, z = 1. \end{array} \right\}.$$

► Областю інтегрування є прямокутний паралелепіпед, а його проєкціями на будь-яку координатну площину будуть прямокутники, тому межі інтегрування у цьому випадку очевидні: $0 \leq z \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$, $-1 \leq x \leq 0$

Щодо порядку інтегрування варто зауважити, що вибираючи внутрішній інтеграл по змінній z , то ми отримаємо

$$\text{інтеграл} \quad \int_0^1 8y^2 z e^{2xyz} dz = 8y^2 \int_0^1 z e^{2xyz} dz, \quad \text{який} \quad \text{необхідно}$$

обчислювати частинами.

Якщо вибрати внутрішній інтеграл по змінній y , то ми

$$\text{отримаємо} \quad \text{інтеграл} \quad \int_0^1 8y^2 z e^{2xyz} dz = 8z \int_0^2 y^2 e^{2xyz} dy, \quad \text{який}$$

необхідно обчислювати частинами двічі.

Найбільш простим шляхом є першочергове інтегрування по змінній x , бо у цьому випадку $8y^2z$, буде константою. Тоді

$$\int_{-1}^0 8y^2 z e^{2xyz} dx = 8y^2 z \int_{-1}^0 e^{2xyz} dx = 8y^2 z \cdot \frac{1}{2yz} \int_{-1}^0 e^{2xyz} d(2xyz) = 4y (e^{2xyz}) \Big|_{-1}^0.$$

Наступний інтеграл раціональніше обчислювати по змінній z , щоб множник $4y$ вважався константою. Таким чином,

$$\begin{aligned} \iiint_T 8y^2 z e^{2xyz} dx dy dz &= \int_0^2 dy \int_0^1 dz \int_{-1}^0 8y^2 z e^{2xyz} dx = \int_0^2 dy \int_0^1 4y e^{2xyz} \Big|_{-1}^0 dz = \\ &= \int_0^2 dy \int_0^1 4y (1 - e^{-2yz}) dz = \int_0^2 4y dy \int_0^1 (1 - e^{-2yz}) dz = \int_0^2 4y \left(z + \frac{1}{2y} e^{-2yz} \right) \Big|_0^1 dy = \\ &= \int_0^2 (4y + 2e^{-2y} - 2) dy = (2y^2 - e^{-2y} - 2y) \Big|_0^2 = 5 - e^{-4}. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Завдання для самостійного розв'язання

15. Обчислити інтеграл:

а) $\iiint_G \frac{dx dy dz}{1-x-y}, G = \{x+y+z=1, \quad x=0, y=0, z=0\};$

б) $\iiint_G y dx dy dz, G = \{y = \sqrt{x^2 + z^2}, \quad y=h, h>0\};$

в) $\iiint_G dx dy dz, G = \{x+y=1, \quad x+y=2, y=0, y=1, z=0, z=3\}.$

2.2. Заміна змінних у потрійному інтегралі. Обчислення потрійного інтеграла в циліндричній і сферичній системах координат

Декартова система координат не завжди зручна. Тому поряд із декартовою використовують і інші ортогональні системи координат, найбільш поширеними серед яких є циліндрична і сферична.

Координатними поверхнями циліндричної системи є циліндр $\rho = \text{const}$ і площини $\varphi = \text{const}$, $z = \text{const}$, тобто вона є об'єднанням полярної системи на площині і декартової в напрямку осі Oz . Циліндрична (рис. 2.4) і декартова системи пов'язані співвідношеннями

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z \quad (0 \leq \rho < +\infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -\infty < z < +\infty).$$

Координатними поверхнями сферичної системи є сфера $\rho = \text{const}$, площина $\varphi = \text{const}$ і конус $\theta = \text{const}$. Сферична і декартова системи пов'язані співвідношеннями (рис. 2.5)

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \theta \\ (0 \leq \rho < +\infty, 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi).$$

Нехай $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$. неперервно диференційовні функції.

Здійснюють взаємно однозначне відображення замкненої обмеженої області G на область G^* . Тоді для неперервної в області функції $f(x, y, z)$ справедлива формула

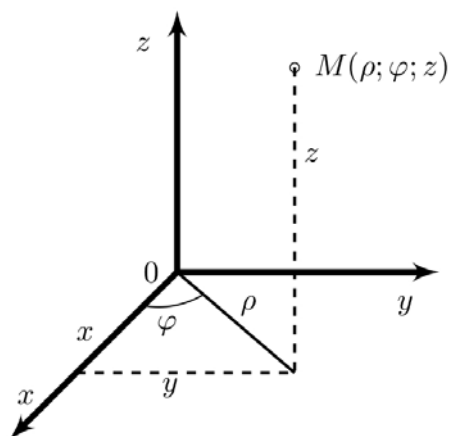


Рисунок 2.4

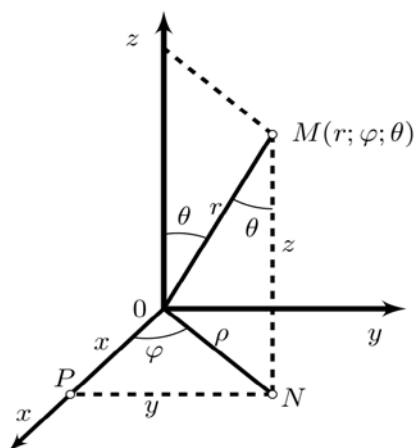


Рисунок 2.5

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{G^*} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J| du dv dw, \quad (2.6)$$

де J – визначник Остроградського-Якобі, який в області інтегрування не дорівнює нулю

$$J = J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2.7)$$

У випадку циліндричних координат маємо

$$J = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho. \quad (2.8)$$

З формули (2.6) отримаємо потрібний інтеграл у циліндричних координатах

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{G^*} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi dz \quad (2.9)$$

та у сферичних координатах

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{G^*} f(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi) \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta. \quad (2.10)$$

При обчисленні потрібного інтеграла в циліндричних чи сферичних координатах область G^* , як правило, не будують, а межі інтегрування знаходять безпосередньо по області G , користуючись геометричним змістом нових координат.

Приклади розв'язання задач

22. Обчислити потрібний інтеграл

$$\iiint_G z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz,$$

якщо область G розміщена в першому октанті і обмежена площинами $z = 0$, $z = 2$, $y = 0$ і циліндром $x^2 + y^2 = 2x$.

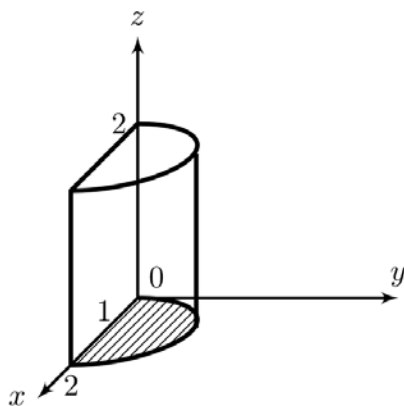


Рисунок 2.6

► Введемо циліндричні координати $x = \rho \cos \varphi$,
 $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$.

У циліндричній системі координат рівняння кола
 $x^2 + y^2 = 2x$ має вигляд $\rho = 2 \cos \varphi$. За формулою (2.9) маємо

$$\iiint_G z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz = \iiint_{G^*} z \rho^2 d\rho d\varphi dz.$$

Область G^* – це область G у циліндричній системі координат.

$$\begin{aligned} \iiint_G z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho^2 d\rho \int_0^2 z dz = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left. \frac{\rho^3}{3} \right|_0^{2\cos\varphi} d\varphi = \frac{16}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi d\varphi = \\ &= \frac{16}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \varphi) d(\sin \varphi) = \frac{16}{3} \left(\sin \varphi - \frac{\sin^3 \varphi}{3} \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{32}{9}. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

23. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint_G z^2 dx dy dz$, якщо

область G задана нерівностями

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4R^2, \quad x^2 + y^2 \leq 2Rx.$$

► Щоб обчислити даний інтеграл, необхідно спочатку розставити в ньому межі інтегрування. Множина точок $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4R^2$ – це куля радіуса $2R$ з центром у початку координат. Множина точок $x^2 + y^2 \leq 2Rx$ – це внутрішня область кругового циліндра радіуса R з твірною, паралельною осі Oz (рис. 2.7). Оскільки область симетрична відносно площини $z = 0$, то для спрощення на рис. 2.7 зображена тільки верхня половина області

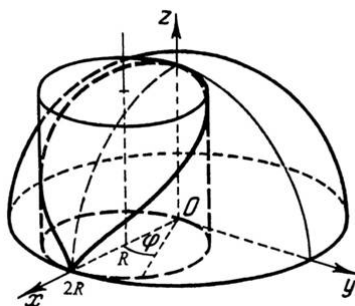


Рисунок 2.7

Ортогональною проєкцією G на площину xOy є круг $(x - R)^2 + y^2 \leq R^2$. Зверху і знизу область обмежена поверхнею кулі, бічна поверхня-поверхня циліндра.

При переході до циліндричних координат нерівності $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4R^2$, $x^2 + y^2 \leq 2Rx$ відповідно набувають вигляду

$$\rho \leq \sqrt{4R^2 - z^2}, \quad 0 \leq \rho \leq 2R \cos \varphi \quad \text{при} \quad \text{цьому} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},$$

$$0 \leq \rho \leq 2R.$$

Тоді в заданому інтегралі межі інтегрування можна розставити наступними трьома шляхами

$$\begin{aligned} \iiint_G z^2 dx dy dz &= \int_0^{2R} \rho d\rho \int_{-\arccos\left(\frac{\rho}{2R}\right)}^{\arccos\left(\frac{\rho}{2R}\right)} d\varphi \int_{-\sqrt{4R^2-\rho^2}}^{\sqrt{4R^2-\rho^2}} z^2 dz = \\ &= \int_{-2R}^{2R} z^2 dz \int_0^{\sqrt{4R^2-z^2}} \rho d\rho \int_{-\arccos\left(\frac{\rho}{2R}\right)}^{\arccos\left(\frac{\rho}{2R}\right)} d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2R \cos \varphi} \rho d\rho \int_{-\sqrt{4R^2-\rho^2}}^{\sqrt{4R^2-\rho^2}} z^2 dz. \end{aligned}$$

Найбільш простим буде обчислення інтеграла у третьому випадку

$$\begin{aligned} \iiint_G z^2 dx dy dz &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2R \cos \varphi} \rho d\rho \int_{-\sqrt{4R^2-\rho^2}}^{\sqrt{4R^2-\rho^2}} z^2 dz = \frac{2}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2R \cos \varphi} \rho (4R^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} d\rho = \\ &= -\frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2R \cos \varphi} (4R^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} d(-\rho^2) = -\frac{2}{15} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (4R^2 - \rho^2)^{\frac{5}{2}} \Big|_0^{2R \cos \varphi} d\varphi = \\ &= -\frac{2^6 R^5}{15} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^5 \varphi - 1) d\varphi = -\frac{2^6 R^5}{15} (-\varphi) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2^6 R^5 \pi}{15}. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

24. Обчислити інтеграл $\iiint_G (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$, де G –

куля $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$.

► У даному випадку зручніше перейти до сферичних координат $x = \rho \sin \theta \cos \varphi$, $y = \rho \sin \theta \sin \varphi$, $z = \rho \cos \theta$.

Для опису кулі сферичні координати ρ, θ, φ змінюються в таких межах: ρ від 0 до R , θ від 0 до π , φ від 0 до 2π . Оскільки підінтегральна функція дорівнює ρ^2 , то за формулою (2.10) маємо

$$\begin{aligned} \iiint_G (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz &= \int_0^R d\rho \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} \rho^2 \cdot \rho^2 \sin \theta d\varphi = \\ &= \int_0^R \rho^4 d\rho \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \int_0^R \rho^4 d\rho \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \\ &= 4\pi \int_0^R \rho^4 d\rho = 4\pi \left. \frac{\rho^5}{5} \right|_0^R = \frac{4\pi R^5}{5}. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Завдання для самостійного розв'язання

16. Обчислити потрійний інтеграл по області G , обмеженій вказаними поверхнями:

а) $\iiint_G (x^2 + y^2) dx dy dz$, $G = \{z = x^2 + y^2, z = 1\}$;

б) $\iiint_G (x^2 + y^2 + z^2)^{20} dx dy dz$, $G = \{x^2 + y^2 = 1, z = 2, z = 3\}$;

$$в) \iiint_G \frac{dx dy dz}{1 + (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad G = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

2.3. Застосування потрійних інтегралів

1. Об'єм тіла. Якщо деяке тіло є замкненою обмеженою областю G , що має об'єм, то згідно геометричного змісту потрійного інтеграла його об'єм

$$V = \iiint_G dx dy dz. \quad (2.11)$$

2. Маса тіла. Якщо густина речовини тіла задана функцією $\gamma = \gamma(x, y, z)$, то відповідно до фізичного змісту потрійного інтеграла її маса складе

$$m = \iiint_G \gamma(x, y, z) dx dy dz. \quad (2.12)$$

3. Моменти інерції тіла. Моменти інерції I_x, I_y, I_z розглядуваного тіла відносно координатних осей Ox, Oy, Oz відповідно дорівнюють:

$$\begin{aligned} I_x &= \iiint_G (y^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dV, \\ I_y &= \iiint_G (x^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dV, \\ I_z &= \iiint_G (x^2 + y^2) \gamma(x, y, z) dV. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Моменти інерції I_{xy}, I_{xz}, I_{yz} розглядуваного тіла відносно координатних площин xOy, xOz, yOz відповідно дорівнюють:

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \iiint_G z^2 \gamma(x, y, z) dV, \\ I_{xz} &= \iiint_G y^2 \gamma(x, y, z) dV, \\ I_{yz} &= \iiint_G x^2 \gamma(x, y, z) dV. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Момент інерції тіла відносно початку координат обчислюється за формулою

$$I_0 = \iiint_G (x^2 + y^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dV. \quad (2.15)$$

4. Статичні моменти тіла та його центр маси M_{xy}, M_{xz}, M_{yz} .

Статичні моменти тіла відносно координатних площин обчислюються за формулами:

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \iiint_G z \gamma(x, y, z) dV, \\ M_{xz} &= \iiint_G y \gamma(x, y, z) dV, \\ M_{yz} &= \iiint_G x \gamma(x, y, z) dV. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Координати x_c, y_c, z_c центра маси тіла визначаються за формулами:

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{M_{yz}}{m} = \frac{\iiint_G x \gamma(x, y, z) dV}{\iiint_G \gamma(x, y, z) dV}, \\ y_c &= \frac{M_{xz}}{m} = \frac{\iiint_G y \gamma(x, y, z) dV}{\iiint_G \gamma(x, y, z) dV}, \\ z_c &= \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\iiint_G z \gamma(x, y, z) dV}{\iiint_G \gamma(x, y, z) dV}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Приклади розв'язання задач

25. Обчислити масу тіла, обмеженого координатними площинами і площинами $x + y + z = 2$, $x = 1$, $y = 1$; густина $\gamma(x, y, z) = x + 2z$.

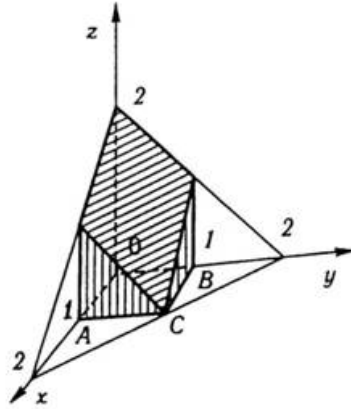


Рисунок 2.3

► Застосовуючи формулу (2.2), отримаємо

$$\begin{aligned}
 m &= \iiint_G (x + 2z) dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{2-x-y} (x + 2z) dz = \\
 &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (xz + z^2) \Big|_0^{2-x-y} dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (y^2 + xy - 4y - 2x + 4) dy = \\
 &= \int_0^1 \left(-\frac{3}{2}x + \frac{7}{3} \right) dx = \frac{19}{12} \text{ (од.маси)}. \blacktriangleleft
 \end{aligned}$$

26. Обчислити масу тіла, якщо густина розподілу маси $\gamma = 2xyz$, а тіло є циліндром $x^2 + y^2 \leq R^2$, $0 \leq z \leq h$.

► Шукану масу знайдемо за формулою (2.2). Будемо шукати масу четвертини циліндра і одержаний результат помножимо на 4. Тоді

$$m = 4 \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^h 2xyz dz = 8 \int_0^R x dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y dy \int_0^h z dz =$$

$$= 4h^2 \int_0^R x dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y dy = 2h^2 \int_0^R x(R^2 - x^2) dx = \frac{h^2 R^4}{2} \text{ (од.маси).} \blacktriangleleft$$

27. Знайти момент інерції однорідної кулі радіуса 1 відносно її центра.

► Куля однорідна, тому її густина $\gamma = \text{const}$. Область є кулею радіуса 1 із центром у точці $(0;0;0)$. Тому, переходимо до сферичних координат:

$$\begin{aligned} I_0 &= \gamma \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^1 \rho^4 d\rho = \frac{1}{5} \gamma \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{1}{5} \gamma \int_0^{2\pi} (-\cos \theta)|_0^\pi d\varphi = \frac{2}{5} \gamma \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4\pi}{5} \gamma. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

28. Обчислити координати центра маси і моменти інерції однорідної піраміди, обмеженої площинами $x = 0$, $y = 0$,

$$z = 0, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1; \quad \text{густина } \gamma = 1.$$

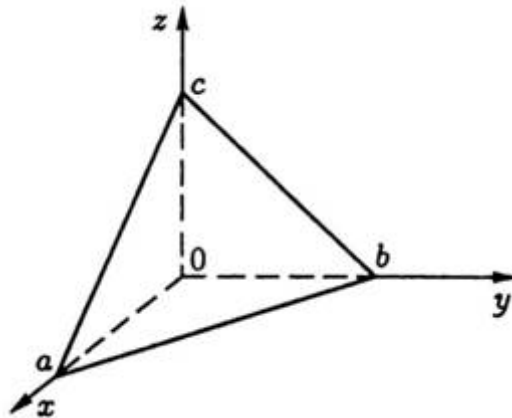


Рисунок 2.9

► Введемо такі позначення:

$$\alpha = b \left(1 - \frac{x}{a} \right), \quad \beta = c \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right).$$

Тоді маса піраміди обчислюється за формулою

$$\begin{aligned} m &= \int_0^a dx \int_0^\alpha dy \int_0^\beta dz = c \int_0^a dx \int_0^\alpha \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) dy = \frac{bc}{2} \int_0^a \left(1 - \frac{x}{a} \right)^2 dx = \\ &= \frac{1}{6} abc \text{ (од.маси)}. \end{aligned}$$

Обчислимо координати центра маси піраміди:

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{1}{m} \int_0^a x dx \int_0^\alpha dy \int_0^\beta dz = \frac{3}{a} \int_0^a x \left(1 - \frac{x}{a} \right)^2 dx = \frac{a}{4}, \\ y_c &= \frac{1}{m} \int_0^a dx \int_0^\alpha y dy \int_0^\beta dz = \frac{b}{a} \int_0^a \left(1 - \frac{x}{a} \right)^3 dx = \frac{b}{4}, \\ z_c &= \frac{1}{m} \int_0^a dx \int_0^\alpha dy \int_0^\beta z dz = \frac{c}{a} \int_0^a \left(1 - \frac{x}{a} \right)^3 dx = \frac{c}{4}. \end{aligned}$$

Нарешті знайдемо моменти інерції піраміди:

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int_0^a dx \int_0^\alpha dy \int_0^\beta z^2 dz = \frac{bc^3}{12} \int_0^a \left(1 - \frac{x}{a} \right)^4 dx = \frac{abc^3}{60}, \\ I_{yz} &= \int_0^a x^2 dx \int_0^\alpha dy \int_0^\beta dz = \frac{bc}{2} \int_0^a x^2 \left(1 - \frac{x}{a} \right)^2 dx = \frac{a^3 bc}{60}, \\ I_{xz} &= \int_0^a dx \int_0^\alpha y^2 dy \int_0^\beta dz = \frac{b^3 c}{12} \int_0^a \left(1 - \frac{x}{a} \right)^4 dx = \frac{ab^3 c}{60}; \\ I_x &= \frac{abc}{60} (b^2 + c^2), \quad I_y = \frac{abc}{60} (a^2 + c^2), \end{aligned}$$

$$I_z = \frac{abc}{60}(a^2 + b^2), \quad I_0 = \frac{abc}{60}(a^2 + b^2 + c^2). \blacktriangleleft$$

Завдання для самостійного розв'язання

17. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$, $x^2 + y^2 \leq z^2$.

18. Знайти масу тіла, обмеженого поверхнями $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$, якщо густина тіла у точці $M(x, y, z)$ визначається формулою $\rho = x + y + z$.

19. Обчислити координати центра маси однорідного тіла, обмеженого поверхнями $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$, $z = c$.

20. Обчислити моменти інерції однорідної піраміди, обмеженої площинами $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, якщо $\gamma = 1$.

§ 3. Криволінійні інтеграли першого роду

3.1 Поняття криволінійного інтегралу першого роду

Нехай L – кусково-гладка просторова крива з початком у точці A і кінцем в точці B , на якій визначена неперервна функція $F(M)$. Інтегральною сумою розбиття дуги AB на n елементарних частин з довжинами $\Delta l_1, \Delta l_2, \dots, \Delta l_n$ називається сума $\sum_{k=1}^n F(M_k) \Delta l_k$, де M_k –

довільна точка на елементарній ділянці $[A_{i-1}, A_i]$ розбиття (рис. 3.1).

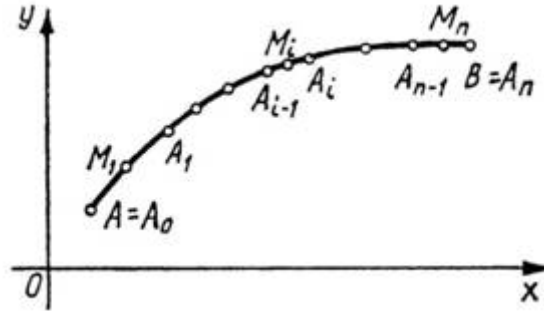


Рисунок 3.1

Означення. Якщо інтегральна сума при $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta l_i \rightarrow 0$ має скінченну границю I , яка не залежить ні від розбиття кривої AB , ні від вибору точок M_k то цю границю називають *криволінійним інтегралом першого роду* (або криволінійним інтегралом по довжині дуги) від функції $f(x, y)$ по кривій AB і позначають $\int_{AB} f(x, y) dl$. Таким чином, за

$$\text{означенням } \int_{AB} f(x, y) dl = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i; \eta_i) \Delta l_i.$$

Якщо ця границя існує, то функція $f(x, y)$ називається інтегрованою на кривій AB , крива AB – контуром інтегрування, A початковою, а B кінцевою точками інтегрування. Криволінійний інтеграл першого роду зводиться до визначеного інтеграла за формулою

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_0^L f(x(l), y(l)) dl, \quad (3.1)$$

де L – довжина кривої AB .

Хоча криволінійний інтеграл першого роду безпосередньо зводиться до визначеного, між цими поняттями існує наступна відмінність. В інтегральній сумі величини Δl_i обов'язково додатні, незалежно від того,

яку точку кривої ми рахуємо початковою, а яку кінцевою, тобто

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{BA} f(x, y) dl,$$

у той час, як визначений інтеграл $\int_a^b f(x) dx$ при перестановці меж інтегрування змінює знак. А в усьому іншому криволінійний інтеграл першого роду має ті ж самі властивості, що і визначений інтеграл.

Криволінійний інтеграл $\int_{AB} f(x, y) dl$ при $f(x, y) \geq 0$ чисельно дорівнює площі частини циліндричної поверхні, твірні якої мають довжину $f(x, y)$ і паралельні осі Oz , а напрямна збігається з кривою AB на площині Oxy (рис. 3.2). Це є геометричним змістом криволінійного інтеграла першого роду.

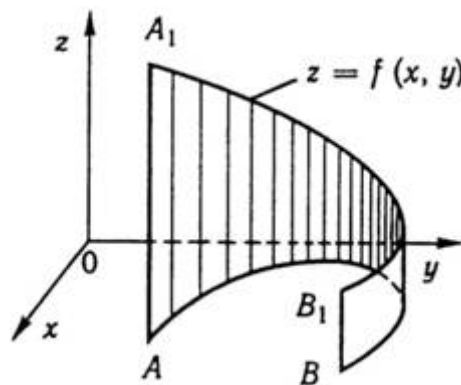


Рисунок 3.2

Якщо покласти $f(x, y) \equiv 1$, то одержимо криволінійний інтеграл $\int_{AB} dl$, значення якого є довжиною дуги кривої AB .

Якщо крива AB матеріальна, тобто вздовж кривої розподілено з лінійною густиною $\gamma(x, y) \geq 0$ деяку речовину, то маса цієї кривої є

фізичним змістом криволінійного інтеграла першого роду

$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \gamma(\xi_i, \eta_i) \Delta l_i = \int_{AB} \gamma(x, y) dl.$$

3.2 Обчислення криволінійних інтегралів першого роду

Обчислення криволінійних інтегралів першого роду зводиться до обчислення визначених інтегралів.

1. Якщо крива AB **явно задана** одним із рівнянь $y = y(x)$, $x \in [a; b]$ або $x = x(y)$, $y \in [c; d]$, і відповідно функція $y = y(x)$ або $x = x(y)$ разом із похідною $x'(t)$ або $y'(t)$ неперервні відповідно на відрізках $[ab]$ або $[cd]$, то

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx, \quad (3.2)$$

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_c^d f(x(y), y) \sqrt{1 + (x'(y))^2} dy. \quad (3.3)$$

2. Якщо крива AB задана **параметричними рівняннями** $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$, де $x(t)$ і $y(t)$ неперервні разом із своїми похідними $x'(t)$ і $y'(t)$ функції, а $f(x, y)$ функція неперервна вздовж цієї кривої, то

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_0^L f(x(l), y(l)) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (3.4)$$

3. Якщо крива **задана рівнянням у полярних координатах** $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$, то

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi. \quad (3.5)$$

Розглянемо просторову криву AB , яку задано параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$, де $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ функції неперервні на відрізку $[\alpha; \beta]$, а функція $f(x, y, z)$

визначена і неперервна вздовж кривої AB . Тоді

$$\int_{AB} f(x, y, z) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt. \quad (3.6)$$

Приклади розв'язання задач

29. Обчислити криволінійний інтеграл $\int_L \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + 9}}$, де

L – відрізок прямої, яка сполучає точки $O(0,0)$ і $A(1,3)$.

► Рівняння прямої, якій задовольняють задані точки, знаходиться за формулою: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, де (x_1, y_1) ,

(x_2, y_2) – задані точки.

Пряма OA має вигляд $\frac{x}{1} = \frac{y}{3}$ або $y = 3x$. Звідси

$$y' = 3, \quad dl = \sqrt{10} dx.$$

За формулою (3.2) матимемо

$$\begin{aligned} \int_L \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + 9}} &= \int_0^1 \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10x^2 + 9}} dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2}} = \\ &= \ln \left| x + \sqrt{x^2 + \frac{9}{10}} \right| \Big|_0^1 = \ln \left| 1 + \sqrt{\frac{19}{10}} \right| - \ln \sqrt{\frac{9}{10}} = \ln \frac{\sqrt{10} + \sqrt{19}}{3}. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

30. Обчислити $\int_L e^{\sqrt{x^2 + y^2}} dl$, якщо L замкнений контур (рис.

3.3), що складається з відрізка OA полярної осі довжиною a ,

дуги AB кола $x^2 + y^2 = a^2$ і відрізка OB променя $\varphi = \frac{\pi}{4}$ (рис.3.3).

► Лінія L складається з відрізків OA , OB і дуги AB кола, тому за властивістю адитивності по області інтегрування маємо

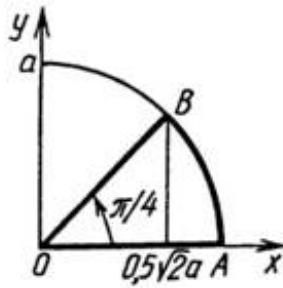


Рисунок 3.3

$$\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}} dl = \int_{OA} e^{\sqrt{x^2+y^2}} dl + \int_{AB} e^{\sqrt{x^2+y^2}} dl + \int_{BO} e^{\sqrt{x^2+y^2}} dl.$$

На відрізку OA маємо $y = 0$, $0 \leq x \leq a$, $dl = dx$, тому

$$\int_{OA} e^{\sqrt{x^2+y^2}} dl = \int_0^a e^x dx = e^a - 1.$$

На дузі AB маємо $\rho = a$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$, $dl = a d\varphi$, тому

$$\int_{AB} e^{\sqrt{x^2+y^2}} dl = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^a a d\varphi = \frac{1}{4} \pi a e^a.$$

На відрізку OB маємо $y = x$, $dl = \sqrt{2} dx$. Оскільки

$$\int_{BO} e^{\sqrt{x^2+y^2}} dl = \int_{Ob} e^{\sqrt{x^2+y^2}} dl \text{ і для } OB \text{ } x \text{ змінюється від } 0 \text{ до } 0,5\sqrt{2}a$$

$$(\text{рис. 3.4}), \text{ то } \int_{OB} e^{\sqrt{x^2+y^2}} dl = \int_0^{0,5\sqrt{2}a} e^{\sqrt{2}x} \sqrt{2} dx = e^a - 1.$$

$$\text{Отже, } \int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}} dl = 2(e^a - 1) + 0,25\pi a e^a. \blacktriangleleft$$

31. Обчислити $\int_{AB} xy dl$, якщо AB частина еліпса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ що лежить у першій координатній чверті.}$$

► Так як рівняння лінії задано в неявному вигляді, то для розв'язання задачі доцільно перейти до параметричних рівнянь еліпса: $x = a \cos t$ $y = b \sin t$. Враховуючи, що t змінюється від 0 до $\frac{\pi}{2}$, одержуємо

$$\begin{aligned} \int_{AB} xy dl &= ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = \\ &= \frac{ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \sqrt{\frac{a^2}{2}(1 - \cos 2t) + \frac{b^2}{2}(1 + \cos 2t)} dt = \\ &= -\frac{ab}{4\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(a^2 + b^2) + (b^2 - a^2) \cos 2t} d(\cos 2t) = \\ &= \frac{ab(a^2 + ab + b^2)}{3(a + b)}. \end{aligned}$$

Отже, $I = \frac{ab(a^2 + ab + b^2)}{3(a+b)}$. ◀

32. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду

$$\int_L (x - y) dl, \text{ де } L - \text{коло } x^2 + y^2 = 2x.$$

► Перейдемо до полярних координат: $x = \rho \cos \varphi$,
 $y = \rho \sin \varphi$. Рівняння кривої L набуває вигляду $\rho = 2 \cos \varphi$, де
 $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Для обчислення інтеграла застосуємо формулу
 (3.5). Оскільки $\rho' = -2 \sin \varphi$, то

$$dl = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi = \sqrt{4\cos^2 \varphi + 4\sin^2 \varphi} d\varphi = 2d\varphi.$$

$$\begin{aligned} \int_L (x - y) dl &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi (\cos \varphi - \sin \varphi) \cdot 2 \cdot d\varphi = 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi + \\ &+ 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d(\cos \varphi) = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi + 4 \cdot \frac{\cos^2 \varphi}{2} \Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= 2 \cdot \left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 2\pi. \end{aligned}$$

Відповідь: $I = 2\pi$. ◀

33. Обчислити інтеграл $\int_L \frac{dl}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$, де L – частина

гіперболічної спіралі $\rho\varphi = 1$ від $\varphi = \sqrt{3}$ до $\varphi = 2\sqrt{2}$.

► Розглянемо полярну систему координат: $x = \rho \cos \varphi$,
 $y = \rho \sin \varphi$. Оскільки

$$\rho = \frac{1}{\varphi}; \quad \rho' = -\frac{1}{\varphi^2}; \quad dl = \sqrt{\frac{1}{\varphi^2} + \frac{1}{\varphi^4}} d\varphi = \frac{\sqrt{1+\varphi^2}}{\varphi^2} d\varphi, \text{ то}$$

$$\int_L \frac{dl}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} = \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{1+\varphi^2}}{\varphi^2 \cdot \frac{1}{\varphi^3}} d\varphi = \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \varphi \cdot \sqrt{1+\varphi^2} d\varphi =$$

$$= \left. \begin{array}{l} 1+\varphi^2 = t; \quad 2\varphi d\varphi = dt; \\ \varphi d\varphi = \frac{dt}{2}; \\ \text{при } \varphi = \sqrt{3} \rightarrow t = 4; \\ \text{при } \varphi = 2\sqrt{2} \rightarrow t = 9 \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int_4^9 \sqrt{t} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{t^3} \Big|_4^9 = \frac{1}{3} (\sqrt{9^3} - \sqrt{4^3}) = \frac{19}{3}.$$

Відповідь: $I = \frac{19}{3}$. ◀

34. Обчислити $\int_{AB} xyz dl$, якщо AB – дуга лінії

$$x = t, y = \frac{t^2}{2}, z = \frac{\sqrt{8t^3}}{3}, 0 \leq t \leq 1.$$

► Використовуючи формулу (3.6), маємо

$$\int_{AB} xyz dl = \frac{\sqrt{2}}{3} \int_0^1 t^{\frac{9}{2}} \sqrt{1+t^2} + 2t dt = \frac{\sqrt{2}}{3} \int_0^1 t^{\frac{9}{2}} (1+t) dt = \frac{16\sqrt{2}}{143}$$

Відповідь: $I = \frac{16\sqrt{2}}{143}$. ◀

35. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду

$$\int_{Ab} (x+y) dl, \text{ де дуга } AB \text{ – частина лемніскати } \rho = \sqrt{\sin 2\varphi}, \text{ яка}$$

знаходиться у першому координатному куті.

► Згідно умови задачі $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $\rho' = \frac{a \cos 2\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}}$, тоді

$$\sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} = \frac{a}{\sqrt{\sin 2\varphi}}. \text{ Тому}$$

$$\begin{aligned} \int_{AB} (x + y) dl &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\rho \cos \varphi + \rho \sin \varphi) \frac{a d\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}} = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho (\cos \varphi + \sin \varphi)}{\sqrt{\sin 2\varphi}} d\varphi = \\ &= a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a \sqrt{\sin 2\varphi} (\cos \varphi + \sin \varphi)}{\sqrt{\sin 2\varphi}} d\varphi = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi = 2a^2. \end{aligned}$$

Відповідь: $I = 2a^2$. ◀

Завдання для самостійного розв'язання

21. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду:

а) $\int_{AB} \frac{x}{y} dl$, де дуга AB – частина параболи $y = \frac{1}{2}x^2$, що

лежить між $A\left(1; \frac{1}{2}\right)$ і $B(2; 2)$;

б) $\int_{AB} y dl$, де дуга AB – частина параболи $y^2 = 2x$, що

лежить між $A(0; 0)$ і $B(2; 2)$;

в) $\int_{AB} (4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y}) dl$, де дуга AB – частина прямої, що

лежить між $A(-1; 0)$ і $B(0; 1)$;

г) $\int_{AB} (x^2 + y^2) dl$, де дугу AB задано рівняннями

$$x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi;$$

$$r) \int_L (4x - 3y) dl, \text{ де } L - \text{ дуга кривої } x = \cos t, \quad y = \sin t$$

між точками $A(-1; 0)$ і $B(1; 0)$;

$$д) \int_{AB} xy dl, \text{ де дугу } AB \text{ задано рівняннями}$$

$$x = a \operatorname{ch} t, \quad y = a \operatorname{sh} t, \quad 0 \leq t \leq 1;$$

$$е) \int_{AB} e^{\sqrt{x^2 + y^2}} dl, \text{ де дуга } AB - \text{ випуклий контур,}$$

обмежений кривими $r = a, \varphi = \frac{\pi}{4}$ (r і φ полярні координати);

$$є) \int_{AB} \sqrt{x^2 + y^2} dl, \text{ де } AB - \text{ коло } x^2 + y^2 = 16x.$$

3.3. Застосування криволінійних інтегралів першого роду

1. *Площа циліндричної поверхні.* Площа P циліндричної поверхні, визначеної функцією $z = f(x, y)$, обчислюється за формулою

$$S = \int_L f(x, y) dl \quad (3.7)$$

2. *Довжина кривої.* Довжина L кривої AB визначається за формулою

$$L = \int_{AB} dl. \quad (3.8)$$

3. *Маса кривої.* Якщо вздовж неоднорідної матеріальної кривої AB розподілено масу з лінійною густиною $\gamma(x, y) \geq 0$, то маса кривої L обчислюється за формулою

$$m = \int_L \gamma(x, y) dl. \quad (3.9)$$

4. *Центр маси та статичні моменти кривої.* Координати x_c, y_c центра маси кривої L обчислюються за формулами:

$$x_c = \frac{\int_L x\gamma(x, y) dl}{\int_L \gamma(x, y) dl} = \frac{M_y}{m}, \quad y_c = \frac{\int_L y\gamma(x, y) dl}{\int_L \gamma(x, y) dl} = \frac{M_x}{m}, \quad (3.10)$$

де M_x, M_y статичні моменти кривої L відносно осей Ox та Oy .

5. *Моменти інерції кривої.* Моменти інерції кривої I_x, I_y, I_0 відносно осей і початку координат відповідно обчислюються за формулами:

$$I_x = \int_L y^2 \gamma(x, y) dl, \quad I_y = \int_L x^2 \gamma(x, y) dl, \quad I_0 = \int_L (x^2 + y^2) \gamma(x, y) dl. \quad (3.11)$$

6. *Робота змінної сили.* Якщо матеріальна точка переходить вздовж кривої AB із положення A у положення B , причому під час руху на точку діє сила $\vec{F}$, напрямок і величина якої змінюються разом із положенням точки (рис.3.4), то

$$A = \int_L F \cos \theta dl. \quad (3.12)$$

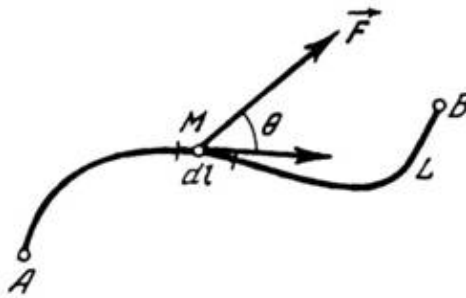


Рисунок 3.4

Приклади розв'язання задач

36. Знайти площу бічної поверхні циліндра $x^2 + y^2 = R^2$,

зрізаної зверху поверхнею $2Rz = xy$, знизу площиною xOy .

► Скористаємося формулою (3.7):

$$S = \int_L f(x, y) dl,$$

де $f(x, y) = z = \frac{xy}{2R}$, AB – дуга кривої циліндра $x^2 + y^2 = R^2$,

тому $dl = \sqrt{1 + (y')^2} dx = \frac{R dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}$.

$$\text{Отже, } S = \int_0^R \frac{x\sqrt{R^2 - x^2}}{2R} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = \frac{1}{2} \int_0^R x dx = \frac{R^2}{2} \cdot (\text{кв.од}).$$

Відповідь: $S = \frac{R^2}{2}$ кв.од. ◀

37. Знайти довжину астроїди $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$.

► Довжину астроїди (див. рис. 3.5) обчислимо за формулою (3.8), тобто $L = \int_{AB} dl$.

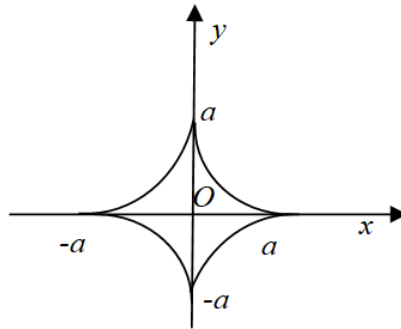


Рисунок 3.5

Знайдемо диференціал дуги кривої $dl = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt =$
 $= \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt = 3a |\sin t \cos t| dt.$

Враховуючи симетрію астроїди відносно осей координат, обчислимо довжину чверті кривої розміщеної у першому квадранті. Оскільки у цьому випадку $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$, а

$$\sin t \cos t \geq 0, \quad \text{то} \quad l = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a \sin t \cos t dt = 3a \frac{\sin^2 t}{2} \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a}{2}, \quad \text{тому}$$

$$L = 6a \text{ лін.од.}$$

Відповідь: $L = 6a$ лін. од. ◀

38. Знайти довжину просторової кривої L заданої параметрично: $x = 3t$, $y = 3t^2$, $z = 2t^3$ від $(0,0,0)$ до $(3,3,2)$.

► Скористаємося (3.8) і формулою для обчислення диференціала просторової дуги, заданої параметрично.

Оскільки $dl = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} dt$, то

$$l = \int_0^1 \sqrt{9 + 36t^2 + 36t^4} dt = 3 \int_0^1 (1 + 2t^2) dt = 5 \text{ (лін.од.)}.$$

Відповідь: $l=5$ лін.од. ◀

39. Обчислити масу і координати центра маси циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, з рівномірно розподіленою масою.

► Оскільки маса рівномірно розподілена і густини її не

вказано, то умовно припустимо, що $\gamma = 1$. Тоді маса циклоїди

$$m = \int_L dl = a \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt = a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt =$$

$$= 8a \text{ (од.маси.)}.$$

Координати центра мас циклоїди при $\gamma(x, y) = 1$:

$$x_c = \frac{1}{8a} \int_L x dl = \frac{1}{8a} a^2 \int_0^{2\pi} (t - \sin t) \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos t} dt = \pi a,$$

$$y_c = \frac{1}{8a} \int_L y dl = \frac{1}{8a} a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos t} dt = \frac{4}{3} a.$$

Відповідь: $m = 8a$ од.маси, $C\left(\pi a; \frac{4a}{3}\right)$. ◀

40. Обчислити статичний момент відносно осі Ox однорідної кривої $L = \{y = x^3, 0 \leq x \leq 1\}$.

► Скористаємося формулою для обчислення статичного моменту відносно осі Ox . Оскільки $M_x(L) = \int_L y dl$, а

$$dl = \sqrt{1 + (y')^2} dx = \sqrt{1 + 9x^4} dx, \text{ то}$$

$$M_x(L) = \int_L y dl = \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 9x^4} dx = \frac{1}{36} \int_0^1 (1 + 9x^4)^{\frac{1}{2}} d(1 + 9x^4) =$$

$$= \frac{1}{36} \cdot \frac{2}{3} (1 + 9x^4)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{10\sqrt{10} - 1}{54}.$$

Відповідь: $M_x(L) = \frac{10\sqrt{10} - 1}{54}$. ◀

Завдання для самостійного розв'язання

22. Знайти довжину кардіоїди $x = 2a \cos t - a \cos t$,
 $y = 2a \sin t - a \sin t$.

23. Знайти довжину дуги кривої $x = 2 - \frac{t^4}{4}$, $y = \frac{t^6}{6}$ між
 точками перетину її з осями координат.

24. Знайти довжину дуги кривої $e^{2y}(e^{2x} - 1) = e^{2x} + 1$,
 якщо $x_A = 1$, $x_B = 2$.

25. Знайти площу, обмежену кривою $y^2 = x^2 - x^4$.
 (Вказівка: перейти до параметричних рівнянь, вважаючи
 $y = tx$).

26. Обчислити масу дуги AB кривої $y = \ln x$, якщо у
 кожній точці густина пропорційна квадрату абсциси точки,
 при цьому $x_A = 1$, $x_B = 3$.

27. Обчислити масу дуги OA кривої $3y = 2x\sqrt{x}$, якщо у
 кожній точці M густина пропорційна довжині дуги OM , а
 координати точок початку і кінця дуги $O(0;0)$, $A\left(4; \frac{16}{3}\right)$.

28. Обчислити координати центра мас однорідної кривої
 $2y + 3x - 3 = 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

29. Обчислити статичні моменти кривої
 $L = \left\{ x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, \quad x \geq 0, y \geq 0 \right\}$ відносно осей координат.

§ 4. Криволінійні інтеграли другого роду

4.1. Поняття криволінійного інтеграла другого роду (по координатах)

Нехай функція $P(x, y)$, $Q(x, y)$ визначена і обмежена на гладкій чи кусково-гладкій кривій AB у площині Oxy . На відміну від інтегралів першого роду крива AB розглядається як напрямлена лінія. Нехай A її початок, а B – кінець. Розіб'ємо точками AB на n довільних частин в напрямі від A до B . На кожній частинній дузі $[A_{i-1}, A_i]$ візьмемо по точці $M_i(\xi_i, \eta_i)$ і складемо суму

$$\sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i \quad \left(\sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i \right),$$

де $\Delta x_i (\Delta y_i)$ – проекція вектора $\overline{A_{i-1}A_i}$ на вісь Ox (на вісь Oy) (рис. 4.1).

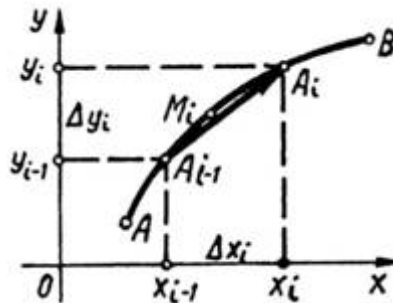


Рисунок 4.1

Ця сума називається інтегральною сумою для функції $P(x, y)(Q(x, y))$ по координаті $x(y)$ вздовж кривої AB .

Означення. Якщо вказана інтегральна сума при $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta l_i \rightarrow 0$ має скінченну границю I , яка не залежить ні від розбиття кривої AB , ні від

вибору точок $M_i(\xi_i, \eta_i)$, то цю границю називають криволінійним інтегралом від функції $P(x, y)(Q(x, y))$ по координаті x (y) вздовж кривої

$$AB \text{ і позначають } \int_{AB} P(x, y)dx \left(\int_{AB} Q(x, y)dy \right).$$

Таким чином,

$$\int_{AB} P(x, y)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i$$

$$\left(\int_{AB} Q(x, y)dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i \right).$$

Суму $\int_{AB} P(x, y)dx + \int_{AB} Q(x, y)dy$ називають криволінійним інтегралом

по координатах або криволінійним інтегралом другого роду від функцій $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ по кривій AB і позначають символом

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

4.2. Обчислення криволінійних інтегралів другого роду

Обчислення криволінійних інтегралів другого роду зводиться до обчислення визначених інтегралів.

Якщо крива AB **явно задана** одним із рівнянь $y = y(x)$, $x \in [a; b]$ або $x = x(y)$, $y \in [c; d]$ і функція $y = y(x)$ або $x = x(y)$ разом із похідною $x'(t)$ або $y'(t)$ неперервні відповідно на відрізках $[ab]$ або $[cd]$, то

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b (P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x))dx, \quad (4.1)$$

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_c^d (P(x(y), y)x'(y) + Q(x(y), y))dy. \quad (4.2)$$

Якщо крива AB задана **параметричними рівняннями**

$x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha; \beta]$, де $x(t)$ і $y(t)$ неперервні функції разом із своїми похідними $x'(t)$ і $y'(t)$, а $f(x, y)$ функція неперервна вздовж цієї кривої, то

$$\int_{AB} P(x, y) dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t)) x'(t) dt, \quad \int_{AB} Q(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q(x(t), y(t)) y'(t) dt. \quad (4.3)$$

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t), y(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t)) y'(t)) dt. \quad (4.4)$$

Якщо крива AB задана у полярній системі координат рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi_A \leq \varphi \leq \varphi_B$, то

$$\begin{aligned} \int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \\ = \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} (-P(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \sin \varphi + Q(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \cdot \cos \varphi) \rho d\varphi. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Можна поширити поняття криволінійних інтегралів другого роду на просторові криві. Для цього розглянемо просторову криву AB , яку задано параметричними рівняннями $x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [\alpha; \beta]$, де функції $x(t), y(t), z(t), x'(t), y'(t), z'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha; \beta]$, причому зміні параметра $t \in [\alpha; \beta]$ відповідає рух по кривій AB від A до B . Тоді справедлива формула

$$\begin{aligned} \int_{AB} P dx + Q dy + R dz = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) + \\ + Q(x(t), y(t), z(t)) y'(t) + R(x(t), y(t), z(t)) z'(t)) dt. \end{aligned} \quad (4.6)$$

З наведених формул, які використовуються для обчислення криволінійних інтегралів другого роду, випливає, що криволінійний інтеграл другого роду має властивості, аналогічні властивостям визначеного інтеграла. Підкреслимо суттєву відмінність між криволінійними інтегралами. На відміну від криволінійного інтеграла

першого роду криволінійний інтеграл другого роду змінює свій знак на протилежний при зміні напрямку шляху інтегрування, тобто

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = - \int_{BA} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

У випадку коли L замкнена крива, тобто коли точка A співпадає з точкою B , і з двох можливих напрямів обходу замкнутого контура домовимося називати додатним той, при якому область, що розміщена всередині цього контура, залишається зліва по відношенню до точки, яка здійснює обхід (рис. 4.2 (а)). Протилежний напрям обходу контура домовимось називати від'ємним (рис. 4.2 (б)).

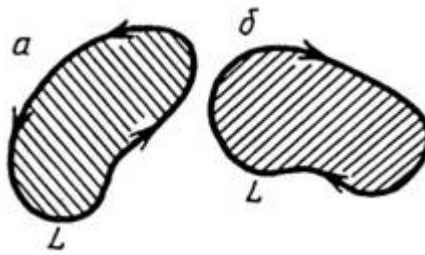


Рисунок 4.2

Криволінійний інтеграл по замкнутому контуру L , що має додатний напрям, часто позначають символом $\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$.

Приклади розв'язання задач

41. Обчислити криволінійний інтеграл $\int_L ydx + x^2 dy$, де

L – відрізок прямої від точки $A(1,1)$ до точки $B(2,3)$.

► Запишемо рівняння прямої, що проходить через точки

A і B : $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2}$; $2x-2 = y-1$; $y = 2x-1$, $dy = 2dx$. Тому

$$\begin{aligned}\int_L y dx + x^2 dy &= \int_1^2 (2x - 1 + 2x^2) dx = \left(2 \cdot \frac{x^2}{2} - x + 2 \cdot \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 = \\ &= 4 - 2 + \frac{16}{3} - 1 + 1 - \frac{2}{3} = 2 + \frac{14}{3} = \frac{20}{3}.\end{aligned}$$

Відповідь: $I = \frac{20}{3}$. ◀

42. Обчислити інтеграл $\int_{AB} x^2 dx + xy dy$, де AB четвертина

кола $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Точці A відповідає $t = 0$, а

точці B відповідає $t = \frac{\pi}{2}$.

► Так як $x = \cos t$, $y = \sin t$, то $dx = -\sin t dt$, $dy = \cos t dt$,
 $xy = \cos t \sin t$, тому

$$\int_{AB} x^2 dx + xy dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos^2 t \sin t + \cos^2 t \sin t) dt = 0.$$

Відповідь: $I = 0$. ◀

43. Обчислити інтеграл $\int_L xy dx + (x^2 + y) dy$, якщо L :

а) дуга параболи $\frac{x^2}{2} + 1$ між точками $A(0;1)$ і $B(2;3)$;

б) відрізок прямої AB .

► а) Зведемо обчислення криволінійного інтеграла до визначеного. Беручи $y = \frac{x^2}{2} + 1$, $y'(x) = x$, $0 \leq x \leq 2$, отримаємо

$$\begin{aligned}\int_L xy \, dx + (x^2 + y) \, dy &= \int_0^2 \left(x \left(\frac{x^2}{2} + 1 \right) + \left(x^2 + \frac{x^2}{2} + 1 \right) x \right) dx = \\ &= \int_0^2 (2x^3 + 2x) \, dx = 12.\end{aligned}$$

б) Запишемо рівняння прямої, що проходить через точки

$$A \text{ і } B: \frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}, \text{ тобто } \frac{x}{2} = \frac{y - 1}{2}, \text{ звідки } y = x + 1.$$

Таким чином, вважаючи $y = x + 1$, $y'(x) = 1$, $0 \leq x \leq 2$, отримаємо

$$\begin{aligned}\int_L xy \, dx + (x^2 + y) \, dy &= \int_0^2 (x(x + 1) + x^2 + x + 1) \, dx = \\ &= \int_0^2 (2x^2 + 2x + 1) \, dx = \frac{34}{3}.\end{aligned}$$

Відповідь: а) $I_1 = 12$; б) $I_2 = \frac{34}{3}$. ◀

44. Обчислити інтеграл $\int_L (x + y) \, dx - x \, dy$ вздовж ламаної

OBA , де $O(0,0)$, $A(4,2)$ і $B(2,0)$.

► Вздовж ламаної OBA на ділянці OB маємо $y = 0$ і $dy = 0$, а на ділянці BA $y = x - 2$, $dy = dx$. Тому

$$\begin{aligned}\int_L (x + y) \, dx - x \, dy &= \int_{OB} (x + y) \, dx - x \, dy + \int_{BA} (x + y) \, dx - x \, dy = \\ &= \int_0^2 x \, dx + \int_2^4 (x + x - 2 - x) \, dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_2^4 = 2 + 2 = 4.\end{aligned}$$

Відповідь: $I = 4$. ◀

45. Обчислити інтеграл $\int_{AB} (x + y)dx + 2zdy + xydz$, якщо

дуга AB кривої $x = t$, $y = t^2$, $z = 3 - t$, причому точці A відповідає $t = 1$, а точці B відповідає $t = 2$.

► Згідно відповідної формули (4.3) маємо

$$\int_{AB} (x + y)dx + 2z dy + xy dz = \int_1^2 (t + t^2 + 2(3 - t)2t - t^3)dt = 8\frac{3}{4}.$$

Відповідь: $I = 8\frac{3}{4}$. ◀

46. Обчислити інтеграл $\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, де L

контур прямокутника, утвореного прямими $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$ (рис. 4.4).

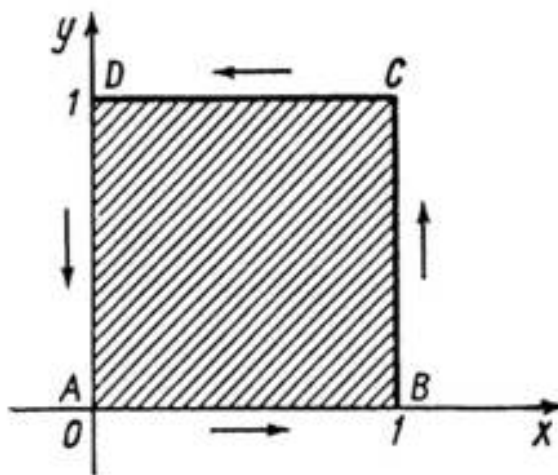


Рисунок 4.4

► На рис. 4.4 додатний напрям обходу контура позначений стрілками. Розбиваючи весь контур інтегрування на частини, маємо

$$\oint_L (x+y)dy = \int_{AB} (x+y)dy + \int_{BC} (x+y)dy + \int_{CD} (x+y)dy + \int_{DA} (x+y)dy.$$

Інтеграли по AB і DC дорівнюють нулю, оскільки $y = \text{const}$. Тому обчислимо другий і четвертий інтеграли в останній рівності.

$$\int_{BC} (x+y)dy = \int_0^1 (1+y)dy = \frac{3}{2}, \quad \int_{DA} (x+y)dy = \int_1^0 (0+y)dy = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Таким чином, маємо: } \oint_L (x+y)dy = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1.$$

Відповідь: $I = 1$. ◀

Завдання для самостійного розв'язання

30. Обчислити криволінійний інтеграл

$$\int_{AB} y(x-y)dx + xdy, \text{ де } AB - \text{ відрізок прямої від точки } A(0;0)$$

до точки $B(1;2)$.

31. Обчислити криволінійний інтеграл

$$\int_{AB} (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy, \text{ де } AB - \text{ частина параболи}$$

$$y = x^2, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

32. Обчислити криволінійний інтеграл

$\int_{AB} (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$, де AB – крива $y = 1 - |1 - x|$,
 $0 \leq x \leq 2$.

33. Обчислити криволінійний інтеграл $\int_{AB} (2a - y)dx + xdy$,
 де AB – арка циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

34. Обчислити інтеграл $\oint_C \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$, де C –
 коло $x^2 + y^2 = a^2$, яке проходять проти годинникової стрілки.

35. Обчислити інтеграл $\oint_C 2xdx - (x + 2y)dy$ вздовж
 периметра трикутника ABC , який проходять за
 годинниковою стрілкою. Координати вершин трикутника –
 $A(1; 0)$, $B(0; 2)$, $C(2; 0)$.

4.3 Формула Гріна

Ця формула встановлює зв'язок між подвійним інтегралом по
 плоскій області й криволінійним інтегралом по контуру цієї області.
 Формула Гріна має вигляд

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int_{\Gamma} Q(x, y) dx + P(x, y) dy, \quad (4.7)$$

де Γ – контур області D ; $P(x, y)$, $Q(x, y)$ – функції неперервні в області

D , для яких існують неперервні частинні похідні $\frac{\partial Q}{\partial x}$ і $\frac{\partial P}{\partial y}$.

Приклади розв'язання задач

47. Користуючись формулою Гріна, обчислити інтеграл

$\oint_L (x^5 - 2y)dx + (3x + y^8)dy$, де L – коло $x^2 + y^2 = r^2$.

► Функції $P(x, y) = x^5 - 2y$, $Q(x, y) = 3x + y^8$ і

$\frac{\partial P}{\partial y} = -2$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 3$. Тому за теоремою Гріна

$$\oint_L (x^5 - 2y)dx + (3x + y^8)dy = \iint_D (-3(-2))dxdy = 5 \iint_D dxdy = 5S = 5\pi r^2.$$

Відповідь: $I = 5\pi r^2$. ◀

48. За допомогою формули Гріна обчислити криволінійний інтеграл $\int_L (xy + 2x - 3y)dx + (xy + 2x + 3y)dy$, де

L – коло $x^2 + y^2 = 4x$.

► За умовою задачі $P(x, y) = xy + 2x - 3y$;

$Q(x, y) = xy + 2x + 3y$, тому $\frac{\partial P}{\partial y} = x + 3$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = y + 2$.

За формулою Гріна

$$\begin{aligned} \int_L (xy + 2x - 3y)dx + (xy + 2x + 3y)dy &= \iint_D (y + 2 - (x + 3))dxdy = \\ &= \iint_D (y - x - 1)dxdy. \end{aligned}$$

Область D – коло з центром в точці $(2, 0)$ і радіусом $R = 2$. Рівняння кола має вигляд $(x - 2)^2 + y^2 = 4$.

Перейдемо до полярних координат з полюсом у центрі

$O(2;0)$. Рівняння, яке зв'язує декартові (x, y) і полярні (ρ, φ) координати, з полюсом у точці $O(2;0)$ має вигляд
 $x - 2 = \rho \cos \varphi; \quad y = \rho \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq 2.$

Таким чином,

$$\begin{aligned} \iint_D (y - x + 5) dx dy &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (\rho \sin \varphi - \rho \cos \varphi - 2 + 5) \rho d\rho = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (\rho \sin \varphi - \rho \cos \varphi + 3) \rho d\rho = \int_0^{2\pi} \left(\sin \varphi \cdot \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^2 - \cos \varphi \cdot \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^2 + \right. \\ &\quad \left. + 3 \cdot \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^2 \right) d\varphi = \left(-\frac{8}{3} \cos \varphi - \frac{8}{3} \sin \varphi + 6\varphi \right) \varphi \Big|_0^{2\pi} = -\frac{8}{3} + 12\pi + \frac{8}{3} = 12\pi. \end{aligned}$$

Відповідь: $I = 12\pi$. ◀

Завдання для самостійного розв'язання

36. За допомогою формули Гріна обчислити інтеграл

$$\oint_C xy^2 dy - x^2 y dx, \text{ де } C - \text{коло } x^2 + y^2 = a^2.$$

37. За допомогою формули Гріна обчислити інтеграл

$$\oint_C (x + y) dx - (x - y) dy, \text{ де } C - \text{еліпс } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

38. За допомогою формули Гріна обчислити інтеграл

$$\oint_C e^x (1 - \cos y) dx - e^x (y - \sin y) dy, \text{ де } C - \text{контур, що обмежений}$$

областю $0 < x < \pi$, $0 < y < \sin x$ і який проходять у додатному напрямку.

39. За допомогою формули Гріна обчислити інтеграл

$\oint_{ABC} 2x dx - (x + 2y) dy$ вздовж периметра трикутника ABC з

вершинами $A(-1; 0)$, $B(0; 2)$, $C(2; 0)$, який проходять за годинниковою стрілкою.

40. За допомогою формули Гріна обчислити інтеграл

$\oint_C (y^2 + x^2) dy$, де C контур чотирикутника $ABCD$

$A(0; 0)$, $B(2; 0)$, $C(4; 4)$, $D(0; 4)$.

4.4. Зв'язок між криволінійними інтегралами першого і другого роду

Нехай $L = AB$ напрямлена просторова крива з початком A і кінцем B . Тоді всі дотичні до AB також напрямлені прямі (рис. 4.3).

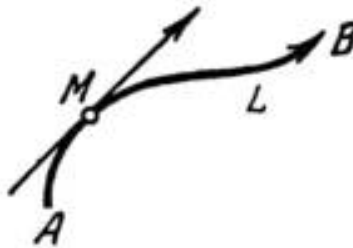


Рисунок 4.3

Нехай α, β, γ кути, які утворює дотична до L з осями координат.

Оскільки $dx = \cos \alpha dl$, $dy = \cos \beta dl$, $dz = \cos \gamma dl$, то

$$\int_{AB} P dx + Q dy + R dz = \int_{AB} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dl. \quad (4.8)$$

4.5. Умови незалежності криволінійного інтеграла від шляху інтегрування

Якщо функції $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $P'_y(x, y)$, $Q'_x(x, y)$ визначені і неперервні в однозв'язній обмеженій замкненій області D площини, то наступні чотири умови еквівалентні:

$$1) \text{ величина криволінійного інтеграла } \int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

не залежить від шляху інтегрування, взятого в цій області, а лише від початкової й кінцевої точок інтегрування та від функцій P і Q ;

2) криволінійний інтеграл по довільній замкненій кусково-гладкій кривій у даній області дорівнює нулю;

$$3) \text{ у даній області виконується умова } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x};$$

4) існує така функція $F(x, y)$, визначена в області, для якої вираз $Pdx + Qdy$ є повним диференціалом, тобто $dF = Pdx + Qdy$.

Аналогічне твердження справедливе для криволінійних інтегралів другого роду вздовж просторових кривих. Тобто, якщо в деякій замкненій поверхнево-однозв'язній області функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ визначені і неперервні разом із своїми частинними похідними першого порядку, то наступні чотири умови еквівалентні:

1) для довільних двох точок з області криволінійний інтеграл від заданих функцій не залежить від форми кривої інтегрування, взятої в цій області;

2) криволінійний інтеграл по довільній замкненій кусково-гладкій кривій у даній області дорівнює нулю;

3) у даній області виконуються умови

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}; \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}; \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z};$$

4) існує така функція $F(x, y, z)$, визначена в області, для якої вираз $Pdx + Qdy + Rdz$ є повним диференціалом, тобто $dF = Pdx + Qdy + Rdz$.

Приклади розв'язання задач

49. Чи залежить криволінійний інтеграл від шляху інтегрування $\int_L x^3 y^4 dx - x^4 y^3 dy$?

► За умовами задачі $P(x, y) = x^3 y^4$; $Q(x, y) = -x^4 y^3$.
Знайдемо частинні похідні $\frac{\partial P}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}$: $\frac{\partial P}{\partial y} = 4x^3 y^3$;
 $\frac{\partial Q}{\partial x} = -4x^3 y^3$; $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Відповідь: інтеграл залежить від шляху інтегрування. ◀

50. Обчислити інтеграл $\int_{AB} (x^2 - y^2) dx - 2xy dy$ по довільній кривій, що сполучає точки $A(0;0)$ і $B(1;1)$.

► У даному випадку функції $P = x^2 - y^2$, $Q = -2xy$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = -2y$ неперервні, і відповідна рівність частинних похідних виконується. Тому інтеграл не залежить від форми кривої, що сполучає точки A і B .

Обчислимо інтеграл по прямій $y = x$, що сполучає ці точки, $\int_{AB} (x^2 - y^2) dx - 2xy dy = -2 \int_0^1 x^2 dx = -\frac{2}{3}$.

Відповідь: $I = -\frac{2}{3}$. ◀

Завдання для самостійного розв'язання

41. Чи залежить криволінійний інтеграл від шляху інтегрування $\int_{AB} y^2 dx + 2xy dy$?

42. Обчислити інтеграл $\int_{AB} 3x^2 y dx + (x^3 + 1) dy$ по довільній кривій, що сполучає точки $A(0;0)$ і $B(1;1)$.

43. За допомогою формули Гріна довести, що $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \frac{1}{3} \oint_C x^3 dy + y^3 dx$.

4.6. Застосування криволінійних інтегралів другого роду

1. Площа плоскої фігури.

$$S = \oint_L x dy = -\oint_L y dx = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx. \quad (4.9)$$

де L – контур, який оточує плоску фігуру

2. Робота змінної сили. Нехай змінна сила $\vec{F}$ утворює з осями координат кути α, β, γ , тоді її проєкції P, Q, R на осі координат Ox, Oy, Oz відповідно складуть $P = F \cos \alpha, Q = F \cos \beta, R = F \cos \gamma$. Роботу сили $\vec{F}$ обчислюють за формулою

$$A = \int_{AB} P dx + Q dy + R dz. \quad (4.10)$$

Приклади розв'язання задач

51. Знайти площу, обмежену петлею декартового листа

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0.$$

► Перетворимо спочатку дане рівняння до параметричного вигляду, покладаючи $y = xt$.

Тоді $x = \frac{3at}{1+t^3}$, $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$. Геометрично параметр $t = \frac{y}{x}$

кутовий коефіцієнт полярного радіуса. Точка $M(x; y)$ опише всю петлю кривої при зміні t від 0 до $+\infty$.

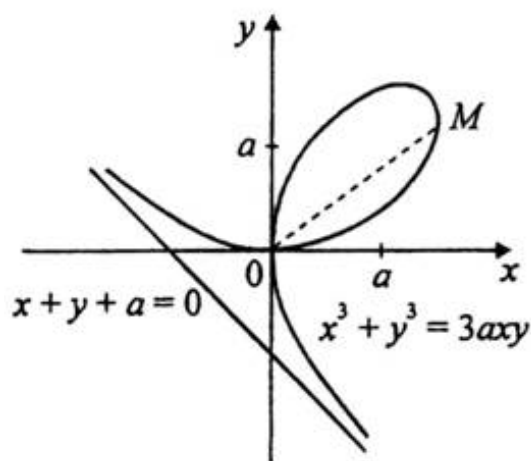


Рисунок 4.5

Криволінійний інтеграл перетворюється у невластний інтеграл по змінній t

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \oint_l x dy - y dx = \frac{9a^2}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{(1+t^3)^2} = \frac{3a^2}{2} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_0^{\beta} (1+t^3)^{-2} d(1+t^3) = \\ &= \frac{3a^2}{2} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+t^3} \Big|_{\beta}^0 = \frac{3a^2}{2} \text{ (кв.од).} \end{aligned}$$

Відповідь: $S = \frac{3a^2}{2}$ кв.од. ◀

52. Знайти роботу сили $\vec{F} = yx\vec{i} + (y+x)\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки по прямій $y = x$ із точки $O(0;0)$ в точку $B(1;1)$.

$$\begin{aligned} \blacktriangleright A &= \int_{OB} yx dx + (y+x) dy = \int_0^1 (x^2 + (x+x)) dx = \\ &= \int_0^1 (x^2 + 2x) dx = \frac{4}{3} \text{ (од.роботи). } \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Відповідь: $A = \frac{4}{3}$ од.роботи.

Завдання для самостійного розв'язання

44. Знайти площу, обмежену замкнутою кривою $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.

45. Знайти площу, обмежену петлею кривої $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

46. Знайти роботу сили $\vec{F} = (x^2 - 2y)\vec{i} + (y^2 - 2x)\vec{j}$ при переміщенні вздовж лінії L від точки M до точки N , якщо L – відрізок прямої MN , $M(-4;0)$, $N(0;2)$.

§ 5. Поверхневі інтеграли першого роду

5.1. Поняття поверхневого інтеграла першого роду (по площі поверхні). Його геометричний і механічний зміст

Означення 1. Поверхня називається гладкою, якщо в кожній її точці існує дотична площина, яка неперервно змінюється вздовж поверхні.

Означення 2. Поверхня називається кусково-гладкою, якщо вона може бути представлена у вигляді об'єднання скінченного числа неперервно сполучених гладких поверхонь.

Нехай $f(M) = f(x, y, z)$ функція, визначена і неперервна на деякій гладкій чи кусково-гладкій поверхні σ . Для простоти обмежимося гладким випадком. Розіб'ємо поверхню σ на n довільних частин σ_i без спільних внутрішніх точок (рис.5.1).

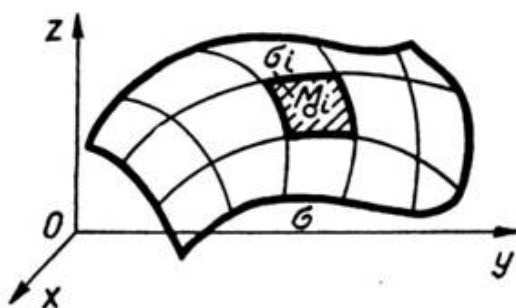


Рисунок 5.1

Нехай $\Delta\sigma_i$ площа частини поверхні σ_i , $d(\sigma_i)$ – діаметр частини поверхні σ_i , $(i = 1, 2, \dots, n)$. У кожній частині σ_i фіксуємо довільну точку $M_i(\xi_i; \eta_i; \varsigma_i)$, обчислимо $f(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)$ і складемо суму

$$I_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta\sigma_i.$$

Ця сума називається інтегральною сумою для функції $f(x, y, z)$ по поверхні σ .

Означення 3. Якщо інтегральна сума I_n при $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} d(\sigma_i) \rightarrow 0$ має скінченну границю, яка не залежить ні від способу розбиття поверхні σ , ні від вибору точок $M_i(\xi_i; \eta_i; \zeta_i)$, то цю границю називають поверхневим інтегралом першого роду від функції $f(M) = f(x, y, z)$ по поверхні σ і позначають $\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma$. Таким чином, за означенням

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta\sigma_i.$$

У цьому випадку функція $f(x, y, z)$ називається інтегрованою по поверхні σ , а поверхня σ – областю інтегрування. Якщо $f(x, y, z) \equiv 1$, то $\iint_{\sigma} d\sigma$ – площа поверхні σ (геометричний зміст поверхневого інтеграла першого роду). Якщо функція $f(x, y, z)$ виражає поверхневу густину поверхні σ , то $\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma$ – маса поверхні σ (механічний зміст поверхневого інтеграла першого роду).

5.2. Обчислення поверхневих інтегралів першого роду

Обчислення поверхневого інтеграла першого роду здійснюється шляхом зведення поверхневого інтеграла до подвійного.

1. Якщо гладка поверхня σ , яка **явно задана** рівнянням $z = z(x, y)$, проєктується на площину Oxy в область D_{xy} , то

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy. \quad (5.1)$$

Ця формула виражає поверхневий інтеграл першого роду по поверхні σ , через подвійний інтеграл по області D_{xy} – проєкції поверхні σ на площину Oxy .

Аналогічні формули мають місце і для випадків, коли гладка поверхня σ задається рівнянням $x = x(y, z)$, $(y, z) \in D_{yz} \subset \mathbb{R}^2$ або рівнянням $y = y(x, z)$, $(x, z) \in D_{xz} \subset \mathbb{R}^2$

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2} dy dz, \quad (5.2)$$

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_{D_{xz}} f(x, y(x, z), z) \sqrt{1 + (y'_x)^2 + (y'_z)^2} dx dz, \quad (5.3)$$

де D_{yz} і D_{xz} – проєкції поверхні σ на координатні площини Oyz і Oxz відповідно.

2. Якщо поверхня задана **параметричними рівняннями** $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, $(u, v) \in D_{uv}$, то

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_{D_{uv}} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv, \quad (5.4)$$

де $E = (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2$, $G = (x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2$, $F = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v$.

Приклади розв'язання задач

53. Обчислити інтеграл $\iint_{\sigma} (3x + 2z) d\sigma$, де σ – частина площини $3x - y + 2z = 4$, яка обмежена координатними площинами.

► Запишемо рівняння площини у відрізках і зобразимо

iii (рис.5.2). Отже, $\frac{x}{4/3} + \frac{y}{-4} + \frac{z}{2} = 1$.

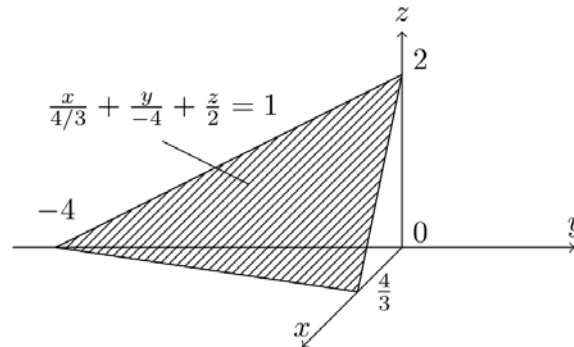


Рисунок 5.2

Скористаємося формулою 5.2

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z) \sqrt{(x'_y)^2 + (x'_z)^2 + 1} dy dz,$$

де D_{yz} – проєкція поверхні σ на площину yOz . У даному

$$\text{випадку } 3x - y + 2z = 4 \Rightarrow 3x = 4 + y - 2z \Rightarrow x = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z;$$

$$x'_y = \frac{1}{3}, \quad x'_z = -\frac{2}{3},$$

$$\sqrt{(x'_y)^2 + (x'_z)^2 + 1} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + 1} = \sqrt{\frac{14}{9}} = \frac{\sqrt{14}}{3}.$$

Таким чином,

$$\iint_{\sigma} (3x + 2z) d\sigma = \iint_{D_{yz}} 3\left(\frac{4}{3} + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z\right) \frac{\sqrt{14}}{3} dy dz = \frac{\sqrt{14}}{3} \iint_{D_{yz}} (4 + y) dy dz.$$

Область D_{yz} – трикутник, що відтинається прямою від координатного кута

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 4, \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow 2z = y + 4 \Rightarrow z = \frac{y+4}{2}.$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{14}}{3} \iint_{D_{yz}} (4+y) dy dz &= \frac{\sqrt{14}}{3} \int_{-4}^0 (4+y) dy \int_0^{\frac{y+4}{2}} dz = \frac{\sqrt{14}}{3} \int_{-4}^0 (4+y) z \Big|_0^{\frac{y+4}{2}} dy = \\ &= \frac{\sqrt{14}}{3} \int_{-4}^0 \left(\frac{y+4}{2} - 0 \right) (4+y) dy = \frac{\sqrt{14}}{3} \cdot \frac{1}{2} \int_{-4}^0 (y+4)^2 dy = \frac{\sqrt{14}}{6} \cdot \frac{1}{3} (y+4)^3 \Big|_{-4}^0 = \frac{32\sqrt{14}}{9}. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

54. Обчислити $I = \iint_{\sigma} (y + z + \sqrt{a^2 - x^2}) d\sigma$, де σ –

поверхня циліндра $x^2 + y^2 = a^2$ обмежена площинами $z = 0$ і $z = h$.

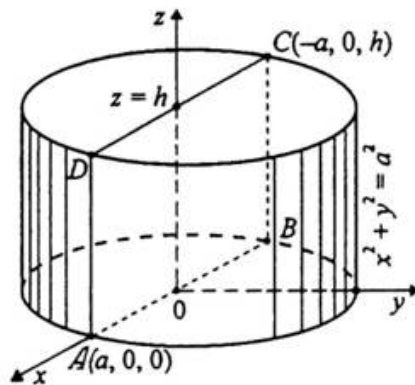


Рисунок 5.4

► Для всієї поверхні σ не можна виразити одну із

координат однозначною функцією від інших координат. Частини циліндричної поверхні розміщені з різних сторін від вертикальних координатних площин (рис.5.4), мають різні явні рівняння: частина σ_1 , розміщена зліва від площини, має рівняння $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$, а частина σ_2 , розміщена справа від цієї площини, має рівняння $y = \sqrt{a^2 - x^2}$. Тому обчислюємо даний інтеграл по поверхні як суму інтегралів I_1, I_2 по її частинах σ_1, σ_2 .

Зводячи поверхневі інтеграли до подвійних інтегралів по змінних x, y , одержимо

$$\sqrt{1 + (y'_x)^2 + (y'_z)^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

$$I_1 = a \iint_{D_{xz}} \frac{z \, dx \, dz}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad I_2 = a \iint_{D_{xz}} \left(2 + \frac{z}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right) dx \, dz.$$

$$\text{Таким чином, } I = I_1 + I_2 = 2a \iint_{ABCD} \left(1 + \frac{z}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right) dx \, dz, \text{ бо}$$

прямокутник $ABCD$ є спільною проєкцією поверхонь σ_1 і σ_2 на площину Oxz . Обчислюючи одержаний подвійний інтеграл, знайдемо

$$I = 2a \int_0^h dz \int_{-a}^a \left(1 + \frac{z}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right) dx = 2a \int_0^h \left(x + z \arcsin \frac{x}{a} \right) \Big|_{x=-a}^{x=a} dz =$$

$$= 2a \int_0^h (2a + \pi z) dz = 2a \left(2az + \frac{\pi z^2}{2} \right) \Big|_0^h = ah(4a + \pi h). \blacktriangleleft$$

Відповідь: $I = ah(4a + \pi h)$.

55. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint_{\sigma} (x^2 + y^2) d\sigma$, де

σ – півсфера $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

► Використаємо формулу (6.2). Для цього знаходимо частинні похідні

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}. \text{ Тоді}$$

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy, \text{ тобто } d\sigma = \frac{dx dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

Поверхня σ проєктується на площину xOy в область D , яка є колом, що задається рівнянням $x^2 + y^2 \leq 1$. Тому, поверхневий інтеграл перетворюється у подвійний інтеграл

$$\iint_{\sigma} (x^2 + y^2) d\sigma = \iint_D \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dx dy.$$

Для обчислення подвійного інтеграла по області D перейдемо до полярної системи координат: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq \rho < +\infty$.

В полярних координатах область D визначається наступним чином: $x^2 + y^2 \leq 1$, $\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi \leq 1$, $\rho \leq 1$,

$$0 \leq \varphi < 2\pi.$$

В силу симетрії кола і парності підінтегральної функції
оберемо $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, тоді

$$I = \iint_D (x^2 + y^2) \frac{dx dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = 4 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} = \frac{4\pi}{3}.$$

Внутрішній інтеграл обчислюється за допомогою підстановки

$$\rho = \sin t, d\rho = \cos t dt, \sqrt{1 - \rho^2} = \cos t; \rho = 0, t = 0; \rho = 1, t = \pi/2,$$

$$\text{тому } \int_0^1 \frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 t \cos t}{\cos t} dt = - \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 t) d \cos t = \frac{2}{3}. \blacktriangleleft$$

Відповідь: $I = 4\pi/3$.

56. Обчислити інтеграл $\iint_{\sigma} xyz d\sigma$, де σ – частина

конічної поверхні $\frac{1}{4}z^2 = x^2 + y^2$, яка розміщена між

площинами $z = 0$, $z = 2$.

► Запишемо рівняння конуса, по поверхні якого здійснюється інтегрування, у вигляді $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ і зобразимо поверхню інтегрування.

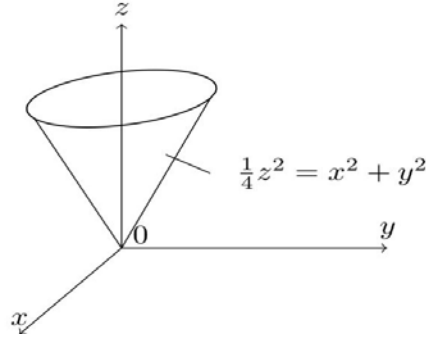


Рисунок 5.5

Перший спосіб. Скористаємося формулою 5.1, спроектувавши конус у площину xOy . Для цього обчислимо частинні похідні

$$z'_x = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot (x^2 + y^2)'_x = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$z'_y = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot (x^2 + y^2)'_y = \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

та величину

$$\begin{aligned} \sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1} &= \sqrt{\left(\frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{4x^2}{x^2 + y^2} + \frac{4y^2}{x^2 + y^2} + 1} = \\ &= \sqrt{\frac{4x^2 + 4y^2 + x^2 + y^2}{x^2 + y^2}} = \sqrt{\frac{5x^2 + 5y^2}{x^2 + y^2}} = \sqrt{\frac{5(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}} = \sqrt{5}. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\iint_{\sigma} xyz d\sigma = \iint_D xy \cdot 2\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{5} dx dy = 2\sqrt{5} \iint_D xy \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = I.$$

Площина $z=2$ перетинає конус по колу одиничного радіуса $x^2 + y^2 = 1$, тому область D (проєкція конуса на площину xOy) буде колом $x^2 + y^2 = 1$. У подальшому, звичайно, зручніше перейти до полярних координат:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad dx dy = r d\varphi dr, \quad \sqrt{x^2 + y^2} = r, \\ 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

$$I = 2\sqrt{5} \iint_D r \cos \varphi \cdot r \sin \varphi \cdot r \cdot r d\varphi dr = 2\sqrt{5} \iint_D r^4 \cdot \frac{1}{2} \sin 2\varphi \cdot dr d\varphi = \\ = \sqrt{5} \int_0^{2\pi} \sin 2\varphi d\varphi \int_0^1 r^4 dr = \sqrt{5} \frac{1}{5} \int_0^{2\pi} (r^5) \Big|_0^1 \cdot \sin 2\varphi d\varphi = \frac{\sqrt{5}}{5} (1-0) \int_0^{2\pi} \sin 2\varphi d\varphi = \\ = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \cos 2\varphi \Big|_0^{2\pi} = -\frac{\sqrt{5}}{10} (1-1) = 0.$$

Другий спосіб. Спроекуємо конус на площину xOz (утвориться трикутник). Скористаємося формулою 5.3

$$\iint_{\sigma} f(x; y; z) d\sigma = \iint_{D_{xz}} f(x; y(x; z); z) \cdot \sqrt{(y'_x)^2 + (y'_z)^2 + 1} dx dz.$$

Тепер необхідно розбити інтеграл на дві частини

$$\iint_{\sigma} xyz d\sigma = \iint_{\sigma_1} xyz d\sigma_1 + \iint_{\sigma_2} xyz d\sigma_2,$$

де σ_1 – ліва частина конуса, яка виражається функцією

$$y = -\sqrt{\frac{z^2}{4} - x^2}, \quad \text{а } \sigma_2 \text{ – права частина конуса, яка виражається}$$

функцією $y = \sqrt{\frac{z^2}{4} - x^2}$.

Протилежність знаків функцій $y(x, z)$ сприяє взаємознищенню доданків (інтегралів) у сумі. Ми відразу отримаємо той самий результат $\iint_{\sigma} xyz d\sigma = 0$. ◀

Завдання для самостійного розв'язання

47. Обчислити інтеграл $\iint_{\sigma} (6x + 4y + 3z) d\sigma$, де σ – частина площини $x + 2y + 3z = 6$, яка обмежена координатними площинами.

48. Обчислити $\iint_{\sigma} x^2 d\sigma$, де σ – частина бічної поверхні циліндра $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$, що знаходиться в першому октанті.

49. Обчислити інтеграл $\iint_{\sigma} x d\sigma$, де σ – півсфера $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

50. Обчислити інтеграл $\iint_{\sigma} (x^2 + y^2) d\sigma$, де σ – поверхня, яка відтинається від параболоїда $x^2 + y^2 = 2z$ площиною $z = 1$.

51. Обчислити інтеграл $\iint_{\sigma} \frac{d\sigma}{(1 + x + y)^2}$, де σ – поверхня тетраедра $x + y + z \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

52. Обчислити інтеграл $\iint_{\sigma} z^2 d\sigma$ де σ – частина поверхні

конуса $x = r \cos \varphi \sin \alpha, y = r \sin \varphi \sin \alpha, z = r \cos \alpha$ ($0 \leq r \leq a$;
 $0 \leq \varphi < 2\pi$), $\alpha = \text{const} \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$.

5.3. Застосування поверхневих інтегралів першого роду

1. Площа поверхні σ .

$$S = \iint_{\sigma} d\sigma. \quad (5.5)$$

2. Маса матеріальної поверхні.

Нехай на кусково-гладкій поверхні σ розподілено масу з поверхневою густиною $\gamma = \gamma(x, y, z)$, тоді маса матеріальної поверхні обчислюється за формулою

$$m = \iint_{\sigma} \gamma(x, y, z) d\sigma. \quad (5.6)$$

3. Центр мас поверхні.

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{1}{m} M_{yz} = \frac{1}{m} \iint_{\sigma} x \gamma(x, y, z) d\sigma, \\ y_c &= \frac{1}{m} M_{xz} = \frac{1}{m} \iint_{\sigma} y \gamma(x, y, z) d\sigma, \\ z_c &= \frac{1}{m} M_{xy} = \frac{1}{m} \iint_{\sigma} z \gamma(x, y, z) d\sigma, \end{aligned} \quad (5.7)$$

де M_{yz}, M_{xz}, M_{xy} – статичні моменти поверхні відносно площин yOz, xOz, xOy відповідно.

4. Моменти інерції поверхні.

Моменти інерції поверхні відносно осей координат обчислюються за формулами

$$I_x = \iint_{\sigma} (y^2 + z^2) \gamma d\sigma, \quad I_y = \iint_{\sigma} (x^2 + z^2) \gamma d\sigma, \quad I_z = \iint_{\sigma} (x^2 + y^2) \gamma d\sigma, \quad (5.8)$$

а момент інерції відносно початку координат складе

$$I_0 = \iint_{\sigma} (x^2 + y^2 + z^2) \gamma(x, y, z) d\sigma. \quad (5.9)$$

Приклади розв'язання задач

57. Обчислити площу поверхні частини площини $x + 2y + 3z = 6$, яка розміщена у першому октанті.

► Запишемо рівняння площини у відрізках $\frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$

(рис. 5.6).

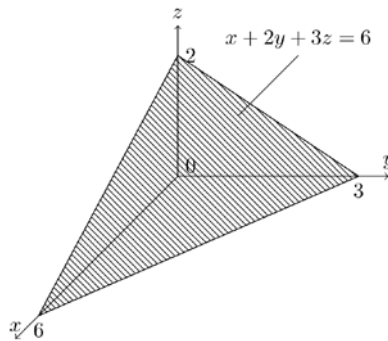


Рисунок 5.6

Згідно формули (5.5) будемо мати $S = \iint_{\sigma} d\sigma$.

Виразимо z через x та y : $3z = 6 - x - 2y \Rightarrow z = 2 - \frac{x}{3} - \frac{2y}{3}$

та обчислимо поверхневий інтеграл за формулою 5.1

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy,$$

де D_{xy} – проєкція поверхні σ на площину xOy , $f(x, y, z) = 1$.

При цьому $z'_x = -\frac{1}{3}$, $z'_y = -\frac{2}{3}$. Отже,

$$\begin{aligned} S &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2} + 1 dx dy = \frac{\sqrt{14}}{3} \iint_{D_{xy}} dx dy = \frac{\sqrt{14}}{3} \int_0^3 dy \int_0^{2(3-y)} dx = \\ &= \frac{\sqrt{14}}{3} \int_0^3 x \Big|_0^{2(3-y)} dy = \frac{2\sqrt{14}}{3} \int_0^3 (3-y) dy = \frac{2\sqrt{14}}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) (3-y)^2 \Big|_0^3 = \\ &= 3\sqrt{14} \text{ (кв.од.)}. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

58. Обчислити площу поверхні $z = 4 - x^2 - y^2$, яка розміщена у верхній півплощині.

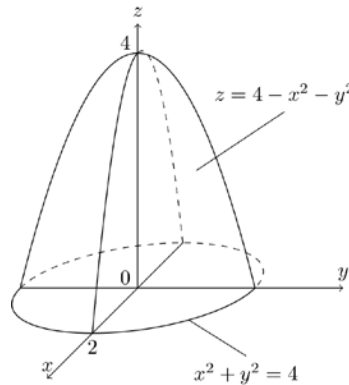


Рисунок 5.7.

► Площу шуканої фігури обчислимо за формулою

$$S = \iint_{\sigma} d\sigma = \iint_D \sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2} + 1 dx dy = I_1.$$

У нашому випадку $z = 4 - x^2 - y^2$, $z'_x = -2x$, $z'_y = -2y$,

$x^2 + y^2 = 4$ – круг радіуса 2 з центром у початку координат.

Таким чином, $I_1 = \iint_D \sqrt{(-2x)^2 + (-2y)^2 + 1} dx dy =$

$$= \iint_D \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dx dy = \iint_D \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1} dx dy = I_2.$$

Здійснимо перехід до полярної системи координат:

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, dx dy = r d\varphi dr, \sqrt{x^2 + y^2} = r, 0 \leq r \leq 2; 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_D \sqrt{4r^2 + 1} \cdot r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r \sqrt{4r^2 + 1} dr = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (4r^2 + 1)^{\frac{1}{2}} d(4r^2 + 1) = \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} \int_0^{2\pi} \sqrt{(4r^2 + 1)^3} \Big|_0^2 d\varphi = \frac{1}{12} (\sqrt{17^3} - \sqrt{1^3}) \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{(17\sqrt{17} - 1)}{12} \cdot (\varphi) \Big|_0^{2\pi} = \\ &= \frac{(17\sqrt{17} - 1)}{12} \cdot (2\pi - 0) = \frac{(17\sqrt{17} - 1)\pi}{6} \text{ (кв.од.). } \blacktriangleleft \end{aligned}$$

59. Обчислити масу сфери, якщо поверхнева густина в кожній точці дорівнює квадрату відстані проєкції цієї точки на площину від центра сфери, тобто $\gamma(x, y, z) = x^2 + y^2$.

► Нехай поверхня σ є сферою радіуса ρ з центром в початку координат. Тоді її параметричне зображення:

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \theta,$$

$$0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Враховуючи, що D – прямокутник, $f(x, y, z) =$
 $= \gamma(x, y, z) = x^2 + y^2$ і $u = \theta, v = \varphi$, одержимо

$$E = \rho^2, \quad G = \rho^2 \sin^2 \theta, \quad F = 0, \quad \sqrt{EG - F^2} = \rho^2 \sin \theta,$$

$$\begin{aligned}
 m &= \iint_{\sigma} (x^2 + y^2) d\sigma = \iint_D \rho^2 \sin^2 \theta \cdot \rho^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \rho^4 \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \\
 &= 2\pi \rho^4 \int_{\pi}^0 (1 - \cos^2 \theta) d(\cos \theta) = 2\pi \rho^4 \left(\cos \theta - \frac{\cos^3 \theta}{3} \right) \Big|_{\pi}^0 = \frac{8}{3} \pi \rho^4
 \end{aligned}$$

(од.маси). ◀

Завдання для самостійного розв'язання

53. Обчислити площу поверхні частини площини $2x + 2y + z = 8a$, яка розміщена у внутрішній частині циліндра $x^2 + y^2 = R^2$.

54. Обчислити площу поверхні конуса $z^2 = 2xy$, що розміщена в першому октанті між площинами $x = 2$, $y = 4$.

55. Обчислити площу поверхні сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, яка розміщена всередині циліндра $x^2 + y^2 = Rx$.

56. Обчислити масу циліндричної поверхні $x^2 + y^2 = R^2$, яка розміщена між поверхнями $z = 0$, $z = H$, якщо поверхнева густина в кожній точці оберненопропорційна квадрату відстані її від початку координат.

57. Знайти момент інерції однорідної трикутної пластинки $x + y + z = a$, ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$) відносно координатної осі Ox .

58. Знайти координати центра мас частини однорідної поверхні $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, яка вирізається поверхнею $x^2 + y^2 = ax$.

§ 6. Поверхневі інтеграли другого роду

6.1. Поняття поверхневого інтеграла другого роду (по координатах). Його фізичний зміст

Поверхня, у якої фіксована одна з її сторін називається орієнтовною. Поверхневі інтеграли другого роду розглядаються тільки по орієнтовних поверхнях.

Так як вибір напрямку нормалі визначає сторону поверхні, орієнтацію поверхні часто називають вибором сторони поверхні σ . Звідси термін “двостороння поверхня”. Двосторонні поверхні характеризуються такою властивістю: якщо основу вектора нормалі неперервно переміщати по будь-якому замкненому контуру, що лежить на поверхні і не перетинає її межу, то при поверненні в вихідну точку напрям співпадає з початковим. Якщо, зокрема, σ орієнтовна (сторона вже вибрана) поверхня, обмежена контуром L , який не має точок самоперетину, то за додатний напрям обходу контура вважаємо той, при русі по якому сама поверхня залишається зліва по відношенню до точки, яка здійснює обхід. Протилежний напрям будемо вважати від’ємним. Якщо змінити орієнтацію поверхні, то додатний і від’ємний напрями обходу контура поміняються місцями.

Якщо на поверхні знайдеться замкнений контур, при неперервному переміщенні вздовж якого вектор нормалі, повертаючись у вихідну точку, змінює свій початковий напрям на протилежний, то таку поверхню називають односторонньою. Односторонні поверхні неорієнтовні.

Надалі будемо розглядати тільки двосторонні поверхні.

Нехай в точках деякої гладкої поверхні σ , заданої рівнянням $z = z(x, y)$ визначена неперервна функція $R(x, y, z)$. Зорієнтуємо поверхню σ , тобто виберемо одну з двох сторін поверхні σ . Тим самим

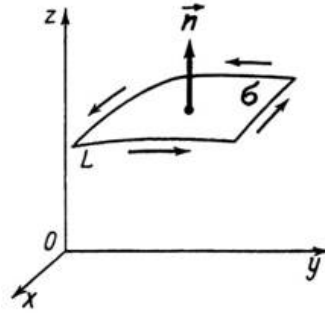


Рисунок 6.1

ми виберемо один із двох можливих напрямків векторів нормалі в точках поверхні. Якщо вектори нормалей складають гострі кути з віссю Oz , то вибрана верхня сторона поверхні σ , якщо тупі кути, то вибрана нижня сторона поверхні. Розіб'ємо її довільним чином на n частин. Позначимо через s_i проєкцію i -тої частини поверхні σ на площину Oxy , а через Δs_i площу s_i , взятую зі знаком плюс, якщо обрано верхню сторону поверхні σ , і зі знаком мінус, якщо обрано нижню сторону поверхні. Виберемо в кожній частині σ_i довільну точку $M(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ і складемо суму

$$I_n = \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_i,$$

яка називається інтегральною сумою для функції $R(x, y, z)$ по орієнтовній поверхні σ . Нехай $d(\sigma_i)$ діаметр частини поверхні σ_i .

Означення. Якщо вказана інтегральна сума при $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} d(\sigma_i) \rightarrow 0$

має скінченну границю, яка не залежить ні від способу розбиття поверхні σ , ні від вибору точок $M(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, то цю границю називають поверхневим інтегралом другого роду від функції $R(x, y, z)$ по вибраній стороні орієнтовної поверхні σ і позначають $\iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy$ (тут $dx dy$

нагадує про площу проєкції елемента поверхні на площину Oxy). У цьому випадку функція називається інтегрованою по поверхні σ по змінних x та y . У символі позначення поверхневого інтеграла другого роду, тобто в $\iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy$ не міститься вказівки на те, яка сторона поверхні мається на увазі, тому цю вказівку необхідно робити кожен раз окремо. Із самого означення випливає, що при заміні сторони поверхні на протилежну, інтеграл змінює знак на протилежний.

$$\text{Таким чином, за означенням } \iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i.$$

Аналогічно визначаються поверхневі інтеграли по координатах y, z та x, z , тобто $\iint_{\sigma} P(x, y, z) dy dz$, $\iint_{\sigma} Q(x, y, z) dx dz$, якщо $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$, де $d\sigma$ – елемент площі поверхні σ ; α, β, γ – кути між нормаллю $\vec{n}$ до поверхні σ у довільній її точці та осями Ox, Oy, Oz відповідно, то поверхневий інтеграл другого роду можна звести до поверхневого інтеграла першого роду

$$\iint_{\sigma} P dy dz + Q dx dz + R dx dy = \iint_{\sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma.$$

Ліву частину формули називають загальним поверхневим інтегралом другого роду.

Для односторонньої поверхні поняття поверхневого інтеграла другого роду не вводиться.

Фізичний зміст поверхневого інтеграла другого роду. Нехай

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

є швидкістю рідини або газу, що протікає через поверхню. Тоді кількість рідини або газу, що протікає за одиницю часу через поверхню знаходять за формулою

$$\Pi = \iint_{\sigma} P dy dz + Q dx dz + R dx dy = \iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma,$$

де $\vec{n} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$ – орт нормалі.

Поверхневі інтеграли другого роду мають всі властивості поверхневих інтегралів першого роду, за виключенням однієї важливої відмінності: при зміні сторони поверхні на протилежну (переорієнтації) поверхневі інтеграли другого роду змінюють знак на протилежний.

6.2. Обчислення поверхневих інтегралів другого роду

Обчислення і умови існування поверхневого інтеграла другого роду впливають із зведення поверхневого інтеграла до подвійного.

Нехай орієнтовну поверхню σ задано рівнянням $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$, а $R(x, y, z)$ – неперервна функція на поверхні $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$, тоді

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy, \quad (6.1)$$

де знак ”плюс“ (”мінус“) береться, коли нормаль $\vec{n}$ до поверхні утворює гострий (тупий) кут з віссю Oz .

Аналогічно, якщо гладка поверхня задана функцією $x = x(y, z)$, $(y, z) \in D_{yz}$ або $y = y(x, z)$, $(x, z) \in D_{xz}$, то для обчислення поверхневого інтеграла другого роду користуються відповідно формулами

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z) dy dz = \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z) dy dz, \quad (6.2)$$

$$\iint_{\sigma} Q(x, y, z) dx dz = \pm \iint_{D_{xz}} Q(x, y(x, z), z) dx dz. \quad (6.3)$$

Знак ”плюс“ беремо у цих формулах тоді, коли нормаль до поверхні σ утворює відповідно з віссю Ox , чи з віссю Oy гострий кут, а знак ”мінус“ – коли тупий кут; D_{yz} , D_{xz} – проєкції поверхні σ на площини Oyz та Oxz відповідно.

Для обчислення $\iint_{\sigma} P dydz + Q dx dz + R dx dy$ використовуються всі

три попередні формули, якщо поверхня σ однозначно проєктується на всі три площини. У більш складних випадках поверхня розбивається на частини, а інтеграл на суму інтегралів по цих частинах. Дуже важливо правильно визначитись зі знаками. Наприклад, якщо на рис. 6.2 вважати, що чорний елемент поверхні належить верхній стороні поверхні, то білий елемент поверхні будемо вважати елементом нижньої сторони поверхні.

Якщо поверхня замкнена, то розрізняють зовнішню сторону поверхні і внутрішню. Зовнішню сторону поверхні називають додатною стороною, а внутрішню – від'ємною.

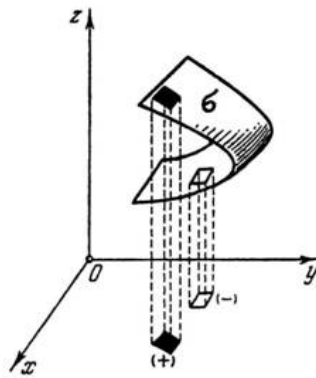


Рисунок 6.2

Приклади розв'язання задач

60. Обчислити інтеграл $\iint_{\sigma} (y^2 + z^2) dx dy$, де σ – верхня

сторона поверхні $z = \sqrt{1 - x^2}$, що відтинається координатними площинами (рис. 6.3).

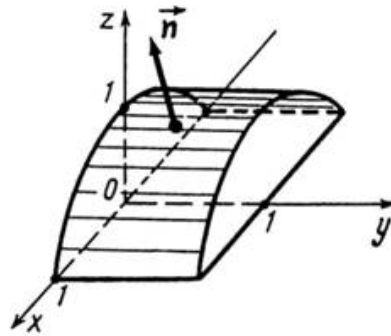


Рисунок 6.3

► Проекцією D_{xy} даної поверхні на площину Oxy є прямокутник, що визначається нерівностями $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. З урахуванням того, що нормаль до поверхні утворює гострий кут з віссю Oz знаходимо

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} (y^2 + z^2) dx dy &= \iint_{D_{xy}} \left(y^2 + \left(\sqrt{1-x^2} \right)^2 \right) dx dy = \int_{-1}^1 dx \int_0^1 (y^2 + 1 - x^2) dy = \\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{y^3}{3} + y - x^2 y \right) \Big|_0^1 dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{4}{3} - x^2 \right) dx = 2. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

61. Обчислити інтеграл $\iint_{\sigma} (x+z) dy dz + (x+3y) dx dz + y dx dy$,

де σ – верхня частина площини $x+2y+z=2$, що розміщена у першому октанті.

► Запишемо рівняння площини у відрізках $\frac{x}{2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{2} = 1$. Нарисуємо площину, додавши зображення її

орта нормалі, який вказує потрібний напрям.

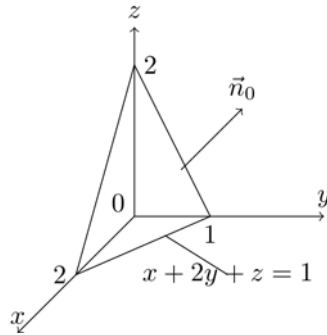


Рисунок 6.4

Такий інтеграл можна обчислити двома способами.

Перший спосіб. Скористаємось властивістю лінійності

$$\begin{aligned} \iint_{\vec{\sigma}} (x+z) dydz + (x+3y) dx dz + y dx dy &= \iint_{\vec{\sigma}} (x+z) dydz + \\ &+ \iint_{\vec{\sigma}} (x+3y) dx dz + \iint_{\vec{\sigma}} y dx dy = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Тепер кожен інтеграл обчислимо окремо

$$I_1 = \iint_{\vec{\sigma}} (x+z) dydz.$$

Нормальний вектор поверхні трикутника утворює гострий кут з координатною площиною xOy , тому цей поверхневий інтеграл зводиться до подвійного за формулою 6.1

$$\iint_{\vec{\sigma}} f(x, y, z) dydz = \iint_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z) dydz,$$

де D_{yz} – проєкція цієї поверхні на площину yOz . Виражаємо потрібну функцію з рівняння поверхні:

$$x + 2y + z = 2 \Rightarrow x(y, z) = 2 - 2y - z.$$

$$\text{Таким чином, } \iint_{\sigma} (x + y) dy dz = \iint_{D_{yz}} (2 - 2y - z + z) dy dz = 2 \iint_{D_{yz}} (1 - y) dy dz.$$

Зобразимо D_{yz} .

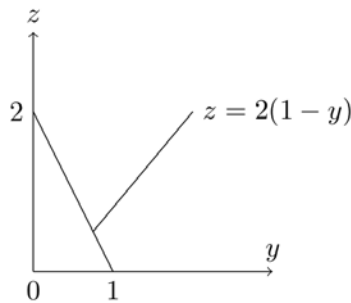


Рисунок 6.5

Отже,

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{D_{yz}} 2(1 - y) dy dz = 2 \int_0^1 (1 - y) dy \int_0^{2(1-y)} dz = 2 \int_0^1 (1 - y) z \Big|_0^{2(1-y)} dy = \\ &= 4 \int_0^1 (1 - y)^2 dy = -\frac{4}{3} (1 - y)^3 \Big|_0^1 = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Аналогічно обчислимо } \iint_{\sigma} (x + 3y) dx dz \text{ та } \iint_{\sigma} y dx dy,$$

проєктуючи при цьому поверхню інтегрування на площини xOz та xOy в області D_{xz} та D_{xy} відповідно. При цьому, на

площині xOz трикутник буде відтинатися прямою $z = 2 - x$,
 $(0 \leq x \leq 2)$, а на площині xOy – прямою $x = 2(1 - y)$, $(0 \leq y \leq 1)$.

Отже,

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \iint_{\sigma} (x + 3y) dx dz = \iint_{D_{xz}} \left(x + 3 \left(1 - \frac{x}{3} - \frac{z}{3} \right) \right) dx dz = \iint_{D_{xz}} \left(3 - \frac{x}{3} - \frac{3z}{2} \right) dx dz = \\
 &= \int_0^2 dx \int_0^{2-x} \left(3 - \frac{x}{3} - \frac{3z}{2} \right) dz = \int_0^2 \left(3z - \frac{xz}{2} - \frac{3z^2}{4} \right) \Big|_0^{2-x} dx = \\
 &= \int_0^2 \left(3(2-x) - \frac{x(2-x)}{2} - \frac{3(2-x)^2}{4} \right) dx = \\
 &= 3 \left(-\frac{1}{2} \right) (2-x)^2 \Big|_0^2 + \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 - \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3} \right) (2-x)^3 \Big|_1^2 = \frac{10}{3}, \\
 I_3 &= \iint_{\sigma} y dx dy = \iint_{D_{xy}} y dx dy = \int_0^1 y dy \int_0^{2(1-y)} dx = \int_0^1 y 2(1-y) dy = \int_0^1 (2y - 2y^2) dy = \\
 &= \left(y^2 - \frac{2y^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

Додаючи три доданки, отримаємо

$$\iint_{\sigma} (x + z) dy dz + (x + 3y) dx dz + y dx dy = \frac{4}{3} + \frac{10}{3} + \frac{1}{3} = 5.$$

Другий спосіб. Поверхневий інтеграл другого роду можна звести до поверхневого інтегралу першого роду за такою формулою

$$\iint_{\vec{\sigma}} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy = \iint_{\vec{\sigma}} (\vec{F} \cdot \vec{n}_0) d\sigma.$$

У нашому випадку $\vec{F}(x, y, z) = (x + z) \cdot \vec{i} + (x + 3y) \cdot \vec{j} + y \cdot \vec{k}$,

де $\vec{n}_0$ – орт нормалі до заданої сторони поверхні $z = z(x, y)$.

Цей вектор обчислюється наступним чином:

– для верхньої сторони поверхні

$$\vec{n}_0(x, y) = \frac{-z'_x \vec{i} - z'_y \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}};$$

– для нижньої сторони поверхні

$$\vec{n}_0(x, y) = \frac{-z'_x \vec{i} - z'_y \vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}}.$$

Враховуючи, що $x + 2y + z = 2 \Rightarrow z = 2 - x - 2y$,

$$z'_x = -1, \quad z'_y = -2;$$

$$\vec{n}_0(x, y) = \frac{-z'_x \vec{i} - z'_y \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}} = \frac{-(-1)\vec{i} - (-2)\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 1}} = \frac{\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + 4 + 1}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}).$$

Обчислимо скалярний добуток

$$\begin{aligned}\vec{F} \cdot \vec{n}_0 &= \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot [(x+z) \cdot 1 + (x+3y) \cdot 2 + y \cdot 1] = \frac{1}{\sqrt{6}}(x+z+2x+6y+y) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}}(3x+7y+z)\end{aligned}$$

і внесемо результат у формулу

$$\iint_{\sigma} (x+z)dydz + (x+3y)dxdz + ydxdy = \frac{1}{\sqrt{6}} \iint_{\sigma} (3x+7y+z)d\sigma.$$

Спроекуємо поверхню σ (вже не орієнтовану) на площину xOy і за допомогою формули

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z)d\sigma = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \cdot \sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}dxdy$$

зведемо поверхневий інтеграл до подвійного (D – проєкція поверхні σ на площину xOy). Для цього запишемо рівняння поверхні у вигляді $z = 2 - x - 2y$ і обчислимо

$$\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1} = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 1} = \sqrt{6}.$$

Таким чином,

$$\iint_{\sigma} (x+z)dydz + (x+3y)dxdz + ydxdy = \frac{1}{\sqrt{6}} \iint_{\sigma} (3x+7y+z)d\sigma =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{6}} \iint_D (2x + 5y + 2) \cdot \sqrt{6} dx dy = \int_0^1 dy \int_0^{2(1-y)} (2x + 5y + 2) dx = \\
&= \int_0^1 (x^2 + 5xy + 2x) \Big|_0^{2(1-y)} dy = \int_0^1 (4(1-y)^2 + 10y - 10y^2 + 4(1-y)) dy = \\
&= \left(-\frac{4}{3}(1-y)^3 + 5y^2 - \frac{10}{3}y^3 - 2(1-y)^2 \right) \Big|_0^1 = 5.
\end{aligned}$$

(Для обчислення подвійного інтеграла варто скористатися рис.6.5.). ◀

Зауваження. Враховуючи очевидну властивість

$$\iint_{\sigma^-} P dy dz + Q dx dz + R dx dy = - \iint_{\sigma^+} P dy dz + Q dx dz + R dx dy, \text{ цей же}$$

інтеграл по нижній стороні поверхні буде дорівнювати -5. ◀

62. Обчислити $\iint_{\sigma} (x - 3y + 6z) dy dz$ по верхній стороні

площини $x - y - 2z + 4 = 0$ (поверхня σ), яка обмежена координатними площинами.

► Так як одиничний вектор поверхні σ утворює з додатнім напрямком осі Ox тупий кут, то використовуємо формулу

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) dy dz = - \iint_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z) dy dz.$$

В даному випадку $x - y - 2z + 4 = 0 \Rightarrow x = y + 2z - 4$,

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} (x - 3y + 6z) dy dz &= - \iint_{D_{yz}} (y + 2z - 4 - 3y + 6z) dy dz = \\ &= - \iint_{D_{yz}} (-2y + 8z - 4) dy dz = \iint_{D_{yz}} (2y - 8z + 4) dy dz = I. \end{aligned}$$

Зобразимо область D_{yz}

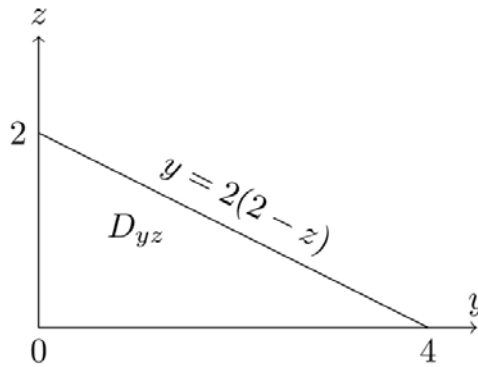


Рисунок 6.6

Очевидно, що

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_{yz}} (2y - 8z + 4) dy dz = \int_0^2 dz \int_0^{2(2-z)} (2y - 8z + 4) dy = \\ &= \int_0^2 (y^2 - 8yz + 4z) \Big|_0^{2(2-z)} dz = \int_0^2 (4(2-z)^2 - 16z(2-z) + 8(2-z)) dz = \\ &= \left(-\frac{4}{3}(2-z)^3 - 16(z^2 - \frac{z^3}{3}) - 4(2-z)^2 \right) \Big|_0^2 = \frac{16}{3}. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

63. Обчислити інтеграл $\iint_{\sigma} xyz dy dz + y dx dz$,

$$\sigma = \{z = 1 - y^2; z \geq 0; 0 \leq x \leq 3\}.$$

► Зробимо рисунок.

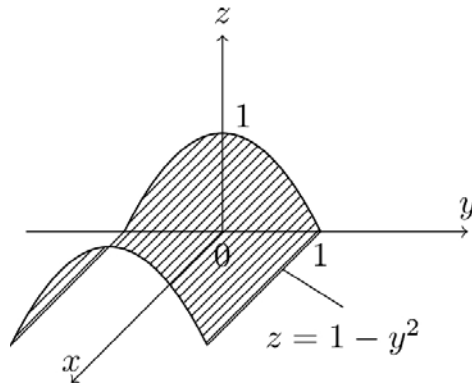


Рисунок 6.7

$$\text{Зауважимо, що } \iint_{\sigma} xyz dy dz + y dx dz = \iint_{\sigma} xyz dy dz + \iint_{\sigma} y dx dz.$$

Оскільки поверхня інтегрування паралельна осі Ox , то

$$\iint_{\sigma} xyz dy dz = 0. \text{ Інтеграл } \iint_{\sigma} y dx dz \text{ розділимо на дві частини}$$

враховуючи, що вектори нормалі лівої частини поверхні

$y = -\sqrt{1-z}$ утворюють з віссю Oy гострі кути, а з правою

частиною поверхні $y = \sqrt{1-z}$ — тупі кути, тому

$$\iint_{\sigma} y dx dz = \iint_{D_{xz}} (-1\sqrt{1-z}) dx dz + \left[-\iint_{D_{xz}} \sqrt{1-z} dx dz \right] = -2 \iint_{D_{xz}} \sqrt{1-z} dx dz = I.$$

Область D_{xz} є прямокутником $0 \leq x \leq 3$; $0 \leq z \leq 1$, тому

$$\begin{aligned} I &= -2 \int_0^1 \sqrt{1-z} dz \int_0^3 dx = -2 \int_0^1 \sqrt{1-z} \cdot (x) \Big|_0^3 dz = -2(3-0) \int_0^1 \sqrt{1-z} dz = \\ &= 6 \int_0^1 (1-z)^{\frac{1}{2}} d(1-z) = 6 \cdot \frac{2}{3} (1-z)^{\frac{3}{2}} \Big|_1^0 = 4 \sqrt{(1-z)^3} \Big|_0^1 = 4(0-1) = -4. \end{aligned}$$

Отже, $\iint_{\vec{\sigma}} xyz dy dz + y dx dz = 0 - 4 = -4$. ◀

64. Обчислити інтеграл $\iint_{\vec{\sigma}} (x + xz) dy dz + y dx dz + (z - x^2) dx dy$

по зовнішній стороні півсфери $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, яка розміщена у верхньому півпросторі.

► Розіб'ємо інтеграл на три доданки

$$\begin{aligned} &\iint_{\vec{\sigma}} (x + xz) dy dz + y dx dz + (z - x^2) dx dy = \\ &= \iint_{\vec{\sigma}} (x + xz) dy dz + \iint_{\vec{\sigma}} y dx dz + \iint_{\vec{\sigma}} (z - x^2) dx dy. \end{aligned}$$

Зобразивши поверхню інтегрування, наглядно переконуємося, що напрями нормальних векторів у різних півсферах різні (рис. 6.8).

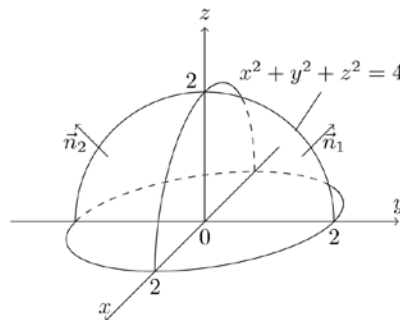


Рисунок 6.8

Обчислимо $\iint_{\sigma} (x + xz) dydz$. Нормальні вектори півсфери

утворюють з віссю Ox і гострі і тупі кути, тому, застосовуючи властивість адитивності, розіб'ємо поверхневий інтеграл на дві частини:

- якщо $x = \sqrt{4 - y^2 - z^2}$ (ближча до нас четвертина сфери), то кути гострі і тому

$$\iint_{\bar{\sigma}} f(x, y, z) dydz = \iint_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z) dydz;$$

- якщо $x = -\sqrt{4 - y^2 - z^2}$ (дальша до нас четвертина сфери), то кути тупі і тому

$$\iint_{\bar{\sigma}} f(x, y, z) dydz = -\iint_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z) dydz.$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} \iint_{\bar{\sigma}} (1+z)x dydz &= \iint_{D_{yz}} (1+z)\sqrt{4-y^2-z^2} dydz + \left[-\iint_{D_{yz}} (1+z)(-\sqrt{4-y^2-z^2}) dydz \right] = \\ &= \iint_{D_{yz}} (1+z)\sqrt{4-y^2-z^2} dydz + \iint_{D_{yz}} (1+z)\sqrt{4-y^2-z^2} dydz = \\ &= 2 \iint_{D_{yz}} (1+z)\sqrt{4-y^2-z^2} dydz, \end{aligned}$$

де D_{yz} – проекція півсфери на площину yOz , що є півкрусом

$$y^2 + z^2 = 4; \quad -2 \leq y \leq 2, \quad 0 \leq z \leq 2.$$

Для обчислення цього інтеграла перейдемо до полярної системи координат: $y = \rho \cos \varphi$, $z = \rho \sin \varphi$; $0 \leq \varphi \leq \pi$, $0 \leq \rho \leq 2$.

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} (x + xz) dydz &= 2 \iint_{D_{yz}} (1+z) \sqrt{4-y^2-z^2} = 2 \int_0^{\pi} (1+\rho \sin \varphi) \sqrt{4-\rho^2} \rho d\varphi d\rho = \\ &= 2 \int_0^{\pi} \left(\int_0^2 \rho \sqrt{4-\rho^2} d\rho + \int_0^2 \rho^2 \sqrt{4-\rho^2} \sin \varphi d\rho \right) d\varphi = 2 \int_0^{\pi} \left[\frac{1}{3} \frac{(4-\rho^2)^{3/2}}{\frac{3}{2}} \right]_0^2 + \\ &+ \sin \varphi \int_0^2 \rho^2 \sqrt{4-\rho^2} d\rho \Bigg] d\varphi = 2 \int_0^{\pi} \left(\frac{8}{3} + \sin \varphi \int_0^2 2^4 \sin^2 t \cdot \cos^2 t dt \right) d\varphi = \\ &= \int_0^{\pi} \left(\frac{8}{3} + \sin \varphi \cdot \pi \right) d\varphi = \left(\frac{8}{3} \varphi - \pi \cos \varphi \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{28}{3} \pi. \end{aligned}$$

З інтегралом $\iint_{\sigma} y dx dz$ ситуація аналогічна.

$$\begin{aligned} \iint_{\tilde{\sigma}} y dx dz &= \iint_{D_{xz}} \sqrt{4-x^2-z^2} dx dz + \left[- \iint_{D_{xz}} \left(-\sqrt{4-x^2-z^2} \right) dx dz \right] = \\ &= 2 \iint_{D_{xz}} \sqrt{4-x^2-z^2} dx dz, \end{aligned}$$

D_{xz} – проєкція півсфери на площину xOz , що є півкрусом

$$x^2 + z^2 = 4, \quad -2 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq z \leq 2.$$

Враховуючи симетричність області інтегрування та парність підінтегральної функції, проведемо інтегрування по

четвертій частині круга, перейшовши до полярної системи

координат: $x = \rho \cos \varphi$, $z = \rho \sin \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \rho \leq 2$.

$$\text{Тому } \iint_{\sigma} y dx dz = 2 \iint_{D_{xz}} \sqrt{4 - \rho^2} \rho d\varphi d\rho = 4 \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{16\pi}{3}. \quad \text{Для}$$

інтеграла $\iint_{\sigma} (z - x^2) dx dy$ нормальні вектори утворюють з

віссю Oz гострі кути, тому справедливо

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} (z - x^2) dx dy &= \iint_{D_{xy}} \left(\sqrt{4 - x^2 - y^2} - x^2 \right) dx dy = \left| \begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, \\ 0 \leq \rho \leq 2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \end{array} \right| = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \left(\sqrt{4 - \rho^2} - \rho^2 \cos^2 \varphi \right) \rho d\rho = 2\pi \int_0^2 \sqrt{4 - \rho^2} \rho d\rho - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^3 \cos^2 \varphi d\rho = \\ &= \frac{16\pi}{3} - 4\pi = \frac{4\pi}{3}, \end{aligned}$$

де D_{xy} – круг радіуса 2.

Додамо значення трьох складових інтегралів і отримаємо відповідь

$$\iint_{\sigma} (x + xz) dy dz + y dx dz + (z - x^2) dx dy = \frac{28\pi}{3} + \frac{16\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = 16\pi. \quad \blacktriangleleft$$

Завдання для самостійного розв'язання

59. Обчислити інтеграл $\iint_{\sigma} \sqrt[4]{x^2 + y^2} dx dy$, де σ – нижня

сторона круга $x^2 + y^2 \leq 9$.

60. Обчислити інтеграл $\iint_{\sigma} y dx dz$, де σ – зовнішня сторона піраміди, обмежена площинами $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

61. Обчислити інтеграл $\iint_{\sigma} 2 dx dy + y dx dz - x^2 z dy dz$, де σ – зовнішня сторона частини еліпсоїда $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$, розміщеної у першому октанті.

62. Обчислити інтеграл $\iint_{\sigma} \frac{dx dy}{z} + \frac{dx dz}{y} + \frac{dy dz}{x}$, де σ – внутрішня сторона частини еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

63. Обчислити інтеграл $\oiint_{-\sigma} z^2 dx dy$, де σ – еліпсоїд $x^2 + y^2 + 2z^2 = 2$.

64. Обчислити інтеграл $\oiint_{-\sigma} z dx dy + y dx dz + x dy dz$, де σ – поверхня куба, обмеженого площинами $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$.

6.3 Формули Остроградського і Стокса

Формула Остроградського пов'язує потрійний інтеграл по просторовій області G з поверхневим інтегралом по замкненій поверхні G , яка обмежує цю область.

Замкнена просторова область G , границя якої перетинається з

довільною прямою, паралельною осям координат, не більш ніж у двох точках, називається *правильною*.

Якщо правильна замкнена область обмежена гладкою або кусково-гладкою поверхнею σ , а функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ неперервні разом зі своїми частинними похідними першого порядку в даній області, то справджується формула Остроградського

$$\iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{\sigma} P dy dz + Q dx dz + R dx dy. \quad (6.4)$$

У правій частині рівності (6.4) інтегрування проводиться по зовнішній стороні поверхні σ .

Зауваження 1. Формула Остроградського справедлива для довільної замкненої просторової області, яку можна розбити на скінченне число правильних областей.

Зауваження 2. Формула Остроградського справедлива для довільної просторової області, обмеженої кількома кусково-гладкими поверхнями.

Формула Стокса встановлює зв'язок між поверхневими та криволінійними інтегралами другого роду.

Нехай σ – поверхня, задана рівнянням $z = z(x, y)$, де функція $z(x, y)$ та її частинні похідні першого порядку неперервні в замкненій області D – проєкції σ на площину O_{xy} , L – кусково-гладка крива, яка є межею σ , l – її проєкція на площину O_{xy} , що обмежує область D (рис.6.6), а функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ та їхні частинні похідні першого порядку неперервні в області V , яка цілком містить у собі поверхню σ . Тоді має місце формула Стокса

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = \iint_{\sigma} \left(\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta \right) d\sigma, \quad (6.5)$$

де $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ – напрямні косинуси нормалі $\vec{n}$ до поверхні σ , а контур L пробігається в додатному напрямі (проти годинникової стрілки,

якщо дивитись з кінця вибраної додатною нормалі).

Якщо поверхня σ це область площини Oxy , обмежена контуром L , то інтеграли по $dx dz$ і по $dy dz$ перетворюються в нуль, і формула Стокса переходить у формулу Гріна.

Зауваження 3. Звичайна область застосування формул Гріна, Остроградського та Стокса це інтеграли другого роду по замкнених контурах на площині і замкнених поверхнях у просторі. Часто обчислення у випадку незамкненої поверхні або кривої можна спростити, якщо замкнути задану незамкнену поверхню або криву і рахувати даний інтеграл як різницю перетвореного інтеграла по замкненій поверхні або кривій і відповідного інтеграла по замикаючій множині. В якості замикаючої множини, як правило, беруться відрізки прямих або частини площин, паралельних координатним, оскільки по таких множинах інтеграл другого роду обчислюється найбільш просто.

Зауваження 4. Формули Гріна, Стокса та Остроградського об'єднані однією ідеєю: вони виражають інтеграл, поширений на деякий геометричний образ, через інтеграл, взятий по границі цього образу. При цьому формула Гріна відноситься до випадку двовимірного простору, формула Стокса теж до випадку двовимірного, але "кривого" простору, а формула Остроградського до випадку тривимірного простору.

Приклади розв'язання задач

65. Використовуючи формулу Остроградського, обчислити інтеграл
$$\iint_{\sigma} y^2 z dx dy + x z dy dz + x^2 y dx dz,$$
 де σ – зовнішня сторона поверхні, розміщена в першому октанті і складена з параболоїда обертання, циліндра і координатних площин (рис.6.7).

► Так як, згідно умови

$$P(x, y, z) = xz, \quad Q(x, y, z) = x^2 y, \quad R(x, y, z) = y^2 z,$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = z, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = x^2, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = y^2, \quad \text{то за формулою (6.4) маємо}$$

$$I = \iiint_{\sigma} y^2 z \, dx dy + xz \, dy dz + x^2 y \, dx dz = \iiint_G (z + x^2 + y^2) \, dx dy dz.$$

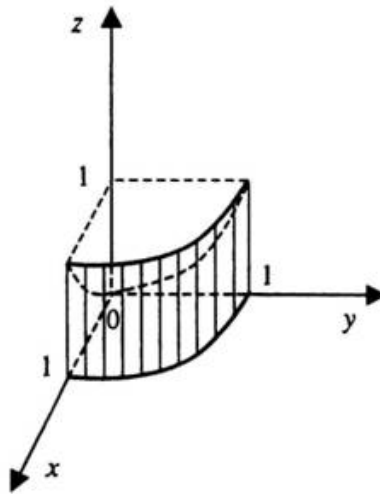


Рисунок 6.7

Для обчислення потрійного інтеграла перейдемо до циліндричних координат: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$,

$dx dy dz = \rho d\varphi d\rho dz$, тоді

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{\rho^2} (z + \rho^2) dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \left(\frac{z^2}{2} + \rho^2 z \right) \bigg|_0^{\rho^2} \rho d\rho =$$

$$= \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \rho^5 d\rho = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{\pi}{8}. \blacktriangleleft$$

66. Використовуючи формулу Стокса, обчислити інтеграл

$$I = \oint_L e^x dx + z(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} dy + yz^3 dz,$$

де L – замкнена лінія (рис.6.8) перетину поверхонь

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = 2, \quad y = 1.$$

► Оскільки $P(x, y, z) = e^x$, $Q(x, y, z) = z(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$,

$$R(x, y, z) = yz^3, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 3xz\sqrt{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}},$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = z^3, \quad \text{то, підставляючи одержані похідні в}$$

формулу Стокса (6,5), одержимо $I = 3 \iint_{\sigma} xz\sqrt{x^2 + y^2} dx dy.$

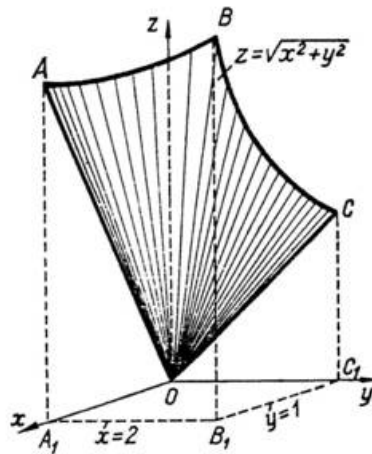


Рисунок 6.8

Тут σ може бути довільною гладкою чи кусково-гладкою поверхнею, натягнутою на даний контур L . Виберемо в якості σ частину даної конічної поверхні $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, обмежену контуром $OA_1B_1C_1O$. Тоді, інтегруючи по нижній стороні вказаної поверхні та здійснюючи обхід контура L протилежний до обходу заданого в умові, знайдемо

$$I = -3 \iint_{OA_1B_1C_1O} x(x^2 + y^2) dx dy = -3 \int_0^1 dy \int_0^2 (x^3 + xy^2) dx = -14. \blacktriangleleft$$

Завдання для самостійного розв'язання

65. Використовуючи формулу Остроградського, обчислити інтеграл $\oiint_{-\sigma} x^2 dz dy$, де σ – еліпсоїд

$$2x^2 + y^2 + z^2 = 2.$$

66. Використовуючи формулу Остроградського, обчислити інтеграл $\oiint_{+\sigma} (z+1) dx dy$, де σ – сфера

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

67. Використовуючи формулу Стокса, обчислити інтеграл $\oint_{ABCA} 8y\sqrt{1-x^2-z^2} dx - xy^2 dy + \sin z dz$, де $ABCA$ – замкнутий контур, утворений еліпсоїдом $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ і координатними площинами $(A(1;0;0), B(0;2;0), C(0;0;1))$. За

поверхню інтегрування прийняти частину даного еліпсоїда.

68. Використовуючи формулу Стокса, обчислити інтеграл $\oint_{AB} (2x + y)dx - 2ydy$, де AB – периметр трикутника з вершинами $A(0; -1)$, $B(0; 2)$, $C(2; 0)$. За поверхню інтегрування прийняти поверхню даного трикутника.

69. Використовуючи формулу Стокса, обчислити інтеграл $\oint_{AB} x^2y^3dx + dy + zdz$, де AB – коло задане рівнянням $x^2 + y^2 = 1$, яке проходять у додатному напрямку, а поверхня інтегрування – верхня сторона півсфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z > 0$.

§ 7. Елементи теорії поля

7.1 Скалярне поле. Похідна за напрямом. Градієнт

Скалярним полем називається простір (або його область), в кожній точці M якого визначена деяка скалярна функція

$$U(M) = u(x, y, z).$$

Якщо скалярне поле задано функцією двох змінних $u(x, y)$, то воно називається *плоским*.

Геометричне місце точок простору, в яких функція $u(x, y, z)$ має одне і те ж значення, називається *поверхнею рівня* або екіпотенціальною поверхнею скалярного поля. Якщо поле плоске, рівняння $u(x, y) = C$ визначають *лінії рівня*.

Поверхні рівня визначаються рівняннями $u(x, y, z) = \text{const}$.

Важливою характеристикою скалярного поля $u(x, y, z)$ є швидкість його зміни в будь-якому напрямку. Нехай M_0 – точка поля. Проведемо з точки M_0 промінь l . На промені l виберемо точку M , близьку до точки M_0 .

Похідною за напрямком l скалярного поля u в точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$ називається границя (якщо вона існує) виду

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta l}, \text{ де } \Delta u = U(M) - U(M_0), \Delta l = |\overline{M_0 M}|.$$

Така похідна позначається $\frac{\partial u}{\partial l}$.

Нехай $u(x, y, z)$ – диференційовна функція в точці M_0 . Похідна від u за напрямком, що визначається напрямними косинусами $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$, обчислюється за формулою

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma. \quad (1)$$

Градiєнтом скалярного поля $u = u(x, y, z)$ в точці M називається вектор $\frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}$, де частинні похідні обчислюються в точці M , і позначається $\overline{\text{grad} u}$. Зв'язок між похідною від функції u за напрямком $\vec{l}$ і вектором $\overline{\text{grad} u}$ в точці M задається формулою

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (\overline{\text{grad} u}, \vec{l}_0) = |\overline{\text{grad} u}| \cdot \cos(\widehat{\overline{\text{grad} u}, \vec{l}_0}), \quad (2)$$

де $\vec{l}_0 = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$ – одиничний вектор напрямку $\vec{l}$.

Градiєнт скалярного поля $u(x, y, z)$ направлений за нормаллю до поверхні рівня, що проходить через точку M , і вказує напрям та величину найбільшої зміни скалярного поля в даній точці. Величина швидкості

зростання $|\overline{\text{grad}} u| = \sqrt{u_x'^2 + u_y'^2 + u_z'^2}$.

Орт нормалі $\vec{n}$ до поверхні $u(x, y, z) = C$ знаходять за формулою

$$\vec{n} = \pm \frac{\overline{\text{grad}} u}{|\overline{\text{grad}} u|}.$$

Приклади розв'язання задач

67. Визначити еквіпотенціальні поверхні поля електростатичного потенціалу.

► Потенціал електростатичного поля визначається формулою

$$u(x, y, z) = \frac{q}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}},$$

де q – величина заряду; a, b, c – координати точки, в якій розміщений заряд.

Рівняння еквіпотенціальних поверхонь мають вигляд

$$\frac{q}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} = C,$$

$$\text{звідки } (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = \left(\frac{q}{C}\right)^2.$$

Як бачимо, еквіпотенціальними поверхнями є концентричні сфери з центром в точці $A(a; b; c)$ і радіусами

$\frac{q}{C}$. Із збільшенням C еквіпотенціальні поверхні

наближаються до точки, в якій знаходиться заряд. ◀

68. Знайти похідну скалярного поля $u = x^2y + xz^2 - 2$ в точці $M_0(1; 1; -1)$ за напрямом до точки $M_1(2; -1; 4)$.

► Знайдемо вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$ і його напрямні косинуси.

$\overrightarrow{M_0M_1} = (1; -2; 4)$. Довжина вектора $|\overrightarrow{M_0M_1}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{21}$.

Отже, $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{21}}$, $\cos \beta = \frac{-2}{\sqrt{21}}$, $\cos \gamma = \frac{4}{\sqrt{21}}$.

Обчислимо частинні похідні функції та їх значення в точці M_0 :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0} = (2xz + z^2)|_{M_0} = 3, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0} = x^2|_{M_0} = 1, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_0} = 2xy|_{M_0} = -2$$

Використавши формулу (1), отримаємо

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{M_0} = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{21}} + 1 \cdot \frac{-2}{\sqrt{21}} + (-2) \cdot \frac{4}{\sqrt{21}} = -\frac{7}{\sqrt{21}}.$$

Таким чином, скалярне поле в точці M_0 спадає за

напрямом $\overrightarrow{M_0M_1}$, швидкість спадання $\left| \left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{M_0} \right| = \frac{7}{\sqrt{21}}$. ◀

69. Обчислити похідну скалярного поля $u = \arctg xy$ в точці $M_0(1; 1)$, що належить параболі $y = x^2$, за напрямом цієї кривої (за напрямом зростання).

► Знаходимо напрямні косинуси дотичної (за напрямом зростання):

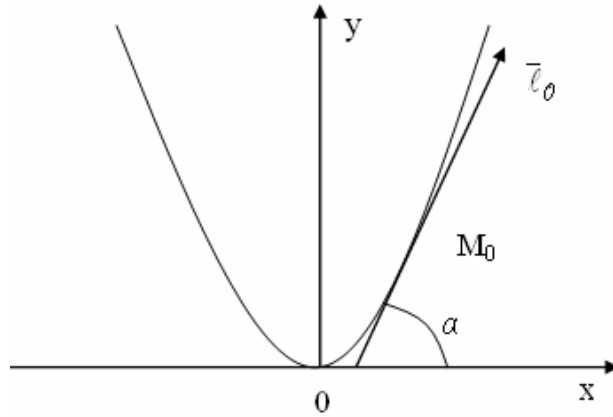


Рисунок 7.1

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos \beta = \sqrt{1-\cos^2 \alpha} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Значення частинних похідних даної функції в точці M_0 такі

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0} = \frac{y}{1+(xy)^2} \Big|_{M_0} = \frac{1}{2}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0} = \frac{x}{1+(xy)^2} \Big|_{M_0} = \frac{1}{2}.$$

За формулою (1) маємо $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{3}{2\sqrt{5}}.$ ◀

70. Вказати напрям і швидкість найбільшої зміни скалярного поля $u = \ln(x^2 + 2y^2 + 3z^2)$ в точці $M_0(1; 1; -1)$.

► Швидкість зміни поля $u = \ln(x^2 + 2y^2 + 3z^2)$ в точці $M_0(1; 1; -1)$ максимальна в напрямку градієнта в цій точці. Величина її рівна модулю градієнта. Отже, розв'язання задачі

зводиться до відшукування величини напрямку градієнта в точці M_0 . За формулою (2) маємо

$$\overrightarrow{\text{grad} u} = \frac{2x}{x^2 + 2y^2 + 3z^2} \vec{i} + \frac{4y}{x^2 + 2y^2 + 3z^2} \vec{j} + \frac{6z}{x^2 + 2y^2 + 3z^2} \vec{k}$$

В точці $M_0(1; 1; -1)$: $\overrightarrow{\text{grad} u} = \frac{1}{3} \vec{i} + \frac{2}{3} \vec{j} - \vec{k}$,

$$|\overrightarrow{\text{grad} u}| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + 1} = \frac{\sqrt{14}}{3}. \blacktriangleleft$$

71. Знайти одиничний вектор нормалі до поверхні $x^3 + y^3 + 3yz^2 - 5xy^2 = 9$ в точці $M_0(1; 1; 2)$.

► Градієнт скалярного поля $u = x^3 + y^3 + 3yz^2 - 5xy^2$ (дана поверхня – поверхня рівня скалярного поля при $C = 9$) направлений за нормаллю до даної поверхні, отже вектор

$$\overrightarrow{\text{grad} u} = (3x^2 - 5y^2) \vec{i} + (3x^2 + 3z^2 - 10xy) \vec{j} + 6yz \vec{k}$$

визначає вектор нормалі до поверхні в точці $M(x; y; z)$.

В точці $M_0(1; 1; 2)$ маємо $\overrightarrow{\text{grad} u}(M_0) = -2\vec{i} + 5\vec{j} + 12\vec{k}$; орт

нормалі $\vec{n} = \frac{\overrightarrow{\text{grad} u}}{|\overrightarrow{\text{grad} u}|} = \frac{-2\vec{i} + 5\vec{j} + 12\vec{k}}{\sqrt{173}}. \blacktriangleleft$

Завдання для самостійного розв'язання

70. Знайти поверхні рівня скалярного поля $u = x^2 + y^2 + z^2$.

71. Знайти лінії рівня скалярного поля:

$$\text{а) } u = \ln \sqrt{\frac{y}{2x}}; \quad \text{б) } u = \frac{y^2}{x}; \quad \text{в) } u = e^{x^2 - y^2}.$$

72. Знайти похідну скалярного поля $u = \frac{xy}{z}$ за напрямом

$\overrightarrow{M_0 M_1}$ в точці $M_0(1; 2; 1)$, а $M_1(0; 3; 4)$.

73. Знайти похідну скалярного поля $u = \ln(xy + yz + xz)$ в точці $M_0(0; 1; 1)$ за напрямом кола $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 1$.

74. Знайти похідну функції $u = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ за напрямом градієнта функції $v = x + y + z$.

75. Знайти в точці $M_0(1; 1; 1)$ напрям найбільшої зміни скалярного поля $u = xy + yz + xz$ і величину цієї зміни.

76. Визначити поле градієнтів потенціала $u = \frac{q}{r}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ електростатичного поля, що утворене точковим зарядом q , розміщеним у початку координат.

77. Знайти одиничний вектор нормалі до поверхні $x^2 - 4x^2y + 5z^2 = 4$ в точці $M_0(-1; 0,5; -1)$.

7.2 Векторне поле

Векторним полем називається простір (або його область), в кожній точці $M(x; y; z)$ якого задано певний вектор $\vec{a}$.

Введемо в просторі декартову систему координат і подамо вектор $\vec{a}$ у вигляді

$$\vec{a} = a_1(x; y; z)\vec{i} + a_2(x; y; z)\vec{j} + a_3(x; y; z)\vec{k}.$$

Крива L називається *векторною лінією* поля $\vec{a}$, якщо в кожній точці цієї кривої дотична до неї співпадає з напрямом вектора $\vec{a}$ в цій точці

$$\frac{dx}{a_1(x; y; z)} = \frac{dy}{a_2(x; y; z)} = \frac{dz}{a_3(x; y; z)}. \quad (3)$$

Ці рівняння, при відповідному виборі параметра t , можна переписати у вигляді

$$\frac{dx}{dt} = a_1(x; y; z), \quad \frac{dy}{dt} = a_2(x; y; z), \quad \frac{dz}{dt} = a_3(x; y; z). \quad (4)$$

Через кожен точку M поля, для якої $\vec{a}(M) \neq \vec{0}$, проходить одна векторна лінія. Векторні лінії замкнені або починаються і закінчуються на межі поля.

Приклади розв'язання задач

72. Визначити силові лінії електростатичного поля

$$E = \frac{q\vec{r}}{r^3}, \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad r = |\vec{r}|, \quad \text{утвореного зарядом } q,$$

розміщеним в початку координат.

► Складемо систему диференціальних рівнянь силових ліній

$$\frac{r^3 dx}{qx} = \frac{r^3 dy}{qy} = \frac{r^3 dz}{qz} \quad \text{або} \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

Отримані розв'язки системи матимуть вигляд $\vec{r} = \vec{r}_0 \cdot t$,

$\vec{r}_0 \equiv \text{const}$, $\vec{r}_0 \neq \vec{0}$, тобто силові лінії – прямі, що проходять через початок координат. ◀

73. Знайти векторні лінії магнітного поля, утвореного електричним струмом з силою I , що протікає через нескінченний прямолінійний провід.

► Якщо вибрати прямокутну декартову систему координат так, щоб прямолінійний провід співпадав з віссю Oz і електричний струм протікав в додатному напрямку осі, то напруженість $\vec{H}$ магнітного поля визначатиметься за формулою $\vec{H} = \frac{I}{2\pi\rho^2}(-y\vec{i} + x\vec{j})$, де $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ – відстань від точки спостереження $M(x; y; z)$ до осі Oz .

Система диференціальних рівнянь векторних ліній магнітного поля $\vec{H}$ буде мати вигляд $\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0}$.

Після інтегрування отримаємо $x^2 + y^2 = R^2$, $z = h$, де R, h – сталі. Отже, векторні лінії магнітного поля є концентричними колами з центром на осі Oz , що лежать в площині $z = \text{const}$. ◀

Завдання для самостійного розв'язання

78. Знайти векторну лінію поля $\vec{a} = -y\vec{i} + x\vec{j} + b\vec{k}$ ($b = \text{const}$), що проходить через точку $M_0(1; 0; 0)$.

79. Плоский потік рідини характеризується вектором швидкості $\vec{v} = xy\vec{i} + x(2x+1)\vec{j}$. Визначити векторні лінії поля швидкостей.

80. Знайти векторні лінії поля градієнтів скалярного поля $u = \frac{1}{3}x^3 + xy^2 + 4$.

7.3 Потік векторного поля

Нехай $\vec{a}(x; y; z) = a_1(x; y; z)\vec{i} + a_2(x; y; z)\vec{j} + a_3(x; y; z)\vec{k}$ – векторне поле. Розглянемо у векторному полі $\vec{a}$ гладку орієнтовану поверхню S з одиничним вектором нормалі $\vec{n}$ до вибраної сторони.

Потоком Π векторного поля $\vec{a}(x; y; z)$ через орієнтовану поверхню S в напрямі нормалі $\vec{n}$ називається поверхневий інтеграл

$$\Pi = \iint_{(S)} (\vec{a}, \vec{n}) ds. \quad (5)$$

Обчислення поверхневого інтеграла (5) зводиться до обчислення подвійного інтеграла. Для цього поверхню S проєктують взаємно однозначно на одну з координатних площин.

Нехай, наприклад, поверхня S взаємно однозначно проєктується на площину xOy і задана рівнянням $z = f(x, y)$, D_{xy} – проєкція S на площину xOy . Оскільки елемент площі ds поверхні і його проєкція на площину xOy (елемент площі $dx dy$ області D_{xy}) зв'язані рівністю

$$ds = \frac{dx dy}{|\cos \gamma|}, \text{ де } \gamma = \left(\vec{n}, \vec{k} \right), \text{ то поверхневий інтеграл (5) дорівнюватиме}$$

$$\Pi = \iint_{D_{xy}} \left(\frac{(\vec{a}, \vec{n})}{|\cos \gamma|} \Big|_{z=f(x, y)} \right) dx dy. \quad (6)$$

Одиничний вектор $\vec{n}$ нормалі знаходимо за формулою

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \pm \frac{\overline{\text{grad}}(z - f(x, y))}{|\overline{\text{grad}}(z - f(x, y))|} \frac{\partial u}{\partial l} = \pm \frac{-f'_x \cdot \vec{i} - f'_y \cdot \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + f'^2_x \cdot \vec{i} + f'^2_y}} = \\ &= \pm (\cos \alpha \cdot \vec{i} + \cos \beta \cdot \vec{j} + \cos \gamma \cdot \vec{k}). \end{aligned} \quad (7)$$

Знак в цій формулі вибирається так, щоб нормаль $\vec{n}$ вказувала задану сторону поверхні. Аналогічно, якщо S взаємно однозначно проєктується на площину yOz або zOx , то

$$\Pi = \iint_{D_{yz}} \left(\frac{(\vec{a}, \vec{n})}{|\cos \alpha|} \Big|_{x=\varphi(y, z)} \right) dy dz \quad \text{або} \quad \Pi = \iint_{D_{zx}} \left(\frac{(\vec{a}, \vec{n})}{|\cos \beta|} \Big|_{y=\psi(z, x)} \right) dz dx. \quad (8)$$

Приклади розв'язання задач

74. Обчислити потік векторного поля

$\vec{a} = (x^2 + y^2) \vec{i} + (y^2 + z^2) \vec{j} + (z^2 + x^2) \vec{k}$ через частину площини $z = h$, обмеженої колом $x^2 + y^2 = 1$ в напрямі орта $\vec{k}$.

► В цій задачі $\vec{n} = \vec{k}$ і $ds = dx dy$. Оскільки $(\vec{a}, \vec{n}) = x^2 + y^2$,

то за формулою (6)

$$\begin{aligned} \Pi &= \iint_{x^2 + y^2 = 1} (x^2 + y^2) \Big|_{z=h} dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (h^2 + \rho^2 \cos^2 \varphi) \rho d\rho = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{h^2}{2} + \frac{1}{4} \cos^2 \varphi \right) d\varphi = \pi h^2 + \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

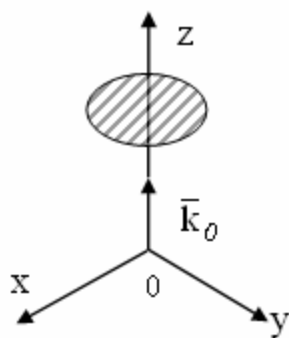


Рисунок 7.2

В подвійному інтегралі ми перейшли до полярних координат $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. ◀

75. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = (x - 2y)\vec{i} + (x - 3y + z)\vec{j} + (5x + y)\vec{k}$ через верхню сторону трикутника ABC з вершинами $A(1; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$, $C(0; 0; 1)$.

► Рівняння площини ABC має вигляд $x + y + z = 1$.

Нормальний вектор площини $\vec{N} = (1; 1; 1)$, а орт нормалі $\vec{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$.

$$(\vec{a}, \vec{n}) = (x - 2y) \frac{1}{\sqrt{3}} + (x - 3y + z) \frac{1}{\sqrt{3}} + (5x + y) \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} (7x + 4y - z)$$

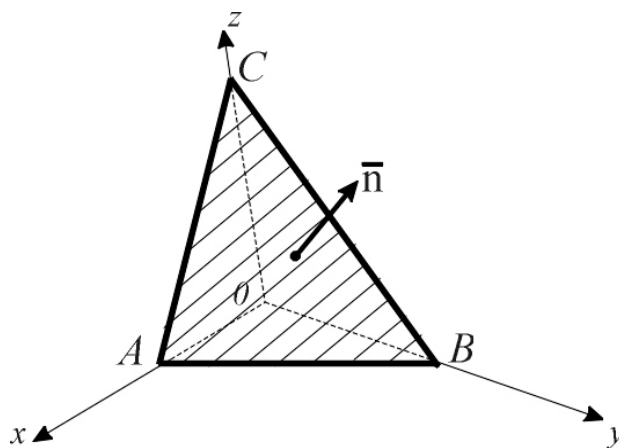


Рисунок 7.3

У нас $ds = \sqrt{3} dx dy$. Застосувавши формулу (6), обчислимо потік

$$\begin{aligned} \Pi &= \iint_{\triangle ABC} \left(\frac{7x + 4y - z}{\sqrt{3}} \Big|_{z=1-x-y} \right) \sqrt{3} dx dy = \iint_{\triangle ABC} (8x + 5y - 1) dx dy = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (8x + 5y - 1) dy = \int_0^1 \left(8x(1-x) + \frac{5}{2}(1-x)^2 - (1-x) \right) dx = \frac{5}{3}. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

76. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = 2x\vec{i} + (1-2y)\vec{j} + 2z\vec{k}$ через зовнішню сторону замкненої поверхні S , що складається з частини S_1 параболоїда $z^2 + x^2 = 1 - 2y$ ($y \geq 0$) і частини S_2 площини zOx .

► Шуканий потік обчислюється за формулою

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = \iint_{(S_1)} (\vec{a}, \vec{n}_1) ds + \iint_{(S_2)} (\vec{a}, \vec{n}_2) ds.$$

Спочатку знайдемо Π_1 . Поверхня S_1 взаємно однозначно проєктується на частину площини zOx , її проєкція D_{zx} – круг $z^2 + x^2 \leq 1$.

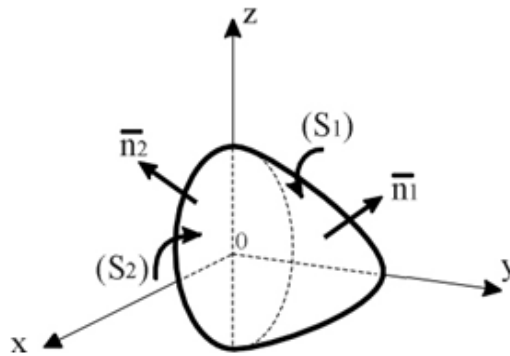


Рисунок 7.4

Рівняння поверхні S_1 подамо у вигляді $y = \frac{1}{2}(1 - z^2 - x^2)$,

$$z^2 + x^2 \leq 1.$$

Знайдемо одиничний вектор нормалі

$$\vec{n}_1 = \pm \frac{-\left(\left(1 - z^2 - x^2\right)/2\right)'_x \cdot \vec{i} + \vec{j} - \left(\left(1 - z^2 - x^2\right)/2\right)'_z \cdot \vec{k}}{\sqrt{1 + \left(\left(\left(1 - z^2 - x^2\right)/2\right)'_x\right)^2 + \left(\left(\left(1 - z^2 - x^2\right)/2\right)'_z\right)^2}} = \pm \frac{x \cdot \vec{i} + \vec{j} + z \cdot \vec{k}}{\sqrt{1 + x^2 + z^2}}.$$

Оскільки ми розглядаємо зовнішню сторону поверхні, то $\cos \beta$ набуває додатного значення, а тому в рівнянні нормалі необхідно взяти знак плюс.

$$(\vec{a}, \vec{n}_1) = \frac{2x^2 + (1-2y) + 2z^2}{\sqrt{1+x^2+z^2}}, \quad \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+z^2}}.$$

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \iint_{(S_1)} (\vec{a}, \vec{n}_1) ds = \iint_{(z^2+x^2 \leq 1)} \frac{2x^2 + (1-2y) + 2z^2}{\sqrt{1+x^2+z^2}} \sqrt{1+x^2+z^2} \Big|_{y=\frac{1}{2}(1-z^2-x^2)} dz dx = \\ &= 3 \iint_{(z^2+x^2 \leq 1)} (x^2 + z^2) dz dx = 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^2 \rho d\rho = 3 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2} \pi. \end{aligned}$$

Тепер обчислимо потік Π_2 . На поверхні S_2 , де $y=0$, $z^2 + x^2 \leq 1$, зовнішня нормаль $\vec{n}_2 = -\vec{j}$.

$$\Pi_2 = \iint_{(S_2)} (\vec{a}, \vec{n}_2) ds = - \iint_{(S_2)} (\vec{a}, \vec{j}) dz dx = - \iint_{(S_2)} (1-2y) \Big|_{y=0} dz dx = -\pi.$$

Таким чином, увесь потік дорівнює $3\pi/2 - \pi = \pi/2$. ◀

77. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = y \cdot \vec{i} - 2x \cdot \vec{j} - z \cdot \vec{k}$

через зовнішню сторону півсфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$.

► Півсфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$ взаємно однозначно проєктується на круг $x^2 + y^2 \leq R^2$ площини xOy .

Одиничний вектор нормалі до півсфери

$$\vec{n} = \pm \frac{\text{grad}(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)}{\left| \text{grad}(x^2 + y^2 + z^2 - R^2) \right|} = \pm \frac{x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

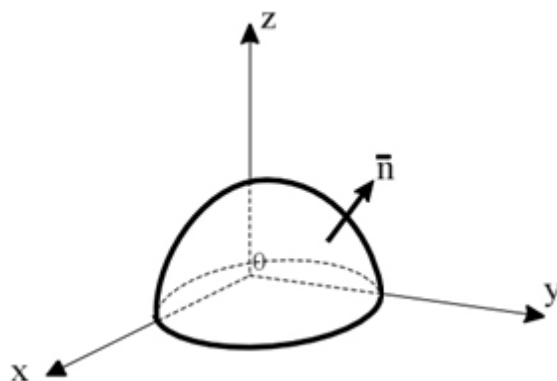


Рисунок 7.5

Оскільки $\vec{n}$ утворює з віссю Oz гострий кут (зовнішня сторона поверхні), то беремо знак “плюс”, тому

$$\vec{n} = \frac{1}{R} (x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}), \quad \cos \gamma = \frac{z}{R}, \quad ds = \frac{dx dy}{\cos \gamma} = \frac{R dx dy}{z}.$$

Обчислимо скалярний добуток

$$(\vec{a}, \vec{n}) = \frac{1}{R} (xy - 2xy - z^2) = -\frac{xy + z^2}{R}.$$

За формулою (6) отримаємо

$$\begin{aligned} \Pi &= \iint_{(S)} (\vec{a}, \vec{n}) ds = - \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \frac{xy + z^2}{R} \frac{R}{z} \Big|_{z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dx dy = \\ &= - \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \frac{xy + R^2 - x^2 - y^2}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy. \end{aligned}$$

Після підстановки $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ маємо

$$\begin{aligned}
 \Pi &= - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{\rho^2 \cos \varphi \sin \varphi + R^2 - \rho^2}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \rho d\rho = - \int_0^{2\pi} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^R \frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = \\
 &= - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \sqrt{R^2 - \rho^2} \rho d\rho = -2\pi \int_0^R \sqrt{R^2 - \rho^2} \rho d\rho = \\
 &= 2\pi \frac{(R^2 - \rho^2)^{3/2}}{3} \Big|_0^R = -\frac{2}{3} \pi R^3 \rho. \blacktriangleleft
 \end{aligned}$$

78. Обчислити потік векторного поля $\vec{a} = (x - z)\vec{i} + (y + z)\vec{j} + (x - y)\vec{k}$ через зовнішню сторону бічної поверхні кругового циліндра $x^2 + y^2 = 1$, обмеженого знизу площиною $x + y + z = 1$, а зверху – площиною $x + y + z = 2$.

► Знайдемо одиничний вектор нормалі до циліндра

$$\vec{n} = \frac{\overrightarrow{\text{grad}}(x^2 + y^2 - 1)}{|\overrightarrow{\text{grad}}(x^2 + y^2 - 1)|} = \frac{x \cdot \vec{i} + y \vec{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = x \cdot \vec{i} + y \vec{j},$$

бо на поверхні циліндра $x^2 + y^2 = 1$.

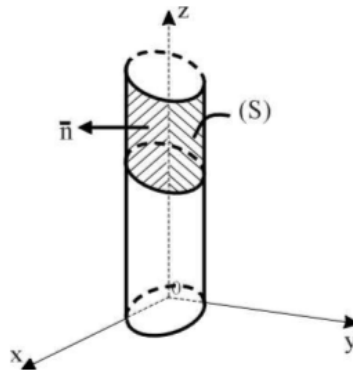


Рисунок 7.6

Запишемо скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{n}$

$$(\vec{a}, \vec{n}) = x(x - z) + y(y + z).$$

За формулою (5) потік

$$\Pi = \iint_S (x(x - z) + y(y + z)) ds = \iint_S ((y - x)z + 1) ds,$$

бо $x^2 + y^2 = 1$ на циліндрі.

Зауважимо, що для обчислення цього поверхневого інтеграла неможливо скористатися жодною з формул (6) або (8). Дана поверхня S на площину xOy проєктується в коло $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$. На інші координатні площини S проєктується також не взаємно однозначно.

Для обчислення отриманого інтеграла введемо циліндричні координати R , φ та z , що зв'язані з прямокутними координатами x , y , z формулами

$$x = R \cos \varphi, y = R \sin \varphi, z = z,$$

де R – радіус циліндра. Для елемента поверхні ds циліндра маємо вираз $ds = R d\varphi dz$ (в даному випадку $R = 1$).

$$\text{Тоді } \Pi = \iint_S ((\sin \varphi - \cos \varphi)z + 1) d\varphi dz.$$

Перейдемо до повторного інтеграла

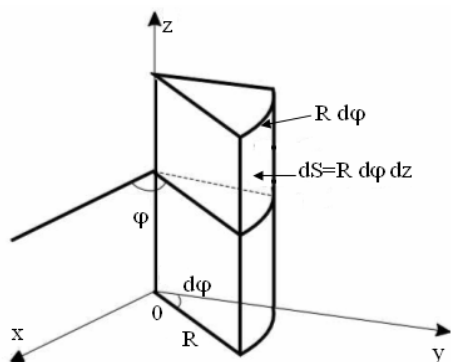


Рисунок 7.7

$$\begin{aligned}
 \Pi &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{1-(\cos\varphi+\sin\varphi)}^{2-(\cos\varphi+\sin\varphi)} ((\sin\varphi - \cos\varphi)z + 1) dz = \\
 &= \int_0^{2\pi} \left\{ \left(\frac{1}{2} z^2 (\sin\varphi - \cos\varphi) + z \right) \right|_{1-(\cos\varphi+\sin\varphi)}^{2-(\cos\varphi+\sin\varphi)} \right\} d\varphi = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left\{ (\sin\varphi - \cos\varphi) \left[(2-(\cos\varphi+\sin\varphi))^2 - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - (1-(\cos\varphi+\sin\varphi))^2 \right] + 2 \right\} d\varphi = \pi. \quad \blacktriangleleft
 \end{aligned}$$

Завдання для самостійного розв'язання

81. Обчислити потік радіуса-вектора $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ через верхню сторону круга, що вирізаний конусом $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ на площині $z = 3$.

82. Знайти потік вектора $\vec{a} = (5x + z)\vec{i} +$

$+(x-3y)\vec{j}+(4y-2z)\vec{k}$ через частину площини $x+y+z=2$, що знаходиться в першому октанті в напрямі нормалі, що утворює з віссю Oz гострий кут.

83. Обчислити потік векторного поля $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ через частину конічної поверхні $x^2 + y^2 = z^2$ ($0 \leq z \leq 1$) в напрямі зовнішньої нормалі до конуса.

84. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + zx\vec{k}$ через частину зовнішньої сторони сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, що знаходиться в першому октанті.

85. Визначити потік векторного поля $\vec{a} = xy\vec{i} + xz\vec{j}$ через зовнішню сторону поверхні $x^2 + y^2 \leq z \leq 4$, $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ в напрямі зовнішньої нормалі.

7.4 Дивергенція векторного поля. Теорема Остроградського

Зафіксуємо якусь точку M у векторному полі $\vec{a}$. Візьмемо в цьому полі якийсь довільне тіло V об'ємом $\tilde{V}$, якому належить точка M . Нехай S – замкнена поверхня, що обмежує тіло V . Обчислимо потік Π векторного поля $\vec{a}$ через зовнішню сторону поверхні S : $\Pi = \iint_S (\vec{a}, \vec{n}) ds$.

Якщо існує границя відношення $\frac{\Pi}{\tilde{V}}$ при умові, що поверхня S довільним чином стягується в точку M , то ця границя називається

дивергенцією векторного поля $\vec{a}$ в точці M

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \lim_{S \rightarrow M} \frac{\oiint_{(S)} (\vec{a}, \vec{n}) ds}{\tilde{V}}. \quad (8)$$

Фізичний зміст дивергенції полягає в тому, що вона визначає потужність джерел або стоків векторного поля. Якщо $\operatorname{div} \vec{a}(M) > 0$, то точка M – джерело векторного поля (в околі точки M поле $\vec{a}$ виникає). Якщо $\operatorname{div} \vec{a}(M) < 0$, то точка M – стік (в околі точки M поле зникає).

Якщо $\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$ і функції a_1, a_2, a_3 мають неперервні частинні похідні першого порядку, то дивергенція обчислюється за формулою

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z}. \quad (9)$$

Теорема Остроградського. Потік векторного поля $\vec{a}$ через зовнішню сторону замкненої поверхні S дорівнює потрійному інтегралу від дивергенції цього поля по тілу V , обмеженому поверхнею S :

$$\oiint_S (\vec{a}, \vec{n}) ds = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dv. \quad (10)$$

Приклади розв'язання задач

79. Визначити, чи має поле $\vec{a} = 3x^2 \vec{i} - 5xy \vec{j} + z^2 \vec{k}$ джерела (стоки) в точках $M_1(1; 2; 3)$, $M_2(1; -5; -1)$, $M_3(2; 0; -1)$.

► Необхідно обчислити дивергенцію векторного поля $\vec{a}$ в точках M_1, M_2, M_3 . За формулою (9) отримаємо:

$$\operatorname{div} \vec{a} = 6x - 5x + 2z = x + 2z. \operatorname{div} \vec{a}(M_1) = 1 + 2 \cdot 3 = 7,$$

$$\operatorname{div} \vec{a}(M_2) = 1 + 2 \cdot (-1) = -1, \operatorname{div} \vec{a}(M_3) = 2 + 2 \cdot (-1) = 0.$$

Як бачимо, в точці M_1 є джерело, в точці M_2 – стік, в точці M_3 немає ні джерела, ні стоку. ◀

80. Обчислити потік векторного поля $\vec{a} = x^3 \vec{i} + y^3 \vec{j} + z^3 \vec{k}$ через поверхню куба $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, $0 \leq z \leq a$.

► Скориставшись теоремою Остроградського, отримаємо

$$\begin{aligned} \Pi &= \oiint_S (\vec{a}, \vec{n}) ds = \iiint_V (3x^2 + 3y^2 + 3z^2) dx dy dz = \\ &= 3 \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a (x^2 + y^2 + z^2) dz = 3a^2. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

81. Знайти потік вектора $\vec{a} = (x + y + z) \vec{k}$ через замкнену поверхню $(x + y)^2 = 1 - z$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, що лежить в першому октанті.

► Поверхня $(x + y)^2 = 1 - z$ є циліндром, твірні якого паралельні прямій $x + y = 1$.

Поверхня $(x + y)^2 = 1 - z$ перетинає площину $y = 0$ по параболі $z = 1 - x^2$, а площину $x = 0$ – по параболі $z = 1 - y^2$.

Скористаємося формулою Остроградського. Знаходимо $\operatorname{div} \vec{a} = 1$, тому потік чисельно дорівнює об'єму тіла.

$$\Pi = \iiint_{(V)} 1 \cdot dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-(x+y)^2} dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - (x + y)^2) dy =$$

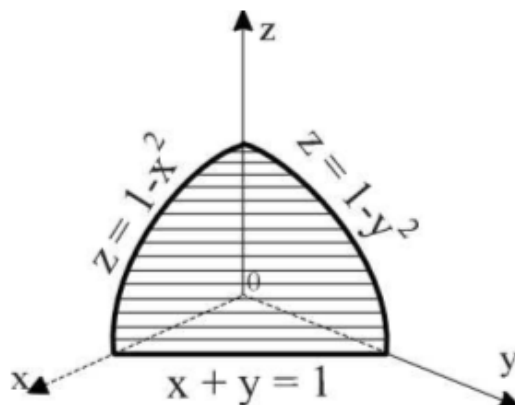


Рисунок 7.8

$$= \int_0^1 \left(y - \frac{(x+y)^3}{3} \right) \Big|_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left((1-x) - \frac{1}{3} + \frac{x^3}{3} \right) dx = \left(\frac{2}{3}x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4}. \blacktriangleleft$$

82. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = xz\vec{i} + yz\vec{j} + z^2\vec{k}$ через зовнішню частину сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, що відтинається площиною $z = 2$ ($z \geq 2$).

► Для того, щоб скористатися теоремою Остроградського, замкнемо знизу дану поверхню S_1 куском S_2 площини $z = 2$, який обмежений колом $x^2 + y^2 = 5$, $z = 2$. Нехай $\tilde{V}$ – об'єм отриманого тіла. За теоремою Остроградського повний потік

$$\Pi = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} \cdot dx dy dz = \iiint_V (z + z + 2z) \cdot dx dy dz = 4 \iiint_V z dx dy dz.$$

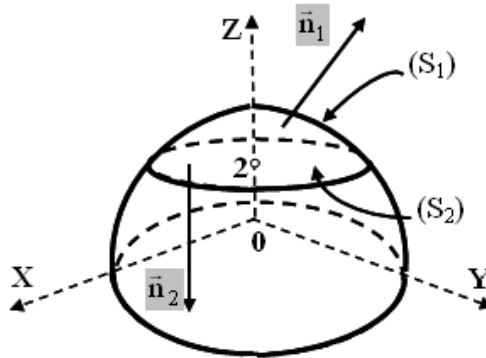


Рисунок 7.9

Потрійний інтеграл обчислюємо в циліндричних координатах

$$\Pi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{5}} \rho d\rho \int_0^{\sqrt{9-\rho^2}} z dz = 4\pi \int_0^{\sqrt{5}} \rho \left((9-\rho^2) - 4 \right) d\rho = 4\pi \left(\frac{5}{2} \rho^2 - \frac{1}{4} \rho^4 \right) \Big|_0^{\sqrt{5}} = 25\pi.$$

За властивістю адитивності поверхневого інтеграла

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = \iint_{S_1} (\vec{a}, \vec{n}_1) ds + \iint_{S_2} (\vec{a}, \vec{n}_2) ds = 25\pi.$$

$$\text{Звідси, } \Pi_1 = 25\pi - \Pi_2 = 25\pi - \iint_{S_2} (\vec{a}, \vec{n}_2) ds.$$

Потік вектора $\vec{a}$ через круг $S_2 = \{x^2 + y^2 \leq 5, z = 2\}$ рівний ($\vec{n}_2 = -\vec{k}$)

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= \iint_{S_2} (\vec{a}, \vec{n}_2) ds = \iint_{S_2} (-z^2) ds = - \iint_{x^2+y^2 \leq 5} z^2 \Big|_{z=2} dx dy = -4 \iint_{x^2+y^2 \leq 5} dx dy = \\ &= -4\pi (\sqrt{5})^2 = -20\pi. \end{aligned}$$

Шуканий потік $\Pi_1 = 25\pi - (-20\pi) = 45\pi$. ◀

Завдання для самостійного розв'язання

86. Обчислити $\operatorname{div}(r\vec{a})$, де $\vec{a}$ – сталий вектор, а $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

87. Визначити дивергенцію векторного поля $\vec{a} = (x^3y^3; y^2z^2; xyz)$.

88. Обчислити потік векторного поля $\vec{a} = (y-x)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (5y-3z)\vec{k}$ через повну поверхню піраміди, обмеженої площинами $x=0, y=0, z=0, x+y+z=5$.

89. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$ через замкнену поверхню, обмежену сферою $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ і конусом $x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0$.

90. Обчислити двома способами (за означенням і за теоремою Остроградського) потік векторного поля $\vec{a} = y^2\vec{i} + x^2\vec{k}$ через замкнену поверхню, обмежену частиною поверхні $x^2 = 1 - y - z$ і координатними площинами ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$).

91. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = 3x\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}$ через зовнішню сторону частини поверхні параболоїда $x^2 + y^2 = 9 - z$ ($z \geq 0$).

7.5 Лінійний інтеграл в векторному полі. Циркуляція

Нехай в полі вектора $\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$ задано орієнтовану (вказано напрям обходу) кусково-гладку криву L .

Лінійним інтегралом векторного поля $\vec{a}$ вздовж кривої L називається криволінійний інтеграл

$$\int_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_L a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz, \quad (11)$$

де $d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$ – диференціал радіус-вектора $\vec{r}$ вздовж кривої L .

Якщо $\vec{a}$ – силове поле, то лінійний інтеграл дорівнює роботі сили цього поля вздовж кривої L .

При зміні напрямку обходу лінії L лінійний інтеграл змінює знак, тобто

$$\int_{L_{AB}} (\vec{a}, d\vec{r}) = - \int_{L_{BA}} (\vec{a}, d\vec{r}).$$

Лінійний інтеграл по замкнутому контуру L називається *циркуляцією* C векторного поля $\vec{a}$

$$C_L(\vec{a}) = \oint_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \oint_L a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz. \quad (12)$$

За додатний напрямок обходу замкнутої кривої L без самоперетинів приймається такий напрямок, при якому область, обмежена кривою L , залишається зліва. Циркуляція векторного поля $\vec{a}$ характеризує обертову здатність поля $\vec{a}$ по заданому контуру.

Обчислення лінійного інтеграла і циркуляції зводиться до обчислення визначеного інтеграла.

Приклади розв'язання задач

83. Обчислити лінійний інтеграл плоского поля

$\vec{a} = (x+y)\vec{i} + (x-y)\vec{j}$ вздовж дуги параболи $y^2 = x$ від точки

$O(0;0)$ до точки $A(1;1)$.

$$\blacktriangleright \int_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_L (x+y)dx + (x-y)dy. \quad \text{На кривій } L$$

виконується $x = y^2$, тому $dx = 2ydy$. Отже, враховуючи, що y змінюється від 0 до 1, отримаємо

$$\int_0^1 ((y^2 + y)2y + (y^2 - y))dy = \int_0^1 (2y^3 + 3y^2 - y)dy = 1. \quad \blacktriangleleft$$

84. Знайти роботу силового поля $\vec{F} = x\vec{i} + x\vec{j} - \vec{k}$ вздовж одного витка гвинтової лінії $L = \{x = R \cos t, y = R \sin t, z = h$ $(0 \leq t \leq 2\pi)\}$.

$$\begin{aligned} \blacktriangleright A &= \int_L (\vec{F}, d\vec{r}) = \int_L xdx + xdy - dz = \\ &= \left| \begin{array}{l} x = R \cos t, y = R \sin t, z = ht, \\ x = -R \sin t dt, y = R \cos t dt, z = h dt, \\ 0 \leq t \leq 2\pi \end{array} \right| = \int_0^{2\pi} (-R^2 \sin t \cos t + R^2 \cos^2 t - h) dt = \\ &= \left(-\frac{1}{2} R^2 \sin^2 t + R^2 \frac{2t + \sin 2t}{4} - ht \right) \Big|_0^{2\pi} = \pi(R^2 - 2h). \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

85. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{a} = y\vec{j}$ по колу радіуса R з центром $A(0; R; 0)$, розташованого спочатку в площині xOy , а потім в площині $y = R$. В першому випадку коло зорієнтоване природним чином для площини xOy , а в другому – за годинниковою стрілкою, якщо дивитись з додатного кінця осі ординат.

► 1. Параметричні рівняння кола L_1

$$x = R \cos t, \quad y = R + R \sin t, \quad z = 0, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$C_{L_1}(\vec{a}) = \oint_{L_1} y dx = R^2 \int_0^{2\pi} (1 + \sin t)(-\sin t) dt = -\pi R^2.$$

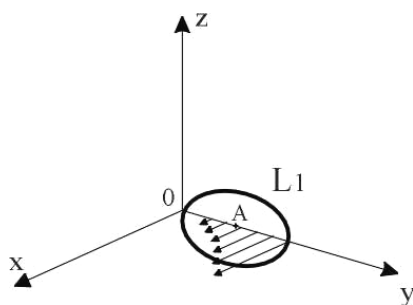


Рисунок 7.10

2. Параметричні рівняння кола L_2

$$x = R \cos t, \quad y = R, \quad z = R \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$C_{L_2}(\vec{a}) = \oint_{L_2} y dx = -R^2 \int_0^{2\pi} \sin t dt = 0. \quad \blacktriangleleft$$

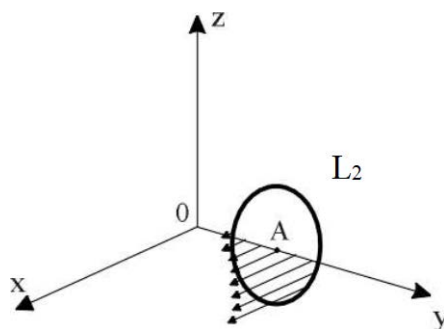


Рисунок 7.11

86. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{a} = x\vec{i} - z\vec{j} + y\vec{k}$ вздовж контура L , отриманого при перетині поверхні $y^2 = 4 - x - z$ з координатними площинами, який обходиться проти годинникової стрілки, якщо дивитись з додатного кінця осі аплікату.

► Контур $L = L_{AB} \cup L_{BC} \cup L_{CA}$ складається з парабол $L_{AB}: y^2 = 4 - x$, $L_{BC}: y^2 = 4 - z$ і відрізка прямої $L_{CA}: x + z = 4$.

$$C_L(\vec{a}) = \oint_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \oint_{L_{AB}} (\vec{a}, d\vec{r}) + \oint_{L_{BC}} (\vec{a}, d\vec{r}) + \oint_{L_{CA}} (\vec{a}, d\vec{r}).$$

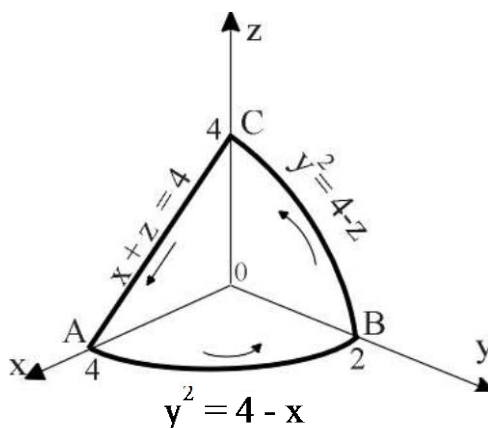


Рисунок 7.12

Кожен з інтегралів обчислюємо окремо. На $L_{AB}: z = 0, dz = 0, (\vec{a}, d\vec{r}) = xdx, 0 \leq x \leq 4$.

$$\oint_{L_{AB}} (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_4^0 x dx = -8.$$

На $L_{BC} : x = 0, dx = 0, (\vec{a}, d\vec{r}) = -zdy + ydz$. З рівняння параболи $z = 4 - y^2, dz = -2ydy, 0 \leq y \leq 2$, тому

$$(\vec{a}, d\vec{r}) = (y^2 - 4 - 2y^2)dy = -(y^2 + 4)dy,$$

$$\text{тоді } \oint_{L_{BC}} (\vec{a}, d\vec{r}) = -\int_2^0 (y^2 + 4)dy = \frac{32}{3}.$$

На $L_{CA} : y = 0, dy = 0, (\vec{a}, d\vec{r}) = xdx, 0 \leq x \leq 4$. Отже,

$$\oint_{L_{CA}} (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_0^4 xdx = 8.$$

$$\text{Таким чином, } C_L(\vec{a}) = -8 + \frac{32}{3} + 8 = \frac{32}{3}. \quad \blacktriangleleft$$

87. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{a} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + zx\vec{k}$ вздовж контура $L = \{x^2 + y^2 = 1, x + y + z = 1\}$, який обходиться проти годинникової стрілки, якщо дивитись з додатного кінця осі аплікату.

$$\blacktriangleright C_L(\vec{a}) = \oint_L xydx + yzdy + xzdz.$$

Лінія L є еліпсом, отриманим в результаті перетину площини $x + y + z = 1$ з циліндром $x^2 + y^2 = 1$. Знайдемо його параметричні рівняння. Будь-яка точка $M(x; y; z)$ еліпса проєктується на коло $x^2 + y^2 = 1, z = 0$, тому можемо взяти $x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t < 2\pi$, тоді $z = 1 - x - y = 1 - \cos t - \sin t$ (так як точка знаходиться на площині $x + y + z = 1$).

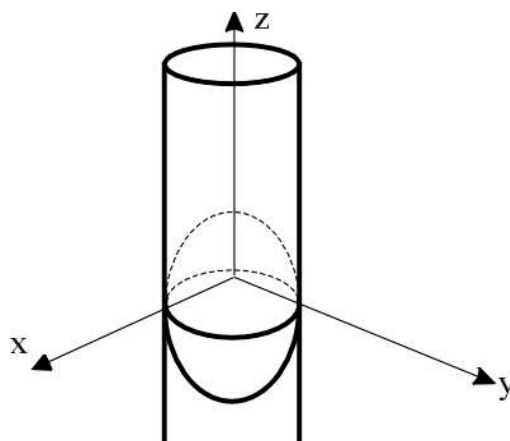


Рисунок 7.13

Отже, параметричні рівняння еліпса L є такими:

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = 1 - \cos t - \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Обчислюємо циркуляцію

$$\begin{aligned} C_L(\vec{a}) &= \int_0^{2\pi} (\cos t \sin t (-\sin t) + \sin t (1 - \cos t - \sin t) \cos t + \\ &+ \cos t (1 - \cos t - \sin t) (\sin t - \cos t)) dt = \int_0^{2\pi} (-3\sin^2 t \cos t + \\ &+ \sin 2t - \cos^2 t \sin t - \cos^2 t + \cos^3 t) dt = -\int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = -\pi. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Завдання для самостійного розв'язання

92. Обчислити лінійний інтеграл векторного поля

$$\vec{a} = (x + y)\vec{i} + (y + z)\vec{j} + (x + z)\vec{k}$$

вздовж відрізка прямої від точки $A(1;2;3)$ до точки $B(5;4;7)$.

93. Обчислити роботу плоского силового поля $\vec{F} = (2a - y)\vec{i} + (y - a)\vec{j}$ вздовж першої арки циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

94. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = (3x + 5z)\vec{i} + (x + 4y)\vec{j} + (6x - z)\vec{k}$ по контуру трикутника з вершинами в точках $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;2)$, який обходиться проти годинникової стрілки, якщо дивитись з додатного кінця осі аплікату.

95. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{a} = x\vec{i} + z\vec{j} - y\vec{k}$ вздовж лінії перетину частини поверхні $(x-1)^2 = z^2 + y^2$, що знаходиться в першому октанті, з координатними площинами, який обходиться проти годинникової стрілки, якщо дивитись з додатного кінця осі аплікату.

7.6 Ротор векторного поля. Теорема Стокса

Нехай координати векторного поля

$$\vec{a}(x; y; z) = a_1(x; y; z)\vec{i} + a_2(x; y; z)\vec{j} + a_3(x; y; z)\vec{k}$$

неперервні і мають неперервні частинні похідні першого порядку по всіх своїх аргументах.

Ротором (вихором) векторного поля $\vec{a}$ називається вектор

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{a} = \left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \right) \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}. \quad (13)$$

Проекція вектора $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{a}(M)$ на вісь l характеризує обертову здатність векторного поля в заданій точці M навколо осі l і називається *завихреністю* векторного поля $\vec{a}$ навколо цієї осі.

Теорема Стокса. Циркуляція векторного поля $\vec{a}$ по замкненому контуру L дорівнює потоку ротора цього векторного поля через будь-яку поверхню S , межею якої є контур L , причому контур і поверхня взаємно зорієнтовані

$$\oint_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \iint_S (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{a}, \vec{n}) ds. \quad (14)$$

Взаємна зорієнтованість означає: якщо рухатись по додатній стороні поверхні вздовж контура в додатному напрямі, то поверхня залишатиметься зліва.

Приклади розв'язання задач

88. Знайти ротор векторного поля

$$\vec{a} = (x^2 + y^2) \vec{i} + (y^2 + z^2) \vec{j} + (z^2 + x^2) \vec{k}.$$

► Відповідно до формули (13) маємо

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{a} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 + y^2 & y^2 + z^2 & z^2 + x^2 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(z^2 + x^2)}{\partial y} - \frac{\partial(y^2 + z^2)}{\partial z} \right) \vec{i} + \\ &+ \left(\frac{\partial(x^2 + y^2)}{\partial z} - \frac{\partial(z^2 + x^2)}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial(y^2 + z^2)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2 + y^2)}{\partial y} \right) \vec{k} = \end{aligned}$$

$$= -2z\vec{i} - 2x\vec{j} - 2y\vec{k} . \blacktriangleleft$$

89. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = (x - 2y)\vec{i} + (x + 3y - z)\vec{j} + (5x + y)\vec{k}$ по контуру трикутника з вершинами $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$, який обходиться проти годинникової стрілки, якщо дивитись з додатного кінця осі аплікат.

► Використаємо формулу Стокса (14). За поверхню S , межею якої є даний контур, візьмемо внутрішню частину області в площині $x + y + z = 1$, обмежену цим контуром.

Одиничний вектор нормалі до цієї поверхні $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$.

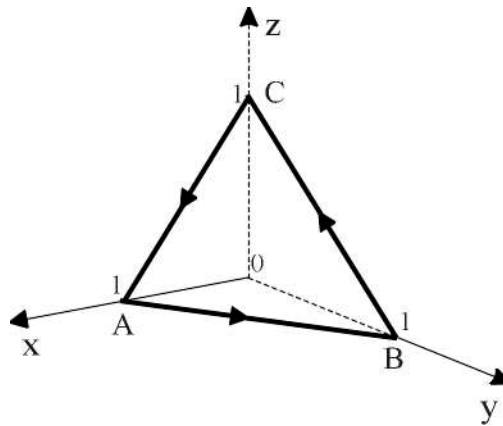


Рисунок 7.14

Використовуючи формули (13), знаходимо ротор даного векторного поля $\vec{a}$

$$\overrightarrow{\text{rot } \vec{a}} = 2\vec{i} - 7\vec{j} + \vec{k}.$$

За формулою Стокса

$$C_L(\vec{a}) = \iint_{\Delta ABC} (\overrightarrow{\text{rot } \vec{a}}, \vec{n}) ds = - \iint_{\Delta ABC} \frac{4}{\sqrt{3}} ds = -\frac{4}{\sqrt{3}} S_{\Delta ABC} = -\frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -2. \blacktriangleleft$$

90. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{a} = x \cdot \vec{i} - z \cdot \vec{j} + y \cdot \vec{k}$ вздовж контура L , який є межею поверхні $y^2 = 4 - x - z$, що знаходиться в першому октанті, і взаємно зорієнтований з цією поверхнею. Нормаль до поверхні утворює гострий кут з віссю аплікат.

► Контур $L = L_{AB} \cup L_{BC} \cup L_{CA}$.

За поверхню S , межею якої є контур L , візьмемо вказану в умові задачі поверхню, взаємно зорієнтовану з контуром. Знайдемо одиничний вектор нормалі до поверхні S :

$$\vec{n} = \frac{\overrightarrow{\text{grad}}(x + y^2 + z - 4)}{|\overrightarrow{\text{grad}}(x + y^2 + z - 4)|} = \frac{\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{2 + 4y^2}}.$$

За формулою (13) маємо

$$\overrightarrow{\text{rot } \vec{a}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & -z & y \end{vmatrix} = (1 - (-1))\vec{i} + (0 - 0)\vec{j} + (0 - 0)\vec{k} = 2\vec{i}.$$

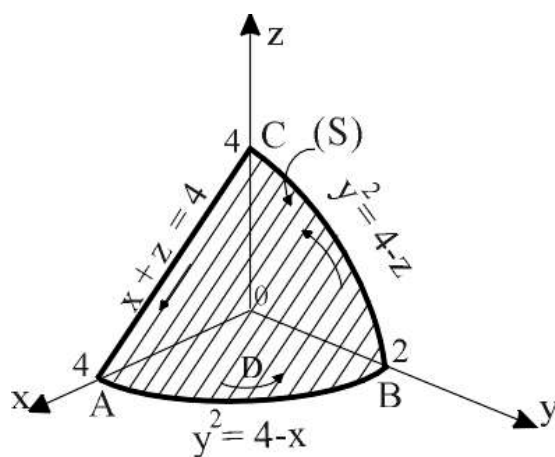


Рисунок 7.15

Тепер знаходимо циркуляцію за формулою (14)

$$\begin{aligned}
 C_L(\vec{a}) &= \iint_S (\vec{\text{rot}} \vec{a}, \vec{n}) ds = \iint_S \frac{1}{\sqrt{2+4y^2}} ds = \\
 &= \int_0^2 dy \int_0^{4-y^2} \frac{1}{\sqrt{2+4y^2}} \sqrt{1 + \left((4-x-y^2)'_x \right)^2 + \left((4-x-y^2)'_y \right)^2} dy = \\
 &= \int_0^2 dy \int_0^{4-y^2} \frac{1}{\sqrt{2+4y^2}} \sqrt{1 + (-1)^2 + (-2y)^2} dx = \int_0^2 dy \int_0^{4-y^2} dx = \\
 &= \int_0^2 dy \cdot y \Big|_0^{4-y^2} = \int_0^2 (4-y^2) dy = \left(4y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{16}{3}. \blacktriangleleft
 \end{aligned}$$

Завдання для самостійного розв'язання

96. Знайти ротор векторного поля $\vec{a}$:

а) $\vec{a} = x^2 \cdot \vec{i} + z^2 \cdot \vec{j} + y^2 \cdot \vec{k}$; б) $\vec{a} = y^2 z \cdot \vec{i} + z^2 x \cdot \vec{j} + x^2 y \cdot \vec{k}$.

97. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = y^2 \cdot \vec{i} + z^2 \cdot \vec{j} + (x^2 - 2y) \vec{k}$ вздовж заданого контура $L = \{z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, z^2 = y^2 + x^2\}$.

98. Обчислити за формулою Стокса циркуляцію векторного поля $\vec{a} = (y^3 - yx^2) \vec{i} + (y^2 - x^2 + x) \vec{j}$, де $L = \{(x-1)^2 + 4y^2 = 4\}$.

7.7 Потенціальне поле. Соленоїдальне поле. Оператори Гамільтона і Лапласа

Векторне поле $\vec{a}(x; y; z) = a_1(x; y; z) \vec{i} + a_2(x; y; z) \vec{j} + a_3(x; y; z) \vec{k}$, задане в області V , називається *потенціальним*, якщо в області V існує скалярна функція u , градієнт якої співпадає з $\vec{a}$, тобто

$$\vec{a} = \overrightarrow{\text{grad}} u. \quad (15)$$

Функція u називається *потенціальною* або *потенціалом* векторного поля $\vec{a}$.

Для того, щоб векторне поле $\vec{a}$ було потенціальним в заданій області V , необхідно і достатньо, щоб в усіх точках цієї області

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{a} = \vec{0}. \quad (16)$$

Виходячи з формули Стокса, отримуємо, що циркуляція потенціального векторного поля $\vec{a}$ по будь-якому замкненому контуру L з області V , в якій задано це поле, завжди рівна нулю

$$\oint_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \iint_S (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{a}, \vec{n}) ds = \iint_S 0 \cdot ds = 0.$$

Векторне поле називається *соленоїдальним* (вільним від джерел поля) в деякій області, якщо в усіх точках цієї області

$$\operatorname{div} \vec{a} = 0 .$$

З теореми Остроградського легко дістаємо, що потік соленоїдального поля через довільну замкнену поверхню дорівнює нулю

$$\oint_S (\vec{a}, \vec{n}) ds = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dv = 0 .$$

Векторне поле $\vec{a}$, задане в області V , називається *гармонічним*, якщо воно одночасно і потенціальне, і соленоїдальне, тобто якщо

$$\vec{a} = \overrightarrow{\operatorname{grad} u} , \quad \operatorname{div} \vec{a} = 0 .$$

Очевидно, що гармонічному полі $\operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad} u} = 0$. Оскільки

$$\operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad} u} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u ,$$

де $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta$ – оператор Лапласа, то в кожній точці області V має місце рівність

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 ,$$

яка називається рівнянням Лапласа, а функція, що його задовольняє – *гармонічною* функцією. Отже, гармонічне векторне поле повністю визначається своїм потенціалом, який є гармонічною функцією.

Для основних понять теорії поля і операцій над ними зручно використовувати оператор Гамільтона (оператор «набла»)

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + z^2 \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + y^2 \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} .$$

$$\text{Наприклад, } \vec{\nabla} u = \overrightarrow{\operatorname{grad} u} , \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \operatorname{div} \vec{a} , \quad \vec{\nabla} \times \vec{a} = \overrightarrow{\operatorname{rot} \vec{a}} .$$

Приклади розв'язання задач

91. Перевірити, чи поле

$$\vec{a} = \left(\frac{3x^2 \cdot y^2}{z} - 2x^3 \right) \vec{i} + \left(3y^3 + \frac{2x^3 \cdot y}{z} \right) \vec{j} + \left(z^3 - \frac{x^3 \cdot y^2}{z^2} \right) \vec{k}$$

є потенціальним.

$$\blacktriangleright \overrightarrow{\text{rot}} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{3x^2 \cdot y^2}{z} - 2x^3 & 3y^3 + \frac{2x^3 \cdot y}{z} & z^3 - \frac{x^3 \cdot y^2}{z^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, поле є потенціальним при $z \neq 0$. ◀

Завдання для самостійного розв'язання

99. Для заданого векторного поля $\vec{a} = (x^2 - 2yz)\vec{i} + (y^2 - 2xz)\vec{j} + (z^2 - 2xy)\vec{k}$ перевірити потенціальність і соленоїдальність. У випадку потенціальності знайти його потенціал.

Відповіді до завдань для самостійного розв'язування

1. $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$. 2. $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$. 3. 90. 4. 0,8. 5. 0,5.

6. а) 2; б) $\frac{7}{120}$; в) $\pi(1 - e^{-9})$; г) $\frac{a^3}{3} \left(\pi - \frac{4}{3} \right)$; д) $\frac{3}{2} \pi a^4$.

7. а) 5; б) $\frac{7}{120}$; в) $\frac{9\pi}{2}$; г) 3π ; д) $\frac{5\pi}{8}$.

$$8. \text{ а) } \frac{148}{15}; \text{ б) } 2\pi a^3; \text{ в) } \frac{4}{3}\pi a^3(2\sqrt{2}-1). \quad 9. \frac{kab}{3}(a^2+b^2). \quad 10. 5.$$

$$11. \frac{ab}{12}(a^2+b^2); \quad \frac{ab^3}{12}. \quad 12. \left(\frac{2}{5}; 0\right). \quad 13. \frac{a}{2}. \quad 14. \frac{32\pi}{3}.$$

$$15. \text{ а) } \frac{1}{2}; \text{ б) } \frac{\pi h^4}{4}; \text{ в) } 3.$$

$$16. \text{ а) } \frac{\pi}{6}; \text{ б) } \frac{\pi}{462}(4^{22}-2\cdot 3^{22}+2^{22}); \text{ в) } \frac{4\pi}{3}\ln 2.$$

$$17. \frac{5}{6}. \quad 18. \frac{3}{2}. \quad 19. \left(0, 0, \frac{3}{4}\right).$$

$$20. I_{xy} = \frac{4}{15}\pi abc^3; I_{yz} = \frac{4}{15}\pi bca^3; I_{zx} = \frac{4}{15}\pi acb^3.$$

$$21. \text{ а) } \frac{1}{6}(5\sqrt{5}-2\sqrt{2}); \text{ б) } \frac{1}{3}(5\sqrt{5}-1); \text{ в) } -5\sqrt{2};$$

$$\text{ г) } (2\pi^2+4\pi^2)a^3; \text{ г) } -6; \text{ д) } \frac{a^3}{6}\left(ch^{\frac{3}{2}}2-1\right);$$

$$\text{ е) } 2(e^a-1)+\frac{\pi}{4}ae^a; \text{ е) } 2\cdot 16^2.$$

$$22. 16a. \quad 23. \frac{13}{3}. \quad 24. \frac{1}{2}\ln(e^2+e^{-2}). \quad 25. \frac{4}{3}.$$

$$26. \frac{k}{3}(10\sqrt{10}-2\sqrt{2}). \quad 27. \frac{4}{9}k(63-5\sqrt{5}). \quad 28. \frac{1}{2}; \frac{3}{4}.$$

$$29. \frac{3}{5}a^2; \frac{3}{5}a^2. \quad 30. \frac{1}{3}. \quad 31. -\frac{14}{15}. \quad 32. \frac{4}{3}. \quad 33. -2\pi a^2. \quad 34. -2\pi.$$

$$35. 3. \quad 36. \frac{\pi a^2}{2}. \quad 37. -2\pi ab. \quad 38. -\frac{1}{5}(e^\pi-1). \quad 39. 3. \quad 40. \frac{112}{3}.$$

41. Так. 42. 2. 43. - . 44. πab . 45. $\frac{3a^2}{2}$. 46. 24. 47. $54\sqrt{14}$.

48. $\frac{\pi}{4}$. 49. 0. 50. $\frac{55+9\sqrt{3}}{65}$. 51. $\frac{3-\sqrt{3}}{2} + (\sqrt{3}-1)\ln 2$.

52. $\frac{\pi a^4}{2} \sin \alpha \cos^2 \alpha$. 53. $3\pi R^2$. 54. 16. 55. $2R^2(\pi-2)$.

56. $2\pi k \arctg \frac{H}{R}$. 57. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. 58. $x_0 = \frac{a}{2}; y_0 = 0; z_0 = \frac{16a}{9\pi}$.

59. $-\frac{4}{5}\pi 3^5$. 60. $-\frac{1}{6}$. 61. $\frac{4\pi}{3} - \frac{4}{15}$.

62. $-\frac{4\pi}{abc}(a^2b^2 + a^2c^2 + c^2b^2)$. 63. 0. 64. -3. 65. 0.

66. $\frac{4\pi R^3}{3}$. 67. $\frac{32}{5}$. 68. 3. 69. $-\frac{\pi}{8}$.

70. $x^2 + y^2 + z^2 = c$ (сім'я поверхонь-сфер).

71. а) $y = 2x \cdot e^{2c}$ – прямі, що проходять через початок координат;

б) $y = \pm\sqrt{cx}$ – параболи;

в) $x^2 - y^2 = \ln c$ – гіперболи.

72. $\frac{\sqrt{11}}{33}$. 73. -2. 74. $\frac{2\sqrt{3}}{3}(x+y+z)$.

75. $|\overrightarrow{\text{grad}} u| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\overrightarrow{\text{grad}} u = \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$.

76. $\frac{-q}{r^3} \cdot \vec{r}$. 77. $\left(\frac{\sqrt{30}}{30}; -\frac{\sqrt{30}}{15}; -\frac{\sqrt{30}}{6}\right)$. 78. $y = \frac{c_1}{x}; x = c_1 \cdot e^{\frac{z}{b}}$.

$$79. x^2 + x = \frac{y^2}{2} + \frac{c}{2}; \quad 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = y^2 + c + \frac{1}{2}. \quad 80. \frac{y^3}{3} + c = 0.$$

$$81. 87\pi. \quad 82. 8. \quad 83. \frac{\pi}{2}. \quad 84. \frac{3\pi}{16}. \quad 85. \frac{64}{15}.$$

$$86. \frac{(a_x \cdot x + a_y \cdot y + a_z \cdot z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \quad 87. \operatorname{div} \vec{a} = 3x^2y^3 + 2yz^2 + xy.$$

$$88. 83\frac{1}{3}. \quad 89. \frac{16R^4 - 8R^6 - R^8}{128}. \quad 90. 0. \quad 91. 121,5\pi. \quad 92. 72.$$

$$93. a^2\pi. \quad 94. 6. \quad 95. -\frac{\pi}{2}.$$

$$96. \mathbf{a)} (2y - 2z)\vec{i}; \quad \mathbf{б)} (y^2 - 2xy)\vec{j} + (2xz - 2yz)\vec{k}.$$

$$97. 0. \quad 98. 0.$$

99. Не соленоїдальне, потенціальне;

$$u = \left(\frac{x^3}{3} - 2xyz; \frac{y^3}{3} - 2xyz; \frac{z^3}{3} - 2xyz \right).$$

11 Теорія функцій комплексної змінної.

Операційне числення

§ 1. Комплексні числа. Послідовності та числові ряди комплексних чисел

1.1 Послідовності комплексних чисел. Нескінченно віддалена точка

Нагадаємо, що комплексні числа ми вивчали в розділі 5. Там вказувалось, що якщо ненульове комплексне число $z = x + iy$, де $x = \operatorname{Re} z$ — його дійсна частина, а $y = \operatorname{Im} z$ — уявна, записати в тригонометричній формі $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, то $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ називається *модулем* числа z , а φ — *аргументом*. Зауважимо, що аргумент визначається не однозначно, а з точністю до доданка, кратного 2π . Множину всіх таких значень позначатимемо через $\operatorname{Arg} z$. Аргумент числа $z = 0$ взагалі не визначений. Єдине значення $\varphi \in \operatorname{Arg} z$, $z \neq 0$, яке належить проміжку $(-\pi, \pi]$, позначається через $\arg z$ і називається *головним значенням аргумента*. Рівність $k_1 \operatorname{Arg} z_1 = k_2 \operatorname{Arg} z_2$, $k_1 \in \mathbf{Z}$, $k_2 \in \mathbf{Z}$ вважається правильною, якщо

$$k_1 \arg z_1 - k_2 \arg z_2 = 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Надалі без додаткових пояснень вживатимемо позначення $z = x + i \cdot y$, $w = u + i \cdot v$, $c = a + i \cdot b$, $x, y, u, v, a, b \in \mathbf{R}$, $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $w = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$, $r, \varphi, \rho, \theta \in \mathbf{R}$; аналогічні позначення літер з індексами (наприклад, $w_1 = \rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$).

Оскільки комплексне число ми розуміємо як вектор, то легко

дістати нерівності трикутника у вигляді

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad |z_1 - z_2| \geq \left| |z_1| - |z_2| \right|.$$

З першої з них випливає, що $|z| = |x + i \cdot y| \leq |x| + |y|$. Очевидно також, що

$$|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z| \text{ і } |y| \leq |z|.$$

Мають місце рівності $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, $\text{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2$,

з яких легко випливає, що

$$|z^n| = |z|^n, \quad \text{Arg}(z^n) = n \cdot \text{Arg } z.$$

$$\text{Також } \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \text{Arg } \frac{z_1}{z_2} = \text{Arg } z_1 - \text{Arg } z_2.$$

Аналогічно до означення послідовності дійсних чисел послідовністю комплексних чисел називається функція $N \rightarrow C$. Позначатимемо через z_n образ $n \in N$, а саму послідовність – символом (z_n) .

Число $c \in C$ називається *границею* послідовності (z_n) , якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - c| = 0$. Записуватимемо це так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = c \quad \text{або} \quad z_n \rightarrow c \quad (n \rightarrow \infty).$$

Послідовність, яка має границю, називається *збіжною*.

Комплексній послідовності (z_n) можна поставити у відповідність дві дійсні послідовності (x_n) та (y_n) , де $x_n = \text{Re } z_n$, $y_n = \text{Im } z_n$.

Теорема 1.1. Для збіжності послідовності (z_n) необхідною і достатньою є збіжність послідовностей (x_n) та (y_n) , причому $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \text{Re } c$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \text{Im } c$.

Також корисним є наступне твердження.

Теорема 1.2. Якщо для послідовності (z_n) , де

$z_n = r_n (\cos \varphi_n + i \sin \varphi_n)$, збігаються послідовності (r_n) та (φ_n) , то збігатиметься також і сама послідовність (z_n) , причому $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = R (\cos \alpha + i \sin \alpha)$, де $R = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n$, $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n$.

Природним є назвати послідовність точок

$$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$$

необмеженою, якщо відповідна послідовність

$$|z_1|, |z_2|, \dots, |z_n|, \dots$$

необмежена, тобто для довільного круга центром в нульовій точці як завгодно великого радіуса є точки послідовності, які лежать поза кругом. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = +\infty$, то казатимемо, що послідовність чисел z_n прямує до нескінченності і символічно запишуватимемо це так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty.$$

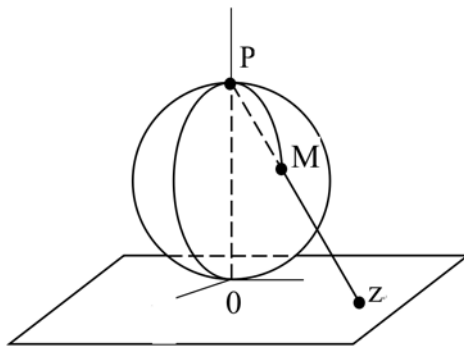


Рисунок 1

Щоб надати останній рівності простого геометричного тлумачення, зображатимемо комплексні числа точками на сфері. Для цього візьмемо сферу, яка дотикається до площини в нульовій точці (рис. 1). Діаметр сфери OP , який проходить

через точку 0 , буде перпендикулярним до площини; другу точку перетину його зі сферою, точку P , назвемо полюсом. Довільне комплексне число z , яке зображається точкою на площині, з'єднаємо з полюсом прямою лінією Pz . Очевидно, вона перетне сферу в єдиній, відмінній від P , точці, яку приймемо за зображення комплексного числа z . Тим самим ми установили взаємно однозначну і взаємно неперервну відповідність між точками

площини і точками сфери (за винятком точки P). Подивимось, у якому відношенні є точка P з іншими точками сфери. Якщо $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = +\infty$, то точки, які зображають числа z_k на сфері, неухильно наближаються до точки P . Тому природним буде взяти точку P для зображення нескінченності, а відповідну їй єдину точку площини назвати нескінченно віддаленою точкою.

Отже, з допомогою вказаного перетворення, яке називається *стереографічною проекцією*, ми встановили взаємно однозначну відповідність між точками сфери і точками площини, включаючи її нескінченно віддалену точку. Ця сфера, точки якої зображають сукупність усіх комплексних чисел і нескінченності, називається *комплексною числовою сферою* або *сферою Рімана*. Перевага зображення комплексних чисел на сфері замість площини полягає в тому, що тут наочно зображається нескінченно віддалена точка площини.

Відзначимо ще одну важливу властивість стереографічної проекції: *при стереографічній проекції довільне коло площини чи довільна пряма площини переходить в коло на сфері*. Єдиною відмінністю образу кола від образу прямої є те, що образ прямої проходить через полюс, а образ кола – ні. Відповідно до вказаної властивості під *узагальненим колом* на площині розуміють звичайне коло або пряму. *Узагальненим кругом* на площині вважатимемо зовнішність чи внутрішність звичайного кола або півплощину.

Приклади розв'язання задач

1. Знайти границю числової послідовності з загальним членом

$$z_n = \frac{2^n + 3^{n+2}}{6^{n-1}} + i \frac{4n - 3 \cos 2n}{2n + 5}.$$

► Оскільки для даної послідовності

$$x_n = \operatorname{Re} z_n = \frac{2^n + 3^{n+2}}{6^{n-1}} = \frac{2^n + 3^n \cdot 3^2}{2^n \cdot 3^n \cdot 6^{-1}} = 6 \left(\frac{1}{3} \right)^n + 54 \left(\frac{1}{2} \right)^n \rightarrow 6 \cdot 0 + 54 \cdot 0 = 0$$

при $n \rightarrow \infty$,

$$y_n = \operatorname{Im} z_n = \frac{4n - 3 \cos 2n}{2n + 5} = \frac{4}{2 + \frac{5}{n}} - \frac{3}{2n + 5} \cos 2n \rightarrow \frac{4}{2} - 0 = 2$$

при $n \rightarrow \infty$,

то за теоремою 1.1 наша послідовність збігається і

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + i \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0 + i \cdot 2 = 2i. \blacktriangleleft$$

2. Знайти усі значення комплексного параметра c , при яких послідовність (c^{3n}) збігається.

► Маємо послідовність з загальним членом $z_n = c^{3n}$.

Очевидно, що якщо $|c| < 1$, то $|z_n| = |c|^{3n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, тому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0, \text{ тобто дана послідовність збіжна при } |c| < 1.$$

Зрозуміло, що при $|c| > 1$ виконуватиметься $|z_n| = |c|^{3n} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, отже, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$.

Якщо $|c| = 1$, то можемо записати $c = \cos \varphi + i \sin \varphi$, де $\varphi \in \operatorname{Arg} z$. Тоді $z_n = c^{3n} = \cos 3n\varphi + i \sin 3n\varphi$. За теоремою 1.1 послідовність (z_n) може збігатись тільки при одночасній збіжності послідовностей $(\cos 3n\varphi)$ та $(\sin 3n\varphi)$. А це можливо тільки при $3\varphi = 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, тобто, коли

$c = c_k = \cos \frac{2\pi k}{3} + i \sin \frac{2\pi k}{3}$. Тут буде три різні значення при

$$k = 0, 1, 2: c_0 = 1, c_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, c_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Отже, ми отримали, що послідовність (c^{3n}) збігається при $|c| < 1$, $c = 1$, $c = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. При $|c| > 1$ границею послідовності є нескінченно віддалена точка. ◀

3. З'ясувати, при яких $z = x + iy$ послідовність $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ має границю і знайти цю границю.

► Запишемо загальний член $z_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ даної послідовності в тригонометричній формі $z_n = r_n (\cos \varphi_n + i \sin \varphi_n)$, причому за φ_n беремо таке значення $\text{Arg } z_n$, щоб виконувалась умова $\varphi_n = n \cdot \arg\left(1 + \frac{z}{n}\right)$. Тоді

$$\begin{aligned} r_n &= \left|1 + \frac{z}{n}\right|^n = \left|1 + \frac{x}{n} + i\frac{y}{n}\right|^n = \left(\sqrt{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2}\right)^n = \\ &= \left(1 + 2\frac{x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(1 + \frac{2nx + x^2 + y^2}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{2nx + x^2 + y^2}} \xrightarrow{x + \frac{x^2 + y^2}{n^2}} e^x \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$, згідно другої важливої границі.

Також при $n \rightarrow \infty$ маємо

$$\varphi_n = n \cdot \arg \left(1 + \frac{z}{n} \right) = n \cdot \arg \left(1 + \frac{x}{n} + i \frac{y}{n} \right) = n \cdot \operatorname{arctg} \frac{\frac{y}{n}}{1 + \frac{x}{n}} \rightarrow y.$$

Тому за теоремою 1.2 отримуємо, що при всіх $z = x + iy \in \mathbb{C}$ існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n = e^x (\cos y + i \sin y)$. ◀

Завдання для самостійного розв'язання

1. Знайти границю числової послідовності з загальним членом:

$$\text{а) } z_n = \frac{3-2n}{7n^2+11} - i \frac{8n+3n^3}{n^3-2}; \quad \text{б) } z_n = \sqrt{1+n^2} - n + i \frac{\sin 5n}{n};$$

$$\text{в) } z_n = n \operatorname{tg} \frac{6}{2n+11} - i \cdot n (\ln(4n+7) - \ln(4n-3)).$$

2. Чи існує дійсне число α , при якому послідовність $\left(e^{n^\alpha} + i(3n-2)^{(\alpha-4)^2} \right)$ збігається?

1.2 Множини точок на площині, область, лінія

Нагадаємо деякі відомі з курсу математичного аналізу означення множин точок на площині.

Околом точки називається круг (без кола, яке його обмежує) з центром в цій точці; зокрема, круг радіуса ε з центром в точці z_0

називатимемо ε -околом точки z_0 і позначатимемо $U_\varepsilon(z_0) = \{z : |z - z_0| < \varepsilon\}$.

Розглядаючи сферу Рімана, логічно буде ε -околом нескінченно віддаленої точки назвати множину $\{\infty\} \cap \left\{z : |z| > \frac{1}{\varepsilon}\right\}$.

Множина $E \subset \mathbb{C}$ називається обмеженою, якщо всі її точки розміщені всередині деякого кола з центром у початку координат.

Точка z_0 називається граничною для деякої множини E , якщо в будь-якому околі цієї точки є безліч точок множини E .

Відзначимо, що сама гранична точка множини E може цій множині і не належати. Наприклад, для множини $E = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$ точка $z_0 = 0 \notin E$ є граничною.

Множина E називається замкнутою, якщо їй належать усі її граничні точки.

Точка z_0 називається внутрішньою для множини E , якщо вона належить цій множині разом з якимось своїм околом.

Точка z_0 називається зовнішньою для множини E , якщо існує такий окіл точки z_0 , жодна точка якого не належить E .

Множина E називається відкритою, якщо усі її точки є внутрішніми.

Наприклад, множина точок, які знаходяться між двома концентричними колами, є відкритою. Приєднавши до цієї множини точки, які лежать на одному з цих кіл (або на обидвох), отримаємо уже не відкриту множину.

Множина E називається зв'язною, якщо будь-які її дві точки можна з'єднати ламаною, яка повністю належить цій множині.

Областю називатимемо відкриту зв'язну множину. Надалі область позначатимемо D або G .

Межею області називається множина усіх її граничних точок, які їй не належать. Точки межі області називаються *межевими*.

Єдиним прикладом області без межі є уся розширена комплексна площина $\bar{C}$. Усяка інша область має межу, зокрема, межею всієї скінченної комплексної площини C буде нескінченно віддалена точка. Слід відзначити, що не кожна область D має зовнішні точки; наприклад, сукупність усіх точок площини, які не лежать на відрізку дійсної осі $[-1; 1]$, є областю, яка не має зовнішніх точок.

Множина, яка складається з області D та її межі, називається *замкнутою областю* і позначається через $\bar{D}$.

Перейдемо тепер до поняття неперервної лінії в розумінні Жордано. Нехай $x(t)$ та $y(t)$ – дійсні неперервні функції змінної t , яка змінюється на відрізку $\alpha \leq t \leq \beta$. Два рівняння

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

дають параметричне зображення *неперервної* лінії. Якщо вимагатимемо, щоб двом різним значенням параметра t (за винятком, можливо, значень $t = \alpha$ і $t = \beta$, які відповідають початку і кінцю лінії) завжди відповідали дві різні точки лінії, то наша лінія не матиме кратних точок, тобто точок самоперетину. Таку лінію називатимемо *жордановою*. Якщо покласти $z = x + i \cdot y$, так що $z(t) = x(t) + i \cdot y(t)$, то аналітичне зображення лінії можна записати з допомогою одного рівняння

$$z = z(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta).$$

Коли параметр t змінюється, зростаючи на відрізку $[\alpha, \beta]$, точка z описує жорданову лінію, початком та кінцем якої є відповідно точки $z(\alpha)$ та $z(\beta)$; тим самим на лінії устанавлюється додатний напрям.

Очевидно, геометрично жорданова лінія являє собою множину точок, які є взаємно однозначним і неперервним відображенням

прямолінійного відрізка. Якщо початок і кінець жорданової лінії збігаються, тобто $z(\alpha) = z(\beta)$, то вона називається *замкненою*. Така лінія розділяє площину на дві різні області: одну, яка не містить нескінченно віддаленої точки і називається *внутрішністю* по відношенню до даної лінії; другу, яка містить нескінченно віддалену точку і називається *зовнішністю* по відношенню до даної лінії.

Внутрішність замкненої жорданової лінії має таку важливу властивість: яку б замкнену жорданову лінію ми не провели в цій області, її внутрішність також належатиме даній області. Взагалі, довільна область, яка має цю властивість, називається *однозв'язною*. Область, яка не має такої властивості, називається *многозв'язною*. Наприклад, множина точок $\{z : r < |z - z_0| < R\}$ буде многозв'язною областю.

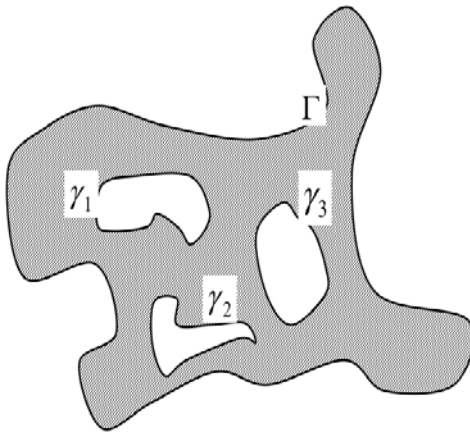


Рисунок 2

Для областей, які розміщені в розширеній площині, поняття однозв'язної області узагальнюється. А саме, така область називається однозв'язною, якщо для довільної замкненої жорданової кривої з цієї області або її внутрішності, або її зовнішності (включаючи і нескінченно віддалену точку) належить цій області.

Розглядаючи області, межі яких складаються із декількох замкнутих жорданових ліній, ми отримуватимемо приклади многозв'язних областей. Нехай $\Gamma, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ – замкнені жорданові лінії, такі, що кожна з ліній $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ лежить зовні інших і всі вони розміщені усередині Γ (рис. 2).

Множина точок площини, які лежать одночасно усередині лінії Γ і зовні ліній $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, являє собою область, межею якої є сукупність точок ліній $\Gamma, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$. Отже, при $n \geq 1$ в області існують такі неперервні замкнені лінії, внутрішності яких не повністю належать області. Таким чином, область, межа якої складається із декількох $(n+1)$ замкнених ліній буде многозв'язною, а конкретніше – $(n+1)$ -зв'язною. Наприклад, множина точок, які лежать усередині кругового кільця $\{z: r < |z - z_0| < R\}$ – двозв'язна область. На рис. 2 зображено чотиризв'язну область.

Приклади розв'язання задач

В задачах 4 – 7 з'ясувати геометричний зміст співвідношень.

4. $\operatorname{Re} z = 1$.

► Заданій рівності задовольняють усі точки комплексної площини виду $z = 1 + iy$, $y \in \mathbf{R}$. Очевидно, вони утворюють пряму, паралельну уявній осі, яка перетинає дійсну вісь в точці $x = 1$ (рис. 3). ◀

5. $\operatorname{Im} z + 2 > 0$.

► Оскільки для довільного числа $z = x + iy$ маємо $\operatorname{Im} z + 2 = y + 2$, то задане співвідношення означає $y + 2 > 0 \Leftrightarrow y > -2$. Отже, нерівності $\operatorname{Im} z + 2 > 0$ задовольняють усі точки комплексної площини, які знаходяться вище горизонтальної прямої, що перетинає уявну вісь в точці $2i$ (заштрихована півплощина на рис. 4). Точки

самої прямої заданому співвідношенню не задовольняють, тому ця пряма зображена пунктиром. ◀

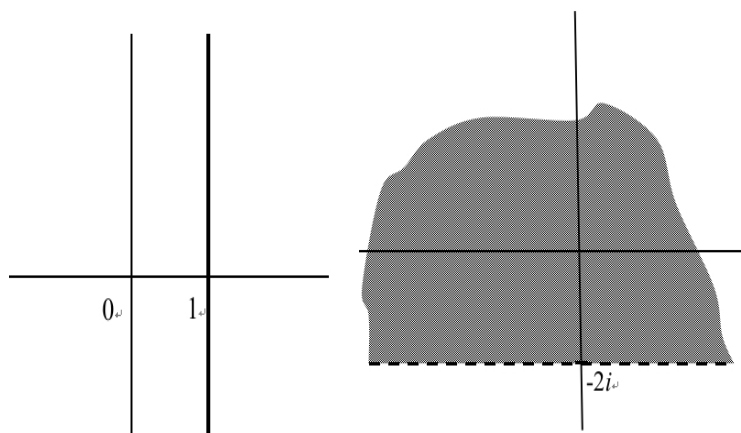


Рисунок 3

Рисунок 4

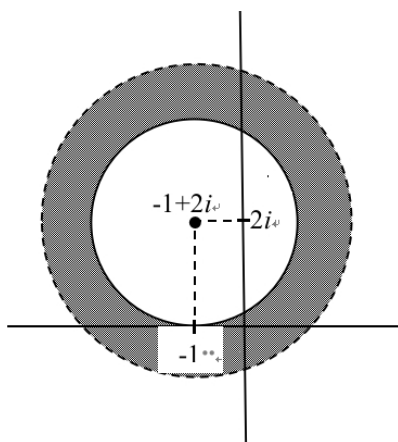


Рисунок 5

6. $2 \leq |z+1-2i| < 3.$

► $|z+1-2i| = |z - (-1+2i)|$ – це відстань між точками z та $z_0 = -1+2i$ на комплексній площині. Тому заданому співвідношенню задовольняють усі точки, які віддалені від z_0 не ближче ніж на 2 і ближче ніж 3. Зрозуміло, що це є точки кільця, обмеженого концентричними колами радіусів 2 та 3 з центром в точці z_0 , причому без точок зовнішнього кільця, яке зображене пунктиром (рис. 5). ◀

7. а) $|z+3| + |z-5| = 10$; б) $|z+3| + |z-5| = 8$;

в) $|z+3| + |z-5| = 7$.

► а) Рівність $|z+3| + |z-5| = 10$ означає, що сума

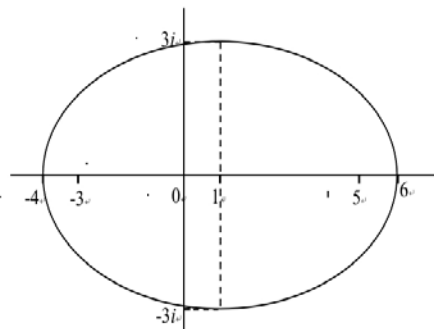


Рисунок 6

відстаней від точки z на комплексній площині до двох фіксованих точок $z_1 = -3$ та $z_2 = 5$ дорівнює сталому числу 10. З аналітичної геометрії відомо, що множина усіх

таких точок z утворить еліпс з фокусами в точках z_1 та z_2 , відстань між якими дорівнює $2c = 8$ та великою піввіссю $a = 5$. Мала піввісь дорівнюватиме $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ (рис. 6). ◀

► б) Рівності $|z+3| + |z-5| = 8$ задовольняють усі точки z

комплексної площини, сума відстаней від кожної з яких до точок $z_1 = -3$ та $z_2 = 5$ дорівнює сталому числу 8. Оскільки цьому ж числу дорівнює відстань між самими точками z_1 та z_2 , то множина точок z заповнить відрізок, що сполучає точки z_1 та z_2 . ◀

► в) Неможливо, щоб сума відстаней від якоїсь точки до двох точок була меншою за відстань між цими точками. Тому даній рівності $|z+3|+|z-5|=7$ не задовольняє жодна точка комплексної площини. ◀

8. Визначити сімейства ліній в комплексній площині, заданих рівняннями:

$$\text{а) } \operatorname{Re} \frac{1}{z} = C; \quad \text{б) } \operatorname{Im} \frac{1}{z} = C \quad (-\infty < C < +\infty).$$

► а) Для $z = x + iy$ маємо

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}, \quad (1)$$

тому $\operatorname{Re} \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2}$, і задане рівняння набуде вигляду

$$\frac{x}{x^2 + y^2} = C. \quad (2)$$

Розглянемо два випадки.

$$1) \ C = 0. \text{ Тоді із (2) отримуємо } \begin{cases} x = 0, \\ y \neq 0, \end{cases} \text{ тобто лінія}$$

складатиметься з усіх точок виду $z = iy$, $y \neq 0$. Очевидно, це буде уявна вісь без нульової точки.

2) Якщо $C \neq 0$, то (2) можна переписати

$$\begin{cases} \frac{x}{C} = x^2 + y^2, \\ x^2 + y^2 \neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x - \frac{1}{2C}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2C}\right)^2, \\ x^2 + y^2 \neq 0, \end{cases} \quad \text{що рівносильне}$$

$$\begin{cases} \left|z - \frac{1}{2C}\right| = \left|\frac{1}{2C}\right|, \\ |z| \neq 0. \end{cases}$$

Отже, при $C \neq 0$ маємо сімейство кіл з центрами в точках $\frac{1}{2C}$ і радіусами $\frac{1}{2|C|}$, з яких викинуто нульову точку. ◀

► б) З (1) отримуємо $\operatorname{Im} \frac{1}{z} = \frac{-y}{x^2 + y^2}$, а далі поступаємо

аналогічно випадку а). При $C = 0$ шукана лінія буде дійсною віссю без нульової точки, а при $C \neq 0$ – сімейство кіл з центрами з центрами в точках $\frac{-i}{2C}$ і радіусами $\frac{1}{2|C|}$, з яких

викинуто нульову точку. ◀

В задачах 9 – 10 визначити лінії, задані вказаними рівняннями:

9. $z = 1 - it$, $0 \leq t \leq 2$.

► Очевидно, усі точки виду $z=1-it$ при неперервній зміні t від $-\infty$ до $+\infty$ заповняють вертикальну пряму, яка

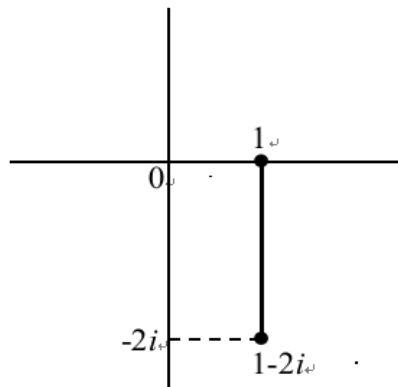


Рисунок 7

перетне дійсну вісь в точці 1. Зрозуміло, що при $0 \leq t \leq 2$ шуканою лінією буде відрізок цієї прямої з початком в точці 1 і кінцем в точці $1-2i$ (рис. 7). ◀

10. а) $z = t - i\sqrt{1-t^2}$, $-1 \leq t \leq 1$; б) $z = -t + i\sqrt{1-t^2}$, $-1 < t \leq 0$ (береться арифметичне значення кореня).

► а) Як і в попередньому прикладі, лінія задана комплексно-значною функцією дійсного аргумента. Очевидно, дане рівняння можна записати параметричними

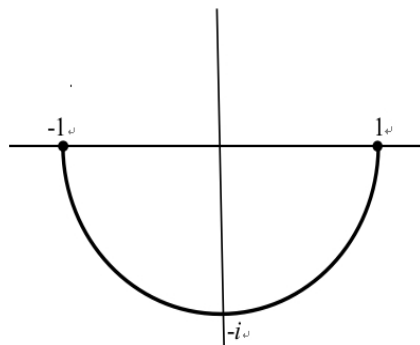


Рисунок 8

рівняннями $x = t$,
 $y = -\sqrt{1-t^2}$, $-1 \leq t \leq 1$.

Виразивши з першого рівняння $t = x$ і підставивши в друге, отримуємо $y = -\sqrt{1-x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$, що еквівалентно $x^2 + y^2 = 1$,

$y \leq 0$. Отже, вказане рівняння описує півколо з центром у

нульовій точці і радіусом 1, яке знаходиться в нижній півплощині (рис. 8). ◀

► б) Дане рівняння запишеться параметричними

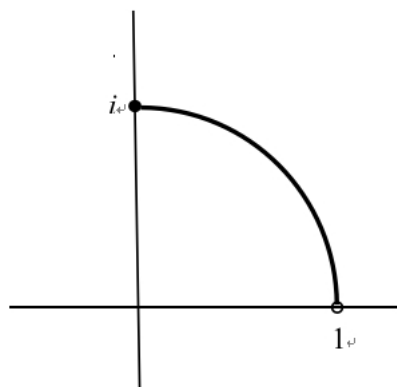


Рисунок 9

рівняннями $x = -t$, $y = \sqrt{1-t^2}$, $-1 < t \leq 0$. Виразивши з першого рівняння $t = -x$ і підставивши в друге, отримуємо $y = \sqrt{1-x^2}$, $0 \leq x < 1$, що еквівалентно $x^2 + y^2 = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. Отже, вказане рівняння описує четвертину кола з

центром у нульовій точці і радіусом 1, яка знаходиться в першому квадранті (рис. 9). ◀

Завдання для самостійного розв'язання

В задачах 3 – 7 з'ясувати геометричний зміст співвідношень.

3. $\operatorname{Im} iz + 3 = 0$.

4. $\operatorname{Re}(z + 2 - 3i) \leq 4$.

5. $-1 \leq \operatorname{Re}(z + 1 - 2i) + \operatorname{Im}(z + 1 - 2i) \leq 2$.

6. а) $\arg z = \frac{3\pi}{4}$; б) $-\frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$.

7. а) $|z| = \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z$; б) $|z| > \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z$;

$$в) |z| \leq \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z.$$

8. Визначити сімейства ліній в комплексній площині, заданих рівняннями:

$$а) \operatorname{Re} z^2 + \operatorname{Im} z^2 = C; \quad б) \operatorname{Re} z^2 - \operatorname{Im} z^2 = C \quad (-\infty < C < +\infty).$$

В задачах 9 – 10 визначити лінії, задані вказаними рівняннями:

$$9. а) z = 1 - t + 2it, \quad -1 < t < +\infty; \quad б) z = t - it^2, \quad -\infty < t \leq 0.$$

$$10. а) z = 5 \cos t - 5i \sin t, \quad 0 \leq t < \pi;$$

$$б) z = 4 \sin t + 3i \cos t, \quad \pi \leq t \leq \frac{5\pi}{2}.$$

1.3 Числові ряди

Числовим рядом називатимемо суму

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = z_1 + z_2 + \dots + z_k + \dots \quad (3)$$

Числовий ряд (3) називається *збіжним*, якщо послідовність його часткових сум $S_n = \sum_{k=1}^n z_k$ є збіжною.

Згідно з цим означенням, відповідно до теореми 1.1, отримуємо таку теорему.

Теорема 1.3. Для збіжності числового ряду $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ необхідною і

достатньою є збіжність числових рядів $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ та $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$.

Безпосередньо з означення 1.1 випливає *необхідна умова збіжності* числового ряду (3) $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = 0$.

Для числового ряду (3) розглянемо числовий ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |z_k| = |z_1| + |z_2| + \dots + |z_k| + \dots \quad (4)$$

Неважко переконатись, що із збіжності ряду (4) випливає збіжність ряду (3). Обернене твердження, взагалі кажучи, хибне. Відповідно до цього дамо означення.

Числовий ряд (3) називається *абсолютно збіжним*, якщо збігається числовий ряд (4).

Числовий ряд (3) називається *умовно збіжним*, якщо він збігається, а числовий ряд (4) – розбігається.

Для дослідження збіжності числового ряду (4) можна застосовувати відомі з курсу математичного аналізу ознаки. Зокрема, має місце ознака Коші.

Теорема 1.4. Нехай $q = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|z_k|}$. Тоді: 1) якщо $q < 1$, то ряд (3) абсолютно збіжний; 2) якщо $q > 1$, то він розбіжний.

Сформулюємо ще одну з достатніх ознак збіжності числового ряду – ознаку Діріхле.

Теорема 1.5. Нехай послідовність (z'_k) , де усі $z'_k > 0$, монотонно прямує до нуля, а частинні суми ряду $\sum_{k=1}^{\infty} z''_k$ рівномірно обмежені. Тоді

ряд $\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \sum_{k=1}^{\infty} z'_k z''_k$ збігається.

Приклади розв'язання задач

11. Дослідити збіжність числових рядів $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$:

$$\begin{aligned} \text{а) } z_k &= \frac{k^4}{(3i)^k}; & \text{б) } z_k &= \frac{2^k k!}{(ik)^k}; \\ \text{в) } z_k &= \left(\frac{3+2i}{2-3i}\right)^k; & \text{г) } z_k &= \frac{(3+2i)^k}{k(2-3i)^k}. \end{aligned}$$

► а) Розглянемо знакододатний числовий ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |z_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{k^4}{(3i)^k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4}{3^k}. \quad \text{Дослідимо його на збіжність,}$$

скориставшись ознакою Даламбера:

$$\begin{aligned} d &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|z_{k+1}|}{|z_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{(k+1)^4}{3^{k+1}} : \frac{k^4}{3^k} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{(k+1)^4}{3^k \cdot 3} \cdot \frac{3^k}{k^4} \right) = \\ &= \frac{1}{3} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k+1}{k} \right)^4 = \frac{1}{3} < 1, \end{aligned}$$

тому заданий числовий ряд збігається абсолютно. ◀

► б) Ряд, складений з абсолютних величин нашого ряду, матиме вигляд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |z_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{2^k k!}{i^k k^k} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{k^k}. \quad (5)$$

Цей знакододатний ряд нам зручно дослідити на збіжність за ознакою Даламбера:

$$d = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|z_{k+1}|}{|z_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2^{k+1} (k+1)!}{(k+1)^{k+1}} : \frac{2^k k!}{k^k} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{\left(\frac{k+1}{k}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1,$$

отже, числовий ряд (5) збігається. Це означає абсолютну

збіжність заданого числового ряду $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4}{(3i)^k}$. ◀

► в) Легко бачити, що для всіх $k \in \mathbb{N}$ виконується

$$|z_k| = \left| \frac{3+2i}{2-3i} \right|^k = \left(\frac{|3+2i|}{|2-3i|} \right)^k = \left(\frac{\sqrt{3^2+2^2}}{\sqrt{2^2+(-3)^2}} \right)^k = 1^k = 1,$$

отже, $z_k \not\rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, тобто не виконується необхідна умова збіжності. Тому ряд розбігається. ◀

► г) Очевидно, $z_k = z'_k z''_k$, де $z'_k = \frac{1}{k}$, $z''_k = \left(\frac{3+2i}{2-3i} \right)^k$.

Зрозуміло, що послідовність (z'_k) задовольняє умовам теореми 1.5. Також для всіх $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n z''_k &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{3+2i}{2-3i} \right)^k = \frac{\left| \left(\frac{3+2i}{2-3i} \right)^{k+1} - \frac{3+2i}{2-3i} \right|}{\left| \frac{3+2i}{2-3i} - 1 \right|} = \\ &= \left| \left(\frac{3+2i}{2-3i} \right)^{k+1} - \frac{3+2i}{2-3i} \right| \cdot \left| \frac{2-3i}{3+2i-(2-3i)} \right| \leq \\ &\leq \left(\left| \frac{3+2i}{2-3i} \right|^{k+1} + \left| \frac{3+2i}{2-3i} \right| \right) \cdot \left| \frac{2-3i}{1+5i} \right| = (1+1) \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{26}} = \sqrt{2}, \end{aligned}$$

тобто частинні суми ряду $\sum_{k=1}^{\infty} z''_k$ рівномірно обмежені. Тому за

теоремою 1.5 заданий числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+2i)^n}{n(2-3i)^n}$

збігається. ◀

Завдання для самостійного розв'язання

11. Дослідити збіжність числових рядів $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$:

$$\text{а) } z_k = \left(\frac{3-i}{2+5i} \right)^{2k} ; \quad \text{б) } z_k = \frac{(3i)^k k!}{k^k} ;$$

$$\text{в) } z_k = \left(\frac{4-i}{1+4i} \right)^k ; \quad \text{г) } z_k = \frac{(4-i)^k}{\sqrt{k} (1+4i)^k} .$$

§ 2. Комплексна змінна. Аналітичні функції

2.1 Поняття функції комплексної змінної.

Елементарні трансцендентні функції

Розглянемо множину $E \subset \mathbb{C}$ і умовимося, що комплексне число $z = x + i \cdot y$ може бути ототожене з кожним числом цієї множини E . В такому випадку ми назвемо z комплексною змінною, а E – областю її зміни. Геометрично область E зміни комплексної змінної z зобразиться як деяка множина точок в комплексній числовій площині.

Якщо кожному $z \in E$ поставлене у відповідність число $w = u + iv \in \mathbb{C}$, то кажуть, що на множині $E \subset \mathbb{C}$ задано функцію

комплексної змінної. Символічно це записується так: $w = f(z)$.

Зауваження. Може статись, що кожному значенню комплексної змінної z відповідає декілька значень (може бути навіть безліч) змінної w . В такому випадку w називається *многозначною* функцією комплексної змінної z , тоді як в першому випадку вона називається *однозначною* функцією. Надалі, якщо не буде додатково зауважене інше, ми матимемо справу тільки з однозначними функціями.

Оскільки $z = x + i \cdot y$, то u та $v \in$ дійсними функціями двох дійсних змінних x та y . Таким чином, задання w як функції комплексної змінної z зводиться до задання двох дійсних функцій u та v від двох дійсних змінних x та y :

$$w = f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y).$$

Кожній точці множини E , яка є областю зміни змінної z , відповідає певне комплексне число w . Зображаючи його як точку в числовій площині, отримуємо множину точок E' . Отже, задання w як функції комплексної змінної z геометрично зводиться до установлення відповідності між множинами точок E та E' , згідно з якою кожній точці множини E відповідає певна точка множини E' . В цьому випадку кажуть, що множина точок E відображається на множину точок E' . При цьому деякі точки множини E' можуть бути кратними, тобто такими, що різним значенням z відповідає одне і те саме значення w . Розглядаючи відповідність між точками множин E та E' як відображення множини E' на множину E , ми отримуємо для кожного значення комплексної змінної w , що змінюється на множині точок E' , одне або декілька (може бути й безліч) значень z . Отже, навпаки, z можна розглядати як функцію комплексної змінної w . Така функція називається *оберненою* стосовно до функції $w = f(z)$. Якщо різним значенням комплексної змінної z відповідають різні значення функції w , то відображення множини E на E' буде взаємно однозначним, тобто таким, що кожній точці множини E

відповідає єдина точка множини E' і, навпаки, кожній точці множини E' – єдина точка множини E . У цьому випадку z , яка розглядається як обернена функція w , також буде однозначною функцією. В загальному ж випадку функція, обернена однозначній функції, може бути багатовзначною і навіть нескінченнозначною. Більше того, функція, обернена однозначній, може мати при кожному значенні незалежної змінної нескінченну множину значень, які утворюють неперервну лінію. Наприклад, $w = |z|$ є однозначною функцією комплексної змінної z . Розглядаючи ж z як функцію w , ми бачимо, що заданому значенню $w = \rho$ відповідає нескінченна множина значень z , для яких $|z| = \rho$, тобто усе коло з центром в нульовій точці і радіусом ρ . Проте, такі явища не є властивими диференційовним функціям, які ми будемо далі вивчати.

Перейдемо до основних елементарних трансцендентних функцій.

Показниковою називається функція виду

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y). \quad (6)$$

Очевидно, що при $y = 0$ маємо $e^z = e^x$, тобто дістаємо показникову функцію, яку вивчали в курсі математичного аналізу. З (6) випливає, що $|e^z| = e^x > 0$, звідки $e^z \neq 0$ в усіх точках $z \in \mathbb{C}$. Легко бачити, що $\operatorname{Arg} e^z = y + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Поклавши в (6) $x = 0$, отримуємо *формулу Ейлера*:

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y.$$

Отже, $e^z = e^x \cdot e^{iy}$. Оскільки $e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$, то $e^{z+2\pi i} = e^z$, тобто функція e^z є періодичною з періодом $2\pi i$.

Функції

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), \quad \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \quad (7)$$

називаються *тригонометричними* відповідно *синусом* та *косинусом* або

просто синусом та косинусом, а функції

$$\operatorname{sh} z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}), \quad \operatorname{ch} z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) -$$

гіперболічними відповідно синусом та косинусом.

Якщо $z = x$, то, згідно з означенням та формулою Ейлера, маємо

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) = \frac{1}{2i}(\cos x + i \sin x - (\cos x - i \sin x)) = \sin x.$$

Аналогічно $\cos z = \cos x$, тобто дістаємо функції, які відомі нам з середньої школи.

Оскільки функція e^z періодична з періодом $2\pi i$, то функції $\sin z$ і $\cos z$ будуть періодичними з періодом 2π , а функції $\operatorname{sh} z$ і $\operatorname{ch} z$ будуть періодичними з періодом $2\pi i$.

Легко переконатись в зв'язку між тригонометричними та гіперболічними функціями: $\sin iz = i \operatorname{sh} z$, $\cos iz = \operatorname{ch} z$.

Усі відомі зі шкільного курсу тригонометрії формули залишаються слушними і в комплексній площині. Наприклад,

$$\begin{aligned} \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 &= \frac{1}{2}(e^{iz_1} + e^{-iz_1}) \cdot \frac{1}{2}(e^{iz_2} + e^{-iz_2}) - \\ &- \frac{1}{2i}(e^{iz_1} - e^{-iz_1}) \cdot \frac{1}{2i}(e^{iz_2} - e^{-iz_2}) = \frac{1}{2}(e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}) = \cos(z_1 + z_2). \end{aligned}$$

Якщо тригонометричні функції дійсної змінної $\sin x$ та $\cos x$ є обмеженими, то функції $\sin z$ і $\cos z$ є необмеженими в комплексній площині. Справді, $|\cos iy| = \operatorname{ch} y \rightarrow \infty$ при $y \rightarrow \infty$.

Аналогічно до випадку функцій дійсної змінної тригонометричні функції $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$ і гіперболічні функції $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$ означаються так:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Приклади розв'язання задач

12. Знайти модулі та головні значення аргументів комплексних чисел:

$$-ae^{i\varphi} \ (a > 0, -\pi < \varphi \leq \pi); \quad -\cos 5i; \quad \sin(3-2i).$$

► Оскільки $-1 = -1 + i \cdot 0 = \cos \pi + i \sin \pi = e^{i\pi}$, то $-ae^{i\varphi} = e^{i\pi} ae^{i\varphi} = ae^{i(\varphi+\pi)}$, отже, $|-ae^{i\varphi}| = a$, $\varphi + \pi \in \text{Arg}(-ae^{i\varphi})$. За умовою $-\pi < \varphi \leq \pi$, тобто $0 < \varphi + \pi \leq 2\pi$, тому головне значення аргумента буде $\arg(-ae^{i\varphi}) = \varphi + \pi$ при $-\pi < \varphi \leq 0$ і $\arg(-ae^{i\varphi}) = \varphi - \pi$ при $0 < \varphi \leq \pi$.

Виходячи з (7), маємо

$$-\cos 5i = -\frac{1}{2}(e^{i \cdot 5i} + e^{-i \cdot 5i}) = -\frac{1}{2}(e^{-5} + e^5) = -\text{ch } 5 < 0,$$

тому $|\cos 5i| = \text{ch } 5$, $\arg(-\cos 5i) = \pi$.

За другою формулою (7) отримуємо

$$\begin{aligned} \sin(3-2i) &= \frac{1}{2i}(e^{i(3-2i)} - e^{-i(3-2i)}) = \frac{1}{2i}(e^{2+3i} - e^{-2-3i}) = \\ &= \frac{1}{2i}(e^2(\cos 3 + i \sin 3) - e^{-2}(\cos 3 - i \sin 3)) = \\ &= \sin 3 \cdot \frac{e^2 + e^{-2}}{2} + \cos 3 \cdot \frac{e^2 - e^{-2}}{2i} = \sin 3 \cdot \text{ch } 2 - i \cos 3 \cdot \text{sh } 2, \end{aligned}$$

тому

$$|\sin(3-2i)| = \sqrt{(\sin 3 \cdot \text{ch } 2)^2 + (\cos 3 \cdot \text{sh } 2)^2} = \sqrt{\text{ch}^2 2 - \cos^2 3}.$$

Оскільки

$$\operatorname{Re}(\sin(3-2i)) = \sin 3 \cdot \operatorname{ch} 2 > 0,$$

$$\operatorname{Im}(\sin(3-2i)) = -\cos 3 \cdot \operatorname{sh} 2 > 0,$$

$$\text{то } \arg(3-2i) = -\operatorname{arctg} \frac{\cos 3 \cdot \operatorname{sh} 2}{\sin 3 \cdot \operatorname{ch} 2} = -\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} 3 \cdot \operatorname{th} 2). \blacktriangleleft$$

13. Знайти суми:

$$1 + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx; \quad \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx.$$

$$\blacktriangleright \quad \text{Позначимо} \quad 1 + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = S_1(x),$$

$$\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = S_2(x). \quad \text{Тоді, використовуючи}$$

$$\text{формулу Ейлера, матимемо } S_1(x) + i \cdot S_2(x) =$$

$$= 1 + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx + i(\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx) =$$

$$= 1 + (\cos x + i \sin x) + (\cos 2x + i \sin 2x) + \dots + (\cos nx + i \sin nx) =$$

$$= 1 + e^{ix} + e^{2ix} + \dots + e^{inx} = 1 + e^{ix} + (e^{ix})^2 + \dots + (e^{ix})^n =$$

$$= \frac{(e^{ix})^{n+1} - 1}{e^{ix} - 1} = \frac{(e^{i(n+1)x} - 1)(e^{-ix} - 1)}{(e^{ix} - 1)(e^{-ix} - 1)} = \frac{e^{inx} - e^{i(n+1)x} - e^{-ix} + 1}{e^0 + 1 - (e^{ix} + e^{-ix})} =$$

$$= \frac{\cos nx - \cos(n+1)x - \cos x + 1}{2 - 2 \cos x} + i \frac{\sin nx - \sin(n+1)x + \sin x + 1}{2 - 2 \cos x},$$

звідки, відокремлюючи дійсну та уявну частини, отримуємо

$$S_1(x) = \frac{\cos nx - \cos(n+1)x - \cos x + 1}{2 - 2 \cos x},$$

$$S_2(x) = \frac{\sin nx - \sin(n+1)x + \sin x + 1}{2 - 2 \cos x}. \blacktriangleleft$$

14. Знайти дійсну та уявну частини функції $w = z^3$.

► Поклавши $z = x + iy$, матимемо

$$w = (x + iy)^3 = x^3 + 3x^2 \cdot iy + 3x(iy)^2 + (iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3).$$

Отже, $u = \operatorname{Re} w = x^3 - 3xy^2$, $v = \operatorname{Im} w = 3x^2y - y^3$. ◀

15. Для відображення $w = \frac{1}{z}$ знайти образи ліній:

а) $x = c$; б) $y = c$; в) $|z| = R$; г) $\arg z = \alpha$; д) $|z - 1| = 1$.

► а) Розглянемо два випадки.

1) $c = 0$. Тоді $z = 0 + iy = iy$, $-\infty < y < +\infty$, отже наша лінія є уявною віссю. Внаслідок відображення $w = \frac{1}{z}$ точки

$z = iy$ перейдуть у точки $w = \frac{1}{iy} = -i \frac{1}{y}$, $y \neq 0$ – це точки

уявної осі без початкової точки в площині w .

2) $c \neq 0$. В цьому випадку $z = c + iy$, $-\infty < y < +\infty$, тобто задана лінія є вертикальною прямою, яка перетинає дійсну вісь в точці c . Образами точок цієї прямої будуть точки

$$w = \frac{1}{c + iy} = \frac{c - iy}{(c + iy)(c - iy)} = \frac{c - iy}{c^2 + y^2} = \frac{c}{c^2 + y^2} - i \frac{y}{c^2 + y^2}. \text{ Бачимо,}$$

що $u = \frac{c}{c^2 + y^2}$, $v = \frac{y}{c^2 + y^2}$. Тоді

$$u^2 + v^2 = \frac{c^2}{(c^2 + y^2)^2} + \frac{y^2}{(c^2 + y^2)^2} = \frac{c^2 + y^2}{(c^2 + y^2)^2} = \frac{1}{c^2 + y^2} = \frac{1}{c} \cdot \frac{c}{c^2 + y^2} = \frac{1}{c} \cdot v$$

або $u^2 + \left(v - \frac{1}{2c}\right)^2 = \left(\frac{1}{2c}\right)^2$. Це є рівняння кола з центром

$$z_0 = \frac{i}{2c} \text{ і радіусом } R = \frac{1}{2|c|}. \blacktriangleleft$$

► б) Повторюючи міркування випадку а), отримуємо, що образом заданої лінії $y = c$ при $c = 0$ (тобто дійсної осі без початкової точки) буде дійсна вісь без початкової точки в площині w ; при $c \neq 0$ – коло з центром $z_0 = \frac{1}{2c}$ і радіусом

$$R = \frac{1}{2|c|}. \blacktriangleleft$$

► в) Задана лінія $|z| = R$ є колом радіуса R з центром у нульовій точці. Кожну точку цього кола можна подати у вигляді $z = R \cdot e^{i\varphi}$, $-\pi < \varphi \leq \pi$. Образами таких точок при відображенні $w = \frac{1}{z}$ будуть точки $w = \frac{1}{R \cdot e^{i\varphi}} = \frac{1}{R} e^{-i\varphi}$. Якщо φ неперервно змінюватиметься від $-\pi$ до π , то усі ці точки заповнять коло $|w| = \frac{1}{R}$. Отже, образом кола $|z| = R$ буде коло

$$|w| = \frac{1}{R}. \blacktriangleleft$$

► г) Виходячи з показникової форми запису комплексного числа, усі точки лінії $\arg z = \alpha$ матимуть вигляд $z = r \cdot e^{i\alpha}$, $0 < r < +\infty$. Вони утворять промінь з початком у

нульовій точці, який утворює кут α з додатним напрямом дійсної осі. Образами цих точок будуть точки

$$w = \frac{1}{r \cdot e^{i\alpha}} = \frac{1}{r} e^{-i\alpha}. \text{ При } 0 < r < +\infty \text{ вони заповнять промінь}$$

$\arg w = -\alpha$ в площині w . ◀

► д) Поклавши $z = x + iy$, матимемо

$$|z-1|=1 \Leftrightarrow |x+iy-1|=1 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2x, \quad (8)$$

$$0 \leq x \leq 2.$$

Тоді $w = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x-iy}{2x} = \frac{1}{2} - i \frac{y}{2x}$. Із (8) бачимо, що

$y = \pm \sqrt{2x-x^2}$. При зміні x від 0 до 2 точка $z = x + i\sqrt{2x-x^2}$

описує верхнє півколо заданого кола, а точка $z = x - i\sqrt{2x-x^2}$ – нижнє півколо. Образи цих точок відповідно

$w = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{2x-x^2}}{2x}$ та $w = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{2x-x^2}}{2x}$ опишуть нижній та

верхній промені прямої $\operatorname{Re} w = \frac{1}{2}$ з початком у точці $w_1 = \frac{1}{2}$,

яка є образом точки $z_1 = 2$. Точка $z_0 = 0$ перейде у нескінченно віддалену точку.

Отже, образом кола $|z-1|=1$ при відображенні $w = \frac{1}{z}$

буде вертикальна пряма $\operatorname{Re} w = \frac{1}{2}$. Зауважимо, що це відоб-

раження, як і усі попередні, буде взаємно однозначним. ◀

Завдання для самостійного розв'язання

12. Знайти модулі та головні значення аргументів комплексних чисел:

$$ae^{-i\varphi} \ (a > 0, -\pi < \varphi \leq \pi); \ 4e^{5-2i}; \ \cos 7i; \ \cos(1+6i).$$

13. Знайти суми:

$$1 - \cos 3x + \cos 6x + \dots + (-1)^n \cos 3nx;$$

$$\sin 3x - \sin 6x + \dots + (-1)^{n-1} \sin 3nx.$$

14. Знайти дійсну та уявну частини функцій:

$$\text{а) } w = \frac{1}{z}; \ \text{б) } w = \cos z.$$

15. Для відображення $w = z^2$ знайти образи ліній:

$$\text{а) } x = c; \ \text{б) } y = c; \ \text{в) } |z| = R; \ \text{г) } \arg z = \alpha; \ \text{д) } x = y.$$

2.2 Границя функції комплексної змінної. Неперервність

Нехай однозначна функція $w = f(z)$ задана на множині E , точка z_0 – гранична для множини E .

Якщо існує число $C \in \mathbb{C}$, таке що для довільного ε -околу $U_\varepsilon(C)$ точки C існує відповідний йому δ -окіл $U_\delta(z_0)$ точки z_0 , такий, що для довільної точки $z \in U_\delta(z_0) \cap E$, $z \neq z_0$ значення $f(z)$ потрапляє в $U_\varepsilon(C)$, то C називається *границею* функції $w = f(z)$ в точці z_0 .

Записується це так:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = C. \quad (9)$$

Це означення границі функції еквівалентне такому.

Для довільної послідовності (z_n) , збіжної до z_0 , виконується

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = C.$$

Виходячи з цього означення, бачимо, що якщо вдасться вказати дві збіжні до z_0 послідовності (z'_n) та (z''_n) , такі, що $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z'_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(z''_n)$, то функція f не має границі. Також функція не матиме границі в точці z_0 , якщо ми зможемо вказати дві лінії $z = \gamma_1(t)$ та $z = \gamma_2(t)$ із області визначення f з кінцем в точці $z_0 = \gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$, що

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(\gamma_1(t)) \neq \lim_{t \rightarrow t_0} f(\gamma_2(t)).$$

Теорема 2.1. Нехай $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$, $C = A + iB$. Тоді комплексне співвідношення (9) еквівалентне двом дійсним:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = A, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = B, \quad \text{де } z_0 = x_0 + y_0.$$

Нехай $z_0 = x_0 + y_0 \in E$ і є граничною точкою для множини E .

Функція $w = f(z)$ називається *неперервною* в точці z_0 , якщо

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

З теореми 2.1 випливає, що функція $f(z)$ неперервна в точці z_0 тоді і тільки тоді, коли функції $u(x, y)$ та $v(x, y)$ неперервні в точці (x_0, y_0) .

Функція $w = f(z)$ називається неперервною на деякій множині, якщо вона неперервна в кожній точці цієї множини.

Функція $w = f(z)$ називається обмеженою на множині E , якщо

$$(\exists M > 0)(\forall z \in E)\{ |f(z)| \leq M \}.$$

Теорема 2.2. (Вейерштрасса) Якщо функція $f(z)$ неперервна на обмеженій замкненій множині, то вона обмежена, а її модуль досягає своїх найменшого та найбільшого значень.

Приклади розв'язання задач

16. З'ясувати, які з функцій $\frac{\operatorname{Re} z}{z}$, $\frac{z}{|z|}$, $\frac{\operatorname{Im}(z^2)}{|z|^2}$, $\frac{z \operatorname{Re} z}{|z|}$,

кожна з яких не визначена в точці $z=0$, можуть бути довизначеними в точці $z=0$ так, щоб вони стали неперервними в цій точці.

► Якщо $z = x + iy$, то $\frac{\operatorname{Re} z}{z} = \frac{x}{x + iy}$, $\frac{z}{|z|} = \frac{x + iy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$,

$$\frac{\operatorname{Im}(i \cdot z^2)}{|z|^2} = \frac{\operatorname{Im}(i(x^2 - y^2) - 2xy)}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}. \text{ Для кожної з цих}$$

функцій розглянемо два шляхи наближення до точки $z=0$: по дійсній та уявній осі, причому по дійсній осі наближаємось справа, а по уявній – зверху.

$$1) \lim_{\substack{z \rightarrow 0, \\ \operatorname{Im} z = 0}} \frac{\operatorname{Re} z}{z} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0+, \\ y=0}} \frac{x}{x + iy} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{x + i \cdot 0} = \lim_{x \rightarrow 0+} 1 = 1,$$

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0, \\ \operatorname{Re} z = 0}} \frac{\operatorname{Re} z}{z} = \lim_{\substack{y \rightarrow 0+, \\ x=0}} \frac{0}{x + iy} = \lim_{y \rightarrow 0+} 0 = 0.$$

$$2) \lim_{\substack{z \rightarrow 0, \\ \operatorname{Im} z = 0}} \frac{z}{|z|} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0+, \\ y=0}} \frac{x + iy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{x} = 1,$$

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0, \\ \operatorname{Re} z = 0}} \frac{z}{|z|} = \lim_{\substack{y \rightarrow 0+, \\ x=0}} \frac{x+iy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{y \rightarrow 0+} \frac{iy}{y} = \lim_{y \rightarrow 0+} i = i.$$

$$3) \lim_{\substack{z \rightarrow 0, \\ \operatorname{Im} z = 0}} \frac{\operatorname{Im}(i \cdot z^2)}{|z|^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0+, \\ y=0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^2}{x^2} = 1,$$

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0, \\ \operatorname{Re} z = 0}} \frac{\operatorname{Im}(i \cdot z^2)}{|z|^2} = \lim_{\substack{y \rightarrow 0+, \\ x=0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0+} \frac{-y^2}{y^2} = -1.$$

Як бачимо, для функцій $\frac{\operatorname{Re} z}{z}$, $\frac{z}{|z|}$, $\frac{\operatorname{Im}(z^2)}{|z|^2}$ ми отримали

різні значення границь по вказаних напрямках. Тому не існують $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re} z}{z}$, $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{|z|}$, $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Im}(z^2)}{|z|^2}$, і не можна довизначити

до неперервності в точці $z = 0$ ці функції.

Для функції $w = \frac{z \operatorname{Re} z}{|z|}$ маємо

$$|w| = \frac{|z \operatorname{Re} z|}{|z|} = \frac{|z| |\operatorname{Re} z|}{|z|} = |\operatorname{Re} z| = |x| \rightarrow 0 \text{ при } z = x + iy \rightarrow 0,$$

тобто існує $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \operatorname{Re} z}{|z|} = 0$. Тому в точці $z = 0$ можемо

довизначити цю функцію до неперервності:

$$f(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \operatorname{Re} z}{|z|} = 0. \blacktriangleleft$$

17. Дослідити функцію $f(z) = \frac{1}{z^2 + i}$ на неперервність.

► Поклавши $z = x + i \cdot y$, виділимо $u(x, y)$ та $v(x, y)$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(x+iy)^2 + i} = \frac{1}{(x^2 - y^2) + (2xy+1)i} = \\ &= \frac{(x^2 - y^2) - (2xy+1)i}{(x^2 - y^2)^2 + (2xy+1)^2} = \\ &= \frac{(x^2 - y^2)}{(x^2 - y^2)^2 + (2xy+1)^2} - \frac{2xy+1}{(x^2 - y^2)^2 + (2xy+1)^2} i. \end{aligned}$$

Бачимо, що $u(x, y) = \frac{(x^2 - y^2)}{(x^2 - y^2)^2 + (2xy+1)^2},$

$$v(x, y) = \frac{2xy+1}{(x^2 - y^2)^2 + (2xy+1)^2}.$$

Кожна з цих функцій є елементарною, отже, неперервною в усіх точках своєї області визначення, тобто в усіх точках $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, крім тих, для яких

$$(x^2 - y^2)^2 + (2xy+1)^2 = 0.$$

Знайдемо ці точки, тобто знайдемо розв'язки системи

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ 2xy + 1 = 0. \end{cases}$$

Виразивши з першого рівняння y через x та підставивши

в друге, знаходимо дві точки $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ та $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, в

яких функції $u(x, y)$ та $v(x, y)$ не визначені, отже, не можуть

бути неперервними.

Отже, задана функція $f(z) = \frac{1}{z^2 + i}$ неперервна в усій

комплексній площині за винятком точок $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$ та

$$z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}. \blacktriangleleft$$

Завдання для самостійного розв'язання

16. З'ясувати, які з функцій $\frac{\operatorname{Im} z}{z}$, $\frac{\operatorname{Im} z + \operatorname{Re} z}{|z|}$, $\frac{\operatorname{Re}(z^2)}{z^2}$,

$\frac{|z| \operatorname{Im} z}{z}$, кожна з яких не визначена в точці $z = 0$, можуть бути

довизначеними в точці $z = 0$ так, щоб вони стали неперервними в цій точці.

17. Дослідити функцію $f(z) = \frac{z}{z^2 + 4}$ на неперервність.

2.3 Диференціювання. Умови Коші – Рімана. Аналітичність функції

Нехай в області D задана функція $w = f(z)$ і $z_0 \in D$. Якщо існує

скінченна границя $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$, то вона називається *похідною*

функції $w = f(z)$ в точці z_0 і позначається $f'(z_0)$. Отже,

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \quad (10)$$

Позначимо $z - z_0 = \Delta z$ (приріст аргумента в точці z_0) і $f(z) - f(z_0) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \Delta w$ (приріст функції в точці z_0).
Очевидно, рівність (10) можна переписати в такій еквівалентній формі:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}.$$

Функція називається *диференційовною* в точці z_0 , якщо її приріст у цій точці можна подати у вигляді

$$\Delta w = C \cdot \Delta z + \gamma(\Delta z) \cdot \Delta z,$$

де C – число, яке не залежить від Δz , $\gamma(\Delta z) \rightarrow 0$ при $\Delta z \rightarrow 0$.

Теорема 2.3. Для того, щоб функція $f(z)$ була диференційовною в точці z_0 , необхідно і достатньо, щоб вона мала похідну в цій точці, причому $f'(z_0) = C$.

Функція $w = f(z)$, яка має скінченну похідну в точці z_0 , називається *моногенною* в цій точці. Якщо функція моногенна в усіх точках деякої області D , то вона називається *моногенною в області D* .

Якщо функція $w = f(z)$ має неперервну похідну в деякому околі точки z_0 , то вона називається *аналітичною* в точці z_0 . Якщо функція аналітична в кожній точці області D , то вона називається *аналітичною в області D* . Функція називається аналітичною в замкненій області $\bar{D}$, якщо вона аналітична в деякій області G , яка містить $\bar{D}$.

Функція $w = f(z)$ називається аналітичною в ∞ , якщо функція

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) \text{ аналітична в точці } z = 0.$$

Зауваження. Очевидно, що з аналітичності функції випливає її

моногенність. Із моногенності функції в деякій точці ще не випливатиме її аналітичність у цій точці. Проте, з моногенності функції в області випливає її аналітичність в цій області. Отже, *аналітичність функції в області рівносильна її моногенності в цій області*.

Має місце таке твердження, подібного якому не було в теорії функцій дійсної змінної.

Як бачимо, формально означення похідної функції комплексної змінної нічим не відрізняється від відомого нам означення похідної функції дійсної змінної. В зв'язку з цим основні правила, відомі з диференціального числення функцій однієї змінної, поширюються і на похідні функцій комплексної змінної.

Разом з тим, в п. 2.1 відзначено, що задання функції комплексної змінної зводиться до задання двох дійсних функцій від двох дійсних змінних. Тому логічним є запитання: як пов'язана диференційовність функції $w = f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ в точці $z_0 = x_0 + iy_0$ з поведінкою функцій $u(x, y)$ та $v(x, y)$ в точці (x_0, y_0) ?

Відповідь на це запитання дає важлива

Теорема 2.4. Для того, щоб функція $w = f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ була диференційовною в точці $z_0 = x_0 + iy_0$, необхідно і достатньо, щоб функції $u(x, y)$ та $v(x, y)$ були диференційовними в точці (x_0, y_0) і при цьому виконувались умови

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Ці умови називаються *умовами Коші-Рімана*.

Похідну у випадку її існування можна знаходити за однією з формул $w' = f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$.

Сформулюємо ще твердження, подібного якому не було в теорії

функцій дійсної змінної.

Теорема 2.5. Якщо функція аналітична в деякій області, то вона нескінченно диференційовна в цій області.

Отже, у випадку аналітичності функції $f(z)$ її дійсна та уявна частини є нескінченно диференційовними функціями. Взявши частинну похідну по x в першій рівності Коші-Рімана, а в другій – по y , додамо

отримані рівності: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$. Мішані частинні похідні

другого порядку функції v неперервні, отже рівні між собою. Тому функція u задовольняє рівнянню, яке називається *рівнянням Лапласа*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Якщо взяти частинну похідну по y в першій рівності Коші-Рімана, а в другій – по x , і відняти отримані рівності, то побачимо, що v задовольняє рівнянню Лапласа.

Функція, яка задовольняє рівнянню Лапласа, називається *гармонічною*.

Приклади розв'язання задач

18. Дослідити на моногенність та аналітичність функції:

а) $w = z^3$; б) $w = \bar{z}$; в) $w = \sin z$;

г) $w = z \operatorname{Re} z$; д) $w = e^{iz^2}$.

Для кожної з функцій знайти похідну в точках, де вона існує.

► а) З приклада 13 бачимо, що дійсна та уявна частини даної функції $w = z^3$ дорівнюють відповідно

$u = \operatorname{Re} w = x^3 - 3xy^2$, $v = \operatorname{Im} w = 3x^2y - y^3$. Кожна з цих функцій неперервно диференційовна в усіх точках $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Знайдемо їхні частинні похідні.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (x^3 - 3xy^2)'_x = 3x^2 - 3y^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = (x^3 - 3xy^2)'_y = -6xy,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = (3x^2y - y^3)'_x = 6xy, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = (3x^2y - y^3)'_y = 3x^2 - 3y^2.$$

Бачимо, що для всіх $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ мають місце рівності

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \text{тобто виконуються обидві умови Коші-Рімана.}$$

Тому за теоремою 2.4 наша функція моногенна в усіх точках $z = x + iy \in \mathbf{C}^2$, а, отже, й аналітична і її похідна дорівнюватиме

$$w' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 + i \cdot 6xy = 3(x^2 + i^2 y^2 + 2x \cdot iy) = 3(x + iy)^2,$$

тобто $w' = 3z^2$. ◀

► б) У нас $w = \bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy$. Бачимо, що $u = x$, $v = -y$ – неперервно диференційовані функції в усій площині.

Очевидно, для всіх $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ маємо $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial v}{\partial y} = -1$, тобто

$$\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{– не виконується перша умова Коші-Рімана. Цього}$$

достатньо, щоб стверджувати, що функція $w = \bar{z}$ не має похідної в жодній з точок комплексної площини. ◀

► в) Виходячи з (7), маємо

$$\sin iy = \frac{1}{2i} (e^{i \cdot iy} - e^{-i \cdot iy}) = \frac{i}{2i^2} (e^{-y} - e^y) = i \frac{e^{-y} - e^y}{-2} = i \operatorname{sh} y,$$

$$\cos iy = \frac{1}{2} (e^{i \cdot iy} + e^{-i \cdot iy}) = \frac{e^{-y} + e^y}{2} = \operatorname{ch} y.$$

Тоді

$$\begin{aligned} w = \sin z = \sin(x + iy) &= \sin x \cdot \cos iy + \cos x \cdot \sin iy = \\ &= \sin x \operatorname{ch} y + i \cdot \cos x \operatorname{sh} y, \end{aligned}$$

звідки $u = \sin x \operatorname{ch} y$, $v = \cos x \operatorname{sh} y$. Ці функції неперервно диференційовні в усій комплексній площині. Перевіримо виконання умов Коші-Рімана.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (\sin x \operatorname{ch} y)'_x = \cos x \operatorname{ch} y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = (\sin x \operatorname{ch} y)'_y = \sin x \operatorname{sh} y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = (\cos x \operatorname{sh} y)'_x = -\sin x \operatorname{sh} y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = (\cos x \operatorname{sh} y)'_y = \cos x \operatorname{ch} y.$$

Ми отримали, що в усіх точках площини $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$,

тобто виконуються обидві умови Коші-Рімана. Отже, функція $w = \sin z$ диференційовна в усій комплексній площині. Значить, вона аналітична в усій площині. Її похідна дорівнюватиме

$$\begin{aligned} w' = (\sin z)' &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \cos x \operatorname{ch} y + i \cdot (-\sin x \operatorname{sh} y) = \\ &= \cos x \cos iy - \sin x \operatorname{sh} iy = \cos(x + iy) = \cos z. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

► г) Поклавши $z = x + iy$, маємо

$w = z \operatorname{Re} z = (x + iy)x = x^2 + i \cdot xy$, звідки $u = x^2$, $v = xy$. Кожна з

цих функцій неперервно диференційовна в усіх точках

$(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Їхні частинні похідні дорівнюють

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (x^2)'_x = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = (x^2)'_y = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = (xy)'_x = y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = (xy)'_y = x.$$

Бачимо, що не можна говорити про виконання умов Коші-Рімана у всій площині. З'ясуємо, чи є точки, в яких виконуються умови Коші-Рімана.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x, \\ 0 = -y, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Як бачимо, такою точкою є єдина точка $(0; 0)$. Отже, за теоремою 2.4, дана функція $w = z \operatorname{Re} z$ є моногенною тільки в точці $z = 0 + i \cdot 0 = 0$ і її похідна в цій точці дорівнює

$$f'(0) = \frac{\partial u(0; 0)}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v(0; 0)}{\partial x} = 0 + i \cdot 0 = 0. \text{ Зрозуміло, що про}$$

аналітичність тут говорити не можна. ◀

► д) Використовуючи (3), маємо

$$e^{iz^2} = e^{i(x+iy)^2} = e^{i(x^2 - y^2 + 2xy \cdot i)} = e^{i(x^2 - y^2) - 2xy} = e^{-2xy} \left(\cos(x^2 - y^2) + i \sin(x^2 - y^2) \right).$$

Дійсна та уявна частини заданої функції $w = e^{iz^2}$ відповідно дорівнюють

$$u = e^{-2xy} \cos(x^2 - y^2), \quad v = e^{-2xy} \sin(x^2 - y^2).$$

Кожна з цих функцій неперервно диференційовна в усій площині. Перевіримо виконання умов Коші-Рімана.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \left(e^{-2xy} \cos(x^2 - y^2) \right)'_x = e^{-2xy} (-2y) \cos(x^2 - y^2) - \\ &- e^{-2xy} \sin(x^2 - y^2) \cdot 2x = -2e^{-2xy} \left(y \cos(x^2 - y^2) + x \sin(x^2 - y^2) \right), \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \left(e^{-2xy} \cos(x^2 - y^2) \right)'_y = e^{-2xy} (-2x) \cos(x^2 - y^2) - \\ &- e^{-2xy} \sin(x^2 - y^2) \cdot (-2y) = -2e^{-2xy} \left(x \cos(x^2 - y^2) - y \sin(x^2 - y^2) \right), \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \left(e^{-2xy} \sin(x^2 - y^2) \right)'_x = e^{-2xy} (-2y) \sin(x^2 - y^2) + \\ &+ e^{-2xy} \cos(x^2 - y^2) \cdot 2x = 2e^{-2xy} \left(x \cos(x^2 - y^2) - y \sin(x^2 - y^2) \right), \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \left(e^{-2xy} \sin(x^2 - y^2) \right)'_y = e^{-2xy} (-2x) \sin(x^2 - y^2) + \\ &+ e^{-2xy} \cos(x^2 - y^2) \cdot (-2y) = -2e^{-2xy} \left(y \cos(x^2 - y^2) + x \sin(x^2 - y^2) \right). \end{aligned}$$

Як бачимо, в усіх точках площини маємо $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Тому за теоремою 2.4 функція $f(z) = e^{iz^2}$ моногенна, а, отже й аналітична в усій комплексній площині. Зауважимо, що функція, яка є аналітичною в усій комплексній площині, називається *цілою*. Похідна дорівнюватиме

$$\begin{aligned}
w' &= \left(e^{iz^2} \right)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = -2e^{-2xy} \left(y \cos(x^2 - y^2) + x \sin(x^2 - y^2) \right) + \\
&\quad + i 2e^{-2xy} \left(x \cos(x^2 - y^2) - y \sin(x^2 - y^2) \right) = \\
&= 2e^{-2xy} \left((ix - y) \cos(x^2 - y^2) - (x + iy) \sin(x^2 - y^2) \right) = \\
&= 2e^{-2xy} \left(i(x + iy) \cos(x^2 - y^2) - (x + iy) \sin(x^2 - y^2) \right) = \\
&= 2i(x + iy) e^{-2xy} \left(\cos(x^2 - y^2) + i \sin(x^2 - y^2) \right) = \\
&= 2i(x + iy) e^{-2xy} e^{i(x^2 - y^2)} = 2i(x + iy) e^{i(x + iy)^2},
\end{aligned}$$

тобто $\left(e^{iz^2} \right)' = 2ize^{iz^2}$.

19. Знайти сталі a та b , при яких функція $f(z) = \cos x(a \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y) + i \sin x(b \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y)$ аналітична.

► Дійсна та уявна частини даної функції – відповідно $u(x, y) = \cos x(a \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y)$ та $v(x, y) = \sin x(b \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y)$ є неперервно диференційовними в усій площині функціями незалежно від a та b . Тому для аналітичності $f(z)$ достатньо підібрати сталі a та b такими, щоб виконувались обидві умови Коші-Рімана.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\cos x(a \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y) \right)'_x = \left(\sin x(b \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y) \right)'_y, \\ \left(\cos x(a \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y) \right)'_y = -\left(\sin x(b \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y) \right)'_x, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sin x(a \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y) = \sin x(b \operatorname{sh} y + \operatorname{ch} y), \\ \cos x(a \operatorname{sh} y + \operatorname{ch} y) = -\cos x(b \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1, \\ b = -1. \end{cases}$$

Отже, при $a = -1$ та $b = -1$ функція буде цілою і матиме такий вигляд:

$$\begin{aligned} f(z) &= \cos x(-\operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y) + i \sin x(-\operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y) = \\ &= (-\operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y)(\cos x + i \sin x) = e^{-y} e^{ix} = e^{i^2 y + ix} = e^{i(x + iy)}, \end{aligned}$$

тобто $f(z) = e^{iz}$. Її похідна дорівнюватиме $f'(z) = i e^{iz}$. ◀

20. Чи існує аналітична функція $f(z) = u + iv$, для якої:

а) $v = \cos(x^2 - y^2)$; б) $u = 7 + 4x - 3y - 2x^2 + 2y^2$;

в) $v = e^x(y \sin y - x \cos y) + 5 \sin x \operatorname{sh} y$; г) $u = e^{x/y}$.

У випадку існування знайти цю функцію.

► а) Перевіримо, чи функція $v = \cos(x^2 - y^2)$ є

гармонічною.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \left(\cos(x^2 - y^2) \right)'_x = -2x \sin(x^2 - y^2),$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \left(\cos(x^2 - y^2) \right)'_y = -2y \sin(x^2 - y^2),$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)'_x = \left(-2x \sin(x^2 - y^2) \right)'_x = -2 \sin(x^2 - y^2) - 4x^2 \cos(x^2 - y^2),$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)'_y = \left(-2y \sin(x^2 - y^2) \right)'_y = -2 \sin(x^2 - y^2) + 4y^2 \cos(x^2 - y^2).$$

Тоді $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 4(y^2 - x^2) \cos(x^2 - y^2) \neq 0$, тобто

$v = \cos(x^2 - y^2)$ не є гармонічною функцією. Тому не існує аналітичної функції, уявна частина якої дорівнює $\cos(x^2 - y^2)$. ◀

► б) Як і в попередньому прикладі, перевіряємо, чи $u = 7 + 4x - 3y - 2x^2 + 2y^2$ є гармонічною функцією.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (7 + 4x - 3y - 2x^2 + 2y^2)'_x = 4 - 4x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (7 + 4x - 3y - 2x^2 + 2y^2)'_y = -3 + 4y,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)'_x = (4 - 4x)'_x = -4, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)'_y = (-3 + 4y)'_y = 4.$$

Тоді $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -4 + 4 \equiv 0$, тобто $u = 7 + 4x - 3y - 2x^2 + 2y^2$

є гармонічною функцією. Тому існує аналітична функція, дійсна частина якої дорівнює $7 + 4x - 3y - 2x^2 + 2y^2$. Знайдемо цю функцію. Її уявну частину знаходимо, використовуючи умови Коші-Рімана. З другої умови маємо

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = (-3 + 4y) = 3 - 4y. \text{ Тоді}$$

$$v = \int (3 - 4y) dx = 3x - 4yx + \varphi(y). \quad (11)$$

Функцію $\varphi(y)$ знайдемо, використавши першу умову Коші-Рімана. Маємо

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} &\Leftrightarrow (3x - 4yx + \varphi(y))'_y = 4 - 4x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -4x + \varphi'(y) = 4 - 4x \Leftrightarrow \varphi'(y) = 4.\end{aligned}$$

Звідси, $\varphi(y) = 4y + C$, де C – довільна дійсна стала.

Підставивши цю функцію в (11), отримаємо уявну частину шуканої аналітичної функції $f(z)$: $v = 3x - 4yx + 4y + C$.

Функція $f(z)$ набуде вигляду

$$\begin{aligned}f(z) = u + iv &= 7 + 4x - 3y - 2x^2 + 2y^2 + i(C + 3x + 4y - 4yx) = \\ &= 7 + iC + 4(x + iy) + 3i(x + iy) - 2(x^2 + 2x \cdot iy + (iy)^2) = \\ &= 7 + iC + (4 + 3i)(x + iy) - 2(x + iy)^2,\end{aligned}$$

тобто $f(z) = 7 + iC + (4 + 3i)z - 2z^2$. Тут C – довільна дійсна стала. ◀

► в) Знаходимо

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x} &= (e^x (y \sin y - x \cos y) + 5 \sin x \operatorname{sh} y)'_x = \\ &= e^x (y \sin y - (x + 1) \cos y) + 5 \cos x \operatorname{sh} y, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= (e^x (y \sin y - x \cos y) + 5 \sin x \operatorname{sh} y)'_y = \\ &= e^x ((x + 1) \sin y + y \cos y) + 5 \sin x \operatorname{ch} y,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)'_x = \left(e^x (y \sin y - (x+1) \cos y) + 5 \cos x \operatorname{sh} y \right)'_x = \\ &= e^x (y \sin y - (x+2) \cos y) - 5 \sin x \operatorname{sh} y,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)'_y = \left(e^x ((x+1) \sin y + y \cos y) + 5 \sin x \operatorname{ch} y \right)'_y = \\ &= e^x ((x+2) \cos y - y \sin y) + 5 \sin x \operatorname{sh} y.\end{aligned}$$

Бачимо, що $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \equiv -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ або $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \equiv 0$. Отже,

$v = e^x (y \sin y - x \cos y) + 5 \sin x \operatorname{sh} y$ є розв'язком рівняння Лапласа. Тому існує аналітична функція, уявна частина якої дорівнює $e^x (y \sin y - x \cos y) + 5 \sin x \operatorname{sh} y$. Знайдемо дійсну частину u . За першою умовою Коші-Рімана маємо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = e^x ((x+1) \sin y + y \cos y) + 5 \sin x \operatorname{ch} y. \text{ Тоді}$$

$$\begin{aligned}u &= \int (e^x ((x+1) \sin y + y \cos y) + 5 \sin x \operatorname{ch} y) dx = \\ &= e^x (x \sin y + y \cos y) - 5 \cos x \operatorname{ch} y + \varphi(y).\end{aligned}$$

Функцію $\varphi(y)$ шукаємо, використовуючи другу умову Коші-Рімана. Маємо

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \Leftrightarrow (e^x (x \sin y + y \cos y) - 5 \cos x \operatorname{ch} y + \varphi(y))'_y = \\ &= -e^x (y \sin y - (x+1) \cos y) + 5 \cos x \operatorname{sh} y \Leftrightarrow \varphi'(y) = 0.\end{aligned}$$

Отже, $\varphi(y) = C$ і $u = e^x (x \sin y + y \cos y) - 5 \cos x \operatorname{ch} y + C$.

Шукана аналітична функція матиме вигляд

$$\begin{aligned} f(z) &= u + iv = e^x (x \sin y + y \cos y) - 5 \cos x \operatorname{ch} y + C + \\ &\quad + i(e^x (y \sin y - x \cos y) + 5 \sin x \operatorname{sh} y) = \\ &= e^x ((x + iy) \sin y - (ix - y) \cos y) - 5(\cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y) + C = \\ &= e^x ((x + iy)(\sin y - i \cos y)) - 5(\cos x \operatorname{ch} y - \sin x \cdot i \operatorname{sh} y) + C = \\ &= e^x ((x + iy)(-i)(\cos y + i \sin y)) - 5(\cos x \cos iy - \sin x \cdot \sin iy) + C = \\ &= -ie^x (x + iy) e^{iy} - 5 \cos(x + iy) + C = \\ &= -ie^{x+iy} (x + iy) e^{iy} - 5 \cos(x + iy) + C, \end{aligned}$$

тобто $f(z) = -ize^z - 5 \cos z + C$, C – довільна дійсна стала. ◀

► г) Перевіримо, чи задана функція $u = e^{x/y}$ є розв'язком рівняння Лапласа.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (e^{x/y})'_x = \frac{1}{y} e^{x/y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = (e^{x/y})'_y = -\frac{x}{y^2} e^{x/y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)'_x = \left(\frac{1}{y} e^{x/y} \right)'_x = \frac{1}{y^2} e^{x/y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)'_y = \left(-\frac{x}{y^2} e^{x/y} \right)'_y = \frac{2xy + x^2}{y^4} e^{x/y}.$$

$$\text{Тоді} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{y^2} e^{x/y} + \frac{2xy + x^2}{y^4} e^{x/y} = \frac{(x + y)^2}{y^4} e^{x/y} \neq 0,$$

тобто $u = e^{x/y}$ не є розв'язком рівняння Лапласа. Тому не існує

аналітичної функції, дійсна частина якої дорівнює $e^{x/y}$. ◀

Завдання для самостійного розв'язання

18. Дослідити на моногенність та аналітичність функції:

а) $w = \frac{3}{z} + 5z - 4$; б) $w = z + \operatorname{Im} z$;

в) $w = e^{4z+i}$; г) $w = z \cdot (\bar{z} + i)$; д) $\cos z^2$.

Для кожної з функцій знайти похідну в точках, де вона існує.

19. Знайти сталі a, b та c , при яких функція $f(z) = ax + by + i(cx - y)$ є аналітичною.

20. Чи існує аналітична функція $f(z) = u + iv$, для якої:

а) $u = 10xy - 3x + y + 4$; б) $v = 4x^2 + xy - y^2 + 7x - y$;

в) $u = e^{2x} \sin y$; г) $v = \cos x \operatorname{sh} y - 3y$.

У випадку існування знайти цю функцію.

2.4 Геометричний зміст модуля та аргументу похідної. Конформні відображення

Нехай функція $w = f(z)$ визначена та неперервна в області D і диференційовна в точці $z_0 \in D$, причому $f'(z_0) \neq 0$. Тоді ми можемо подати

$$f'(z_0) = A(\cos \alpha + i \sin \alpha), A > 0.$$

Звідси, згідно з означенням похідної, маємо

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} = A > 0. \quad (12)$$

Відображення, яке має таку властивість (12), називається *відображенням сталого лінійного розтягу*, а число A – коефіцієнтом розтягу. Отже, геометричний зміст модуля похідної полягає в тому, що він дорівнює коефіцієнту розтягу.

Зауважимо, що не кожне відображення має сталий коефіцієнт розтягу. Наприклад, якщо $w = 2x + i \cdot y$, то образ вертикального відрізка має ту саму довжину, що й відрізок, а образ горизонтального відрізка має довжину вдвічі більшу за довжину прообразу. Це пояснюється тим, що дана функція не має похідної в жодній точці.

Можна показати, що аргумент похідної – це кут, на який повертається дотична в точці z_0 до довільної гладкої кривої з початком в точці z_0 при відображенні цієї кривої функцією $w = f(z)$. В цьому полягає геометричний зміст аргумента похідної.

З геометричного змісту аргумента похідної випливає, що при відображенні з допомогою неперервної в околі точки z_0 функції $w = f(z)$, яка має відмінну від нуля похідну $f'(z_0)$, усі лінії площини z , які проходять через точку z_0 і мають дотичні в цій точці, перетворюються в лінії площини w , які проходять через точку $w_0 = f(z_0)$ і також мають дотичні в цій точці, причому кути між кривими за допомогою розглядуваного відображення зберігаються. Ця властивість називається *консерватизмом кутів*.

Означення. Відображення з допомогою неперервної в області D функції $w = f(z)$ називається *конформним* в точці $z_0 \in D$, якщо воно в цій точці характеризується наявністю *сталого лінійного розтягу* та *консерватизму кутів*.

Якщо при цьому зберігаються не тільки величини кутів, але й напрями їх відліку (як це було в розглянутому вище відображенні), то кажуть про *конформне відображення першого роду*; якщо ж напрями відліку кутів змінюються на протилежні (наприклад, у випадку дзеркального відображення $w = \bar{z}$), то кажуть про *конформне відображення другого роду*.

Отже, відображення за допомогою аналітичної в деякій області D функції комплексної змінної є конформним відображенням першого роду в усіх точках області D , в яких похідна відмінна від нуля. Якщо відображення є конформним у всіх без винятку точках області D , то його називають *конформним відображенням області D* .

Загальний приклад конформного відображення другого роду дають відображення, які здійснюються з допомогою функцій, спряжених з аналітичними: $w = \overline{f(z)}$ (в усіх точках де $f'(z) \neq 0$).

Має місце така

Теорема 2.6. Відображення $w = f(z)$ буде конформним першого роду в області D тоді і тільки тоді, коли функція $w = f(z)$ аналітична і $f'(z) \neq 0$ в D .

Нам надалі потрібне буде таке

Означення. Функція $w = f(z)$, визначена в області D , називається *однолистою* в області $G \subset D$, якщо

$$(\forall z_1 \in G)(\forall z_2 \in G)\{z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)\}$$

Зауваження. Для конформності відображення $w = f(z)$ в області D достатньо вимагати виконання однієї із умов: 1) щоб неперервна функція $w = f(z)$ володіла в кожній точці $z \in D$ тільки властивістю *консерватизму кутів*; 2) щоб неперервна функція $w = f(z)$ володіла в кожній точці $z \in D$ тільки властивістю *сталого лінійного розтягу* і була

однолистою в D .

В теорії конформних відображень та її застосуваннях принциповим є питання про можливість однолистно та конформно відобразити одну задану область на іншу. Відповідь на це питання дає теорема Рімана.

Теорема 2.7 (Рімана). Нехай D та G – дві однозв'язні області із $\mathbb{C}$, відмінні від $\mathbb{C}$. Для довільних $z_0 \in D$, $w_0 \in G$, $\alpha \in (-\pi; \pi]$ існує єдина аналітична в D функція $w = f(z)$, яка здійснює конформне відображення $D \rightarrow G$, причому $f(z_0) = w_0$ і $\arg f'(z_0) = \alpha$.

Дамо ще поняття конформного відображення околу точки z_0 на окіл точки w_0 , якщо принаймні одна з них є ∞ :

а) якщо $z_0 = \infty$ і $w_0 = f(z_0) \neq \infty$, то відображення здійснюване функцією f , називається конформним в z_0 , якщо в $z = 0$ є конформним відображення, здійснюване функцією $w = f\left(\frac{1}{z}\right)$;

б) якщо $z_0 \neq \infty$ і $w_0 = f(z_0) = \infty$, то відображення здійснюване функцією f , називається конформним в z_0 , якщо в z_0 є конформним відображення, здійснюване функцією $w = \frac{1}{f(z)}$;

в) якщо $z_0 = \infty$ і $w_0 = f(z_0) = \infty$, то відображення здійснюване функцією f , називається конформним в z_0 , якщо в $z = 0$ є конформним відображення, здійснюване функцією $w = \left(f\left(\frac{1}{z}\right)\right)^{-1}$.

Приклади розв'язання задач

21. Відображення здійснюється з допомогою функції $w = z^3$. Знайти кути повороту напрямків, які виходять з точок:

$z_1 = 1; \quad z_2 = -\frac{i}{2}; \quad z_3 = 1+i; \quad z_4 = -3+4i$. Також знайти коефіцієнти розтягу в цих точках.

► Задана функція аналітична в усій комплексній площині і її похідна дорівнює $w' = (z^3)' = 3z^2$ (див. задачу 18а). Очевидно, $w' \neq 0$ в усіх точках $z \neq 0$. Отже, $f(z) = z^3$ здійснює конформне відображення в усіх точках $z \neq 0$, зокрема, і у вказаних точках.

$f'(z_1) = f'(1) = 3 \cdot 1^2 = 3$. Тому кут повороту для точки z_1 дорівнюватиме $\alpha_1 = \arg f'(1) = \arg 3 = 0$, а коефіцієнт розтягу складе $A_1 = |f'(1)| = |3| = 3$.

Для точки $z_2 = -\frac{i}{2}$ маємо $f'(z_2) = f'\left(-\frac{i}{2}\right) = 3 \cdot \left(-\frac{i}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4}$, отже, кут повороту і коефіцієнт розтягу відповідно дорівнюватимуть

$$\alpha_2 = \arg f'\left(-\frac{i}{2}\right) = \arg\left(-\frac{3}{4}\right) = \pi,$$

$A_2 = \left|f'\left(-\frac{i}{2}\right)\right| = \left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}$ (фактично це буде стиск, бо $A_2 < 1$).

В точці $z_3 = 1+i$ знаходимо $f'(z_3) = f'(1+i) = 3 \cdot (1+i)^2 = 6i$,

звідки $\alpha_3 = \arg(6i) = \frac{\pi}{2}$, $A_3 = |f'(z_3)| = |6i| = 6$.

Накінець, $f'(z_4) = f'(-3+4i) = 3 \cdot (-3+4i)^2 = -21-72i$.

Тоді кут повороту в точці z_4 буде наступним

$\alpha_4 = \arg(-21 - 72i) = \arctg \frac{24}{7} - \pi$. Коефіцієнт розтягу в цій точці $A_4 = |f'(z_4)| = |-21 - 72i| = 75$. ◀

22. Яка частина площини стискається, а яка розтягується, якщо відображення здійснюється функцією:

а) $w = z^2 - 2z$; б) $w = e^{-z}$.

► а) Функція $w = z^2 - 2z$ є цілою. Її похідна дорівнює $f'(z) = (z^2 - 2z)' = 2z - 2$. Стискання буде в усіх тих точках z площини, в яких $|f'(z)| < 1$, тобто

$$|2z - 2| < 1 \Leftrightarrow |2z - 2| < 1 \Leftrightarrow |z - 1| < \frac{1}{2}.$$

Це є круг з центром $z_0 = 1$ і радіусом $R = \frac{1}{2}$.

Відповідно розтяг буде в тих точках, в яких $|f'(z)| > 1$, тобто $|z - 1| > \frac{1}{2}$ – зовні кола з центром $z_0 = 1$ і радіусом $R = \frac{1}{2}$. ◀

► б) $w' = (e^{-z})' = -e^{-z} \neq 0$ в усіх точках площини. Отже, дана ціла функція здійснює конформне відображення першого роду в усіх точках комплексної площини.

$$|f'(z)| = |-e^{-z}| = |e^{-x-iy}| = |e^{-x}| \cdot |e^{-iy}| = e^{-x} \cdot 1 = e^{-x},$$

Тому стиск буде в тих точках $z = x + iy$, в яких $e^{-x} < 1$, тобто

$-x < 0$ або $\operatorname{Re} z > 0$. Це є усі точки правої півплощини. Легко отримуємо, що розтяг буде в усіх точках z лівої півплощини $\operatorname{Re} z < 0$. ◀

Завдання для самостійного розв'язання

21. Відображення здійснюється з допомогою функції $w = z^2 - 6z$. Знайти кути повороту напрямків, які виходять з точок: $z_1 = 3i$; $z_2 = -4$; $z_3 = 3 - 7i$; $z_4 = 1 + 2\sqrt{3} \cdot i$. Також знайти коефіцієнти розтягу в цих точках.

22. Яка частина площини стискається, а яка розтягується, якщо відображення здійснюється функцією:

$$\text{а) } w = z^4; \text{ б) } w = e^{3iz}.$$

§ 3. Інтегрування

3.1 Визначений інтеграл

Нехай $\Gamma = \{z = z(t) : \alpha \leq t \leq \beta\}$ – деяка крива. Зробимо довільне розбиття проміжка $[\alpha, \beta] : \alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$ і позначимо $z_j = z(t_j)$, $\gamma_j = \{z = z(t) : t_{j-1} \leq t \leq t_j\}$. Очевидно, що $\gamma = \bigcup_{j=1}^n \gamma_j$. Таке розбиття позначимо через T . Число $\lambda_T = \max\{|\gamma_j| : 1 \leq j \leq n\}$, де $|\gamma_j|$ – довжина елементарної дуги γ_j , називається діаметром розбиття T . Позначимо

$\Delta z_j = z_j - z_{j-1}$. Зрозуміло, що $|\Delta z_j| \leq |\gamma_j|$.

Нехай на γ задана функція $w = f(z)$. Виберемо довільним чином

$\zeta_j \in \gamma_j$ і утворимо суму $\sigma_T = \sum_{j=1}^n f(\zeta_j) \Delta z_j$.

Означення. Якщо існує скінченна границя $\lim_{\lambda_T \rightarrow 0} \sigma_T = I$, яка не залежить від способу розбиття T і способу вибору точок $\zeta_j \in \gamma_j$, то ця границя називається інтегралом від функції f по кривій Γ і позначається символом

$$I = \int_{\Gamma} f(z) dz. \quad (13)$$

Функція $f(z)$ називається при цьому *інтегрованою* по кривій Γ .

Можна показати, що якщо $f = u + iv$, $z = x + iy$, то

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_{\Gamma} v(x, y) dx + u(x, y) dy,$$

тобто обчислення визначеного інтеграла (10) зводиться до обчислення криволінійних інтегралів другого роду, які ми вивчали в попередньому розділі. Тому властивості визначеного інтеграла аналогічні відповідним властивостям криволінійних інтегралів другого роду. Зокрема, якщо $\Gamma = \{z = z(t) : \alpha \leq t \leq \beta\}$ – кусково-гладка крива, то

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) \cdot z'(t) dt. \quad (14)$$

Отже, обчислення інтеграла (13) зводиться до обчислення інтеграла

виду $\int_{\alpha}^{\beta} \chi(t) dt$, де χ – комплекснозначна функція $[\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{C}$.

Припустимо, що ця функція неперервна і $\chi(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$. Функція X називається *первісною* для цієї функції χ , якщо $X'(t) = \chi(t)$ для всіх

$t \in [\alpha; \beta]$. Зрозуміло, що коли $X(t) = \Phi(t) + i\Psi(t)$, то $\Phi'(t) = \varphi(t)$, $\Psi'(t) = \psi(t)$. Тоді

$$\int_{\alpha}^{\beta} \chi(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) dt + i \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) dt = \Phi(t) \Big|_{\alpha}^{\beta} + i \Psi(t) \Big|_{\alpha}^{\beta} = X(t) \Big|_{\alpha}^{\beta},$$

тобто для комплекснозначних функцій дійсної змінної справедлива формула Ньютона-Лейбніца.

Приклади розв'язання задач

23. Обчислити інтеграл $\int_L (z^2 + \operatorname{Re} z^2) dz$, де Γ – дуга

параболи $x = 2y^2$ з початком у точці $z_0 = 2 + i$ і кінцем у точці $z_1 = 8 + 2i$.

► Для довільної точки $z \in \Gamma$ маємо $z = x + iy = 2y^2 + iy$. Якщо y неперервно змінюватиметься від 1 до 2, то точка $z = 2y^2 + iy$ опише усю дану дугу параболи від z_0 до z_1 . Отже, можемо скористатись формулою (14), взявши в якості параметра $t = y$:

$$\begin{aligned} \int_L (z^2 + \operatorname{Re} z^2) dz &= \int_1^2 \left((2y^2 + iy)^2 + \operatorname{Re} (2y^2 + iy)^2 \right) \cdot (2y^2 + iy)' dy = \\ &= \int_1^2 (4y^4 - y^2 + 4y^3 \cdot i + \operatorname{Re} (4y^4 - y^2 + 4y^3 \cdot i)) \cdot (4y + i) dy = \\ &= \int_1^2 (4y^4 - y^2 + 4y^3 \cdot i + (4y^4 - y^2)) \cdot (4y + i) dy = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_1^2 (35y^5 - 12y^3 + (24y^4 - 2y^2)i) dy = \\
&= \left(\frac{35}{6}y^6 - 3y^4 + \left(\frac{24}{5}y^5 - \frac{2}{3}y^3 \right)i \right) \Big|_1^2 = \frac{645}{2} + \frac{2162}{15}i. \quad \blacktriangleleft
\end{aligned}$$

24. Обчислити інтеграл $\int \operatorname{Im} z \cdot dz$ по таких шляхах:

1) по радіус-вектору точки $z_1 = 2 - i$;

2) по півколу $|z| = 1$, $0 \leq \arg z \leq \pi$ (початок руху – точка $z_0 = 1$);

3) по колу $|z - a| = R$ оди раз проти годинникової стрілки.

► 1) За умовою лінією інтегрування є відрізок Γ з початком $z_0 = 0$ і кінцем $z_1 = 2 - i$. Тому $\Gamma = \{z = (2 - i)t : 0 \leq t \leq 1\}$, $f(z(t)) = y(t) = -it$.

Скориставшись формулою (11), маємо

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} y dz &= \int_0^1 (-it) \cdot ((2 - i)t)' dt = \int_0^1 (-it) \cdot (2 - i) dt = \\
&= \int_0^1 (-2i + 1)t dt = (-2i + 1) \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = (-2i + 1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - i. \quad \blacktriangleleft
\end{aligned}$$

► 2) Довільну точку z заданого півкола подамо в показниковій формі: $z = e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi = \arg z \leq \pi$. Якщо точка z проходить півколо від $z_0 = 1 = e^{i \cdot 0}$ до $z_1 = e^{i\pi} = -1$, то φ

неперервно змінюватиметься від 0 до π . При цьому $\operatorname{Im} e^{i\varphi} = \operatorname{Im}(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \sin \varphi$. Тому

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \operatorname{Im} z \cdot dz &= \int_0^{\pi} \sin \varphi \cdot (e^{i\varphi})' d\varphi = \int_0^{\pi} \sin \varphi \cdot e^{i\varphi} i d\varphi = \\ &= \int_0^{\pi} \sin \varphi \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) i d\varphi = \int_0^{\pi} \left(\frac{i}{2} \sin 2\varphi - \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \right) d\varphi = \\ &= \left(\frac{i}{2} \cdot \frac{-\cos 2\varphi}{2} - \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4} \right) \Big|_0^{\pi} = -\frac{\pi}{2}. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

► 3) Для довільної точки z кола $|z - a| = R$ маємо $z - a = Re^{i\varphi}$, тобто $z = a + Re^{i\varphi}$. Якщо φ неперервно змінюватиметься від 0 до 2π , то z опише один раз коло $|z - a| = R$ проти годинникової стрілки. Так як $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im}(a + Re^{i\varphi}) = \operatorname{Im}(a + R \cos \varphi + iR \sin \varphi) = R \sin \varphi$, то

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \operatorname{Im} z \cdot dz &= \int_0^{2\pi} R \sin \varphi \cdot (a + Re^{i\varphi})' d\varphi = \int_0^{2\pi} R \sin \varphi \cdot Re^{i\varphi} i d\varphi = \\ &= R^2 \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cdot e^{i\varphi} i d\varphi = \\ &= R^2 \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cdot e^{i\varphi} i d\varphi = R^2 \left(\frac{i}{2} \cdot \frac{-\cos 2\varphi}{2} - \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} = -\frac{\pi}{2} R^2. \end{aligned}$$

При знаходженні первісної ми скористались результатом з попереднього прикладу. ◀

25. Для довільних $k \in \mathbb{Z}$ та $r > 0$ обчислити інтеграл

$$\int_{|z-z_0|=r} (z-z_0)^k dz.$$

► Рівняння кола $\{z : |z-z_0|=r\}$ можна записати у вигляді $z = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Тому, якщо $k \neq -1$, то, скориставшись формулою Ньютона-Лейбніца, дістанемо

$$\int_{|z-z_0|=r} (z-z_0)^k dz = \int_0^{2\pi} r^k e^{ikt} \cdot ire^{it} dt = ir^{k+1} \int_0^{2\pi} e^{i(k+1)t} dt = \frac{r^{k+1}}{k+1} e^{i(k+1)t} \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Якщо ж $k = -1$, то $\int_{|z-z_0|=r} (z-z_0)^k dz = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$.

Об'єднуючи ці два випадки, можемо остаточно записати

$$\int_{|z-z_0|=r} (z-z_0)^k dz = \begin{cases} 2\pi i, & k = -1, \\ 0, & k \neq -1. \end{cases} \quad \blacktriangleleft$$

Завдання для самостійного розв'язання

23. Обчислити інтеграл $\int_L (z - \operatorname{Im} z^2) dz$, де Γ – дуга

параболи $y = -x^2$ з початком у точці $z_0 = 0$ і кінцем у точці $z_1 = 1 - i$.

24. Обчислити інтеграл $\int \operatorname{Re} z \cdot dz$ по таких шляхах:

1) по радіус-вектору точки $z_1 = 1 + 2i$;

2) по півколу $|z|=1$, $-\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$ (початок руху –

точка $z_0 = -i$);

3) по колу $|z+a|=R$ оди раз проти годинникової стрілки.

25. Для довільних $k \in \mathbb{Z}$ та $r > 0$ обчислити інтеграл

$$\int_{|z-z_0|=r} (\bar{z} - \bar{z}_0)^k dz.$$

3.2 Інтегральна теорема Коші. Інтегральна формула Коші

Нехай область D обмежена скінченним числом замкнених жорданових кривих. Будемо казати, що кожна з цих кривих зорієнтована в додатному напрямі відносно D , якщо, рухаючись в цьому напрямі, область D залишається зліва. Ця сукупність зорієнтованих відносно D кривих називається *межею* області D і позначається ∂D .

Сформулюємо інтегральну теорему Коші в такому загальному вигляді.

Теорема 3.1. Якщо функція f аналітична в області D , обмеженій скінченним числом замкнених жорданових кривих, неперервна в $\bar{D} = D \cup \partial D$, то виконується рівність

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 0.$$

Можна довести, що коли виконуються умови теореми 3.1, то для довільної точки $z_0 \in D$ має місце рівність

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (15)$$

Ця рівність називається *інтегральною формулою Коші*.

Зокрема, якщо Γ – замкнена жорданова крива, яка разом зі своєю внутрішністю повністю лежить в області D і зорієнтована відповідно до

своєї внутрішності, то, як частинний випадок (12), для усіх точок z_0 із внутрішності Γ , маємо

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (16)$$

З інтегральної формули Коші випливає, що аналітична в області D функція диференційовна будь-яку скінченну кількість разів в усіх точках $z_0 \in D$ і при цьому

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz, \quad (17)$$

для всіх $k \in \mathbb{N}$.

Очевидно, аналогічно до (16), як частинний випадок (17), виконується

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz, \quad (18)$$

для всіх $k \in \mathbb{N}$.

Відзначимо, що формули (17) також часто називають інтегральними формулами Коші. З врахуванням (15) та теореми 3.1 можемо записати

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \begin{cases} f(z_0), & z_0 \in D, \\ 0, & z_0 \in \mathbb{C} \setminus \bar{D}. \end{cases}$$

Приклади розв'язання задач

В пропонованих нижче задачах потрібно обчислити інтеграли по замкнених контурах без самоперетинів. Всюди контур зорієнтований відповідно до своєї внутрішності, тобто обхід такий, що внутрішність залишається зліва.

26. Обчислити інтеграл $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z^2 + 4}$, якщо Γ – простий

спрямний замкнений контур і такий, що:

1) точка $2i$ знаходиться всередині контура Γ , а точка $-2i$ – зовні нього;

2) точка $-2i$ знаходиться всередині контура Γ , а точка $2i$ – зовні нього;

3) обидві точки $\pm 2i$ знаходяться всередині контура Γ .

► Підінтегральна функція аналітична в усій комплексній площині за винятком коренів знаменника, тобто точок $\pm 2i$.

1) Очевидно, підінтегральну функцію можемо подати у вигляді $\frac{1}{z^2 + 4} = \frac{1}{(z - 2i)(z + 2i)} = \frac{f(z)}{z - 2i}$, де $f(z) = \frac{1}{z + 2i}$ – аналітична функція в усій комплексній площині за винятком точки $-2i$, отже, контур Γ разом зі своєю внутрішністю лежить в області аналітичності функції f . Тому за формулою (13) маємо

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z^2 + 4} = \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - 2i} dz = 2\pi i \cdot f(2i) = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i + 2i} = \frac{\pi}{2}.$$

2) В даному випадку підінтегральну функцію подамо у вигляді $\frac{1}{z^2 + 4} = \frac{1}{(z - 2i)(z + 2i)} = \frac{f(z)}{z + 2i}$, де $f(z) = \frac{1}{z - 2i}$ – аналітична функція в усій комплексній площині за винятком

точки $2i$, отже, контур Γ разом зі своєю внутрішністю лежить в області аналітичності функції f . Тому за формулою (13) маємо

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z^2 + 4} = \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - (-2i)} dz = 2\pi i \cdot f(-2i) = 2\pi i \cdot \frac{1}{-2i - 2i} = -\frac{\pi}{2}.$$

3) Виберемо на контурі Γ дві точки A та B і сполучимо їх лінією L_{AB} без самоперетинів в межах внутрішності Γ так, щоб точки $\pm 2i$ потрапили в різні області, на які розіб'є лінія внутрішність Γ . Позначимо область, в яку потрапила точка $2i$, через D_1 , а область, в яку потрапила точка $-2i$, через D_2 . Межі цих областей позначимо відповідно через Γ_1 та Γ_2 . Із 1)

та 2) маємо, що $\int_{\Gamma_1} \frac{dz}{z^2 + 4} = \frac{\pi}{2}$, $\int_{\Gamma_2} \frac{dz}{z^2 + 4} = -\frac{\pi}{2}$. Зрозуміло, що

$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma \cup L_{AB} \cup L_{BA}$. Оскільки $\int_{L_{BA}} \frac{dz}{z^2 + 4} = -\int_{L_{AB}} \frac{dz}{z^2 + 4}$, то

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z^2 + 4} &= \int_{\Gamma} \frac{dz}{z^2 + 4} + \int_{L_{AB}} \frac{dz}{z^2 + 4} + \int_{L_{BA}} \frac{dz}{z^2 + 4} = \\ &= \int_{\Gamma_1} \frac{dz}{z^2 + 4} + \int_{\Gamma_2} \frac{dz}{z^2 + 4} = \frac{\pi}{2} + \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

27. Обчислити інтеграли:

$$\text{а) } \int_{|z+4i|=6} \frac{\cos 3z}{z^2 + 4z + 29} dz; \quad \text{б) } \int_{|z+1-3i|=4} \frac{e^{iz}}{z^2 - 6iz - 5} dz;$$

$$\text{в) } \int_{|z+i|=3} \frac{\operatorname{sh} z^3}{(z-2)^3} dz.$$

► а) Як чисельник, так і знаменник підінтегральної функції є аналітичними функціями в усій комплексній площині. Отже, підінтегральна функція аналітична в усій комплексній площині за винятком коренів знаменника. Знайдемо ці точки.

$$z^2 + 4z + 29 = 0 \Leftrightarrow (z+2)^2 = -25 = (5i)^2 \Leftrightarrow z+2 = \pm 5i,$$

тобто $z_{1,2} = -2 \pm 5i$. Оскільки,

$$|z_1 + 4i| = |-2 + 5i + 4i| = |-2 + 9i| = \sqrt{85} > 6,$$

$$|z_2 + 4i| = |-2 - 5i + 4i| = |-2 - i| = \sqrt{5} < 6,$$

то $z_1 = -2 + 5i$ лежить зовні кола інтегрування, а $z_2 = -2 - 5i$ – всередині. Тому підінтегральну функцію подамо у вигляді

$$\frac{\cos 3z}{z^2 + 4z + 29} = \frac{\cos 3z}{(z+2-5i)(z+2+5i)} = \frac{f(z)}{z+2+5i},$$

де $f(z) = \frac{\cos 3z}{z+2-5i}$ є аналітичною функцією в усій

комплексній площині крім точки $z_1 = -2 + 5i$, отже, аналітична всередині кола інтегрування і на ньому. Тому, скориставшись формулою (16), маємо

$$\int_{|z+4i|=6} \frac{\cos 3z}{z^2 + 4z + 29} dz = \int_{|z+4i|=6} \frac{f(z)}{z - (-2-5i)} dz = 2\pi i \cdot f(-2-5i) =$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi i \cdot \frac{\cos 3(-2-5i)}{-2-5i+2-5i} = -\frac{\pi}{5} \cdot (\cos 6 \cdot \cos 15i - \sin 6 \cdot \sin 15i) = \\
&= -\frac{\pi}{5} \cdot (\cos 6 \cdot \operatorname{ch} 15 - i \cdot \sin 6 \cdot \operatorname{sh} 15). \quad \blacktriangleleft
\end{aligned}$$

► б) Аналогічно до щойно розв'язаного прикладу знайдемо точки, в яких втрачається аналітичність підінтегральної функції:

$$z^2 - 6iz - 5 = 0 \Leftrightarrow (z - 3i)^2 = -4 = (2i)^2 \Leftrightarrow z - 3i = \pm 2i,$$

тобто $z_1 = 3i + 2i = 5i$, $z_2 = 3i - 2i = i$. Очевидно,

$$|z_1 + 1 - 3i| = |5i - 3i + 1| = |1 + 2i| = \sqrt{5} < 4,$$

$$|z_2 + 1 - 3i| = |i - 3i + 1| = |1 - 2i| = \sqrt{5} < 4,$$

тобто обидві точки лежать всередині кола інтегрування. Отже, маємо ситуацію, подібну до задачі 26.2). Тому розіб'ємо внутрішність кола $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z + 1 - 3i| = 4\}$ на дві області D_1 та D_2 за допомогою лінії L_{AB} так, щоб точка z_1 потрапила в D_1 , а z_2 – в D_2 (наприклад, в ролі L_{AB} можемо взяти відрізок прямої $\operatorname{Im} z = 3$ з кінцями на колі інтегрування). Нехай Γ_1 – межа області D_1 , а Γ_2 – межа області D_2 . Зрозуміло, що $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma \cup L_{AB} \cup L_{BA}$.

Функція $f_1(z) = \frac{e^{iz}}{z-i}$ є аналітичною в $D_1 \cup \Gamma_1$, а функція

$f_2(z) = \frac{e^{iz}}{z-5i}$ – аналітичною в $D_2 \cup \Gamma_2$. Тому можемо застосувати формулу (16) для функцій $f_1(z)$ та $f_2(z)$ відповідно по контурах Γ_1 та Γ_2

$$\begin{aligned} \int_{|z+1-3i|=4} \frac{e^{iz}}{z^2-6iz-5} dz &= \int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{(z-i)(z-5i)} dz + \int_{L_{BA}} \frac{e^{iz}}{(z-i)(z-5i)} dz + \\ &+ \int_{L_{AB}} \frac{e^{iz}}{(z-i)(z-5i)} dz = \int_{\Gamma_1} \frac{f_1(z)}{z-5i} dz + \int_{\Gamma_2} \frac{f_2(z)}{z-i} dz = 2\pi i \cdot f_1(5i) + \\ &+ 2\pi i \cdot f_2(i) = 2\pi i \frac{e^{i \cdot 5i}}{5i-i} + 2\pi i \frac{e^{i \cdot i}}{i-5i} = \frac{e^{-5} - e^{-1}}{2} \pi. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

► в) Точка $z_0 = 2$ знаходиться всередині контура інтегрування – кола $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z+i|=3\}$, бо $|z_0+i| = |2+i| = \sqrt{5} < 3$, а функція $f(z) = \operatorname{sh} z^3$ є аналітичною всередині Γ і на Γ , бо вона аналітична в усій комплексній площині. Тому для обчислення даного інтеграла можемо скористатись формулою (18) з $k=2$

$$\begin{aligned} \int_{|z+i|=3} \frac{\operatorname{sh} z^3}{(z-2)^3} dz &= 2\pi i \cdot f''(z) \Big|_{z=2} = 2\pi i \cdot (\operatorname{sh} z^3)'' \Big|_{z=2} = \\ &= 2\pi i \cdot (3z^2 \operatorname{ch} z^3)' \Big|_{z=2} = 2\pi i \left(6z \operatorname{ch} z^3 + (3z^2)^2 \operatorname{sh} z^3 \right) \Big|_{z=2} = \\ &= 2\pi i (12 \operatorname{ch} 8 + 144 \operatorname{sh} 8). \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Завдання для самостійного розв'язання

26. Обчислити усі можливі значення інтеграла

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z^2 - 3z + 2}, \text{ якщо } \Gamma - \text{простий спрямний замкнений контур,}$$

який не проходить через жодну з точок 1 та 2.

27. Обчислити інтеграли:

$$\text{а) } \int_{|z-3i|=4} \frac{\operatorname{ch} 2z}{z^2 - 2z + 10} dz; \quad \text{б) } \int_{|z+3+4i|=5} \frac{\sin z}{z^2 + 8iz - 25} dz;$$

$$\text{в) } \int_{|z-2+5i|=7} \frac{e^{-2z}}{(z+i)^4} dz.$$

§ 4. Ряд Тейлора. Ряд Лорана

4.1 Степеневі та узагальнені степеневі ряди

Нехай (f_n) – послідовність функцій, заданих на $E \subset \mathbb{C}$.

Функціональним рядом називається вираз виду

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots, \quad z \in E. \quad (19)$$

Поклавши $z = z_0$ в (19), дістанемо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$. Якщо

він збіжний, то кажуть, що функціональний ряд (19) збігається у точці z_0 ;

якщо ж розбіжний, то (19) – розбігається у точці z_0 . Ряд (19) називається

збіжним на множині E , якщо він збіжний у кожній точці $z \in E$. У цьому

випадку через $f(z)$ позначимо суму ряду (19) в точці z . Отже, те, що

ряд (19) збігається на E до функції f , означає, що

$$(\forall z \in E)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n > n_0) \left\{ \left| \sum_{k=1}^n f_k(z) - f(z) \right| < \varepsilon \right\}.$$

Ряд (7.1) називається *рівномірно збіжним на множині E до функції f* , якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n > n_0)(\forall z \in E) \left\{ \left| \sum_{k=1}^n f_k(z) - f(z) \right| < \varepsilon \right\}.$$

Як бачимо, наведені означення нічим не відрізняються від аналогічних з курсу математичного аналізу. Тому має місце

Теорема 4.1. Для того, щоб ряд (19) був збіжним (рівномірно збіжним) на множині E до функції f , необхідно і достатньо, щоб були збіжними (рівномірно збіжними) на E до функцій u та v відповідно ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ та } \sum_{n=1}^{\infty} v_n, \text{ де } u_n = \operatorname{Re} f_n, u = \operatorname{Re} f, v_n = \operatorname{Im} f_n, v = \operatorname{Im} f.$$

Ця теорема дає можливість перенести відомі з курсу математичного аналізу теореми на випадок комплексної змінної.

Теорема 4.2. Якщо усі функції f_n неперервні на множині E і ряд (19) рівномірно збіжний на E до функції f , то f – неперервна на E функція.

Теорема 4.3. Нехай Γ – крива, функції f_n неперервні на Γ і ряд (19) рівномірно збіжний на Γ до функції f . Тоді

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Gamma} f_n(z) dz.$$

Сформулюємо теорему Вейерштрасса про ряди аналітичних функцій, яка не має аналогу для рядів з дійсними неперервно диференційовними функціями.

Теорема 4.4. Нехай в області D задана послідовність (f_k)

аналітичних функцій і ряд (19) рівномірно збіжний у кожному замкненому крузі $\bar{K} \subset D$. Тоді:

1) функція f аналітична в D ;

2) ряд (19) можна почленно диференціювати будь-яку скінченну кількість разів в усіх точках області D , тобто

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(n)}(z), \quad n \in \mathbf{Z}; \quad (20)$$

3) ряди в (20) рівномірно збіжні у кожному замкненому крузі $\bar{K} \subset D$.

Степеневим рядом (з центром у точці z_0) називається функціональний ряд виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (21)$$

де C_n – відомі коефіцієнти.

Для степеневого ряду завжди існує єдине число R , $0 \leq R \leq +\infty$, таке, що:

1) при $R = 0$ ряд (21) збігається тільки в точці $z = z_0$; при усіх $z \neq z_0$ він розбіжний;

2) при $0 < R < +\infty$ степеневий ряд збігається, причому абсолютно, в $\{z : |z - z_0| < R\}$, і розбігається в $\{z : |z - z_0| > R\}$;

3) при $R = +\infty$ ряд (21) збігається, причому абсолютно, в усіх точках $z \in \mathbf{C}$.

Радіус збіжності можна знаходити за формулою Коші-Адамара

$$R = 1 / \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}. \quad (22)$$

У випадку існування звичайної границі цю формулу можна переписати так:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}. \quad (23)$$

Також можна знаходити радіус збіжності за формулою

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|, \quad (24)$$

якщо границя існує.

Круг $\{z : |z - z_0| < R\}$ називається *кругом збіжності*, а при $0 < R < +\infty$ коло $\{z : |z - z_0| = R\}$ — *колом збіжності*. На колі збіжності ряд (21) може бути збіжним, розбіжним, збіжним тільки на деякій підмножині цього кола.

Теорема 4.5. (про рівномірну збіжність). Якщо ряд (21) має радіус збіжності $R > 0$, то у кожному замкненому крузі $\{z : |z - z_0| \leq r\}$, $0 < r < R$ він збіжний рівномірно.

Наслідок 1. Сума ряду (21) є аналітичною функцією, і цей ряд можна почленно диференціювати довільну кількість разів.

Дійсно, оскільки $c_n \cdot (z - z_0)^n$ — цілі функції і ряд (21) рівномірно збіжний у кожному замкненому крузі в області $\{z : |z - z_0| < R\}$, то за теоремою Вейерштрасса (теорема 4.4) його сума є аналітичною в цій області функцією.

Наслідок 2. Ряд (21) можна почленно інтегрувати по будь-якій кривій, яка лежить у крузі збіжності.

Дійсно, для кожної кривої Γ , яка лежить у крузі збіжності, можна знайти таке $r \in (0; R)$, що $\Gamma \subset \{z : |z - z_0| \leq r\}$, тобто ряд (21) рівномірно збіжний на Γ , тому за теоремою 4.3 його можна почленно інтегрувати.

Перейдемо тепер до поняття узагальненого степеневого ряду.

Нехай $z_0 \in \mathbb{C}$. Ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n = \dots + \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} +$$

$$+ c_0 + c_1 \cdot (z-z_0) + \dots + c_n \cdot (z-z_0)^n + \dots \quad (25)$$

називатимемо *узагальненим степеневим рядом*. Ряди $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-z_0)^n$ та $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ називаються відповідно *головною* та *правильною* частинами ряду (25).

Узагальнений степеневий ряд називається *збіжним (рівномірно збіжним) на множині E* , якщо на E збіжні (рівномірно збіжні) його головна і правильна частини. Правильна частина є звичайним степеневим рядом. Позначимо через R_2 його радіус збіжності і припустимо, що $R_2 > 0$. За теоремою 4.5 при $r \in (0; R_2)$ правильна частина рівномірно збігається в замкненому крузі $\{z: |z-z_0| \leq r\}$. В головній же частині зробимо заміну $z-z_0 = \frac{1}{w}$. Одержимо (перепозначивши $n = -k$)

ступеневий ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} w^k$. Нехай R' – його радіус збіжності. Якщо $R' > 0$, то він збіжний у крузі $\{w: |w| < R'\}$, причому рівномірно на кожному замкненому крузі цього круга. Тоді, повертаючись до головної частини ряду (25), бачимо, що вона збіжна в області $\left\{z: |z-z_0| > \frac{1}{R'} = R_1\right\}$ і рівномірно збіжна у кожній замкненій області $\{z: |z-z_0| \geq r\}$, $r > R_1$. Враховуючи (19), бачимо, що числа R_1 та R_2 обчислюються за допомогою формул Коші-Адамара

$$R_1 = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_{-n}|}}, \quad R_2 = 1 / \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}. \quad (26)$$

Якщо $R_1 > R_2$, то ряд (25) ніде не збіжний, якщо ж $R_1 = R_2$, то він може бути збіжним хіба що на колі $\{z : |z - z_0| = R_1\}$ або на якійсь його частині, а якщо $R_1 < R_2$, то ряд (25) збігатиметься в кільці $\{z : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$, причому на краю цього кільця можуть бути точки збіжності. Надалі розглядатимемо лише третій випадок і зауважимо, що в кожному замкненому кільці $\{z : r_1 \leq |z - z_0| \leq r_2\}$, $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$, ряд (25) рівномірно збіжний, отже, в кільці $\{z : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$ задає аналітичну функцію і його можна почленно диференціювати довільну кількість разів.

Приклади розв'язання задач

28. Знайти радіуси збіжності та вказати круги збіжності степеневих рядів:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n} z^n; & \text{б) } & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2i)^n}{n!} (z-5)^n; \\ \text{в) } & \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{\frac{n}{2}} (z+4-i)^n; & \text{г) } & \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2-i}{3+4i} \right)^{2n} (z-1+2i)^n. \end{aligned}$$

► а) Коефіцієнти заданого степеневого ряду

дорівнюють $c_n = \frac{n+1}{3^n}$. Скористаємось формулою (23)

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left| \frac{n+1}{3^n} \right|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt[n]{n+1}} = \frac{3}{1} = 3.$$

Тоді кругом збіжності буде $\{z : |z| < 3\}$. ◀

► б) Для знаходження радіуса збіжності степеневого

ряду з коефіцієнтами $c_n = \frac{(2i)^n}{n!}$ зручно використати формулу (24).

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2i)^n}{n!} : \frac{(2i)^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{2i} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2} = +\infty,$$

отже, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2i)^n}{n!} (z-5)^n$ збігається, причому абсолютно, в усіх комплексній площині. ◀

► в) Бачимо, що даний степеневий ряд має коефіцієнти $c_n = (n+1)^{\frac{n}{2}}$, тому знайдемо його радіус збіжності за формулою (23).

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left| (n+1)^{\frac{n}{2}} \right|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0.$$

Це означає, що ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{\frac{n}{2}} (z+4-i)^n$ збігається тільки в точці $z_0 = -4+i$. В усіх інших точках комплексної площини він розбіжний. ◀

► г) В даному випадку коефіцієнти степеневого ряду дорівнюють $c_n = \left(\frac{2-i}{3+4i} \right)^{2n}$, отже, скористаємось формулою (23):

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left| \left(\frac{2-i}{3+4i} \right)^{2n} \right|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left(\frac{3+4i}{2-i} \right)^2 \right| = \frac{3^2 + 4^2}{2^2 + (-1)^2} = 5.$$

Тому кругом збіжності буде $\{z : |z - 1 + 2i| < 5\}$. ◀

29. Знайти кільця збіжності узагальнених степеневих рядів:

$$\text{а) } \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{2^{|n|}}; \quad \text{в) } \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(z+i)^n}{n^{n^2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{n^{n^2}}.$$

► а) Знайдемо радіуси кільця збіжності за формулами

(26). У нас $c_n = \frac{1}{2^n}$. Тому

$$R_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_{-n}|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^{-n}}} = 2, \quad R_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2^2} = 2.$$

Отже, узагальнений степневий ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}$ розбігається

як при $|z| < 2$, так і при $|z| > 2$.

$$\text{Якщо ж } |z| = 2, \text{ то } \left| \frac{z^n}{2^n} \right| = \frac{|z|^n}{2^n} = \frac{2^n}{2^n} = 1 \not\rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

тобто не виконується необхідна умова збіжності, отже, ряд розбігається.

Таким чином, заданий узагальнений степневий ряд розбігається в усіх точках комплексної площини. ◀

► б) Для нашого узагальненого степеневому ряду

коефіцієнти $c_n = \frac{1}{2^{|n|}}$ і при $n \geq 0$ вони такі ж як і в попередньому прикладі, отже, $R_2 = 2$. Залишилось знайти

$$R_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_{-n}|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^{|-n|}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2}.$$

Тому ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{2^{|n|}}$ збігається в кільці $\left\{z : \frac{1}{2} < |z| < 2\right\}$. ◀

► в) В цій задачі радіуси кільця збіжності також шукаємо за формулами (26). Бачимо, що $c_0 = 0$, $c_n = \frac{1}{n^{n^2}}$ при $n \neq 0$. Отже,

$$R_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_{-n}|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(-n)^{(-n)^2}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^n} = 0,$$

$$R_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^n = +\infty.$$

Це означає, що кільцем збіжності буде $\{z : 0 < |z + i| < +\infty\}$, тобто заданий ряд збігається, причому абсолютно, в усіх точках $z \neq -i$ комплексної площини. ◀

Завдання для самостійного розв'язання

28. Знайти радіуси збіжності та вказати круги збіжності степеневих рядів:

$$\begin{aligned} \text{а)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+3)^2}; \quad \text{б)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n n!}{n^n} (z+3)^n; \\ \text{в)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(z-2+3i)^n}{(n-1)^{2n}}; \quad \text{г)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4-3i}{12+i} \right)^{n-3} (z+5-4i)^n. \end{aligned}$$

29. Знайти кільця збіжності узагальнених степеневих рядів:

$$\text{а)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{5^n z^n}{2^{n^2}}; \quad \text{б)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{3^{|2n-1|}}; \quad \text{в)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(z+1-3i)^n}{(n^2+1)^{n-2}}.$$

4.2 Ряд Тейлора. Ряд Лорана

Теорема 4.6 (Лорана). Аналітичну в кільці $\{z: R_1 < |z - z_0| < R_2\}$ функцію f можна єдиним чином розвинути в узагальнений степеневий ряд (25), причому

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (27)$$

де Γ_R – довільне коло $\{z: |z - z_0| = R\}$, $R_1 < R < R_2$.

Коефіцієнти (27) називаються *коефіцієнтами Лорана*, а ряд (25) – *рядом Лорана*.

Зауваження 1. Нехай $\{z: 0 < |z - z_0| < \delta\}$ – проколений окіл точки $z_0 \neq \infty$. Якщо функція f аналітична в ньому, то її можна розвинути в ряд Лорана, бо цей окіл є частковим випадком кільця в теоремі 4.6 з $R_1 = 0$ та $R_2 = \delta$. Дістанемо таким чином розвинення функції f в *ряд Лорана в околі точки z_0* . Означення головної і правильної частини зберігаються.

Зауваження 2. Нехай тепер $z_0 = \infty$ і функція f аналітична в області

$$\left\{ z : \frac{1}{\delta} < |z| < +\infty \right\}.$$

Рядом Лорана для функції f в околі точки $z_0 = \infty$ називається ряд

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k z^k. \quad (28)$$

При цьому ряд, складений з членів з додатними показниками, називається головною частиною ряду (28), а ряд, що залишиться після усунення головної частини, – правильною частиною.

Висновок. Отже, можна сказати, що до головної частини розвинення функції f в ряд Лорана в околі точки $z_0 \in \bar{C}$ належать ті члени, які прямують до ∞ при $z \rightarrow z_0$.

Зауваження 3. Якщо функція f аналітична в області $\{z : 0 < |z| < +\infty\}$, яку можна розуміти одночасно як проколений окіл точки $z = 0$, так і точки $z = \infty$, то в цій області функцію f можна розвинути в ряд (28), який є рядом Лорана для f і в околі точки $z = 0$, і в околі точки $z = \infty$, але з різними головними та правильною частинами. При цьому член c_0 як для точки $z = 0$, так і для точки $z = \infty$, завжди належить до правильної частини. Наприклад, ряд Лорана $\frac{1}{z} + 1 + z$ в околі точки $z = 0$ має головну частину $\frac{1}{z}$, а в околі точки $z = \infty$ головною частиною є z .

Теорема 4.7 (Тейлора). Аналітичну в крузі $\{z : |z - z_0| < R\}$ функцію f можна єдиним чином розвинути в степеневий ряд (21) з коефіцієнтами $(0 < r < R)$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad (29)$$

Наслідок 1. Якщо функція f аналітична в області D і $z_0 \in D$, то її можна розвинути в ряд Тейлора:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \cdot (z - z_0)^n \quad (30)$$

в будь-якому крузі $K \subset D$ з центром в точці z_0 .

Наслідок 2. Функція f є цілою (тобто аналітичною в усій комплексній площині) тоді і тільки тоді, коли для будь-якої точки $z_0 \in \mathbb{C}$ її можна розвинути в ряд Тейлора за степенями $(z - z_0)$ з нескінченним радіусом збіжності.

Запишемо розвинення основних елементарних функцій в ряд Тейлора за степенями z .

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots, \quad (31)$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad (32)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad (33)$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n + \dots, \quad (34)$$

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{z^n}{n} + \dots, \quad (35)$$

Функції e^z , $\sin z$, $\cos z$ – цілі, тому рівності (31) – (33) мають місце в усіх точках z комплексної площини. Розвинення (34) та (35) виконуються тільки в крузі $\{z : |z| < 1\}$.

Функція f називається *голоморфною* в області D , якщо для кожної точки $z_0 \in D$ існує круг $\{z : |z - z_0| < R\} \subset D$, в якому f можна розвинути в ряд Тейлора (30).

З теореми 4.4 та наслідку 1 з теореми 4.7 випливає ще одна теорема.

Теорема 4.8. Функція f голоморфна в області D тоді і тільки тоді, коли вона в D аналітична.

Зробимо огляд рівносильних означень аналітичної функції. Для простоти обмежимося випадком однозв'язної області, хоча в більшості означень вимога однозв'язності є зайвою. Отже, *аналітичною в однозв'язній області функцією* називається така, яка задовольняє одній з наступних умов:

- 1) має в цій області неперервну похідну;
- 2) має в цій області похідну;
- 3) має в цій області неперервно диференційовні дійсну та уявну частини, які задовольняють умови Коші-Рімана;
- 4) неперервна і має в області первісну;
- 5) неперервна і інтеграл від неї по будь-якій замкненій кривій, що лежить в області, дорівнює нулеві;
- 6) може бути розвинута в степеневий ряд в околі кожної точки з області.

Приклади розв'язання задач

30. Вказані функції розвинути в степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$

і знайти радіус збіжності:

$$\text{а) } \operatorname{ch} z; \quad \text{б) } \cos^2 z; \quad \text{в) } \operatorname{sh}^2 z; \quad \text{г) } \frac{4z}{z^2 - 6z + 13}.$$

► а) Ми повинні розвинути функцію $f(z) = \operatorname{ch} z$ в ряд Тейлора за формулою (30), де $z_0 = 0$. Як бачимо, для цього нам достатньо обчислити значення даної функції та її

похідних в точці $z_0 = 0$. Зробимо це.

$$f(0) = \operatorname{ch} 0;$$

$$f'(z) = (\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z, \quad f'(0) = \operatorname{sh} 0 = 0;$$

$$f''(z) = (\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z, \quad f''(0) = 1,$$

.....

$$f^{(2k-1)}(z) = \operatorname{sh} z, \quad f^{(2k-1)}(0) = \operatorname{sh} 0 = 0;$$

$$f^{(2k)}(z) = \operatorname{ch} z, \quad f^{(2k)}(0) = 1,$$

.....

Підставивши обчислені значення в (30) із $z_0 = 0$,
отримуємо

$$\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad (36)$$

Задана функція є цілою, тому це розвинення виконується
в усій комплексній площині, отже, радіус збіжності $R = \infty$. ◀

► б) Понизимо степінь за формулою

$$\cos^2 z = \frac{1}{2}(1 + \cos 2z), \quad \text{а далі скористаємось рівністю (36),}$$

поклавши в ній $2z$ замість z :

$$\cos^2 z = \frac{1}{2} \left(1 + 1 - \frac{(2z)^2}{2!} + \frac{(2z)^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!} + \dots \right),$$

тобто потрібне розвинення за формулою Тейлора по степенях
 z матиме вигляд

$$\cos^2 z = 1 - z^2 + \frac{z^4}{3} - \dots + (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} z^{2n} + \dots$$

Зрозуміло, що радіус збіжності $R = \infty$. ◀

► в) Маємо $\operatorname{sh}^2 z = \frac{1}{2} \operatorname{ch} 2z - \frac{1}{2}$. Тому, поклавши $2z$

замість z в рівності (36), дістаємо розвинення за формулою Тейлора по степенях z в усій комплексній площині

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}^2 z &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{(2z)^2}{2!} + \frac{(2z)^4}{4!} + \dots + \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!} + \dots \right) - \frac{1}{2} = \\ &= z^2 + \frac{z^4}{3} + \dots + \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} z^{2n} + \dots \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

► г) Задана функція є раціональною, отже, вона аналітична в усій комплексній площині, за винятком коренів знаменника, тобто точок $z_{1,2} = 3 \pm 2i$. Бачимо, що

$z_1 = z_2 = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$. Тому в крузі $\{z : |z| < \sqrt{13}\}$ функція

буде аналітичною. Перетворимо її так:

$$\frac{4z}{z^2 - 6z + 13} = \frac{4z}{(z - 3 - 2i)(z - 3 + 2i)} = \frac{A}{z - 3 - 2i} + \frac{B}{z - 3 + 2i}.$$

Звівши останній вираз до спільного знаменника і прирівнявши отриманий чисельник до z , знаходимо сталі $A = 2 - 3i$ та $B = 2 + 3i$. Отже,

$$\begin{aligned} \frac{4z}{z^2 - 6z + 13} &= \frac{2 - 3i}{z - 3 - 2i} + \frac{2 + 3i}{z - 3 + 2i} = \\ &= \frac{-i(2i + 3)}{z - (3 + 2i)} + \frac{i(-2i + 3)}{z - (3 - 2i)} = i \frac{1}{1 - \frac{z}{3 + 2i}} - i \frac{1}{1 - \frac{z}{3 - 2i}}. \end{aligned} \quad (37)$$

Далі двічі скористаємось розвиненням (34), поклавши в ньому замість z спочатку $\frac{z}{3 + 2i}$, а потім $\frac{z}{3 - 2i}$:

$$\begin{aligned} \frac{4z}{z^2 - 6z + 13} &= i \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3 + 2i} \right)^n - i \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3 - 2i} \right)^n = \\ &= i \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(3 + 2i)^n} - \frac{1}{(3 - 2i)^n} \right) z^n = i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3 - 2i)^n - (3 + 2i)^n}{((3 + 2i)(3 - 2i))^n} z^n, \end{aligned}$$

тобто

$$\frac{4z}{z^2 - 6z + 13} = i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3 - 2i)^n - (3 + 2i)^n}{13^n} z^n. \quad (38)$$

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3 + 2i} \right)^n$ збігається, причому абсолютно, при

$\left| \frac{z}{3 + 2i} \right| < 1$, тобто при $|z| < \sqrt{13}$, а ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3 - 2i} \right)^n$ – при

$\left| \frac{z}{3 - 2i} \right| < 1$, тобто також при $|z| < \sqrt{13}$. Тому ряд (38) точно

збігається при $|z| < \sqrt{13}$. Оскільки на колі $\{z : |z| = \sqrt{13}\}$ є дві

точки $z_{1,2} = 3 \pm 2i$, в яких порушується аналітичність, то радіус

збіжності ряду (38) не може бути більшим за $\sqrt{13}$. Отже,

$$R = \sqrt{13}. \quad \blacktriangleleft$$

31. Розвинути задані функції в ряд Тейлора за степенями $(z-3)$ і знайти радіус збіжності:

$$\text{а) } \frac{1}{z^2}; \quad \text{б) } \sin(6z - z^2); \quad \text{в) } \ln z; \quad \text{г) } \frac{4z}{z^2 - 6z + 13}.$$

► а) Розвинемо спочатку

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 + \frac{z-3}{3}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z-3}{3} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} (z-3)^n. \quad (39)$$

Тут ми використали (34) поклавши $\left(-\frac{z-3}{3} \right)$ замість z .

Записана рівність виконується при $\left| -\frac{z-3}{3} \right| < 1$, тобто $|z-3| < 3$.

При інших z ряд розбігатиметься. За наслідком 1 з теореми 4.5 ми можемо рівність (39) почленно продиференціювати в усіх точках круга збіжності. Радіус збіжності при цьому не зміниться. Отже,

$$\left(\frac{1}{z} \right)' = -\frac{1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{3^{n+1}} (z-3)^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} n (z-3)^{n-1},$$

звідки

$$\frac{1}{z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n+1}} n (z-3)^{n-1}.$$

Радіус збіжності буде $R = 3$. $\blacktriangleleft$

► б) Виконаємо перетворення

$$\sin(6z - z^2) = \sin(9 - (z-3)^2) = \sin 9 \cdot \cos(z-3)^2 - \cos 9 \cdot \sin(z-3)^2.$$

Далі скористаємось розвиненнями (32) та (33), поклавши в кожному з них $(z-3)^2$ замість z . Матимемо

$$\begin{aligned} \sin(6z - z^2) &= \\ &= \sin 9 \left(1 - \frac{((z-3)^2)^2}{2!} + \frac{((z-3)^2)^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{((z-3)^2)^{2n}}{(2n)!} + \dots \right) - \\ &\quad - \cos 9 \left((z-3)^2 - \frac{((z-3)^2)^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{((z-3)^2)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \right), \end{aligned}$$

тобто потрібне нам розвинення буде

$$\begin{aligned} \sin(6z - z^2) &= \sin 9 - \cos 9 \cdot (z-3)^2 - \frac{\sin 9}{2!} (z-3)^4 + \frac{\cos 9}{3!} (z-3)^6 + \\ &+ \dots + (-1)^n \frac{\sin 9}{(2n)!} (z-3)^{4n} - \frac{\cos 9}{(2n+1)!} (z-3)^{4n+2} + \dots \end{aligned} \quad (40)$$

Кожний з рядів в (32) та (33) збігається в усій комплексній площині, отже, (40) збігається при усіх значеннях $(z-3)^2$, тому $R = \infty$. ◀

32. Розвинути функцію $f(z) = \frac{1}{z(z+1)}$ в ряд Лорана в

околі точок $z=0$, $z=-1$ та $z=\infty$.

► Задана функція аналітична в усій комплексній площині, за винятком коренів знаменника, тобто точок $z=0$

та $z = -1$. Маємо

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-(-z)} = \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n,$$

тобто

$$\frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{z} - 1 + z - z^2 + z^3 - \dots + (-1)^n z^{n-1} + \dots - \quad (41)$$

розвинення нашої функції в ряд Лорана в околі точки $z = 0$.

Ми скористались розвиненням (34), поклавши в ньому $(-z)$ замість z . Оскільки ряд (34) збігається при $|z| < 1$, то ряд (41) збігається в кільці $\{z : 0 < |z| < 1\}$.

Тепер розвинемо дану функцію в ряд Лорана в околі точки $z = -1$, тобто по степенях $(z+1)$. При цьому знову ж скористаємось розвиненням (34), поклавши в ньому $(z+1)$ замість z .

$$f(z) = \frac{1}{1+z} \cdot \frac{1}{z} = -\frac{1}{z+1} \cdot \frac{1}{1-(z+1)} = -\frac{1}{z+1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (z+1)^n$$

або

$$\frac{1}{z(z+1)} = -\frac{1}{z+1} - 1 - (z+1) - (z+1)^2 + z^3 - \dots - (z+1)^{n-1} - \dots. \quad (42)$$

Ця рівність виконується в усіх точках кільця $\{z : 0 < |z+1| < 1\}$.

Як ми уже відзначили, дана функція аналітична при всіх

$z \neq 0$ та $z \neq -1$, зокрема, в кільці $\{z: |z| > 1\}$. Це кільце і буде околom ∞ , в якому розвинемо $f(z)$ в ряд Лорана, тобто по степенях $\frac{1}{z}$. Також використаємо (34), поклавши $\left(-\frac{1}{z}\right)$ замість z .

$$\begin{aligned} \frac{1}{z(z+1)} &= \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \right. \\ &\left. + \dots + (-1)^n \frac{1}{z^n} + \dots \right) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^5} + \dots + (-1)^n \frac{1}{z^{n+2}} + \dots \end{aligned} \quad (43)$$

Зауваження. Якщо поставити задачу: знайти усі лоранівські розвинення функції $f(z) = \frac{1}{z(z+1)}$ за степенями z , то такими розвиненнями будуть: 1) розвинення за формулою (41) в кільці $\{z: 0 < |z| < 1\}$; 2) розвинення за формулою (43) в кільці $\{z: |z| > 1\}$. Відзначимо, що в розвиненні (41) в околі точки $z = 0$ тільки перший доданок є головною частиною, усі інші правильна частина; в розвиненні (43) в околі точки $z = \infty$ головна частина відсутня. ◀

Завдання для самостійного розв'язання

30. Вказані функції розвинути в степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$

і знайти радіус збіжності:

$$\text{а) } \operatorname{sh} z; \quad \text{б) } \sin^2 z; \quad \text{в) } \operatorname{ch}^2 z; \quad \text{г) } \frac{4z+10}{z^2+4z+5}.$$

31. Розвинути задані функції в ряд Тейлора за степенями $(z+2)$ і знайти радіус збіжності:

$$\text{а) } \ln z; \quad \text{б) } \frac{4z+10}{z^2+4z+5}.$$

32. Розвинути функцію $f(z) = \frac{1}{(z+2)(z-1)}$ в ряд

Лорана в околі точок $z = -2, z = 1, z = \infty$ та в кільці $\{z: 1 < |z| < 2\}$.

§ 5. Нулі та ізольовані особливі точки

5.1 Нулі аналітичних функцій

Нехай функція f аналітична в області D . Точка $z_0 \in D$ називається *нулем функції f* , якщо $f(z_0) = 0$. Якщо $f(z_0) = 0, f'(z_0) = 0, \dots, f^{(n-1)}(z_0) = 0$ і $f^{(n)}(z_0) \neq 0$, то z_0 називається *нулем n -го порядку*. У випадку $n=1$ точку називають *простим нулем*. Якщо $f(z_0) = 0$ і всі її похідні в z_0 дорівнюють нулевим, то z_0 називається *нулем нескінченного порядку*.

Теорема 5.1 (про нуль нескінченного порядку). Якщо функція f аналітична в області D і $z_0 \in D$ є її нулем нескінченного порядку, то $f(z) \equiv 0$ в D .

Теорема 5.2 (про канонічне зображення). Для того, щоб аналітична в області D функція f мала в точці $z_0 \in D$ нуль n -го порядку, необхідно і достатньо, щоб у деякому околі точки z_0 функцію f можна було зобразити у вигляді

$$f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z), \quad (44)$$

де φ – функція, аналітична в цьому околі, і $\varphi(z_0) \neq 0$.

Зауваження. Будемо говорити, що аналітична в околі точки $z = \infty$ функція f має в ∞ нуль n -го порядку, якщо функція $g(z) = f(1/z)$ має нуль n -го порядку в точці $z = 0$. Це буде тоді і тільки тоді, коли $f(z) = \varphi(z)/z^n$, де φ – аналітична в деякому околі ∞ функція і $\varphi(\infty) \neq 0$.

Теорема 5.3 (про ізолюваність нулів). Нехай f – аналітична в області D функція, $f(z) \neq 0$ і $z_0 \in D$. Якщо z_0 є нулем функції f , то існує окіл функції f , в якому f не має інших нулів.

З теореми 5.3 випливає ряд наслідків.

Наслідок 1. Якщо функція f аналітична в області D , то множина її нулів не має точки скупчення (граничної точки) в D .

Дійсно, в протилежному випадку за неперервністю функції f точка скупчення теж була б нулем функції f , що неможливо за теоремою 5.3.

Зауважимо, що на краю області D точка скупчення нулів може бути, на що вказує приклад аналітичної функції $f(z) = \sin \frac{1}{1-z}$ в області

$\{z : |z| < 1\}$ з нулями $z_k = 1 - 1/\pi k \rightarrow 1, k \rightarrow \infty$.

Наслідок 2. Якщо функція $f \neq 0$ аналітична в області D , то вона має в D скінченну або зліченну множину нулів.

Доведення випливає з попереднього наслідку.

Наслідок 3 (теорема єдиності). Якщо функції f та g аналітичні в

області D , а множина в області $E \subset D$ має принаймні одну точку скупчення, яка належить до D , і $f \equiv g$ в E , то $f \equiv g$ в D .

Для доведення досить застосувати наслідок 2 до функції $\varphi = f - g$.

З останнього сформульованого наслідку випливають ще такі два твердження.

Наслідок 4. Якщо функції f та g аналітичні в області D і $f \equiv g$ на якійсь кривій $\Gamma \subset D$, то $f \equiv g$ в D .

Наслідок 5. Якщо функції f та g аналітичні в області D і $f \equiv g$ в якійсь області $G \subset D$, то $f \equiv g$ в D .

Приклади розв'язання задач

33. Знайти порядок нуля $z=0$ для функції $2 \cos z^3 - z^6 - 2$.

► Дану аналітичну в усій комплексній площині функцію розвинемо в ряд Тейлора за степенями z , використавши розвинення (30) і поклавши в ньому z^3 замість z .

$$2 \cos z^3 - z^6 - 2 \cos z = 2 \left(1 - \frac{(z^3)^2}{2!} + \frac{(z^3)^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{(z^3)^{2n}}{(2n)!} + \dots \right) =$$

$$+ z^6 - 2 = \frac{z^{12}}{12} - \frac{z^{18}}{360} - \dots + \frac{2(-1)^n}{(2n)!} z^{6n} + \dots = z^{12} \cdot \varphi(z),$$

де $\varphi(z) = \frac{1}{12} - \frac{z^6}{360} - \dots + \frac{2(-1)^n}{(2n)!} z^{6n-2} + \dots$ — ціла функція і, як

бачимо, $\varphi(0) = \frac{1}{12} \neq 0$. Тому за теоремою 5.2, відповідно до

рівності (41), робимо висновок, що $z=0$ є нулем 12-го

порядку для заданої функції. ◀

34. Знайти нулі та визначити їхні порядки для функцій:

а) $z^2 + 16$; б) $(z + \pi) \sin z$.

► а) Знайдемо спочатку нулі даної цілої функції

$$f(z) = z^2 + 16:$$

$$f(z) = 0 \Leftrightarrow z^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow z_{1,2} = \pm i;$$

$$f'(z) = 2z, \quad f'(i) = 2i \neq 0, \quad f'(-i) = -2i \neq 0.$$

Отже, $f(z) = z^2 + 16$ має два прості нулі – точки $\pm i$. ◀

► б) Розв'язуємо рівняння

$$f(z) = 0 \Leftrightarrow (z + \pi) \sin z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z + \pi = 0, \\ \sin z = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -\pi, \\ z_k = \pi k, \end{cases} k \in \mathbb{Z}.$$

Очевидно, $-\pi = z_{-1}$. Бачимо, що $z_k = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ – усі нулі функції $f(z) = (z + \pi) \sin z$. Тепер знаходимо

$$f'(z) = (z + \pi)' \sin z + (z + \pi)(\sin z)' = \sin z + (z + \pi) \cos z.$$

Тоді

$$f'(z_k) = \sin \pi k + (\pi k + \pi) \cos \pi k = (\pi k + \pi)(-1)^k \neq 0$$

при усіх $k \neq -1$; $f'(-\pi) = 0$. Далі шукаємо

$$f''(z) = (\sin z + (z + \pi) \cos z)' = 2 \cos z - (z + \pi) \sin z;$$

$$f''(-\pi) = -2 \neq 0.$$

Отже, для нашої функції точки $z_k = \pi k, k \in \mathbb{Z}, k \neq -1$ є

простими нулями; точка $z_{-1} = -\pi$ нуль другого порядку. ◀

Завдання для самостійного розв'язання

33. Знайти порядок нуля $z = 0$ для функції $6 \sin z^2 + z^2(z^4 - 6)$.

34. Знайти нулі та визначити їхні порядки для функцій:

а) $z^2 - 10z + 26$; б) $z(1 - \cos z)$.

5.2 Ізольовані особливі точки однозначного характеру

Нехай функція f аналітична в проколеному околі точки z_0 . Будемо вважати, що $z_0 \neq \infty$, тому що вивчення поведінки функції в околі точки ∞ заміною z на $1/z$ зводиться до вивчення поведінки функції $f(1/z)$ в околі точки $z = 0$.

Якщо функція f аналітична в проколеному околі $\{z : 0 < |z - z_0| < \delta\}$ точки z_0 , а в z_0 не визначена або не аналітична, то z_0 називається *ізольованою особливою точкою однозначного характеру функції f* .

Якщо при цьому існує $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \neq \infty$, то z_0 називається *усувною особливою точкою*. Наприклад, функція $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ має в точці $z = 0$ усувну особливість.

Якщо $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$, то z_0 називається *полюсом* (наприклад, точка $z = 0$ є полюсом функції $f(z) = 1/z$).

Нарешті, якщо $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ не існує, то z_0 називається *істотно особливою точкою* (наприклад, точка $z = 0$ є істотно особливою точкою функції $f(z) = \exp(1/z)$).

Щодо усувної особливої точки має місце

Теорема 5.4. Три твердження є еквівалентними:

- 1) z_0 є усувною особливою точкою функції f ;
- 2) функція f обмежена в деякому околі точки z_0 ;
- 3) в розвиненні функції f в ряд Лорана в околі точки z_0 немає головної частини.

Нехай z_0 – полюс функції f . Тоді $f(z) \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow z_0$, тобто існує окіл точки z_0 , де $f(z) \neq 0$. Звідси випливає, що функція $g(z) = 1/f(z)$ є аналітичною в деякому проколеному околі точки z_0 і $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = 0$. Отже, z_0 є усувною особливою точкою функції g і g має в z_0 нуль. Таким чином, *полюс функції f є нулем функції g* . Будемо називати *порядком полюса* функції f в точці z_0 порядок нуля функції $g(z) = 1/f(z)$ в z_0 . Наприклад, функція $w = 1/\sin z$ в точках $z_n = \pi n, n \in \mathbf{Z}$ має полюси першого порядку. Зауважимо, що точка $z = \infty$ не є ізольованою особливою точкою функції $w = 1/\sin z$, а є граничною точкою полюсів.

Теорема 5.5 (про канонічне зображення). Для того, щоб аналітична в проколеному околі точки z_0 функція f мала в z_0 полюс n -го порядку, необхідно і достатньо, щоб

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{(z - z_0)^n}, \quad (45)$$

де ψ – функція аналітична в деякому околі точки z_0 і $\psi(z_0) \neq 0$.

Теорема 5.6. Точка z_0 є полюсом n -го порядку аналітичної функції f

тоді і тільки тоді, коли ряд Лорана для f в околі z_0 має вигляд

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \dots + c_0 + \dots + c_k \cdot (z-z_0)^k + \dots, \quad (46)$$

$c_n \neq 0$, якщо $z_0 \neq \infty$;

$$f(z) = c_n \cdot z^n + \dots + c_0 + \dots + c_{-k} \cdot z^{-k} + \dots,$$

$c_n \neq 0$, якщо $z_0 = \infty$.

Безпосередньо з означення істотно особливої точки та теорем 5.4 і 5.6 випливає таке твердження.

Теорема 5.7. Точка z_0 є істотно особливою точкою аналітичної функції f тоді і тільки тоді, коли головна частина ряду Лорана для f в околі z_0 містить нескінченно багато членів.

Приклади розв'язання задач

35. Знайти особливі точки та встановити їх характер для функцій:

а) $\frac{1}{4z-z^3}$; б) $\frac{z^2+16}{e^z}$; в) $\frac{e^z}{z^2+16}$;

г) $\frac{1}{(z+\pi)\sin z}$; д) $\cos \frac{1}{z-4}$.

► а) Особливими точками функції $g(z) = \frac{1}{4z-z^3}$

будуть корені її знаменника. Знайдемо їх.

$$4z-z^3=0 \Leftrightarrow z(4-z^2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1=0, \\ z_{2,3}=\pm 2. \end{cases}$$

Кожний з цих коренів, зрозуміло, є нулем цілої функції

$f(z) = 4z - z^3$. Знайдемо їхні порядки.

$$f'(z) = 4 - 3z^2, \quad f'(z_1) = f'(0) = 4 \neq 0,$$

$$f'(z_2) = f'(2) = -8 \neq 0, \quad f'(z_3) = f'(-2) = -8 \neq 0,$$

тобто усі нулі $f(z)$ є простими. Тому, відповідно до

означення, задана функція $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ має три полюси

першого порядку – точки $z_1 = 0$, $z_2 = 2$ та $z_3 = -2$. В усіх

інших точках комплексної площини $g(z)$ є аналітичною. ◀

► б) Чисельник і знаменник заданої функції

$$f(z) = \frac{z^2 + 16}{e^z}$$

є цілими, причому знаменник $e^z \neq 0$ в усіх

точках площини. Тому $f(z)$ є цілою і, зрозуміло, не має

скінченних ізольованих особливих точок. ◀

► в) Знайдемо особливі точки функції $g(z) = \frac{e^z}{z^2 + 16}$,

прирівнявши знаменник до нуля. Одержимо

$$z^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -16 \Leftrightarrow z_{1,2} = \pm 4i,$$

тобто $g(z)$ має дві особливі точки $\pm 4i$.

Задану функцію можна подати у вигляді

$$g(z) = \frac{e^z}{(z - 4i)(z + 4i)}. \quad (47)$$

Розглянемо функцію $\psi_1(z) = \frac{e^z}{z+4i}$. Вона є аналітичною всюди, крім точки $z_2 = -4i$, отже, аналітичною в околі точки $z_1 = 4i$ і $\psi_1(4i) = \frac{e^{4i}}{4i+4i} = -\frac{i}{8}e^{4i} \neq 0$. Очевидно, $g(z) = \frac{\psi_1(z)}{z-4i}$. Тому за теоремою 5.5 точка $z_1 = 4i$ буде полюсом першого порядку для $g(z)$.

Аналогічно, функція $\psi_2(z) = \frac{e^z}{z-4i}$ аналітична в околі точки $z_2 = -4i$ і $\psi_2(-4i) = \frac{e^{-4i}}{-4i-4i} = -\frac{i}{8}e^{-4i} \neq 0$. Бачимо, що $g(z) = \frac{\psi_2(z)}{z+4i}$, отже, за теоремою 5.5 точка $z_2 = -4i$ також буде полюсом першого порядку для $g(z)$. ◀

► г) Бачимо, що задана функція $g(z) = \frac{1}{(z+\pi)\sin z} = \frac{1}{f(z)}$, де $f(z) = (z+\pi)\sin z$ – функція, для якої ми знайшли нулі і встановили їхні кратності (див. приклад 34 (б)). Тоді, відповідно до означення полюса, кожна з точок $z_k = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, $k \neq -1$ є полюсом першого порядку для $g(z)$, а точка $z_{-1} = -\pi$ – полюсом другого порядку. Інших особливих точок $g(z)$ не має. ◀

► д) Функція $\cos \frac{1}{z-4}$ аналітична в усіх точках $z \neq 4$,

тобто має одну особливу точку $z_0 = 4$. Поклавши $\frac{1}{z-4}$ замість z в розвиненні (33), отримаємо розвинення даної функції в ряд Лорана в околі точки $z_0 = 4$

$$\cos \frac{1}{z-4} = 1 - \frac{(z-4)^{-2}}{2!} + \frac{(z-4)^{-4}}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{(z-4)^{-2n}}{(2n)!} + \dots \quad (48)$$

Бачимо, що правильна частина цього розвинення складається тільки з першого доданка. Усі інші доданки, яких, до речі, безліч – головна частина. Тому за теоремою 5.7 точка $z_0 = 4$ є істотно особливою для $\cos \frac{1}{z-4}$. ◀

Завдання для самостійного розв'язання

35. Знайти особливі точки та встановити їх характер для функцій:

а) $\frac{5}{z^3 + 9z}$; б) $\frac{z^2 - 25}{e^{z^2}}$; в) $\frac{e^{z^2}}{z^2 - 25}$;

г) $\frac{1}{z(1 - \cos z)}$; д) $\sin \frac{1}{z+2}$.

§ 6. Лишки, їх застосування до обчислення інтегралів

6.1 Лишки, їх обчислення

Нехай $z_0 \neq \infty$ – ізольована особлива точка однозначного характеру аналітичної функції f . Отже, функція f аналітична в деякому проколеному околі $\{z : 0 < |z - z_0| < \delta\}$. *Лишком функції f у точці z_0* називається величина

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} f(z) dz, \quad 0 < r < \delta$$

Зрозуміло, що лишок від r не залежить.

Якщо розвинемо аналітичну в проколеному околі $\{z : 0 < |z - z_0| < \delta\}$ функцію f в ряд Лорана (25) з коефіцієнтами c_n , визначеними формулами (27), і в (27) візьмемо $n = -1$, то легко з'ясуємо, що

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1}. \quad (49)$$

Формулу (46) можна було б вважати означенням лишку. З неї випливає, що лишок в усуній точці $z_0 \neq \infty$ дорівнює нулеві. Цю формулу також слід використовувати, якщо z_0 – істотно особлива точка.

У випадку, коли $z_0 \neq \infty$ – полюс n -го порядку для функції f , то часто для обчислення лишку в цій точці зручною є формула

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left((z - z_0)^n f(z) \right). \quad (50)$$

Зокрема, якщо $z_0 \neq \infty$ – полюс першого порядку, то

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \left((z - z_0) f(z) \right). \quad (51)$$

Якщо аналітичну в проколеному околі точки z_0 функцію можна подати у вигляді $f(z) = \frac{\psi(z)}{\varphi(z)}$, де ψ та φ – аналітичні в околі z_0 функції, причому z_0 є для φ нулем першого порядку, а $\psi(z_0) \neq 0$, то

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\psi(z_0)}{\varphi'(z_0)}. \quad (52)$$

Зауваження. З означення лишка випливає, що

$$\operatorname{res}_{z=z_0} \sum_{j=1}^m f_j(z) = \sum_{j=1}^m \operatorname{res}_{z=z_0} f_j(z),$$

і, якщо функція f парна, то її лишок в 0 дорівнює нулеві.

Приклади розв'язання задач

36. Знайти лишки заданих функцій відносно усіх ізольованих особливих точок.

$$\text{а) } \frac{1}{4z - z^3}; \quad \text{б) } \frac{e^z}{z^2 + 16}; \quad \text{в) } \frac{1}{(z + \pi)\sin z};$$

$$\text{г) } \cos \frac{1}{z-4}; \quad \text{д) } (z-4)^3 \cos \frac{1}{z-4}.$$

► а) В прикладі 35 а) ми з'ясували, що задана функція має три ізольовані особливі точки: $z_1 = 0$, $z_2 = 2$ та $z_3 = -2$, кожна з яких є полюсом першого порядку. Скористаємось формулою (51) для обчислення лишку в кожній з точок.

$$\operatorname{res}_{z=0} \frac{1}{4z - z^3} = \lim_{z \rightarrow 0} \left(z \cdot \frac{1}{4z - z^3} \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{4 - z^2} = \frac{1}{4},$$

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=2} \frac{1}{4z-z^3} &= \lim_{z \rightarrow 2} \left((z-2) \cdot \frac{-1}{z(z-2)(z+2)} \right) = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{-1}{z(z+2)} = -\frac{1}{8}, \\ \operatorname{res}_{z=-2} \frac{1}{4z-z^3} &= \lim_{z \rightarrow -2} \left((z+2) \cdot \frac{-1}{z(z-2)(z+2)} \right) = \lim_{z \rightarrow -2} \frac{-1}{z(z-2)} = \frac{1}{8}. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

► б) Наша функція $g(z) = \frac{e^z}{z^2+16}$ аналітична в усій комплексній площині, за винятком точок $\pm 4i$, кожна з яких є полюсом першого порядку (див. приклад 35 в)). Для обчислення лишків в кожній з цих точок використаємо формулу (52), взявши $\varphi(z) = z^2+16$, $\psi(z) = e^z$. Тоді

$$\frac{\psi(z)}{\varphi'(z)} = \frac{e^z}{(z^2+16)'} = \frac{e^z}{2z} \text{ і потрібні нам лишки дорівнюватимуть}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=4i} \frac{e^z}{z^2+16} &= \frac{\psi(4i)}{\varphi'(4i)} = \frac{e^{4i}}{2 \cdot 4i} = \frac{\cos 4 + i \sin 4}{8i} = \frac{\sin 4}{8} - i \frac{\cos 4}{8}, \\ \operatorname{res}_{z=-4i} \frac{e^z}{z^2+16} &= \frac{\psi(-4i)}{\varphi'(-4i)} = \frac{e^{-4i}}{2 \cdot (-4i)} = \frac{\cos 4 + i \sin 4}{-8i} = -\frac{\sin 4}{8} + i \frac{\cos 4}{8}. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

► в) Ізольованими особливими точками функції $g(z) = \frac{1}{(z+\pi)\sin z}$ є точки $z_k = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq -1$, кожна з яких є полюсом першого порядку, та $z_{-1} = -\pi$ — полюс другого порядку (див. приклад 35 г)).

Лишок в точці z_{-1} шукаємо за формулою (50) при $n=2$

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_{z=-\pi} \frac{1}{(z+\pi)\sin z} &= \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow -\pi} \frac{d}{dz} \left((z+\pi)^2 \frac{1}{(z+\pi)\sin z} \right) = \\
&= \lim_{z \rightarrow -\pi} \left(\frac{z+\pi}{\sin z} \right)' = \lim_{z \rightarrow -\pi} \frac{\sin z - (z+\pi)\cos z}{\sin^2 z} = \\
&= \lim_{z \rightarrow -\pi} \frac{(\sin z - (z+\pi)\cos z)'}{(\sin^2 z)'} = \lim_{z \rightarrow -\pi} \frac{(z+\pi)\sin z}{2\sin z \cos z} = 0.
\end{aligned}$$

Лишки в точках $z_k = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, $k \neq -1$ знаходимо за формулою (52), беручи $\varphi(z) = \sin z$, $\psi(z) = \frac{1}{z+\pi}$. Тоді

$$\frac{\psi(z)}{\varphi'(z)} = \frac{1/(z+\pi)}{(\sin z)'} = \frac{1}{(z+\pi)\cos z}, \text{ звідки}$$

$$\operatorname{res}_{z=\pi k} \frac{1}{(z+\pi)\sin z} = \frac{\psi(\pi k)}{\varphi'(\pi k)} = \frac{1}{(\pi k + \pi)\cos \pi k} = \frac{(-1)^k}{\pi(k+1)}. \blacktriangleleft$$

► г) Функцію $\cos \frac{1}{z-4}$, яка має тільки одна ізольовану

особливу точку $z_0 = 4$, ми розвинули в ряд Лорана в околі цієї точки за формулою (48) в прикладі 35 д). Бачимо, що в розвиненні (48) коефіцієнт $c_{-1} = 0$. Тому, відповідно до (49),

$$\text{маємо } \operatorname{res}_{z=4} \left(\cos \frac{1}{z-4} \right) = 0. \blacktriangleleft$$

► д) Очевидно, задана функція має також тільки одну особливу точку $z_0 = 4$. Домноживши обидві частини (48) на

$(z-4)^3$, отримаємо розвинення нашої функції в ряд Лорана в околі точки $z_0 = 4$

$$(z-4)^3 \cos \frac{1}{z-4} = (z-4)^3 - \frac{z-4}{2!} + \frac{(z-4)^{-1}}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{(z-4)^{-2n+3}}{(2n)!} + \dots$$

З цього розвинення бачимо, що коефіцієнт при $(z-4)^{-1}$ дорівнює $c_{-1} = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$, отже, $\operatorname{res}_{z=4} \left((z-4)^3 \cos \frac{1}{z-4} \right) = \frac{1}{24}$. ◀

Завдання для самостійного розв'язання

36. Знайти лишки заданих функцій відносно усіх ізолюваних особливих точок.

а) $\frac{5}{z^3 + 9z}$; б) $\frac{e^{z^2}}{z^2 - 25}$; в) $\frac{z}{1 - \cos z}$;
 г) $\sin \frac{1}{z+2}$; д) $(z+2)^3 \sin \frac{1}{z+2}$.

6.2 Основна теорема про лишки, її застосування до обчислення інтегралів

Теорема 6.1. Нехай функція f аналітична в замкненій області $\bar{D}$, обмеженій скінченним числом замкнених жорданових кривих, за винятком скінченної кількості ізолюваних особливих точок $z_1, z_2, \dots, z_q \in D$. Тоді

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^q \operatorname{res}_{z=z_j} f(z). \quad (53)$$

Розглянемо деякі типи інтегралів, до обчислення яких можна застосувати основну теорему про лишки.

1. Нехай маємо визначений інтеграл

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos m\varphi, \sin n\varphi) d\varphi, \quad (54)$$

де R – раціональна функція двох змінних, $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$, причому підінтегральна функція при усіх $\varphi \in \mathbb{R}$ не дорівнює ∞ . Зробимо заміну

$$e^{i\varphi} = z. \quad \text{Тоді} \quad dz = ie^{i\varphi} d\varphi, \quad d\varphi = \frac{dz}{iz}, \quad \cos m\varphi = \frac{e^{im\varphi} + e^{-im\varphi}}{2} = \frac{z^m + z^{-m}}{2},$$

$$\sin n\varphi = \frac{z^n - z^{-n}}{2i}. \quad \text{Очевидно, що якщо } \varphi \text{ неперервно змінюватиметься від}$$

0 до 2π , то z опише один раз коло $\{z : |z| = 1\}$ проти годинникової стрілки.

Тому інтеграл (54) дорівнюватиме $I = \int_{|z|=1} Q(z) dz$, де

$$Q(z) = R\left(\frac{z^m + z^{-m}}{2}, \frac{z^n - z^{-n}}{2i}\right) \cdot \frac{1}{iz}.$$

Ясно, що Q – раціональна функція, особливими точками якої є полюси, які позначимо через b_j . На колі $\{z : |z| = 1\}$ особливих точок немає. Тому за теоремою 6.1

$$I = 2\pi i \sum_{|b_j| < 1} \operatorname{res}_{z=b_j} Q(z). \quad (55)$$

2. Нехай $f(z) = \frac{Q_m(z)}{P_n(z)}$ – раціональна функція, в якій $Q_m(z)$ та

$P_n(z)$ – многочлени степенів відповідно m та n , причому $m \leq n - 2$, тобто

ступінь чисельника менший за ступінь знаменника принаймні на 2. Відомо також, що $P_n(z)$ на дійсній осі не має нулів. Зрозуміло, що тоді невластний

інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} dx$ збігається. Використовуючи теорему 6.1, можна

показати, що цей інтеграл можна обчислювати за формулою

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} dx = 2\pi i \sum_{\substack{\text{Im } z_j > 0 \\ z = z_j}} \text{res} \frac{Q_m(z)}{P_n(z)}, \quad (56)$$

де z_j – особливі точки функції $\frac{Q_m(z)}{P_n(z)}$, тобто корені многочлена $P_n(z)$.

3. Нехай $f(z) = \frac{Q_m(z)}{P_n(z)}$ – раціональна функція, в якій $Q_m(z)$ та

$P_n(z)$ – многочлени степенів відповідно m та n , причому $m \leq n-1$, тобто

$f(z)$ правильний раціональний дріб. Відомо також, що $P_n(z)$ на дійсній

осі не має нулів. Тоді невластний інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} e^{iax} dx$ збігається при

всіх $a > 0$ і його можна обчислювати за формулою

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} e^{iax} dx = 2\pi i \sum_{\substack{\text{Im } z_j > 0 \\ z = z_j}} \text{res} \left(\frac{Q_m(z)}{P_n(z)} e^{iax} \right), \quad (57)$$

де z_j – особливі точки функції $\frac{Q_m(z)}{P_n(z)}$, тобто корені многочлена $P_n(z)$.

Приклади розв'язання задач

37. Обчислити інтеграли, використовуючи основну теорему про лишки. Обхід лінії інтегрування – проти годинникової стрілки.

$$\text{а) } \int_{|z+2+i|=3} \frac{1}{4z-z^3} dz; \quad \text{б) } \int_{|z|=4} \frac{1}{(z+\pi)\sin z} dz;$$

$$\text{в) } \int_{|z-4|=1} (z-4)^3 \cos \frac{1}{z-4} dz.$$

► а) Підінтегральна функція аналітична всюди, крім

точок $z_1 = 0$, $z_2 = 2$ та $z_3 = -2$ (приклад 35 а)). Оскільки

$$|z_1 + 2 + i| = |2 + i| = \sqrt{5} < 3, \quad |z_2 + 2 + i| = |4 + i| = \sqrt{17} > 3,$$

$$|z_3 + 2 + i| = |i| = 1 < 3, \text{ то точки } z_1 \text{ та } z_3 \text{ лежать всередині кола}$$

інтегрування, а точка z_2 – зовні нього. Тому, вважаючи

областю D круг $D = \{z : |z + 2 + i| < 3\}$ та враховуючи отримані

результати в прикладі 36 а), за формулою (53) маємо

$$\int_{|z+2+i|=3} \frac{1}{4z-z^3} dz = 2\pi i \left(\operatorname{res}_{z=0} \frac{1}{4z-z^3} + \operatorname{res}_{z=-2} \frac{1}{4z-z^3} \right) = 2\pi i \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right) = \frac{3\pi i}{4}. \blacktriangleleft$$

$$\blacktriangleright \text{ б) Функцію } g(z) = \frac{1}{(z+\pi)\sin z} \text{ ми розглядали в}$$

прикладі 35 г) та 36 в). Встановлено, що вона аналітична в

усіх точках комплексної площини, за винятком точок

$$z_k = \pi k, k \in \mathbb{Z}. \text{ Жодна з них не лежить на колі інтегрування.}$$

Серед вказаних точок в області D знаходяться тільки точки

$$z_{-1} = -\pi, \quad z_0 = 0, \quad z_1 = \pi. \text{ Тому, використовуючи основну}$$

теорему про лишки, з урахуванням результатів прикладу 36 в),

отримуємо

$$\begin{aligned} & \int_{|z|=4} \frac{1}{(z+\pi)\sin z} dz = \\ & = 2\pi i \left(\operatorname{res}_{z=-\pi} \frac{1}{(z+\pi)\sin z} + \operatorname{res}_{z=0} \frac{1}{(z+\pi)\sin z} + \operatorname{res}_{z=\pi} \frac{1}{(z+\pi)\sin z} \right) = \end{aligned}$$

$$= 2\pi i \left(0 + \frac{1}{\pi} + \frac{-1}{2\pi} \right) = 1. \blacktriangleleft$$

► в) Для підінтегральної функції, яка аналітична всюди крім $z_0 = 4 \in D$, де D внутрішність лінії інтегрування, в прикладі 36 д) ми знайшли $\operatorname{res}_{z=4} \left((z-4)^3 \cos \frac{1}{z-4} \right) = \frac{1}{24}$. Тому

$$\text{за формулою (53) маємо } \int_{|z-4|=1} (z-4)^3 \cos \frac{1}{z-4} dz = \frac{1}{24}. \blacktriangleleft$$

38. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\cos \varphi - 2 \sin \varphi - 3}$.

► Нам потрібно обчислити інтеграл виду (54). Очевидно, підінтегральна функція неперервна при всіх $\varphi \in \mathbf{R}$.

Зробивши заміну $e^{i\varphi} = z$, матимемо $\cos \varphi = \frac{z + z^{-1}}{2}$,

$$\sin \varphi = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \quad d\varphi = \frac{dz}{iz}, \quad \text{отже,}$$

$$I = \int_{|z|=1} \frac{dz}{\left(\frac{z + z^{-1}}{2} - 2 \frac{z - z^{-1}}{2i} - 3 \right) iz} = \int_{|z|=1} \frac{2dz}{(i-2)z^2 - 6iz + 2 + i}.$$

Як бачимо, підінтегральна функція є раціональною

$$R(z) = \frac{2}{(i-2)z^2 - 6iz + 2 + i}, \quad \text{знаменником якої є квадратний}$$

тричлен $(i-2)z^2 - 6iz + 2 + i$. Знаходимо його корені

$z_1 = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$ та $z_2 = 1 - 2i$, які є простими і, очевидно, не є коренями чисельника. Отже, вони є полюсами першого порядку для $R(z)$. Інших особливих точок функція $R(z)$ не має. Оскільки $|z_1| = \sqrt{5}/5 < 1$, а $|z_2| = \sqrt{5} > 1$, то, за рівністю (55), маємо

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\cos \varphi - 2 \sin \varphi - 3} &= 2\pi i \operatorname{res}_{z=z_1} \left(\frac{2}{(i-2)z^2 - 6iz + 2 + i} \right) = \\ &= 2\pi i \frac{2}{((i-2)z^2 - 6iz + 2 + i)} \bigg|_{z=\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i} = 2\pi i \frac{2}{(i-2)2z - 6i} \bigg|_{z=\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i} = \\ &= 2\pi i \frac{2}{-4i} = -\pi. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

39. Обчислити невласні інтеграли:

$$\text{а) } \int_0^{+\infty} \frac{2dx}{(x^2 + 1)^3}; \quad \text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(3x-2)\cos 2x}{x^2 + 6x + 13} dx.$$

► а) Очевидно, підінтегральна функція є раціональною

$$R(x) = \frac{2}{(x^2 + 1)^3}, \text{ знаменник якої не має коренів на дійсній осі.}$$

Різниця степенів знаменника та чисельника дорівнює $6 > 2$, отже, інтеграл збіжний. Точки $z_1 = i$ та $z_2 = -i$ — нулі третього порядку для $(z^2 + 1)^3$, значить, вони будуть полюсами третього порядку для $R(z)$, бо чисельник взагалі не має нулів.

В усіх інших точках $R(z)$ аналітична. Тому, враховуючи парність $R(x)$, за формулою (56), з використанням формули (50), маємо

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{2dx}{(x^2+1)^3} &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2dx}{(x^2+1)^3} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \operatorname{res}_{z=i} \frac{2}{(z^2+1)^3} = \\ &= \pi i \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^2}{dz^2} \left((z-i)^3 \frac{2}{((z+i)(z-i))^3} \right) = \frac{\pi i}{2} \lim_{z \rightarrow i} \left(\frac{2}{(z+i)^3} \right)' = \\ &= \frac{\pi i}{2} \lim_{z \rightarrow i} \frac{24}{(z+i)^5} = \frac{\pi i}{2} \frac{24}{(2i)^5} = \frac{3\pi}{8}. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

► б) Заданий інтеграл є збіжним, бо $R(x) = \frac{3x-2}{x^2+6x+13}$

правильний раціональний дріб, тобто різниця між степенями знаменника та чисельника не менша одиниці.

Розглянемо спочатку збіжний невластний інтеграл

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(3x-2)e^{2ix}}{x^2+6x+13} dx.$$

Особливими точками функції $R(z) = \frac{(3z-2)e^{2iz}}{z^2+6z+13}$ є

корені її знаменника, тобто точки $z_{1,2} = -3 \pm 4i$. Кожна з них є простим нулем для знаменника і не є нулем для чисельника, отже, $z_1 = -3+4i$ та $z_2 = -3-4i$ є полюсами першого порядку для підінтегральної функції. В усіх інших точках ця функція аналітична. Перша точка знаходиться у верхній півплощині,

друга – у нижній. Інтеграл I обчислюємо за формулою (57), при цьому лишок в точці z_1 знаходимо за формулою (52), беручи $\psi(z) = (3z - 2)e^{2iz}$, $\varphi(z) = z^2 + 6z + 13$:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(3x - 2)e^{2ix}}{x^2 + 6x + 13} dx = 2\pi i \operatorname{res}_{z=z_1} \frac{(3z - 2)e^{2iz}}{z^2 + 6z + 13} = \\
 &= 2\pi i \frac{(3z - 2)e^{2iz}}{(z^2 + 6z + 13)'} \bigg|_{z=-3+2i} = 2\pi i \frac{(3z - 2)e^{2iz}}{2z + 6} \bigg|_{z=-3+2i} = \\
 &= 2\pi i \frac{-11 + 6i}{4i} e^{-4-6i} = -\left(\frac{11}{2} \cos 6 - 3 \sin 6\right) e^{-4} \pi + \\
 &+ i \left(3 \cos 6 + \frac{11}{2} \sin 6\right) e^{-4} \pi.
 \end{aligned} \tag{58}$$

З іншого боку, згадавши формулу Ейлера, маємо

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(3x - 2)(\cos 2x + i \sin 2x)}{x^2 + 6x + 13} dx = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{(3x - 2) \cos 2x}{x^2 + 6x + 13} + i \frac{(3x - 2) \sin 2x}{x^2 + 6x + 13} \right) dx = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(3x - 2) \cos 2x}{x^2 + 6x + 13} dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(3x - 2) \sin 2x}{x^2 + 6x + 13} dx.
 \end{aligned} \tag{59}$$

Тепер знаходимо шуканий інтеграл, прирівнюючи дійсні частини (58) та (59):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(3x - 2) \cos 2x}{x^2 + 6x + 13} dx = -\left(\frac{11}{2} \cos 6 - 3 \sin 6\right) e^{-4} \pi.$$

Зауважимо, що якщо прирівняти уявні частини (58) та (59), то отримаємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(3x-2)\sin 2x}{x^2+6x+13} dx = \left(3\cos 6 + \frac{11}{2}\sin 6 \right) e^{-4\pi}. \blacktriangleleft$$

Завдання для самостійного розв'язання

37. Обчислити інтеграли, використовуючи основну теорему про лишки. Обхід лінії інтегрування – проти годинникової стрілки.

$$\text{а) } \int_{|z-1-2i|=5} \frac{5}{z^3+9z} dz; \quad \text{б) } \int_{|z+3|=6} \frac{z}{1-\cos z} dz;$$

$$\text{в) } \int_{|z+2|=2} (z+2)^3 \sin \frac{1}{z+2} dz.$$

$$38. \text{ Обчислити визначений інтеграл } \int_0^{2\pi} \frac{(3\sin \varphi + 1) d\varphi}{2\cos \varphi + 3}.$$

39. Обчислити невластні інтеграли:

$$\text{а) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(3x+4)dx}{(x^2-4x+8)^2}; \quad \text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1-4x)\sin 5x}{x^2-2x+17} dx.$$

§ 7. Елементи операційного числення

7.1 Перетворення Лапласа

Оригіналом називається комплекснозначна функція $f(t)$ дійсного аргументу t , яка задовольняє наступні три умови:

1) на будь-якому скінченному відрізку $[0, T]$ функція $f(t)$ має не

більше скінченного числа точок розриву і при цьому тільки першого роду;

2) $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$;

3) $f(t)$ росте при $t \rightarrow +\infty$ не швидше деякої показникової функції, тобто існують такі сталі $M > 0$, $s \geq 0$, що для всіх t виконується $|f(t)| \leq Me^{st}$ (число $s_0 = \inf s$ назовемо показником росту функції $f(t)$).

Надалі для зручності вважатимемо $f(0) = f(+0)$.

Найпростішою функцією-оригіналом є так звана одинична функція Хевісайда

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

Якщо функція $f(t)$ задовольняє умовам 1) та 3) і не задовольняє 2), то добуток

$$f(t) = \eta(t) f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ f(t), & t \geq 0 \end{cases}$$

задовольнятиме і умові 2), отже, буде оригіналом (наприклад, $\eta(t) \sin \beta t$, $\eta(t) t^n$, $\eta(t) e^{at}$ і т.д.). Для простоти запису опускатимемо, як правило, множник $\eta(t)$, при цьому вважатимемо, що всі функції, які ми будемо розглядати, дорівнюють нулю для від'ємних t (наприклад, замість $\eta(t)$ писатимемо 1, замість $\eta(t) \sin \beta t$ – просто $\sin \beta t$ і т. д.).

Зображенням оригіналу $f(t)$ називається функція комплексної змінної $p = \sigma + i\omega$, яка визначається співвідношенням

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$

Цей інтеграл називається перетворенням Лапласа, його позначають ще $L\{f(t)\}$. Відповідність між оригіналом $f(t)$ та його зображенням

$F(p)$ позначають $f(t) \div F(p)$ чи $F(p) \div f(t)$.

Приклади розв'язання задач

40. Перевірити, чи задані функції є оригіналами:

$$f_1(t) = \begin{cases} 2e^{5t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases} \quad f_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{t-2}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases} \quad f_3(t) = \begin{cases} 3^{4t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

► Функція $f_1(t)$ є оригіналом, оскільки умови 1) – 3) виконані: $M = 2$, $s_0 = 5$; функція $f_2(t)$ не є оригіналом, оскільки в точці $t = 2$ має розрив другого роду (не виконується умова 1); функція $f_3(t)$ не є оригіналом, оскільки росте швидше показникової функції (не виконується умова 3) ($3^{4t} > Me^{st}$ для будь-яких M і s , $t > 0$). ◀

41. Користуючись означенням, знайти зображення функцій:

а) одиничної функції $\eta(t)$; б) $\eta(t)e^{at}$.

► а) При $\sigma > 0$:

$$\eta(t) \div \int_0^{+\infty} e^{-pt} \eta(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = -\frac{e^{-pt}}{p} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p}.$$

Таким чином, $\eta(t) \div \frac{1}{p}$ або $1 \div \frac{1}{p}$. ◀

► б) Якщо $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a$, то

$$\eta(t)e^{at} \doteq \int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{at} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p-a)t} dt = -\frac{e^{-(p-a)t}}{p-a} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p-a}. \quad \blacktriangleleft$$

Завдання для самостійного розв'язання

40. Перевірити, чи задані функції є оригіналами:

$$f_1(t) = \begin{cases} e^{3t+2}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases} \quad f_2(t) = \begin{cases} e^{\frac{1}{t}}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases} \quad f_3(t) = \begin{cases} tgt, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

41. Користуючись означенням, знайти зображення функції $f(t) = \eta(t)t$.

7.2 Властивості перетворення Лапласа

Надалі позначатимемо через $f(t)$, $g(t)$, ... оригінали, а через $F(p)$, $G(p)$, ... – їхні зображення.

1. Властивість лінійності

Для довільних комплексних сталих c_1 та c_2 функція $c_1 f(t) + c_2 g(t)$ буде оригіналом і при цьому

$$c_1 f(t) + c_2 g(t) \doteq c_1 F(p) + c_2 G(p).$$

2. Теорема подібності

Для довільної сталої $\alpha > 0$ функція $f(\alpha t)$ буде оригіналом і при цьому має місце співвідношення

$$f(\alpha t) \doteq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

3. Теорема зміщення

Для довільного комплексного a виконується

$$e^{at} f(t) \div F(p-a).$$

4. Теорема загалювання (запізнювання)

Для довільного додатного τ виконується

$$f(t-\tau) \div e^{-p\tau} F(p).$$

5. Диференціювання оригіналу

Якщо функція $f(t)$ неперервна при $t \geq 0$ і $f'(t)$ є оригіналом то

$$f'(t) \div pF(p) - f(0).$$

Зокрема, якщо $f(0) = 0$, то диференціювання оригіналу зводиться до множення зображення на p .

Якщо оригінал $f(t)$ має похідні до n -го порядку, які є оригіналами і $f^{(n-1)}(t)$ неперервна, то

$$f^{(n)}(t) \div p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

Зокрема, коли $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$, то $f^{(n)}(t) \div p^n F(p)$.

Зауважимо, що ця властивість широко використовується при розв'язуванні лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами та їх систем.

6. Диференціювання зображення

Диференціювання зображення зводиться до множення на $-t$ оригіналу, і взагалі

$$(-1)^n \cdot t^n \cdot f(t) \div F^{(n)}(p).$$

7. Інтегрування оригіналу

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \div \frac{F(p)}{p}.$$

8. Інтегрування зображення

Якщо інтеграл $\int_p^\infty F(z) dz$ збігається, то

$$\frac{f(t)}{t} \div \int_p^\infty F(z) dz.$$

9. Теорема множення

Добуток двох зображень $F(p)$ та $G(p)$ також буде зображенням, причому

$$F(p)G(p) \div \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau. \quad (60)$$

Зауваження 1. Для довільних двох функцій $f(t)$ та $g(t)$ (не обов'язково оригіналів), визначених на $(-\infty, +\infty)$ і таких, що при усіх $\tau \in (-\infty, +\infty)$ збігається інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau,$$

цей інтеграл називається згортою функцій $f(t)$ та $g(t)$ і позначається символом $f * g$.

Якщо $f(t)$ та $g(t)$ – оригінали, то $f(\tau) = 0$ при $\tau < 0$ і $g(t-\tau) = 0$ при $\tau > t$, тому

$$f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = g * f.$$

Отже, співвідношення (60) можемо переформулювати ще так: добуток зображень відповідає згортка оригіналів

$$F(p)G(p) \div f * g.$$

Наслідок Скориставшись властивістю диференціювання оригіналу та доведеною теоремою множення, дістаємо так званий інтеграл Дюамеля

$$pF(p)G(p) \div g(0)f(t) + \int_0^t f(\tau)g'(t-\tau)d\tau \quad (61)$$

За допомогою означення та властивостей перетворення Лапласа можна скласти таблицю зображень основних функцій.

№ п/п	О р и г і н а л	З о б р а ж е н н я
1	1	$\frac{1}{p}$
2	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p - \alpha}$
3	$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$
4	$\cos \beta t$	$\frac{p}{p^2 + \beta^2}$
5	$sh \beta t$	$\frac{\beta}{p^2 - \beta^2}$
6	$ch \beta t$	$\frac{p}{p^2 - \beta^2}$
7	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
8	$t^n e^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(p - \alpha)^{n+1}}$
9	$t \sin \beta t$	$\frac{2\beta p}{(p^2 + \beta^2)^2}$
10	$t \cos \beta t$	$\frac{p^2 - \beta^2}{(p^2 + \beta^2)^2}$
11	$t sh \beta t$	$\frac{2\beta p}{(p^2 - \beta^2)^2}$
12	$t ch \beta t$	$\frac{p^2 + \beta^2}{(p^2 - \beta^2)^2}$
13	$e^{\alpha t} \sin \beta t$	$\frac{\beta}{(p - \alpha)^2 + \beta^2}$
14	$e^{\alpha t} \cos \beta t$	$\frac{p - \alpha}{(p - \alpha)^2 + \beta^2}$

Зауважимо, що є значно повніші таблиці оригіналів та зображень, які можна знайти в спеціальних довідниках з операційного числення.

Зауваження 2. Досить часто у застосуваннях апарату операційного числення дістають зображення $F(p)$ у вигляді раціональної функції

$$F(p) = \frac{Q_m(p)}{P_n(p)}.$$

де $Q_m(p)$ та $P_n(p)$ – многочлени степенів відповідно m та n . Цей дріб завжди буде правильним, бо $F(p) \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$. А, як нам відомо, довільний правильний раціональний дріб можна зобразити у вигляді суми елементарних дробів. Для кожного ж з таких доданків можна знайти оригінал, використовуючи щойно наведену таблицю, а також властивості перетворення Лапласа.

Приклади розв'язання задач

42. Знайти зображення функцій-оригіналів:

а) $f(t) = \operatorname{sh} t \cos^2 2t$; б) $f(t) = t^2 \cos 4t$;

в) $f(t) = \frac{e^{-5t} \sin t}{t}$; г) $f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{при } 0 \leq t < \pi, \\ 0 & \text{при } t \geq \pi. \end{cases}$

► а) Оскільки $\operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ і $\cos^2 2t = \frac{1 + \cos 4t}{2}$, то

$$f(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \frac{1 + \cos 4t}{2} = \frac{1}{4} (e^t - e^{-t} + e^t \cos 4t - e^{-t} \cos 4t).$$

Використовуючи формули 2 та 14 таблиці, маємо

$$e^t \div \frac{1}{p-1}; \quad e^{-t} \div \frac{1}{p+1}; \quad e^t \cos 4t \div \frac{p-1}{(p-1)^2 + 16};$$

$$e^{-t} \cos 4t \div \frac{p+1}{(p+1)^2+16}.$$

Тоді, за властивістю лінійності,

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1} + \frac{p-1}{(p-1)^2+16} - \frac{p+1}{(p+1)^2+16} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p^2-1} + \frac{p^2-17}{((p-1)^2+16)((p+1)^2+16)} \right), \end{aligned}$$

тобто $F(p) = \frac{p^4+6p^2+153}{(p^2-1)(p^4+30p^2+289)}.$ ◀

► б) Оскільки з формули 4 таблиці $\cos 4t \div \frac{p}{p^2+16}$, то, за

теоремою диференціювання зображення, маємо

$$\begin{aligned} F(p) &= \left(\frac{p}{p^2+16} \right)' = \left(\frac{p^2+16-2p^2}{(p^2+16)^2} \right)' = \left(\frac{16-p^2}{(p^2+16)^2} \right)' = \\ &= \frac{-2p(p^2+16)^2 - 4p(p^2+16)(16-p^2)}{(p^2+16)^4} = \frac{2p(p^2-48)}{(p^2+16)^3}. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

► в) За формулою 13 таблиці маємо

$$e^{-5t} \sin t \div \frac{1}{(p+5)^2+1}. \quad \text{Тоді за теоремою інтегрування}$$

зображення знаходимо

$$F(p) = \int_p^{\infty} \frac{dz}{(z+5)^2 + 1} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_p^b \frac{dz}{(z+5)^2 + 1} = \lim_{b \rightarrow \infty} \arctg(z+5) \Big|_p^b =$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} (\arctg(b+5) - \arctg(p+5)) = \frac{\pi}{2} - \arctg(p+5). \quad \blacktriangleleft$$

► г) Використовуючи одиничну функцію $\eta(t-\pi)$, запишемо

$$f(t) = \sin t + \eta(t-\pi) \sin(t-\pi).$$

За формулою 3 таблиці і теоремою загалювання, отримаємо

$$F(p) = \frac{1}{p^2+1} + \frac{e^{-\pi p}}{p^2+1} = \frac{1+e^{-\pi p}}{p^2+1}. \quad \blacktriangleleft$$

43. Відновити оригінали за заданими зображеннями:

$$\text{а) } F(p) = \frac{p-2}{p^2+6p+13}; \quad \text{б) } F(p) = \frac{p^2+1}{p(p-2)(p^2+4)};$$

$$\text{в) } F(p) = \frac{1}{p^2(p-3)}.$$

$$\begin{aligned} \text{► а) } \frac{p-2}{p^2+6p+13} &= \frac{p-2}{(p+3)^2+2^2} = \frac{p+3}{(p+3)^2+2^2} - \frac{5}{(p+3)^2+2^2} = \\ &= \frac{p+3}{(p+3)^2+2^2} - \frac{5}{2} \frac{2}{(p+3)^2+2^2} \div e^{-3t} \cos 2t - \frac{5}{2} e^{-3t} \sin 2t. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

► б) Розкладемо дріб на елементарні дроби

$$\frac{p^2+1}{p(p-2)(p^2+4)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-2} + \frac{Cp+D}{p^2+4}.$$

Зведемо праву частину рівності до спільного знаменника

і прирівняємо чисельники

$$p^2 + 1 = A(p-2)(p^2+4) + Bp(p^2+4) + (Cp+D)p(p-2)$$

При $p=0$ одержимо $1 = -8A \Rightarrow A = -\frac{1}{8}$; при $p=2$

одержимо $5 = 16B \Rightarrow B = \frac{5}{16}$. Прирівняємо коефіцієнти,

наприклад, при p^3 і p в лівій і правій частині рівності, отримаємо

$$\begin{array}{l|l} p^3 & 0 = A + B + C, \\ p & 0 = 4A + 4B - 2D, \end{array}$$

звідки випливає $C = -\frac{3}{16}$, $D = \frac{3}{8}$. Тому

$$\frac{p^2+1}{p(p-2)(p^2+4)} = -\frac{1}{8} \frac{1}{p} + \frac{5}{16} \frac{1}{p-2} - \frac{3}{16} \frac{p}{p^2+4} + \frac{3}{8} \frac{1}{p^2+4}.$$

Оскільки $\frac{1}{p} \div 1$; $\frac{1}{p-2} \div e^{2t}$; $\frac{p}{p^2+4} \div \cos 2t$;

$\frac{1}{p^2+4} = \frac{1}{2} \frac{2}{p^2+4} \div \frac{1}{2} \sin 2t$, то, використовуючи властивість

лінійності, знаходимо оригінал

$$f(t) = -\frac{1}{8} + \frac{5}{16} e^{2t} - \frac{3}{16} \cos 2t + \frac{3}{16} \sin 2t. \blacktriangleleft$$

► в) Розкладемо дріб на суму елементарних дробів

$$\frac{1}{p^2(p-3)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p-3}$$

Після зведення до спільного знаменника одержимо

$$1 = Ap(p-3) + B(p-3) + Cp^2.$$

При $p=0$ маємо $1 = -3B \Rightarrow B = -\frac{1}{3}$; при $p=3$ одержимо

$$1 = 9C \Rightarrow C = \frac{1}{9}. \text{ Прирівнявши коефіцієнти при } p^2 \text{ в лівій}$$

і правій частинах рівності, отримаємо $0 = A + C \Rightarrow A = -\frac{1}{9}$.

$$\text{Отже, } \frac{1}{p^2(p-3)} = -\frac{1}{9} \frac{1}{p} - \frac{1}{3} \frac{1}{p^2} + \frac{1}{9} \frac{1}{p-3} \div -\frac{1}{9} - \frac{1}{3}t + \frac{1}{9}e^{3t}. \blacktriangleleft$$

Завдання для самостійного розв'язання

42. Знайти зображення функцій-оригіналів:

$$\text{а) } f(t) = \frac{1}{2}(cht \sin t + sht \cos t); \quad \text{б) } f(t) = \int_0^t ch2\tau d\tau;$$

$$\text{в) } f(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq t < \tau, \\ 0 & \text{при } t \geq \tau. \end{cases}$$

43. Відновити оригінали за заданими зображеннями:

$$\text{а) } F(p) = \frac{p+3}{p^2+4p+5}; \quad \text{б) } F(p) = \frac{p+1}{(p-1)(p+3)},$$

$$\text{в) } F(p) = \frac{p}{(p^2-4)(p^2+1)}.$$

7.3 Застосування операційного числення

Операційний метод особливо просто застосовується до розв'язування задач Коші для звичайних диференціальних рівнянь зі

сталими коефіцієнтами.

Для того, щоб знайти розв'язок $y(t)$ лінійного диференціального рівняння із сталими коефіцієнтами

$$L[y] = \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = f(t),$$

(де $f(t)$ – оригінал), який задовольняє початковим умовам

$$y(0) = x_0, y'(0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1},$$

потрібно застосувати до обидвох частин рівняння перетворення Лапласа і перейти до операторного рівняння

$$(p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) \cdot Y(p) - B(p) = F(p),$$

де $Y(p)$ – зображення шуканого розв'язку, $F(p)$ – зображення функції

$$f(t) \quad B(p) = y_0(p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \dots + a_{n-1}) + y_1(p^{n-2} + \dots + a_{n-2}) + \dots + y_{n-1}.$$

З цього рівняння знаходимо операторний розв'язок

$$Y(p) = \frac{F(p) + B(p)}{A(p)},$$

де $A(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n$. Далі знаходимо оригінал для $Y(p)$, який і буде розв'язком $y(t)$ диференціального рівняння. Якщо вважати $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ довільними сталими, то знайдений розв'язок буде загальним розв'язком диференціального рівняння.

Аналогічно розв'язуються системи лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами. Відмінність буде тільки в тому, що замість одного операторного рівняння ми одержимо систему таких рівнянь, які будуть лінійними відносно зображень шуканих функцій.

Відзначимо особливу роль *інтеграла Дюамеля*. Нехай потрібно розв'язати лінійне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$L[y] = f(t) \tag{62}$$

при нульових початкових умовах.

Якщо відомий розв'язок $y_1(t)$ рівняння

$$L[y] = 1 \quad (63)$$

з тією ж лівою частиною і правою 1, також з нульовими початковими умовами, то інтеграл Дюамеля дозволяє записати розв'язок рівняння (62) без особливих труднощів.

Справді, операторні рівняння, які відповідають (62) та (63), мають вигляд

$$A(p)Y(p) = F(p), \quad A(p)Y_1(p) = \frac{1}{p},$$

звідки $Y(p) = pY_1(p)F(p)$. Тоді, враховуючи, що $y_1(0) = 0$, за формулою Дюамеля (61), замінюючи $g(t)$ на $y_1(t)$, одержуємо потрібний розв'язок рівняння (62) з нульовими початковими умовами

$$y(t) = \int_0^t f(\tau) y_1'(t - \tau) d\tau. \quad (64)$$

Приклади розв'язання задач

44. Операційним методом знайти розв'язок задачі Коші

$$y'' - y = e^t \sin t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

► Застосуємо до обох частин диференціального рівняння перетворення Лапласа

$$y(t) \div Y(p), \quad y'(t) \div pY(p) - y(0) = pY(p),$$

$$y''(t) \div p^2 Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2 Y(p) - 1, \quad e^t \sin t \div \frac{1}{(p-1)^2 + 1}.$$

Тоді отримаємо рівняння $p^2 Y(p) - 1 - Y(p) = \frac{1}{(p-1)^2 + 1}$,

з якого легко знаходимо $Y(p)$. Маємо

$$Y(p)(p^2 - 1) = 1 + \frac{1}{(p-1)^2 + 1}, \quad Y(p) = \frac{(p-1)^2 + 2}{(p^2 - 1)((p-1)^2 + 1)}.$$

Тепер розкладаємо $Y(p)$ як правильний раціональний дріб на суму елементарних дробів

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{1}{p-1} - \frac{3}{5(p+1)} - \frac{1}{5} \cdot \frac{2p-1}{(p-1)^2 + 1} = \\ &= \frac{1}{p-1} - \frac{3}{5} \frac{1}{p+1} - \frac{2}{5} \cdot \frac{p-1}{(p-1)^2 + 1} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(p-1)^2 + 1}. \end{aligned}$$

З таблиці знаходимо $\frac{1}{p-1} \div e^t$, $\frac{1}{p+1} \div e^{-t}$,

$$\frac{p-1}{(p-1)^2 + 1} \div e^t \cos t, \quad \frac{1}{(p-1)^2 + 1} \div e^t \sin t.$$

Остаточно, отримаємо розв'язок

$$y(t) = e^t - \frac{3}{5}e^{-t} - \frac{2}{5}e^t \cos t - \frac{1}{5}e^t \sin t. \quad \blacktriangleleft$$

45. Використовуючи інтеграл Дюамеля, розв'язати задачу

$$y'' - 4y' = \frac{1}{1 + e^{-2t}}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

► Спочатку шукаємо розв'язок задачі

$$y'' - 4y' = 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Відповідне операторне рівняння матиме вигляд

$$(p^2 - 4p)Y_1(p) = \frac{1}{p},$$

$$\begin{aligned} \text{тому } Y_1(p) &= \frac{1}{p^2(p-4)} = -\frac{1}{16} \frac{1}{p} - \frac{1}{4} \frac{1}{p^2} + \frac{1}{16} \frac{1}{p-4} \div -\frac{1}{16} - \frac{1}{4}t + \\ &+ \frac{1}{16}e^{4t} = y_1(t). \end{aligned}$$

Тут ми скористались властивістю лінійності, а також формулами 1, 2 і 7 з таблиці оригіналів та зображень.

$$\text{Очевидно, } y_1'(t) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{4t}. \quad \text{За формулою} \quad (64)$$

знаходимо шуканий розв'язок

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t \frac{1}{1+e^{-2\tau}} \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{4(t-\tau)} \right) d\tau = -\frac{1}{4} \int_0^t \frac{e^{2\tau}}{e^{2\tau}+1} d\tau + \\ &+ \frac{1}{4}e^{4t} \int_0^t \frac{e^{-4\tau}}{1+e^{-2\tau}} d\tau = \frac{1}{8} \left((e^{4t}-1) \ln \frac{e^{2t}+1}{2} - e^{2t} + (1-2t)e^{4t} \right). \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

$$\mathbf{46.} \text{ Розв'язати систему } \begin{cases} x' = 7x + y, \\ y' = -x + 5y + 3e^{6x} \end{cases} \text{ при початкових}$$

умовах $x(0)=1, y(0)=-2$.

$$\blacktriangleright \quad \text{Нехай} \quad x(t) \doteq X(p), \quad y(t) \doteq Y(p), \quad \text{тоді}$$

$$x'(t) \doteq pX(p) - x(0) = pX(p) - 1,$$

$$y'(t) \doteq pY(p) - y(0) = pY(p) + 2.$$

Отримаємо операторну систему

$$\begin{cases} pX(p) - 1 = 7X(p) + Y(p), \\ pY(p) + 2 = -X(p) + 5Y(p) + 3\frac{1}{p-6}. \end{cases}$$

Розв'язуючи її, знаходимо

$$X(p) = \frac{p^2 - 13p + 45}{(p-6)^3} = \frac{1}{p-6} - \frac{1}{(p-6)^2} + \frac{3}{2} \frac{2!}{(p-6)^3},$$

$$Y(p) = \frac{-2p^2 + 28p - 99}{(p-6)^3} = -2\frac{1}{p-6} + 4\frac{1}{(p-6)^2} - \frac{3}{2} \frac{2!}{(p-6)^3}.$$

Переходячи до оригіналів, отримаємо розв'язок даної задачі

$$\text{Коші: } x(t) = \left(1 - t + \frac{3}{2}t^2\right)e^{6t}, \quad y(t) = \left(-2 + 4t - \frac{3}{2}t^2\right)e^{6t}. \quad \blacktriangleleft$$

Завдання для самостійного розв'язання

44. Операційним методом знайти розв'язок задачі Коші

$$y'' + y' = 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

45. Використовуючи інтеграл Дюамеля, розв'язати задачу

$$y'' + 4y = 8 \operatorname{tg} 2t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

46. Розв'язати систему $\begin{cases} x' = x + 2y - 9t, \\ y' = 2x + y + 4e^t \end{cases}$ при початкових

умовах $x(0) = 1, \quad y(0) = 2$.

Відповіді до завдань для самостійного розв'язування

1. а) $-3i$; б) $5i$; в) $3 - \frac{5}{2}i$.
2. Не існує.
3. Вертикальна пряма, яка перетинає дійсну вісь у точці -3 .
4. Ліва півплощина, обмежена вертикальною прямою $x = 2$.
5. Смуга $0 \leq x + y \leq 3$.
6. а) Промінь, який є бісектрисою другого квадранта;
 б) сектор, межами якого є бісектриса четвертого квадранта і додатна уявна піввісь.
7. а) Об'єднання невід'ємних дійсної та уявної півосей;
 б) уся комплексна площина без першого квадранта.
8. а) При $C \neq 0$ система гіпербол, асимптотами яких є прямі $y = (\pm\sqrt{2} - 1)x$; при $C = 0$ прямі $y = (\pm\sqrt{2} - 1)x$;
 б) при $C \neq 0$ система гіпербол, асимптотами яких є прямі $y = (1 \pm \sqrt{2})x$; при $C = 0$ прямі $y = (1 \pm \sqrt{2})x$.
9. а) Пряма $y = -2x + 2$;
 б) ліва піввітка параболи $y = -x^2$, включаючи її вершину.
10. а) Нижнє півколо $|z| = 5$, причому точка $z = 5$ включається,
 а $z = -5 - ni$;
 б) еліпс $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ без тієї частини, яка в четвертому квадранті.

11. а) Збіжний; б) розбіжний; в) розбіжний; г) збіжний.

12. a , $-\varphi$ при $-\pi < \varphi < \pi$, π при $\varphi = \pi$; $4e^5$, -2 ; $\operatorname{ch} 7$, 0 ;

$$\sqrt{\operatorname{ch}^2 6 - \sin^2 1}, -\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 1 \cdot \operatorname{th} 6).$$

$$13. \frac{1 + \cos 3x + (-1)^n (\cos 3nx + \cos 3(n+1)x)}{2 + 2 \cos 3x};$$

$$\frac{\sin 3x - (-1)^n (\sin 3nx + \sin 3(n+1)x)}{2 + 2 \cos 3x}.$$

$$14. \text{ а) } \operatorname{Re} w = \frac{x}{x^2 + y^2}, \operatorname{Im} w = -\frac{y}{x^2 + y^2};$$

$$\text{ б) } \operatorname{Re} w = \cos x \operatorname{ch} y, \operatorname{Im} w = -\sin x \operatorname{sh} y.$$

15. а) Сімейство парабол $u = c^2 - \frac{v^2}{4c^2}$ при $c \neq 0$ в площині w ;

при $c = 0$ дійсна ліва піввісь, яка двічі обходиться;

б) сімейство парабол $u = \frac{v^2}{4c^2} - c^2$ при $c \neq 0$ в площині w ;

при $c = 0$ дійсна права піввісь, яка двічі обходиться;

в) коло $|w| = R^2$, яке двічі обходиться;

г) промінь $\arg w = 2\alpha$;

д) невід'ємна уявна піввісь.

16. Перші три функції до визначити в точці $z = 0$ до неперервності не можна, а функцію $\frac{|z| \operatorname{Im} z}{z}$ можна значенням 0.

17. Неперервна всюди крім точок $\pm 2i$.

18. а) Аналітична при всіх $z \neq 0$;
 б) точок моногенності і, тим більше, аналітичності, немає;
 в) аналітична в усій площині;
 г) моногенна тільки в точці $z = 0$;
 д) аналітична в усій площині.
19. $a = -1$, $c = -b$.
20. а) Існує, $f(z) = 4 - (3 + i)z - 5iz^2$; б) не існує;
 в) не існує; г) існує, $f(z) = \sin z - 3z$.
21. $\alpha_1 = \frac{3\pi}{4}$, $A_1 = 6\sqrt{2}$; $\alpha_2 = \pi$, $A_2 = 14$;
 $\alpha_3 = -\frac{\pi}{2}$, $A_3 = 14$; $\alpha_4 = \frac{3\pi}{4}$, $A_4 = 4$.
22. а) У крузі $\left\{z : |z| < \frac{1}{4}\right\}$ – стиск;
 зовні круга $\left\{z : |z| > \frac{1}{4}\right\}$ – розтяг;
 б) у півплощині $\operatorname{Im} z > \frac{\ln 3}{3}$ – стиск,
 а у півплощині $\operatorname{Im} z < \frac{\ln 3}{3}$ – розтяг.
23. $-\frac{2}{15} - \frac{5}{6}i$.
24. 1) $\frac{1}{2} + i$; 2) $\frac{\pi i}{2}$; 3) πR^2 .
25. $2\pi R^2$ при $k = 1$; 0 при $k \neq 1$.

26. 0, якщо точки 1 та 2 зовні Γ ; $-2\pi i$, якщо точка 1 всередині Γ , а точка 2 – зовні; $2\pi i$, якщо точка 2 всередині Γ , а точка 1 – зовні; при $k=1$; 0, якщо обидві точки 1 та 2 всередині Γ .

27. а) $\frac{\pi}{3}(\cos 6 \cdot \operatorname{ch} 2 + i \cdot \sin 6 \cdot \operatorname{sh} 2)$;

б) $-\frac{\pi}{3} \cos 3 \cdot \operatorname{sh} 4 + i \frac{\pi}{3} \sin 3 \cdot \operatorname{ch} 4$;

в) $\frac{8\pi}{3}(\sin 2 - i \cos 2)$.

28. а) $R=1, \{z: |z| < 1\}$; б) $R=\frac{e}{4}, \{z: |z+3| < \frac{e}{4}\}$;

в) $R=\infty$, ряд збігається в усій комплексній площині;

г) $R=\sqrt{\frac{29}{5}}, \{z: |z+5-4i| < \sqrt{\frac{29}{5}}\}$.

29. а) $\{z: 0 < |z| < +\infty\}$; б) $\{z: \frac{1}{9} < |z| < 9\}$;

в) розбігається в усіх точках комплексної площини.

30. а) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, R=\infty$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n-1}}{(2n)!} z^{2n}, R=\infty$;

в) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} z^{2n}, R=\infty$;

$$\text{г)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2+i)^n + (2-i)^n}{5^n} z^n, R = \sqrt{5}.$$

$$31. \text{ а)} \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(z-2)^n}{n \cdot 2^n}, R = 2;$$

$$\text{б)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(2(z+2)^{2n} + 4(z+2)^{2n+1} \right), R = 1.$$

$$32. f(z) = - \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{3^{n+2}} - \text{в околі точки } z = -2;$$

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z-1)^n}{3^{n+2}} - \text{в околі точки } z = 1;$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1 - (-2)^{-n-1}}{3} z^n - \text{в околі точки } z = \infty;$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{z^n}{3} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} - \text{в кільці } \{z : 1 < |z| < 2\}.$$

33. $z = 0$ є нулем 10-го порядку.

34. а) $z_1 = 5 + i$ та $z_2 = 5 - i$ – нулі першого порядку;

б) $z_k = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$ – нулі другого порядку; $z_0 = 0$ – нуль третього порядку.

35. а) $z_1 = 0$, $z_2 = 3i$ та $z_3 = -3i$ – полюси першого порядку;

б) особливих точок немає;

в) $z_1 = 5 + i$ та $z_2 = 5 - i$ – полюси першого порядку;

г) $z_k = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$ – полюси другого порядку; $z_0 = 0$ – полюс третього порядку;

д) $z = -2$ – істотно особлива точка; в усіх інших точках функція аналітична;

$$36. \text{ а) } \operatorname{res}_{z=0} \left(\frac{5}{z^3 + 9z} \right) = \frac{5}{9}, \operatorname{res}_{z=3i} \left(\frac{5}{z^3 + 9z} \right) = -\frac{5}{18}, \operatorname{res}_{z=-3i} \left(\frac{5}{z^3 + 9z} \right) = -\frac{5}{18};$$

$$\text{б) } \operatorname{res}_{z=5} \left(\frac{e^{z^2}}{z^2 - 25} \right) = \frac{e^{25}}{10}, \operatorname{res}_{z=-5} \left(\frac{e^{z^2}}{z^2 - 25} \right) = -\frac{e^{25}}{10};$$

$$\text{в) } \operatorname{res}_{z=2\pi k} \left(\frac{z}{1 - \cos z} \right) = \frac{1}{2} \text{ при всіх } k \in \mathbb{Z};$$

$$\text{г) } \operatorname{res}_{z=-2} \left(\sin \frac{1}{z+2} \right) = 1;$$

$$\text{д) } \operatorname{res}_{z=-2} \left((z+2)^3 \sin \frac{1}{z+2} \right) = 0.$$

$$37. \text{ а) } \frac{5\pi}{9}; \quad \text{б) } 2\pi i; \quad \text{в) } 0. \quad 38. \frac{2\pi}{\sqrt{5}} - 6\pi i.$$

$$39. \text{ а) } \frac{5\pi}{8}; \quad \text{б) } -\left(4\cos 20 + \frac{3}{4}\sin 20 \right) e^{5\pi}.$$

40. $f_1(t)$ є оригіналом, а $f_2(t), f_3(t)$ – ні.

$$41. \frac{1}{p^2}. \quad 42. \text{ а) } \frac{p^2}{p^4 + 4}; \quad \text{б) } \frac{1}{p^2 - 4}; \quad \text{в) } \frac{1}{p}(1 - e^{-p\tau}).$$

$$43. \text{ а) } e^{-2t} \cos t + e^{-2t} \sin t; \quad \text{б) } \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-3t}; \quad \text{в) } \frac{1}{5}(ch 2t - \cos t).$$

$$44. y(t) = t. \quad 45. y(t) = 2\sin 2t + \cos 2t \cdot \ln \frac{1 - \sin 2t}{1 + \sin 2t}.$$

$$46. x(t) = 5 - 3t - 2e^t + 2e^{3t} - 4e^{-t}, \quad y(t) = -4 + 6t + 2e^{3t} + 4e^{-t}.$$

12 Рівняння математичної фізики

§ 1. Основні поняття

1.1 Основні означення. Класифікація диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку з двома незалежними змінними

Диференціальним рівнянням з частинними похідними називають рівняння, яке пов'язує незалежні змінні, невідому функцію цих змінних та частинні похідні від цієї функції.

Найвищий порядок похідної, що входить у диференціальне рівняння, називають *порядком диференціального рівняння з частинними похідними*.

Загальний вигляд диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку з двома незалежними змінними такий

$$F\left(x, y, u(x, y), \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0, (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2,$$

де F – відома функція своїх аргументів.

Диференціальне рівняння з частинними похідними називають *лінійним*, якщо воно лінійне відносно невідомої функції та всіх її частинних похідних.

Лінійне диференціальне рівняння з частинними похідними другого порядку з двома незалежними змінними має такий загальний вигляд

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Gu = F, \quad (1)$$

де $A = A(x, y)$, $B = B(x, y)$, ..., $F = F(x, y)$ – задані функції незалежних змінних x і y .

Якщо в рівнянні (1) $F \equiv 0$, то таке диференціальне рівняння з частинними похідними називають *лінійним однорідним*. Якщо коефіцієнти

$A, B, \dots, G$ сталі, то рівняння (1) називають *лінійним диференціальним рівнянням з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами*.

Диференціальне рівняння з частинними похідними називають *квазілінійним*, якщо воно лінійне відносно похідних найвищого порядку.

Згідно з означенням загальний вигляд квазілінійного диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку з двома незалежними змінними такий

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0, \quad (2)$$

де f – відома функція.

Залежно від знака виразу $\Delta = B^2 - AC$ рівняння (2) може належати до трьох різних типів (класів).

Якщо в деякій області D вираз Δ додатний, то рівняння (2) є *рівнянням гіперболічного типу* в області D .

Якщо $\Delta=0$ в області D , то (2) є *рівнянням параболічного типу* в області D .

Якщо ж $\Delta < 0$ в усіх точках області D , то рівняння (2) є *рівнянням еліптичного типу* в D .

Розв'язком диференціального рівняння з частинними похідними 2-го порядку називають усяку двічі неперервну і диференційовну в D функцію, яка при підставленні в диференціальне рівняння замість шуканої функції перетворює його на тотожність.

Приклади розв'язання задач

1. Визначити тип диференціального рівняння

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

► Для визначення типу рівняння обчислимо Δ . У цьому

рівнянні $A = x^2, B = 0, C = -y^2$, тому $\Delta = B^2 - AC = x^2 y^2 > 0$ при $x \neq 0, y \neq 0$. Отже, рівняння гіперболічного типу. Якщо ж $x = 0$ або $y = 0$, то рівняння параболічного типу. ◀

2. Визначити тип рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

► При $y > 0$ $\Delta = y > 0$ – рівняння належить до гіперболічного типу.

Якщо $y = 0$, то $\Delta = 0$ – рівняння параболічного типу.

Якщо $y < 0$, то $\Delta = y < 0$ – рівняння еліптичного типу. ◀

3. Знайти функцію $u = u(x, y)$, яка задовольняє диференціальне рівняння $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$.

► Як видно з рівняння, шукана функція не залежить від змінної x , але може бути довільною функцією залежною від y , тобто $u(x, y) = C(y)$. Це і є розв'язком даного диференціального рівняння. ◀

4. Розв'язати диференціальне рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, де

$u = u(x, y)$.

► Подано дане рівняння у вигляді $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0$. Такий

запис рівняння дає змогу встановити, що $\frac{\partial u}{\partial y}$ не залежить від

y , тобто $\frac{\partial u}{\partial y} = C_1$, де C_1 – довільна величина, яка не залежить

від y . Проте C_1 може залежати від x , тому $\frac{\partial u}{\partial y} = C_1(x)$, де

$C_1(x)$ – довільна функція від x .

Інтегруючи цю рівність по y , знайдемо $u = C_1(x)y + C_2$, де C_2 – величина, яка не залежить від y . З огляду на залежність u від x та y величина C_1 також може бути функцією від x . Таким чином, розв'язок даного рівняння $u = C_1(x)y + C_2(x)$ містить дві довільні функції. ◀

5. Розв'язати диференціальне рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$.

► Покладемо $\frac{\partial u}{\partial y} = v$, тоді рівняння набуде вигляду

$\frac{\partial v}{\partial x} = 0$. Його загальним розв'язком є довільна функція $C(y)$.

Повертаючись до функції u , знову одержимо рівняння першого порядку $\frac{\partial u}{\partial y} = C(y)$. Інтегруючи, знаходимо

$u(x, y) = \int C(y)dy + C_1(x)$, де $C_1(x)$ – довільна функція від x .

Оскільки $C(y)$ – довільна функція від y , то інтеграл від неї є також довільною функцією від y ; позначимо $\int C(y)dy = C_2(y)$ і одержимо остаточний розв'язок даного рівняння $u(x, y) = C_1(x) + C_2(y)$. ◀

Завдання для самостійного розв'язання

1. Визначити тип диференціального рівняння

$$\text{а) } x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad \text{б) } \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$$

$$\text{в) } x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$$

$$\text{г) } 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4 \frac{\partial u}{\partial x} + 4 \frac{\partial u}{\partial y} + u = 0.$$

2. Розв'язати диференціальне рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x$, де

$$u = u(x, y).$$

3. Знайти загальний розв'язок $u(x, y)$ рівняння $\frac{\partial u}{\partial y} = 1$.

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2$.

1.2 Основні рівняння математичної фізики.

Постановка задач математичної фізики

Предметом розділу математики, який називається *рівняннями математичної фізики*, є теорія математичного моделювання за допомогою диференціальних рівнянь з частинними похідними і методи дослідження таких моделей.

При дослідженні багатьох абсолютно різних за своєю природою явищ і процесів потрібно порівняно небагато видів диференціальних рівнянь із частинними похідними. Ці рівняння часто називають *основними*

рівняннями математичної фізики.

До них (для випадку функцій двох незалежних змінних) належать наступні диференціальні рівняння з частинними похідними другого порядку:

– хвильове рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3)$$

де a – сталий коефіцієнт; до дослідження цього рівняння приходять при вивченні поперечних коливань струни, поздовжних коливань стержня, електричних коливань у провіднику, крутильних коливань вала, коливань газу і т.п.;

– рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (4)$$

де a – стала величина; до дослідження цього рівняння приводить вивчення процесів поширення тепла, фільтрації рідини і газу в пористому середовищі (наприклад, фільтрації нафти і газу в підземних пісковиках), деякі питання теорії ймовірностей і т.д.;

– рівняння Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (5)$$

і Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (6)$$

де $f(x, y)$ – задана функція; до розв'язання цих рівнянь приходять при вивченні стаціонарних (незалежних від часу) процесів поширення тепла, явищ стаціонарної дифузії, фільтрації тощо; потенціали поля тяжіння й стаціонарного електричного поля, в яких відсутні відповідно маси й електричні заряди, задовольняють рівняння Лапласа.

Рівняння (3), (4), (6) є найпростішими рівняннями відповідно гіперболічного, параболічного і еліптичного типів. В них шукана функція u залежить від двох змінних. Розглядають також відповідні рівняння і для функцій з більшим числом змінних. Так, хвильове рівняння з трьома незалежними змінними має вигляд

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (3a)$$

рівняння теплопровідності з трьома незалежними змінними має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (4a)$$

Рівняння Пуассона і Лапласа відповідно з трьома незалежними змінними будуть наступними

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z), \quad (5a)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (6a)$$

Рівняння Лапласа (6) в полярних координатах r, φ буде таким

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (7)$$

Рівняння Лапласа (6a) в циліндричних r, φ, z і сферичних ρ, φ, θ координатах відповідно матиме вигляд:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (9)$$

При дослідженні фізичних задач за допомогою диференціальних рівнянь з частинними похідними вивчається не сам реальний фізичний процес, а деяка його *математична модель*, від якої вимагається, щоб вона

зберігала основні риси процесу, що розглядається, й одночасно була настільки простою, щоб піддавалась вивченню математичними методами.

При побудові математичної моделі можна виділити такі основні етапи:

1. Вибір основної величини (або кількох величин), що характеризує явище (процес). Як правило, ця величина (позначимо її u) є функцією просторових координат (у випадку тривимірного простору координат x , y , z) і часу t .

2. Виведення диференціального рівняння з частинними похідними відносно функції u на основі теоретичних передумов, за допомогою яких визначається модель, і законів збереження.

3. Виведення додаткових умов для функції u , які характеризують явище (процес), що моделюється, вони впливають із його фізичного змісту і дозволяють з нескінченної множини розв'язків диференціального рівняння з частинними похідними вибрати єдиний – саме той, що моделює дане явище (процес). Такими додатковими співвідношеннями найчастіше є *крайові (межові) умови*, котрі має задовольняти шукана функція u на межі області, в якій вивчається явище (процес), і *початкові умови*, що визначають функцію u в момент часу, з якого починається дослідження явища (процесу).

Сукупність диференціального рівняння з частинними похідними й додаткових умов (крайових і початкових) становить математичне формулювання фізичної задачі й називається *задачею математичної фізики*.

Задача математичної фізики, яка описує реальний процес (явище) повинна задовольняти такі вимоги: розв'язок задачі повинен існувати, бути єдиним і стійким. У такому випадку кажуть, що задачу поставлено коректно (правильно). Стійкість розв'язку означає, що малим змінам в умові задачі повинні відповідати малі зміни у розв'язку. Ця вимога необхідна з такої причини. В даних будь-якої конкретної задачі, добутих

експериментально, завжди міститься деяка похибка, й необхідно, щоб мала похибка в даних приводила до малої похибки в розв'язку.

Питання коректності постановки задач математичної фізики належить до так званої *якісної теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними*.

Розрізняють три види крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними.

1. *Задачі Коші для рівнянь гіперболічного та параболічного типів* – задаються початкові умови, крайові умови відсутні. Область визначення рівняння та його розв'язку – весь простір.

Так, початкові умови для хвильового рівняння (3а) мають вигляд

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y), \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2; \quad (10)$$

для рівняння теплопровідності (4а)

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (11)$$

де $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ – задані функції.

2. *Крайова задача для рівнянь еліптичного типу* – задаються крайові умови на межі S області визначення V невідомої функції, початкові умови відсутні.

Так, для стаціонарного рівняння теплопровідності можна сформулювати такі крайові умови:

а) на межі S підтримується заданий розподіл температури u_0

$$u|_S = u_0. \quad (12)$$

Задача такого типу називається задачею Діріхле, або першою крайовою задачею.

б) на S підтримується заданий потік тепла

$$-k \frac{\partial u}{\partial n}|_S = u_1, \quad (13)$$

де $\frac{\partial u}{\partial n}$ – похідна по нормалі до поверхні S . Задача такого типу називається

задачею Неймана, або другою крайовою задачею.

в) на S відбувається колективний теплообмін за законом Ньютона з навколишнім середовищем, температура якого дорівнює u_0 ,

$$\left[k \frac{\partial u}{\partial n} + h(u - u_0) \right]_S = 0. \quad (14)$$

Задача такого типу називається третьою крайовою задачею.

3. *Мішана задача для рівнянь гіперболічного та параболічного типів* – задаються початкові та крайові умови.

Крайові умови (12)–(14) називаються *однорідними*, якщо в них u_0, u_1 тотожно рівні нулю і *неоднорідними* у протилежному випадку.

Приклади розв'язання задач

6. Струна довжиною l натягнута з силою $\vec{T}_0$ і знаходиться в прямолінійному положенні рівноваги. У момент $t=0$ точкам струни надаються початкові відхилення і швидкості. Поставити задачу про визначення малих поперечних коливань точок струни при $t>0$.

► Нехай вісь Ox збігається зі струною в положенні рівноваги. Під струною розуміємо тонку нитку, яка згинається без опору, тобто, якщо подумки розрізати її в точці x , то сила дії однієї ділянки на іншу, тобто сила натягу $\vec{T}(x, t)$ напрямлена вздовж дотичної до струни у момент часу t в точці x (рис. 1).

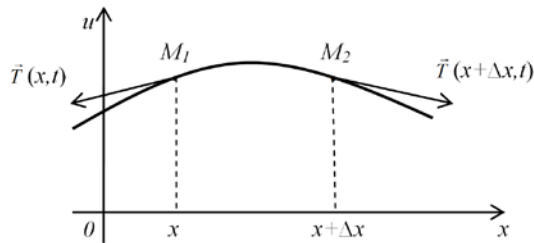


Рисунок 1

Оскільки коливання поперечні й малі, то кожна точка струни переміщується лише у напрямку, перпендикулярному

до осі Ox . Тому коливання в кожний момент часу t повністю описуються величиною відхилення кожної точки x від її положення рівноваги. Позначимо це відхилення через $u(x, t)$. Згідно з принципом Даламбера всі сили, що діють на виділену ділянку струни, включаючи й сили інерції, повинні врівноважуватись. Розглянемо малу ділянку струни M_1M_2 і обчислимо суму всіх цих сил (натяг на кінцях ділянки, зовнішні сили та сили інерції). Величина сили T натягу за законом Гука пропорційна відносному видовженню ділянки. Візьмемо довільну ділянку $(x, x+\Delta x)$ струни, яка при її коливанні деформується в ділянку M_1M_2 . Довжина дуги цієї ділянки в момент часу t дорівнює

$$\int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + (\partial u(\xi, t) / \partial \xi)^2} d\xi \approx \Delta x,$$

бо коливання малі й тому можна знехтувати величиною $(\partial u / \partial \xi)^2$. Це означає, що видовження ділянок струни в процесі коливання не відбувається і, отже, за законом Гука величина натягу T в кожній точці струни не змінюється з

часом.

Зауважимо, що величину натягу T можна вважати незалежною і від x , тобто $T \approx T_0$. Справді, оскільки ми вивчаємо лише поперечні коливання, то сили інерції і зовнішні сили напрямлені перпендикулярно до осі Ox , тому сума проекцій всіх сил на вісь Ox дорівнює

$$T(x + \Delta x, t) \cos \alpha(x + \Delta x, t) - T(x, t) \cos \alpha(x, t) = 0,$$

де $\alpha(x, t)$ – кут між дотичною в точці з абсцисою x до профілю струни в момент часу t і додатним напрямом осі Ox . Оскільки коливання малі, то

$$\cos \alpha(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha(x, t)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)^2}} \approx 1$$

і тому $T(x, t) \approx T(x + \Delta x, t)$. Врахувавши довільність x і Δx , одержимо, що величина натягу T не залежить від x . Отже, можна вважати, що $T \approx T_0$ для всіх значень x і t .

Сума проекцій на вісь Ou сил натягу, що діють у точках M_1 і M_2 , дорівнює $Y = T_0 (\sin \alpha(x + \Delta x, t) - \sin \alpha(x, t))$, але внаслідок наших припущень

$$\sin \alpha(x, t) = \frac{\operatorname{tg} \alpha(x, t)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha(x, t)}} = \frac{\partial u(x, t) / \partial t}{\sqrt{1 + (\partial u(x, t) / \partial x)^2}} \approx \frac{\partial u(x, t)}{\partial x},$$

і тому $Y = T_0 (\partial u(x + \Delta x, t) / \partial x - \partial u(x, t) / \partial x)$. Застосувавши до різниці в дужках теорему Лагранжа про середнє

$$\frac{\partial u(x+\Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u(\xi_1, t)}{\partial x^2} \Delta x, \quad \xi_1 \in (x, x+\Delta x), \quad \text{остаточно}$$

$$\text{одержимо } Y \approx T_0 \frac{\partial^2 u(\xi_1, t)}{\partial x^2} \Delta x.$$

Позначимо через $p(x, t)$ питому величину (густину) зовнішньої сили, що діє у момент часу t на точку x струни паралельно осі Ou , віднесену до одиниці довжини. Тоді проекція на вісь Ou зовнішньої сили, яка діє на ділянку M_1M_2 струни, дорівнюватиме $F = p(\xi_2, t)\Delta x$, $\xi_2 \in (x, x+\Delta x)$.

Нехай $\rho(x)$ питома маса (лінійна густина маси) струни в точці x . Тоді проекція сили інерції ділянки M_1M_2 струни на вісь Ou дорівнює $I = -\rho(\xi_3) \frac{\partial^2 u(\xi_3, t)}{\partial t^2} \Delta x$, $\xi_3 \in (x, x+\Delta x)$.

Згідно з принципом Даламбера $Y+F+I=0$, тобто

$$\left(T_0 \frac{\partial^2 u(\xi_1, t)}{\partial x^2} + p(\xi_2, t) - \rho(\xi_3) \frac{\partial^2 u(\xi_3, t)}{\partial t^2} \right) \Delta x = 0.$$

Якщо поділити цю рівність на Δx і перейти до границі при $\Delta x \rightarrow 0$, то одержимо

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + p(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0. \quad (15)$$

Це і є шукане *рівняння коливань струни*.

Якщо $\rho = \text{const}$, тобто струна однорідна, то рівняння (15) записується у вигляді

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < l, t > 0, \quad (16)$$

$$\text{де } a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}, \quad f(x, t) = \frac{p(x, t)}{\rho}.$$

Якщо зовнішня сила відсутня, тобто $p \equiv 0$, то дістаємо рівняння вільних коливань струни $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$.

Якщо в момент часу $t = 0$ відхилення в кожній точці $x \in [0, l]$ дорівнює $\varphi(x)$, а швидкість $\psi(x)$, то *початкові умови* записуються у вигляді

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (17)$$

Далі, оскільки струна обмежена, то треба описати її поведінку на кінцях, тобто записати *крайові умови*. Для *закріпленої на кінцях* струни повинно бути

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (18)$$

Якщо *кінці струни рухаються за певним законом*, то

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t), \quad t \geq 0. \quad (19)$$

У випадку *вільних кінців* сила натягу на них, а отже, і її проекція $T_0 \partial u(x, t) / \partial x$ на вісь Ox дорівнює нулю, тобто

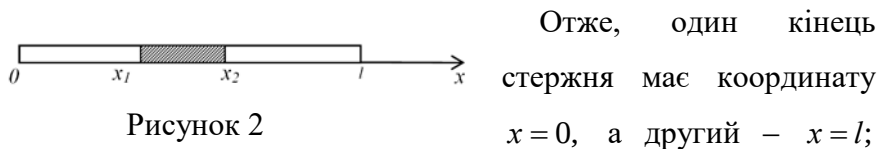
$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0, \quad t \geq 0. \quad (20)$$

Крайові умови можуть бути комбінованими, наприклад, лівий кінець вільний, а правий закріплений, тобто

$$\partial u(0,t)/\partial x = 0, \quad u(l,t) = 0 \text{ і т.п.} \blacktriangleleft$$

7. Лівий кінець тонкого однорідного стержня довжиною l теплоізований, через бічну поверхню відбувається теплообмін з навколишнім середовищем, температура якого дорівнює нулю, а температура на правому кінці є заданою функцією часу $q(t), t \geq 0$. Скласти математичну модель задачі про поширення тепла в стержні, якщо початкова температура нульова.

► Сумістимо початок координат з лівим кінцем стержня, а вісь Ox спрямуємо вздовж його осі (рис. 2).



Отже, один кінець стержня має координату $x = 0$, а другий – $x = l$;

$u(x,t)$ – температура в перерізі стержня з абсцисою x в момент часу t .

Згідно з експериментальним законом Фур'є, швидкість поширення тепла (кількість тепла, що проходить через переріз x за одиницю часу) визначається за формулою

$$q = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = -kA \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (21)$$

де ΔQ – кількість тепла, що проходить через переріз площі A за час Δt , k – коефіцієнт теплопровідності.

Кількість тепла, що витрачається на зміну температури ділянки стержня довжини $\Delta x = x_2 - x_1$ за час Δt , визначається

різницею

$$\begin{aligned}\Delta Q_1 - \Delta Q_2 &= \left(-k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_1} \cdot A \Delta t \right) - \left(-k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_2} \cdot A \Delta t \right) \approx \\ &\approx k \frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial x^2} \Delta x A \Delta t, \quad \xi \in (x_1, x_2).\end{aligned}\quad (22)$$

У (22) застосували теорему Лагранжа до різниці

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_2} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_1}.$$

Оскільки за умовою задачі через бічну поверхню стержня відбувається теплообмін з навколишнім середовищем, то слід врахувати тепло ΔQ_3 , яке надходить через бічну поверхню. За законом Ньютона тепловий потік за час Δt пропорційний різниці температур тіла і середовища, тобто

$$\Delta Q_3 = h \Delta S \Delta t (u(x, t) - u_0) \Big|_S, \quad t \geq 0, \quad (23)$$

де $\Delta S = 2\pi r \Delta x$ – площа поверхні, через яку відбувається теплообмін на вибраній ділянці довжини Δx ; r – радіус перерізу стержня, $u_0 = 0$ – температура оточуючого середовища, h – коефіцієнт пропорційності.

Тепло, що надійшло до тіла за час Δt , витрачається на підвищення температури елемента стержня Δx на величину Δu , тобто $\Delta Q_1 - \Delta Q_2 + \Delta Q_3 = c \Delta m \Delta u$, або

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 + \Delta Q_3 \approx c \rho A \Delta x \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t, \quad (24)$$

де c – теплоємність матеріалу стержня, ρ – його густина,
 $\Delta m = \rho A \Delta x$ – маса виділеного елемента стержня.

Скориставшись рівнянням теплового балансу (24) з
 урахуванням (22)-(23) одержимо

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} A \Delta x \Delta t + h 2 \pi r \Delta x u \Delta t = c \rho A \Delta x \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t, \quad 0 < x < l, \quad t > 0.$$

$$\text{Ввівши позначення} \quad a^2 = \frac{k}{c \rho}, \quad b = \frac{h 2 \pi r}{A c \rho} = \frac{h 2 \pi r}{\pi r^2 c \rho} = \frac{2h}{r c \rho},$$

остаточно одержимо

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + b u(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0. \quad (25)$$

Лівий кінець стержня теплоізований, а тому потік
 тепла через нього дорівнює нулю

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0, \quad t \geq 0. \quad (26)$$

На правому кінці

$$u(l, t) = q(t), \quad t \geq 0. \quad (27)$$

Початкова температура згідно з умовою задачі нульова, тобто

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (28)$$

Отже, математична модель задачі виражається
 рівностями (25)-(28). ◀

8. Сформулювати задачу про малі поздовжні коливання
 важкого пружного однорідного стержня довжиною l .
 Стержень підвішено вертикально, верхній його кінець
 закріплено жорстко, а до нижнього прикладено розтягуючу

силу P_0 , яку в момент часу $t = 0$ знято. Опором середовища знехтувати.

► Вважаємо, що однорідний стержень виготовлено з ідеального пружного матеріалу, в якому відсутні будь-які залишкові деформації.

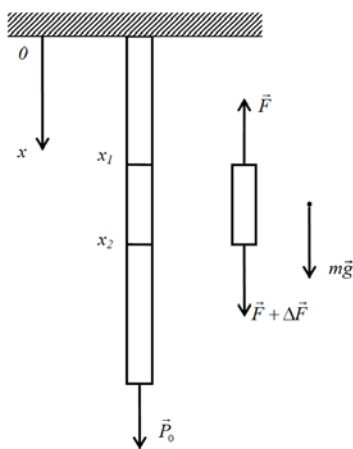


Рисунок 3

Вісь Ox напрямимо вздовж осі стержня вниз від верхнього кінця.

Виділимо відрізок $\Delta x = x_2 - x_1$ (рис. 3). Прикладемо до стержня деяку розтягуючу силу P_0 . Під дією цієї сили поперечні перерізи стержня зміщуються. Оскільки в момент часу $t = 0$ силу знято, то в стержні виникають поздовжні коливання, в результаті яких

кожний переріз x в момент часу t зміститься на деяку величину $u(x, t)$. Початковий відрізок Δx стане таким

$$x_2 + u(x_2, t) - x_1 - u(x_1, t),$$

тобто він видовжиться на величину

$$u(x_2, t) - u(x_1, t) = \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial x} \Delta x, \quad \xi \in (x_1, x_2).$$

При одержанні цієї рівності скористались теоремою Лагранжа про середнє.

З теорії пружності відомо, що при малих зміщеннях з

великою точністю справджується закон Гука. Згідно з цим законом пружна сила F , яка виникає при розтягненні стержня, пропорційна деформації $\varepsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \partial u(\xi, t)}{\Delta \partial x}$ та площі перерізу A стержня, тобто $F = kA\varepsilon$. Коефіцієнт пропорційності k називають модулем Юнга і позначають через E . Отже,

$$F(x, t) = AE \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}.$$

Скористаємось другим законом Ньютона: сума всіх діючих сил на рухомий об'єкт рівна добутку маси на його прискорення відносно інерційної системи відліку. Згідно з цим законом проекція сил на вісь Ox дорівнює

$$F + \Delta F - F + mg = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Оскільки маса $m = \rho \Delta x$, де ρ – лінійна густина стержня, то будемо мати $\Delta F + \rho \Delta x g = \rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, або

$$\Delta(AE \frac{\partial u}{\partial x}) = -\rho \Delta x g + \rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Поділимо обидві частини рівності на Δx і здійснимо граничний перехід при $\Delta x \rightarrow 0$

$$\frac{\partial}{\partial x}(AE \frac{\partial u}{\partial x}) = -\rho g + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Скоротивши на A і ввівши позначення $a^2 = \frac{E}{\rho}$, остаточно

одержимо

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + g, \quad 0 < x < l, \quad t > 0. \quad (29)$$

В (29) a – швидкість поширення пружних хвиль (хвиль розтягу-стиску). Для сталі $a=5100\text{м/с}$, а для алюмінію $a=5080\text{ м/с}$.

Верхній кінець стержня защемлено жорстко, а нижній – вільний, тому крайові умови матимуть вигляд

$$u(0,t) = 0, \quad t > 0; \quad (30)$$

$$\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0, \quad t > 0. \quad (31)$$

Початкові умови повинні враховувати розтяг $\varphi(x)$ стержня силою P_0 , яку в момент часу $t=0$ знято, а також початкову швидкість руху поперечних перерізів стержня, що рівна нулю.

Функцію $\varphi(x)$, яка визначає розтяг стержня, знайдемо з розв'язку задачі статки

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} = -\frac{g}{a^2}, \quad u(0) = 0, \quad AE \frac{du(x)}{dx} \Big|_{x=l} = P_0.$$

Отже,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{du}{dx} \right) = \frac{g\rho}{E}, \quad \frac{du}{dx} = -\frac{g\rho}{E}x + C_1, \quad u = -\frac{g\rho}{E} \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2.$$

З умови $u(0) = 0$ знаходимо $C_2 = 0$, а з умови $\frac{du(x)}{dx} \Big|_{x=l} = \frac{P_0}{AE}$

будемо мати $-\frac{g\rho}{E}l + C_1 = \frac{P_0}{AE}$, звідки

$$C_1 = \frac{P_0}{AE} + \frac{g\rho l}{E}; \quad \varphi(x) = -\frac{g\rho}{E} \frac{x^2}{2} + \left(\frac{P_0}{AE} + \frac{g\rho l}{E} \right) x.$$

Початкові умови набудуть вигляду

$$u(x, 0) = -\frac{g\rho}{E} \frac{x^2}{2} + \left(\frac{P_0}{AE} + \frac{g\rho l}{E} \right) x, \quad 0 < x < l, \quad (32)$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0. \quad (33)$$

Математична модель задачі про малі поздовжні коливання стержня така: знайти розв'язок рівняння (29), який задовольняє крайові умови (30), (31) і початкові умови (32), (33). ◀

Завдання для самостійного розв'язання

5. Сформулювати задачу про малі коливання струни в середовищі з опором, пропорційним швидкості, припускаючи, що кінці струни закріплені.

6. Пружний прямолінійний стержень виведено зі стану спокою тим, що його поперечним перерізам у момент часу $t = 0$ надано малі поздовжні зміщення і швидкості. Припускаючи, що поперечні перерізи стержня весь час залишаються плоскими, поставити крайову задачу для визначення зміщень поперечних перерізів при $t > 0$. Розглянути випадок, коли кінці стержня вільні.

7. Поставити задачу про малі поздовжні коливання

однорідного пружного стержня довжиною l , один кінець якого закріплено жорстко, а другий – пружно, тобто зазнає опору, пропорційного швидкості. Опором середовища знехтувати.

8. Скласти математичну модель задачі про поперечні коливання прямокутної мембрани $\{0 < x < p, 0 < y < q\}$, які викликані початковим відхиленням $\varphi(x, y) = Axy$, $A = \text{const}$, за умови, що частина межі $\{x = p, 0 \leq y \leq q\}$ і $\{y = q, 0 \leq x \leq p\}$ вільна, а інша частина межі закріплена жорстко. Вважаємо, що мембрана однорідна, початкові швидкості її точок дорівнюють нулю, а оточуюче середовище не чинить опору коливанням.

9. Дано тонкий однорідний стержень довжиною l , початкова температура якого $\varphi(x)$, $0 \leq x \leq l$. Поставити мішану задачу про визначення температури стержня, якщо на кінці $x = 0$ підтримується стала температура u_0 , а на бічній поверхні і на кінці $x = l$ відбувається конвективний теплообмін за законом Ньютона з навколишнім середовищем, температура якого дорівнює нулю.

10. Вивести рівняння дифузії у нерухомому середовищі, припускаючи, що поверхнями однакової концентрації у кожен момент часу t є площини, перпендикулярні до осі Ox . Записати крайові умови, припускаючи, що дифузія відбувається у плоскому шарі $0 \leq x \leq l$; розглянути випадок,

коли на граничних площинах концентрація дифундуючої речовини підтримується нульовою.

11. У трубці довжиною l сталого перерізу S , однорідно заповненій пористою речовиною, відбувається дифузія газу з початковою ($t=0$) концентрацією $\varphi(x)$, $0 < x < l$. Поставити задачу про визначення концентрації u газу в трубці при $t > 0$, вважаючи бічну поверхню трубки газонепроникною, для випадків, коли:

а) на кінці $x=0$, починаючи з моменту $t=0$, підтримується концентрація газу $\mu(t)$, $t > 0$, а кінець $x=l$ газонепроникний;

б) на кінці $x=0$, починаючи з моменту $t=0$, підтримується потік газу $q(t)$, $t > 0$, а кінець $x=l$ перекритий пористою перегородкою, тобто на цьому кінці відбувається газообмін з навколишнім середовищем за законом, аналогічним закону Ньютона для конвективного теплообміну, причому концентрація газу в зовнішньому середовищі дорівнює нулю.

12. Поставити задачу про охолодження тонкого кільця, через поверхню якого відбувається конвективний теплообмін за законом Ньютона з навколишнім середовищем, що має задану температуру. Нерівномірністю розподілу температури по товщині кільця нехтувати.

13. Дві пластинки завдовжки l_1 і l_2 , виготовлені з різних

матеріалів і нагріті до температур u^0 і v^0 , у момент $t = 0$ дотикаються гранями одна до одної. Скласти рівняння, які описують процес вирівнювання температур. Вважати, що вільні грані теплоізовані від навколишнього середовища.

14. Поставити задачу про визначення стаціонарного розподілу температури в твердому тілі, що має форму обмеженого циліндра, якщо на нижню його основу подається сталий тепловий потік q , бічна поверхня теплоізована, а верхня основа підтримується при заданій температурі.

§ 2. Деякі методи розв'язування задач математичної фізики

2.1 Розв'язання задач для одновимірного хвильового рівняння методом Даламбера

Задача Коші для рівняння вільних коливань нескінченної струни формулюється так: знайти розв'язок $u(x, t)$ одновимірного хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \quad (34)$$

що задовольняє початкові умови

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), \quad -\infty < x < +\infty. \quad (35)$$

Одним із широко застосовуваних методів розв'язання задачі Коші є *метод Даламбера*. Суть його в наступному. Спочатку доводиться, що

загальним розв'язком рівняння (34) буде функція

$$u(x, t) = f_1(x + at) + f_2(x - at),$$

де f_1, f_2 – довільні двічі диференційовні функції. Вони визначаються з початкових умов (35). Шуканий розв'язок знаходиться за формулою Даламбера

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\varphi(x + at) + \varphi(x - at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz. \quad (36)$$

При кожному фіксованому значенні t графік функції $u = u(x, t)$ на площині xOy визначає форму струни в момент часу t .

Якщо на однорідну нескінчену струну діє рівномірно розподілена зовнішня сила інтенсивністю $f(x, t)$, то говорять про вимушені коливання струни. Математична модель цієї задачі наступна:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0; \quad (37)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), \quad -\infty < x < +\infty. \quad (38)$$

Розв'язок задачі Коші (37), (38) шукаємо у вигляді

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t), \quad (39)$$

де $v(x, t)$ – розв'язок однорідного рівняння коливань струни ($f(x, t) = 0$),

а $w(x, t)$ – розв'язок рівняння (37) з однорідними початковими умовами

$$w(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} = 0. \quad (40)$$

Перший доданок в (39) визначається за формулою (36), а другий можна подати у вигляді

$$w(x, t) = \int_0^t z(x, t - \tau) d\tau, \quad (41)$$

де функція $z(x, t - \tau)$ є розв'язком такої задачі:

$$\frac{\partial^2 z(x, t - \tau)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z(x, t - \tau)}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > \tau > 0,$$

$$z(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial z(x, 0)}{\partial t} = f(x, \tau), \quad -\infty < x < +\infty.$$

За формулою Даламбера

$$z(x, t - \tau) = \frac{1}{2a} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi. \quad (42)$$

Підкладаючи (42) в (41), а після цього (41) в (39), одержимо розв'язок задачі (37), (38)

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (43)$$

Принцип побудови розв'язку розглядуваної задачі називається *принципом Дюамеля*. Його використовують і при побудові розв'язків задач Коші у багатовимірному середовищі. Формулу (43) називають *формулою Даламбера* для неоднорідного рівняння (37).

Розглянемо коливання півобмеженої струни, яка в положенні рівноваги збігається з інтервалом $(0, +\infty)$ і кінець $x = 0$ якої закріплено жорстко (або вільний), тобто задачу

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0;$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), \quad 0 \leq x < +\infty;$$

$$u(0, t) = 0 \quad \left(\text{або} \quad \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0 \right), \quad t \geq 0.$$

Розв'язок цієї задачі можна знайти за формулою Даламбера (36), якщо продовжити початкові функції на $\mathbb{R}$ непарним способом у випадку закріпленого жорстко кінця $x = 0$ (тобто $\varphi(-x) = -\varphi(x)$, $\psi(-x) = -\psi(x)$, $x \in \mathbb{R}$), і непарним способом у випадку вільного кінця

$x = 0$ (тобто $\varphi(-x) = \varphi(x)$, $\psi(-x) = \psi(x)$, $x \in \mathbb{R}$). Цей метод розв'язання задачі для пів обмеженої струни називається *методом продовження*.

Приклади розв'язання задач

9. Знайти розв'язок задачі Коші

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0;$$

$$u(x, 0) = x^2, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \cos x, \quad -\infty < x < +\infty.$$

► У даній задачі Коші $\varphi(x) = x^2$, $\psi(x) = \cos x$.

За формулою Даламбера (36)

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{(x+at)^2 + (x-at)^2}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \cos z \, dz = x^2 + a^2 t^2 + \\ &+ \frac{1}{2a} \sin z \Big|_{x-at}^{x+at} = x^2 + a^2 t^2 + \frac{1}{2a} (\sin(x+at) - \sin(x-at)). \end{aligned}$$

$$\text{Остаточно маємо } u(x, t) = x^2 + a^2 t^2 + \frac{\cos x \sin at}{a}. \quad \blacktriangleleft$$

10. Знайти форму струни, що визначається розв'язком

рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ в момент часу $t = \pi/3$, якщо в

початковий момент часу $t = 0$ струна займала положення

$$\varphi(x) = \cos x, \text{ а швидкість точок струни } \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 2.$$

► Оскільки $a = 1$, $\varphi(x) = \cos x$, $\psi(x) = 2$, то за формулою (36) знаходимо

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\cos(x + at) + \cos(x - at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-t}^{x+t} 2dz = \cos x \cos t + 2t.$$

Якщо $t = \pi/3$, то $u(x, \pi/3) = \frac{\cos x}{2} + \frac{2\pi}{3}$ – шукана

форма струни. ◀

11. Розв'язати задачу Коші

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + xt^2, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0;$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = x + 1, \quad -\infty < x < +\infty.$$

► Скористаємось формулою (43). У нашому випадку

$$a = 1, \quad \varphi(x) = 0, \quad \psi(x) = x + 1, \quad f(x, t) = xt^2. \text{ Тому}$$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} (z+1) dz + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} z\tau^2 dz = \frac{1}{4} (z+1)^2 \Big|_{x-t}^{x+t} + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\tau^2}{2} z^2 \Big|_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} d\tau = t(x+1) + x \int_0^t \tau^2 (t-\tau) d\tau = t(x+1) + \frac{1}{12} xt^4. \end{aligned}$$

Отже, розв'язком задачі є функція

$$u(x, t) = t(x+1) + \frac{1}{12} xt^4, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0. \quad \blacktriangleleft$$

12. Знайти розв'язок рівняння

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0, \quad \text{який задовольняє}$$

$$\text{умови } u(x, 0) = x^2, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \sin^2 x, \quad x \geq 0; \quad u(0, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

► Продовжимо функції $\varphi(x) = x^2$ і $\psi(x) = \sin^2 x$ на

від'ємну піввісь непарно

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \geq 0, \\ -x^2 & \text{при } x < 0; \end{cases} \quad \psi_1(x) = \begin{cases} \sin^2 x & \text{при } x \geq 0, \\ -\sin^2 x & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Тоді, згідно з формулою Даламбера (36), розв'язок набуде вигляду

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{\varphi_1(x-at) + \varphi_1(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \varphi_1(z) dz = \\ &= \begin{cases} \frac{(x+at)^2 + (x-at)^2}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \sin^2 z dz & \text{при } t \leq \frac{x}{a}, \\ \frac{(x+at)^2 - (x-at)^2}{2} + \frac{1}{2a} \left(\int_0^{x+at} \sin^2 z dz - \int_{x-at}^0 \sin^2 z dz \right) & \text{при } t > \frac{x}{a} > 0, \end{cases} = \\ &= \begin{cases} x^2 + a^2 t^2 + \frac{t}{2} - \frac{1}{4a} \cos 2x \sin 2at & \text{при } t \leq \frac{x}{a}, \\ 2axt + \frac{1}{4a} (2x - \sin 2x \cos 2at) & \text{при } t > \frac{x}{a} > 0. \end{cases} \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Завдання для самостійного розв'язання

- 15.** Знайти розв'язок $u(x, t)$ рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при $-\infty < x < +\infty$, $t > 0$, якщо $u(x, 0) = \cos 2x$, $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \sin x$ при $-\infty < x < +\infty$.

- 16.** Знайти розв'язок рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при

$-\infty < x < +\infty, \quad t > 0,$ якщо $u(x, 0) = x, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = x$ при $-\infty < x < +\infty.$

17. Знайти розв'язок рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при $-\infty < x < +\infty, \quad t > 0,$ якщо $u(x, 0) = \sin x, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0$ при $-\infty < x < +\infty.$

18. Знайти розв'язок рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при $-\infty < x < +\infty, \quad t > 0,$ якщо $u(x, 0) = \cos x, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \sin x$ при $-\infty < x < +\infty.$

19. Знайти розв'язок $u(x, t)$ наступних задач Коші:

а) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при $-\infty < x < +\infty, \quad t > 0,$ якщо $u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = x$ при $-\infty < x < +\infty;$

б) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при $-\infty < x < +\infty, \quad t > 0,$ якщо $u(x, 0) = \frac{x}{1+x^2}, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \sin x$ при $-\infty < x < +\infty.$

20. Знайти розв'язок наступних задач Коші:

а) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xt, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0;$

$$u(x, 0) = x^2, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = x; \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$\text{б) } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^x, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0;$$

$$u(x, 0) = \sin x, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = x + \cos x, \quad -\infty < x < +\infty.$$

21. Розв'язати задачі Коші:

$$\text{а) } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin x, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0;$$

$$u(x, 0) = \sin x, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$\text{б) } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin x, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0;$$

$$u(x, 0) = 1, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 1, \quad -\infty < x < +\infty.$$

22. Використовуючи метод продовження і формулу

Даламбера, знайти розв'язок задач:

$$\text{а) } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x > 0, \quad t > 0;$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \sin x, \quad x \geq 0;$$

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0, \quad t \geq 0;$$

$$\text{б) } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x > 0, \quad t > 0;$$

$$u(x, 0) = e^{-x^2}, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \sin x, \quad x \geq 0;$$

$$u(0, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

23. Знайти розв'язок задач:

$$\text{а) } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x > 0, \quad t > 0;$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \frac{x}{1+x^2}, \quad x \geq 0;$$

$$u(0, t) = 0, \quad t \geq 0;$$

$$\text{б) } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x > 0, \quad t > 0;$$

$$u(x, 0) = \frac{x^2}{1+x^2}, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \frac{x}{1+x^2}, \quad x \geq 0;$$

$$u(0, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

2.2 Метод Фур'є. Розв'язування однорідних мішаних задач для гіперболічних рівнянь

Якщо нас цікавить розв'язок хвильового рівняння при $t > 0$ в обмеженій області зміни просторових змінних, наприклад, коливання струни, що має скінченну довжину, то до початкових умов треба ще задати поведінку шуканої функції на межі області зміни просторових змінних. Задачу про розв'язування диференціального рівняння з додатковими початковими і крайовими умовами називають *мішаною* або *початково-крайовою задачею*. Найчастіше розв'язування мішаних задач для рівнянь математичної фізики (не обов'язково гіперболічних) *проводиться методом Фур'є (методом відокремлення змінних)*.

Цей метод застосовний для однорідних рівнянь з однорідними

крайовими умовами. Опишемо загальну схему методу Фур'є для рівняння

$$\begin{aligned} A(y) \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + B(y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + C(y) u(x, y) = \\ = \frac{1}{\rho(x)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \right) - q(x) u(x, y) \right), \end{aligned} \quad (44)$$

де A, B, C – неперервні функції на $[0, y_0]$, а ρ, p, p', q – неперервні функції на $[0, l]$, причому $\rho > 0, p > 0, q \geq 0$. За таких припущень стосовно ρ і p тип рівняння (44) визначається знаком A , а саме, якщо при $y \in [0, y_0]: A(y) > 0$, то тип *гіперболічний*, $A(y) = 0$ – *параболічний* і $A(y) < 0$ – *еліптичний*. У гіперболічному й параболічному випадках змінна y є часовою змінною, область зміни якої може бути необмеженою, тобто $y_0 = +\infty$. Область зміни x у всіх випадках є скінченним відрізком $[0, l]$.

Основні однорідні рівняння математичної фізики є частинними випадками рівняння (44).

Нехай $Q_{y_0} = (0, l) \times (0, y_0)$. Розглянемо задачу про знаходження функції $u(x, y)$, $(x, y) \in \bar{Q}_{y_0} = [0, l] \times [0, y_0]$, яка є розв'язком рівняння (44) у Q_{y_0} і задовольняє однорідні крайові умови за змінною x

$$\alpha \frac{\partial u(0, y)}{\partial x} + \beta u(0, y) = 0, \quad \gamma \frac{\partial u(l, y)}{\partial x} + \delta u(l, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq y_0, \quad (45)$$

та неоднорідні умови за змінною y :

1) $A > 0$ (гіперболічний випадок)

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l; \quad (46)$$

2) $A = 0$ (параболічний випадок)

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l; \quad (47)$$

3) $A < 0$ (еліптичний випадок)

$$\alpha_1 \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} + \beta_1 u(x, 0) = \varphi(x),$$

$$\gamma_1 \frac{\partial u(x, y_0)}{\partial y} + \delta_1 u(x, y_0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (48)$$

де $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ – сталі, які задовольняють умови $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$, $\alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0$, $\gamma_1^2 + \delta_1^2 \neq 0$.

Задача (44), (45), (46) є мішаною задачею для гіперболічного типу; задача (44), (45), (47) – мішаною задачею для параболічного рівняння; а задача (44), (45), (48) – крайовою задачею для еліптичного рівняння.

Шукатимемо ненульові розв'язки рівняння (44), які задовольняють умови (45), у вигляді добутку функцій

$$u(x, y) = X(x)Y(y), \quad (x, y) \in Q_{y_0}. \quad (49)$$

Підстановка (49) у рівняння (44) дає

$$A(y)X(x)Y''(y) + B(y)X(x)Y'(y) + C(y)X(x)Y(y) =$$

$$= \frac{1}{\rho(x)}((p(x)X'(x))'Y(y) - q(x)X(x)Y(y)).$$

Поділивши цю рівність на $X(x)Y(y)$, одержимо

$$\frac{A(y)Y''(y) + B(y)Y'(y) + C(y)Y(y)}{Y(y)} = \frac{(p(x)X'(x))' - q(x)X(x)}{p(x)X(x)}.$$

Ліва частина цієї тотожності не залежить від x , а права – від y , отже, рівність можлива тільки у випадку, коли її ліва й права частини дорівнює сталій величині. Якщо позначити цю сталу через « λ », то одержимо два звичайні диференціальні рівняння

$$A(y)Y''(y) + B(y)Y'(y) + (C(y) + \lambda)Y(y) = 0, \quad y \in (0, y_0); \quad (50)$$

$$(p(x)X'(x))' + (\lambda p(x) - q(x))X(x) = 0, \quad x \in (0, l). \quad (51)$$

Розв'язки (49) повинні задовольняти крайові умови (45). При підстановці (49) у (45) одержимо умови, які повинна задовольняти функція X ,

$$\alpha X'(0) + \beta X(0) = 0, \quad \gamma X'(l) + \delta X(l) = 0. \quad (52)$$

Задача (51), (52) називається *задачею Штурма-Ліувілля*. Вона має нетривіальні розв'язки не при всіх значеннях λ . Ті значення λ , при яких вона має нетривіальні розв'язки, називаються *власними числами (значеннями)*, а відповідні їм нетривіальні розв'язки X – *власними функціями* задачі Штурма-Ліувілля.

Власні числа і власні функції задачі Штурма-Ліувілля (51), (52) мають такі властивості:

1) існує зліченна множина власних чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \dots (\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots)$ і відповідних їм власних функцій $X_1(x), \dots, X_k(x), \dots, x \in (0, l)$;

2) усі власні числа дійсні і невід'ємні; для першої й третьої крайових задач власні числа додатні, для другої крайової задачі з $q=0$ власним числом є також $\lambda=0$;

3) власні функції X_k і X_m , які відповідають різним власним числам λ_k і λ_m , ортогональні між собою з вагою ρ на відрізку $[0, l]$, тобто

$$\int_0^l \rho(x) X_k(x) X_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq m, \\ \|X_m\|^2 \neq 0 & \text{при } k = m; \end{cases}$$

4) (*теорема Стеклова*) всяка функція f , яка є неперервною на сегменті $[0, l]$ разом зі своїми похідними першого і другого порядків та задовольняє крайові умови (52), розкладається в рівномірно збіжний ряд Фур'є за системою власних функцій $X_k, k \in \mathbb{N}$, задачі (51), (52)

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k X_k(x), \quad x \in [0, l]. \quad (53)$$

Коефіцієнти a_k визначаються за формулою

$$a_k = \frac{1}{\|X_k\|^2} \int_0^l \rho(x) X_k(x) f(x) dx, \quad x \in \mathbb{N}. \quad (54)$$

Якщо знайдено власні числа і власні функції задачі (51), (52) то,

підставивши $\lambda = \lambda_k$, $k \in \mathbb{N}$ у (50), одержимо рівняння

$$A(y)Y_k''(y) + B(y)Y_k'(y) + (C(y) + \lambda_k)Y_k(y) = 0, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (55)$$

Якщо $A \neq 0$, тобто маємо гіперболічний або еліптичний випадки, то загальний розв'язок рівняння (55) має вигляд

$$Y_k(y) = A_k Y_{1k}(y) + B_k Y_{2k}(y), \quad y \in [0, y_0], \quad k \in \mathbb{N},$$

де Y_{1k} і Y_{2k} – лінійно незалежні розв'язки цього рівняння, а A_k і B_k – довільні сталі.

У параболічному випадку, коли $A = 0$ і $B \neq 0$, загальний розв'язок визначається формулою

$$Y_k(y) = A_k Y_{1k}(y) = A_k \exp \left\{ - \int_0^y \frac{C(z) + \lambda_k}{B(z)} dz \right\}, \quad y \in [0, y_0], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Знайдені X_k і Y_k підставляємо в (49) і одержуємо розв'язки $u_k(x, y)$, $(x, y) \in \bar{Q}_{y_0}$, $k \in \mathbb{N}$, рівняння (44), які задовольняють умови (45).

$$\text{При цьому } u_k(x, y) = \begin{cases} (A_k Y_{1k}(y) + B_k Y_{2k}(y)) X_k(x), & \text{якщо } A \neq 0, \\ A_k Y_{1k}(y) X_k(x), & \text{якщо } A = 0, B \neq 0. \end{cases}$$

За допомогою розв'язків u_k , $k \in \mathbb{N}$, будуємо розв'язки поставлених задач для рівняння (44). Для цього розглянемо ряд

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, y), \quad (x, y) \in \bar{Q}_{y_0}, \quad (56)$$

який у випадку, коли $A \neq 0$, має вигляд

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k Y_{1k}(y) + B_k Y_{2k}(y)) X_k(x), \quad (x, y) \in \bar{Q}_{y_0}, \quad (57)$$

а якщо $A = 0$, $B \neq 0$, то

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^n A_k Y_{1k}(y) X_k(x), \quad (x, y) \in \bar{Q}_{y_0}. \quad (58)$$

Якщо ряд (58) збігається рівномірно в $\bar{Q}_{y_0}$ разом з рядами, які одержуються з нього по членним диференціюванням двічі по x і y , то його

сума є розв'язком рівняння (44) і задовольняє крайові умови (45). Щоб знайти A_k і B_k із (57), (58), треба задовольнити функцією u , яка визначається рівністю (56), умови (46)-(48) за змінною u . У залежності від типу рівняння (44) матимемо різні ситуації.

Гіперболічний тип ($A > 0$). Підставивши (57) у (46), одержимо

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} (A_k Y_{1k}(0) + B_k Y_{2k}(0)) X_k(x), \\ \psi(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} (A_k Y'_{1k}(0) + B_k Y'_{2k}(0)) X_k(x), \quad x \in [0, l].\end{aligned}\tag{59}$$

Якщо функції φ і ψ можна розкласти у ряди Фур'є за системою власних функцій $\{X_k, k \in \mathbb{N}\}$, то

$$\begin{cases} A_k Y_{1k}(0) + B_k Y_{2k}(0) = \frac{1}{\|X_k\|^2} \int_0^1 \rho(x) \varphi(x) X_k(x) dx, \\ A_k Y'_{1k}(0) + B_k Y'_{2k}(0) = \frac{1}{\|X_k\|^2} \int_0^1 \rho(x) \psi(x) X_k(x) dx. \end{cases}\tag{60}$$

Знайшовши A_k і B_k з цієї системи, підставимо їх у ряд (57). Як результат одержимо розв'язок задачі (44)-(46).

Параболічний тип ($A = 0$, $B \neq 0$). Для знаходження коефіцієнтів A_k необхідно задовольнити рядом (58) початкову умову (47):

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k Y_{1k}(0) X_k(x), \quad x \in [0, l].$$

Звідси випливає, що

$$A_k = \frac{1}{Y_{1k}(0) \|X_k\|^2} \int_0^l \rho(x) \varphi(x) X_k(x) dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Підставивши ці коефіцієнти у (58), одержимо розв'язок задачі (44), (45), (47).

Еліптичний тип ($A < 0$). Розв'язок рівняння (44), який задовольняє крайові умови (45), як і в гіперболічному випадку, знаходиться у вигляді ряду (57). Задовольнивши цим рядом крайові умови (47) за змінною u ,

одержимо систему рівнянь, аналогічно до (60), з якої знайдемо коефіцієнти A_k і B_k . Підстановка їх у (57) дає розв'язок задачі (44), (45), (48).

Приклади розв'язання задач

13. Однорідну горизонтальну струну довжиною l натягнуто з силою T_0 і закріплено на кінцях. У момент часу $t = 0$ точкам струни надано початкові відхилення і швидкості. Розв'язати задачу про малі поперечні коливання точок струни при $t > 0$.

► Розв'яжемо однорідну мішану задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \quad (61)$$

$$\text{крайові умови} \quad u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t \geq 0; \quad (62)$$

$$\text{початкові умови} \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (63)$$

де $a^2 = T_0 / \rho$, ρ – лінійна густина струни; $u(x, t)$ – поперечне відхилення точки x струни від положення рівноваги в момент часу t .

Частинний розв'язок рівняння (61) (не рівний тотожно нулю), що задовольняє умови (62), (63), будемо шукати у вигляді добутку двох функцій $X(x)$ і $T(t)$, перша з них залежить тільки від x , а друга тільки від t ,

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (64)$$

Після підстановки (64) у (61) і відокремлення змінних одержуємо два звичайні диференціальні рівняння другого

порядку зі сталими коефіцієнтами

$$T'''(t)X(x) = a^2 T(t)X''(x), \frac{T'''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2,$$

$$T'''(t) + a^2 \lambda^2 T(t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (65)$$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (66)$$

Тут і надалі замість « $-\lambda$ » будемо писати « $-\lambda^2$ », щоб підкреслити недодатність цього числа.

Оскільки функція u з (64) задовольняє умови (62), то

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \quad (67)$$

Отже, задачею Штурма-Ліувілля є задача (66), (67). Знайдемо її власні числа і власні функції. Так як корені характеристично рівняння для (66) чисто комплексні $k^2 + \lambda^2 = 0$, $k_{1,2} = \pm i\lambda$, то загальний розв'язок (66)

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x, \quad 0 \leq x \leq l,$$

де C_1, C_2 – довільні сталі. Задовольняючи цією функцією умови (67), одержуємо систему двох рівнянь

$$\begin{cases} 0 = C_1 \cos(\lambda \cdot 0) + C_2 \sin(\lambda \cdot 0), \\ 0 = C_1 \cos \lambda l + C_2 \sin \lambda l, \end{cases}$$

яка містить невідомі величини C_1, C_2 і λ . Додатковою тут є умова, що $u(x, t)$ тотожно не дорівнює нулю, а отже, і функція $X(x)$ тотожно не рівна нулю. Тому при $C_1 = 0$ (впливає з першого рівняння системи) дістаємо з другого рівняння дві умови $C_2 \neq 0$ і $\sin \lambda l = 0$. З останньої умови випливає, що

$\lambda l = n\pi$ або $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$, де $n \in \mathbb{N}$. Це і є *власні числа* задачі (66), (67), а *власними функціями*, які їм відповідають, є такі

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad 0 \leq x \leq l, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (68)$$

Тут взято $C_2 = 1$ тому, що власні функції визначаються з точністю до довільної сталої C_2 . $\lambda = 0$ не є власним числом, оскільки розв'язуємо першу мішану задачу (див. властивість 2 власних чисел).

Для знаходження T з (65), враховуючи те, що $\lambda = \lambda_n$, дістаємо рівняння

$$T_n''(t) + a^2 \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 T_n(t) = 0, \quad t \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Звідси одержуємо, що

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{n\pi}{l} at + B_n \sin \frac{n\pi}{l} at, \quad t \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (69)$$

Отже, кожному власному числу λ_n відповідає розв'язок задачі (61), (62), який є добутком функцій (68) і (69), тобто

$$u_n(x, t) = \left(A_n \cos \frac{n\pi}{l} at + B_n \sin \frac{n\pi}{l} at \right) \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad 0 \leq x \leq l, t \geq 0. \quad (70)$$

Оскільки функції (70) ні при якому виборі сталих A_n і B_n не задовольняють умови (63), то розв'язок задачі (61)-(63) будемо шукати у вигляді ряду

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi}{l} at + B_n \sin \frac{n\pi}{l} at \right) \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad 0 \leq x \leq l, t \geq 0. \quad (71)$$

Задовольняючи рядом (71) умови (63), одержуємо рівності

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{l} x = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi}{l} a \sin \frac{n\pi}{l} x = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

з яких знаходимо значення коефіцієнтів A_n і B_n .

Якщо функція $\varphi(x)$ така, що допускає на $[0, l]$ розвинення в ряд Фур'є по синусах, тобто

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx, \quad \text{то перша з}$$

рівностей, наведених вище, буде виконуватись, якщо взяти

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx, \quad 0 \leq x \leq l, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Аналогічно, якщо функція $\psi(x)$ допускає на $[0, l]$ розвинення в ряд Фур'є, то

$$B_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx, \quad 0 \leq x \leq l, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Якщо ввести позначення } D_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}, \quad \sin \varphi_n = \frac{A_n}{D_n},$$

$$\cos \varphi_n = \frac{B_n}{D_n}, \quad \text{то розв'язок (71) можна подати у вигляді}$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin \frac{n\pi}{l} x \sin\left(\frac{n\pi}{l} at + \varphi_n\right), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t \geq 0. \quad (72)$$

Одержаний ряд і його похідні збігаються рівномірно для

$$0 \leq x \leq l, \quad t > 0.$$

Кожен член цього ряду утворює так звану *стоячу хвилю*, тобто точки струни здійснюють гармонічні коливальні рухи з амплітудою $D_n \sin \frac{n\pi}{l} x$, фазою φ_n і частотою $\omega_n = \frac{n\pi}{l} a$.

Зауваження. Якщо при відокремленні змінних замість « $-\lambda^2$ » взято λ^2 , то загальний розв'язок рівняння $X'' - \lambda^2 X = 0$ матиме вигляд

$$X(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}, \quad 0 \leq x \leq l.$$

Умови (67) дають систему

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{\lambda l} + C_2 e^{-\lambda l} = 0. \end{cases}$$

Оскільки визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\lambda l} & e^{-\lambda l} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то єдиним її розв'язком буде $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, тобто $X(x) \equiv 0$, що нас не влаштовує.

При $\lambda^2 = 0$ отримаємо $X(x) = C_1 x + C_2$. Умови (67) дають систему $\begin{cases} C_2 = 0, \\ C_1 l + C_2 = 0, \end{cases}$ яка має єдиний розв'язок $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, (тобто знову $X(x) \equiv 0$), який не підходить. ◀

14. В однорідної прямокутної мембрани $\{0 \leq x \leq s, 0 \leq y \leq p\}$ частина межі $\{x = 0, 0 \leq y < p\}$ вільна, а інша

частина закріплена жорстко. Нехтуючи реакцією навколишнього середовища, вивчити поперечні коливання мембрани, якщо початкові відхилення

$$u(x, y, 0) = A \cos \frac{\pi x}{2s} \sin \frac{\pi y}{p}, \quad 0 \leq x \leq s, \quad 0 \leq y \leq p,$$

а початкові швидкості нульові.

► На цьому прикладі проілюструємо застосування методу Фур'є до розв'язання однорідних мішаних задач з декількома просторовими змінними.

Математична модель задачі така:

$$\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} \right), \quad 0 < x < s, \quad 0 < y < p, \quad t > 0; \quad (73)$$

$$\frac{\partial u(0, y, t)}{\partial x} = 0, \quad u(s, y, t) = 0, \quad 0 \leq y \leq p, \quad t \geq 0; \quad (74)$$

$$u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, p, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq s, \quad t \geq 0, \quad (75)$$

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = A \cos \frac{\pi x}{2s} \sin \frac{\pi y}{p}, & 0 \leq x \leq s, \quad 0 \leq y \leq p, \\ \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = 0, & 0 \leq x \leq s, \quad 0 \leq y \leq p. \end{cases} \quad (76)$$

Шукатимемо нетривіальні розв'язки рівняння (73), які задовольняють крайові умови (74), (75), у вигляді $u(x, y, t) = T(t)V(x, y)$. Як і в попередньому прикладі, одержимо рівняння для T

$$T''(t) + a^2 \lambda^2 T(t) = 0, \quad t > 0, \quad (77)$$

і мішану задачу для V

$$\frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial y^2} + \lambda^2 V(x, y) = 0, \quad 0 < x < s, \quad 0 < y < p, \quad (78)$$

$$\frac{\partial V(0, y)}{\partial x} = 0, \quad V(s, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq s, \quad (79)$$

$$V(x, 0) = 0, \quad V(x, p) = 0, \quad 0 \leq x \leq s. \quad (80)$$

Задачу (78)-(80), у свою чергу, розв'язуватимемо методом відокремлення змінних

$$V(x, y) = X(x)Y(y),$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y) + \lambda^2 Y(y)}{Y(y)} = -\mu^2,$$

$$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0, \quad X'(0) = 0, \quad X(s) = 0, \quad (81)$$

$$Y''(y) + k^2 Y(y) = 0, \quad k^2 = \lambda^2 - \mu^2, \quad Y(0) = 0, \quad Y(p) = 0. \quad (82)$$

Власними числами задачі (81) є $\mu_m = \frac{(2m+1)\pi}{2s}$, власними

функціями – $X_m(x) = \cos \frac{(2m+1)\pi x}{2s}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, а задачі (82) –

відповідно $k_n = \frac{n\pi}{p}$ і $Y_n(y) = \sin \frac{n\pi y}{p}$, $n \in \mathbb{N}$.

Тоді $V_{mn}(x, y) = \cos \frac{(2m+1)\pi x}{2s} \sin \frac{n\pi y}{p}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{N}$,

$0 \leq x \leq s$, $0 \leq y \leq p$ є власними функціями задачі (78)-(80), що відповідають власним числам

$$\lambda_{mn}^2 = \mu_m^2 + k_n^2 = \frac{(2m+1)^2 \pi^2}{4s^2} + \frac{n^2 \pi^2}{p^2}.$$

При цьому окремі власні числа можуть бути кратними, тобто одному власному числу відповідатимуть декілька лінійно незалежних функцій V_{mn} (при різних m і n може бути одне і те ж значення λ_{mn}).

Підставивши $\lambda^2 = \lambda_{mn}^2$ у (77), одержимо рівняння

$$T_{mn}''(t) + \lambda_{mn}^2 a^2 T_{mn}(t) = 0,$$

загальним розв'язком якого є

$$T_{mn}(t) = A_{mn} \cos a\lambda_{mn}t + B_{mn} \sin a\lambda_{mn}t, \quad t \geq 0, \quad m \in \mathbb{Z}_+, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Скориставшись принципом суперпозиції, отримаємо, що ряд

$$\begin{aligned} u(x, y, t) = & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_{mn} \cos \left(\sqrt{\frac{(2m+1)^2}{4s^2} + \frac{n^2}{p^2}} a\pi t \right) + \right. \\ & \left. + B_{mn} \sin \left(\sqrt{\frac{(2m+1)^2}{4s^2} + \frac{n^2}{p^2}} a\pi t \right) \right) \cos \frac{(2m+1)\pi x}{2s} \cdot \sin \frac{n\pi y}{p}, \\ & t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq s, \quad 0 \leq y \leq p, \end{aligned} \quad (83)$$

коли він збігається рівномірно разом зі своїми формальними похідними, тобто рядами, одержаними почленним диференціюванням до другого порядку, задовольняє рівняння (73) і крайові умови (74), (75).

Задовольняючи початкові умови (76), одержимо

$$\begin{cases} A \cos \frac{\pi x}{2s} \sin \frac{\pi y}{2p} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cos \frac{(2m+1)\pi x}{2s} \sin \frac{n\pi y}{p}, \\ 0 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sqrt{\frac{(2m+1)^2}{4s^2} + \frac{n^2}{p^2}} \cdot a \pi \cos \frac{(2m+1)\pi x}{2s} \sin \frac{n\pi y}{p}, \end{cases}$$

$$0 \leq x \leq s, \quad 0 \leq y \leq p.$$

Звідси випливає, що $A_{01} = A$, $A_{mn} = 0$, $m \neq 0$ і $n \neq 1$ одночасно, $B_{mn} = 0$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{N}$, оскільки V_{mn} лінійно незалежні.

Підставляючи знайдені коефіцієнти в ряд (83), одержимо розв'язок задачі (73)-(76)

$$u(x, y, t) = A \cos \left(\sqrt{\frac{1}{4s^2} + \frac{1}{p^2}} a \pi t \right) \cos \frac{\pi x}{2s} \sin \frac{\pi y}{p},$$

$$0 \leq x \leq s, \quad 0 \leq y \leq p, \quad t \geq 0. \quad \blacktriangleleft$$

Завдання для самостійного розв'язання

24. Вивчити коливання струни довжиною l із закріпленими кінцями, якщо початкові швидкості точок струни дорівнюють нулю, а початкове відхилення має форму параболи, віссю симетрії якої є пряма $x = l/2$ а вершиною – точка $(l/2, h)$.

25. Знайти відхилення від положення рівноваги закріпленої на кінці l однорідної горизонтальної струни, лівий кінець якої $x = 0$ переміщується так, що дотична до струни залишається горизонтальною, якщо в початковий момент часу

струна мала форму $\frac{1}{9} \cos \frac{3\pi x}{2l}$, $0 \leq x \leq l$, а початкова швидкість відсутня.

26. Кінець $x = 0$ однорідного стержня закріплений жорстко, а до кінця $x = l$ прикладена поздовжня сила $P = \text{const}$, під дією якої стержень перебуває у стані рівноваги. Знайти коливання стержня після того, як у початковий момент часу сила P перестав діяти, вважаючи, що початкові швидкості дорівнюють нулю.

27. Знайти відхилення від положення рівноваги закріпленої на кінцях $x = 0$ і $x = l$ однорідної струни, якщо в початковий момент: а) струна мала форму $\frac{1}{8} \sin \frac{3\pi x}{l}$, $0 \leq x \leq l$, а початкові швидкості відсутні; б) точки струни знаходились у положенні рівноваги і їй була надана початкова швидкість $\frac{1}{3} \sin \frac{5\pi x}{l}$, $0 \leq x \leq l$.

28. В однорідної прямокутної мембрани $\Pi = \{(x, y) : 0 \leq x \leq s, 0 \leq y \leq p\}$ частина межі $\{(x, y) : x = 0, 0 \leq y \leq p\}$ вільна, а решта закріплена жорстко. Нехтуючи реакцією навколишнього середовища, знайти поперечні коливання мембрани, викликані початковим розподілом швидкостей $\frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = A(s - x) \sin \frac{\pi y}{p}$, $(x, y) \in \Pi$.

29. Однорідній квадратній мембрані зі сторони l , яку закріплено по контуру, надали форму $u(x, y, 0) = \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi y}{l}$, $(x, y) \in \Pi$, $\Pi = \{(x, y) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq l\}$. Знайти закон вільних коливань, якщо початкова швидкість точок мембрани дорівнює a/l , де a – стала з рівняння коливань.

2.3 Розв'язування неоднорідних мішаних задач для гіперболічних рівнянь

Розглянемо задачу про знаходження розв'язку неоднорідного рівняння

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) - q(x) u(x, t) + \bar{f}(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (84)$$

де ρ, p, p' і q – неперервні функції на відрізку $[0, l]$; $\rho(x) > 0$, $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$, $x \in [0, l]$, який задовольняє *крайові умови*

$$\alpha u(0, t) + \beta \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \mu_1(t), \quad \gamma u(l, t) + \delta \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = \mu_2(t), \quad t \geq 0, \quad (85)$$

де $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$, і *початкові умови*

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (86)$$

Вважатимемо, що задані функції $\bar{f}$, μ_1 , μ_2 , φ і ψ мають потрібну гладкість.

а) Задача з однорідними крайовими умовами

Нехай потрібно знайти розв'язок неоднорідного рівняння (84) при $0 < x < l$, $t > 0$, який задовольняє однорідні крайові умови

$$\alpha u(0,t) + \beta \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \quad \gamma u(l,t) + \delta \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0, \quad t \geq 0, \quad (85')$$

і початкові умови (86).

Цю задачу не можна розв'язати методом Фур'є, тобто шукати розв'язок у вигляді $u(x,t) = X(x)T(t)$ оскільки при $\bar{f} \neq 0$ змінні не відокремлюються. Тому шукатимемо розв'язок задачі (84), (85'), (86) у вигляді

$$u = w + v, \quad (87)$$

де функція w є розв'язком задачі

$$\begin{aligned} \rho(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right) - q(x)w(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \\ \alpha w(0,t) + \beta \frac{\partial w(0,t)}{\partial x} &= 0, \quad \gamma w(l,t) + \delta \frac{\partial w(l,t)}{\partial x} = 0, \quad t \geq 0; \\ w(x,0) &= \varphi(x), \quad \frac{\partial w(x,0)}{\partial t} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l. \end{aligned} \quad (88)$$

Тоді, очевидно, функція v повинна бути розв'язком задачі

$$\rho(x) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \right) - q(x)v(x,t) + \bar{f}(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \quad (89)$$

$$\alpha v(0,t) + \beta \frac{\partial v(0,t)}{\partial x} = 0, \quad \gamma v(l,t) + \delta \frac{\partial v(l,t)}{\partial x} = 0, \quad t \geq 0; \quad (90)$$

$$v(x,0) = 0, \quad \frac{\partial v(x,0)}{\partial t} = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (91)$$

В пункті 2.2 було показано, що розв'язок задачі (88) має вигляд

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} t \right) X_n(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t \geq 0, \quad (91)$$

де $\lambda_n (n \in \mathbb{N})$ – власні числа, $X_n (n \in \mathbb{N})$ – власні функції відповідної задачі

Штурма-Ліувілля. Коефіцієнти ряду (91) визначаються за формулами

$$A_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^l p(x) \varphi(x) X_n(x) dx,$$

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n} \|X_n\|^2} \int_0^l p(x) \psi(x) X_n(x) dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Розв'язок задачі (89)-(91) будемо шукати за *методом власних функцій*, тобто у вигляді ряду Фур'є за власними функціями відповідної однорідної задачі (88)

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) X_n(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t \geq 0. \quad (92)$$

Функції $g_n(t)$ досить підібрати так, щоб задовольнялись рівняння (89) і початкові умови (91). Припустивши, що ряд (92) допускає почленне двократне диференціювання за t і x , підставимо його в рівняння (89)

$$\rho(x) \sum_{n=1}^{\infty} g_n''(t) X_n(x) = \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) X_n'(x) \right) -$$

$$-q(x) \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) X_n(x) + \bar{f}(x, t), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t \geq 0. \quad (93)$$

Оскільки X_n є розв'язком рівняння

$$\left(p(x) X_n'(x) \right)' + (\lambda_n \rho(x) - q(x)) X_n(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq l,$$

то (93) можна переписати у вигляді

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(g_n''(t) + \lambda_n g_n(t) \right) X_n(x) = \frac{\bar{f}(x, t)}{\rho(x)}. \quad (94)$$

Розкладемо функцію $f(x, t) = \frac{\bar{f}(x, t)}{\rho(x)}$ у ряд Фур'є за власними функціями X_n

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t \geq 0, \quad (95)$$

$$\text{де } f_n(t) = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^l \rho(y) f(y, t) X_n(y) dy.$$

Підставивши (95) в (94), одержимо

$$\sum_{n=1}^{\infty} (g_n''(t) + \lambda_n g_n(t) - f_n(t)) X_n(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad t \geq 0.$$

Ця рівність задовольнятиметься, коли вимагати, щоб

$$g_n''(t) + \lambda_n g_n(t) - f_n(t) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad t \geq 0. \quad (96)$$

Функція v задовольняє початкові умови (91), коли

$$g_n(0) = 0, \quad g_n'(0) = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (97)$$

Задача (96), (97) є задачею Коші для звичайного диференціального рівняння. Розв'язуючи її, знайдемо

$$g_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^t f_n(\tau) \sin \sqrt{\lambda_n} (t - \tau) d\tau, \quad t \geq 0.$$

Підставивши в (92) вирази для g_n , $n \in \mathbb{N}$, знайдемо розв'язок задачі (89)-(91), а згідно з (87) сума (91) і (92) дає розв'язок задачі (84), (85'), (86).

б) Задача з неоднорідними крайовими умовами

Розглянемо тепер задачу (84)-(86). Покажемо, що її можна звести до задачі (84), (85'), (86). Для цього підберемо гладку функцію w так, щоб вона задовольняла крайові умови (85), і шукатимемо розв'язок задачі (84)-(86) у вигляді $u = w + v$. Після підстановки цієї суми в рівняння (84), одержимо рівняння для функції v

$$\rho(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \right) - q(x) v(x, t) + f_1(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

$$\text{де } f_1 = \bar{f} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial w}{\partial x} \right) - qw. \text{ Оскільки } w \text{ задовольняє неоднорідні}$$

крайові умови (85), то v задовольнятиме однорідні крайові умови та такі початкові умови

$$v(x, 0) = u(x, 0) - w(x, 0) = \varphi(x) - w(x, 0) = \varphi_1(x),$$

$$\frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} - \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} = \psi(x) - \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} = \psi_1(x).$$

Отже, для функції v дістали задачу

$$\begin{aligned} \rho(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \right) - q(x) v(x, t) + f_1(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \\ \alpha v(0, t) + \beta \frac{\partial v(0, t)}{\partial x} &= 0, \quad \gamma v(l, t) + \delta \frac{\partial v(l, t)}{\partial x} = 0, \quad t \geq 0; \\ v(x, 0) &= \varphi_1(x), \quad \frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l. \end{aligned} \quad (98)$$

Ця задача є задачею типу (84), (85'), (86) і вона розв'язується методом, описаним в пункті а).

Зауваження 1. Функцію w , яка задовольняє лише крайові умови, можна шукати, наприклад, у вигляді $w(x, t) = A(t)x^2 + B(t)x + C(t)$ або в деякому іншому вигляді.

У табл.1 наведемо вигляд функції w для випадку крайових умов, які найчастіше зустрічаються у прикладних задачах.

Зауваження 2. Якщо неоднорідності в рівнянні і крайових умовах задачі (84)-(86) не залежать від часу t , то функцію w можна також вважати незалежно від t і шукати її як розв'язок задачі

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dw(x)}{dx} \right) - q(x) w(x) + \bar{f}(x) &= 0, \quad 0 \leq x \leq l; \\ \alpha w(0) + \beta \frac{dw(0)}{dx} &= \mu_1, \quad \gamma w(l) + \delta \frac{dw(l)}{dx} = \mu_2, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Зауваження 3. Якщо неоднорідність у рівнянні має вигляд $\varphi(x) \sin \omega t$ або $\varphi(x) \cos \omega t$ чи в крайових умовах є неоднорідність вигляду $A \sin \omega t$ або $B \cos \omega t$, то функцію w зручно шукати у вигляді $\Phi(x) \sin \omega t$ або $\Psi(x) \cos \omega t$.

Таблиця 1.

Крайові умови	Функція w
$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t)$	$\mu_1 + \frac{x}{l}(\mu_2 - \mu_1)$
$u(0, t) = \mu_1(t), \quad \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = \mu_2(t)$	$\mu_1 + x\mu_2$
$u(0, t) = \mu_1(t), \quad \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} + hu(l, t) = \mu_2$	$\mu_1 + x \frac{\mu_2 - h\mu_1}{1 + lh}$
$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} - hu(0, t) = \mu_1(t), \quad \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} + hu(l, t) = \mu_2(t)$	$x^2 \frac{\mu_2 - (1 + lh)\mu_1}{(2 + lh)l} + x\mu_1$
$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \mu_1(t), \quad \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = \mu_2(t)$	$x\mu_1 + x^2 \frac{\mu_2 - \mu_1}{2l}$
$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t)$	$\mu_2 + (x - l)\mu_1$
$\alpha \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} + \beta u(0, t) = \mu_1(t), \quad \gamma \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} + \delta u(l, t) = \mu_2(t)$	$x^2 \frac{\alpha\mu_2 - (x + \delta l)\mu_1}{\alpha l(2\gamma + \delta l)} + x \frac{\mu_1}{\alpha}$

Зуваження 4. Крім цього, якщо розглядається *усталений коливний процес*, то згідно з *методом імпедансу* в неоднорідностях слід замінити $\cos \omega t$ на $e^{i\omega t}$, $\sin \omega t$ на $-ie^{i\omega t}$, задачу розглядати без початкових умов, а розв'язок шукати в комплекснозначному вигляді $\tilde{\Phi}(x)e^{i\omega t}$.

Приклади розв'язання задач

15. Сформулювати і розв'язати задачу про малі поздовжні коливання попередньо недеформованої бурильної колони довжиною l , яка нахилена під кутом α до вертикалі. Верхній кінець вільний, а на нижній діє збурення $A \sin \omega t$, що моделює «грунтові» коливання тришарошкового долота при

бурінні вибійним двигуном. Врахувати вплив тертя об стінку свердловини, яке прийняти пропорційним швидкості руху труби. В початковий момент часу труба знаходиться в ненапруженому стані, її швидкість дорівнює нулю.

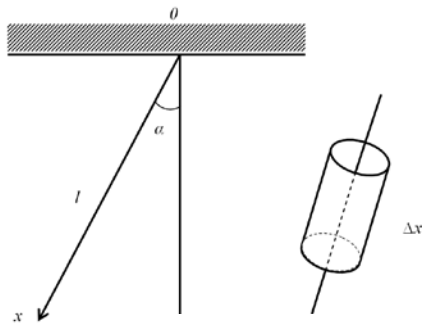


Рисунок 4

► Виділимо ділянку труби Δx . Площа її поперечного перерізу S , а об'єм $S\Delta x$ (рис. 4). Якщо внутрішній радіус труби r , зовнішній R , то $S = \pi(R^2 - r^2)$.

Проекція на вісь Ox сили ваги

ΔF_1 , що діє на виділений елемент, рівна $\rho S \Delta x g \cos \alpha$, де ρ – густина матеріалу труби, g – прискорення вільного падіння.

Оскільки $f(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta m}$, то складник f_1 (частина f , що визначається силою ваги труби) буде наступним

$$f_1 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F_1}{\rho S \Delta x} = g \cos \alpha.$$

Напруження тертя, що діє на трубу з боку породи (стілки свердловини), рівне за величиною $T = k \frac{\partial u}{\partial t}$, де k – коефіцієнт пропорційності. Сила тертя ΔF_2 що діє на виділений елемент і спроектована на вісь Ox , складе

$$\Delta F_2 = -TL\Delta x = -Lk \frac{\partial u}{\partial t} \Delta x,$$

де L – довжина дуги перерізу, по якій труба взаємодіє зі стінкою свердловини. Знак мінус відображає ту обставину, що сила тертя напрямлена проти руху. Таким чином,

$$f_2 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F_2}{\rho S \Delta x} = - \frac{kL}{\rho S} \frac{\partial u}{\partial t} = \left| h = \frac{kL}{\rho S} \right| = -h \frac{\partial u}{\partial t},$$

$$f = f_1 + f_2 = g \cos \alpha - h \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Математична модель задачі така

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + h \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g \cos \alpha, \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \quad (99)$$

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0, \quad u(l, t) = A \sin \omega t, \quad t \geq 0; \quad (100)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (101)$$

Крайові умови (100) неоднорідні, зразу метод Фур'є застосовувати не можна. Спочатку зведемо задачу до математичної моделі (84), (85'), (86). Замість $u(x, t)$ введемо нову невідому функцію $v(x, t)$ за формулою

$$u(x, t) = v(x, t) + A \sin \omega t. \quad (102)$$

Тоді

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} + A \omega \cos \omega t. \quad (103)$$

Підставляючи (102), (103), в (99)-(101), сформулюємо задачу для $v(x, t)$

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + h \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} + A\omega^2 \sin \omega t - A\omega h \cos \omega t + (104)$$

$$+ g \cos \alpha, \quad 0 < x < l, \quad t > 0;$$

$$\frac{\partial v(0,t)}{\partial x} = 0, \quad v(l,t) = 0, \quad t \geq 0; \quad (105)$$

$$v(x,0) = 0, \quad \frac{\partial v(x,0)}{\partial t} = -A\omega, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (106)$$

Тепер обидві крайові умови (105) однорідні. Розв'язок задачі (104)-(106) будемо шукати у вигляді

$$v(x,t) = X(x)T(t).$$

Відокремивши змінні в однорідному рівнянні

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'' + hT'}{a^2 T} = -\lambda^2,$$

одержимо рівняння для $T(t)$

$$T''(t) + hT'(t) + \lambda^2 a^2 T = 0, \quad t \geq 0, \quad (107)$$

і задачу Штурма-Ліувілля для $X(x)$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq l; \quad X'(0) = 0, \quad X(l) = 0. \quad (108)$$

Функція $X(x)$ має вигляд

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x, \quad 0 \leq x \leq l.$$

Задовольняючи нею крайові умови, одержуємо систему

$$\begin{cases} 0 = -C_1 \lambda \sin 0\lambda + C_2 \lambda \cos 0\lambda, \\ 0 = C_2 \cos \lambda l + C_1 \sin \lambda l, \end{cases}$$

яка містить невідомі величини C_1, C_2, λ . Додатковою є умова,

що функція $X(x)$ тотожно не рівна нулю, тому при $C_2 = 0$

(впливає з першого рівняння системи) з другого рівняння дістаємо дві умови $C_1 \neq 0$ і $\cos \lambda l = 0$. З останньої маємо

$$\lambda_n l = \frac{\pi}{2}(2n+1), \lambda_n = \frac{\pi(2n+1)}{2l}, n \in \mathbb{Z}_+. \text{ Це і будуть власні числа}$$

задачі, а власними функціями, які їм відповідають, є

$$X_n(x) = \cos \frac{\pi(2n+1)x}{2l}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

$\lambda = 0$ не є власним числом, оскільки розв'язуємо третю мішану задачу (див. властивість 2 власних чисел).

Розв'яжемо рівняння (107) при $\lambda = \lambda_n$. Характеристичне рівняння

$$\mu^2 + h\mu + \left(\frac{\pi(2n+1)}{2l} \right)^2 = 0 \quad (109)$$

має корені

$$\mu = \frac{-hl \pm \sqrt{h^2 l^2 - \pi^2 a^2 (2n+1)^2}}{2l} \quad (110)$$

Оскільки h є малою величиною, то обмежимося випадком

$$\pi^2 a^2 (2n+1)^2 > h^2 l^2. \quad (111)$$

Тоді рівняння (107) має розв'язки

$$T_n(t) = e^{-\frac{h}{2}t} (A_n \cos p_n t + B_n \sin p_n t), \quad (112)$$

$$\text{де} \quad p_n = \sqrt{\frac{\pi^2 a^2 (2n+1)^2 - h^2 l^2}{4l^2}}, \quad (113)$$

а A_n і B_n – довільні сталі.

Розв'язок задачі (104)-(106) шукаємо у вигляді

$$v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{h}{2}t} (A_n \cos p_n t + B_n \sin p_n t) \cos \frac{\pi(2n+1)}{2l} x, \quad (114)$$

$$0 \leq x \leq l, t \geq 0.$$

Ряд (112) задовольняє рівняння (104) і крайові умови (105).

З початкових умов (106) маємо

$$\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{\pi(2n+1)}{2l} x = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \right. \quad (115)$$

$$\left. \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{h}{2} A_n + p_n B_n \right) \cos \frac{\pi(2n+1)}{2l} x = -A\omega, \quad 0 \leq x \leq l. \right\} \quad (116)$$

Розклавши функції 0 та $-A\omega$ в ряди Фур'є за косинусами, одержимо систему лінійних рівнянь для знаходження A_n та B_n :

$$\begin{cases} A_n = 0, \\ -\frac{h}{l} A_n + p_n B_n = \frac{(-1)^{n+1} 4A\omega}{\pi(2n+1)}; \end{cases} \quad (117)$$

$$\begin{cases} A_n = 0, \\ B_n = \frac{(-1)^{n+1} 4A\omega}{\pi(2n+1) p_n}. \end{cases} \quad (118)$$

Отже, задача (104)-(106) має розв'язок

$$v(x, t) = \frac{4A\omega}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1) p_n} e^{-\frac{h}{2}t} \sin p_n t \cos \frac{\pi(2n+1)}{2l} x, \quad (119)$$

$$0 \leq x \leq l, \quad t \geq 0.$$

Тоді розв'язок даної задачі (99)-(101) має вигляд

$$u(x, t) = A \sin \omega t + \frac{4A\omega}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1) p_n} e^{-\frac{h}{2}t} \sin p_n t \cos \frac{\pi(2n+1)}{2l} x \quad (120)$$

$$0 \leq x \leq l, \quad t \geq 0;$$

де p_n визначається за формулою (113). ◀

16. Розв'язати задачу про поздовжні коливання однорозмірної бурильної колони довжиною l , верхній кінець якої защемлено, а на нижній діє збурення $A \sin \omega t$. Врахувати, що колона знаходиться в розтягнуто-стиснутому стані, оскільки частиною своєї ваги розвантажується на вибій свердловини. Опором середовища знехтувати, початкові швидкості прийняти рівними нулю.

► Скориставшись математичною моделлю, сформульованою в задачі 8, запишемо рівняння поздовжніх коливань бурильної колони і граничні умови

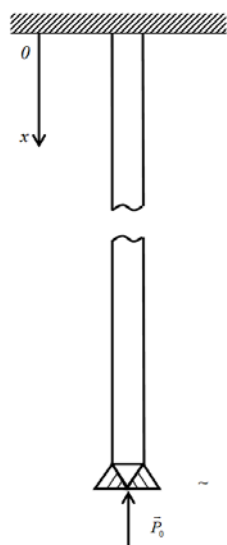


Рисунок 5

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + g, \quad (121)$$

$$0 < x < l, \quad t > 0;$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = A \sin \omega t, \quad t \geq 0. \quad (122)$$

Для того, щоб записати початкові умови, врахуємо, що з боку вибою свердловини на долото (нижній кінець колони) діє сила $\bar{P}_0$ (рис. 5), і розв'яжемо наступну задачу статички

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} = -\frac{g}{a^2}, \quad u(0) = 0, \quad \frac{du(l)}{dx} = -\frac{P_0}{AE}.$$

Розв'язок диференціального

рівняння дає $u(x) = -\frac{g}{a^2} \frac{x^2}{2} + \tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2$. З умови $u(0) = 0$ маємо

$\tilde{C}_2 = 0$, а з умови $\frac{du(l)}{dx} = -\frac{P_0}{AE}$ знаходимо $\tilde{C}_1 = \frac{g}{a^2}l - \frac{P_0}{AE}$.

Таким чином, в початкових умовах (86) слід взяти

$$\varphi(x) = -\frac{gx^2}{2a^2} + \left(\frac{gl}{a^2} - \frac{P_0}{AE}\right)x, \quad \psi(x) = 0, \text{ а самі початкові умови}$$

записати у вигляді

$$u(x, 0) = -\frac{gx^2}{2a^2} + \left(\frac{gl}{a^2} - \frac{P_0}{AE}\right)x, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (123)$$

Оскільки граничні умови (122) неоднорідні, то здійснимо заміну $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$, де w виберемо із

таблиці 1: $w(x, t) = \frac{Ax}{l} \sin \omega t$. Тоді для v одержимо задачу з

однорідними крайовими умовами

$$\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + \frac{A\omega^2 x}{l} \sin \omega t + g, \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \quad (124)$$

$$v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0, \quad t \geq 0; \quad (125)$$

$$v(x, 0) = -\frac{gx^2}{2a^2} + \left(\frac{g}{a^2}l - \frac{P_0}{AE}\right)x, \quad \frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} = \frac{-A\omega x}{l}, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (126)$$

Розв'язок цієї задачі шукаємо у вигляді

$$v(x, t) = v^1(x, t) + v^2(x, t),$$

де v^1 – розв'язок відповідної однорідної задачі

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v^1(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v^1(x,t)}{\partial x^2}, & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ v^1(0,t) = 0, \quad v^1(l,t) = 0, & t \geq 0, \\ v^1(x,0) = \frac{-gx^2}{2a^2} + \left(\frac{gl}{a^2} - \frac{P_0}{AE} \right) x, \quad \frac{\partial v^1(x,0)}{\partial t} = -\frac{A\omega x}{l}, & 0 \leq x \leq l; \end{cases} \quad (127)$$

а v^2 – розв’язок задачі з нульовими крайовими та нульовими початковими умовами

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v^2(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v^2(x,t)}{\partial x^2} + \frac{A\omega^2 x}{l} \sin \omega t + g, & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ v^2(0,t) = 0, \quad v^2(l,t) = 0, & t \geq 0, \\ v^2(x,0) = 0, \quad \frac{\partial v^2(x,0)}{\partial t} = 0, & 0 \leq x \leq l. \end{cases} \quad (128)$$

Однорідну задачу (127) розв’язуємо методом Фур’є, здійснивши заміну $v^1(x,t) = X(x)T(t)$. Відокремивши змінні у рівняння, одержимо

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda^2.$$

Матимемо рівняння для T

$$T''(t) + a^2 \lambda^2 T(t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (129)$$

та задачу Штурма-Ліувілля для X

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq l; \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0.$$

Розв’язками цієї задачі є власні числа $\lambda_n = \frac{\pi n}{l}$, $n \in \mathbb{N}$, та власні

функції $X_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x$, $n \in \mathbb{N}$ (див. розв’язання задачі 13).

Розв'язками рівняння (129) при $\lambda = \lambda_n$ є функції

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{a\pi n}{l} t + B_n \sin \frac{a\pi n}{l} t, \quad n \in \mathbb{N},$$

де A_n та B_n – довільні сталі.

Складемо ряд

$$v^1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{a\pi n}{l} t + B_n \sin \frac{a\pi n}{l} t \right) \sin \frac{\pi n}{l} \quad (130)$$

$$0 \leq x \leq l, \quad t \geq 0.$$

Задовольняючи початкові умови з (127), одержимо рівняння

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n}{l} x = -\frac{gx^2}{2a^2} + \left(\frac{gl}{a^2} - \frac{P_0}{AE} \right) x,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{a\pi n}{l} \sin \frac{\pi n}{l} x = -\frac{A\omega x}{l}.$$

Використовуючи формули для коефіцієнтів ряду Фур'є, маємо

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \left(-\frac{gx^2}{2a^2} + \left(\frac{gl}{a^2} - \frac{P_0}{AE} \right) x \right) \sin \frac{\pi n}{l} x dx =$$

$$= -\frac{2}{\pi n} \left(\left(-\frac{gl^2}{2a^2} + \left(\frac{gl}{a^2} - \frac{P_0}{AE} \right) l \right) \cos \pi n - \int_0^l \left(-\frac{gx}{a^2} + \frac{gl}{a^2} - \frac{P_0}{AE} \right) \cos \frac{\pi n}{l} x dx \right) =$$

$$= -\frac{2}{\pi n} \left(-\frac{(-1)^n P_0 l}{AE} - \frac{l}{\pi n} \left(-\frac{gx}{a^2} + \frac{gl}{a^2} - \frac{P_0}{AE} \right) \sin \frac{\pi n}{l} x \Big|_0^l + \right.$$

$$\left. + \int_0^l \frac{g}{a^2} \sin \frac{\pi n}{l} x dx \right) = \frac{2(-1)^n P_0 l}{\pi n AE} - \frac{2gl}{a^2 (\pi n)^2} \frac{l}{\pi n} \cos \frac{\pi n}{l} x \Big|_0^l =$$

$$= \frac{2(-1)^n P_0 l}{\pi n AE} - \frac{2((-1)^n - 1)l^2 g}{a^2 (\pi n)^3};$$

$$B_n = \frac{l}{a\pi n} \frac{2}{l} \int_0^l \left(-\frac{A\omega x}{l} \right) \sin \frac{\pi n}{l} x dx = \frac{2A\omega}{a\pi n l} \frac{l}{\pi n} \left(x \cos \frac{\pi n}{l} x \right) \Big|_0^l - \int_0^l \cos \frac{\pi n}{l} x dx = \frac{2A\omega}{a(\pi n)^2} \left((-1)^n l - \frac{l}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{l} x \right) \Big|_0^l = \frac{2(-1)^n A l \omega}{a(\pi n)^2}.$$

Таким чином, задача (127) має розв'язок

$$v^1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{2(-1)^n P_0 l}{\pi n A E} - \frac{2((-1)^n - 1) l^2 g}{a^2 (\pi n)^3} \right) \cos \frac{a\pi h}{l} t + \right. \\ \left. + \frac{2(-1)^n A l \omega}{a(\pi n)^2} \sin \frac{a\pi n}{l} t \right) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad 0 \leq x \leq l, \quad t \geq 0. \quad (131)$$

Розв'язок задачі (128) шукаємо у вигляді

$$v^2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad 0 \leq x \leq l, \quad t \geq 0, \quad (132)$$

де $g_n(t)$ – поки що невідомі функції. Підставивши (132) у рівняння з (128), одержимо рівняння для g_n

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(g_n''(t) + \left(\frac{a\pi n}{l} \right)^2 g_n(t) \right) \sin \frac{\pi n}{l} x = g + \frac{A\omega^2 x}{l} \sin \omega t. \quad (133)$$

Знайдемо коефіцієнти Фур'є C_n розкладу правої частини (133) в ряд Фур'є за власними функціями:

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \left(g + \frac{A\omega^2 x}{l} \sin \omega t \right) \sin \frac{\pi n}{l} x dx = -\frac{2}{l} \frac{l}{\pi n} \left(\left(g + \frac{A\omega^2 x}{l} \sin \omega t \right) \times \right. \\ \left. \times \cos \frac{\pi n}{l} x \right) \Big|_{x=0}^{x=l} - \int_0^l \frac{A\omega^2}{l} \sin \omega t \cos \frac{\pi n}{l} x dx = -\frac{2}{\pi n} \left((g + A\omega^2 \sin \omega t) (-1)^n - \right.$$

$$-g - \frac{A\omega^2}{l} \sin \omega t \cdot \frac{l}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{l} x \Big|_{x=0}^{x=l} = \frac{2}{\pi n} \left(g(1 - (-1)^n) + (-1)^{n+1} A\omega^2 \sin \omega t \right).$$

Отже, з рівняння (133) і початкових умов з (128) маємо таку задачу для знаходження функцій g_n , $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} g_n''(t) + \left(\frac{a\pi n}{l} \right)^2 g_n(t) = \frac{2}{\pi n} \left(g(1 - (-1)^n) + (-1)^{n+1} A\omega^2 \sin \omega t \right), t \geq 0, \\ g_n(0) = 0, g_n'(0) = 0. \end{cases} \quad (134)$$

Рівняння є неоднорідним лінійним другого порядку із сталими коефіцієнтами, тому його загальний розв'язок є сумою загального розв'язку відповідного однорідного рівняння та частинного розв'язку g_n^0 неоднорідного рівняння:

$$g_n(t) = A_n \cos \frac{a\pi n}{l} t + B_n \sin \frac{a\pi n}{l} t + g_n^0(t), \quad (135)$$

де $g_n^0(t) = a_n \sin \omega t + b_n$. Сталі a_n і b_n знайдемо, підставивши g_n^0 у рівняння з (134):

$$\begin{aligned} -a_n \omega^2 \sin \omega t + \left(\frac{a\pi n}{l} \right)^2 a_n \sin \omega t + \left(\frac{a\pi n}{l} \right)^2 b_n = \\ = \frac{2}{\pi n} \left(g(1 - (-1)^n) + (-1)^{n+1} A\omega^2 \sin \omega t \right). \end{aligned}$$

Звідси

$$b_n = \frac{2(1 - (-1)^n) g l^2}{a^2 (\pi n)^3}, \quad a_n = \frac{2(-1)^{n+1} A\omega^2 l^2}{\pi n ((a\pi n)^2 - \omega^2 l^2)}.$$

Сталі A_n і B_n знайдемо, задовольнивши однорідні умови з

(134)

$$\begin{cases} g_n(0) = A_n + b_n = 0, \\ g_n'(0) = B_n \frac{a\pi n}{l} + a_n \omega = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} A_n = -b_n, \\ B_n = -\frac{a_n \omega l}{a\pi n}; \end{cases}$$

$$A_n = \frac{2((-1)^n - 1)gl^2}{a^2(\pi n)^3}, \quad B_n = \frac{2(-1)^n A \omega^3 l^3}{a(\pi n)^2((a\pi n)^2 - \omega^2 l^2)}.$$

Підставивши знайдені сталі a_n , b_n , A_n , B_n в (135) і (132), одержимо розв'язок задачі (128)

$$\begin{aligned} v^2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} & \left(\frac{2((-1)^n - 1)gl^2}{a^2(\pi n)^3} \cos \frac{a\pi n}{l} t + \frac{2(-1)^n A \omega^3 l^3}{a(\pi n)^2((a\pi n)^2 - \omega^2 l^2)} \times \right. \\ & \times \sin \frac{a\pi n}{l} t + \frac{2(-1)^{n+1} A \omega^2 l^2}{\pi n((a\pi n)^2 - \omega^2 l^2)} \sin \omega t + \left. \frac{2(1 - (-1)^n)gl^2}{a^2(\pi n)^3} \right) \sin \frac{\pi n}{l} x. \end{aligned} \quad (136)$$

Підставивши v^1 і v^2 з (131) і (136) у формулу $u = v^1 + v^2 + w$, одержимо розв'язок початкової задачі (121)-(123) у вигляді

$$\begin{aligned} u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} & \left(\frac{2(-1)^n P_0 l}{\pi n A E} \cos \frac{a\pi n}{l} t + \frac{2(-1)^n A \omega l}{a(\pi n)^2} \left(1 - \frac{\omega^2 l^2}{(a\pi n)^2 - \omega^2 l^2} \right) \times \right. \\ & \times \sin \frac{a\pi n}{l} t + \frac{2(-1)^{n+1} A \omega^2 l^2}{\pi n((a\pi n)^2 - \omega^2 l^2)} \sin \omega t + \left. \frac{2(1 - (-1)^n)gl^2}{a^2(\pi n)^3} \right) \sin \frac{\pi n}{l} x + \\ & + \frac{Ax}{l} \sin \omega t, \quad 0 \leq x \leq l, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (137)$$

Формула (137) дає розв'язок задачі за умови $\omega \neq \frac{a\pi n}{l}$,

тобто коли частота вимушених коливань не співпадає з

частотою власних коливань бурильної колони на одній з гармонік $p_n = \lambda_n a = \frac{n\pi}{l} a$. У процесі буріння свердловини довжина колони труб поступово зростає і цілком можливим є випадок, коли при якомусь n власна і вимушена частота стануть рівними. Наприклад, якщо частота «грунтової» гармоніки $\omega = 3$ Гц, $a = 5100$ м/с, то умова $\lambda_1 = \frac{\omega}{a}$ справдиться при $l = \frac{\pi a}{\omega} = \frac{3,14 \cdot 5100}{3} = 5338$ (м), тобто при $l = 5338$ м в розв'язку задачі з'являються доданки з амплітудою, яка з бігом часу нескінченно зростає. Це характерно для резонансного режиму буріння. З метою уникнення поломки труб потрібно при наближенні довжини колони до критичної змінити ω , тобто вибрати іншу швидкість обертання долота. ◀

17. Розв'язати задачу про усталені крутильні коливання однорозмірної бурильної колони довжиною l , розрахункову схему якої наведено на рис. 6. Вона включає обертальні елементи ротора 1 зі зведеним моментом інерції J_0 , бурильні труби 2 та долото 3. На обертальні елементи ротора 1 при заданій кутовій швидкості ω_0 діє зведений момент сил опору H_0 , а на долото – момент сил опору M_1 з боку розбурюваних порід і крутний момент $M^* \sin(pt + \chi)$, що моделює збурення з частотою p і зсувом фаз χ генероване долотом 3. Врахувати вплив в'язкого тертя, яке виникає в результаті взаємодії труб з

промивальною рідиною, і прийняти його пропорційним швидкості обертання бурильної колони.

► У результаті додавання сил, що діють на нескінченно малий елемент труби, диференціальне рівняння обертального руху бурильної колони подаємо у вигляді

$$jG \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2} - h^\varphi \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = j_k q_k \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (138)$$

де j, G, q_k, h_k^φ – відповідно полярний момент інерції

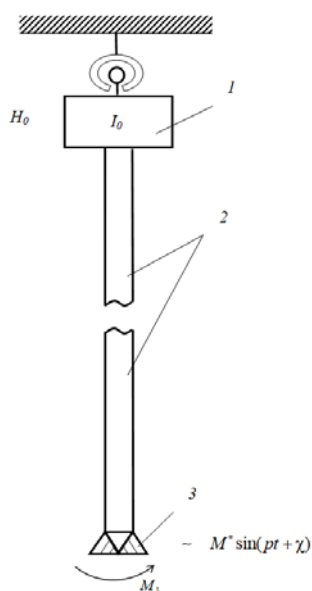


Рисунок 6

поперечного перерізу труб, модуль зсуву, густина матеріалу, з якого виготовлено труби, коефіцієнт в'язкого тертя, $\varphi(x, t)$ – кут повороту x -перерізу колони в момент часу t .

Переносний рух

Взявши рівномірний усталений обертальний рух бурильної колони з кутовою швидкістю за *переносний*, кут повороту $\varphi^e(x, t)$ подамо сумою доданків

$$\varphi^e(x, t) = \omega_0 t + \varphi^0(x). \quad (139)$$

Наявність другого доданка засвідчує закручування колони силами опору на кут $\varphi^0(x)$. Цей початковий кут (аналог статички при поздовжніх коливаннях) визначаємо з

рівняння

$$jG \frac{d^2 \varphi^0(x)}{dx^2} = h^0 \omega_0, \quad 0 < x < l. \quad (140)$$

Крайові та початкові умови для *рівняння переносного руху* (в (138) слід взяти замість $\varphi(x, t)$ функцію $\varphi^e(x, t)$) наступні

$$\varphi^e(0, t) = \omega_0 t, \quad jG \frac{\partial \varphi^e(l, t)}{\partial x} = -M_1, \quad t \geq 0, \quad (141)$$

$$\varphi^e(x, 0) = \varphi^0(x), \quad \frac{\partial \varphi^e(x, 0)}{\partial t} = \omega_0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (142)$$

Зінтегрувавши рівняння (140), одержимо

$$\varphi^e(x, t) = \omega_0 t + \frac{h^0 \omega_0}{jG} \frac{x^2}{2} + C^0 x + S^0, \quad (143)$$

де C^0, S^0 – довільні сталі.

Спочатку знайдемо початковий кут закручування $\varphi^0(x)$. Для цього умови (141) перепишемо у вигляді $\varphi^0(0) = 0$,

$$jG \frac{d\varphi^0(l)}{dx} = -M_1, \text{ звідки знаходимо } S^0 = 0, \quad C^0 = -\frac{M_1 + h^0 \omega_0 l}{jG}.$$

Отже,

$$\varphi^0(x) = \frac{h^0 \omega_0}{jG} \frac{x^2}{2} - \frac{M_1 + h^0 \omega_0 l}{jG} x. \quad (144)$$

Відносний рух

Сформулюємо задачу для відносного руху. Диференціальне рівняння крутильних коливань одержимо із

(138) шляхом заміни $\varphi(x, t)$ на $\varphi^r(x, t)$.

Крайові умови подамо у вигляді:

на усті свердловини

$$J_0 \frac{\partial^2 \varphi^r(0, t)}{\partial t^2} = -jG \frac{\partial \varphi^r(0, t)}{\partial x} - H_0 \frac{\partial \varphi^r(0, t)}{\partial t}, \quad t \geq 0, \quad (145)$$

на долоті

$$jG \frac{\partial u^r(l, t)}{\partial x} = -iM^* e^{i(pt+\chi)}, \quad t \geq 0. \quad (146)$$

У (146) враховано, що $M^* \sin(pt + \chi) = \text{Re}(-iM^* e^{i(pt+\chi)})$.

Оскільки коливний процес розглядаємо усталеним, а крайову умову (146) подано гармонічною функцією, то задачу можна розглядати без початкових умов (див. Зауваження 4), а розв'язок шукати, згідно з *методом механічного імпедансу*, в комплекснозначному вигляді

$$\varphi^r(x, t) = B^\varphi \sin(\beta^\varphi x + b^\varphi) e^{i(pt+\chi)}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad t \geq 0. \quad (147)$$

Параметр β^φ визначаємо зі співвідношення

$$\beta^\varphi = \frac{p^2 qj - ip h^\varphi}{jG}, \quad (148)$$

а комплекснозначні коефіцієнти B^φ, b^φ складника кута повороту у відносному русі колони – з крайових умов (145), (146)

$$b^\varphi = \arctg \frac{jG\beta^\varphi}{ipH_0 - p^2 J_0}, \quad B^\varphi = -\frac{iM^*}{jG\beta^\varphi \cos(\beta^\varphi l + b^\varphi)}. \quad (149)$$

Сумарний кут повороту x -перерізу бурильної колони дорівнює

$$\varphi(x, t) = \varphi^e(x, t) + \tilde{\varphi}^r(x, t), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t \geq 0, \quad (150)$$

де $\varphi^e(x, t) = \omega_0 t + \varphi^0(x)$ – складник кута повороту в переносному русі, $\varphi^0(x)$ – початковий кут закручення колони труб (див. формулу (144)),

$$\tilde{\varphi}^r(x, t) = \operatorname{Re} \left[B^\varphi \sin(\beta^\varphi x + b^\varphi) e^{i(pt + \chi)} \right] \quad (151)$$

складник кута повороту у відносному русі бурильної колони.

Враховуючи зв'язки між кутами повороту і крутними моментами у відносному та переносному рухах

$$M^e(x, t) = -jG \frac{\partial \varphi^e(x, t)}{\partial x}, \quad M^r(x, t) = -jG \frac{\partial \varphi^r(x, t)}{\partial x},$$

значення сумарного крутного моменту та його складників у x -перерізі колони труб подано у вигляді

$$M(x, t) = M^e(x, t) + \tilde{M}^r(x, t), \quad M^e(x, t) = -h^\varphi \omega_0 x - C^\varphi jG,$$

$$\tilde{M}^r(x, t) = -jG \operatorname{Re} \left[B^\varphi \beta^\varphi \cos(\beta^\varphi x + b^\varphi) e^{i(pt + \chi)} \right].$$

Зауваження. Збурення на долоті можна взяти полігармонічним $\sum_{k=1}^4 M_k^* \sin(p_k t + x_k)$. В цьому випадку воно буде враховувати «грунтові» і зубцеві гармоніки. Перші (на частоті p_1) пов'язують з перекочуванням шарошок як конусів хвилеподібним вибоєм, а інші (на частотах p_2, p_3, p_4) – із взаємодією периферійних вінців тришарошкового долота з вибоєм. Розв'язок (147), згідно з *принципом суперпозиції*, буде

мати вигляд $\varphi^r(x, t) = \sum_{k=1}^4 B_k^\varphi \sin(\beta_k^\varphi x + b_k^\varphi) e^{i(p_k t + \chi_k)}$. ◀

Завдання для самостійного розв'язання

30. Розв'язати крайову задачу

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + x(x-l)t^2, \quad 0 < x < l, \quad t > 0;$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t \geq 0;$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad 0 \leq x \leq l.$$

31. Знайти розв'язок неоднорідної мішаної задачі

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + 4x + 8e^t \cos x,$$

$$0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0;$$

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 2t, \quad u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = \pi t, \quad t \geq 0;$$

$$u(x, 0) = \cos x, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 2x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

32. Знайти розв'язок неоднорідної мішаної задачі

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - 10u(x, t) = 2 \sin 2x - 10 - 20x,$$

$$0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0;$$

$$u(0, t) = 1, \quad \frac{\partial u(\pi/2, t)}{\partial x} = 2, \quad t \geq 0;$$

$$u(x, 0) = 2x + 1, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

33. Розв'язати мішану задачу

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0;$$

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = A \cos \omega t, \quad t \geq 0;$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad 0 \leq x \leq l.$$

34. Вивчити вимушені поперечні коливання струни, кінець $x=0$ якої закріплений, на кінці $x=l$ діє сила, яка викликає зміщення $A \sin \omega t$, $t > 0$, де ω – задане додатне число, що не дорівнює числам вигляду $\frac{a\pi n}{l}$, $n \in \mathbb{N}$, а початкові зміщення і початкові швидкості її точок дорівнюють нулю.

35. До струни довжиною l із жорстко закріпленими кінцями з моменту часу $t=0$ прикладено неперервно розподілену силу з густиною $g(x, t) = Ax \sin \omega t$, $A = \text{const}$, $0 < x < l, t > 0$. Знайти коливання струни в середовищі без опору, дослідити можливість резонансу і знайти розв'язок у випадку резонансу.

36. Нехай стержень довжиною l , кінець $x=0$ якого жорстко закріплений, перебуває у стані спокою. У момент часу $t=0$ до його вільного кінця $x=l$ прикладено силу

$\bar{Q} = \text{const}$, яка діє вздовж стержня. Знайти зміщення стержня $u(x, t)$, $0 < x < l$, $t > 0$.

37. Знайти закон вільних коливань горизонтальної струни, правий кінець $x = l$ якої закріплений, а лівий $x = 0$ рухається за законом $u(0, t) = \frac{l}{10} \sin \frac{a\pi t}{l}$, $t \geq 0$. Початкові швидкості та відхилення точок струни нульові.

2.4 Розв'язування задачі Коші та мішаних задач для параболічних рівнянь

Класичною задачею Коші для рівняння теплопровідності називається задача про знаходження функції u , яка неперервна й обмежена в $\Pi_T^3 = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}^3, t \in (0, T)\}$ разом зі своїми похідними другого за x та першого за t порядків, задовольняє рівняння

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \Delta u(x, t) + f(x, t), \quad (x, t) \in \Pi_T^3, \quad (152)$$

і початкову умову

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (153)$$

де $x = (x_1, x_2, x_3)$; f і φ – задані функції; $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$ –

оператор Лапласа.

Якщо функція f неперервна й обмежена в Π_T^3 разом зі своєю похідною за x , а функція φ неперервна й обмежена в $\mathbb{R}^3$, то розв'язок задачі Коші (152), (153) існує, єдиний в класі обмежених функцій і зображується формулою Пуассона

$$u(x, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\xi) e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2 t}} d\xi + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(\xi, \tau)}{(2a\sqrt{\pi(t-\tau)})^3} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi d\tau, \quad x \in \Pi_T^3, \quad (154)$$

$$\text{де } |x - \xi| = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}.$$

Якщо ж функція f неперервна в Π_T^3 і є гармонічною за x при кожному фіксованому $t \geq 0$, то функція

$$u(x, t) = \int_0^t f(x, \tau) d\tau, \quad (x, t) \in \Pi_T^3,$$

є розв'язком задачі Коші (1), (2) з $\varphi = 0$.

Зрозуміло, що розв'язок (154) нескладно перенести на випадки $(x_1, x_2, t) \in \Pi_T^2$ та $(x_1, t) \in \Pi_T^1$.

Мішана задача для рівнянь параболічного типу формулюється наступним чином

$$\begin{aligned} \rho(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) - q(x) u(x, t) + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \\ \alpha u(0, t) + \beta \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} &= \mu_1(t), \quad \gamma u(l, t) + \delta \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = \mu_2(t), \quad t \geq 0; \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \end{aligned} \quad (155)$$

де ρ, p, p', q – неперервні функції на $[0, l]$, причому $\rho(x) > 0$, $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$, $x \in [0, l]$ а f, μ_1, μ_2 і φ – задані достатньо гладкі функції, які узгоджені між собою, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$.

Якщо $\beta = 0, \delta = 0$, то задача (155) називається *першою мішаною задачею*, при $\alpha = 0, \gamma = 0$ – *другою мішаною задачею*. У загальному випадку задача (155) називається *третьою мішаною задачею*. Методику розв'язування задачі (155) детально описано в пунктах 2.2, 2.3.

Приклади розв'язання задач

18. Розв'язати задачу Коші

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + xt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0; \\ u(0,t) &= x, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (156)$$

► Згідно з формулою (154) розв'язком задачі є функція

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} z e^{-\frac{(x-z)^2}{t}} dz + \int_0^t \frac{\tau d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int_{-\infty}^{+\infty} z e^{-\frac{(x-z)^2}{t-\tau}} dz, \\ x &\in \mathbb{R}, t > 0. \end{aligned} \quad (157)$$

Обчислимо кожний з інтегралів окремо:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} z e^{-\frac{(x-z)^2}{t}} dz = \left| \frac{z-x}{\sqrt{t}} = y, \quad dz = \sqrt{t} dy, \quad \frac{z}{y} \left| \frac{-\infty}{-\infty} \right| \frac{+\infty}{+\infty} \right| = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x + \sqrt{t} y) e^{-y^2} dy = \frac{x}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy + \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y e^{-y^2} dy = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} x \sqrt{\pi} - \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2} e^{-y^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = x; \\ I_2 &= \frac{1}{\pi} \int_0^t \frac{\tau d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} z e^{-\frac{(x-z)^2}{t-\tau}} dz = \left| \frac{z-x}{\sqrt{t-\tau}} = y, \quad dz = \sqrt{t-\tau} dy, \quad \frac{z}{y} \left| \frac{-\infty}{-\infty} \right| \frac{+\infty}{+\infty} \right| = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \tau \int_{-\infty}^{+\infty} (x + \sqrt{t-\tau} y) e^{-y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \tau \left(x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy + \sqrt{t-\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} y e^{-y^2} dy \right) d\tau = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(x \sqrt{\pi} \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \int_0^t \tau \sqrt{t-\tau} d\tau e^{-y^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} \right) = \frac{xt^2}{2}. \end{aligned}$$

Якщо підставити одержані вирази для I_1 та I_2 у формулу (157), то одержимо розв'язок задачі (156)

$$u(x, t) = \frac{xt^2}{2} + x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0.$$

Зауваження. Оскільки права частина рівняння $f(x, t) = xt$ є гармонічною функцією за $x \in \mathbb{R}$ при кожному фіксованому $t \geq 0$ і має однаковий з початковою умовою вигляд щодо x , то розв'язок задачі (156) можна шукати у вигляді $u(x, t) = g(t)x$. Тоді для g одержимо задачу $g'(t) = t$,

$$g(0) = 1, \quad \text{розв'язок якої} \quad g(t) = \frac{t^2}{2} + 1, \quad t \geq 0. \quad \text{Тому}$$

$$u(x, t) = \frac{xt^2}{2} + x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0. \quad \text{Цей розв'язок збігається з}$$

одержаним вище, що впливає з єдиності розв'язку задачі Коші. ◀

19. Початкова температура стержня ($0 \leq x \leq l$) з теплоізолюваною бічною поверхнею дорівнює $U_0 = \text{const}$, а на його кінцях підтримується незмінна температура $u(0, t) = U_1$, $u(l, t) = U_2$, де U_1, U_2 – сталі. Знайти температуру u стержня при $t > 0$, а також стаціонарну температуру $\tilde{u}(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t)$, $0 \leq x \leq l$.

► Задача зводиться до знаходження розв'язку рівняння

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (158)$$

який задовольняє умови

$$u(0, t) = U_1, \quad u(l, t) = U_2, \quad t \geq 0, \quad (159)$$

$$u(x,0) = U_0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (160)$$

Шукатимемо розв'язок задачі (158)-(160) у вигляді суми двох функцій

$$u(x,t) = w(x) + v(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0.$$

Оскільки крайові умови не залежать від t , то вважатимемо, що w залежить тільки від x і є розв'язком задачі

$$\begin{aligned} w''(x) &= 0, \quad 0 \leq x \leq l, \\ w(0) &= U_1, \quad w(l) = U_2. \end{aligned} \quad (161)$$

Для v одержуємо задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \\ v(0,t) &= 0, \quad v(l,t) = 0, \quad t \geq 0, \\ v(x,0) &= U_0 - w(x), \quad 0 \leq x \leq l. \end{aligned} \quad (162)$$

Загальний розв'язок рівняння із задачі (161) $w(x) = C_1 x + C_2$. Якщо задовольнити крайові умови, то дістанемо

$$C_2 = U_1, \quad C_1 l + C_2 = U_2, \quad C_1 = U_1 + \frac{U_2 - U_1}{l} x, \quad C_2 = U_1. \quad \text{Отже,}$$

розв'язок задачі (161) має вигляд (див. табл. 1)

$$w(x) = U_1 + \frac{U_2 - U_1}{l} x.$$

Задачу (162) будемо розв'язувати методом відокремлення змінних. Підставивши $v(x,t) = X(x)T(t)$ в рівняння і відокремивши змінні, одержимо два звичайні диференціальні рівняння

$$T'(t) + a^2 \lambda^2 T(t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (163)$$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (164)$$

Якщо задовольнити нульові крайові умови функцією v , то одержимо

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \quad (165)$$

Задача Штурма-Ліувілля (164)-(165) має *власні числа* $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$

і *власні функції* $X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}$, $n \in \mathbb{N}$. Підставивши $\lambda = \lambda_n$ у

(163), знайдемо загальний розв'язок цього рівняння

$$T_n(t) = A_n \cdot e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Складемо ряд $v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l}$ і задовольнимо

початкову умову. Одержимо рівність

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} = U_0 - \frac{U_2 - U_1}{l} x - U_1, \quad 0 \leq x \leq l.$$

Звідси випливає, що

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \left(U_0 - \frac{U_2 - U_1}{l} x - U_1 \right) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{l} \int_0^l (U_0 - U_1) \sin \frac{n\pi x}{l} dx - \\ &- \frac{2}{l} \int_0^l \frac{U_2 - U_1}{l} x \sin \frac{n\pi x}{l} dx = (-1)^n \frac{2}{n\pi} (U_2 - U_0) + \frac{2}{n\pi} (U_0 - U_1), \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Отже, розв'язок задачі (162) має вигляд

$$v(x, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left((-1)^n (U_2 - U_0) + (U_0 - U_1) \right) e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l},$$

$$0 \leq x \leq l, \quad t \geq 0.$$

Остаточно розв'язок задачі (158)-(160) набуде вигляду

$$u(x, t) = U_1 + \frac{U_2 - U_1}{l} x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left((-1)^n (U_2 - U_0) + (U_0 - U_1) \right) e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad t \geq 0. \quad (166)$$

Знайдемо тепер стаціонарну температуру, перейшовши до границі при $t \rightarrow +\infty$ під знаком суми рівномірно збіжного при $t \geq t_0 > 0$ ряду в (166),

$$\tilde{u}(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = U_1 + \frac{U_2 - U_1}{l} x, \quad 0 \leq x \leq l. \quad \blacktriangleleft$$

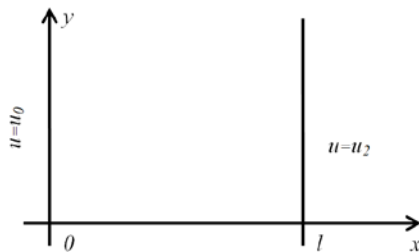


Рисунок 7

20. Однорідний пласт з початковою температурою u_1 прогрівається плоскою (у площині yz) батареєю свердловин, через які нагрівається вода з

температурою $u_0 > u_1$. На відстані l від площини пласт закінчується і обмежується плоскою стінкою, паралельною yz (див. рис. 7). Температура зовнішнього середовища, що межує з цією стінкою $u_2 > u_0$ і коефіцієнт тепловіддачі α від пласта в зовнішнє середовище відомі. Внутрішні джерела тепла

відсутні. Дослідити нестационарний процес поширення тепла в зоні пласта $0 \leq x \leq l$, нехтуючи відведенням (втратою) тепла через покрівлю і підшову та залежність температури від змінної y .

► Оскільки згідно з умовою задачі можна знехтувати відведенням тепла через покрівлю і підшову пласта, то температура u не залежить від змінної z . Окрім цього, ми не враховуємо залежність температури u від змінної y , тобто вважаємо пласт нескінченним вздовж осі y і нехтуємо крайовими умовами по координаті y . Тому будемо розглядати одновимірну задачу нестационарної теплопровідності (див., наприклад, задачу 7).

Диференціальне рівняння з частинними похідними візьмемо у вигляді

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (167)$$

де $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, k – коефіцієнт теплопровідності, c – теплоємність, ρ – густина пласта; $u(x,t)$ – температура в x -перерізі пласта в момент часу t .

Приймемо площину батареї за площину yz , а свердловини розміщеними настільки близько одна до одної, що батарею можна замінити галереєю. Крайову умову для $x = 0$ подамо наступним чином

$$u(0,t) = u_0, \quad t \geq 0. \quad (168)$$

Оскільки на стінці l похідна по зовнішній до пласта нормалі $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}$, то крайову умову при $x = l$ запишемо так

$$\alpha u(l,t) + k \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = \alpha u_2, \quad t \geq 0. \quad (169)$$

Початкову умову беремо у вигляді

$$u(x,0) = u_1, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (170)$$

Крайові умови (168), (169) неоднорідні, тому розв'язувати задачу (167)-(170) методом Фур'є поки що не можна. Підберемо довільну функцію $u^*(x,t)$, що задовольняє обидвом крайовим умовам. Найзручніше за u^* вибрати *усталений (стаціонарний) розподіл температур*, що задовольняє (168), (169),

$$u^*(x,t) = u_{\text{уст}}(x), \quad 0 \leq x \leq l.$$

Рівняння (167) набуде вигляду $\frac{d^2 u_{\text{уст}}}{dx^2} = 0$, звідки

$$u_{\text{уст}}(x) = k_1 x + k_2. \quad \text{Задовольняючи (168), (169) дістанемо}$$

$$k_1 = u_0, \quad k_2 = -\frac{\alpha(u_0 - u_2)}{\alpha l + k}.$$

$$\text{Отже, } u_{\text{уст}}(x) = u_0 - \frac{\alpha \Delta u_2}{\alpha l + k} x, \quad 0 \leq x \leq l, \quad \text{де } \Delta u_2 = u_0 - u_2 > 0.$$

Проведемо заміну $u(x,t) = u_{\text{уст}}(x) + v(x,t)$, $0 < x < l, t > 0$.

Рівняння (167) і крайові умови (168), (169) будуть для v

однорідними

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \quad (171)$$

$$v(0,t) = 0, \quad \alpha v(l,t) + k \frac{\partial v(l,t)}{\partial x} = 0, \quad t \geq 0. \quad (172)$$

Початкову умову перепишемо у вигляді

$$v(x,0) = \frac{\alpha \Delta u_2}{\alpha l + k} x - \Delta u_1, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (173)$$

де $\Delta u_1 = u_0 - u_1 > 0$.

Крайові умови задачі (171)-(173) однорідні, тому застосуємо метод Фур'є. На *першому етапі* шукаємо *власні функції* задачі. Розв'язок (171) подамо у вигляді

$$v(x,t) = X(x)T(t).$$

Розділивши змінні $\frac{X''}{X} = \frac{T'}{a^2 T} = -\mu$, одержимо задачу

Штурма-Ліувілля для $X(x)$

$$X'' + \mu X = 0, \quad X(0) = 0, \quad \alpha X(l) + kX'(l) = 0. \quad (174)$$

Розв'яжемо диференціальне рівняння із (174) та рівняння для T

$$T'(t) + \mu a^2 T(t) = 0, \quad t > 0. \quad (175)$$

Отже, $X(x) = C_1 \cos \sqrt{\mu} x + C_2 \sin \sqrt{\mu} x$, $0 \leq x \leq l$.

Перша з умов (174) для $X(x)$ дає $C_1 = 0$, тому нетривіальний розв'язок, що задовольняє першу умову, набуде вигляду

$$X(x) = C_2 \sin \sqrt{\mu} x, \quad 0 \leq x \leq l, \quad C_2 \neq 0, \quad \mu > 0. \quad (176)$$

Підставимо (176) в другу умову із (174)

$$\alpha C_2 \sin \sqrt{\mu} l + k C_2 \cos \sqrt{\mu} l = 0,$$

звідки при $C_2 \neq 0$ одержимо

$$\operatorname{tg} \sqrt{\mu} l + \frac{k}{\alpha} \sqrt{\mu} = 0. \quad (177)$$

Замість невідомої $\mu \neq 0$ введемо безрозмірну величину

$$v = l \sqrt{\mu} \quad (v > 0).$$

Рівняння (177) набуде вигляду

$$\operatorname{tg} v = -pv, \quad (178)$$

де $p = \frac{k}{\alpha l} > 0$.

Позначимо через v_n додатні корені трансцендентного рівняння (178) ($n = 1, 2, 3, \dots$). Вважаємо, що ці корені знайдено з достатньою для задачі точністю. Схему графічного розв'язку рівняння (178) подано на рис. 8.

Нульовий корінь рівняння (178) не беремо, бо при $v = 0$ маємо $\mu = 0$, $X(x) \equiv 0$.

Із (178), (176) одержимо

$$\operatorname{tg} v_n = -pv_n, \quad (179)$$

$$\sqrt{\mu_n} = \frac{v_n}{l}, \quad X_n(x) = \sin \frac{v_n x}{l}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (180)$$

Функції в (180) – *власні функції* задачі, сталу C_2 взято

рівною 1. Розв'яжемо (175) при $\mu = \mu_n = \left(\frac{v_n}{l}\right)^2$. Отже,

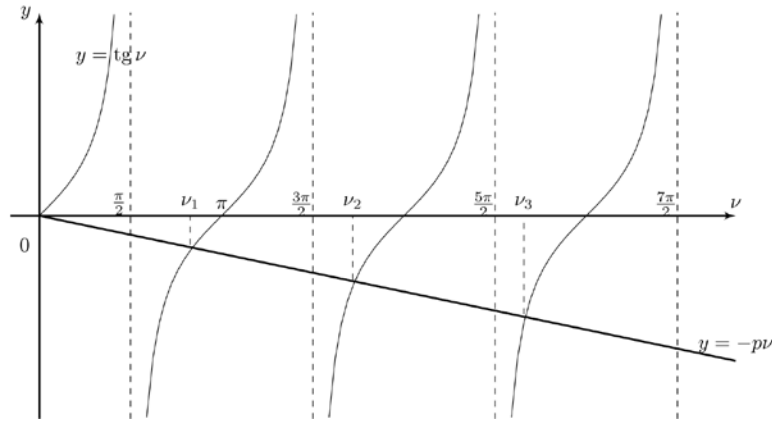


Рисунок 8

$$T_n(t) = A_n e^{-\left(\frac{v_n a}{l}\right)^2 t}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Для розв'язку задачі (171)-(173) складемо ряд

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{v_n a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{v_n x}{l}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad t \geq 0. \quad (181)$$

Задовольнимо початкову умову (173)

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{v_n x}{l} = \frac{\alpha \Delta u_2}{\alpha l + k} x - \Delta u_1. \quad (182)$$

Розклавши праву частину (182) в ряд Фур'є за синусами, одержимо

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \left(\frac{\alpha \Delta u_2}{\alpha l + k} x - \Delta u_1 \right) \sin \frac{v_n x}{l} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{2}{v_n} \left(\left(\frac{\alpha \Delta u_2}{\alpha l + k} x - \Delta u_1 \right) \cos \frac{v_n x}{l} \Big|_0^l - \int_0^l \frac{\alpha \Delta u_2}{\alpha l + k} \cos \frac{v_n x}{l} dx \right) = \\
&= -\frac{2}{v_n} \left(\left(\frac{\alpha \Delta u_2 l}{\alpha l + k} - \Delta u_1 \right) \cos v_n + \Delta u_1 - \frac{\alpha \Delta u_2 l}{(\alpha l + k) v_n} \sin v_n \right).
\end{aligned}$$

Підставляючи (183) у (181) і використовуючи рівність $u(x, t) = u_{ycm}(x) + v(x, t)$, одержимо розв'язок задачі (167)-(170)

$$u(x, t) = u_0 - \frac{\alpha \Delta u_2}{\alpha l + k} x + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{v_n a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{v_n x}{l}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad t \geq 0. \quad \blacktriangleleft$$

Завдання для самостійного розв'язання

38. Розв'язати задачі Коші:

а) $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0;$

$$u(x, 0) = A e^{-x^2}, \quad -\infty < x < +\infty;$$

б) $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0;$

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_0, & x \in [x_1, x_2], \\ 0, & x \notin [x_1, x_2]; \end{cases}$$

в) $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = 4 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + 5, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0;$

$$u(x, 0) = 4, \quad -\infty < x < +\infty;$$

г) $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + 2e^{-t} \cos t, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0;$

$$u(x, 0) = 2, \quad -\infty < x < +\infty.$$

39. Знайти розв'язок неоднорідної мішаної задачі

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + u(x,t) + xt(2-t) + 2 \cos t,$$

$$0 < x < \pi, \quad t > 0;$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = t^2, \quad \frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = t^2, \quad t \geq 0,$$

$$u(x,0) = \cos 2x, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

40. Дано тонкий однорідний стержень довжиною l , початкова температура якого дорівнює $A \frac{x}{l}$, $0 \leq x \leq l$. На кінці $x=0$ температура підтримується нульовою, а на кінці $x=l$ – змінюється за законом $u(l,t) = Ae^{-t}$, $t \geq 0$. Знайти розподіл температури в стержні при $t > 0$.

41. Знайти закон охолодження однорідного стержня довжиною l , якщо на його лівому кінці $x=0$ підтримується нульова температура, а правий кінець стержня $x=l$ теплоізований. Початкова температура точок стержня

$$u(x,0) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{l}{2}, \\ u_0, & \frac{l}{2} < x \leq l. \end{cases}$$

42. Початкова температура стержня довжиною l є відомою функцією φ . Температури кінців стержня сталі, $u(0,t) = C_1$, $u(l,t) = C_2$, $t \geq 0$, а на бічній поверхні відбувається за законом Ньютона теплообмін із середовищем,

температура якого $u_0 = \text{const}$. Знайти температуру точок стержня в довільний момент часу $t > 0$.

43. Знайти закон зміни температури в однорідному ізотропному стержні довжиною l при вільному теплообміні, якщо початкова температура цього стержня визначається рівністю $u(x, 0) = A \frac{x^2}{l^2}$, $A = \text{const}$. Лівий кінець стержня теплоізований, а на правому кінці підтримується стала температура $u(l, t) = A$.

2.5 Розв'язування крайових задач для еліптичних рівнянь методом відокремлення змінних

При дослідженні стаціонарних, тобто незалежних від часу, процесів різноманітної природи, як правило, приходять до рівнянь еліптичного типу, з яких найпоширенішими є рівняння Лапласа (6) і рівняння Пуассона (5). У випадку трьох незалежних змінних вони відповідно набувають вигляду (6а) і (5а).

Функція u називається гармонічною в області D , якщо вона в цій області двічі неперервно диференційовна і задовольняє рівняння Лапласа.

Основні крайові задачі для рівнянь еліптичного типу описуються умовами (12)-(14).

Якщо крайові умови для рівняння Лапласа одночасно неоднорідні за змінними x та y , то розв'язок можна шукати у вигляді суми $u = w + v$, де w – розв'язок задачі з однорідними крайовими умовами за змінною x і неоднорідними – за змінною y , а v – розв'язок аналогічної задачі з неоднорідними крайовими умовами за змінною x і однорідними – за змінною y . Якщо область $D \subset \mathbb{R}^2$ є круговою (круг, кільце, зовнішність

круга, сектор чи його частина), то від декартових координат (x,y) зручно перейти до полярних (r,φ) .

Приклади розв'язання задач

21. Знайти стаціонарний розподіл тепла в пласті, який має форму прямокутного паралелепіпеда і простягається вздовж осі Oz настільки далеко, що його довжину можна прийняти рівною нескінченності. Нехай потужність пласта b , ширина пласта l . Внутрішніх джерел тепла немає. На бокових стінках $x=0$, $x=l$ і на підшві $y=0$ пласта задано одну і ту ж температуру, яку приймемо за нуль відліку температур. На покрівлі $y=b$ пласта задано постійну температуру u_0 .

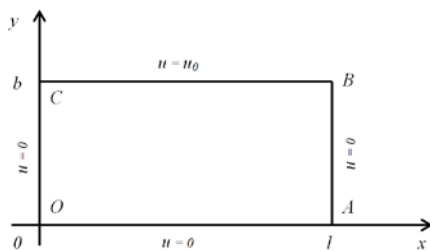


Рисунок 9

► У площині Oxy утворилась прямокутна область $OABC$ (рис. 9). Сформулюємо задачу Діріхле про стаціонарний розподіл тепла у прямокутній області без внутрішніх джерел тепла,

на трьох сторонах якої (CO , OA , AB) штучно підтримується нульова температура, а на четвертій (BC) – стала температура u_0 :

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < y < b; \quad (184)$$

$$u(0,y) = 0, \quad u(l,y) = 0, \quad 0 \leq y \leq b; \quad (185)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = u_0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (186)$$

Зрозуміло, що в точках В, С маємо розрив крайових умов, який, щоправда, не впливає на хід розв'язку.

Ненульовий розв'язок рівняння (184) при однорідних крайових умовах (185) шукаємо у вигляді добутку $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Після відокремлення змінних маємо, враховуючи (185), задачу Штурма-Ліувілля для X

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \quad (187)$$

власними числами якої є $\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}$, а відповідними власними

функціями – $X_n(x) = \sin \frac{\pi n x}{l}$, $n \in \mathbb{N}$. Отже, підсумовуючи

результати першого етапу, розв'язок задачі (184)-(186) будемо шукати у вигляді

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) \sin \frac{\pi n x}{l}. \quad (188)$$

Перейдемо до другого етапу розв'язування задачі. Підставивши (188) в рівняння (184) та крайові умови (186) одержимо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[Y_n''(y) - \frac{\pi^2 n^2}{l^2} Y_n(y) \right] \sin \frac{\pi n x}{l} = 0, \quad (189)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} Y_n(0) \sin \frac{\pi n x}{l} = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(b) \sin \frac{\pi n x}{l} = u_0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (190)$$

Зауважимо, що кожне із співвідношень (189), (190) є

результатом розвинення (розкладу) деякої функції у тригонометричний ряд за власними функціями $\sin \frac{\pi n x}{l}$ на відрізка $[0; l]$.

Відомо, що розвинення деякої функції $\varphi(x)$ у тригонометричний ряд за синусами має вигляд

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{\pi n x}{l},$$

а коефіцієнти цього ряду визначаються за формулою

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx.$$

Якщо $\varphi(x) = 0$ при $0 \leq x \leq l$, то всі $a_n = 0$. Якщо ж $\varphi(x) = u_0 = \text{const}$ при $0 \leq x \leq l$, то

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l u_0 \sin \frac{\pi n x}{l} dx = \frac{2u_0}{l} \left(-\frac{l}{\pi n} \right) \cos \frac{\pi n x}{l} \Big|_0^l = \\ &= \frac{2u_0}{\pi n} [1 - \cos(\pi n)] = \frac{2u_0}{\pi n} [1 - (-1)^n]. \end{aligned}$$

У (189) в тригонометричних ряд за власними функціями $\sin \frac{\pi n x}{l}$ розвинено тотожний нуль. Усі коефіцієнти цього розвинення дорівнюють нулю

$$Y_n''(y) - \frac{\pi^2 n^2}{l^2} Y_n(y) = 0, \quad 0 \leq y \leq b, \quad (191)$$

що дає рівняння для функції $Y_n(y)$. За аналогією з

вищесказаним одержуємо першу крайову умову для $Y_n(y)$

$$Y_n(0) = 0. \quad (192)$$

Друге співвідношення в (190) – результат розвинення в ряд Фур’є константи u_0 , тому коефіцієнти цього розкладу рівні

$$Y_n(b) = \frac{2u_0}{\pi n} [1 - (-1)^n] \quad (193)$$

і дають другу крайову умову для $Y_n(y)$.

Загальний розв’язок рівняння (191) подамо у вигляді

$$Y_n(y) = A_n \operatorname{ch} \frac{\pi n y}{l} + B_n \operatorname{sh} \frac{\pi n y}{l}, \quad 0 \leq y \leq b,$$

де A_n, B_n – довільні сталі. Задовольняючи (192), (193),

одержимо $A_n = 0$, $B_n = \frac{2u_0}{\pi n \operatorname{sh} \frac{\pi n b}{l}} [1 - (-1)^n]$. Зауважимо, що

$$1 - (-1)^n = \begin{cases} 0 & \text{при } n = 2m, \\ 2 & \text{при } n = 2m-1, \end{cases} \quad m \in \mathbb{N}.$$

З урахуванням цього запишемо розв’язок вихідної задачі

$$u(x, y) = \frac{4u_0}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(2m-1)y}{l}}{\operatorname{sh} \frac{\pi(2m-1)b}{l}} \sin \frac{\pi(2m-1)x}{l},$$

$$0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq y \leq b. \quad \blacktriangleleft$$

22. У пласті, що має форму кругового циліндра радіуса R_2 (див. рис. 10), діє кільцева галерея свердловин, розміщених по периметру циліндра радіуса R_1 ($0 < R_1 < R_2$). Розв’язати

задачу про нерадіальну усталену фільтрацію для $R_1 < r < R_2$ за відсутності внутрішніх джерел маси. Потужність пласта прийняти достатньо великою, щоб знехтувати умовами на підшві і покрівлі. Вважати, що тиски нагнітальних

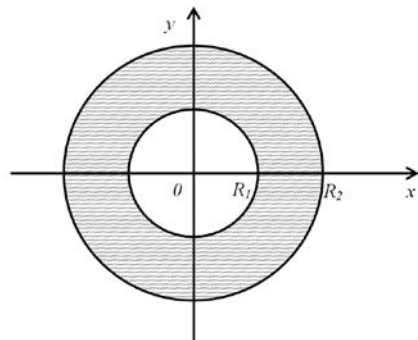


Рисунок 10

свердловин $P_1(x)$ і зовнішнього середовища $P_2(x)$ не залежать від z .

► Фільтрація у пласті без внутрішніх джерел маси описується рівнянням п'єзопровідності

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right),$$

де $p(x, y, z, t)$ – тиск в точці (x, y, z) пласта в момент часу t , $\alpha > 0$ – коефіцієнт п'єзопровідності. Для пропонованої задачі це рівняння перетворюється в рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 p(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p(x, y)}{\partial y^2} = 0,$$

яке в полярних координатах r, φ має вигляд

$$\frac{\partial^2 p(r, \varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p(r, \varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} = 0, \quad R_1 < r < R_2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (194)$$

Крайові умови подамо наступним чином

$$p(R_1, \varphi) = p_1(\varphi), \quad p(R_2, \varphi) = p_2(\varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (195)$$

Для забезпечення неперервності розв'язку слід

задовольнити умову

$$p(r, 2\pi) = p(r, 0), \quad R_1 \leq r \leq R_2. \quad (196)$$

Перша з умов (195) відображає той факт, що тиски, створювані різними свердловинами батареї, можуть бути різними, а друга – що тиски на бічній стороні пласта можуть змінюватись по периметру. Умова (196) ставиться для забезпечення неперервності розв'язку в кільці.

Розв'язуватимемо задачу методом відокремлення змінних

$$p(r, \varphi) = X(r)\Phi(\varphi), \quad R_1 < r < R_2, \quad 0 < \varphi < 2\pi. \quad (197)$$

Підстановка (197) в (194) і відокремлення змінних дають два звичайні диференціальні рівняння

$$\begin{aligned} \frac{r^2 X''(r) + rX'(r)}{X(r)} &= -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \lambda; \\ r^2 X''(r) + rX'(r) - \lambda X(r) &= 0, \quad R_1 < r < R_2, \\ \Phi''(\varphi) + \lambda \Phi(\varphi) &= 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{aligned} \quad (198)$$

Друге з цих рівнянь і умова (196) дають задачу Штурма-Ліувілля

$$\Phi''(\varphi) + \lambda \Phi(\varphi) = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad (199)$$

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi). \quad (200)$$

При $\lambda < 0$ задача (199), (200) не може мати ненульового розв'язку, бо розв'язки рівняння (199) є лінійними комбінаціями показникових функцій, а отже, не задовольняють умову (200). Тому $\lambda \geq 0$. При $\lambda > 0$ загальний

розв'язок рівняння (199) має вигляд

$$\Phi(\varphi) = A \cos \sqrt{\lambda} \varphi + B \sin \sqrt{\lambda} \varphi.$$

Цей розв'язок буде періодичним з періодом 2π , тобто задовольнятиме умову (200), якщо $\sqrt{\lambda} = n$, $n \in \mathbb{N}$. Тому $\lambda_n = n^2$, а

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (201)$$

При $\lambda = 0$ загальний розв'язок рівняння (199) $\Phi_0 = A_0 + B_0 \varphi$ задовольняє умову (200) лише при $B_0 = 0$.

Для знаходження $X(r)$ із (198) при $\lambda_n = n^2$ дістанемо рівняння

$$r^2 X''(r) + rX'(r) - n^2 X(r) = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (202)$$

Це рівняння Ейлера, розв'язок якого можна шукати у вигляді степеневої функції $X(r) = r^\alpha$. Після підстановки в (202) і скорочення на r^α одержимо рівняння для α

$$\alpha(\alpha - 1) + \alpha - n^2 = 0.$$

Звідси знаходимо, що $\alpha = \pm n$, тому загальний розв'язок рівняння (202) має вигляд

$$X_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (203)$$

При $n = 0$ розв'язки r^n і r^{-n} збігаються, тобто є лінійно залежними, і (203) не є загальним розв'язком. Але в цьому випадку рівняння (202) має вигляд $r(rX')' = 0$, звідки знаходимо, що

$$X_0(r) = C_0 + D_0 \ln r. \quad (204)$$

Врахувавши (197), (201), (203), (204), розв'язок задачі (194)-(196) шукатимемо у вигляді

$$p(r, \varphi) = (C_0 + D_0 \ln r)A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n r^n + D_n r^{-n})(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi), \quad (205)$$

$$R_1 \leq r \leq R_2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Для зручності введемо позначення $A_0 C_0 = a_0$, $A_0 D_0 = b_0$,

$$A_n C_n = a_n, \quad A_n D_n = b_n, \quad B_n C_n = c_n, \quad B_n D_n = d_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тоді (205) набуде вигляду

$$p(r, \varphi) = a_0 + b_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} ((a_n r^n + b_n r^{-n}) \cos n\varphi + (c_n r^n + d_n r^{-n}) \sin n\varphi), \quad (205')$$

$$R_1 \leq r \leq R_2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Задовольнимо крайові умови (195)

$$\begin{cases} a_0 + b_0 \ln R_1 + \sum_{n=1}^{\infty} ((a_n R_1^n + b_n R_1^{-n}) \cos n\varphi + (c_n R_1^n + d_n R_1^{-n}) \sin n\varphi) = p_1(\varphi), \\ a_0 + b_0 \ln R_2 + \sum_{n=1}^{\infty} ((a_n R_2^n + b_n R_2^{-n}) \cos n\varphi + (c_n R_2^n + d_n R_2^{-n}) \sin n\varphi) = p_2(\varphi), \end{cases}$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Звідси одержуємо, що

$$\begin{cases} a_0 + b_0 \ln R_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_1(\varphi) d\varphi = p_{10}, \\ a_0 + b_0 \ln R_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_2(\varphi) d\varphi = p_{20}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_n R_1^n + b_n R_1^{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p_1(\varphi) \cos n\varphi d\varphi = p_{1n}^{(1)}, \\ a_n R_2^n + b_n R_2^{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p_2(\varphi) \cos n\varphi d\varphi = p_{2n}^{(1)}, \\ c_n R_1^n + d_n R_1^{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p_1(\varphi) \sin n\varphi d\varphi = p_{1n}^{(2)}, \\ c_n R_2^n + d_n R_2^{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p_2(\varphi) \sin n\varphi d\varphi = p_{2n}^{(2)}. \end{cases}$$

Розв'язавши ці системи, знайдемо значення коефіцієнтів

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{p_{10} \ln R_2 - p_{20} \ln R_1}{\ln R_2 - \ln R_1}, \quad b_0 = \frac{p_{20} - p_{10}}{\ln R_2 - \ln R_1}, \\ a_n &= \frac{p_{2n}^{(1)} R_1^{-n} - p_{1n}^{(1)} R_2^{-n}}{(R_2 / R_1)^n - (R_1 / R_2)^n}, \quad b_n = \frac{p_{1n}^{(1)} R_2^{-n} - p_{2n}^{(1)} R_1^n}{(R_2 / R_1)^n - (R_1 / R_2)^n}, \\ c_n &= \frac{p_{2n}^{(2)} R_1^{-n} - p_{2n}^{(1)} R_2^{-n}}{(R_2 / R_1)^n - (R_1 / R_2)^n}, \quad d_n = \frac{p_{1n}^{(2)} R_2^{-n} - p_{2n}^{(2)} R_1^n}{(R_2 / R_1)^n - (R_1 / R_2)^n}. \end{aligned} \quad (206)$$

Підставивши їх у (205'), одержимо розв'язок задачі Діріхле для кільця

$$\begin{aligned} p(r, \varphi) &= \frac{p_{10} \ln \frac{R_2}{r} + p_{20} \ln \frac{r}{R_1}}{\ln \frac{R_2}{R_1}} + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\left(\left(\frac{R_2}{r} \right)^n - \left(\frac{r}{R_2} \right)^n \right) p_{1n}^{(1)} + \left(\left(\frac{r}{R_1} \right)^n - \left(\frac{R_1}{r} \right)^n \right) p_{2n}^{(1)}}{\left(\frac{R_2}{R_1} \right)^n - \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^n} \cos n\varphi + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{\left(\left(\frac{R_2}{r} \right)^n - \left(\frac{r}{R_2} \right)^n \right) p_{1n}^{(2)} + \left(\left(\frac{r}{R_1} \right)^n - \left(\frac{R_1}{r} \right)^n \right) p_{2n}^{(2)}}{\left(\frac{R_2}{R_1} \right)^n - \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^n} \sin n\varphi \Bigg],$$

$$R_1 \leq r \leq R_2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad \blacktriangleleft$$

Завдання для самостійного розв'язання

44. Знайти функцію u , гармонічну в $\Pi = \{(x, y) : 0 < x < l, 0 < y < l\}$, яка задовольняє крайові умови
 $u(x, 0) = x(l - x), \quad u(x, l) = x(l - x), \quad 0 \leq x \leq l;$
 $u(0, y) = 0, \quad u(l, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq l.$

45. Знайти розв'язок u рівняння Лапласа в прямокутнику
 $\Pi = \{(x, y) : 0 < x < p, 0 < y < s\}$, який задовольняє крайові умови:

$$a) \quad \frac{\partial u(0, y)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u(p, y)}{\partial x} = 0, \quad 0 \leq y \leq s,$$

$$u(x, 0) = A, \quad u(x, s) = Bx, \quad 0 \leq x \leq p;$$

$$б) \quad \frac{\partial u(0, y)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u(p, y)}{\partial x} = 0, \quad 0 \leq y \leq s,$$

$$u(x, 0) = A, \quad u(x, s) = B, \quad 0 \leq x \leq p.$$

46. Знайти розв'язок рівняння Пуассона
 $\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = -2$ всередині прямокутника $\Pi = \{(x, y) : 0 \leq x \leq p, -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}\}$, який на межі цього прямокутника дорівнює нулю.

47. Знайти гармонічну всередині круга радіуса R з центром у початку координат функцію, яка задовольняє умову $\frac{\partial u(R, \varphi)}{\partial r} = A \cos \varphi$.

48. Розв'язати задачу Діріхле для рівняння Лапласа в крузі $K_2(0) = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 4\}$

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0, \quad u(x, y) \Big|_{x^2 + y^2 = 4} = x^2.$$

49. Розв'язати задачу Діріхле для рівняння Лапласа в кільці $K_{2,3}(0) = \{(x, y) : 4 < x^2 + y^2 < 9\}$

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0, \\ u(x, y) \Big|_{x^2 + y^2 = 4} = x, \quad u(x, y) \Big|_{x^2 + y^2 = 9} = y.$$

50. Розв'язати задачу Неймана в кільці $K_{R_1, R_2}(0) = \{(r, \varphi) : R_1 < r < R_2, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$ для рівняння Лапласа за умови, що $\frac{\partial u(R_1, \varphi)}{\partial r} = A \sin \varphi$, $\frac{\partial u(R_2, \varphi)}{\partial r} = B \sin 2\varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

51. Знайти електростатичне поле всередині області, яка обмежена електропровідними пластинами $y = 0$, $y = b$ і $x = 0$, якщо пластина $x = 0$ заряджена до потенціалу $u_0 = \text{const}$, пластини $y = 0$, $y = b$ заземлені, а заряди всередині заданої області відсутні.

52. Розв'язати задачу про рівновагу напівкруглої мембрани радіуса R під рівномірним навантаженням q .

2.6 Операційний метод розв'язування рівнянь математичної фізики

Операційний метод розв'язування диференціальних рівнянь з частинними похідними має значні переваги перед іншими методами. Проілюструємо сказане на конкретному прикладі.

Для простоти міркувань будемо вважати, що функція $u(x, t)$ залежить лише від координати x і часу t . Знайдемо розв'язок рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (207)$$

який задовольняє крайові умови

$$u(0, t) = \psi_1(t), \quad u(l, t) = \psi_2(t), \quad t \geq 0, \quad (208)$$

і початкову умову

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (209)$$

Нехай $u(x, t)$, $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$, $f(x, t)$, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ – оригінали і

$$u(x, t) \div U(x, p) = \int_0^{+\infty} u(x, t) e^{-pt} dt, \quad f(x, t) \div F(x, p), \quad \psi_1(t) \div \Psi_1(p), \quad \psi_2(t) \div \Psi_2(p),$$

де p – комплексний параметр. Тоді

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \div \frac{d^2 U(x, p)}{dx^2}. \quad (210)$$

У позначенні другої похідної від $U(x, p)$ пишемо d тому, що в зображенні вихідного рівняння (207) похідних по p не буде (вважаємо, що його коефіцієнти не залежать від t).

Для знаходження зображення частинної похідної по t скористаємось правилом диференціювання оригіналу і врахуємо початкову умову (209)

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \div pU(x, p) - u(x, 0) = pU(x, p) - \phi(x). \quad (211)$$

Для зображення $U(x, p)$ з крайових умов одержимо

$$U(0, p) = \Psi_1(p), \quad U(l, p) = \Psi_2(p). \quad (212)$$

Перейдемо в рівнянні (207) до зображень. Враховуючи (210), (211), одержимо звичайне диференціальне рівняння

$$a^2 \frac{d^2 U(x, p)}{dx^2} - pU(x, p) + \varphi(x) + F(x, p) = 0, \quad 0 < x < l. \quad (213)$$

Таким чином, операційний метод зводить розв'язування поставленої нестационарної задачі для рівняння теплопровідності (207) до розв'язування звичайного диференціального рівняння (213) з крайовими умовами (212). Розв'язавши його, знайдемо зображення $U(x, p)$. Після цього за допомогою оберненого перетворення Лапласа знаходимо шукану функцію $u(x, t)$ в просторі оригіналів.

Для ілюстрації методики розв'язування рівнянь математичної фізики операційним методом розглянемо конкретні приклади.

Приклади розв'язання задач

23. Розв'язати рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0$$

при крайових умовах $u(0, t) = u_0$, $|u(x, t)| < +\infty$, $t \geq 0$

та початковій умові $u(x, 0) = 0$, $0 \leq x \leq +\infty$.

► Вважатимемо, що $u(x, t) \div U(x, p)$, тоді з урахуванням початкової умови

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \div pU(x, p) - u(x, 0) = pU(x, p).$$

Далі $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \div \frac{dU(x,p)}{dx}, \quad \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \div \frac{d^2 U(x,p)}{dx^2},$ оскільки

змінна p фіксована.

Зображувальне рівняння

$$a^2 \frac{d^2 U(x,p)}{dx^2} = pU(x,p), \quad \text{або} \quad \frac{d^2 U(x,p)}{dx^2} - \frac{p}{a^2} U(x,p) = 0.$$

Звідси

$$U(x,p) = C_1 e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}$$

Згідно з другою крайовою умовою $u(x,t)$, а значить і $U(x,p)$, при $x \rightarrow +\infty$ має бути обмеженою, тому $C_1 = 0$ і

$U(x,p) = C_2 e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}$. Для визначення C_2 переведемо першу крайову умову $u(0,t) = u_0$ у простір зображень. З цією метою подамо цю умову у вигляді

$$u(0,t) = u(0,t)1(t),$$

де $1(t)$ – функція Хевісайда, що має зображення $1/p$. Тоді початковою умовою для зображувального рівняння буде

$$U(0,p) = \frac{u_0}{p}. \quad \text{Отже, } C_2 = \frac{u_0}{p} \text{ а розв'язок } U(x,p) = \frac{u_0}{p} e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}.$$

Використовуючи формулу обернення, знайдемо

$$\frac{1}{p} e^{-a\sqrt{p}} \div \frac{a}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau^3}} e^{-\frac{a^2}{4\tau}} d\tau;$$

$$\frac{1}{p} e^{-\frac{x}{a}\sqrt{p}} \div \frac{xu_0}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau^3}} e^{-\frac{x^2}{4a^2\tau}} d\tau.$$

Оригіналом є

$$u(x, t) = \frac{xu_0}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau^3}} e^{-\frac{x^2}{4a^2\tau}} d\tau. \blacktriangleleft$$

24. Розв'язати хвильове рівняння

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (214)$$

при крайових

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (215)$$

і початкових умовах

$$u(x, 0) = A \sin \frac{\pi x}{l}, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (216)$$

► Нехай $U(x, p)$ – зображення шуканого розв'язку $u(x, t)$.

$$\text{Тоді } \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \div \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} e^{-pt} dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^{+\infty} u(x, t) e^{-pt} dt = \frac{d^2 U(x, p)}{dx^2}.$$

Скориставшись правилом диференціювання оригіналу і початковими умовами (216), одержимо

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \div p^2 U(x, p) - p A \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Перейдемо в рівнянні (214) до зображень

$$\frac{d^2 U(x, p)}{dx^2} - \frac{p^2}{a^2} U(x, p) = -\frac{pA}{a^2} \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (217)$$

Із крайових умов одержуємо

$$U(0, p) = 0, \quad U(l, p) = 0. \quad (218)$$

Розв'язуючи рівняння (217), маємо

$$U(x, p) = C_1 e^{\frac{px}{a}} + C_2 e^{-\frac{px}{a}} + \frac{Ap}{p^2 + a^2 \pi^2 / l^2} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Враховуючи крайові умови (218), знаходимо

$$U(x, p) = \frac{Ap}{p^2 + a^2 \pi^2 / l^2} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Оригінал цього зображення (функція $u(x, t) = A \sin \frac{\pi a}{l} t \sin \frac{\pi x}{l}$)

є шуканим розв'язком задачі (214)-(216). ◀

25. До лівого кінця $x = 0$ довгої електричної однорідної лінії без втрат довжиною l прикладено електрорушійну силу $E_0 \sin \omega t$. Знайти напругу $u(x, t)$, якщо на правому кінці лінія накоротко замкнена і в момент включення електрорушійної сили напруга і сила струму в лінії рівні нулю.

► Ця задача є задачею на розрахунок довгих ліній – ліній електропередачі, довжина яких перевищує довжину хвилі коливань, що поширюються в ній, а відстань між провідниками, з яких вона складається, значно менша довжини цієї хвилі. Такі лінії характеризуються розподіленими (віднесеними до одиниці довжини) параметрами: R – розподілений опір металу провідника, Ом/м; G – паразитна розподілена провідність діелектрика лінії, $\frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{м}}$ або См/м; L – розподілена індуктивність, Гн/м; C –

розподілена ємність, Ф/м. Якщо розглядати лінію без втрат, то беремо $R = G = 0$, якщо ж «без спотворень» – то приймаємо

$$\frac{R}{L} = \frac{G}{C}.$$

Напруга $u(x, t)$, як відомо з електротехніки, повинна задовольняти рівняння

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad a^2 = \frac{1}{LC}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0.$$

Крайові умови, згідно з умовою задачі, подамо у вигляді

$$u(0, t) = E_0 \sin \omega t, \quad u(l, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Початкові умови будуть такими

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad 0 \leq x \leq l.$$

Нехай $u(x, t) \div U(x, p)$, тоді за правилом диференціювання оригіналу

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \div pU(x, p) - u(x, 0) = pU(x, p);$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \div p^2 U(x, p) - pu(x, 0) - \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = p^2 U(x, p).$$

$$\text{Оскільки } \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \div \frac{dU(x, p)}{dx}, \quad \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \div \frac{d^2 U(x, p)}{dx^2}, \quad \text{то}$$

операторне рівняння набуде вигляду

$$a^2 \frac{d^2 U(x, p)}{dx^2} - p^2 U(x, p) = 0, \quad 0 < x < l. \quad (219)$$

Крайові умови в зображеннях стануть такими

$$U(0, p) = \frac{E_0 \omega}{p^2 + \omega^2}, \quad U(l, p) = 0. \quad (220)$$

Розв'яжемо звичайне диференціальне рівняння (219) за умов (220). Загальний розв'язок рівняння (219) візьмемо у вигляді

$$U(x, p) = C_1 \operatorname{ch} \frac{px}{a} + C_2 \operatorname{sh} \frac{px}{a}.$$

Сталі C_1, C_2 знаходимо з умов (220) $C_1 = \frac{E_0 \omega}{p^2 + \omega^2},$

$$C_2 = \frac{-E_0 \omega \operatorname{ch} \frac{lp}{a}}{(p^2 + \omega^2) \operatorname{sh} \frac{lp}{a}}. \text{ Отже,}$$

$$U(x, p) = \frac{E_0 \omega}{p^2 + \omega^2} \operatorname{ch} \frac{px}{a} - \frac{E_0 \omega \operatorname{ch} \frac{lp}{a}}{(p^2 + \omega^2) \operatorname{sh} \frac{lp}{a}} \operatorname{sh} \frac{px}{a} = E_0 \omega \frac{\operatorname{sh} \frac{p(l-x)}{a}}{(p^2 + \omega^2) \operatorname{sh} \frac{lp}{a}}.$$

Знайдемо оригінал $u(x, t)$ для одержаної функції

$$U(x, p), \text{ яка має прості полюси в точках } \pm i\omega, \quad \pm \frac{iak\pi}{l}, \quad k \in \mathbb{N}$$

($p = 0$ – усувна особлива точка для $U(x, p)$). Скориставшись теорією знаходження оригіналів за допомогою лишків, будемо мати

$$u(x, t) = E_0 \omega \left(2 \operatorname{Re}(\operatorname{Res}_{p=i\omega}(U(x, p)e^{pt})) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re}(\operatorname{Res}_{p=\frac{iak\pi}{l}}(U(x, p)e^{pt})) \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= E_0 \omega \left(2 \operatorname{Re} \left(\frac{\operatorname{sh}(p(l-x)/a) / \operatorname{sh}(lp/a)}{(p^2 + \omega^2)'} e^{pt} \right) \right) \Big|_{p=i\omega} + \\
&\quad + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left(\frac{\operatorname{sh}(p(l-a)/a) / (p^2 + \omega^2)}{(\operatorname{sh}(lp/a))'} e^{pt} \right) \Big|_{p=\frac{iak\pi}{l}} \Bigg) = \\
&= E_0 \omega \left(\operatorname{Re} \left(\frac{\operatorname{sh}(i\omega(l-x)/a) e^{i\omega t}}{i\omega \operatorname{sh}(i\omega l/a)} \right) + \frac{2a}{l} \sum_{k=1}^n \operatorname{Re} \left(\frac{\operatorname{sh}(ik\pi(l-x)/l) e^{iak\pi/l}}{(\omega^2 - a^2 k^2 \pi^2 / l^2) \operatorname{ch}(ik\pi)} \right) \right) = \\
&= E_0 \omega \left(\operatorname{Re} \left(\frac{i \sin(\omega(l-x)/a) (\cos \omega t + i \sin \omega t)}{i^2 \omega \sin(\omega l/a)} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2a}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left(\frac{i \sin(k\pi(l-x)/l) (\cos(ak\pi/l) + i \sin(ak\pi/l))}{(\omega^2 - a^2 k^2 \pi^2 / l^2) \cos k\pi} \right) \right) = \\
&= E_0 \left(\frac{\sin(\omega(l-x)/a) \sin \omega t}{\sin(\omega l/a)} + 2a\omega l \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\pi x/l) \sin(ak\pi/l)}{l^2 \omega^2 - a^2 k^2 \pi^2} \right). \blacktriangleleft
\end{aligned}$$

Завдання для самостійного розв'язання

53. Знайти операційним методом розв'язок хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

за наступних крайових і початкових умов (n – фіксоване натуральне число):

$$a) \quad u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$u(x,0) = A \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, \quad 0 \leq x \leq l;$$

$$\text{б) } \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0, \quad t \geq 0,$$

$$u(x,0) = A \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, \quad 0 \leq x \leq l;$$

$$\text{в) } \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0, \quad t \geq 0,$$

$$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = B \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad 0 \leq x \leq l.$$

54. Важкий пружний стержень, довжина якого в нерозтягнутому стані рівна l , підвішено за кінець $x=0$. Другий кінець $x=l$ залишено вільним. Знайти вимушені коливання стержня.

55. Вивчити поперечні коливання струни, лівий кінець $x=0$ якої закріплено, а до правого $x=l$ прикладено збурну силу, що породжує зміщення $A \sin \omega t$.

56. Бічна поверхня і лівий кінець $x=0$ тонкого однорідного стержня довжиною l теплоізолювані, а на правому — підтримується стала температура u_c . Знайти розподіл тепла $u(x,t)$ по довжині стержня в довільний момент часу, якщо початкова температура стержня u_0 .

57. Бічна поверхня тонкого однорідного стержня довжиною l теплоізолювана, а кінці $x=0$ і $x=l$ підтримуються при нульовій температурі. Початковий розподіл тепла вздовж стержня описується функцією $f(x)$. Знайти розподіл температури в стержні в довільний момент часу.

58. До лівого кінця $x=0$ нескінченної ізолюваної електричної лінії «без спотворень» ($R/L = G/C$) підключено електрорушійну силу $E(t)$. Знайти розподіл напруги $u(x,t)$ в стержні, якщо в момент підключення напруга і сила струму в лінії дорівнювали нулю.

59. Лінію довжиною l без втрат ($R = G = 0$) заряджено до напруги u_0 . В момент часу t лівий її кінець замикається накоротко. Знайти величину напруги $u(x,t)$ в довільний момент часу t .

Відповіді до завдань для самостійного розв'язування

1. а) рівняння гіперболічного типу;
 б) рівняння еліптичного типу;
 в) рівняння параболічного типу;
 г) рівняння еліптичного типу.

2. $u(x, y) = \frac{x^3}{6} + xC_1(y) + C_2(y).$

3. $u(x, y) = y + C(x).$

4. $u(x, y) = 2xy + C_1(x) + C_2(y).$

5. Для визначення поперечних відхилень $u(x, t)$ точок струни від їхнього положення рівноваги одержимо задачу

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - 2h^2 \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0;$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \geq 0;$$

$$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = F(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

де $2h^2 = k / \rho$, ρ – лінійна густина струни, k – коефіцієнт тертя, тобто коефіцієнт пропорційності у співвідношенні $\Phi = -k \frac{\partial u}{\partial t}$, яке виражає силу тертя, що діє на одиницю довжини струни.

6. Для визначення малих поздовжніх зміщень поперечних перерізів стержня дістанемо задачу

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0;$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0, \quad t \geq 0;$$

$$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = F(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

де $a^2 = E / \rho_0$, E – модуль Юнга, ρ_0 – густина маси стержня у незбудженому стані; $u(x,t)$ – функція, що характеризує процес зміщення уздовж осі Ox поперечного перерізу стержня, абсциса якого у рівноважному стані дорівнює x , тобто у момент t абсциса цього перерізу $x + u(x,t)$.

7. Для визначення малих поздовжніх коливань стержня одержимо задачу

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \\ u(0,t) &= 0, \quad AE \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} - k \frac{\partial u(l,t)}{\partial t} = 0, \quad t \geq 0; \\ u(x,0) &= \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l,\end{aligned}$$

де $a^2 = E / \rho$, E – модуль Юнга, ρ – лінійна густина маси стержня, A – площа поперечного перерізу стержня, k – коефіцієнт тертя для кінця стержня $x = l$.

8. Математична модель задачі про поперечні коливання мембрани має вигляд

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2} &= a^2 \left(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2} \right), \\ 0 < x < p, \quad 0 < y < q, \quad t > 0; \\ u(0,y,t) &= 0, \quad \frac{\partial u(p,y,t)}{\partial x} = 0, \quad 0 \leq y \leq q, \quad t \geq 0; \\ u(x,0,t) &= 0, \quad \frac{\partial u(x,q,t)}{\partial y} = 0, \quad 0 \leq x \leq p, \quad t \geq 0; \\ u(x,y,0) &= Axy, \quad \frac{\partial u(x,y,0)}{\partial t} = 0, \quad 0 \leq x \leq p, \quad 0 \leq y \leq q.\end{aligned}$$

9. Мішана задача про визначення температури стержня має вигляд

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{ap}{c\rho A} u(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0;$$

$$u(0,t) = u_0, \quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} + hu(l,t) = 0, \quad t \geq 0;$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

де p – периметр поперечного перерізу стержня, $h = a/k$.

- 10.** Формулювання задачі математичної фізики про визначення концентрації дифундуючої речовини буде наступним

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0;$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \geq 0; \quad u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

де $u(x,t)$ – коефіцієнт дифундуючої речовини;

$a^2 = D/c$, D – коефіцієнт дифузії, c – коефіцієнт пористості середовища, який рівний відношенню об'єму пор до повного об'єму розглядуваної області.

11. а)
$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0;$$

$$u(0,t) = \mu(t), \quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0, \quad t \geq 0;$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

де $a^2 = \alpha D/c$, α – коефіцієнт пористості перерізу, який дорівнює відношенню площі пор у даному перерізі до

площі цього перерізу, D – коефіцієнт дифузії, c – коефіцієнт пористості речовини в трубці;

$$\text{б) } \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0;$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = -\frac{1}{\alpha SD} q(t), \quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} + \frac{\alpha_1}{D} u(l,t) = 0, \quad t \geq 0;$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

де $a^2 = \alpha D / c$, D – коефіцієнт дифузії, c – коефіцієнт пористості середовища в трубці, α_1 – коефіцієнт дифузії через пористу перегородку.

12. Математична модель задачі про охолодження тонкого кільця має вигляд

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = b(u(x,t) - u_0), \quad 0 < x < l, \quad t > 0;$$

$$u(0,t) = u(l,t), \quad \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(l,t)}{\partial x}, \quad t \geq 0;$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

де $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, $b = \frac{al}{k\delta}$, l – довжина кільця, δ – площа його

поперечного перерізу.

13. Рівняння, що описують процес вирівнювання температур, мають вигляд

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{c_1 \rho_1}{k_1} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, \quad 0 < x < l_1;$$

$$\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = \frac{c_2 \rho_2}{k_2} \frac{\partial v(x, t)}{\partial t}, \quad l_1 < x < l_1 + l_2.$$

14. У циліндричній системі координат маємо задачу

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u(\rho, \varphi, z)}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u(\rho, \varphi, z)}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u(\rho, \varphi, z)}{\partial z^2} = 0,$$

$$0 < \rho < a, \quad 0 < \varphi \leq 2\pi, \quad 0 < z < h;$$

$$\frac{\partial u(\rho, \varphi, 0)}{\partial z} = q, \quad u(\rho, \varphi, h) = f(\rho, \varphi), \quad 0 \leq \rho \leq a, \quad 0 < \varphi \leq 2\pi;$$

$$\frac{\partial u(a, \rho, z)}{\partial \rho} = 0, \quad |u(0, \varphi, z)| < +\infty, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq h;$$

$$u(\rho, 0, z) = u(\rho, 2\pi, z), \quad 0 \leq \rho < a, \quad 0 \leq z \leq h.$$

15. $u(x, t) = \cos 2x \cos 2at + \frac{1}{a} \sin x \sin at.$

16. $u(x, t) = x^2 + xt + t^2.$

17. $u(x, t) = \sin x \cos at.$

18. $u(x, t) = \cos(x - t).$

19. а) $u(x, t) = xt;$

б) $u(x, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{x+t}{1+(x+t)^2} + \frac{x-t}{1+(x+t)^2} \right) + \sin x \sin t.$

20. а) $u = x^2 + xt + 4t^2 + \frac{1}{6} xt^3;$

$$\text{б)} u = xt + \sin(x+t) - (1-cht)e^x.$$

$$21. \text{ а)} u = \sin x; \text{ б)} u = 1+t + \frac{1}{9}(1-\cos 3t)\sin x.$$

$$22. \text{ а)} u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{a} \sin x \sin at, & at < x < +\infty, \\ \frac{1}{a} (1 - \cos x \cos at), & 0 \leq x \leq at; \end{cases}$$

$$\text{б)} u(x, t) = e^{-(x^2+4t^2)} ch 4xt + \begin{cases} \frac{1}{2} (1 - \cos x \cos 2t), & 0 < x < 2t, \\ \frac{1}{2} \sin x \sin 2t, & x \geq 2t. \end{cases}$$

$$23. \text{ а)} u = \frac{1}{4a} \ln \frac{1+(x+at)^2}{1+(x-at)^2};$$

$$\text{б)} u = \frac{1}{4a} \ln \frac{1+(x+at)^2}{1+(x-at)^2} + \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{(x+at)^2}{1+(x+at)^2} + \frac{(x-at)^2}{1+(x-at)^2} \right) & \text{нпу } x > at, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{(x+at)^2}{1+(x+at)^2} - \frac{(x-at)^2}{1+(x-at)^2} \right) & \text{нпу } 0 \leq x \leq at. \end{cases}$$

$$24. \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0;$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t \geq 0;$$

$$u(x, 0) = \frac{4h}{l^2} x(l-x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad 0 \leq x \leq l;$$

розв'язок задачі

$$u(x, t) = \frac{32h}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} \cos \frac{(2k+1)\pi at}{l} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{l}.$$

$$25. \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, 0 < x < l, t > 0;$$

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0, u(l, t) = 0, t \geq 0;$$

$$u(x, 0) = \frac{1}{9} \cos \frac{3\pi x}{2l}, \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, 0 \leq x \leq l;$$

розв'язок задачі $u(x, t) = \frac{1}{9} \cos \frac{3a\pi t}{2l} \cos \frac{3\pi x}{2l}.$

$$26. \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, 0 < x < l, t > 0;$$

$$u(0, t) = 0, \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0, t \geq 0;$$

$$u(x, 0) = \frac{Px}{AE}, \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, 0 \leq x \leq l,$$

де A – площа поперечного перерізу стержня, E – модуль Юнга;

$$u(x, t) = \frac{8Pl}{AE\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)^2} \cos \frac{(2n+1)\pi at}{2l} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}.$$

$$27. \text{ а) } \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, 0 < x < l, t > 0;$$

$$u(0, t) = 0, u(l, t) = 0, t \geq 0;$$

$$u(x, 0) = \frac{1}{8} \sin \frac{3\pi x}{l}, \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, 0 \leq x \leq l;$$

$$u(x, t) = \frac{1}{8} \cos \frac{3\pi at}{l} \sin \frac{3\pi x}{l};$$

$$\text{б) } \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, 0 < x < l, t > 0;$$

$$u(0, t) = 0, u(l, t) = 0, t \geq 0;$$

$$u(x, 0) = 0, \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \frac{1}{3} \sin \frac{5\pi x}{l}, 0 \leq x \leq l;$$

$$u(x, t) = \frac{1}{15a\pi} \sin \frac{5a\pi t}{l} \sin \frac{5\pi x}{l}.$$

28. Розв'язком задачі

$$\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} \right),$$

$$0 < x < s, 0 < y < p, t > 0;$$

$$\frac{\partial u(0, y, t)}{\partial x} = u(s, y, t) = 0, 0 \leq y \leq p, t \geq 0;$$

$$u(x, 0, t) = u(x, p, t) = 0, 0 \leq x \leq s, t \geq 0;$$

$$u(x, y, 0) = 0, \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = A(s - x) \sin \frac{\pi y}{p}, 0 \leq x \leq s, 0 \leq y \leq p;$$

$$\text{є функція } u(x, y, t) = \frac{8As}{a\pi^3} \sin \frac{\pi y}{p} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{1}{(2\kappa+1)^2 \omega_{\kappa}} \cos \frac{(2\kappa+1)\pi x}{2s},$$

$$\text{де } \omega_{\kappa} = \sqrt{\left(\frac{2\kappa+1}{2s} \right)^2 + \frac{1}{p^2}}.$$

29. Розв'язком задачі

$$\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} \right),$$

$$0 < x < l, 0 < y < l, t > 0;$$

$$u(0, y, t) = 0, u(l, y, t) = 0, 0 \leq y \leq l, t \geq 0;$$

$$u(x, 0, t) = 0, u(x, l, t) = 0, 0 \leq x \leq l, t \geq 0;$$

$$u(x, y, 0) = \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi y}{l}, \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = \frac{a}{l}, 0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq l;$$

$$\begin{aligned} \text{є функція } u(x, y, t) = & \left(\cos \frac{a\sqrt{2}\pi t}{l} + \frac{16}{\sqrt{2}\pi^3} \sin \frac{a\sqrt{2}\pi t}{l} \right) \times \\ & \times \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi y}{l} + \frac{16}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2n+1)\sqrt{(2k+1)^2 + (2n+1)^2}} \times \\ & \times \sin \frac{a\sqrt{(2k+1)^2 + (2n+1)^2} \pi t}{l} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l} \sin \frac{(2k+1)\pi y}{l}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{30. } u(x, t) = & \frac{8l^4 t^2}{\pi^5} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{2k+1}{l} \pi x}{(2k+1)^5} - \frac{16l^6}{\pi^7} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{2k+1}{l} \pi x}{(2k+1)^7} + \\ & + \frac{16l^6}{\pi^7} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{2k+1}{l} \pi t}{(2k+1)^7} \sin \frac{(2k+1)\pi}{l} x, 0 \leq x \leq l, t \geq 0. \end{aligned}$$

$$\text{31. } u(x, t) = (2e^t - e^{-t} - 3te^{-t}) \cos x + 2xt, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, t \geq 0.$$

$$\text{32. } u(x, t) = 1 + 2x + \frac{1}{18} (e^{3t} + e^{-3t} - 2) \sin x + \frac{1}{2} (e^t + e^{-t} - 2) \sin 3x,$$

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, t \geq 0.$$

$$33. u(x, t) = \frac{Aa}{\omega} \frac{\sin \frac{\omega}{a} x}{\omega \cos \frac{\omega}{a} l} \cos \omega t + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{(2n+1)a\pi t}{2l} \times \\ \times \sin \frac{(2n+1)\pi}{2l}, 0 \leq x \leq l, t \geq 0,$$

$$\text{де } A_n = -\frac{2Aa}{l\omega \cos \frac{\omega}{a} l} \int_0^l \sin \frac{\omega x}{a} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} dx, n \in \mathbb{Z}_+.$$

$$34. \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, 0 < x < l, t > 0;$$

$$u(0, t) = 0, u(l, t) = A \sin \omega t, t \geq 0;$$

$$u(x, 0) = 0, \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, 0 \leq x \leq l.$$

Розв'язок задачі

$$u(x, t) = \frac{2A\omega a}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\omega^2 - \left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2} \sin \frac{a\pi n t}{l} \sin \frac{\pi n x}{l} + \frac{A \sin \frac{\omega x}{a}}{\sin \frac{\omega l}{a}} \sin \omega t.$$

$$35. \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \frac{Ax}{\rho} \sin \omega t, 0 < x < l, t > 0;$$

$$u(0, l) = 0, u(l, t) = 0, t \geq 0; u(x, 0) = 0, \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, 0 \leq x \leq l;$$

$$u(x, t) = \frac{2Al}{\pi\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\omega_n(\omega^2 - \omega_n^2)} (\omega \sin \omega_n t - \omega_n \sin \omega t) \times$$

$$\times \sin \frac{n\pi x}{l}, \text{ якщо } \omega \neq \omega_n, \text{ де } \omega_n = \frac{a\pi n}{l}, n \in \mathbb{N};$$

$$u(x, t) = \frac{(-1)^{n_0+1}}{\pi n_0 \omega_{n_0}^2 \rho} (\sin \omega_{n_0} t - \omega_{n_0} t \cos \omega_{n_0} t) \sin \frac{\pi n_0 x}{l} +$$

$$+ \frac{2Al}{\pi\rho} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq n_0}}^{\infty} (\omega \sin \omega_n t - \omega_n \sin \omega t) \sin \frac{\pi n x}{l}, \text{ якщо } \omega = \omega_{n_0},$$

$$\text{де } \omega_{n_0} = \frac{\pi n_0 a}{l}, \text{ тобто коли маємо резонанс.}$$

$$36. u(x, t) = \frac{Q}{E_\delta} x - \frac{8Ql}{\pi^2 E \delta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \cos \frac{(2k+1)a\pi t}{l} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{l},$$

де E – модуль пружності, δ – площа поперечного перерізу стержня. Задача зводиться до розв'язування рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{при нульових початкових і наступних}$$

$$\text{крайових умовах } u(0, t) = 0, \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \frac{Q}{E\delta}.$$

Покласти $u = v + \omega$, де $v = Ax$, а A вибрати так, щоб функція v задовольняла задані крайові умови.

$$37. \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, 0 < x < l, t > 0;$$

$$u(0, t) = \frac{l}{10} \sin \frac{a\pi t}{l}, u(l, t) = 0, t \geq 0;$$

$$u(x, 0) = 0, \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, 0 \leq x \leq l.$$

Розв'язок задачі

$$u(x, t) = \frac{l-x}{10} \sin \frac{a\pi t}{l} + \left(\frac{-3l}{10\pi} \sin \frac{a\pi t}{l} + \frac{at}{10} \cos \frac{a\pi t}{l} \right) \sin \frac{\pi x}{l} + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\pi n(n^2-1)} \left(\frac{1}{n} \sin \frac{a\pi n t}{l} - \sin \frac{a\pi t}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Цей розв'язок можна записати інакше, якщо скористатися

$$\text{тим, що } \frac{l-x}{10} = \frac{1}{5\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{l}, \text{ тоді}$$

$$u(x, t) = \left(-\frac{1}{10\pi} \sin \frac{a\pi t}{l} + \frac{at}{10} \cos \frac{a\pi t}{l} \right) \sin \frac{\pi x}{l} + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{5\pi n(n^2-1)} \left(\frac{1}{n} \sin \frac{a\pi n t}{l} + (n^2-2) \sin \frac{a\pi t}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

$$\mathbf{38. a)} u(x, t) = \frac{A}{\sqrt{1+4a^2t}} e^{-\frac{x^2}{1+4a^2t}};$$

$$\mathbf{б)} u(x, t) = \frac{u_0}{2} \left(\Phi \left(\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}} \right) - \Phi \left(\frac{x-x_2}{2a\sqrt{t}} \right) \right),$$

$$\text{де } \Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\theta^2} d\theta;$$

$$\mathbf{в)} u(x, t) = 5t + 4;$$

$$\mathbf{г)} u(x, t) = 3 + e^{-t} (\sin t - \cos t).$$

$$\mathbf{39.} u(x, t) = e^{-3t} \cos 2x + (e^t + \sin t - \cos t) + t^2 x.$$

$$40. u(x, t) = \frac{Ax}{l} e^{-t} + \frac{2Al^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t} - e^{-t} \right)}{n(n^2\pi^2 - l^2)} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Розв'язок треба шукати у вигляді $u(x, t) = \frac{Axe^{-t}}{t} + v(x, t)$.

$$41. u(x, t) = \frac{4u_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \cos \frac{(2n+1)\pi}{4} e^{-\left(\frac{a(2n+1)\pi}{2l}\right)^2 t} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}.$$

$$42. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \alpha(u(x, t) - u_0), 0 < x < l, t > 0,$$

де $a = \frac{h}{c\rho}$, h – коефіцієнт теплообміну;

$$u(0, t) = c_1, u(l, t) = c_2, t \geq 0; u(x, 0) = \varphi(x), 0 \leq x \leq l;$$

$$u(x, t) = u_0 + \frac{(c_2 - u_0)sh(bx) + (c_1 - u_0)sh(b(l-x))}{sh(bl)} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 + \alpha\right)t} \sin \frac{n\pi x}{l},$$

$$\text{де } A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \left(\varphi(x) - u_0 - \frac{(c_2 - u_0)sh(bx) + (c_1 - u_0)sh(b(l-x))}{sh(bl)} \right) \times$$

$$\times \sin \frac{n\pi x}{l} dx, b = \frac{\sqrt{\alpha}}{a}.$$

$$43. u(x, t) = \frac{Ax^2}{l^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{32A(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3 \pi^3} \left(1 - e^{-\frac{((2n-1)a\pi)^2 t}{4l^2}} \right) \cos \frac{(2n-1)\pi}{2l}.$$

Розв'язок шукати у вигляді $u(x, t) = v(x, t) + \frac{Ax^2}{l^2}$.

$$44. \quad u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8l^2}{(2k+1)^3 \pi^3} \cdot \frac{1}{sh(2k+1)\pi} \times \\ \times \left(sh \frac{(2k+1)\pi(l-y)}{l} + sh \frac{(2k+1)\pi y}{l} \right) \sin \frac{(2k+1)\pi x}{l}.$$

$$45. \quad \text{а)} \quad u(x, y) = A + \frac{Bp - 2A}{2s} y - \\ - \frac{4Bp}{\pi^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \frac{sh \frac{(2k+1)\pi y}{p}}{sh \frac{(2k+1)\pi s}{p}} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{p};$$

$$\text{б)} \quad u(x, y) = A + \frac{B-A}{s} y.$$

$$46. \quad u(x, y) = x(a-x) - \frac{8a^2}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} \frac{ch \frac{(2k+1)\pi y}{a}}{ch \frac{(2k+1)\pi b}{2a}} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{a}.$$

$$47. \quad u(r, \varphi) = Ar \cos \varphi + A_0, \text{ де } A_0 - \text{ стала.}$$

$$48. \quad \frac{\partial^2 u(r, \varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u(r, \varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} = 0, \quad 0 < r < 2, \quad 0 < \varphi < 2\pi,$$

$$|u(r, \varphi)| < +\infty, \quad 0 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

$$u(2, \varphi) = 4 \cos^2 \varphi = 2 + 2 \cos 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

$$u(r, 2\pi) = u(r, 0), \quad 0 \leq r \leq 2;$$

$$u(r, \varphi) = 2 + \frac{1}{2} r^2 \cos 2\varphi \text{ аёо } u(x, y) = 2 + \frac{1}{2} (x^2 - y^2).$$

$$49. \frac{\partial^2 u(r, \varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u(r, \varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} = 0, 2 < r < 3, 0 < \varphi < 2\pi,$$

$$u(2, \varphi) = 2 \cos \varphi, u(3, \varphi) = 3 \sin \varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

$$u(r, 2\pi) = u(r, 0), 2 \leq r \leq 3;$$

$$u(r, \varphi) = \left(-\frac{4}{5} r + \frac{36}{5} r^{-1} \right) \cos \varphi + \left(\frac{9}{5} r - \frac{36}{5} r^{-1} \right) \sin \varphi.$$

$$50. u(r, \varphi) = B_0 + \frac{AR_1^2}{R_1^2 - R_2^2} \left(r + \frac{R_2^2}{r} \right) \sin \varphi + \frac{BR_2^3}{2(R_2^4 - R_1^4)} \left(r^2 - \frac{R_1^4}{r^2} \right) \sin 2\varphi,$$

$$B_0 \in \mathbb{R}.$$

$$51. \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0, 0 < x < a, 0 < y < b,$$

$$u(0, y) = u_0, u(a, y) = 0, 0 \leq y \leq b,$$

$$u(x, 0) = 0, u(x, b) = 0, 0 \leq x \leq a;$$

$$u(x, y) = \frac{4u_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{(2k+1)\pi(a-x)}{b}}{(2k+1) \operatorname{sh} \frac{(2k+1)a\pi}{b}} \sin \frac{(2k+1)\pi y}{b}.$$

$$52. \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u(r, \varphi)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} = -\frac{q}{T}, 0 < r < R, 0 < \varphi < \pi,$$

$$|u(0, \varphi)| < +\infty, u(R, \varphi) = 0, 0 \leq \varphi \leq \pi,$$

$$u(r, 0) = 0, u(r, \pi) = 0, 0 \leq r \leq R;$$

$$u(r, \varphi) = -\frac{qr^2 \sin^2 \varphi}{2T} + \frac{4qR^2}{\pi T} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^{2k+1} \times \\ \times \frac{1}{(2k+1)(4-(2k+1)^2)} \sin(2k+1)\varphi.$$

$$53. \text{ a) } U(x, p) = \frac{Ap}{p^2 + \frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2}} \sin \frac{n\pi x}{l},$$

$$u(x, t) = A \cos \frac{n\pi at}{l} \sin \frac{n\pi x}{l};$$

$$6) U(x, p) = \frac{Ap}{p^2 + \frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2}} \cos \frac{n\pi x}{l},$$

$$u(x, t) = A \cos \frac{an\pi t}{l} \cos \frac{n\pi x}{l};$$

$$\text{b) } U(x, p) = \frac{B}{p^2 + \frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2}} \cos \frac{\pi nx}{l},$$

$$u(x, t) = \frac{Bl}{an\pi} \sin \frac{an\pi t}{l} \cos \frac{n\pi x}{k}.$$

$$54. \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + q, 0 < x < l, t > 0,$$

$$u(0, t) = 0, \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0, t \geq 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, 0 \leq x \leq l,$$

$$u(x, t) = \frac{qx(2l-x)}{2a^2} - \frac{16ql^2}{\pi^2 a^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \times \\ \times \frac{\sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \cos \frac{(2n+1)a\pi t}{2l}}{(2n+1)^2}.$$

$$55. \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, 0 < x < l, t > 0,$$

$$u(0, t) = 0, u(l, t) = A \sin \omega t, t \geq 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, 0 \leq x \leq l,$$

$$u(x, t) = \frac{A \sin \frac{\omega t}{a} \sin \omega t}{\sin \frac{\omega l}{a}} - \frac{Aa\omega}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{na\pi t}{l}}{\omega^2 - \left(\frac{an\pi}{l}\right)^2}.$$

$$56. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, 0 < x < l, t > 0,$$

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0, u(l, t) = u_c, t \geq 0,$$

$$u(x, 0) = u_0, 0 \leq x \leq l;$$

$$u(x, t) = u_c - \frac{4(u_c - u_0)}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l}}{2n+1} e^{-\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2 \frac{2n+1}{2} t}$$

$$57. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, 0 < x < l, t > 0,$$

$$u(0, t) = 0, u(l, t) = 0, t \geq 0,$$

$$u(x, 0) = f(x), 0 \leq x \leq l;$$

$$u(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{anx}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l} \int_0^l f(u) \sin \frac{n\pi u}{l} du.$$

$$58. a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + 2b \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + c^2 u(x, t) = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2},$$

$$0 < x < l, t > 0,$$

$$\text{де } a^2 = CL, b = \frac{CR + LG}{2}, c = RG;$$

$$u(0, t) = E(t), \quad |u(x, t)| < +\infty, \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad 0 \leq x \leq l;$$

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < ax, \\ e^{-amx} E(t - ax) & \text{при } t > ax, \end{cases}$$

$$\text{де } m = \frac{b}{a^2} = \frac{CR + LG}{2LC}.$$

$$59. \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, 0 < x < l, t > 0, a = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0, \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0) = u_0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0;$$

$$u(x, t) = \frac{4u_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \cos \frac{(2n+1)\pi t}{2l\sqrt{LC}}}{2n+1}.$$

13 Теорія ймовірностей та математична статистика

§ 1. Основні поняття. Безпосередній підрахунок ймовірностей

1.1 Основні поняття теорії ймовірностей

Теорією ймовірностей називається математична наука, що вивчає закономірності у випадкових явищах. Розглянемо ряд основних понять, на яких вона базується.

Випробуванням називається дійсна або уявна реалізація певної сукупності умов, яка може неодноразово повторюватись.

Подія – результат випробування. Події бувають *випадковими*, *неможливими* й *вірогідними*.

Подія називається *випадковою (стохастичною)*, якщо при реалізації певної сукупності умов вона може відбутися, або не відбутися. Найчастіше випадкові події позначаються великими латинськими літерами *A, B, C, D*.

Подія називається *достовірною (вірогідною)*, якщо при випробуванні ця подія обов'язково відбудеться. Достовірну (вірогідну) подію позначають літерою *U*.

Наприклад, подія, яка полягає в тому, що при киданні грального кубика випаде кількість очок менша семи є вірогідною.

Подія називається *неможливою*, якщо при випробуванні ця подія обов'язково (в жодному разі) не відбудеться. Неможливу подію позначають літерою *V*.

Наприклад, подія, яка полягає в тому, що при киданні грального

кубика випаде кількість очок більша семи є неможливою.

Елементарною подією називається така подія, яку неможливо розкласти на більш прості події в даному випробуванні.

Складеною подією називається така подія, яку можна розкласти на більш прості події в даному випробуванні.

Розглянемо такий приклад. При киданні грального кубика випала певна кількість очок. Подати через елементарні події подію $A = \{\text{на кубіку випала парна кількість очок}\}$.

У даному випадку всі елементарні події можна позначити й описати наступним чином: подія A_1 – на кубіку випала одиниця, A_2 – випала двійка, A_3 – трійка, A_4 – четвірка, A_5 – п'ятірка, A_6 – шістка. Тоді складену подію A , яку можна розкласти в даному випробуванні на більш прості події A_2, A_4, A_6 , подано наступним чином $A = \{A_2, A_4, A_6\}$.

1.2 Операції над подіями

Подія A є *частинним випадком* події B , якщо при кожному випробуванні, в якому відбувається подія A , відбувається і подія B . На мові множин це можна записати як $A \subset B$ (множина A є підмножиною множини B).

Сумою подій A та B називається така подія C (позначається $C = A + B$), яка полягає у настанні принаймні однієї з цих двох подій. Суму подій на мові множин можна подати операцією $A \cup B$, яку називають об'єднанням подій A та B .

Сумою подій $A_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$ називається така подія C (позначається $C = \sum_{i=1}^n A_i$), яка полягає у настанні принаймні однієї з цих подій. Суму n подій

на мові множин можна записати операцією $\bigcup A_i$.

Різницею подій A та B називається така подія C (позначається

$C = A - B$, або $C = A \setminus B$), яка полягає у настанні події A з одночасним ненастанням події B .

Добутком подій A та B називається така подія (позначається $C = A \cdot B$), яка полягає у сумісному настанні подій A та B . Добуток подій на мові множин можна подати операцією $A \cap B$, яку називають *перерізом* подій A та B .

Добутком подій $A_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$ називається така подія C (позначається $C = \prod_{i=1}^n A_i$), яка полягає у сумісному настанні подій A_i .

Події A та B називаються сумісними, якщо поява однієї не виключає появи іншої ($A \cap B \neq \emptyset$), несумісними, якщо поява однієї виключає появу іншої ($A \cap B = \emptyset$).

Випадкові події $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ утворюють повну групу подій, якщо внаслідок випробування принаймні одна з них з'явиться обов'язково.

Подія $\bar{A}$ називається *протилежною* до події A (доповненням до неї, запереченням цієї події), якщо ці дві події *несумісні* і утворюють повну групу подій.

Наприклад, гральний кубик підкидають один раз. Нехай подія A полягає в тому, що при киданні грального кубика випала парна кількість очок, а подія B – випала непарна кількість очок. Події A та B є несумісними ($A \cap B = \emptyset$) і утворюють повну групу, тобто є протилежними ($B = \bar{A}$).

Простором елементарних подій називається множина усіх рівноможливих несумісних подій – наслідків випробування, що утворюють повну групу подій. Простір елементарних подій позначають літерою Ω .

Приклади розв'язання задач

1. ► Нехай подія A полягає в появі на циферблаті цифр 1,

2, 3, а подія B відповідно – 1,2,3,4,5,6,7. Позначимо: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, тоді $A \subset B$. ◀

2. Нехай подія A полягає в появі на циферблаті цифр 1, 2, 3, 4, 5, а подія B відповідно – 3,4,5,6,7, подія C – 8,9. Знайти $A+B$; $A+B+C$; $A-B$.

► Позначимо: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $C = \{8, 9\}$ тоді $A+B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, або $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; $A+B+C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, або $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; $A-B = \{1, 2\}$, $A/B = \{1, 2\}$. ◀

3. Нехай $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $C = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Знайти AB , CB , ABC .

► Тоді $AB = \{3, 4, 5\}$, або $A \cap B = \{3, 4, 5\}$; $AC = \{4, 5\}$, або $A \cap C = \{4, 5\}$; $CB = \{4, 5, 6, 7\}$, або $C \cap B = \{4, 5, 6, 7\}$; $ABC = \{4, 5\}$, або $A \cap B \cap C = \{4, 5\}$. ◀

4. ► Нехай $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $C = \{8, 9, 10\}$, тоді $AB = \{3, 4\}$, або $A \cap B = \{3, 4\}$; $AC = \emptyset$, або $A \cap C = \emptyset$. A та B сумісні, A та C несумісні. ◀

1.3. Елементи комбінаторики

Комбінаторикою називається розділ математики, що вивчає вибір, розміщення і упорядкування елементів скінченних множин за спеціальними

правилами та методами підрахунку всіх можливих способів, якими це можна виконати.

Основні правила комбінаторики. Правило додавання. Якщо об'єкт A можна вибрати n способами, а об'єкт B можна вибрати m способами, то один із об'єктів або A або B можна вибрати $n + m$ способами.

Правило справджується і для k об'єктів: якщо об'єкт A_1 можна вибрати n_1 способами, об'єкт A_2 – n_2 способами, A_3 – n_3 способами і т.ін., A_k – n_k способами, то вибір одного з об'єктів A_i ($i = \overline{1, k}$) або A_1 , або A_2 , ..., або A_k можна здійснити $\sum_{i=1}^k n_i = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ способами.

Правило множення. Якщо об'єкт A_1 можна вибрати n_1 способами, об'єкт A_2 – n_2 способами, A_3 – n_3 способами і т.ін., A_k – n_k способами, то вибір впорядкованої системи об'єктів A_i ($i = \overline{1, k}$), тобто $A_1, A_2, \dots, A_k$ можна здійснити $\prod_{i=1}^k n_i$ способами $\left(\prod_{i=1}^k n_i = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_k \right)$.

Різні множини, складені з будь-яких елементів, що відрізняються елементами або порядком цих елементів, називаються сполуками.

Сполуки з n елементів, що відрізняються лише порядком елементів, називаються перестановками цих елементів. Кількість перестановок з n елементів позначають P_n і обчислюють за формулою

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n. \quad (1)$$

Примітка: $0! = 1, 1! = 1$.

Нехай у множині з n елементів є k різних елементів, зокрема елемент 1-го виду повторюється n_1 раз, 2-го виду – n_2 разів, ..., k -го – n_k разів, причому $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Перестановки з n елементів такої множини називають перестановками з повтореннями. Кількість перестановок з

повторенням позначають $P_n(n_1, n_2, \dots, n_k)$ і знаходять за формулою

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}. \quad (2)$$

Розміщенням з n елементів по k називають такі сполуки, які складаються з k елементів, взятих з даних n елементів ($k \leq n$) і відрізняються, або порядком, або принаймні одним елементом. Кількість розміщень з n елементів по k позначають A_n^k і знаходять за формулою

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1). \quad (3)$$

Примітка: $A_n^n = P_n = n!$.

Розміщенням з n елементів по k із повторенням називають такі сполуки, які складаються з k елементів, взятих з повторенням з даних n елементів, якщо кожний елемент може повторюватись k разів. Кількість розміщень із повторенням з n елементів по k позначають $\bar{A}_n^k$ і знаходять за формулою

$$\bar{A}_n^k = n^k. \quad (4)$$

Приклади розв'язання задач

5. В аудиторії 30 студентів. Відомо, що 5 з них відмінники, 15 – вчаться на «4» і «5». Скільки існує способів вибрати одного студента з відмінників або з тих, що вчаться на «4» і «5», для участі в олімпіаді з математики?

► Кожного відмінника можна вибрати п'ятьма способами ($n_1 = 5$), кожного студента, що вчиться на «4» і «5», п'ятнадцятьма способами ($n_2 = 15$). За правилом суми існує

$n_1 + n_2 = 5 + 15 = 20$ способів обрання одного студента з означеної сукупності для участі в олімпіаді з математики. ◀

6. В аудиторії 30 студентів. Необхідно обрати старосту, його заступника та профорга. Скільки існує способів такого обрання?

► Старосту можна вибрати з тридцяти студентів ($n_1 = 30$), його заступника з двадцяти дев'яти студентів, які залишились ($n_2 = 29$), а профорга з будь-якого з двадцяти восьми студентів, що залишились ($n_3 = 28$). За правилом добутку загальне число способів вибору старости, його заступника та профорга дорівнює $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = 30 \cdot 29 \cdot 28 = 24360$ способів. ◀

7. Скількома способами 4 різні книги можна розставити на полиці?

► $n = P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. ◀

8. Скільки різних кодів з десяти позицій можна скласти і шести вертикальних і чотирьох горизонтальних штрихів, якщо на одну позицію можна розміщувати тільки один штрих?

► Враховуючи те, що вертикальні та горизонтальні штрихи можуть повторюватися, використаємо формулу (2). В нас $n = 10, n_1 = 4, n_2 = 6$. $P_{10}(4, 6) = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = 210$. ◀

9. Скількома способами можна скласти розклад з 5 уроків

у вівторок (всі уроки різні), якщо вивчається 12 предметів?

► Потрібно знайти кількість сполук, що складаються з п'яти елементів із даних дванадцяти і відрізняються або порядком, або елементами, тому

$$N = A_{12}^5 = \frac{12!}{(12-5)!} = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 95040. \blacktriangleleft$$

10. Студент забув дві останні цифри номера телефону, тому набирає їх навмання. Скільки є варіантів такого набору?

► У наборі порядок цифр має значення і цифри можуть повторюватись, тому $N = \overline{A}_{10}^2 = 10^2 = 100. \blacktriangleleft$

Завдання для самостійного розв'язання

1. З цифр «0», «5», «7» складають числа. Скільки можна скласти: а) трицифрових чисел так, щоб жодна з них не повторювалась; б) трицифрових чисел; в) двоцифрових чисел так, щоб жодна з них не повторювалась; г) двоцифрових чисел?

2. Скільки існує шестицифрових телефонних номерів (номер не може починатись з нуля)?

3. Правління підприємства складається з 9 осіб. Скількома способами можна вибрати серед них: а) три особи у відрядження; б) президента, директора та комерційного директора?

4. Проект економічного розвитку певної галузі виробництва складається з 6 розділів. В його розробці беруть участь 6 організацій. Скількома способами може бути

розподілена: а) робота над розділами; б) над першим, другим та третім розділами?

5. У речовій лотереї розігрується 8 предметів. З урни, в якій 50 квитків, беруть 5 квитків. Скількома способами їх можна взяти так, щоб: а) рівно два з них були виграшними; б) принаймні два з них були виграшними?

6. У ящику 20 деталей серед яких 4 браковані. Скількома способами можна взяти: а) 5 деталей; б) дві браковані; в) одну браковану і чотири стандартні; г) шість деталей, серед яких хоча б одна бракована; д) дві однакові за якістю?

7. Скількома способами з колоди (36 карт) можна взяти 4 карти, щоб серед них було: а) три піки; б) дві бубнової, одна чирвової масті; в) дві чирвової масті; г) всі різної масті; д) хоча б дві однієї масті?

8. Вісім груп навчається в десяти розміщених поряд аудиторіях. Скільки існує варіантів розміщення груп в аудиторіях, при яких: а) групи №1 і №2 будуть знаходитись у сусідніх аудиторіях; б) групи №5 і №7 будуть знаходитись не у сусідніх аудиторіях?

9. Четверо зайшли на першому поверсі у ліфт десятиповерхового будинку. Скількома способами вони можуть вийти з ліфта: а) піднявшись на потрібний для кожного поверх? б) на різних поверхах? в) на сьомому поверсі вийде один пасажир?

10. На складі знаходиться 10 телевізорів. Скільки існує

способів розподілити їх між трьома магазинами, якщо відомо, що у перший магазин повинно бути доставлено 5, у другий – 2, у третій – 3 телевізори?

1.4. Ймовірність випадкової події. Способи обчислення ймовірностей випадкових подій

Ймовірністю випадкової події A називається кількісна міра об'єктивної можливості появи події A . Ймовірність випадкової події A позначається $P(A)$.

Ймовірність $P(A)$ може набувати значень від 0 до 1, тобто

$$0 \leq P(A) \leq 1. \quad (5)$$

Якщо $P(A) = 0$ – подія A є неможливою. Якщо $P(A) = 1$ – подія A є достовірною.

Способи обчислення $P(A)$.

Класичний (математичний) спосіб визначення $P(A)$. Ймовірність випадкової події A дорівнює відношенню кількості m елементарних подій, які сприяють появі події, до загальної кількості n подій простору елементарних подій Ω

$$P(A) = \frac{m}{n}. \quad (6)$$

За цією формулою обчислюємо $P(A)$ лише тоді, коли простір Ω містить скінченну кількість n елементарних подій.

Якщо простір Ω містить нескінченну кількість елементарних подій, то для визначення ймовірності випадкової події здійснюють серії із n однорідних випробувань і обчислюють відносну частоту появи даної події

$$W_n(A) = \frac{m}{n}, \quad (7)$$

де m – частота появи події у n проведених випробуваннях. Зі збільшенням кількості випробувань $W_n(A)$ наближається до деякої межі, що є ймовірністю випадкової події $P(A)$, тобто $W_n(A) \rightarrow P(A)$ при $n \rightarrow \infty$. Отже,

$$W_n(A) \approx P(A). \quad (8)$$

Використання даної формули є *статистичним способом* визначення ймовірності.

Якщо простір елементарних подій Ω можна подати у вигляді деякого геометричного образу, а множину елементарних подій, сприятливих події A – як частину цього геометричного образу, то ймовірність появи події A визначається як відношення мір цих множин

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}. \quad (9)$$

Використання даної формули є *геометричним способом* визначення ймовірності.

Приклади розв'язання задач

11. Знайти ймовірність того, що при киданні грального кубика: а) випала парна кількість очок; б) випала кількість очок кратна трьом.

► Нехай подія A_1 – на кубику випала одиниця, A_2 – випала двійка, A_3 – трійка, A_4 – четвірка і т. ін., тоді $\Omega = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ – простір елементарних подій (кількість рівноможливих елементарних подій простору $n = 6$). Позначимо подію, що полягає у випаданні парної кількості очок буквою A , а подію, що полягає у випаданні кількості очок

кратних трьом – B , отже $A = \{A_2, A_4, A_6\}$ (кількість рівноможливих елементарних подій $m_1 = 3$). $B = \{A_3, A_6\}$ (кількість рівноможливих елементарних подій $m_2 = 2$).

Тоді за класичним означенням ймовірності маємо

$$P(A) = \frac{m_1}{n} = \frac{3}{6} = 0,5; \quad P(B) = \frac{m_2}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0,33. \quad \blacktriangleleft$$

12. Партія складається з 20 деталей, серед яких є три браковані. З партії навмання беруть 5 деталей. Яка ймовірність того, що серед взятих деталей будуть 3 стандартні?

► Елементарною подією у даному випадку є будь-який вибір 5-ти деталей з даних двадцяти. Кількість елементарних подій простору дорівнює кількості способів вибору п'яти деталей з двадцяти. Оскільки порядок вибору деталей не має значення, то

$$n = C_{20}^5 = \frac{20!}{5! \cdot 15!} = 15504.$$

Обчислимо кількість елементарних подій, які сприяють події $A = \{\text{серед 5-ти навмання взятих деталей 3 стандартні та 2 нестандартні деталі}\}$. 3 стандартні деталі з 17 можна вибрати C_{17}^3 способами, а дві нестандартні з 3 – C_3^2 способами. Отже,

$$m = C_{17}^3 \cdot C_3^2 = \frac{17!}{3! \cdot 14!} \cdot \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 2040.$$

Тоді

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2040}{15504} \approx 0,1316. \quad \blacktriangleleft$$

13. З шести букв розрізної азбуки складене слово «МОЛОКО». Дитина, яка не уміє читати, розсипала букви, а потім зібрала в довільному порядку. Знайти ймовірність того, що у неї знову вийшло слово «МОЛОКО».

► Загальне число наслідків випробування $n = P_6 = 6! = 720$, число сприятливих наслідків $m = P_3 = 3! = 6$, так як букви «О», що повторюються, можна довільно переставляти між собою. Шукана ймовірність рівна

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{720} = \frac{1}{120}. \blacktriangleleft$$

14. Повна колода з 52 карт ділиться навмання на дві рівні пачки по 26 карт. Знайти ймовірності наступних подій: $A = \{ \text{В кожній з пачок виявиться по два тузи} \}$; $B = \{ \text{В одній з пачок не буде жодного туза, а в іншій – всі чотири} \}$; $C = \{ \text{В одній з пачок буде один туз, а в іншій – три} \}$.

► Загальне число можливих випадків випробування буде дорівнювати числу комбінацій по 26 із 52, тобто $n = C_{52}^{26} = \frac{52!}{26! \cdot 26!}$.

Знайдемо число сприятливих випадків для подій A, B, C . Для події A $m_1 = C_4^2 \cdot C_{48}^{24}$. Подія B може відбутися двома способами: або в першій пачці будуть всі чотири тузи, а в другій – жодного, або навпаки, тобто $m_2 = 2 \cdot C_4^4 \cdot C_{48}^{22}$. Аналогічно міркуючи знайдемо число сприятливих випадків для події C

504

$$m_3 = 2 \cdot C_4^3 \cdot C_{48}^{23}.$$

Тоді, за класичним означенням ймовірності одержимо

$$P(A) = \frac{m_1}{n} = \frac{C_4^2 \cdot C_{48}^{24}}{C_{52}^{26}} \approx 0,0109; \quad P(B) = \frac{m_2}{n} = \frac{2 \cdot C_4^4 \cdot C_{48}^{22}}{C_{52}^{26}} \approx 0,0031;$$

$$P(C) = \frac{m_3}{n} = \frac{2 \cdot C_4^3 \cdot C_{48}^{23}}{C_{52}^{26}} \approx 0,0139. \blacktriangleleft$$

15. Знайти ймовірність того, що навмання вибране ціле трицифрове число, яке утворене з цифр від 0 до 9, ділиться на 12.

► Елементарною подією у даному випадку є будь-яке ціле трицифрове число з даних цифр. Кількість елементарних подій простору дорівнює кількості цілих трицифрових чисел, тобто $n = 999 - 99 = 900$.

Обчислимо кількість елементарних подій, які становлять подію $A = \{\text{утворене ціле трицифрове число ділиться на } 12\}$. Порахуємо число сприятливих події A випадків. 108 – перше трицифрове число, яке ділиться на 12, 996 – останнє. За формулою арифметичної прогресії $a_n = a_1 + d(n-1)$ знайдемо число таких членів

$$996 = 108 + 12(m-1) \Rightarrow 12m = 900 \Rightarrow m = 75.$$

Отже,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{75}{900} \approx 0,083. \blacktriangleleft$$

16. Учасники жеребкування тягнуть із скрині жетони з номерами від I до 100. Знайти ймовірність того, що номер

першого навмання витягнутого жетона, не містить цифру 7.

► Нехай A – подія, яка полягає в тому, що номер першого витягнутого жетона не містить цифру 7. Число всіх можливих випадкових подій дорівнює $n = 100$. Щоб визначити число випадкових подій, сприятливих події A , підрахуємо скільки чисел від 1 до 100 не містять цифру 7. Таких чисел $m = 9 \cdot 9 = 81$.
Шукана ймовірність

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{81}{100} = 0,81. \blacktriangleleft$$

17. У ліфт семиповерхового будинку на першому поверсі ввійшли три людини. Кожна з них з однаковою ймовірністю виходить на будь-якому з поверхів, починаючи з другого. Знайти ймовірності наступних подій: $A = \{\text{всі пасажери вийдуть на четвертому поверсі}\}$; $B = \{\text{всі пасажери вийдуть одночасно (на одному і тому ж поверсі)}\}$; $C = \{\text{всі пасажери вийдуть на різних поверхах}\}$.

► Загальне число можливих наслідків випробування, $n = 6^3 = 216$. Знайдемо число сприятливих випадків для подій A, B, C . Для події A таких сприятливих випадків буде лише один, тобто $m_1 = 1$. Для події B таких сприятливих випадків буде в шість разів більше, так як поверхів, на яких можна вийти, шість, тобто $m_2 = 6$. Для події C число способів, якими можна розподілити трьох пасажирів по шести поверхах, дорівнює

$$m_3 = C_{52}^3 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20.$$

Тоді, за класичним визначенням ймовірності одержимо

$$P(A) = \frac{m_1}{n} = \frac{1}{216}; \quad P(B) = \frac{m_2}{n} = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}; \quad P(C) = \frac{m_3}{n} = \frac{5}{54}. \quad \blacktriangleleft$$

18. Для проведення дослідження взяли випадкову вибірку з 200 колосків пшениці. Відносна частота колосся, що має 12 зернин у колосі, виявилась 0,125; а для 18 зернин в колосі – 0,05. Знайти для цієї вибірки частоту колосся, що має 12 зернин у колосі; 18 зернин у колосі.

► Розглянемо події: A – взятий колос має 12 зернин; B – взятий колос має 18 зернин.

Знайдемо частоти m_1 і m_2 подій A і B , використовуючи формулу (1.9). Позначимо через $W_n(A) = \frac{m_1}{n}$ – відносну частоту

події A , а через $W_n(B) = \frac{m_2}{n}$ – відносну частоту події B .

Враховуючи, що $n = 200$, $W_{200}(A) = 0,125$; $W_{200}(B) = 0,05$, одержимо

$$m_1 = n \cdot W_{200}(A) = 200 \cdot 0,125 = 25;$$

$$m_2 = n \cdot W_{200}(B) = 200 \cdot 0,05 = 10. \quad \blacktriangleleft$$

19. Всередині квадрата навмання вибирається точка. Знайти ймовірність того, що точка виявиться всередині вписаного в квадрат круга.

► Подія $A = \{\text{навмання взята точка виявиться всередині вписаного в квадрат круга}\}$. Опишемо простір Ω можливих подій, який визначається точками квадрата з стороною a .

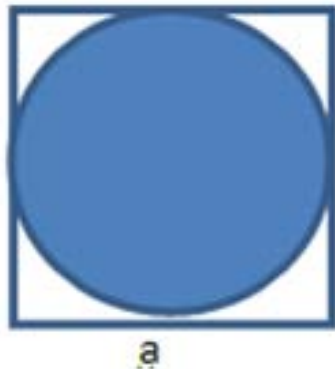


Рисунок 1

Площа такого квадрата буде рівною $\mu(\Omega) = S_{\text{кв.}} = a^2$.

Простір, що задовольняє події A характеризується точками круга, вписаного в даний круг (на рис. 1 виділена область). Площа цього круга буде рівною

$$\mu(A) = S_{\text{кр.}} = \pi \cdot r^2 = \frac{\pi \cdot a^2}{4}.$$

Тоді шукана ймовірність складе

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{\frac{\pi \cdot a^2}{4}}{a^2} = \frac{\pi}{4} \approx 0,79. \blacktriangleleft$$

20. Два товариші домовились зустрітися в певному місці між 12 годиною і 12 годиною 40 хвилин, а також про те, що той, хто прийде першим, чекатиме іншого впродовж 30 хвилин. Знайти ймовірність того, що зустріч відбудеться, якщо кожний з товаришів може прийти в довільний момент часу між 12 годиною і 12 годиною 40 хвилинами.

► Нехай подія A – зустріч відбудеться. Момент приходу одного з товаришів позначимо через x , а момент приходу

іншого – через y . Для того, щоб зустріч відбулась, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова $|x - y| \leq 30$. Зобразимо x та y декартовими координатами площини, взявши за одиницю масштабу одну хвилину.

Всі можливі результати випробування зображаються точками квадрата зі стороною 40. Площа цього квадрата $40^2=1600$. Нерівність $|x - y| \leq 30$ рівносильна системі

$$\text{нерівностей} \begin{cases} x - y \leq 30, \\ x - y \geq -30. \end{cases}$$

Отже, результат випробування, що сприяють події A , відповідають розв'язкам системи нерівностей

$$\begin{cases} x - y \leq 30, \\ x - y \geq -30, \\ 0 \leq x \leq 40, \\ 0 \leq y \leq 40. \end{cases}$$

Розв'язки цієї системи є координатами точок площини, що знаходяться між прямими $x - y = 30$, $x - y = -30$, $x = 0$, $x = 40$, $y = 0$, $y = 40$ і на самих цих прямих. Площа цієї області складе $40^2 - (40 - 30)^2 = 1600 - 100 = 1500$.

$$\text{Отже, ймовірність події } A \text{ } P(A) = \frac{1500}{1600} = 0,9375. \blacktriangleleft$$

Завдання для самостійного розв'язання

11. В урні 10 кульок білого, 5 зеленого, 7 червоного

кольору. З урни навмання беруть кульки. З якою ймовірністю можна взяти: а) одну червону кульку; б) дві білі кульки; в) три кульки одного кольору; г) три кульки різного кольору; д) чотири білі й дві зелені кульки; е) три кульки, серед яких принаймні одна білого кольору?

12. Замок містить 4 диски, на кожному з яких 10 цифр. Замок відімкнеться, якщо вірно набрано код з чотирьох цифр. Яка ймовірність того, що замок відімкнеться з першої спроби?

13. У пачці є 100 лотерейних білетів, один з яких вигравний. Яка ймовірність виграти, якщо купили 10 білетів?

14. З колоди (36 карт) беруть карти. З якою ймовірністю можна взяти: а) одну чирвову карту; б) дві пікових; в) чотири карти, з яких дві бубнової, а одна чирвової масті; г) чотири карти різних мастей; д) три карти різної масті; е) чотири карти, серед яких хоча б дві однієї масті?

15. При грі в бридж колода з 52 карт ділиться порівну між чотирма гравцями. Знайти ймовірність того, що кожен гравець отримає по одному тузу?

16. На книжковій полиці випадковим чином розставляють 4 книги з економіки і 3 книги з географії. Яка ймовірність того, що книги з одного предмета стоятимуть поруч?

17. Чотири особи зайшли на першому поверсі у ліфт десятиповерхового будинку. Кожен з них з однаковою ймовірністю може вийти на довільному поверсі, починаючи з другого. Знайти ймовірності подій: А – на восьмому поверсі

вийде один пасажир; B – всі пасажери вийшли на одному і тому ж самому поверсі; C – всі пасажери вийдуть на різних поверхах.

18. Визначаючи якість насіння, взяли на пробу 1000 насінин. З відібраних зійшло 90. Яка відносна частота появи якісного насіння?

19. Знайти ймовірність того, що навмання вибрана точка правильного трикутника потрапляє в коло, вписане в цей трикутник?

20. Між числами -1 і 1 навмання вибирають два числа. Знайти ймовірність того, що сума квадратів цих чисел буде не більшою за одиницю.

§ 2. Теорема додавання і множення ймовірностей

2.1. Теорема додавання ймовірностей для сумісних і несумісних подій

Нехай подія A є сумою двох подій B і C , тобто $A = B + C$.

Теорема додавання ймовірностей несумісних подій. Якщо події B і C несумісні, то

$$P(A) = P(B + C) = P(B) + P(C). \quad (10)$$

Ймовірність появи принаймні однієї з 2-х *несумісних* подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій. Твердження справджується й для n подій.

Якщо події A_i ($i = \overline{1, n}$) попарно несумісні, то $P(\sum_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$.

Теорема додавання ймовірностей сумісних подій. Якщо події B і C сумісні, то

$$P(A) = P(B + C) = P(B) + P(C) - P(BC). \quad (11)$$

Ймовірність настання принаймні однієї з двох подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їхньої спільної появи.

Наслідки:

1. Для протилежних подій A та $\bar{A}$ ймовірності пов'язані між собою співвідношенням

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1. \quad (12)$$

2. Якщо несумісні події $A_1, A_2, \dots, A_n$ утворюють повну групу, то сума ймовірностей цих подій дорівнює одиниці, тобто

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1. \quad (13)$$

Приклади розв'язання задач

21. В урні білі, червоні і сині кульки. Ймовірність того, що навмання взята кулька червона дорівнює 0,3; синя – 0,5; біла – 0,2. Знайти ймовірність того, що навмання взята кулька – кольорова (не біла).

► Подія A – навмання взята червона кулька, подія B – синя, C – біла, тоді $P(A) = 0,3$; $P(B) = 0,5$; $P(C) = 0,2$.

Ймовірність появи кольорової кульки дорівнює ймовірності появи червоної чи синьої кульок. За теоремою додавання ймовірностей маємо

$$P(A \text{ або } B) = P(A + B) = P(A) + P(B) = 0,3 + 0,5 = 0,8. \blacktriangleleft$$

22. Яка ймовірність того, що при підкиданні грального кубика випаде кількість очок парна, або кратна трьом?

► *1-й спосіб.* Нехай подія A_1 – на кубику випала одиниця, A_2 – випала двійка, A_3 – трійка, і т. ін. Подія A полягає в тому, що при киданні грального кубика випала парна кількість очок, подія B – у випаданні кількості очок кратних трьом. Отже, $A = \{A_2, A_4, A_6\}$, $B = \{A_3, A_6\}$.

$$P(A) = \frac{3}{6} = 0,5; \quad P(B) = \frac{2}{6} \approx 0,333; \quad P(AB) = \frac{1}{6} \approx 0,167.$$

Таким чином,

$$P(A+B) \approx 0,5 + 0,333 - 0,167 \approx 0,67. \blacktriangleleft$$

► *2-ий спосіб.* $A+B = \{A_2, A_3, A_4, A_6\}$. Отже

$$P(A+B) = \frac{4}{6} \approx 0,67. \blacktriangleleft$$

23. В урні 30 кульок: 10 – червоних, 5 – синіх і 15 білих. Знайти ймовірність того, що навмання взята кулька – кольорова (не біла).

► *1-ий спосіб.* Подія A – навмання взята червона кулька, подія B – синя, C – біла, тоді

$$P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}; \quad P(B) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6} = \frac{1}{36}; \quad P(C) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}.$$

Ймовірність появи кольорової кульки дорівнює ймовірності появи червоної чи синьої кульок. За теоремою додавання ймовірностей маємо

$$P(A+B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} = 0,5. \blacktriangleleft$$

► 2-й спосіб. Ймовірність появи кольорової кульки дорівнює ймовірності появи не білої кульки. Оскільки ймовірність появи білої кульки $P(C) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$, то

$$P(\bar{C}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \blacktriangleleft$$

24. Придбали касовий апарат. Ймовірність того, що придбали апарат виробництва Японії дорівнює 0,4; виробництва США – 0,3; іншого іноземного виробника – 0,2; виробництва України – 0,1. Яка ймовірність того, що придбали апарат іноземного виробника?

► Подія A – «придбали апарат іноземного виробника». Якщо подія A_1 – придбали апарат виробництва Японії; подія A_2 – придбали апарат виробництва США; A_3 – іншого іноземного виробника; A_4 – виробництва України, тоді

$$P(A_1) = 0,4; P(A_2) = 0,3; P(A_3) = 0,2; P(A_4) = 0,1.$$

Події A_1, A_2, A_3, A_4 утворюють повну групу. Отже,

$$P(A_1 + A_2 + A_3) = 1 - P(A_4) = 1 - 0,1 = 0,9. \blacktriangleleft$$

2.2. Теорема множення ймовірностей залежних і незалежних подій

Подія A називається *незалежною* від події B , якщо ймовірність події A не змінюється від того чи відбулась подія B .

Теорема множення ймовірностей незалежних подій. Якщо події A та B незалежні, то ймовірність події, яка полягає в сумісній появі обох подій A та B , дорівнює добутку ймовірностей цих подій

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B). \quad (14)$$

Твердження справджується й для n подій. Якщо події $A_i (i = \overline{1, n})$ попарно незалежні, то

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n).$$

Наслідок з теореми множення незалежних подій. Нехай подія A полягає в появі принаймні однієї з подій $A_1, A_2, \dots, A_n$ незалежних у сукупності. Ймовірність події A дорівнює різниці між одиницею і добутком ймовірностей подій, протилежних подіям $A_1, A_2, \dots, A_n$.

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot \dots \cdot P(\bar{A}_n). \quad (15)$$

Подія A називається залежною від події B , якщо ймовірність події A змінюється залежно від того чи відбулась подія B .

Умовна ймовірність. Ймовірність події A , яка визначена за умови, що подія B відбулася, називається умовною і позначається $P_B(A)$ або $P(A|B)$.

$$P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad P(B) \neq 0. \quad (16)$$

Властивості умовної ймовірності:

1. $P_B(A) = 0$, якщо $A \cap B = \emptyset$;
2. $P_B(A) = 1$, якщо $A \cap B = B$;
3. У решті випадків $0 < P_B(A) < 1$.

Теорема множення ймовірностей залежних подій. Якщо події A і B незалежні, то ймовірність добутку цих подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність іншої, тобто

$$P(AB) = P(B) \cdot P_B(A) = P(A) \cdot P_A(B), \quad (17)$$

де $P_A(B)$ – умовна ймовірність події B за умови, що відбулася подія A ,

$P_B(A)$ – умовна ймовірність події A за умови, що відбулася подія B .

Приклади розв’язання задач

25. Ймовірність безвідмовної роботи блоку, який входить у систему дорівнює 0,7. Для підвищення надійності системи встановлено такий же резервний блок. Знайти ймовірність зупинки роботи системи з урахуванням такого резервування.

► Нехай подія A – перший блок вийшов з ладу, подія B – другий блок вийшов з ладу. Їхні ймовірності $P(A) = 1 - 0,7 = 0,3$ і $P(B) = 1 - 0,7 = 0,3$. За теоремою множення ймовірностей незалежних подій шукана ймовірність дорівнює добутку ймовірностей подій A та B , тобто

$$P(A \cdot B) = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09. \blacktriangleleft$$

26. Над виготовленням приладу працюють послідовно 4 робітники. Якість припаду під час передачі наступному робітникові не перевіряється. Перший і другий робітники допускають брак з ймовірністю 0,01; третій – 0,02; четвертий – 0,03. Знайти ймовірність того, що при виготовленні приладу брак буде допущено.

► Подія A – брак допущено. Нехай події A_1 – брак допустив перший робітник, A_2 – брак допустив другий робітник, A_3 – брак допустив третій робітник, A_4 – брак допустив четвертий робітник, а події $\bar{A}_1$ – перший робітник не

допустив браку, $\overline{A_2}, \overline{A_3}, \overline{A_4}$, – відповідно другий, третій, четвертий робітники не допустили браку, тому

$$P(\overline{A_1}) = 1 - 0,01 = 0,99; \quad P(\overline{A_2}) = 1 - 0,01 = 0,99;$$

$$P(\overline{A_3}) = 1 - 0,02 = 0,98; \quad P(\overline{A_4}) = 1 - 0,03 = 0,97.$$

При виготовленні приладу брак буде допущено, якщо помилиться при виготовленні принаймні один робітник. Отже, браку не буде лише за однієї умови: жоден з робітників не помилиться. За наслідком теореми множення ймовірностей незалежних подій шукана ймовірність дорівнює

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) \cdot P(\overline{A_4}) = \\ &= 1 - 0,99 \cdot 0,99 \cdot 0,98 \cdot 0,97 \approx 0,07. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

27. В урні 10 білих і 5 чорних кульок. З урни одну за одною беруть дві кульки. Яка ймовірності того, що другою буде витягнута біла кулька?

► Нехай подія B_1 полягає в тому, що першою з урни навмання витягнули білу кульку; подія B_2 полягає в тому, що першою з урни навмання витягнули чорну кульку; подія A полягає в тому, що друга витягнута кулька виявилась білою.

Для події B_1 з 15 можливих подій сприятливими є 10,

тобто $P(B_1) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$. Для події B_2 з 15 можливих подій

сприятливими з 5, тобто $P(B_2) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

Для події A за умови, що подія B_1 відбулася, з 14

можливих подій, що залишились, сприятливими є 9, тобто

$P_B(A) = \frac{9}{14}$; для події A за умови, що подія B_2 відбулася, з 14

можливих подій, що залишились, сприятливими є 10, тобто

$$P_{B_2}(A) = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}.$$

$$\text{Отже, } P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{14} + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{7} =$$

$$= \frac{18+10}{42} = \frac{28}{42} = \frac{2}{3}. \blacktriangleleft$$

28. На співбесіду прийшло 10 осіб. Троє з них не кваліфіковані робітники. Представник фірми запросив у кабінет 2-х осіб. Знайти ймовірність того, що: а) обидва робітники не кваліфіковані: б) обидва кваліфіковані.

► а) Нехай подія A – перший претендент, що зайшов, виявився некваліфікованим робітником, B – другий претендент, що зайшов, виявився теж некваліфікованим робітником. Події A

і B залежні. Тоді $P(A) = \frac{3}{10}$ і $P_A(B) = \frac{2}{9}$. За теоремою

множення ймовірностей залежних подій шукана ймовірність дорівнює добутку ймовірності події A та умовної ймовірності

$$\text{події } B, \text{ тобто } P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}.$$

б) Нехай подія A – перший робітник, що ввійшов виявився кваліфікованим; подія B – другий робітник, що ввійшов,

виявився кваліфікованим, тоді $P(A) = \frac{7}{10}$ і $P_A(B) = \frac{6}{9}$.

Шукана ймовірність дорівнює добутку ймовірності події A і умовної ймовірності події B , тобто

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}. \blacktriangleleft$$

31. Три спортсмени на змаганнях намагаються виконати норматив. Ймовірності виконання нормативу першим, другим, третім спортсменами відповідно дорівнюють 0,8; 0,75; 0,34. Знайти ймовірність того, що норматив виконають: а) тільки один спортсмен; б) тільки два спортсмени; в) три спортсмени; г) хоча б один спортсмен.

► Нехай A_1, A_2, A_3 є події, які полягають в тому, що норматив буде виконаний відповідно першим, другим, третім спортсменами.

$$\text{Маємо } P(A_1) = 0,8; P(A_2) = 0,75; P(A_3) = 0,34;$$

$$P(\bar{A}_1) = 0,2; P(\bar{A}_2) = 0,25; P(\bar{A}_3) = 0,66.$$

а) Позначимо через A подію, яка полягає в тому, що тільки один спортсмен виконає норматив. Внаслідок несумісності, незалежності розгляданих подій послідовно знаходимо

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 + A_2 \cdot \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_3 + A_3 \cdot \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2) = \\ &= P(A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3) + P(A_2 \cdot \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_3) + P(A_3 \cdot \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2) = \\ &= P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) + P(A_2) \cdot P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_3) + \end{aligned}$$

$$+P(A_3) \cdot P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) = 0,8 \cdot 0,66 \cdot 0,25 + 0,75 \cdot 0,2 \cdot 0,66 + \\ + 0,34 \cdot 0,2 \cdot 0,25 = 0,132 + 0,099 + 0,017 = 0,248.$$

б) Позначимо через B подію, яка полягає в тому, що тільки два спортсмени виконають норматив. Внаслідок несумісності, незалежності розгляданих подій послідовно знаходимо

$$P(B) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3 + A_1 \cdot A_3 \cdot \bar{A}_2 + A_2 \cdot A_3 \cdot \bar{A}_1) = \\ = P(A_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3) + P(A_1 \cdot A_3 \cdot \bar{A}_2) + P(A_2 \cdot A_3 \cdot \bar{A}_1) = \\ = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\bar{A}_3) + P(A_1) \cdot P(A_3) \cdot P(\bar{A}_2) + \\ + P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(\bar{A}_1) = 0,8 \cdot 0,75 \cdot 0,66 + 0,8 \cdot 0,34 \cdot 0,25 + \\ + 0,75 \cdot 0,34 \cdot 0,2 = 0,396 + 0,068 + 0,051 = 0,515.$$

в) Позначимо через C подію, яка полягає в тому, що три спортсмени виконають норматив. Внаслідок незалежності розгляданих подій одержимо

$$P(C) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0,8 \cdot 0,34 \cdot 0,75 = 0,204.$$

г) Позначимо через D подію, яка полягає в тому, що хоча б один спортсмен виконає норматив. Одержимо

$$P(D) = 1 - P(\bar{D}) = 1 - P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3) = \\ = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) = 1 - 0,2 \cdot 0,66 \cdot 0,25 = 0,967. \blacktriangleleft$$

Завдання для самостійного розв'язання

21. Підкинули дві монети. Розглядаються дві події: A – випав герб на першій монеті; B – випав герб на другій монеті. Знайти ймовірності подій $A + B$, $A \cdot B$.

22. Гральний кубик кидають до тих пір, поки з'явиться шістка. Знайти ймовірність того, що вона перший раз з'явиться при третьому підкиданні.

23. З урни, в якій лежать 12 білих і 8 червоних кульок, беруть послідовно дві кульки. Відомо, що перша виявилась білою. Яка ймовірність того, що друга кулька виявиться: а) білою; б) червоною?

24. В одному ящику 5 білих та 10 червоних кульок, у другому 10 білих та 5 червоних кульок. З кожного ящика навмання беруть по одній кульці. Знайти ймовірність того, що буде вибрано одну білу кульку.

25. Два стрільці влучають у ціль з ймовірностями 0,7 та 0,8 відповідно. Кожен з них робить один постріл. Яка ймовірність того, що: а) обидва влучать; б) жоден не влучить; в) принаймні один влучив; г) лише один влучив у ціль?

26. Ймовірність принаймні одного влучення в ціль при трьох пострілах дорівнює $\frac{7}{8}$. Знайти ймовірність влучення при одному пострілі.

27. Слово «інтеграл» складається з букв розрізаної азбуки. Картки перемішали і навмання, одна за одною, дістали 3 картки. Яка ймовірність того, що вийшло слово «гра»?

28. Магазин приймає партію з 10 телевізорів для продажу в тому випадку, коли при перевірці 2-х з них, взятих навмання, обидва будуть якісними. Яка ймовірність того, що партія, в якій 4 неякісних апарати, буде прийнята?

2.3. Формула повної ймовірності. Формула Байєсса

Наслідком теорем додавання і множення ймовірностей випадкових подій є формула повної ймовірності.

Формула повної ймовірності. Нехай подія A може відбутися лише за умови за умови настання однієї з несумісних подій $H_i (i = 1, 2, 3, \dots, n)$, які утворюють повну групу. Зрозуміло, що $\sum_{i=1}^n P(H_i) = 1$. Тоді ймовірність події A знаходиться за формулою

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P_{H_i}(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A|H_i), \quad (18)$$

де $P(H_i)$ – ймовірність події H_i ; $P_{H_i}(A)$ – умовна ймовірність настання події A , тобто ймовірність події A за умови, що подія H_i відбулася.

Формула (18) називається формулою повної ймовірності. Події H_i називають *гіпотезами*.

При розв'язуванні задач на знаходження повної ймовірності потрібно дотримуватися такої послідовності:

1) Визначити гіпотези H_i і знайти їх ймовірності $P(H_i)$ (якщо гіпотези рівноможливі, то їх ймовірності рівні, а якщо нерівноможливі, їх ймовірності різні, але в обох випадках сума ймовірностей гіпотез дорівнює одиниці);

2) знайти умовні ймовірності $P(A|H_i)$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$;

3) скористатись формулою (18).

Формула Байєсса. Подія A може відбутись одночасно з деякою із подій $H_i (i = 1, 2, 3, \dots, n)$. Відомі ймовірності подій $P(H_i)$ та умовні ймовірності того, що подія A відбудеться ($P(A|H_i)$). Відомо, що в результаті випробування подія A відбулась. Потрібно з огляду на це переоцінити

ймовірності гіпотез $H_i \left(\sum_{i=1}^n P(H_i(A)=1) \right)$. Для цього застосовують *формули Байєса*

$$P(A|H_i) = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A|H_i)}. \quad (19)$$

Формули Байєса є наслідком теореми множення ймовірностей залежних подій і формули повної ймовірності.

Ймовірності подій H_i , знайдені до початку даного випробування, $P(H_i)$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) називають *апостеріорними*; а ймовірності подій H_i , знайдені після випробування, $P(A|H_i)$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) називають *априорними*.

Приклади розв'язання задач

30. Маємо 3 урни з кульками. В першій урні 4 білих і 3 чорних, у другій – 5 білих і 2 чорних, у третій – 2 білих і 5 чорних кульок. Вибирають навмання одну з урн і дістають одну кульку. Знайти ймовірність того, що:

- а) навмання вибрана кулька виявиться білою;
- б) навмання вибрана кулька виявиться чорною.

► Нехай A – подія, що навмання взята кулька виявилась білою; $\bar{A}$ – навмання взята кулька виявилась чорною. Події H_1 – кульку дістали з першої урни, H_2 – із другої, H_3 – із третьої урни. Ймовірності даних подій

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}; \quad P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 1.$$

Умовні ймовірності події A : $P_{H_1}(A) = \frac{4}{7}$ – ймовірність достати білу кульку з першої урни; $P_{H_2}(A) = \frac{5}{7}$ – із другої; $P_{H_3}(A) = \frac{2}{7}$ – із третьої.

За формулою повної ймовірності:

$$\begin{aligned} \text{а) } P(A) &= P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + P(H_3) \cdot P_{H_3}(A) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{7} = \frac{11}{21}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } P(\bar{A}) &= P(H_1) \cdot P_{H_1}(\bar{A}) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(\bar{A}) + P(H_3) \cdot P_{H_3}(\bar{A}) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{10}{21}. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

31. 60% виробів контролюється першим експертом, 40% – другим. Ймовірність забракувати дефектний виріб для першого та другого експерта відповідно 0,9 та 0,7. Ймовірність помилкового бракування виробу, що немає дефекту, дорівнює відповідно 0,02 та 0,11. Знайти ймовірності того, що: а) дефектний виріб забракують; б) забракують якісний виріб.

► Нехай A – подія, що полягає в тому, що дефектний виріб забракували; C – забракували якісний виріб. Гіпотеза H_1 – виріб контролювався першим експертом, H_2 – другим експертом. Ймовірності даних подій

$$P(H_1) = 0,6; \quad P(H_2) = 0,4.$$

Зауважимо, що $P(H_1) + P(H_2) = 0,6 + 0,4 = 1$. Події H_1 і H_2 утворюють повну групу, тому є гіпотезами для подій A та C .

Умовні ймовірності подій A та C відповідно дорівнюють $P(A|H_1) = 0,9$ – ймовірність того, що дефектний виріб перший експерт визнав бракованим; $P(A|H_2) = 0,7$ – ймовірність того, що дефектний виріб другий експерт визнав бракованим; $P(C|H_1) = 0,02$ – ймовірність того, що якісний виріб перший експерт визнав бракованим; $P(C|H_2) = 0,11$ – ймовірність того, що якісний виріб другий експерт визнав бракованим.

За формулою повної ймовірності:

$$\begin{aligned} \text{а) } P(A) &= P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) = \\ &= 0,6 \cdot 0,9 + 0,4 \cdot 0,7 = 0,82; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } P(C) &= P(H_1) \cdot P(C|H_1) + P(H_2) \cdot P(C|H_2) = \\ &= 0,6 \cdot 0,02 + 0,4 \cdot 0,11 = 0,056. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

32. 60 % виробів контролюється першим експертом, 40% – другим. Ймовірність забракувати дефектний виріб для першого та другого експерта відповідно дорівнюють 0,9 та 0,7. Ймовірність помилкового бракування виробу, що не має дефекту, дорівнює відповідно 0,02 та 0,11. Навмання вибраний виріб, який пройшов перевірку, виявився дефектним. Знайти ймовірності того, що цей виріб перевіряв: а) перший експерт; б) другий експерт. Навмання вибраний виріб, який пройшов

перевірку, виявився якісним. Знайти ймовірності того, що цей виріб перевіряв: в) перший експерт; г) другий експерт.

► Нехай A – подія, що полягає в тому, що дефектний виріб забракували; C – забракували якісний виріб. Гіпотеза H_1 – виріб контролювався першим експертом, H_2 – другим експертом. Ймовірності даних подій

$$P(H_1) = 0,6; \quad P(H_2) = 0,4.$$

Умовні ймовірності подій A та C відповідно дорівнюють $P(A|H_1) = 0,9$; $P(A|H_2) = 0,7$; $P(C|H_1) = 0,02$; $P(C|H_2) = 0,11$ (див. приклад 33.).

За формулою Байєса:

$$\begin{aligned} \text{а) } P(H_1|A) &= \frac{P(H_1) \cdot P(A|H_1)}{P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2)} = \\ &= \frac{0,6 \cdot 0,9}{0,6 \cdot 0,9 + 0,4 \cdot 0,7} \approx 0,659; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } P(H_2|A) &= \frac{P(H_2) \cdot P(A|H_2)}{P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2)} = \\ &= \frac{0,4 \cdot 0,7}{0,6 \cdot 0,9 + 0,4 \cdot 0,7} \approx 0,341; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } P(H_1|C) &= \frac{P(H_1) \cdot P(C|H_1)}{P(H_1) \cdot P(C|H_1) + P(H_2) \cdot P(C|H_2)} = \\ &= \frac{0,6 \cdot 0,02}{0,6 \cdot 0,02 + 0,4 \cdot 0,11} \approx 0,214; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{г) } P(H_2|C) &= \frac{P(H_2) \cdot P(C|H_2)}{P(H_1) \cdot P(C|H_1) + P(H_2) \cdot P(C|H_2)} = \\ &= \frac{0,4 \cdot 0,11}{0,6 \cdot 0,02 + 0,4 \cdot 0,11} \approx 0,786. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

33. Маємо 3 урни з кульками. В першій урни 4 білих і 3 чорних, у другій – 5 білих і 2 чорних, у третій – 2 білих і 5 чорних кульок. Вибирають навмання одну з урн і дістають одну кульку. Кулька виявилась білою. Знайти ймовірність того, що її дістали: а) з 1-ї урни; б) з 2-ї урни; в) з 3-ї урни. Кулька виявилась чорною. Знайти ймовірність того, що її дістали: г) з 1-ї урни; д) з 2-ї урни; е) з 3-ї урни.

► Нехай подія A – поява білої кульки. Подія H_1 – кульку дістали з першої урни, H_2 – із другої урни, H_3 – із третьої. Ймовірності даних подій

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}.$$

Умовні ймовірності відповідно складуть

$$P(A|H_1) = \frac{4}{7}; \quad P(A|H_2) = \frac{5}{7}; \quad P(A|H_3) = \frac{2}{7}.$$

Тоді за формулою повної ймовірності одержимо

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + \\ &+ P(H_3) \cdot P(A|H_3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{7} = \frac{11}{21}. \end{aligned}$$

$$P(\bar{A}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{10}{21}.$$

За формулою Байєса:

$$\begin{aligned} \text{а) } P(H_1|A) &= \frac{P(H_1) \cdot P(A|H_1)}{P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + P(H_3) \cdot P(A|H_3)} = \\ &= \frac{P(H_1) \cdot P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{7}}{\frac{11}{21}} \approx 0,36; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } P(H_2|A) &= \frac{P(H_2) \cdot P(A|H_2)}{P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + P(H_3) \cdot P(A|H_3)} = \\ &= \frac{P(H_2) \cdot P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{7}}{\frac{11}{21}} \approx 0,46; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } P(H_3|A) &= \frac{P(H_3) \cdot P(A|H_3)}{P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + P(H_3) \cdot P(A|H_3)} = \\ &= \frac{P(H_3) \cdot P(A|H_3)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{7}}{\frac{11}{21}} \approx 0,18; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{г) } P(H_1|\bar{A}) &= \frac{P(H_1) \cdot P(\bar{A}|H_1)}{P(H_1) \cdot P(\bar{A}|H_1) + P(H_2) \cdot P(\bar{A}|H_2) + P(H_3) \cdot P(\bar{A}|H_3)} = \\ &= \frac{P(H_1) \cdot P(\bar{A}|H_1)}{P(\bar{A})} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7}}{\frac{10}{21}} = 0,3; \end{aligned}$$

$$\text{д) } P(H_2|\bar{A}) = \frac{P(H_2) \cdot P(\bar{A}|H_2)}{P(H_1) \cdot P(\bar{A}|H_1) + P(H_2) \cdot P(\bar{A}|H_2) + P(H_3) \cdot P(\bar{A}|H_3)} =$$

$$= \frac{P(H_2) \cdot P(\bar{A}|H_2)}{P(\bar{A})} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{7}}{\frac{10}{21}} = 0,2;$$

$$\begin{aligned} \text{е) } P(H_3|\bar{A}) &= \frac{P(H_3) \cdot P(\bar{A}|H_3)}{P(H_1) \cdot P(\bar{A}|H_1) + P(H_2) \cdot P(\bar{A}|H_2) + P(H_3) \cdot P(\bar{A}|H_3)} = \\ &= \frac{P(H_3) \cdot P(\bar{A}|H_3)}{P(\bar{A})} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{7}}{\frac{10}{21}} = 0,5. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Завдання для самостійного розв'язання

29. Маємо дві урни з білими та чорними кульками. Ймовірність витягнути навмання з першої урни білу кульку 0,7, а з другої – 0,5. Навмання вибирають одну з урн і дістають навмання одну кульку. Знайти ймовірність того, що: а) кулька виявиться білою; б) білу кульку дістали саме з 1-ої урни.

30. В урну, що містить 3 кульки, покладено білу кульку, після чого з неї навмання береться одна кулька. Знайдіть ймовірність того, що кулька виявиться білою.

31. 3 урни, яка містить 3 білі та 2 чорні кульки, перекладено дві кульки до урни, яка містить 4 білі та 4 чорні кульки. Яка ймовірність того, що з другої урни після такого перекладання буде взято білу кульку?

32. 3 урни, яка містить 5 білих та 2 чорні кульки, перекладено одну кульку в урну, яка містить 4 білих та 6 чорних кульок, з якої потім навмання перекладено дві кульки до урни, яка

містить 4 білі та 4 чорні кульки. Яка ймовірність того, з останньої урни після такого перекладання буде взято білу кульку?

33. У двох корзинах баскетбольні та волейбольні м'ячі, причому у першій – 8 баскетбольних і 2 волейбольних, у другій – 6 баскетбольних і 3 волейбольних. З навімання вибраної корзини взяли м'яч. Яка ймовірність того, що: а) взяли волейбольний м'яч; б) м'яч, який виявився баскетбольним, взяли з першої корзини?

34. Два стрільці незалежно один від одного роблять по одному пострілу по мішені. Ймовірність влучання першого – 0,8, другого – 0,4. Відомо, що є одне влучення. Знайти ймовірність того, що в мішень влучив перший стрілець.

35. Перший стрілець влучає в мішень з ймовірністю 0,6, другий – з ймовірністю 0,5, а третій – з ймовірністю 0,4. Стрільці виконали залп по мішені. Відомо, що є два влучення. Що більш ймовірно: третій стрілець влучив у мішень чи ні?

36. Прилади одного найменування виготовляються двома заводами; перший завод постачає $\frac{2}{3}$ всіх виробів, другий – $\frac{1}{3}$. Надійність (ймовірність безвідмовної роботи) приладу, виготовленого першим заводом, дорівнює 0,98; другого – 0,88. Знайти надійність навімання взятого приладу.

37. Серед n екзаменаційних білетів m «щасливих». Студенти підходять за білетами один за одним. У кого більша ймовірність взяти «щасливий» білет: у того, хто підійшов першим, чи у того, хто підійшов другим?

38. У першому ящику 10 стандартних і 2 браковані деталі,

530

у другому – відповідно 12 і 3, у третьому – 14 і 1. З навання вибраного ящика взяли деталь. Яка ймовірність того, що:

- а) взяли стандартну деталь;
- б) деталь, яка виявилась бракованою, взяли з третього ящика?

39. До крамниці надходить товарна продукція лише трьох заводів. Об'єми продукції першого, другого та третього заводів відповідно відносяться 2:5:3. Доля браку на першому заводі 2%, на другому – 5%, на третьому – 4%. Яка ймовірність того, що:

- а) куплений у крамниці товар виявився бракованим;
- б) куплений товар, який виявився якісним, виготовили на другому заводі?

40. Імовірність того, що на контроль надходить дефектний виріб, дорівнює 0,11. Контролер бракує дефектний виріб з імовірністю 0,9, помилково бракує стандартний виріб з імовірністю 0,1. Знайти ймовірність того, що:

- а) виріб забраковано;
- б) виріб, який забракували, виявився якісним.

§ 3. Повторні випробування. Схема Бернуллі

3.1. Повторні незалежні випробування.

Формула Бернуллі для обчислення ймовірності. Нехай проводяться n випробувань, у кожному з яких подія A може як відбутись з однією і тією ж

ймовірністю, так і не відбутись. Якщо ймовірність появи події A у кожному випробуванні не залежить від того, відбулась ця подія в інших випробуваннях чи ні, то такі випробування називаються незалежними щодо події A .

Ймовірність того, що подія A відбудеться в кожному з незалежних випробувань, позначають через $p = P(A)$, а ймовірність не настання події A в кожному з незалежних випробувань позначають через $q = P(\bar{A})$ ($q = 1 - p$).

Проводиться n незалежних випробувань, у кожному з яких подія A відбувається зі сталою ймовірністю p ($p = \text{const}$) та не відбувається з ймовірністю $q = 1 - p$. Ймовірність того, що подія A відбудеться рівно m разів у n незалежних випробуваннях позначається $P_n(m)$ і обчислюється за формулою Бернуллі

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}, \quad (20)$$

де $m = 1, 2, 3, \dots, n$.

Найімовірніша частота. Частота m_0 настання події A в n незалежних повторних випробуваннях називається найімовірнішою частотою появи цієї події, якщо їй відповідає найбільша ймовірність. Найімовірніша частота m_0 появи події визначається з нерівності

$$np - q \leq m_0 \leq np + p. \quad (21)$$

$$m_0 = \begin{cases} np - q, & \text{якщо } np - q \text{ та } np + p \text{ цілі числа;} \\ np + p, & \text{якщо } np + p \end{cases}$$

дробове число.

Приклади розв'язання задач

34. Ймовірність виграти по одному білету лотереї $p = 1/3$. Знайти ймовірність того що з п'яти куплених білетів,

виграшних буде:

- а) два; б) всі; в) жодного; г) не менше двох;
 д) більше двох; е) не більше двох; є) менше двох;
 ж) від 2 до 4; з) принаймні один.

► Якщо A – подія, що полягає у купівлі виграшного білета, то її ймовірність $p = \frac{1}{3}$, а ймовірність купівлі

невиграшного білета $q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

За формулою Бернуллі та її наслідками маємо:

$$\text{а) } P_5(2) = C_5^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 10 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{8}{27} \approx 0,3292;$$

$$\text{б) } P_5(5) = \left(\frac{1}{3}\right)^5 \approx 0,004;$$

$$\text{в) } P_5(5) = \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243} \approx 0,1317;$$

$$\text{г) } P_5(m \geq 2) = P_5(2) + P_5(3) + P_5(4) + P_5(5);$$

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5!}{2!3!} \cdot \frac{1}{27} \cdot \frac{4}{9} \approx 0,1646;$$

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{5!}{1!4!} \cdot \frac{1}{81} \cdot \frac{2}{3} \approx 0,0412;$$

$$P_5(5) = C_5^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{5!}{0!5!} \cdot \frac{1}{243} \cdot 1 \approx 0,0041.$$

$$P_5(m \geq 2) = 0,3292 + 0,1646 + 0,0412 + 0,0041 = 0,5291;$$

$$\text{д) } P_5(m > 2) = P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = 0,1646 +$$

$$+0,0412 + 0,0041 = 0,2099;$$

$$\text{е) } P_5(m \leq 2) = P_5(0) + P_5(1) + P_5(2) = 0,1317 + \\ + 0,3292 + 0,3292 = 0,7901;$$

$$P_5(1) = C_5^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{16}{81} = \frac{80}{243} \approx 0,3292;$$

$$\text{є) } P_5(m < 2) = P_5(0) + P_5(1) = 0,1317 + 0,3292 = 0,4609;$$

$$\text{ж) } P_5(2 \leq m \leq 4) = P_5(2) + P_5(3) + P_5(4) \approx 0,3292 + \\ + 0,1646 + 0,0412 = 0,535;$$

$$\text{з) } P_5(1 \leq m \leq 5) = 1 - P_5(0) \approx 1 - 0,1317 = 0,8683. \blacktriangleleft$$

35. Ймовірність появи події A в кожному з 20 незалежних випробувань дорівнює 0,15. Знайти найімовірнішу частоту появи події A у цих випробуваннях.

► Відповідно до позначень формули найімовірнішої частоти маємо $n = 20, p = 0,15, q = 0,85$. Підставивши значення у формулу, одержимо

$$20 \cdot 0,15 - 0,85 \leq m_0 \leq 20 \cdot 0,15 + 0,15; \\ 2,15 \leq m_0 \leq 3,15.$$

Частота m_0 є цілим числом. Останню нерівність задовольняє лише одне ціле значення – число 3, тому $m_0 = 3$. ◀

36. Ймовірність появи події A в кожному з n незалежних випробувань дорівнює 0,7. Скільки таких випробувань потрібно виконати, щоб найімовірніша частота появи події A в цих випробуваннях дорівнювала 20?

► За умовою $p = 0,7$, тому $q = 0,3$. Найімовірніша частота появи події A в проведених випробуваннях $m_0 = 20$. Потрібно знайти n . Підставивши дані значення у формулу (21), маємо

$$0,7 \cdot n - 0,3 \leq 20 \leq 0,7 \cdot n + 0,7.$$

Дана подвійна нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} 0,7 \cdot n - 0,3 \leq 20; \\ 0,7 \cdot n + 0,7 \geq 20; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \leq 29; \\ n \geq 27,57. \end{cases}$$

Отже, необхідно провести 28 або 29 випробувань. ◀

Завдання для самостійного розв'язання

41. Ймовірність появи деякої події у одному випробуванні 0,8. Яка ймовірність того, що при 8-ми випробуваннях, подія відбудеться: а) 5 разів; б) 0 разів; в) 8 разів; г) не менше 4 разів; д) більше 2 разів; е) не менше 2-х, але менше 5-ти разів; є) принаймні один раз.

42. Ймовірність появи деякої події у одному випробуванні 0,7. Яка ймовірність того, що при 120-ти випробуваннях, подія відбудеться: а) 100 разів; б) 0 разів; в) 120 разів; г) не менше 100 разів; д) не більше 20 разів; є) від 80 до 100 разів.

43. Ймовірність появи деякої події у одному випробуванні 0,004. Яка ймовірність того, що при 1000 випробуваннях, подія відбудеться: а) 5 разів; б) 0 разів; в) 10 разів; г) менше 5 разів; д) не більше 3 разів; е) від 3 до 5 разів.

44. На складі є товари двох видів, причому товарів другого

виду в 2 рази більше ніж першого. Знайти ймовірність того, що:
а) серед восьми навмання взятих товарів три виявляться першого виду; б) серед п'яти взятих навмання товарів принаймні один виявиться другого виду.

45. Знайти ймовірність того, що при підкиданні грального кубика 7 разів, число 6 випаде хоча б при одному підкиданні.

46. Ймовірність влучення стрільця у десятку 0,6. Чому дорівнює ймовірність того, що при 10 пострілах, стрілець влучить у десятку: а) 4 рази; б) 0 разів; в) 10 разів; г) не менше 5 разів; д) не більше 8 разів; е) від 6 до 8 разів; є) принаймні один раз?

47. Ймовірність того, що подія відбудеться принаймні один раз у двох незалежних випробуваннях, дорівнює 0,51. Знайти ймовірність появи події в одному випробуванні.

48. Ймовірність появи події A в кожному з n незалежних випробувань дорівнює 0,8. Скільки таких випробувань потрібно виконати, щоб найімовірніша частота появи події A в цих випробуваннях дорівнювала 30?

49. Ймовірність влучення стрільця в ціль в кожному з 10 пострілів дорівнює 0,8. Знайти найімовірнішу частоту влучень при 10 пострілах.

50. Ймовірність появи бракованої деталі серед n деталей дорівнює 0,1. Скільки потрібно взяти деталей, щоб найімовірніша частота появи бракованої деталі дорівнювала 7?

3.2. Локальна та інтегральна формули Муавра-Лапласа

Локальна теорема Муавра-Лапласа. Якщо число випробувань n досить велике і ймовірність настання події A в одному випробуванні p , причому $p \neq 0$, $p \neq 1$, то використовують наближену формулу Муавра-Лапласа

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot n \cdot p \cdot q}} \cdot e^{-\frac{(m-np)^2}{2npq}} \quad (22)$$

або

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} \cdot \varphi(x), \quad (23)$$

$$\text{де } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot n \cdot p \cdot q}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}.$$

Функція $\varphi(x)$ називається *функцією Гаусса*. Графік функції Гаусса зображений на рис. 2.

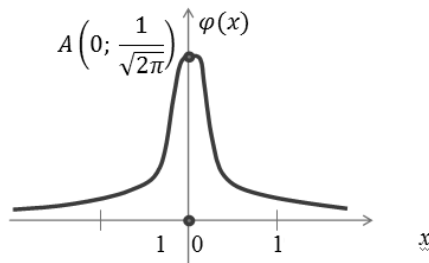


Рисунок 2

Функція Гаусса парна, тобто $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

У спеціальних таблицях подані значення функції $\varphi(x)$ лише для аргументів $0 \leq x \leq 4$. Для інших значень аргументів приймаємо $\varphi(x > 4) = 0$.

Інтегральна теорема Муавра-Лапласа. Ймовірність того, що подія A відбудеться від m_1 , до m_2 , разів при проведенні n незалежних випробувань, у кожному з яких подія A відбувається з імовірністю p , причому $p \neq 0$, $p \neq 1$, подається формулою

$$P_n(m_1, m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \quad (24)$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функція Лапласа; $x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$; $x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Графік функції Лапласа зображено на рис. 3.

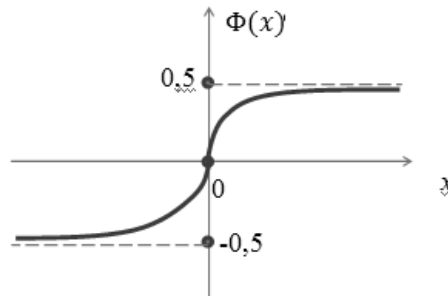


Рисунок 3

Функція $\Phi(x)$ непарна, тобто $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Значення функції Лапласа наводяться у спеціальних таблицях ($\Phi(x > 4) = 0,5$).

Приклади розв'язання задач

37. Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,51. Знайти ймовірність того, що серед 100 немовлят виявиться 50 хлопчиків.

► Нехай подія A – народження хлопчика. Тоді

$$P(A) = p = 0,51, \quad P(\bar{A}) = 1 - p = 1 - 0,51 = 0,49, \quad m = 50, \quad n = 100.$$

Використаємо локальну формулу Муавра-Лапласа. Для цього обчислимо

$$x = \frac{50 - 100 \cdot 0,51p}{\sqrt{100 \cdot 0,51 \cdot 0,49}} = -\frac{1}{5} = -0,2.$$

За таблицею значень функції $\varphi(x)$ знайдемо $\varphi(-0,2) = \varphi(0,2) \approx 0,391$

$$\text{Тоді } P_{100}(50) = \frac{0,391}{\sqrt{100 \cdot 0,51 \cdot 0,49}} \approx 0,0782. \quad \blacktriangleleft$$

38. Монету кидаємо 10 000 разів. Яка ймовірність того, що число появ герба буде між 4900 та 5050?

► Маємо схему незалежних випробувань Бернуллі, де $n = 10000$, $m_1 = 4900$, $m_2 = 5050$, $p = 0,5$, $q = 0,5$.

Використаємо інтегральну формулу Муавра-Лапласа. Для цього обчислимо

$$x_1 = \frac{4900 - 10000 \cdot 0,5}{\sqrt{10000 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = -2; \quad x_2 = \frac{5050 - 10000 \cdot 0,5}{\sqrt{10000 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = 1.$$

$$\text{Тоді } P_{10000}(4900, 5050) \approx \Phi(1) - \Phi(-2) = \Phi(1) + \Phi(2).$$

По таблицях функції Лапласа знайдемо значення

$$\Phi(1) = 0,3413; \Phi(2) = 0,4772.$$

Одержимо

$$P_{10000}(4900, 5050) \approx \Phi(1) + \Phi(2) = 0,3413 + 0,4772 = 0,8185. \quad \blacktriangleleft$$

39. 40 % виборців великого міста голосують за кандидата

А. Випадковим чином відібрано 25 виборців. Яка ймовірність того, що більшість з них голосують за А?

► Маємо схему незалежних випробувань Бернуллі, де $n = 25$, $m_1 = 13$, $m_2 = 25$, $p = 0,4$, $q = 0,6$.

Використаємо інтегральну формулу Муавра-Лапласа. Для цього обчислимо

$$x_1 = \frac{13 - 25 \cdot 0,4}{\sqrt{25 \cdot 0,4 \cdot 0,6}} = 1,22; \quad x_2 = \frac{25 - 25 \cdot 0,4}{\sqrt{25 \cdot 0,4 \cdot 0,6}} = 6,12.$$

$$P_{25}(13, 25) \approx \Phi(6,12) + \Phi(1,22) = 0,5 + 0,3888 = 0,8888. \blacktriangleleft$$

Завдання для самостійного розв'язання

51. Ймовірність виграшу при придбанні одного квитка з 1000 дорівнює 0,4. Скільки потрібно придбати таких квитків, щоб принаймні один з них був виграшним?

52. Ймовірність виготовлення бракованої деталі 0,2. Знайти ймовірність того, що серед 100 деталей бракованих, буде: а) 0; б) 10; в) не менше 10; г) 20; д) від 18 до 30; е) 80; є) від 80 до 100.

53. Ймовірність влучання в ціль 0,85. Знайти ймовірність того, що при 120 пострілах, влучань буде: а) 0; б) 100; в) не менше 80; г) не більше 90; д) від 80 до 90.

54. Ймовірність присутності студента на лекції 0,75. Знайти ймовірність того, що з 80 студентів на лекції буде: а) 70; б) не менше 50; в) більше 75; г) від 50 до 70.

3.3. Формула Пуассона

Точність асимптотичних формул для великих значень n – числа повторних незалежних експериментів за схемою Бернуллі – знижується з наближенням p до нуля. Тому в випадку малоїмовірних подій (якщо $0 < p < 0,1$, а n велике) використовують формулу Пуассона

$$P_n(m) \approx \frac{a^m}{m!} e^{-a}, a = np. \quad (25)$$

Значення $\frac{a^m}{m!} e^{-a}$ наводяться у спеціальних таблицях.

Приклади розв'язання задач

40. Якщо ліворукі в середньому складають 1%, то яка ймовірність того, що серед 200 чоловік рівно 2 ліворуких?

► Нехай подія A – людина є ліворукою. Тоді

$$P(A) = p = \frac{1}{100} = 0,01. \text{ За умовою маємо}$$

$$n = 200, \quad m = 2, \quad np = 200 \cdot 0,01 = 2.$$

$$P_{200}(2) = \frac{(2)^2}{2!} e^{-2} = 0,2706. \quad \blacktriangleleft$$

41. Ймовірності появи події A в кожному з 1800 незалежних випробувань дорівнює $p = 0,001$. Знайти ймовірність того, що при цьому подія A проявиться: а) 2 рази; б) менше 2 разів; в) не менше 2 разів; г) хоча б один раз.

► Оскільки $p < 0,1$, $a = np = 0,001 \cdot 1800 = 1, \quad 8 < 9$, то при обчисленні ймовірності появи m подій в n незалежних

випробовуваннях замість формули біноміального розподілу доцільно використовувати асимптотичну формулу (25).

$$\text{а) } P_{1800}(m=2) = \frac{(1,8)^2}{2!} e^{-1,8} = 1,62 \cdot 0,1653 = 0,2677;$$

$$\begin{aligned} \text{б) } P_{1800}(m < 2) &= P_{1800}(m=0) + P_{1800}(m=1) = \\ &= e^{-1,8} + 1,8e^{-1,8} = 2,8 \cdot e^{-1,8} = 0,4628; \end{aligned}$$

$$\text{в) } P_{1800}(m \geq 2) = 1 - P_{1800}(m < 2) = 1 - 0,4628 = 0,5372;$$

$$\text{г) } P = 1 - P_{1800}(0) = 1 - e^{-1,8} = 1 - 0,1653 = 0,8347. \blacktriangleleft$$

Примітка. Таким чином, знаходження ймовірності при повторних випробуваннях можна обчислювати так

$$P_n(m) = \begin{cases} C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}; \\ \frac{1}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} \cdot \varphi(x), \text{ якщо } npq \geq 10; \\ \frac{a^m}{m!} e^{-a}, a = np, \text{ якщо } np \leq 9. \end{cases}$$

Завдання для самостійного розв'язання

55. Ймовірність пошкодження виробу при транспортуванні дорівнює 0,001. Знайти ймовірність того, що при транспортуванні 2000 виробів, буде пошкоджено: а) 0; б) 5; в) не менше 6; г) не більше 7; д) від 3 до 5.

56. Прилад складається з 500 незалежно працюючих елементів. Ймовірність відмови будь-якого елемента за деякий час дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що за цей час

відмовить наступна кількість елементів: а) 3; б) 7; в) не менше 4; г) не більше 5; д) від 5 до 7.

3.4. Відхилення відносної частоти від ймовірності

Ймовірність того, що при проведенні n незалежних повторних випробувань відхилення відносної частоти події A від її ймовірності за модулем не перевищує ε , визначається за формулою

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \approx 2 \cdot \Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \quad (26)$$

Приклади розв'язання задач

42. Ймовірність появи події в кожному із 625 незалежних випробувань дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що відносна частота появи події відхилиться від заданої ймовірності за абсолютною величиною не більше ніж на 0,04.

► За умовою маємо: $n = 625$, $p = 0,8$, $q = 0,2$, $\varepsilon = 0,04$.

Потрібно знайти $P\left(\left|\frac{m}{625} - 0,8\right| \leq 0,04\right)$.

За формулою маємо

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{m}{625} - 0,8\right| \leq 0,04\right) &\approx 2\Phi\left(0,4 \cdot \sqrt{\frac{625}{0,8 \cdot 0,2}}\right) = \\ &= 2\Phi(2,5) = 2 \cdot 0,4938 = 0,9876. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

43. Ймовірність появи події в кожному із 625 незалежних випробувань дорівнює 0,2. Знайти кількість випробувань n , при

яких з ймовірністю 0,9876 можна сподіватись, що відносна частота появи події відхиляється від її ймовірності за абсолютною величиною не більше, ніж на 0,04.

► За умовою маємо $p = 0,8$, $q = 0,2$, $\varepsilon = 0,04$. Потрібно знайти n .

За формулою (26) маємо

$$2\Phi\left(0,4 \cdot \sqrt{\frac{625}{0,8 \cdot 0,2}}\right) = 0,9876.$$

$$\text{За таблицею знаходимо } 0,4 \cdot \sqrt{\frac{n}{0,8 \cdot 0,2}} = 2,5.$$

Звідси, після перетворень одержимо $n = 25$. ◀

44. Відділ технічного контролю перевіряє стандартність 900 виробів. Ймовірність стандартності одного виробу дорівнює 0,9. Знайти з ймовірністю 0,9544 межі інтервалу, що містить число m стандартних виробів серед перевірених.

► За умовою маємо $n = 900$, $p = 0,9$, $q = 0,1$.

За формулою (26) маємо

$$P\left(\left|\frac{m}{900} - 0,9\right| \leq \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{900}{0,9 \cdot 0,1}}\right) = 2\Phi(2,5) = 0,9544.$$

Звідси

$$2\Phi(100 \cdot \varepsilon) = 0,9544 \Rightarrow \Phi(100 \cdot \varepsilon) = 0,4772 = \Phi(2);$$

$$100 \cdot \varepsilon = 2 \Rightarrow \varepsilon = 0,02; \quad \left|\frac{m}{900} - 0,9\right| \leq 0,02; \quad -0,02 \leq \frac{m}{900} - 0,9 \leq 0,02;$$

$$0,88 \leq \frac{m}{900} \leq 0,92; \quad 792 \leq m \leq 828. \quad \blacktriangleleft$$

Завдання для самостійного розв'язання

57. Ймовірність появи події в кожному із 500 незалежних випробувань дорівнює 0,4. Знайти ймовірність того, що відносна частота появи події відхиляється від теоретичної ймовірності за абсолютною величиною не більше, ніж на 0,05.

58. Ймовірність появи успіху в кожному із 400 незалежних випробувань дорівнює 0,8. Знайти таке додатне число ε , щоб з ймовірністю 0,9876 абсолютна величина відхилення відносної частоти появи успіху від його ймовірності 0,8 не перевищувала ε .

59. Скільки потрібно зробити дослідів з киданням монети, щоб з ймовірністю 0,92 можна було сподіватись відхилення відносної частоти випадання герба від теоретичної ймовірності p за абсолютною величиною менше, ніж 0,01?

60. Ймовірність появи успіху в кожному з 100 незалежних випробувань дорівнює 0,7. Знайти таке додатне число ε , щоб з ймовірністю 0,7777 абсолютна величина відхилення відносної частоти появи успіху від його ймовірності 0,7 не перевищувала ε .

61. Скільки потрібно зробити дослідів з киданням грального кубика, щоб з ймовірністю 0,98 можна було сподіватись відхилення відносної частоти випадання шістки від теоретичної ймовірності p за абсолютною величиною менше, ніж 0,02?

§ 4. Випадкові величини

4.1. Дискретні і неперервні випадкові величини

Випадковою величиною, пов'язаною з деяким експериментом, називається величина, яка при кожному здійсненні цього експерименту набуває певного числового значення, невідомого до досліду і залежного від випадкових причин, які неможливо попередньо врахувати. Розрізняють дискретні й неперервні випадкові величини.

Дискретною випадковою величиною називають таку випадкову величину, множина можливих значень якої є або скінченною або зліченною. (Зліченими називаються множини, елементам яких завжди можна поставити у відповідність множину натуральних чисел, тобто всі елементи таких множин можна пронумерувати).

Законом розподілу випадкової величини називається довільна відповідність, що встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини та відповідними їм ймовірностями.

Неперервною випадковою величиною називають таку випадкову величину, яка може набувати будь-якого дійсного значення із скінченного чи нескінченного інтервалу.

Розподіл випадкової величини, так само як і в елементарній математиці функцію, можна задавати табличним способом, графічно, аналітично. У випадку дискретної випадкової величини закон розподілу найчастіше задають у вигляді ряду розподілу – таблиці, у верхньому рядку якої перераховано всі значення випадкової величини $x_1, x_2, \dots, x_n$ у порядку їхнього зростання, а в нижньому – ймовірності появи цих значень $p_1, p_2, \dots, p_n$, тобто

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Закон розподілу задано правильно, якщо виконується рівність

$$\sum_{i=1}^n p_i = p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1. \quad (27)$$

Останню рівність називають умовою нормування.

Ряд розподілу можна задавати графічно, якщо по осі абсцис (OX) відкласти всі можливі значення випадкової величини $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, а по осі ординат (OY) – імовірності цих значень $p_i, i = 1, 2, \dots, n$. З'єднавши точки (x_i, p_i) послідовно відрізками прямої лінії, отримаємо ламану, яку називають *многокутником розподілу* (рис. 4). Зауважимо, що сума ординат многокутника дорівнює одиниці.

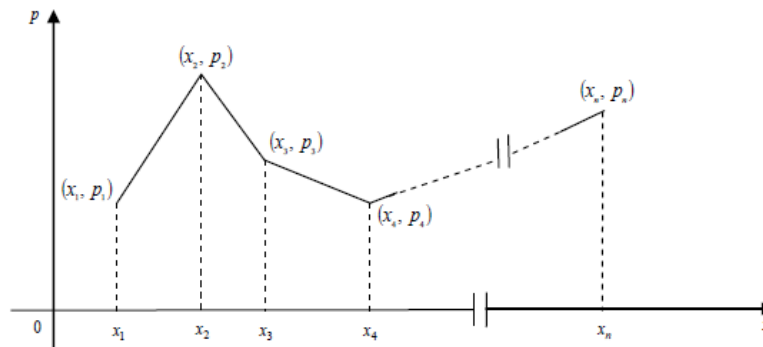


Рисунок 4

Універсальним способом завдання закону розподілу ймовірностей є *функція розподілу* $F(x)$. *Функція розподілу випадкової величини* X – це ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення, менше x

$$F(x) = P(X \leq x) \quad (28)$$

Властивості функції розподілу.

1. Значення функції $F(x)$ належать відрітку $[0; 1]$, тобто $0 \leq F(x) \leq 1$.
2. Ймовірність того, що випадкова величина прийме значення з інтервалу $[a, b)$, дорівнює $P\{a \leq x < b\} = F(b) - F(a)$.

3. Функція $F(x)$ неспадна, тобто якщо $x_2 > x_1$, то $F(x_2) \geq F(x_1)$.

4. Якщо всі можливі значення випадкової величини належать інтервалу (a, b) , то $F(x) \equiv 0$ при $x \leq a$ і $F(x) \equiv 1$ при $x \geq b$.

Для дискретної випадкової величини X , яка може набувати значень $x_1, x_2, \dots, x_n$, функція розподілу визначається так

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq x_1; \\ p_1, & \text{при } x_1 < x \leq x_2; \\ p_1 + p_2, & \text{при } x_2 < x \leq x_3; \\ p_1 + p_2 + p_3, & \text{при } x_3 < x \leq x_4; \\ \dots\dots\dots; \\ p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1, & \text{при } x > x_n. \end{cases} \quad (29)$$

Графіком інтегральної функції розподілу дискретної випадкової величини є розривна східчаста лінія. Точки розриву мають абсциси, рівні числовим значенням, які приймає ця випадкова величина (рис. 5).

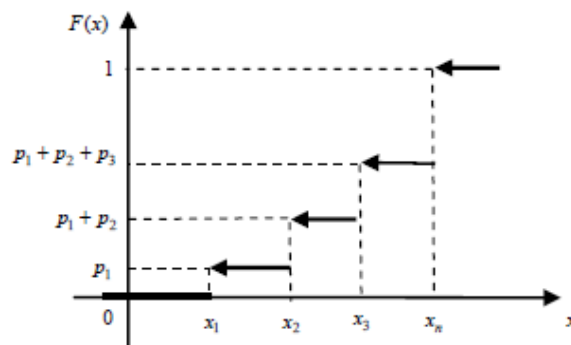


Рисунок 5

Часто закон розподілу неперервної випадкової величини задають щільністю (густиною) розподілу, яку визначають як похідну від функції розподілу, тобто

$$f(x) = F'(x). \quad (30)$$

Графіком інтегральної функції розподілу неперервної випадкової

величини служить неперервна лінія.

Властивості щільності розподілу.

1. Значення функції $f(x)$ невід'ємні, тобто $f(x) \geq 0$.
2. Ймовірність того, що випадкова величина прийме значення з інтервалу (a, b) , дорівнює

$$P\{a < x < b\} = \int_a^b f(x) dx.$$

3. Інтеграл від щільності розподілу по всій числовій осі дорівнює одиниці, тобто

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1. \quad (31)$$

Умова (31) є умовою нормування.

Зокрема, якщо всі свої значення випадкова величина приймає з інтервалу (a, b) , то

$$\int_a^b f(x) dx = 1.$$

Функцію розподілу $F(x)$ знаходять як первісну щільності розподілу $f(x)$, тобто

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy. \quad (32)$$

Інколи функцію $F(x)$ називають *інтегральною функцією розподілу*.

Приклади розв'язання задач

45. Підкидається гральний кубик; X – кількість очок, що випали на верхній грані. Записати закон розподілу такої випадкової величини.

► При підкиданні грального кубика випадкова величина X – кількість очок, що випали на верхній грані, може приймати значення $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4, x_5 = 5, x_6 = 6$ із відповідними ймовірностями, які обчислимо за формулою

$$p = \frac{m}{n} = \frac{1}{6}.$$

Отже, закон розподілу дискретної випадкової набуває такого вигляду:

X	1	2	3	4	5	6
p	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

46. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею

x	-4	1	2	5	9
p	0,1	0,1	0,5	p_4	0,2

Знайти ймовірність можливого значення випадкової величини $X = x_4 = 5$.

► Згідно з умовою нормування маємо

$$\sum_{i=1}^5 p_i = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1 \Rightarrow 0,1 + 0,1 + 0,5 + p_4 + 0,2 = 1 \Rightarrow p_4 = 0,1. \blacktriangleleft$$

47. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею

X	2,5	3	4,5	5	5,5	6
p	a	$2a$	a	$3a$	a	$2a$

Знайти ймовірності можливих значень випадкової величини X :

$$x_1 = 2,5; \quad x_3 = 4,5; \quad x_4 = 2,5; \quad x_5 = 5,5; \quad x_6 = 6.$$

Обчислити ймовірності таких випадкових подій:

$$1) X < 3; \quad 2) X \leq 3; \quad 3) X < 5; \quad 4) X \leq 5; \quad 5) 2,5 \leq X < 5; \quad X \geq 5.$$

► За умовою нормування дістанемо

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^6 p_i &= p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = a + 2a + a + 3a + a + 2a = \\ &= 1 \Rightarrow 10a = 1 \Rightarrow a = 0,1. \end{aligned}$$

Отже, закон розподілу дискретної випадкової набуває такого вигляду

X	2,5	3	4,5	5	5,5	6
P	0,1	0,2	0,1	0,3	0,1	0,2

Обчислимо ймовірності подій:

$$1) P(X < 3) = P(X = 2,5) = 0,1;$$

$$2) P(X \leq 3) = P(X = 2,5) + P(X = 3) = 0,1 + 0,2 = 0,3;$$

$$\begin{aligned} 3) P(X < 5) &= P(X = 2,5) + P(X = 3) + P(X = 4,5) = \\ &= 0,1 + 0,2 + 0,1 = 0,4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) P(X \leq 5) &= P(X = 2,5) + P(X = 3) + P(X = 5) = 0,1 + 0,2 + 0,1 + \\ &+ 0,3 = 0,7; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) P(2,5 \leq X \leq 5,5) &= P(X = 2,5) + P(X = 4,5) + P(X = 5) + \\ &+ P(X = 5,5) = 0,1 + 0,2 + 0,1 + 0,3 + 0,1 = 0,8; \end{aligned}$$

$$6) P(X \geq 5,5) = P(X = 5,5) + P(X = 6) = 0,1 + 0,2 = 0,3. \quad \blacktriangleleft$$

48. За заданим у табличній формі законом розподілу дискретної випадкової величини X

X	2,5	1	3,5	5	6,5	8
P	0,1	0,2	0,1	0,3	0,2	0,1

побудувати ймовірнісний багатокутник.

► Для цього візьмемо систему координат $p_i O x_i$, відклавши на осі абсцис можливі значення випадкової величини x_i , а на осі ординат – імовірності p_i цих можливих значень. Точки з координатами (x_i, p_i) послідовно сполучимо відрізками прямої. Утворену при цьому фігуру називають імовірнісним багатокутником. Імовірнісний багатокутник зображено на рисунку.

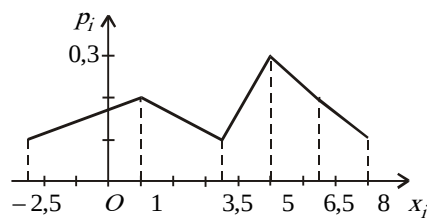


Рисунок 6 ◀

49. Підкидається монета три рази, X – число появ герба. Записати закон розподілу випадкової величини і знайти функцію розподілу.

► При трьох підкиданнях монети випадкова величина X – число появ герба – може приймати значення $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$ із відповідними ймовірностями, які обчислимо за формулою Бернуллі $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$,

$$q = 1 - p, \quad m = 0, 1, \dots, n.$$

$$p_1 = P_3(0) = C_3^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}, \quad p_2 = P_3(1) = C_3^1 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8},$$

$$p_3 = P_3(2) = C_3^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}, \quad p_4 = P_3(3) = C_3^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8}.$$

Отже, закон розподілу дискретної випадкової величини має вигляд

X	0	1	2	3
P	1/8	3/8	3/8	1/8

Знайдемо функцію розподілу $F(x) = P\{X < x\}$.

$$\text{При } x \leq 0 \quad F(x) = F(0) = P\{X < 0\} = 0;$$

$$\text{при } 0 < x \leq 1 \quad F(x) = F(1) = P\{X < 1\} = P\{X = 0\} = \frac{1}{8};$$

$$\text{при } 1 < x \leq 2$$

$$F(x) = F(2) = P\{X < 2\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2};$$

$$\text{при } 2 < x \leq 3$$

$$F(x) = F(3) = P\{X < 3\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} = \\ = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8};$$

$$\text{при } x > 3$$

$$F(x) = P\{X > 3\} = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \\ = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1.$$

Таким чином функція розподілу запишеться

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0; \\ \frac{1}{8}, & \text{при } 0 < x \leq 1; \\ \frac{1}{2}, & \text{при } 1 < x \leq 2; \blacktriangleleft \\ \frac{7}{8}, & \text{при } 2 < x \leq 3; \\ 1, & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

50. Із скриньки, в якій лежать 4 білих та 6 чорних кульок беруть навмання 3 кульки. ξ – кількість білих кульок серед них. Записати закон розподілу випадкової величини і знайти функцію розподілу.

► Випадкова величина ξ може набувати значень

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = 1, \quad \xi_3 = 2, \quad \xi_4 = 3.$$

Знайдемо ймовірності можливих значень ξ , використовуючи формулу класичної ймовірності

$$P(A) = \frac{m_k}{n},$$

де m_k – число сприятливих випадків події A ; n – загальне число можливих випадків.

Порахуємо їх

$$\begin{aligned} n &= C_{10}^3 = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{7! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 120; \\ m_0 &= C_4^0 \cdot C_6^3 = \frac{4!}{0! \cdot 4!} \cdot \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 1 \cdot \frac{3! \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{3! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 20; \\ m_1 &= C_4^1 \cdot C_6^2 = \frac{4!}{1! \cdot 3!} \cdot \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{3! \cdot 4}{3!} \cdot \frac{4! \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 4!} = 60; \end{aligned}$$

$$m_2 = C_4^2 \cdot C_6^1 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{6!}{1! \cdot 5!} = \frac{2! \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 2!} \cdot \frac{5! \cdot 6}{1 \cdot 5!} = 36;$$

$$m_3 = C_4^3 \cdot C_6^0 = \frac{4!}{1! \cdot 3!} \cdot \frac{6!}{0! \cdot 6!} = \frac{3! \cdot 4}{1 \cdot 3!} \cdot 1 = 4.$$

Тоді

$$P(\xi_1 = 0) = \frac{m_0}{n} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}; \quad P(\xi_2 = 1) = \frac{m_1}{n} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2};$$

$$P(\xi_3 = 2) = \frac{m_2}{n} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}; \quad P(\xi_4 = 3) = \frac{m_4}{n} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}.$$

Закон розподілу набуде вигляду

ξ_k	0	1	2	3
p_k	1/6	1/2	3/10	1/30

$$\text{Контроль: } \sum_k p_k = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{3}{10} + \frac{1}{30} = \frac{5+15+9+1}{30} = \frac{30}{30} = 1.$$

2) Функцію розподілу $F_\xi(x)$ знайдемо за формулою

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i).$$

Одержимо

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0; \\ \frac{1}{6}, & \text{при } 0 < x \leq 1; \\ \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, & \text{при } 1 < x \leq 2; \\ \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{3}{10} = \frac{29}{30}, & \text{при } 2 < x \leq 3; \\ \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{3}{10} + \frac{1}{30} = \frac{30}{30} = 1, & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

або

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0; \\ \frac{1}{6}, & \text{при } 0 < x \leq 1; \\ \frac{2}{3}, & \text{при } 1 < x \leq 2; \\ \frac{29}{30}, & \text{при } 2 < x \leq 3; \\ 1, & \text{при } x > 3. \end{cases} \blacktriangleleft$$

51. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею

X	-4	-1	2	6	9	13
P	0,1	0,2	0,1	0,3	0,1	0,2

Побудувати $F(x)$ та її графік.

► Якщо $x \leq -4$, то $F(x) \equiv 0$. Дійсно, значень менших, ніж -4 , величина X не приймає.

Якщо $-4 < x \leq -1$, то $F(x) = 0,1$. Дійсно, X може приймати значення -4 з імовірністю $0,1$.

Якщо $-1 < x \leq 2$, то $F(x) = 0,3$. Справді, X може приймати значення -4 з імовірністю $0,1$ і значення -1 з імовірністю $0,2$. Тому одне з цих значень, байдуже яке, величина X може прийняти за теоремою додавання ймовірностей несумісних подій з імовірністю $0,1 + 0,2 = 0,3$.

Аналогічно знаходимо значення функції на інших інтервалах. Остаточню

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0, & x \leq -4; \\ 0,1, & -4 < x \leq -1; \\ 0,3, & -1 < x \leq 2; \\ 0,4, & 2 < x \leq 6; \\ 0,7, & 6 < x \leq 9; \\ 0,8, & 9 < x \leq 12; \\ 1, & x > 12. \end{cases}$$

Графік функції $F(x)$ зображено на рис. 7.

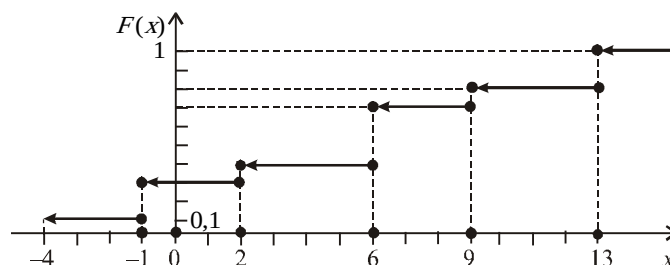


Рисунок 7 ◀

52. Випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \sin x, & 0 < x \leq \pi/2, \\ 1, & x > \pi/2. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу неперервної випадкової величини та ймовірність того, що $x \in \left(\frac{\pi}{4}; \pi\right)$.

► Щільність розподілу $f(x)$ знаходимо як похідну від функції $F(x)$ за формулою (30). На інтервалах $(-\infty; 0]$ і

$\left(\frac{\pi}{2}; +\infty\right)$ функція $F(x)$ є сталою, тому похідна на цих інтервалах дорівнює нулю. На інтервалі $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$ похідна дорівнює $(\sin x)' = \cos x$. Тому щільність розподілу рівна

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right], \\ 0, & x \notin \left(0; \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Для знаходження ймовірності $P\left\{\frac{\pi}{4} < x < \pi\right\}$

скористаємось формулою $P\{x_0 < x < x_1\} = F(x_1) - F(x_0)$. У нашому випадку

$$P\left\{\frac{\pi}{4} < x < \pi\right\} = F(\pi) - F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \sin \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}.$$

Зауважимо, що цю ж ймовірність можна знайти і за формулою

$$P\{x_0 < x < x_1\} = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx.$$

У нашому випадку

$$\begin{aligned} P\left\{\frac{\pi}{4} < x < \pi\right\} &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} f(x) dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 0 dx = \sin x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

53. Випадкову величину X задано функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x^2 / 4, & 0 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу ймовірностей, побудувати графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$

► Знайдемо щільність розподілу ймовірностей формулою (30)

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x / 2, & 0 < x \leq 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Побудуємо графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$.

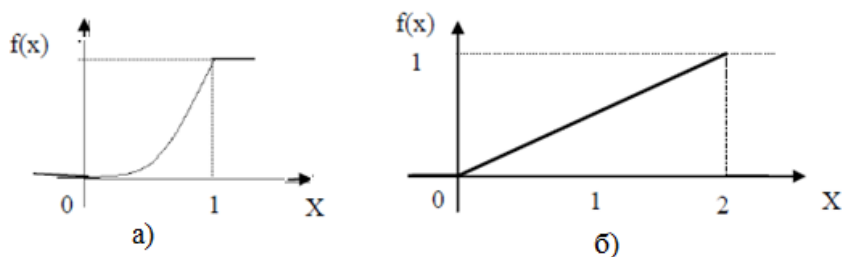


Рисунок 8 ◀

54. Закон неперервної випадкової величини X задано у вигляді

$$f(x) = \begin{cases} c \cos x, & -\pi/2 \leq x \leq \pi/2, \\ 0, & |x| > \pi/2. \end{cases}$$

Знайти константу c , функцію розподілу $F(x)$.

► Константу c знаходимо за формулою (31) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} c \cos x dx = c \sin x \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = c \sin \frac{\pi}{2} - c \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) = c + c = 2c = 1.$$

Отже, $c = 0,5$.

Тоді

$$f(x) = \begin{cases} 0,5 \cos x, & -\pi/2 \leq x \leq \pi/2, \\ 0, & |x| > \pi/2. \end{cases}$$

Для знаходження функції розподілу $F(x)$ скористаємось

формулою (32) $F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy$.

$$\text{При } x < -\pi/2 \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy = \int_{-\infty}^x 0 dy = 0;$$

$$\text{при } -\pi/2 \leq x \leq \pi/2 \quad F(x) = \int_{-\infty}^{-\pi/2} 0 dy + \int_{-\pi/2}^x 0,5 \cos y dy =$$

$$= 0,5 \sin y \Big|_{-\pi/2}^x = 0,5 \sin x - 0,5 \sin(-\pi/2) = 0,5(1 + \sin x);$$

$$\text{при } x > \pi/2 \quad F(x) = \int_{-\infty}^{-\pi/2} 0 dy + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 0,5 \cos y dy + \int_{\pi/2}^x 0 dy =$$

$$= 0,5 \sin y \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0,5 \sin(\pi/2) - 0,5 \sin(-\pi/2) = 0,5 + 0,5 = 1.$$

Отже,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -\pi/2, \\ 0,5(1 + \sin x), & |x| \leq \pi/2, \\ 1, & x > \pi/2. \end{cases} \blacktriangleleft$$

Завдання для самостійного розв'язання

62. За заданим законом розподілу дискретної випадкової величини X маємо

X	-4	-1	2	5	8	10
p	a	$1,5a$	$0,5a$	$3,5a$	$2,5a$	a

Знайти a . Обчислити: $P(X < 2)$, $P(-4 < X \leq 8)$.

63. Імовірність здачі іспиту на "5" для кожного із шести студентів дорівнює 0,4. Скласти закон розподілу кількості п'ятірок, отриманих студентами на іспиті.

64. Закон розподілу випадкової величини X має вигляд

X	1	2	3	4
p	0,7	0,21	0,063	0,027

Знайти $F(x)$ – інтегральну функцію розподілу випадкової величини X .

65. Троє студентів складають іспит з теорії ймовірностей. Ймовірність того, що перший із них складе іспит, дорівнює 0,9; для другого ця ймовірність дорівнює 0,8; а для третього – 0,7. Побудувати закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X – число студентів, котрі складуть іспит.

Знайти функцію розподілу $F(x)$.

66. Маємо три ящики. У першому міститься 6 стандартних і 4 браковані однотипні деталі, у другому – 8 стандартних і 2 браковані деталі, а в третьому – 5 стандартних і 5 бракованих. Із кожного ящика навмання беруть по одній деталі. Побудувати закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X – появи числа стандартних деталей серед трьох навмання взятих, визначити $F(x)$.

67. Нехай функцію розподілу деякої неперервної випадкової величини X задано у вигляді

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ a(1 - \cos x), & 0 < x \leq \pi, \\ 1, & x > \pi. \end{cases}$$

Визначити значення коефіцієнта a та щільність розподілу ймовірностей $f(x)$.

68. Закон неперервної випадкової величини X задано у вигляді

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{1}{2} \sin x, & 0 < x \leq \pi; \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$. Обчислити $P\left(\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}\right)$.

4.2. Числові характеристики випадкових величин

Математичне сподівання є характеристикою середнього значення випадкової величини.

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини називається сума добутків всіх її можливих значень x_i на відповідні ймовірності p_i

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n .$$

Математичне сподівання неперервної випадкової величини визначають за формулою

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx,$$

де $f(x)$ – щільність розподілу випадкової величини X .

Властивості математичного сподівання.

1. Математичне сподівання сталої величини дорівнює цій сталій, тобто $M(C) = C$.

2. Сталій множник можна винести за знак математичного сподівання, тобто $M(CX) = CM(X)$.

3. Математичне сподівання суми двох випадкових величин дорівнює сумі їх математичних сподівань, тобто $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$.

4. Математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань, тобто $M(XY) = M(X)M(Y)$.

Дисперсією випадкової величини називають математичне сподівання квадрату відхилення випадкової величини від її математичного сподівання

$$D(X) = M((X - M(X))^2) .$$

Дисперсію зручно обчислювати за формулою

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

Дисперсію неперервної випадкової величини знаходять за формулою

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \right)^2.$$

Дисперсія характеризує міру розсіювання (розкиданості) значень випадкової величини навколо її математичного сподівання.

Властивості дисперсії.

1. Дисперсія сталої величини рівна нулю, тобто $D(C) = 0$.
2. Сталій множник можна винести за знак дисперсії, підносячи його до квадрату, тобто $D(CX) = C^2 D(X)$.
3. Дисперсія суми двох незалежних випадкових величин рівна сумі дисперсій цих величин, тобто $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$.

Для оцінки розсіювання випадкової величини, крім дисперсії, використовують іншу числову характеристику – *середнє квадратичне відхилення*, яке визначають як корінь квадратний із дисперсії $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Медіаною $Me(X)$ неперервної випадкової величини X називається таке число x_{me} , для якого виконується рівність $F(x_{me}) = \frac{1}{2}$, або $P(X < x_{me}) = P(X > x_{me}) = \frac{1}{2}$. Це означає, що ймовірність того, що випадкова величина матиме значення більше або менше за медіану дорівнює одному і тому ж числу $\frac{1}{2}$.

Для дискретної випадкової величини медіаною називають те значення випадкової величини, яка ділить множину значень випадкової величини на дві частини з рівною кількістю значень випадкової величини. Якщо кількість значень випадкової величини є непарною ($n = 2k + 1$), то $x_{me} = x_{k+1}$, у

випадку парної кількості – ($n = 2k$) медіану визначають за формулою

$$x_{me} = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}.$$

Модою $Mo(X)$ випадкової величини X називається найбільш імовірне її значення (для якого відповідна ймовірність p_i або щільність розподілу $f(x)$ досягає свого максимуму).

Серед числових характеристик випадкових величин особливе значення мають моменти – початкові та центральні.

Початковим моментом k -того порядку випадкової величини X називається математичне сподівання k -того степеня цієї величини

$$\nu_k = M(X^k).$$

Центральним моментом k -того порядку випадкової величини X називається математичне сподівання k -того степеня відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання

$$\mu_k = M(X - M(X))^k.$$

Початковий момент дискретної випадкової величини визначають за формулою

$$\nu_k = \sum_{i=1}^n x_i^k p_i,$$

а для неперервної випадкової величини

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx.$$

Центральний момент дискретної випадкової величини визначають за формулою

$$\nu_k = \sum_{i=1}^n (x_i - M(X))^k p_i,$$

а для неперервної випадкової величини

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^k f(x) dx.$$

Очевидно, що при $k=1$, перший початковий момент випадкової величини X є її математичним сподіванням, а при $k=2$ – другий центральний момент є дисперсією.

Приклади розв'язання задач

55. Задано ряд розподілу

X	1,4	1,8	2,3	3,2
P	0,3	0,4	0,2	0,1

Знайти математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ і середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$.

► Математичне сподівання випадкової величини X

$$\begin{aligned} M(X) &= \sum_{i=1}^n x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4 = \\ &= 1,4 \cdot 0,3 + 1,8 \cdot 0,4 + 2,3 \cdot 0,2 + 3,2 \cdot 0,1 = 1,92. \end{aligned}$$

$$\text{Дисперсія } D(X) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

Знайдемо спочатку $M(X^2)$.

$$\begin{aligned} M(X^2) &= x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + x_3^2 p_3 + x_4^2 p_4 = \\ &= 1,4^2 \cdot 0,3 + 1,8^2 \cdot 0,4 + 2,3^2 \cdot 0,2 + 3,2^2 \cdot 0,1 = 3,966. \end{aligned}$$

$$\text{Отже, } D(X) = 3,966 - (1,92)^2 = 0,28.$$

Середнє квадратичне відхилення випадкової величини X знаходимо за формулою $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$, тому

$$\sigma(X) = \sqrt{0,28} = 0,53. \blacktriangleleft$$

56. Робітник під час роботи обслуговує три верстати-автомати. Імовірність того, що верстат-автомат потребує уваги робітника за певний проміжок часу, величина стала і дорівнює 0,8. Побудувати закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X – числа верстатів, які потребують уваги робітника за певний проміжок часу. Знайти Mo , Me .

► Можливими значеннями випадкової величини $X \in 0, 1, 2, 3$.

Імовірності цих можливих значень

$$p(X=0) = q^3 = (0,2)^3 = 0,008;$$

$$p(X=1) = 3pq^2 = 3 \cdot 0,8 \cdot (0,2)^2 = 0,096;$$

$$p(X=2) = 3p^2q = 3 \cdot 0,8^2 \cdot 0,2 = 0,384;$$

$$p(X=3) = p^3 = (0,8)^3 = 0,512.$$

Запишемо закон таблицею

X	0	1	2	3
p	0,008	0,096	0,384	0,512

Із таблиці визначаємо $Mo = 3$, бо відповідна ймовірність $p = 0,512$ є найбільшою. Випадкова величина має парну кількість значень $n = 4$, то медіана дорівнює

$$Me = (1 + 2)/2 = 1,5. \blacktriangleleft$$

57. Дискретна випадкова величина приймає тільки два

можливих значення x_1, x_2 , причому $x_2 > x_1$. Знайти закон розподілу цієї випадкової величини, якщо $p_1 = 0,8$; $M(X) = 3,2$; $D(X) = 0,16$.

► Оскільки $p_1 + p_2 = 1$, то $p_2 = 1 - p_1 = 1 - 0,8 = 0,2$. Користуючись формулами для математичного сподівання та дисперсії, отримаємо систему для знаходження невідомих можливих значень x_1, x_2 .

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 = x_1 \cdot 0,8 + x_2 \cdot 0,2 = 3,2;$$

$$\begin{aligned} D(X) &= x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 - (M(X))^2 = \\ &= x_1^2 \cdot 0,8 + x_2^2 \cdot 0,2 - (3,2)^2 = 0,16. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 0,8x_1 + 0,2x_2 = 3,2; \\ 0,8x_1^2 + 0,2x_2^2 - 10,24 = 0,16. \end{cases}$$

Домножимо обидва рівняння на 5, щоб отримати систему з цілими коефіцієнтами

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 16; \\ 4x_1^2 + x_2^2 - 52 = 0. \end{cases}$$

З першого рівняння $x_2 = 16 - 4x_1$, тоді друге рівняння приймає вигляд

$$4x_1^2 + (16 - 4x_1)^2 - 52 = 0,$$

$$4x_1^2 + 256 - 128x_1 + 16x_1^2 - 52 = 0,$$

$$20x_1^2 - 128x_1 + 204 = 0.$$

Поділивши на 4, одержимо $5x_1^2 - 32x_1 + 51 = 0$.

$$x_1^{(1,2)} = \frac{32 \pm 2}{10}, \quad x_1^{(1)} = 3, 4, \quad x_2^{(1)} = 16 - 4 \cdot 3, 4 = 2, 4.$$

$$x_1^{(2)} = 3, \quad x_2^{(2)} = 16 - 4 \cdot 3 = 4.$$

Оскільки $x_2 > x_1$, маємо такий закон розподілу

X	3	4
p	0,8	0,2

58. Задано закон розподілу випадкової величини

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x^2}{4}, & 0 < x \leq 2 \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Визначити числові характеристики цієї величини. Знайти ймовірність потрапляння X в інтервал $(1; 3)$.

► Знайдемо щільність розподілу

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ або } x > 2, \\ \frac{x}{2}, & 0 < x \leq 2. \end{cases}$$

$$\text{Тоді } M(X) = \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3},$$

$$D(X) = \int_0^2 x^2 \cdot \frac{x}{2} dx - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^2 - \frac{16}{9} = \frac{16}{8} - \frac{16}{9} = \frac{2}{1} - \frac{16}{9} = \frac{2}{9};$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{2}{9}} \approx 0,47.$$

$$P\{1 < X < 3\} = F(3) - F(1) = 1 - \frac{1^2}{4} = \frac{3}{4}. \blacktriangleleft$$

59. Задано щільність ймовірностей

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2; \\ a(x+2)(x-4), & -2 < x \leq 4; \\ 0, & x > 4. \end{cases}$$

Знайти a , $F(x)$, Mo , Me .

► За умовою нормування маємо

$$a \cdot \int_{-2}^4 (x+2)(x-4) dx = 1.$$

Обчислимо інтеграл

$$\begin{aligned} \int_{-2}^4 (x+2)(x-4) dx &= \int_{-2}^4 (x^2 - 2x - 8) dx = \int_{-2}^4 x^2 dx - \\ &- 2 \int_{-2}^4 x dx - 8 \int_{-2}^4 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_{-2}^4 - x^2 \Big|_{-2}^4 - 8x \Big|_{-2}^4 = \\ &= \frac{64+8}{3} - (16-4) - 8(4+2) = 24 - 12 - 48 = -36. \end{aligned}$$

Тоді

$$-36a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{36}.$$

Щільність ймовірностей зі знайденим a матиме вигляд

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2; \\ \frac{(4-x)(x+2)}{36}, & -2 < x < 4; \\ 0, & x \geq 4. \end{cases}$$

Графік $f(x)$ зображено на рис. 9.

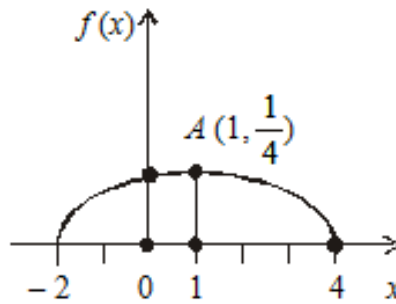


Рисунок 9

Згідно з рисунком маємо $f(1) = \max$. Отже, $M_0 = 1$.

Знайдемо M_e . Інтегральна функція розподілу буде наступною

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-2}^x f(x) dx = \frac{1}{36} \int_{-2}^x (4-x)(x+2) dx = \frac{1}{36} \int_{-2}^x (8+2x-x^2) dx = \\ &= \frac{1}{36} \int_{-2}^x (8+2x-x^2) dx = \frac{1}{36} \left(\int_{-2}^x 8 dx + \int_{-2}^x 2x dx - \int_{-2}^x x^2 dx \right) = \\ &= \frac{1}{36} \left(8x \Big|_{-2}^x + x^2 \Big|_{-2}^x - \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^x \right) = \frac{1}{36} \left(8x + 16 + x^2 - 4 - \frac{x^3}{3} + \frac{8}{3} \right) = \\ &= \frac{1}{36} \left(\frac{24x + 36 + 3x^2 - x^3 - 8}{3} \right) = \frac{28 + 24x + 3x^2 - x^3}{108}. \end{aligned}$$

$$\text{Отже, } F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2; \\ \frac{28 + 24x + 3x^2 - x^3}{108}, & -2 < x \leq 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Для визначення Me скористаємось рівнянням

$$F(Me) = \frac{1}{2}.$$

$$\frac{28 + 24Me + 3Me^2 - Me^3}{108} = \frac{1}{2};$$

$$Me^3 - 3Me^2 - 24Me + 26 = 0;$$

$$Me = 1.$$

Me можна знайти за щільністю ймовірностей

$$\int_{-\infty}^{Me} f(x) dx = \int_{Me}^{\infty} f(x) dx,$$

або при $X \in [a; b]$:

$$\int_a^{Me} f(x) dx = \int_{Me}^b f(x) dx.$$

Отже, Me – таке значення випадкової величини X , що пряма, проведена перпендикулярно до відповідної точки на площині $X = Me$, поділяє площу фігури, обмежену кривою $f(x)$, на дві рівні частини. ◀

Завдання для самостійного розв'язання

69. Задано закон розподілу

X	-3	-1	2	4
P	0,2	0,3	0,4	0,1

Знайти математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ і середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$.

70. Серед 100 деталей є 75 деталей першого сорту. Скласти закон розподілу випадкової величини числа деталей першого сорту з 5 навмання взятих деталей, обчислити математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення.

71. Пристрій складається з двох незалежно працюючих приладів. Ймовірності відмови приладів $p_1 = 0,3$, $p_2 = 0,4$. Знайти закон розподілу, математичне сподівання, моду, медіану.

72. Дискретна випадкова величина приймає тільки два можливих значення x_1 , x_2 , причому $x_2 > x_1$. Знайти закон розподілу цієї випадкової величини, якщо $p_1 = 0,5$, $M(X) = 1,3$, $D(X) = 4,41$.

73. Задано щільність розподілу

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ або } x > \pi, \\ \frac{\sin x}{2}, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

Знайти числові характеристики величини та ймовірність

потрапляння в інтервал $\left(\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$.

74. Задано

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{1}{2}(1 - \cos x), & 0 < x \leq \pi; \\ 1, & x > \pi. \end{cases}$$

Знайти $M(X)$, $D(X)$, Me , Mo .

4.3. Розподіли випадкових величин

Розглянемо приклади дискретних випадкових величин і їх законів розподілу.

1. Біноміальний (біномний) закон розподілу. Нехай проводять n незалежних випробувань, у кожному з яких деяка подія A може наступити з імовірністю p , що не залежить від номера спроби; X – кількість появ події A у n випробуваннях. Закон розподілу має вигляд

X	0	1	2	...	$n-1$	n
P	$P_n(0)$	$P_n(1)$	$P_n(2)$	...	$P_n(n-1)$	$P_n(n)$

де числа $P_n(m)$ обчислюються за формулою Бернуллі $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$, $0 < p < 1$, $q = 1 - p$.

Числові характеристики біномного розподілу

$$M(X) = np, \quad D(X) = npq.$$

2. Закон розподілу Пуассона. Якщо число n велике, а ймовірність p досить мала ($p \leq 0,01$), ймовірність $p_k = p(X = k)$ можна обчислити за

формулою Пуассона $P_k \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, де $\lambda = np$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Числові характеристики закону Пуассона

$$M(X) = D(X) = \lambda.$$

3. Геометричний розподіл. Нехай проводяться незалежні випробування, в кожному з яких подія A настає з імовірністю p . Експеримент проводять до тих пір, поки не з'явиться подія A . Випадкова величина X – кількість спроб, які потрібно провести для закінчення експерименту. Якщо подія A з'явилася у k -тій спробі, то в попередніх $k-1$ спробах вона не з'явилася, тому ймовірність можливих значень випадкової величини X обчислюють за формулою

$$P\{X = k\} = (1-p)^{k-1} \cdot p = q^{k-1} \cdot p, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Закон розподілу має вигляд

X	1	2	3	...	k
P	p	pq	$q^2 p$	...	$q^{k-1} p$

Сума чисел, що стоять у другому рядку таблиці, дорівнює одиниці, бо числа $p, pq, q^2 p, \dots$ утворюють нескінченно спадну геометричну прогресію,

$$\text{сума якої рівна } S = \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} p = \frac{p}{1-q} = \frac{p}{p} = 1.$$

Числові характеристики геометричного розподілу

$$M(X) = \frac{1}{p}, \quad D(X) = \frac{q}{p^2}.$$

4. Рівномірний розподіл. Кажуть, що неперервна випадкова величина X рівномірно розподілена на відрізку $[a, b]$, якщо щільність розподілу є сталою величиною на цьому проміжку і дорівнює

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Функція рівномірного розподілу має вигляд

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b, \\ 1, & x > b, \end{cases}$$

де a, b – параметри розподілу.

Числові характеристики рівномірного розподілу

$$M(X) = \frac{a+b}{2}, \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Ймовірність попадання в інтервал (α, β) дорівнює

$$P\{\alpha < x < \beta\} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{b-a} = \frac{\beta - \alpha}{b-a}.$$

5. Показниковий розподіл. Розподіл ймовірностей неперервної випадкової величини називають показниковим з параметром $\lambda > 0$, якщо його щільність має вигляд

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Функцію показникового розподілу визначають формулою

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Числові характеристики показникового розподілу

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

6. Нормальний розподіл. Розподіл ймовірностей випадкової величини називають нормальним з параметрами (a, σ) , якщо його щільність задається

формулою
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Функція розподілу визначається формулою

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}} dy,$$

де $a, \sigma > 0$ – параметри.

Числові характеристики нормального розподілу

$$M(X) = a, \quad D(X) = \sigma^2.$$

Отже, параметр a є математичним сподіванням, а σ – середнім квадратичним відхиленням нормально розподіленої випадкової величини.

Ймовірність попадання в інтервал (α, β) дорівнює

$$P\{\alpha < x < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функція Лапласа, значення якої затабульовано.

Досить часто треба обчислити ймовірність того, що нормально розподілена величина X відхиляється від свого математичного сподівання a на величину менш ніж ε , а саме

$$\begin{aligned} P(|x - a| < \varepsilon) &= P(a - \varepsilon < x < a + \varepsilon) = \\ &= \Phi\left(\frac{a + \varepsilon - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \varepsilon - a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

Якщо в цій формулі покласти $\varepsilon = \sigma t$, то одержимо $P(|x - a| < \sigma t) = 2\Phi(t)$. При $t = 3$, $P(|x - a| < 3\sigma) = 2\Phi(3) \approx 0,9973$. В останньому рівнянні ймовірність дуже близька до одиниці, тому подія $|x - a| < 3\sigma$ є майже вірогідною. Звідси випливає "правило 3σ ", згідно з яким практично всі значення нормально розподіленої випадкової величини знаходяться в інтервалі $(a - 3\sigma; a + 3\sigma)$.

Приклади розв'язання задач

60. Нехай випадкова величина X – число хлопчиків у сім'ї з трьома дітьми. Записати закон розподілу X , обчислити числові

характеристики.

► Очевидно, що X набуває значень 0,1,2,3, ймовірності яких обчислюються за формулою Бернуллі ($p = q = 0,5$)

$$p_1 = P_3(0) = C_3^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}, \quad p_2 = P_3(1) = C_3^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8},$$

$$p_3 = P_3(2) = C_3^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8}, \quad p_4 = P_3(3) = C_3^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8}.$$

Отже, розподіл випадкової величини є біномним

X	0	1	2	3
P	1/8	3/8	3/8	1/8

Числові характеристики

$$M(X) = np = 3 \cdot 0,5 = 1,5; \quad D(X) = npq = 3 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0,75;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{0,75} \approx 0,87. \blacktriangleleft$$

60. При проведенні дослідження хімічного складу сталі ймовірності того, що у випадково взятій пробі відсоток вуглецю перевищуватиме допустимий рівень, дорівнює $p = 0,01$. Обчислити, користуючись законом розподілу Пуассона, скільки в середньому необхідно дослідити зразків, щоб з ймовірністю $p = 0,95$ цей ефект спостерігався хоча б один раз.

► A – ефект спостерігається хоча б один раз, $\bar{A}$ – ефект взагалі не спостерігається.

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}), \quad P(\bar{A}) = P(X = 0) = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda},$$

де $\lambda = np = 0,01 \cdot n$.

$$\text{Тоді } P(A) = 1 - e^{-\lambda} = 1 - e^{-0,01 \cdot n} = 0,95.$$

$$\text{Звідси } e^{-0,01 \cdot n} = 1 - 0,95 = 0,05.$$

$$e^{0,01 \cdot n} = 20, \quad 0,01 \cdot n = \ln 20 \approx 3, \quad n = 300.$$

За розподілом Пуассона $M(X) = D(X) = \lambda = 3$. ◀

62. У прибиральниці є зв'язка з чотирьох ключів, серед яких лише один відчиняє двері офісу. У темряві вона намагається потрапити до офісу. Скласти закон розподілу числа спроб при відчиненні дверей, якщо прибиральниця повертає випробуваний ключ у зв'язку. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення.

► Кожну спробу відчинити двері можна розглядати як незалежне випробування, в якому ймовірність успіху $p = \frac{1}{4}$, а ймовірність невдачі $q = \frac{3}{4}$.

$$\text{Очевидно, } P(X = 1) = p = \frac{1}{4}, \quad P(X = 2) = q \cdot p = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16},$$

$$P(X = 3) = q^2 \cdot p = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{64}, \quad \dots,$$

$$P(X = k) = q^{k-1} \cdot p = \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3^{k-1}}{4^k}, \quad \dots$$

Отже, закон розподілу величини X у цьому випадку є геометричним

X	1	2	3	...	k	...
P	1/4	3/16	9/64	...	$3^{k-1}/4^k$	...

Числові характеристики

$$M(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4, \quad D(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{\frac{3}{4}}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{3 \cdot 16}{4} = 12,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{12} \approx 3,46. \blacktriangleleft$$

63. Значення рівномірно розподіленої випадкової величини належить проміжку $[2, 8]$. Знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення та ймовірність попадання у проміжок $[3, 5]$.

► Оскільки параметри розподілу $a = 2$, $b = 8$, то

$$M(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{2+8}{2} = 5;$$

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(8-2)^2}{12} = \frac{36}{12} = 3;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{3} \approx 1,73;$$

$$P(3 \leq X \leq 5) = \frac{5-3}{8-2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}. \blacktriangleleft$$

64. Відомі імовірнісні характеристики нормально розподіленої випадкової величини X $a = 17$; $\sigma = 0,6$. Знайти ймовірність події $P\{\alpha < x < \beta\}$, а також ймовірність того, що $P(|x - a| < \varepsilon)$, якщо $\alpha = 16,8$; $\beta = 17,2$; $\varepsilon = 0,3$.

► Обчислимо ймовірність того, що X належить інтервалу $(16,8; 17,2)$.

$$\begin{aligned} P\{\alpha < x < \beta\} &= \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) \\ P(16,8 < X < 17,2) &= \Phi\left(\frac{17,2 - 17}{0,6}\right) - \Phi\left(\frac{16,8 - 17}{0,6}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{1}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{3}\right) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{1}{3}\right) = 0,26. \end{aligned}$$

Визначимо ймовірність того, що X відхилиться свого середнього значення a менш чим на ε

$$P(|x - 17| < 0,3) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{0,3}{0,6}\right) = 0,38. \blacktriangleleft$$

Завдання для самостійного розв'язання

75. Хвилинка стрілка електронного годинника переміщується стрибком в кінці кожної хвилини. Знайти ймовірність того, що в дану мить годинник покаже час, який відрізняється від істинного не більше ніж на 20 секунд.

76. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X , розподіленої рівномірно в інтервалі $[3, 9]$.

77. За статистичними даними річний дохід населення міста N має нормальний розподіл із середнім значенням 3 тис. грн. та середнім квадратичним відхиленням 1 тис. грн. Знайти ймовірність того, що навмання вибраний житель міста має

дохід: а) від 2,5 до 4 тис. грн.; б) менше 6 тис. грн.

78. Випадкова величина X нормально розподілена. $M(X)=1$; $D(X)=4$. Знайти $P(|X-1|<2)$.

79 Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X показникового розподілу, якщо функція розподілу

$$F(X)=\begin{cases} 1-e^{-10x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

80. Імовірність того, що футболіст реалізує одинадцятиметровий штрафний удар дорівнює 0,9. Футболіст виконав три такі удари. Побудувати закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X — числа реалізованих штрафних. Знайти математичне сподівання, дисперсію випадкової величини X .

81. Маємо чотири електролампочки, кожна з яких має дефект з імовірністю $q=0,1$ ($p=1-0,1=0,9$) — імовірність того, що в лампочці дефект відсутній). Послідовно беруть по одній лампочці, вгвинчують у патрон і вмикають електричний струм. Під час вмикання струму лампочка з дефектом перегорить, і її замінять на іншу. Побудувати закон розподілу дискретної випадкової величини X — число лампочок, які будуть випробувані. Обчислити $\sigma(X)$.

4.4. Системи випадкових величин

Вище розглянуті випадкові величини X , які при кожному випробуванні визначались одним можливим числом називаються *одновимірними*.

Крім них трапляються випадкові величини, значення яких визначається двома, трьома, ..., n вимірами. В таких випадках кажуть про систему кількох випадкових величин. Причому при вивченні системи випадкових величин потрібно врахувати і можливі залежності між випадковими величинами, які становлять систему. Систему n *випадкових величин* називають ще *n -вимірною випадковою величиною*. Надалі розглядатимемо двовимірну випадкову величину (X, Y) , де X і Y – одновимірні випадкові величини, які називають *компонентами випадкової величини (X, Y)* .

Інтуїтивний підхід до поняття системи двох випадкових величин пов'язаний з уявленням про дослід, результатом якого є пара чисел.

Законом розподілу системи випадкових величин називають співвідношення, яке встановлює зв'язок між можливими значеннями системи і ймовірностями появи відповідних значень.

Розподіл ймовірностей системи двох дискретних випадкових величин (X, Y) часто задають таблицею

$X \backslash Y$	x_1	x_2	...	x_n
y_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1n}
y_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2n}
...	...	...	...	...
y_m	p_{m1}	p_{m2}	...	p_{mn}

Тут $x_1, x_2, \dots, x_n$ – можливі значення випадкової величини X , а $y_1,$

$y_2, \dots, y_m$ – можливі значення Y , а p_{ij} – ймовірність того, що випадкова величина Y набуде значення y_i , а X набуде значення x_j . Крім того виконується умова нормування системи

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1.$$

Остання умова означає, що в результаті експерименту одне із своїх значень система (X, Y) обов'язково набуде.

Функцією розподілу ймовірностей системи двох випадкових величин (X, Y) називають таку функцію двох аргументів x, y , яка визначає ймовірність спільної появи подій $(X < x) \cap (Y < y)$:

$$F(x, y) = P((X < x) \cap (Y < y)).$$

Геометрично цю функцію зображено на рис. 10.

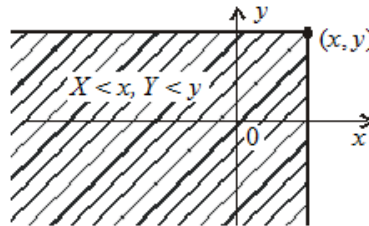


Рисунок 10

Властивості $F(x, y)$.

1. $0 \leq F(x, y) \leq 1$, оскільки $0 \leq P((X < x) \cap (Y < y)) \leq 1$.

2. Якщо один із аргументів $F(x, y)$ прямує до $+\infty$, то функція розподілу системи прямує до функції розподілу одного аргументу, що не прямує до $+\infty$, а саме:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y) = F(x, \infty) = F(x); \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x, y) = F(\infty, y) = F(y).$$

$$3. \lim_{\substack{y \rightarrow \infty, \\ x \rightarrow \infty}} F(x, y) = F(\infty, \infty) = P(x < \infty, y < \infty) = 1.$$

$$4. \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty, \\ y \rightarrow -\infty}} F(x, y) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x, y) = \lim_{y \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0.$$

5. $F(x, y)$ є неспадною функцією аргументів x і y .

За допомогою функції розподілу можна знайти ймовірність попадання випадкової точки (X, Y) в довільний прямокутник із сторонами, паралельними до координатних осей.

$$P\{a \leq x < b, c \leq y < d\} = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c)$$

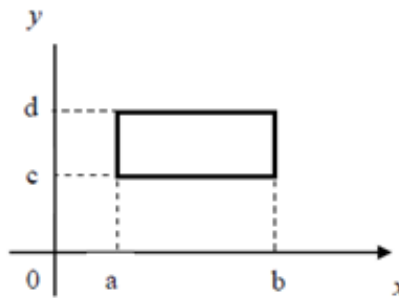


Рисунок 11

Ймовірність розміщення системи змінних (x, y) в області $D \subset \Omega$ обчислюється за формулою

$$P((x, y) \in D) = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Щільністю розподілу неперервної двовимірної випадкової величини називають другу мішану частинну похідну від функції розподілу і позначають

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

Зворотний зв'язок між щільністю і функцією розподілу системи двох

неперервних випадкових величин встановлює формула

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(s, t) ds dt.$$

Властивості щільності розподілу.

1. Для всіх x і y маємо $f(x, y) \geq 0$.
2. Подвійний невластний інтеграл від щільності ймовірності системи

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1.$$

Якщо відомо закон розподілу системи, то можна знайти закони розподілу кожної з компонент. А саме, якщо дискретна випадкова величина (X, Y) задана таблицею розподілу, то закон розподілу компоненти x знаходиться наступним чином

$$P\{X = x_j\} = p_{1j} + p_{2j} + \dots + p_{mj}, \quad j = 1, \dots, n;$$

а для компоненти y маємо

$$P\{Y = y_i\} = p_{i1} + p_{i2} + \dots + p_{in}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Якщо випадкова величина (X, Y) задана функцією розподілу $F(x, y)$, то функції розподілу $F_1(x)$, $F_2(y)$ компонент x і y визначають за формулами

$$F_1(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y), \quad F_2(y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, y).$$

Якщо ж випадкова величина (x, y) задана щільністю розподілу $f(x, y)$, то щільності $f_1(x)$, $f_2(y)$ компонент визначають за формулами

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy, \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx.$$

Розподіл однієї компоненти системи, знайдений за умови, що інша компонента прийняла певне значення, називають умовним законом розподілу. Наприклад, умовний закон розподілу компоненти x системи дискретних величин (x, y) у припущенні, що подія $y = y_1$ відбулася, може

бути знайдений за формулою

$$P_{y=y_1}\{x=x_j\} = \frac{P\{x=x_j, y=y_1\}}{P\{y=y_1\}}, \quad j=1, 2, \dots, n.$$

Випадкові величини, які становлять систему, називають незалежними, якщо закон розподілу однієї з них не залежить від того, яких можливих значень набула інша величина. Для неперервних випадкових величин умова незалежності записується у вигляді

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y).$$

Числові характеристики двовимірної дискретної випадкової величини обчислюють за такими формулами:

1) Математичне сподівання

$$M(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i p_{ij} = \sum_{i=1}^n x_i p(x_i),$$

$$M(Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m y_j p_{ij} = \sum_{j=1}^m y_j p(y_j).$$

2) Дисперсія

$$D(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i^2 p_{ij} - M^2(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p(x_i) - M^2(X),$$

$$D(Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m y_j^2 p_{ij} - M^2(Y) = \sum_{j=1}^m y_j^2 p(y_j) - M^2(Y).$$

3) Середнє квадратичне відхилення

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}, \quad \sigma(Y) = \sqrt{D(Y)}.$$

Числові характеристики двовимірної неперервної випадкової величини обчислюють за такими формулами:

1) Математичне сподівання

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x; y) dx dy, \quad M(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y f(x; y) dx dy.$$

2) Дисперсія

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x; y) dx dy - M^2(X), \quad D(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(x; y) dx dy - M^2(Y).$$

3) Середнє квадратичне відхилення

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}, \quad \sigma(Y) = \sqrt{D(Y)}.$$

Для опису системи двох випадкових величин використовують кореляційний момент і коефіцієнт кореляції.

Кореляційним моментом K_{xy} системи (X, Y) називають математичне сподівання добутку відхилень випадкових величин X і Y

$$K_{xy} = M[(X - M(X))(Y - M(Y))] = M(XY) - M(X)M(Y).$$

Коефіцієнтом кореляції r_{xy} системи (x, y) називають величину

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma(X)\sigma(Y)},$$

де $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$, $\sigma(Y) = \sqrt{D(Y)}$ – середні квадратичні відхилення компонент.

Кореляційний момент і коефіцієнт кореляції характеризують зв'язок між компонентами системи (X, Y) . А саме, якщо випадкові величини X і Y незалежні, то $K_{xy} = 0$ і $r_{xy} = 0$. Значення коефіцієнта кореляції належить відрізку $[-1; 1]$, тобто $-1 \leq r_{xy} \leq 1$.

Дві випадкові величини X і Y називають корельованими, якщо $K_{xy} \neq 0$ (або $r_{xy} \neq 0$) і некорельованими, якщо $K_{xy} = 0$ (або $r_{xy} = 0$). Отже, корельовані величини завжди залежні, проте якщо випадкові величини X і Y залежні, то вони можуть бути як корельованими, так і некорельованими.

Приклади розв'язання задач

65. Задано закон розподілу системи двох випадкових величин (X, Y)

$\begin{matrix} Y \\ X \end{matrix}$	5	10	15
0	0,08	0,22	0,1
1	0,1	0,35	0,15

Знайти коефіцієнт кореляції r_{xy} .

► Додамо задані ймовірності по стовпцях, отримаємо

$$P\{X = 5\} = 0,08 + 0,1 = 0,18;$$

$$P\{X = 10\} = 0,22 + 0,35 = 0,57;$$

$$P\{X = 15\} = 0,1 + 0,15 = 0,25.$$

Тому закон розподілу компоненти X має вигляд

X	5	10	15
p	0,18	0,57	0,25

Аналогічно, додамо задані ймовірності по рядках, отримаємо

$$P\{Y = 0\} = 0,08 + 0,22 + 0,1 = 0,4; \quad P\{Y = 1\} = 0,1 + 0,35 + 0,15 = 0,6.$$

Закон розподілу компоненти Y

Y	0	1
p	0,4	0,6

Знайдемо коефіцієнт кореляції r_{xy} . Обчислимо

$$M(X) = 5 \cdot 0,18 + 10 \cdot 0,57 + 15 \cdot 0,25 = 10,35;$$

$$D(X) = 5^2 \cdot 0,18 + 10^2 \cdot 0,57 + 15^2 \cdot 0,25 - (10,35)^2 = 10,6275;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{10,6275} \approx 3,26;$$

$$M(Y) = 0 \cdot 0,4 + 1 \cdot 0,6 = 0,6;$$

$$D(Y) = 0^2 \cdot 0,4 + 1^2 \cdot 0,6 - (0,6)^2 = 0,24;$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{0,24} \approx 0,49.$$

Тоді кореляційний момент K_{xy} дорівнює

$$K_{xy} = M(XY) - M(X)M(Y) = 0 \cdot 5 \cdot 0,08 + 0 \cdot 10 \cdot 0,22 + 0 \cdot 15 \cdot 0,1 + 1 \cdot 5 \cdot 0,1 + 1 \cdot 10 \cdot 0,35 + 1 \cdot 15 \cdot 0,15 - 10,35 \cdot 0,6 = 6,25 - 6,21 = 0,04.$$

Коефіцієнт кореляції складе

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{0,04}{3,26 \cdot 0,49} \approx 0,025. \quad \blacktriangleleft$$

66. Задано закон розподілу системи двох випадкових величин (X, Y)

$X \backslash Y$	2	3
2	0,2	0,3
3	0,1	0,2
4	0	0,2

Знайти умовний закон розподілу величини Y при умові $X = 3$.

► Додамо задані ймовірності по стовпцях, отримаємо

$$P\{X = 2\} = 0,2 + 0,1 + 0 = 0,3;$$

$$P\{X = 3\} = 0,3 + 0,2 + 0,2 = 0,7.$$

Тому закон розподілу компоненти X має вигляд

X	2	3
p	0,3	0,7

Аналогічно, додамо задані ймовірності по рядках, отримаємо

$$P\{Y = 2\} = 0,2 + 0,3 = 0,5;$$

$$P\{Y = 3\} = 0,1 + 0,2 = 0,3;$$

$$P\{Y = 4\} = 0 + 0,2 = 0,2.$$

Закон розподілу компоненти Y

Y	2	3	4
P	0,5	0,3	0,2

Знайдемо умовний закон розподілу величини Y при умові $X = 3$ за формулою

$$P_{x=3}\{Y = y_j\} = \frac{P\{x = 3, y = y_j\}}{P\{x = 3\}}, \quad j = 1, 2, 3.$$

$$P_{x=3}\{Y = 2\} = \frac{P\{x = 3, y = 2\}}{P\{x = 3\}} = \frac{0,3}{0,7} = \frac{3}{7},$$

$$P_{x=3}\{Y = 3\} = \frac{P\{x = 3, y = 3\}}{P\{x = 3\}} = \frac{2}{7},$$

$$P_{x=3}\{Y = 4\} = \frac{P\{x = 3, y = 4\}}{P\{x = 3\}} = \frac{2}{7}.$$

Отже,

Y	2	3	4
$P_{x=3}\{Y = y_j\}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$

67. Закон розподілу системи двох неперервних випадкових величин (X, Y) задано функцією розподілу

ймовірностей

$$F(x, y) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, y \leq 0; \\ 1 - e^{-2x} - e^{-3y} + e^{-2x-3y}, & x > 0, y > 0. \end{cases}$$

Обчислити $P(0 < x < 4, 0 < y < 2)$.

► Відповідну графічну схему зображено на рисунку

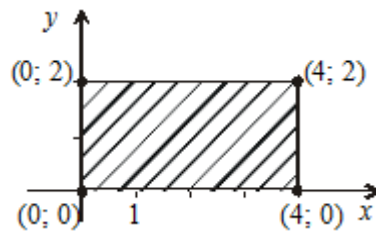


Рисунок 12

Далі, згідно з формулою

$$P\{a \leq x < b, c \leq y < d\} = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c),$$

маємо

$$\begin{aligned} P\{0 < x < 4, 0 < y < 2\} &= F(4, 2) - F(0, 2) - F(4, 0) + F(0, 0) = \\ &= 1 - e^{-8} - e^{-6} + e^{-14}. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

68. Задано

$$f(x, y) = \begin{cases} 1/48, & \text{якщо } (x, y) \in \Omega; \\ 0, & \text{якщо } (x, y) \notin \Omega. \end{cases}$$

де $\Omega = \{-4 \leq x \leq 2, -3 \leq y \leq 5\}$. Знайти K_{xy} , r_{xy} .

► Знайдемо кореляційний момент, використавши формулу

$$K_{xy} = M(XY) - M(X)M(Y).$$

Обчислимо математичні сподівання

$$M(X) = \int_{-4}^2 \int_{-3}^5 x f(x, y) dx dy = \int_{-4}^2 \int_{-3}^5 x \frac{1}{48} dx dy = \frac{1}{48} \int_{-4}^2 x dx \int_{-3}^5 dy =$$

$$\frac{1}{48} \left(\frac{x^2}{2} \Big|_{-4}^2 \right) \left(y \Big|_{-3}^5 \right) = \frac{1}{96} (4 - 16) (5 + 3) = \frac{-12 \cdot 8}{96} = -1;$$

$$M(Y) = \int_{-4}^2 \int_{-3}^5 y f(x, y) dx dy = \int_{-4}^2 \int_{-3}^5 y \frac{1}{48} dy dx = \frac{1}{48} \int_{-4}^2 dx \int_{-3}^5 y dy =$$

$$= \frac{1}{48} x \Big|_{-4}^2 \left(\frac{y^2}{2} \Big|_{-3}^5 \right) = \frac{1}{96} (2 + 4) (25 - 9) = \frac{6 \cdot 16}{96} = 1;$$

$$M(XY) = \int_{-4}^2 \int_{-3}^5 xy f(x, y) dx dy = \int_{-4}^2 \int_{-3}^5 xy \frac{1}{48} dx dy = \frac{1}{48} \int_{-4}^2 x dx \int_{-3}^5 y dy =$$

$$= \frac{1}{48} \left(\frac{x^2}{2} \Big|_{-4}^2 \right) \left(\frac{y^2}{2} \Big|_{-3}^5 \right) = \frac{1}{192} (4 - 16) (25 - 9) = \frac{1}{192} (-12) 16 =$$

$$= -\frac{192}{192} = -1.$$

$$\text{Тоді } K_{xy} = M(XY) - M(X)M(Y) = -1 - (-1) \cdot 1 = 0.$$

Отже, $K_{xy} = 0$, що говорить нам про відсутність кореляційного зв'язку між випадковими величинами X та Y .

Оскільки $K_{xy} = 0$, то й $r_{xy} = 0$. ◀

69. Задано

$$f(x, y) = \begin{cases} a(x + y), & \text{якщо } (x, y) \in \Omega, \\ 0, & \text{якщо } (x, y) \notin \Omega, \end{cases}$$

де $\Omega = \{0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}$. Знайти a і r_{xy} .

► Область Ω зображено на рис. 13.

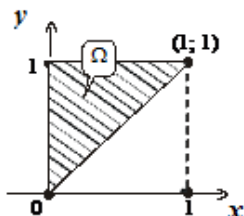


Рисунок 13

За умовою нормування обчислюємо значення a .

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = 1 \Rightarrow \int_0^1 \int_x^1 a(x+y) dx dy = 1 \Rightarrow$$

$$a = \frac{1}{\int_0^1 \int_x^1 (x+y) dx dy}.$$

Обчислимо подвійний інтеграл

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_x^1 (x+y) dx dy &= \int_0^1 \left(\int_x^1 (x+y) dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left((x+y)^2 \Big|_x^1 \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[(x+1)^2 - (x+x)^2 \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 + 2x + 1 - 4x^2) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (2x - 3x^2 + 1) dx = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 2x dx - \int_0^1 3x^2 dx + \int_0^1 dx \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(x^2 \Big|_0^1 - x^3 \Big|_0^1 + x \Big|_0^1 \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Отже, $a = 2$.

Тоді

$$f(x, y) = \begin{cases} 2(x + y), & \text{якщо } (x, y) \in \Omega, \\ 0, & \text{якщо } (x, y) \notin \Omega, \end{cases}$$

де $\Omega = \{0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}$.

Знаходимо числові характеристики

$$\begin{aligned} M(X) &= \iint_{\Omega} x f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_x^1 x \cdot 2(x + y) dx dy = \\ &= 2 \int_0^1 \int_x^1 x(x + y) dx dy = 2 \int_0^1 x \left(\int_x^1 (x + y) dy \right) dx = \\ &= 2 \int_0^1 x \left((x + y)^2 \Big|_x^1 \right) dx = \int_0^1 x \left[(x + 1)^2 - 4x^2 \right] dx = \\ &= \int_0^1 (2x^2 - 3x^3 + x) dx = \int_0^1 2x^2 dx - \int_0^1 3x^3 dx + \int_0^1 x dx = \\ &= \frac{2}{3} x^3 \Big|_0^1 - \frac{3}{4} x^4 \Big|_0^1 + \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

$$M(X) = \frac{5}{12}.$$

$$\begin{aligned} M(X^2) &= \iint_{\Omega} x^2 f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_x^1 x^2 \cdot 2(x + y) dx dy = \\ &= 2 \int_0^1 x^2 \left(\int_x^1 (x + y) dy \right) dx = 2 \int_0^1 x^2 \left((x + y)^2 \Big|_x^1 \right) dx = \\ &= \int_0^1 x^2 \left((x + 1)^2 - 4x^2 \right) dx = \int_0^1 (2x^3 - 3x^4 + x^2) dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 2x^3 dx - \int_0^1 3x^4 dx + \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} x^4 \Big|_0^1 - \frac{3}{5} x^5 \Big|_0^1 + \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 = \\
&= \frac{1}{3} - \frac{3}{5} + \frac{1}{3} = \frac{7}{30}.
\end{aligned}$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \frac{7}{30} - \frac{25}{144} = \frac{1008 - 750}{4320} = \frac{43}{720}$$

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)} = \frac{1}{12} \sqrt{\frac{43}{5}} \approx 0,244.$$

$$\begin{aligned}
M(Y) &= \iint_{\Omega} y f(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_x^1 y 2(x+y) dy dx = \\
&= 2 \int_0^1 \left(\int_0^1 (xy + y^2) dy \right) dx = 2 \int_0^1 \left(\frac{xy^2}{2} \Big|_x^1 + \frac{y^3}{3} \Big|_x^1 \right) dx = \\
&= 2 \int_0^1 \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{2} + \frac{1}{3} - \frac{x^3}{3} \right) dx = \\
&= 2 \left(\frac{1}{2} \int_0^1 x dx - \frac{1}{2} \int_0^1 x^3 dx + \frac{1}{3} \int_0^1 dx - \frac{1}{3} \int_0^1 x^3 dx \right) = \\
&= 2 \left(\frac{1}{4} x^2 \Big|_0^1 - \frac{1}{8} x^4 \Big|_0^1 + \frac{1}{3} x \Big|_0^1 - \frac{1}{12} x^4 \Big|_0^1 \right) = \\
&= 2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} \right) = \frac{2}{24} (6 - 3 + 8 - 2) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

$$M(Y) = \frac{3}{4}.$$

$$M(Y^2) = \iint_{\Omega} y^2 f(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_x^1 y^2 2(x+y) dy dx =$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_0^1 \left(\int_x^1 (xy^2 + y^3) dy \right) dx = 2 \int_0^1 (xy^3 / 3 \Big|_x^1 + y^4 / 4 \Big|_x^1) dx = \\
&= 2 \int_0^1 \left(\frac{x}{3} - \frac{x^4}{3} + \frac{1}{4} - \frac{x^4}{3} \right) dx = \\
&= 2 \left(\frac{1}{3} \int_0^1 x dx - \frac{1}{3} \int_0^1 x^4 dx + \frac{1}{4} \int_0^1 dx - \frac{1}{4} \int_0^1 x^4 dx \right) = \\
&= 2 \left(\frac{x^2}{6} \Big|_0^1 - \frac{1}{15} x^5 \Big|_0^1 + \frac{1}{4} x \Big|_0^1 - \frac{1}{20} x^5 \Big|_0^1 \right) = 2 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{15} + \frac{1}{4} - \frac{1}{20} \right) = \\
&= \frac{2}{60} (10 - 4 + 15 - 3) = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}.
\end{aligned}$$

$$D(Y) = M(Y^2) - M^2(Y) = \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{4} \right)^2 = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{48 - 45}{16} = \frac{3}{16}.$$

$$\sigma_y = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{\frac{3}{16}} \approx 0,433.$$

$$\begin{aligned}
M(XY) &= \iint_{\Omega} xy f(x, y) dy dx = 2 \int_0^1 \int_x^1 xy(x+y) dy dx = \\
&= 2 \int_0^1 \left(\int_x^1 (x^2 y + xy^2) dy \right) dx = 2 \int_0^1 \left(\frac{x^2 y^2}{2} \Big|_x^1 + \frac{xy^3}{3} \Big|_x^1 \right) dx = \\
&= 2 \int_0^1 \left(\frac{x^2 - x^4}{2} + \frac{x - x^4}{3} \right) dx = \\
&= 2 \left(\frac{1}{2} \int_0^1 x^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^1 x^4 dx + \frac{1}{3} \int_0^1 x dx - \frac{1}{3} \int_0^1 x^4 dx \right) =
\end{aligned}$$

$$= 2 \left(\frac{x^3}{6} \Big|_0^1 - \frac{x^5}{10} \Big|_0^1 + \frac{x^2}{6} \Big|_0^1 - \frac{x^5}{15} \Big|_0^1 \right) = 2 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{10} + \frac{1}{6} - \frac{1}{15} \right) = \frac{1}{3}.$$

$$K_{xy} = M(XY) - M(X)M(Y) = \frac{1}{3} - \frac{5}{12} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{3} - \frac{15}{48} = \frac{1}{48}.$$

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\frac{1}{48}}{0,433 \cdot 0,244} = \frac{1}{48 \cdot 0,433 \cdot 0,244} \approx \frac{1}{5,071} \approx 0,197.$$

Отже, $K_{xy} = 1,48$; $r_{xy} \approx 0,197$. ◀

Завдання для самостійного розв'язання

82. Задано закон розподілу системи двох випадкових величин (X, Y)

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	0,1	0,2	0
1	0,2	0,3	0,2

Знайти закони розподілу величин X і Y та умовний закон розподілу величини Y при умові $X=1$.

83. Задано закон розподілу системи двох випадкових величин (X, Y)

$X \backslash Y$	1	2	3
1	0	0,2	0,1
2	0,2	0,3	0,2

Знайти коефіцієнт кореляції r_{xy} .

$$84. \text{ Задано } f(x, y) = \begin{cases} a, & \text{якщо } (x, y) \in \Omega, \\ 0, & \text{якщо } (x, y) \notin \Omega, \end{cases}$$

$$\text{де } \Omega = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}.$$

Знайти a і r_{xy} .

§ 5. Математична статистика

5.1. Предмет і завдання математичної статистики

Математична статистика – це розділ математики, що вивчає закономірності, характерні для масових явищ і статистичних сукупностей. Тобто вивчення й установлення закономірностей, яким підпорядковуються масові випадкові явища, є предметом математичної статистики. Методологія математичної статистики, застосовувана для обробки статистичних даних, результатів спостережень, даних реальних або штучно поставлених дослідів, базується на методах теорії ймовірностей.

Класична математична статистика має на меті в основному розв'язання двох завдань. Перше з них – це виявити й обґрунтувати способи збору та групування статистичних відомостей, одержаних у результаті спостережень за об'єктом дослідження або за результатами спеціально поставлених експериментів.

Друге завдання математичної статистики полягає в розробленні методів аналізу статистичних даних, котре ґрунтується на теоремах і методах теорії ймовірностей. Зокрема, закон великих чисел, теорема Чебишова дають можливість обґрунтувати вибірковий метод.

5.2. Статистичні розподіли вибірок та їх числові характеристики

Під *генеральною сукупністю* розумітимемо всю множину статистичних одиниць, якісні або кількісні характеристики котрих потрібно дослідити.

Під *вибірковою сукупністю* будемо розуміти скінченну множину статистичних одиниць, випадково вибраних з генеральної сукупності.

Кількість статистичних одиниць генеральної сукупності N і вибіркової сукупності n називають їх обсягами. Значення ознаки X , які попали у вибірккову сукупність (вибірку), називають варіантами і позначають $x_i, i = \overline{1, n}$.

Вибірки бувають *повторними* та *безповторними*. Вибірка називається *повторною*, якщо перед вибором наступного елемента попередній повертається в генеральну сукупність. Вибірка називається *безповторною*, якщо перед вибором наступного елемента попередній не повертається в генеральну сукупність.

Варіаційним рядом називається впорядкована статистична сукупність, елементи (варіанти) x_i якої розташовані в порядку зростання.

Якщо елемент x_i зустрічається n_i , тоді число n_i називається *частотою* елемента x_i , а відношення $w_i = \frac{n_i}{n}$ *відносною частотою* елемента x_i .

Якщо досліджується ознака генеральної сукупності X , яка є неперервною, то варіант буде багато. У цьому разі варіаційний ряд – це певна кількість рівних або нерівних частинних інтервалів чи груп варіант зі своїми частотами.

Такі частинні інтервали варіант, які розміщені у зростаючій послідовності, утворюють *інтервальний варіаційний ряд*.

Дискретний статистичний розподіл вибірки та його числові

характеристики

Перелік варіант варіаційного ряду і відповідних їм частот, або відносних частот, називають *дискретним статистичним розподілом* вибірки.

У табличній формі він має вигляд

$X = x_i$	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_k
n_i	n_1	n_2	n_3	$\dots$	n_k
w_i	w_1	w_2	w_3	$\dots$	w_k

Для статистичних рядів повинні виконуватися умови

$$\sum_{i=1}^k n_i = n, \quad \sum_{i=1}^k w_i = 1.$$

Для наочності використовують графічне зображення статистичних рядів у вигляді *полігону частот* (відносних частот) .

Полігоном частот (відносних частот) називається ламана лінія, що з'єднує прямолінійними відрізками точки з координатами (x_i, n_i) (або (x_i, w_i)) $i = 1, 2, \dots, k$.

Дискретний статистичний розподіл вибірки можна подати емпіричною функцією $F^*(x)$.

Емпіричною функцією розподілу називається функція аргументу x , $x \in R$, що визначає відносну частоту події $X < x$, що дорівнює відношенню числа n_x – кількості варіант менших за значення x – до обсягу вибірки n

$$F^* = W(X < x) = \frac{n_x}{n}.$$

Для статистичного ряду графік емпіричної функції розподілу має ступінчастий вигляд.

Властивості емпіричної функції.

$$1. 0 \leq F^*(x) \leq 1.$$

2. $F^*(x) \Big|_{x \leq x_{\min}} = 0$, де $x_{\min}$ – найменше значення варіанти вибірки.

3. $F^*(x) \Big|_{x > x_{\max}} = 1$, де $x_{\max}$ – найбільше значення варіанти вибірки.

4. $F^*(x)$ є неспадною функцією аргументу x , а саме $F^*(x_2) \geq F^*(x_1)$

для $x_2 \geq x_1$.

Числові характеристики.

Нехай для вивчення генеральної сукупності щодо кількісної ознаки X маємо вибірку обсягу n : $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

1) *Вибіркова середня величина* $\overline{x_g}$. Величину, яка визначається формулою

$$\overline{x_g} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i \cdot n_i$$

називають *вибірковою середньою величиною дискретного статистичного розподілу* вибірки. Тут x_i – варіанта варіаційного ряду вибірки; n_i – частота цієї варіанти; n – обсяг вибірки $\sum_{i=1}^k n_i = n$.

Якщо всі варіанти з'являються у вибірці лише по одному разу, тобто $n_i = 1$, то $\overline{x_g} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i$.

2) *Відхилення варіант*. Різницю $(x_i - \overline{x_g}) \cdot n_i$ називають відхиленням варіант. При цьому

$$\sum_i (x_i - \overline{x_g}) \cdot n_i = \sum_i x_i \cdot n_i - \sum_i \overline{x_g} \cdot n_i = \overline{x_g} \cdot n - \overline{x_g} \cdot n = 0.$$

Отже, сума відхилень усіх варіант ряду вибірки завжди дорівнює нулю.

3) *Мода* Mo^* . Модою дискретного статистичного розподілу вибірки

називають варіанту, що має найбільшу частоту появи.

Мод може бути кілька. Коли дискретний статистичний розподіл має одну моду, то він називається *одномодальним*, коли має дві моди – *двомодальним* і т. д.

4) *Медіана Me^** . Медіаною дискретного статистичного розподілу вибірки називають варіанту, яка поділяє варіаційний ряд на дві частини, рівні за кількістю варіант

5) *Дисперсія*. Для вимірювання розсіювання варіант вибірки відносно $\bar{x}_g$ вибирається дисперсія. *Дисперсія вибірки* – це середнє арифметичне квадратів відхилень варіант відносно $\bar{x}_g$, яке обчислюється за формулою

$$D_g = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x}_g)^2 \cdot n_i, \text{ або } D_g = \frac{\sum_{i=1}^k x_i^2 \cdot n_i}{n} - (\bar{x}_g)^2.$$

6) *Середнє квадратичне відхилення вибірки σ_g* . При обчисленні D_g відхилення підноситься до квадрата, отже, змінюється одиниця виміру ознаки X , тому на основі дисперсії вводиться середнє квадратичне відхилення

$$\sigma_g = \sqrt{D_g},$$

яке вимірює розсіювання варіант вибірки відносно $\bar{x}_g$, але в тих самих одиницях, в яких вимірюється ознака X .

7) *Розмах R* . Для грубого оцінювання розсіювання варіант відносно $\bar{x}_g$ застосовується величина, яка дорівнює різниці між найбільшою $x_{\max}$ і найменшою $x_{\min}$ варіантами варіаційного ряду. Ця величина називається *розмахом*

$$R = x_{\max} - x_{\min}.$$

8) *Коефіцієнт варіації V* . Для порівняння оцінок варіацій статистичних рядів із різними значеннями $\bar{x}_g$, які не дорівнюють нулеві,

вводиться коефіцієнт варіації, який обчислюється за формулою

$$V = \frac{\sigma_g}{x_g} \cdot 100\%.$$

Приклади розв'язання задач

70. Задано дискретний статистичний розподіл вибірки

$X = x_i$	-6	-4	-2	2	4	6
n_i	5	10	15	20	40	10
w_i	0,05	0,1	0,15	0,2	0,4	0,1

Потрібно:

а) побудувати $F^*(x)$ та її графік;

б) побудувати полігон частот та відносних частот.

► Згідно з означенням та властивостями 1-4 функція

$F^*(x)$ має вигляд

$$F^*(x) = W(X < x) = \frac{n_x}{n} = \begin{cases} 0, & x \leq -6; \\ 0,05, & -6 < x \leq -4; \\ 0,15, & -4 < x \leq -2; \\ 0,3, & -2 < x \leq 2; \\ 0,5, & 2 < x \leq 4; \\ 0,9, & 4 < x \leq 6; \\ 0,9 + 0,1 = 1, & x > 6. \end{cases}$$

Графік функції $F^*(x)$ побудовано на рис. 14.

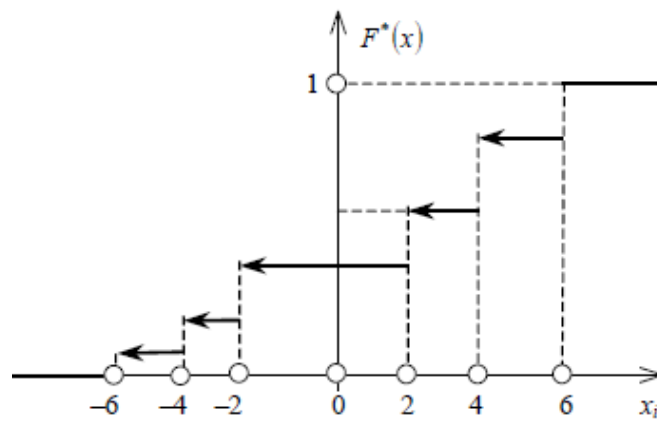


Рисунок 14

Полігони частот та відносних частот побудовано відповідно на рис. 15, 16.

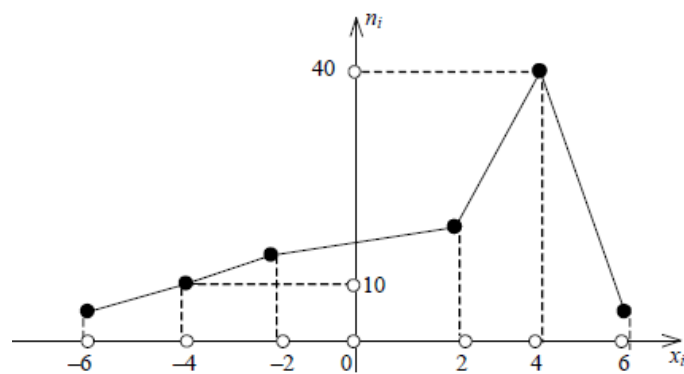


Рисунок 15

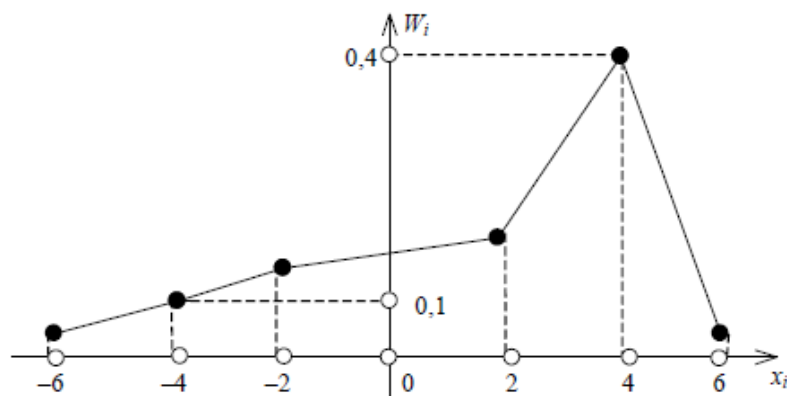


Рисунок 16 ◀

71. Під час тестування службовців деякої компанії були одержані такі результати (у балах): 39, 41, 40, 42, 41, 40, 42, 44, 40, 43, 38, 42, 41, 43, 39, 37, 43, 41, 38, 42, 40, 41, 42, 40, 41.

Побудувати дискретний статистичний ряд, полігон частот, емпіричну функцію розподілу та її графік.

► Для побудови дискретного статистичного ряду записуємо в порядку зростання різні значення випадкової величини X і порахуємо їх частоти.

Запишемо статистичний ряд

x_i	37	38	39	40	41	42	43	44
n_i	1	2	2	4	6	5	4	1

Знайдемо об'єм вибірки

$$n = \sum_i n_i = 1 + 2 + 2 + 4 + 6 + 5 + 4 + 1 = 25.$$

Побудуємо полігон частот даного розподілу (рис. 17).

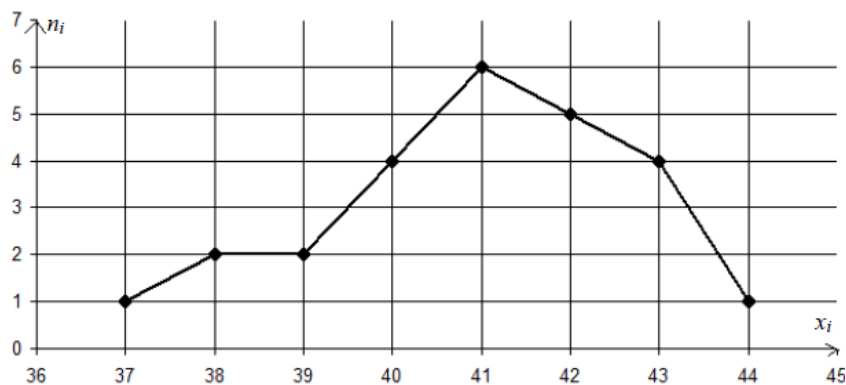


Рисунок 17

Для побудови емпіричної функції розподілу обчислимо суму частот варіант, менших за x (тобто $\sum_{x_i < x} n_i$). Одержимо

якщо $x \leq 37$, то $\sum_{x_i < 37} n_i = 0$, оскільки таких значень x_i

немає, тоді $F^*(x) = 0$;

якщо $37 < x \leq 38$, то $\sum_{x_i < 38} n_i = n_1 = 1$, а $F^*(x) = \frac{1}{25}$;

якщо $38 < x \leq 39$, то $\sum_{x_i < 39} n_i = n_1 + n_2 = 1 + 2 = 3$, а

$$F^*(x) = \frac{3}{25};$$

якщо $39 < x \leq 40$, то $\sum_{x_i < 40} n_i = n_1 + n_2 + n_3 = 1 + 2 + 2 = 5$, а

$$F^*(x) = \frac{5}{25};$$

$$\text{якщо } 40 < x \leq 41, \text{ то } \sum_{x_i < 41} n_i = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 1 + 2 + 2 + 4 = 9,$$

$$\text{а } F^*(x) = \frac{9}{25};$$

$$\text{якщо } 41 < x \leq 42, \quad \text{то } \sum_{x_i < 42} n_i = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 =$$

$$= 1 + 2 + 2 + 4 + 6 = 15, \text{ а } F^*(x) = \frac{15}{25};$$

$$\text{якщо } 42 < x \leq 43, \text{ то } \sum_{x_i < 43} n_i = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 =$$

$$= 1 + 2 + 2 + 4 + 6 + 5 = 20, \text{ а } F^*(x) = \frac{20}{25};$$

$$\text{якщо } 43 < x \leq 44, \text{ то } \sum_{x_i < 44} n_i = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 =$$

$$= 1 + 2 + 2 + 4 + 6 + 5 + 4 = 24, \text{ а } F^*(x) = \frac{24}{25};$$

$$\text{якщо } x > 44, \text{ то } \sum_{x_i < x} n_i = 25, \text{ адже всі значення } x_i \text{ менші від}$$

$$\text{будь-якого числа, що перевищує 44, тоді } F^*(x) = \frac{25}{25} = 1.$$

Згідно з означенням емпірична функція має вигляд

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 37; \\ \frac{1}{25}, & 37 < x \leq 38; \\ \frac{3}{25}, & 38 < x \leq 39; \\ \frac{5}{25}, & 39 < x \leq 40; \\ \frac{9}{25}, & 40 < x \leq 41; \\ \frac{15}{25}, & 41 < x \leq 42; \\ \frac{20}{25}, & 42 < x \leq 43; \\ \frac{25}{25}, & 43 < x \leq 44; \\ 1, & x > 44. \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \leq 37; \\ 0,04, & 37 < x \leq 38; \\ 0,12, & 38 < x \leq 39; \\ 0,2, & 39 < x \leq 40; \\ 0,36, & 40 < x \leq 41; \\ 0,6, & 41 < x \leq 42; \\ 0,8, & 42 < x \leq 43; \\ 0,96, & 43 < x \leq 44; \\ 1, & x > 44. \end{cases}$$

Графік одержаної емпіричної функції розподілу зображено на рис. 18.

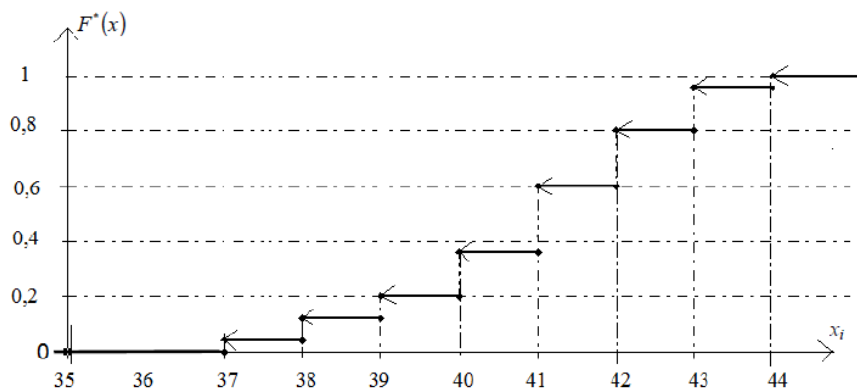


Рисунок 18 ◀

72. Задано статистичний розподіл вибірки

$X = x_i$	2,5	4,5	6,5	8,5	10,5
n_i	10	20	30	30	10

Потрібно:

а) обчислити $\bar{x}_e$, D_e , σ_e ;б) знайти Mo^* , Me^* ;в) обчислити R , V .

► Знайдемо об'єм вибірки

$$n = \sum_{i=1}^k n_i = 10 + 20 + 30 + 30 + 10 = 100.$$

Вибіркову середню обчислимо за формулою

$$\bar{x}_e = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i \cdot n_i = \frac{2,5 \cdot 10 + 4,5 \cdot 20 + 6,5 \cdot 30 + 8,5 \cdot 30 + 10,5 \cdot 10}{100} = 6,7.$$

Для обчислення вибіркової дисперсії знаходимо

$$\frac{\sum_{i=1}^k x_i^2 \cdot n_i}{n} = \frac{2,5^2 \cdot 10 + 4,5^2 \cdot 20 + 6,5^2 \cdot 30 + 8,5^2 \cdot 30 + 10,5^2 \cdot 10}{100} = 50,05.$$

$$\text{Тоді } D_e = \frac{\sum_{i=1}^k x_i^2 \cdot n_i}{n} - (\bar{x}_e)^2 = 50,05 - 6,7^2 = 5,16;$$

$$\sigma_e = \sqrt{D_e} = \sqrt{5,16} \approx 2,27;$$

$$Mo^* = 6,5; 8,5.$$

Отже, наведений статистичний розподіл вибірки буде дво-modalним.

$Me^* = 6,5$, оскільки варіанта $x = 6,5$ поділяє варіаційний ряд 2,5; 4,5; 6,5; 8,5; 10,5 на дві частини 2,5; 4,5 і 8,5; 10,5, які мають однакову кількість варіант.

Розмах варіації буде рівний

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 10,5 - 2,5 = 8.$$

Коефіцієнт варіації знайдемо, як

$$V = \frac{\sigma_g}{x_g} \cdot 100\% = \frac{2,27}{6,7} \cdot 100\% = 33,88. \blacktriangleleft$$

Інтервальний статистичний розподіл вибірки та його числові характеристики

Перелік часткових інтервалів і відповідних їм частот, або відносних частот, називають *інтервальним статистичним розподілом* вибірки.

У табличній формі цей розподіл має вигляд

h	$[x_1; x_2)$	$[x_2; x_3)$	$[x_3; x_4)$		$[x_{k-1}; x_k]$
n_i	n_1	n_2	n_3	...	n_k
w_i	w_1	w_2	w_3	...	w_k

Тут $h = x_i - x_{i-1}$ є довжиною часткового i -го інтервалу. Як правило, цей інтервал береться однаковим.

Інтервальний статистичний розподіл вибірки можна подати графічно у вигляді гістограми частот або відносних частот, а також, як і для дискретного статистичного розподілу, емпіричною функцією $F^*(x)$ (кумулятою).

Гістограма частот та відносних частот. Гістограма частот являє собою фігуру, яка складається з прямокутників, кожний з яких має основу h і висоту $\frac{n_i}{h}$.

Гістограма відносних частот є фігурою, що складається з прямо-

кутників, кожний з яких має основу завдовжки h і висоту, що дорівнює $\frac{w_i}{h}$.

$$\text{Площа гістограми частот } S = \sum_i h \cdot \frac{n_i}{h} = \sum_i n_i = n.$$

$$\text{Площа гістограми відносних частот } S = \sum_i h \cdot \frac{w_i}{h} = \sum_i w_i = 1.$$

Емпірична функція $F^(x)$ (кумулята)*. При побудові *кумуляти* $F^*(x)$ для інтервального статистичного розподілу вибірки за основу береться припущення, що ознака на кожному частинному інтервалі має рівномірну щільність імовірностей. Тому *кумулята* матиме вигляд ламаної лінії, яка зростає на кожному частковому інтервалі і наближається до одиниці.

Моду для варіаційного ряду, заданого інтервальним розподілом, знаходять за формулою

$$Mo^* = x_i + h \frac{n_{Mo} - n_{Mo-1}}{2n_{Mo} - n_{Mo-1} + n_{Mo+1}},$$

де x_i – початок модального інтервалу (тобто такого, що містить моду); n_{Mo} – частота модального інтервалу; n_{Mo-1} – частота інтервалу, що передує модальному; n_{Mo+1} – частота інтервалу, наступного за модальним; h – довжина модального інтервалу.

Отже, для знаходження *моди* за *інтервального* розподілу вибірки спочатку потрібно визначити модальний інтервал, тобто інтервал з найбільшою частотою ознаки. Далі, виконавши розрахунки за формулою, наведеною вище, знайти значення Mo^* . Зазначимо, що коли інтервали мають різну довжину, модальним є інтервал з найбільшою щільністю, яку знаходять як відношення частоти даного інтервалу до його довжини $\frac{n_i}{h_i}$

$$Mo^* = x_i + h \frac{y_{Mo} - y_{Mo-1}}{2y_{Mo} - y_{Mo-1} + y_{Mo+1}},$$

де y_{Mo} ; y_{Mo-1} ; y_{Mo+1} – щільності відповідно модального, передуючого модальному та наступного за модальним інтервалів.

Медіана для інтервального статистичного розподілу знаходиться за формулою

$$Me^* = x_i + h \frac{0,5n - S_{Me-1}}{n_{Me}},$$

де x_i – початок медіанного інтервалу (тобто такого, що містить медіану); $n_{Me} = S_{Me} - S_{Me-1}$; S_{Me} – нагромаджена частота медіанного інтервалу; S_{Me-1} – нагромаджена частота інтервалу, що передує медіанному; h – довжина медіанного інтервалу.

Для визначення вибіркової середньої, вибіркової дисперсії та середньоквадратичного відхилення вибірки потрібно перейти від інтервального розподілу до дискретного, варіантами якого є середини

частинних інтервалів $x_i^* = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ і який має такий вигляд

$X = x_i^*$	x_1^*	x_2^*	x_3^*	...	x_k^*
n_i	n_1	n_2	n_3	...	n_k

Тоді $\bar{x}_e$, D_e , σ_e обчислюються за формулами

$$\bar{x}_e = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i^* \cdot n_i; \quad D_e = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i^* - \bar{x}_e)^2 \cdot n_i, \quad \sigma_e = \sqrt{D_e}.$$

У розв'язанні практичних задач також часто використовується

$$\text{величина } s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x}_e)^2 \cdot n_i, \quad \text{або } s^2 = \frac{n}{n-1} D_e, \quad \text{яку називають}$$

виправленою вибірковою дисперсією.

Приклади розв'язання задач

73. За заданим статистичним розподілом вибірки

$h = 10$	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
n_i	5	15	20	25	30	5

знайти функцію розподілу $F^*(x)$ та побудувати її графік.

► Знайдемо об'єм вибірки

$$n = \sum_{i=1}^k n_i = 5 + 15 + 20 + 25 + 30 + 5 = 100.$$

Використовуючи означення та властивості функції розподілу, одержимо

$$F^*(x) = W(X < x) = \frac{n_x}{n} = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 0,05, & 0 < x \leq 10; \\ 0,2, & 10 < x \leq 20; \\ 0,4, & 20 < x \leq 30; \\ 0,65, & 30 < x \leq 40; \\ 0,95, & 40 < x \leq 50; \\ 1, & 50 < x \leq 60. \end{cases}$$

Графік $F^*(x)$ зображено на рис. 19.

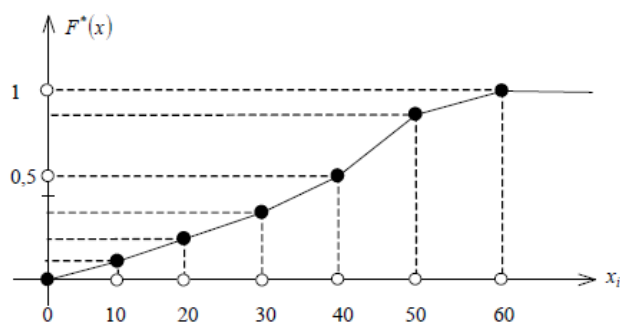


Рисунок 19 ◀

74. Інтервальний розподіл річного доходу працюючих

жінок у США (1988) подано в таблиці.

Дохід, в дол	до 5000	5000- 10000	10000- 15000	15000- 20000	20000- 25000	Понад 25000
Кількість працюючих жінок, тис. осіб	922	3813	7111	6601	4685	6676

Знайти моду та медіану.

► Знайдемо модальний інтервал. Це буде інтервал 10 000–15 000, адже його частота є максимальною – 7111 тис. осіб. Тоді, одержимо

$$\begin{aligned}
 Mo &= x_i + h \frac{n_{Mo} - n_{Mo-1}}{2n_{Mo} - n_{Mo-1} + n_{Mo+1}} = \\
 &= 10000 + 5000 \frac{7111 - 3813}{2 \cdot 7111 - 3813 - 6601} = 14330.
 \end{aligned}$$

Отже, модальний річний дохід 14 330 \$.

Знайдемо медіанний річний дохід працюючих жінок. Для цього обчислимо півсуму частот

$$0,5n = 0,5 \cdot (922 + 3813 + 7111 + 6601 + 4685 + 6676) = 14904.$$

Медіанним є інтервал 15000 – 20000, оскільки його нагромаджена частота дорівнює 18477 (перевищує 0,5n), тоді як нагромаджена частота попереднього інтервалу – 11846 (менша за 0,5n). Тоді обчислимо медіану, як

$$Me = x_i + h \frac{0,5n - S_{Me-1}}{n_{Me}} = 15000 + 5000 \cdot \frac{14904 - 11846}{6601} = 17316,3.$$

Отже, медіанний річний дохід дорівнює 17316,3 \$. Це

означає, що рівно 50 % працюючих жінок мають дохід менший за 17316,3 \$ і, відповідно, стільки саме – більший. ◀

75. Знайти вибірку середню $\bar{x}_e$, вибірку дисперсію D_e , виправлену вибірку дисперсію s^2 для статистичного розподілу вибірки

x_i	15	29	35	46	71	84
n_i	3	14	9	7	8	9

► Знайдемо об'єм вибірки

$$n = \sum_{i=1}^k n_i = 3 + 14 + 9 + 7 + 8 + 9 = 50.$$

Знайдемо вибірку середню

$$\bar{x}_e = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i \cdot n_i = \frac{1}{50} (3 \cdot 15 + 14 \cdot 29 + 9 \cdot 35 + 7 \cdot 46 + 8 \cdot 71 + 9 \cdot 84) = \frac{1}{50} \cdot 2412 = 48,24.$$

Знайдемо вибірку дисперсію

$$D_e = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^k n_i x_i^2 - n \bar{x}^2 \right) = \frac{1}{50} (3 \cdot 15^2 + 14 \cdot 29^2 + 9 \cdot 35^2 + 7 \cdot 46^2 + 8 \cdot 71^2 + 9 \cdot 84^2 - 50 \cdot 48,24^2) = \frac{1}{50} \cdot 25763,12 = 515,26.$$

Виправлена вибірку дисперсія

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_e = \frac{50}{50-1} \cdot 515,26 = 525,78. \blacktriangleleft$$

76. Інспектор відібрав 30 зразків пакетів вівсянки швидкого приготування для контролю ваги. Результати зважування (г):

28,7; 29,8; 30,6; 31,6; 29,5; 30,1; 30; 31,9; 31,7; 29,4; 29,3;
30,1; 30,4; 29,4; 29,8; 30,9; 30; 30,2; 29,8; 30,7; 30,5; 29,9; 30,6;
30,4; 29,8; 30,8; 30,1; 30,4; 30,7; 30.

Знайти вибірку середню, вибірку дисперсію та середньоквадратичне відхилення спостережуваної ознаки, згрупувавши дані в інтервальний ряд (з кроком $h = 0,5$).

► Побудуємо інтервальний ряд, і проміжні дані для обчислення вибіркової середньої та дисперсії подамо в таблиці

Вага одного пакета, г	Кількість пакетів, шт (n_i)	x_i^*	$x_i^* \cdot n_i$	$x_i^* - \bar{x}_e$	$(x_i^* - \bar{x}_e)^2$	$(x_i^* - \bar{x}_e)^2 \cdot n_i$
До 29	1	28,75	28,75	-1,48	2,1904	2,1904
29-29,5	3	29,25	87,75	-0,98	0,9604	2,8812
29,5-30	6	29,75	178,5	-0,48	0,2304	1,3824
30-30,5	10	30,25	302,5	0,02	0,0004	0,004
30,5-31	7	30,75	215,25	0,52	0,2704	1,8928
31-31,5	2	31,25	62,5	1,02	1,0404	1,0808
31,5 і більше	1	31,75	31,75	1,52	2,3104	2,3104
Разом	30	-	907	-	-	12,742

Знайдемо середню вибірку, дисперсію та середньоквадратичне відхилення вибірки за інтервальним рядом

$$\begin{aligned}\overline{x}_e &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i^* \cdot n_i = \frac{1}{30} \sum_{i=1}^7 x_i^* \cdot n_i = \frac{907}{30} = 30,23 \text{ з}; \\ D_e &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i - \overline{x}_e)^2 \cdot n_i = \frac{1}{30} \sum_{i=1}^7 (x_i - \overline{x}_e)^2 \cdot n_i = \frac{12,742}{30} = 0,425 \text{ з}^2; \\ \sigma_e &= \sqrt{D_e} = \sqrt{0,425} = 0,625 \text{ з}. \blacktriangleleft\end{aligned}$$

Завдання для самостійного розв'язання

85. При вивченні випадкової величини X у результаті 40 незалежних спостережень дістали вибірку:

10, 13, 10, 9, 9, 12, 12, 6, 7, 9, 8, 9, 11, 9, 14, 13, 9, 8, 8, 7, 10,
10, 11, 11, 11, 12, 8, 7, 9, 10, 14, 13, 8, 8, 9, 10, 11, 11, 12, 12.

Потрібно:

а) побудувати дискретний статистичний розподіл для цієї вибірки, а також полігон частот і $F^*(x)$;

б) обчислити $\overline{x}_e$, D_e , R , V ;

в) знайти Mo^* , Me^* .

86. Для обчислення середньої врожайності озимої пшениці X_i кооперативне поле площею 2000 га було поділено на 20 рівних ділянок n_i . Фактичний урожай на кожній ділянці наведено в таблиці

X_i , ц/га	25	30	35	40	45
n_i	2	3	8	4	3

Потрібно:

а) побудувати полігон відносних частот і кумуляту;

б) обчислити $\overline{x}_e$, D_e , R , V ;

в) знайти Mo^* , Me^* .

87. З допомогою радіодальноміра було здійснено 16 вимірювань однієї і тієї самої відстані. Результати вимірювання в метрах наведені у вигляді статистичного ряду:

201, 195, 207, 203, 191, 208, 198, 210, 204, 192, 195, 211, 206, 196, 208, 197.

Потрібно:

а) побудувати дискретний статистичний розподіл для цієї вибірки, а також полігон частот і $F^*(x)$;

б) обчислити $\overline{x}_e$, D_e , R , V ;

в) знайти Mo^* , Me^* .

88. Задано вибірку: 1.6, 0.9, 1.2, 1.4, 1.2, 2.8, 0.7, 0.9, 1.1, 0.6, 1.8, 1.8, 1.1, 2.4, 2.7, 2.5., 3.0, 3.1, 1.7, 3.5, 2.4, 1.8, 0.0, 2.3, 2.3. Побудувати інтервальний статистичний ряд, гістограму частот, емпіричну функцію та її графік, полігон частот і полігон відносних частот, розбивши варіаційний ряд на $\sqrt{n}$ рівних частин.

89. Задана генеральна сукупність, що характеризує річний прибуток фермерів (в тис. грн.): 15, 14, 15, 14, 16, 12, 14, 16, 14, 16, 15, 11, 10, 5, 7, 8, 5, 7, 9, 10.

Потрібно:

- а) побудувати статистичний ряд вибірки та емпіричну функцію розподілу;
- б) побудувати полігон частот та гістограму, розбивши інтервал на 4 рівних підінтервали.

5.2. Статистичні оцінки параметрів генеральної сукупності

Математична статистика займається описом та вивченням результатів дослідів та перевіркою відповідних їм математичних моделей, що містять поняття ймовірності. Відомо, що в математичній статистиці конструюються певні функції від випадкових величин $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, поведінка яких із збільшенням n може бути досить точно передбачена. Такі функції $Y = \varphi(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ називають статистиками.

Повною характеристикою випадкової величини є її *закон розподілу*. Для його дослідного встановлення потрібні значні витрати ресурсів і часу. Часто, однак, можна передбачити вигляд закону (пуассонівський, показниковий, нормальний і т.д.). Тоді постає питання про оцінку параметрів, що характеризують цей закон, на підставі значень $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, отриманих у результаті спостережень. При цьому будується певна *статистика* (випадкова величина!), конкретна реалізація якої приймається за числове значення параметра, що оцінюється. Оцінки параметрів, отже, є певними статистиками, тобто випадковими величинами, які в результаті дослідів набувають конкретних числових значень (реалізацій).

Застосувавши вибіровий метод, обчислюють статистичні характеристики вибірки: середні значення (*вибірове середнє, середнє геометричне*), міри розсіяння (*вибірову дисперсію, середнє квадратичне*

відхилення, розмах вибірки, коефіцієнт варіації) і т.д. За значенням цих характеристик робиться висновок про відповідні параметри генеральної сукупності (даються статистичні оцінки параметрів генеральної сукупності).

Нехай спостерігається випадкова величина X , теоретичний закон розподілу якої містить невідомий параметр θ . Потрібно знайти відповідну оцінку для параметра θ за результатами n незалежних випробувань, в кожному з яких величина X набуває певних значень x_i ($i = \overline{1, n}$). Позначимо через θ^* оцінку для параметра θ . Очевидно, що

$$\theta^* = \theta^*(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

Розв'язання задачі про "найкращу" оцінку невідомого параметра і є предметом статистичного оцінювання. При цьому розрізняють два способи оцінки параметрів: *точковий* та *інтервальний*.

Точковою називають оцінку, що визначається одним числом, навколо якого групуються значення досліджуваного параметра.

Інтервальною називають оцінку, що визначається двома числами – кінцями інтервалу, в якому з наперед заданою ймовірністю знаходиться невідоме значення параметра.

Точкові оцінки

Часто на практиці трапляється так, що за точкову оцінку невідомого параметра можна взяти не одну, а декілька різних числових характеристик вибірки, тобто функцій від вибірки. Серед цих характеристик намагаються вибрати "найкращу" (що не завжди вдається), яка задовольняє умови незміщеності, ефективності та слушності.

Незміщеною називають статистичну оцінку θ^* , математичне сподівання якої дорівнює оцінюваному параметру θ незалежно від обсягу вибірки, тобто $M(\theta^*) = \theta$.

Ефективною називають статистичну оцінку θ^* , яка за заданого обсягу вибірки має найменшу з можливих дисперсію.

Слушною (обігрунтованою, умотивованою або консистентною) називають статистичну оцінку, яка із необмеженим зростанням обсягу вибірки ($n \rightarrow \infty$) прямує за ймовірністю до оцінюваного параметра

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\theta^* - \theta| < \varepsilon) = 1 \quad (\varepsilon > 0).$$

Відомо, що найважливішими числовими характеристиками випадкової величини X є математичне сподівання $M(X)$ (характеристика положення випадкової величини), дисперсія $D(X)$ та середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$ (міри розсіювання навколо середнього значення). Тому природно ставити задачу про знаходження найкращих статистичних оцінок для цих параметрів. Можна показати, що для вибірки, отриманої в результаті незалежних спостережень над випадковою величиною X і заданої дискретним статистичним рядом, "найкращими" *статистичними* оцінками для невідомого математичного сподівання a і середнього квадратичного відхилення σ генеральної сукупності є відповідно *вибіркове середнє*

$$a^* = \overline{x_g} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i \cdot x_i$$

і виправлене вибіркове *середнє квадратичне відхилення* $\sigma^* = S = \sqrt{\frac{1}{n-1} D_g}$,

де D_g задається формулою

$$\sigma^* = S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^k n_i \cdot (x_i - \overline{x_g})^2}.$$

Продовжуючи задачу оцінювання, припустимо, що знайдено точкову оцінку θ^* невідомого параметра θ деякого теоретичного розподілу. У деяких випадках доцільно передбачити ще й величину помилок, що можуть виникнути внаслідок заміни числа θ його оцінкою θ^* . Тоді використовують інтервальне оцінювання, яке будується на підставі поняття надійності й інтервалу *надійності* (інтервалу *довіри*).

Надійністю оцінки параметра θ за точковою оцінкою θ^* називають ймовірність γ того, що інтервал $(\theta^* - \delta; \theta^* + \delta)$ накриває значення невідомого параметра θ .

Випадковий інтервал $(\theta^* - \delta; \theta^* + \delta)$, який із заданою ймовірністю γ накриває значення параметра θ , називається його інтервалом *надійності* (*довіри*) або γ – *надійним інтервалом*.

Зупинимось на знаходженні точкових оцінок та інтервалів надійності для невідомих параметрів неперервного (*нормального*) та дискретного (*біномного*) розподілів.

Нормальний розподіл. Нехай відомо, що випадкова величина X розподілена за *нормальним* законом зі щільністю

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Подамо способи побудови точкових оцінок та інтервалів надійності для параметрів a (математичного сподівання) і σ (середньоквадратичного відхилення) генеральної сукупності, якими визначається нормальний закон розподілу.

1. Точковою оцінкою a^* для математичного сподівання генеральної сукупності a є вибіркве середнє $\overline{x_g}$.

Інтервал надійності для a за вибірквим середнім $\overline{x_g}$, якщо σ *відоме*, знаходиться з нерівностей

$$\overline{x_g} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot t_\gamma < a < \overline{x_g} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot t_\gamma,$$

де $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot t_\gamma = \delta$ – точність оцінки γ , t_γ – таке значення аргументу t функції

Лапласа $\Phi(t)$, для якого $\Phi(t_\gamma) = \frac{\gamma}{2}$. Значення t_γ знаходять з таблиць

функції Лапласа (див. додаток 2).

Інтервал надійності для a за вибіркоvim середнім $\overline{x}_e$, якщо σ невідоме, знаходиться з нерівностей

$$\overline{x}_e - \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot t_\gamma < a < \overline{x}_e + \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot t_\gamma,$$

де S – виправлене вибіркoве середньоквадратичне відхилення, $\frac{S}{\sqrt{n}} \cdot t_\gamma = \delta$ –

точність оцінки γ , t_γ – таке значення аргументу t розподілу Стюдента

$S(t, n)$, для якого $S(t, n) = \frac{\gamma}{2}$, γ – задана ймовірність. Значення t_γ

знаходять з таблиць для розподілу Стюдента (див. додаток 3).

2. Точковою оцінкою σ^* для середньоквадратичного відхилення σ генеральної сукупності є виправлене вибіркoве середньоквадратичне відхилення S .

Інтервал надійності для σ за виправленим вибіркoвим середньоквадратичним відхиленням S знаходиться з нерівностей

$$S \cdot (1 - q_\gamma) < \sigma < S \cdot (1 + q_\gamma), \quad \text{якщо } q_\gamma < 1,$$

або

$$0 < \sigma < S \cdot (1 + q_\gamma), \quad \text{якщо } q_\gamma > 1,$$

де параметр q_γ певним чином пов'язаний з розподілом χ^2 і може бути знайдений з відповідно складених таблиць (див. додаток 4).

Біномний розподіл. Нехай проводять незалежні випробування з невідомою ймовірністю p появи події A у кожному випробуванні. Випадкова величина X – кількість появ події A в n випробуваннях описується біномним законом розподілу

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (q = 1 - p, \quad k = \overline{0, n}).$$

Точковою оцінкою параметра p біномного розподілу є відносна

частота появи події

$$W_n = \frac{m}{n},$$

де m – кількість появ події, n – загальна кількість випробувань.

Інтервал надійності (довіри) для p за відсноною частотою W_n з надійністю γ знаходиться з нерівностей

$$\frac{n}{t_\gamma^2 + n} \cdot \left[W_n + \frac{t_\gamma^2}{2n} - \Delta \right] < p < \frac{n}{t_\gamma^2 + n} \cdot \left[W_n + \frac{t_\gamma^2}{2n} + \Delta \right],$$

де $\Delta = t_\gamma \cdot \sqrt{\frac{W_n(1-W_n)}{n} + \left(\frac{t_\gamma^2}{2n}\right)^2}$, t_γ – таке значення аргумента t функції

Лапласа $\Phi(t)$, для якого $\Phi(t_\gamma) = \frac{\gamma}{2}$ (див. додаток 2), γ – задана ймовірність.

Приклади розв'язання задач

77. 200 однотипних деталей були піддані шліфуванню. Результати вимірювання наведені як дискретний статистичний розподіл поданий у табличній формі

X_i , мм	3,7	3,8	3,9	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4
n_i	1	22	40	79	27	26	4	1

Знайти точкові статистичні оцінки для a^* для математичного сподівання та σ^* для середньоквадратичного відхилення.

► Оскільки точковою незміщеною оцінкою a^* для

математичного сподівання генеральної сукупності a є вибіркове середнє $\overline{x_g}$, то обчислимо

$$a^* = \overline{x_g} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i \cdot x_i = \frac{1}{200} (3,7 \cdot 1 + 3,8 \cdot 22 + 3,9 \cdot 40 + 4,0 \cdot 79 + 4,1 \cdot 27 + 4,2 \cdot 26 + 4,3 \cdot 4 + 4,4 \cdot 1) = \frac{808,8}{200} = 4,004 \text{ мм.}$$

Для визначення незміщеної точкової оцінки σ^* для середньоквадратичного відхилення σ генеральної сукупності, якою є виправлене вибіркове середньоквадратичне відхилення S , обчислимо вибіркиму дисперсію

$$D_g = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^k n_i x_i^2 - n \overline{x}^2 \right) = \frac{1}{200} ((3,7)^2 \cdot 1 + (3,8)^2 \cdot 22 + (3,9)^2 \cdot 40 + (4,0)^2 \cdot 79 + (4,1)^2 \cdot 27 + (4,2)^2 \cdot 26 + (4,3)^2 \cdot 4 + (4,4)^2 \cdot 1) - (4,004)^2 = 0,015984.$$

Тоді точкова незміщена статистична оцінка для середньоквадратичного відхилення

$$\sigma^* = S = \sqrt{\frac{200}{200-1} \cdot 0,015984} = 0,127. \blacktriangleleft$$

78. Граничне навантаження на сталевий болт x_i , що вимірювалось в лабораторних умовах, задано як інтервальний статистичний ряд

$x_i,$ $\text{кг} / \text{мм}^2$	4,5-	5,5-	6,5-	7,5-	8,5-	9,5-	10,5-	11,5-	12,5-	13,5-
	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5	10,5	11,5	12,5	13,5	14,5
n_i	40	32	28	24	20	18	16	12	8	4

Знайти точкові статистичні оцінки a^* для математичного

сподівання та σ^* для середньоквадратичного відхилення.

► Для визначення точкових незміщених статистичних оцінок a^* та σ^* перейдемо від інтервального статистичного розподілу до дискретного, який набере вигляду

$x_i^* = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
n_i	40	32	28	24	20	18	16	12	8	4

Обчислимо об'єм вибірки

$$n = \sum_{i=1}^k n_i = 40 + 32 + 28 + 24 + 20 + 18 + 16 + 12 + 8 + 4 = 202.$$

Обчислимо вибіркове середнє $\overline{x_g}$

$$\begin{aligned} \overline{x_g} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i \cdot x_i^* = \frac{1}{202} (5 \cdot 40 + 6 \cdot 32 + 7 \cdot 28 + 8 \cdot 24 + 9 \cdot 20 + 10 \cdot 18 + \\ &+ 11 \cdot 16 + 12 \cdot 12 + 13 \cdot 8 + 14 \cdot 4) = \frac{1620}{202} = 8,02 \text{ кг / мм}^2. \end{aligned}$$

Отже, точкова незміщена статистична оцінка для $a^* = \overline{x_g} = 8,02 \text{ кг / мм}^2$.

Для визначення незміщеної точкової оцінки σ^* для середньоквадратичного відхилення σ генеральної сукупності, якою є виправлене вибіркове середньоквадратичне відхилення S , обчислимо вибіркиму дисперсію

$$\begin{aligned} D_g &= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^k n_i x_i^2 - n \overline{x}^2 \right) = \frac{1}{202} (5^2 \cdot 40 + 6^2 \cdot 32 + 7^2 \cdot 28 + 8^2 \cdot 24 + 9^2 \cdot 20 + \\ &+ 10^2 \cdot 18 + 11^2 \cdot 16 + 12^2 \cdot 12 + 13^2 \cdot 8 + 14^2 \cdot 4) - (8,02)^2 = 6,37 \text{ кг / мм}^2. \end{aligned}$$

Тоді точкова незміщена статистична оцінка для середньоквадратичного відхилення

$$\sigma^* = S = \sqrt{\frac{202}{202-1}} \cdot 6,37 = \sqrt{6,4} \approx 2,53 \text{ кг / мм}^2. \blacktriangleleft$$

79. Вимірявши 40 випадково відібраних після виготовлення деталей, знайшли вибірккову середню, що дорівнює 15 см. Із надійністю $\gamma = 0,99$ побудувати інтервал надійності для середньої величини всієї партії деталей, якщо генеральна дисперсія дорівнює $0,09 \text{ см}^2$.

► Інтервал надійності для a за вибіркковим середнім $\bar{x}_g$, якщо σ відоме, знаходиться з нерівностей

$$\bar{x}_g - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot t_\gamma < a < \bar{x}_g + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot t_\gamma,$$

З умови задачі маємо $\bar{x}_g = 15 \text{ см}$, $\sigma_g = \sqrt{D_g} = \sqrt{0,09} = 0,3 \text{ см}$, $n = 40$. Величина t_γ обчислюється з рівняння $\Phi(t_\gamma) = \frac{\gamma}{2} = 0,5 \cdot 0,99 = 0,495$. За таблицею значень функції Лапласа знаходимо значення $t_\gamma = 2,58$.

Тоді

$$15 - \frac{0,3}{\sqrt{40}} \cdot 2,58 < a < 15 + \frac{0,3}{\sqrt{40}} \cdot 2,58;$$

$$14,88 < a < 15,12.$$

Отже, з надійністю 0,99 (99% гарантії) оцінюваний

параметр a перебуває в межах інтервалу $(14,88;15,12)$. ◀

80. З надійністю $\gamma = 0,96$ визначити інтервал довіри математичного сподівання a випадкової величини X з середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 3,4$, якщо об'єм вибірки $n = 300$ і вибіркова середня $\bar{x} = 24,35$.

► Інтервал довіри математичного сподівання a нормально розподіленої випадкової величини має вигляд

$$\bar{x}_b - \frac{t_\gamma \cdot \sigma}{\sqrt{n}} \leq a \leq \bar{x}_b + \frac{t_\gamma \cdot \sigma}{\sqrt{n}}.$$

Величину t_γ знаходимо із співвідношення

$$\Phi(t_\gamma) = \frac{\gamma}{2} = \frac{0,96}{2} = 0,48.$$

За таблицями функції Лапласа знаходимо величину t_γ

$$t_\gamma = 2,06.$$

Тоді одержимо

$$24,35 - \frac{2,06 \cdot 3,4}{\sqrt{300}} \leq a \leq 24,35 + \frac{2,06 \cdot 3,4}{\sqrt{300}};$$

$$24,35 - 0,40 \leq a \leq 24,35 + 0,40;$$

$$23,95 \leq a \leq 24,75. \quad \blacktriangleleft$$

81. Якого значення має набувати надійність оцінки γ , щоб за обсягу вибірки $n = 100$ похибка її не перевищувала 0,01 при $\sigma = 5$.

► Позначимо похибку вибірки через δ .

$$\delta = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot t_\gamma \Rightarrow t_\gamma = \frac{\delta \cdot \sqrt{n}}{\sigma} = \frac{0,01 \cdot \sqrt{100}}{5} = 0,02.$$

Тоді одержимо

$$P \left(\left| \frac{\bar{x}_g - a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right| < t_\gamma \right) = 2\Phi(t_\gamma) = 2\Phi(0,02) = 2 \cdot 0,008 = 0,016.$$

Надійність, як бачимо, дуже мала. ◀

82. У таблиці наведено відхилення діаметрів валиків, оброблених на верстаті від номінального розміру

$h = 5\text{мк}$	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25
n_i	15	75	100	50	10

Із надійністю $\gamma = 0,99$ побудувати інтервал надійності для $a^* = a$.

► Для побудови інтервалу надійності потрібно знайти $\bar{x}_g$, S . Для цього від інтервального статистичного розподілу, наведеного в умові задачі, необхідно перейти до дискретного, а саме

x_i^*	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5
n_i	15	75	100	50	10

Обчислимо об'єм вибірки

$$n = \sum_{i=1}^k n_i = 15 + 75 + 100 + 50 + 10 = 250.$$

Обчислимо вибіркове середнє $\bar{x}_g$

$$\begin{aligned}\bar{x}_e &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i \cdot x_i^* = \frac{1}{202} (2,5 \cdot 15 + 7,5 \cdot 75 + 12,5 \cdot 100 + \\ &+ 17,5 \cdot 50 + 22,5 \cdot 10) = \frac{2950}{250} = 11,8.\end{aligned}$$

Обчислимо вибірккову дисперсію

$$\begin{aligned}D_e &= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^k n_i x_i^2 - n \bar{x}^2 \right) = \frac{1}{202} ((2,5)^2 \cdot 15 + (7,5)^2 \cdot 75 + (12,5)^2 \cdot 100 + \\ &+ (17,5)^2 \cdot 50 + (22,5)^2 \cdot 10) - (11,8)^2 = 161,25 - 139,24 = 22,01.\end{aligned}$$

Обчислимо виправлене середньоквадратичне відхилення S

$$S = \sqrt{\frac{n}{n-1} \cdot D_e} = \sqrt{\frac{250}{250-1} \cdot 22,01} = \sqrt{6,4} \approx 4,7.$$

З огляду на те, що обсяг вибірки великий ($n = 250$) можна вважати, що розподіл Стюдента близький до нормального закону. Тоді за таблицею значення функції Лапласа знаходимо значення t_γ

$$\Phi(t_\gamma) = 0,495 \Rightarrow t_\gamma = 2,58.$$

$$\begin{aligned}\bar{x}_e - \frac{t_\gamma \cdot s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_e + \frac{t_\gamma \cdot s}{\sqrt{n}} &\Rightarrow 11,8 - \frac{2,58 \cdot 4,7}{\sqrt{250}} < a < 11,8 + \frac{2,58 \cdot 4,7}{\sqrt{250}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 11,03 < a < 12,57.\end{aligned}$$

Звідси з надійністю $\gamma = 0,99$ (99%) можна стверджувати, що $a \in (11,03; 12,57)$. ◀

83. З надійністю $\gamma = 0,99$ побудувати інтервал надійності для σ , якщо $S = 4,5, n = 30$.

► Для побудови інтервалу надійності обчислимо значення $q_\gamma = q(\gamma; n)$ за таблицею (додаток 4) розподілу Стюдента ($\gamma = 0,99; n = 30$). Отже, $q_\gamma = 0,43$.

Врахувавши, що $q_\gamma = 0,43 < 1$ інтервал надійності для σ за виправленим вибіркоvim середньоквадратичним відхиленням S знайдемо з нерівності $S \cdot (1 - q_\gamma) < \sigma < S \cdot (1 + q_\gamma)$, $4,5 \cdot (1 - 0,43) < \sigma < 4,5 \cdot (1 + 0,43)$, $2,565 < \sigma < 6,435$. ◀

84. З надійністю $\gamma = 0,95$ визначити інтервал довіри середнього квадратичного відхилення σ нормально розподіленої випадкової величини X , якщо об'єм вибірки $n = 30$ і виправлене вибіркoве середнє квадратичне відхилення $s = 6,4$.

► За умовою маємо

$$\gamma = 0,95; n = 30; s = 6,4.$$

Інтервал довіри середньоквадратичного відхилення σ нормально розподіленої випадкової величини має вигляд

$$(1 - q) \cdot s \leq \sigma \leq (1 + q) \cdot s, \text{ якщо } q < 1;$$

$$0 \leq \sigma \leq (1 + q) \cdot s, \text{ якщо } q > 1.$$

За таблицями знаходимо величину

$$q(\gamma; n) = q(0,95; 30) = 2,045 > 1.$$

Тоді одержимо

$$0 \leq \sigma \leq (1 + 2,045) \cdot 6,4$$

$$0 \leq \sigma \leq 19,488. \blacktriangleleft$$

85. З надійністю $\gamma = 0,96$ визначити інтервал довіри ймовірності p події A (схеми повторної вибірки), якщо в 250 випробуваннях подія A здійснилась 85 раз.

► За умовою маємо $\gamma = 0,96; n = 250; m = 85$.

Знайдемо відносну частоту появи події A

$$\omega = \frac{m}{n} = \frac{85}{250} = 0,34.$$

Знайдемо t з співвідношення $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} = \frac{0,96}{2} = 0,48$.

За таблицями функції Лапласа знаходимо $t = 2,06$.

Знайдемо границі інтервалу надійності

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{n}{t^2 + n} \cdot \left[\omega + \frac{t^2}{2n} - t \cdot \sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}} + \left(\frac{t}{2n}\right)^2 \right] = \\ &= \frac{250}{2,06^2 + 250} \cdot \left[0,34 + \frac{2,06^2}{2 \cdot 250} - 2,06 \cdot \sqrt{\frac{0,34(1-0,34)}{250}} + \left(\frac{2,06}{2 \cdot 250}\right)^2 \right] = 0,282; \\ p_2 &= \frac{n}{t^2 + n} \cdot \left[\omega + \frac{t^2}{2n} + t \cdot \sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}} + \left(\frac{t}{2n}\right)^2 \right] = \\ &= \frac{250}{2,06^2 + 250} \cdot \left[0,34 + \frac{2,06^2}{2 \cdot 250} + 2,06 \cdot \sqrt{\frac{0,34(1-0,34)}{250}} + \left(\frac{2,06}{2 \cdot 250}\right)^2 \right] = 0,403. \end{aligned}$$

Тоді інтервал довіри ймовірності p події A буде наступним

$$p_1 \leq p \leq p_2 \Rightarrow 0,282 \leq p \leq 0,403. \blacktriangleleft$$

Завдання для самостійного розв'язання

90. У будинку відпочинку випадковим способом було

відібрано 20 осіб і виміряно їх зріст. Одержані результати наведено у вигляді статистичного розподілу в таблиці

$x_i, \text{см}$	165,5- 170,5	170,5- 175,5	175,5- 180,5	180,5- 185,5
n_i	4	6	8	2

Із надійністю $\gamma = 0,99$ побудувати інтервал надійності для математичного сподівання a , якщо $\sigma = 2$.

91. У 30 телевізорів була виміряна чутливість x_i . Результати вимірювань подано як дискретний статистичний розподіл

$x_i, \text{мкВ}$	200	250	300	350	400	450	500
n_i	2	7	6	8	4	2	1

Із надійністю $\gamma = 0,99$ побудувати інтервал надійності для математичного сподівання a , якщо $\sigma = 4$.

92. З надійністю $\gamma = 0,96$ визначити інтервал довіри математичного сподівання a випадкової величини X з середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 3,4$, якщо об'єм вибірки $n = 300$ і вибіркова середня $\bar{x} = 24,35$.

93. З надійністю $\gamma = 0,99$ визначити інтервал довіри математичного сподівання a нормально розподіленої випадкової величини X , якщо об'єм вибірки $n = 25$, вибіркова середня $\bar{x} = 42,346$ і виправлене вибіркове середнє квадратичне

відхилення $s = 5,62$.

94. З надійністю $\gamma = 0,95$ визначити інтервал довіри середнього квадратичного відхилення σ нормально розподіленої випадкової величини X , якщо об'єм вибірки $n = 10$ і виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення $s = 4,2$.

95. З надійністю $\gamma = 0,99$ визначити інтервал довіри ймовірності p події A (схема повторної вибірки), якщо в 300 випробуваннях подія A здійснилась 75 раз.

5.3. Статистична перевірка гіпотез

Статистичною гіпотезою H , називається будь-яке припущення відносно виду або параметрів розподілу випадкової величини X , яке може бути перевірене за результатами вибірки. *Простою* називають гіпотезу, що містить лише одне припущення. Якщо гіпотеза складається зі скінченного або нескінченного числа простих гіпотез, то вона називається *складною*. При цьому одне з припущень вибирається за основне і називається *нульовою* (основною) гіпотезою H_0 . Інші гіпотези (припущення або можливості), що суперечать нульовій, називаються *альтернативними* або *конкуруючими* гіпотезами $H_1, H_2, \dots$. Сформульовані гіпотези перевіряють за допомогою статистичних критеріїв, тобто правил, які встановлюють, коли отримане розходження між припущеним теоретичним і дослідним (вибіркою) розподілами слід вважати несуттєвим, випадковим і прийняти висунуту гіпотезу H_0 , а коли – суттєвим, не випадковим то нульову гіпотезу слід відкинути.

Статистичним критерієм називають випадкову величину $K(X)$, яка

служить для перевірки нульової гіпотези.

Емпіричним (спостережним) значенням $K_{\text{спос.}}$ називають значення критерію, що обчислене за даними вибірки.

Критичною областю називають множину Ω_0 значень критерію, при яких нульову гіпотезу відкидають. Якщо спостережне значення критерію не належить критичній області, то H_0 приймається. Вірний висновок може бути прийнятий двома способами: коли гіпотеза H_0 приймається, тому що вона вірна, і коли гіпотеза H_0 відкидається, тому що вона хибна. При цьому можливі два типи помилок. Коли відкидається гіпотеза H_0 , коли вона вірна, а приймається гіпотеза H_1 , то має місце *помилка першого роду*. Її ймовірність називають рівнем значущості і позначають через α . Допустима ймовірність похибки першого роду близька до нуля і найбільш вживані такі її значення: 0,05; 0,01; 0,001.

Помилка другого роду полягає в прийнятті гіпотези H_0 , коли вона невірна, а вірна насправді гіпотеза H_1 . Ймовірність похибки другого роду позначають через β . Ймовірність попадання критерію в критичну область, коли вірна конкуруюча гіпотеза або ймовірність того, що гіпотеза H_0 буде відкинута, коли вірна конкуруюча гіпотеза, називається *потужністю критерію*.

Отже, потужність критерію $\delta = 1 - \beta$ – ймовірність нездійснення помилки другого роду. Чим більша потужність критерію, тим менша ймовірність прийняття невірної гіпотези.

Критичними точками (границями $K_{\text{кр}}$) називають точки, які відділяють критичну область від області прийняття гіпотези.

Перевірку *статистичної гіпотези* виконують за такою схемою.

1. Формулюють нульову гіпотезу H_0 , альтернативну їй H_1 та задають рівень значущості α .

2. Вибирають критерій $K(X)$ для перевірки гіпотези.

3. Відповідно до альтернативної гіпотези встановлюють вид критичної області. Для побудови цієї області за рівнем значущості α знаходять критичні точки $K_{кр}$.

4. За вибіркою обчислюють емпіричне (спостережуване) значення критерію $K_{спос.}$.

Приймають рішення: якщо $K_{спос.}$ потрапляє в критичну область, то H_0 відхиляють; якщо $K_{спос.}$ потрапляє в область прийняття рішення, то H_0 приймають

Перевірка гіпотези про нормальний розподіл генеральної сукупності. Критерій згоди Пірсона.

Нехай емпіричний розподіл задано у вигляді послідовності рівновіддалених варіант і відповідних їм частот

Варіанти, x_i	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_k
Емпіричні частоти, n_i	n_1	n_2	n_3	$\dots$	n_k

Для того, щоб при заданому рівні значущості α перевірити нульову гіпотезу H_0 – генеральна сукупність розподілена нормально, необхідно:

1. Обчислити вибірккову середню $\bar{x}_g$ та вибірккове середньо-квадратичне відхилення σ_g .

2. Обчислити теоретичні частоти

$$n_i = \frac{n \cdot h}{\sigma_g} \cdot \varphi(u_i),$$

де n – об'єм вибірки (сума всіх частот), h – крок (різниця між сусідніми варіантами),

$$u_i = \frac{x_i - \bar{x}_g}{\sigma_g}, \quad \varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}.$$

3. Порівняти емпіричні та теоретичні частоти за допомогою критерію Пірсона. Для цього потрібно:

а) скласти допоміжну таблицю, за допомогою якої знаходять спостережене значення критерію

$$\chi_{сп}^2 = \sum_{i=1}^q \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i},$$

б) за таблицею критичних точок розподілу χ^2 , при заданому рівні значущості α і числу ступенів вільності $k = s - 3$ (s – число груп вибірки) знаходять критичну точку $\chi_{кр}^2(\alpha; k)$ правосторонньої критичної області.

Якщо $\chi_{сп}^2 < \chi_{кр}^2$, то немає підстав відхилити гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності. Якщо $\chi_{сп}^2 > \chi_{кр}^2$, то гіпотезу відхиляють. Іншими словами, емпіричні та теоретичні частоти суттєво відрізняються.

Зауваження. Малочисельні частоти ($n_i < 5$) потрібно об'єднати; в цьому випадку і відповідні їм теоретичні частоти також потрібно додати. Якщо відбулось об'єднання частот, то при визначенні числа ступенів вільності за формулою $k = s - 3$ потрібно в якості s прийняти число груп вибірки, котрі залишились після об'єднання.

Нехай емпіричний розподіл задано у вигляді послідовності інтервалів однакової довжини і відповідних їм частот

h	$[x_1; x_2)$	$[x_2; x_3)$	$[x_3; x_4)$	$\dots$	$[x_{k-1}; x_k]$
n_i	n_1	n_2	n_3	$\dots$	n_k

Для того, щоб при заданому рівні значущості α перевірити нульову гіпотезу H_0 – генеральна сукупність розподілена нормально, необхідно:

1. Обчислити вибірккову середню $\bar{x}_e$ та вибірккове середньоквадратичне відхилення σ_e , прийнявши в якості варіант x_i^* середне

арифметичне кінців інтервалів $x_i^* = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$.

2. Пронормувати X , тобто перейти до випадкової величини $Z = \frac{X - \bar{x}_c}{\sigma_c}$, та знайти кінці інтервалів $z_i = \frac{x_i - \bar{x}_c}{\sigma_c}$, $z_{i+1} = \frac{x_{i+1} - \bar{x}_c}{\sigma_c}$, причому найменше значення Z , тобто z_1 приймають рівним $-\infty$, а найбільше z_{s+1} приймають рівним $+\infty$.

3. Обчислити теоретичні частоти

$$n'_i = n \cdot P_i,$$

де n – об'єм вибірки (сума всіх частот); $P_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$ – ймовірності попадання X в інтервали $(x_i; x_{i+1})$; $\Phi(z)$ – функція Лапласа.

4. Порівняти емпіричні та теоретичні частоти за допомогою критерію Пірсона. Для цього потрібно:

а) скласти допоміжну таблицю, за допомогою якої знаходять спостережене значення критерію

$$\chi_{cn}^2 = \sum_{i=1}^q \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i};$$

б) за таблицею критичних точок розподілу χ^2 при заданому рівні значущості α і числі ступенів вільності $k = s - 3$ (s – число груп вибірки) знаходять критичну точку $\chi_{кр}^2(\alpha; k)$ правосторонньої критичної області.

Якщо $\chi_{cn}^2 < \chi_{кр}^2$, то немає підстав відхилити гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності. Якщо $\chi_{cn}^2 > \chi_{кр}^2$, то гіпотезу відхиляють.

Приклади розв'язання задач

86. При рівні значущості $\alpha = 0,01$ перевірити гіпотезу про

нормальний розподіл ознаки X за даним інтервальним розподілом

$[x_i, x_{i+1})$	[80,90)	[90,100)	[100,110)	[110,120)	[120,130]
n_i	2	14	60	20	4

► Даний інтервальний розподіл має інтервали однакової довжини $h=10$. Побудуємо відповідний дискретний статистичний розподіл, вибравши в ролі варіант середини інтервалів x_i^* . Одержимо

x_i^*	85	95	105	115	125
n_i	2	14	60	20	4

Знайдемо вибіркове середнє $\bar{x}_g$ і середнє квадратичне відхилення σ_g . Оскільки обсяг вибірки дорівнює $n = 2 + 14 + 60 + 20 + 4 = 100$, то

$$\bar{x}_g = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^q x_i^* n_i = \frac{85 \cdot 2 + 95 \cdot 14 + 105 \cdot 60 + 115 \cdot 20 + 125 \cdot 4}{100} = 106;$$

$$D_g = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^q (x_i^*)^2 n_i - (\bar{x}_g)^2 = \frac{1}{100} (85^2 \cdot 2 + 95^2 \cdot 14 + 105^2 \cdot 60 + 115^2 \cdot 20 + 125^2 \cdot 4) - 106^2 = 11293 - 11236 = 57;$$

$$\sigma_g = \sqrt{D_g} = \sqrt{57} \approx 7,5498.$$

Для обчислення теоретичних частот за формулою (3)

знайдемо спочатку величини $u_i = \frac{x_i^* - \bar{x}_e}{\sigma_e} (i = \overline{1, 5})$:

$$u_1 = \frac{85 - 106}{7,5498} \approx -2,78; \quad u_2 = \frac{95 - 106}{7,5498} \approx -1,46;$$

$$u_3 = \frac{105 - 106}{7,5498} \approx -0,13; \quad u_4 = \frac{115 - 106}{7,5498} \approx 1,19;$$

$$u_5 = \frac{125 - 106}{7,5498} \approx 2,52.$$

За таблицею значень функції Гаусса знаходимо

$$\varphi(u_1) = \varphi(-2,78) = 0,0084; \quad \varphi(u_2) = \varphi(-1,46) = 0,1374;$$

$$\varphi(u_3) = \varphi(-0,13) = 0,3956; \quad \varphi(u_4) = \varphi(1,19) = 0,1965;$$

$$\varphi(u_5) = \varphi(2,52) = 0,0167.$$

Теоретичні частоти знаходимо за формулою $n'_i = \frac{nh}{\sigma_e} \varphi(u_i)$,

заокруглюючи одержані значення до цілих

$$n'_1 = \frac{100 \cdot 10}{7,5498} \cdot 0,0084 \approx 1; \quad n'_2 = \frac{100 \cdot 10}{7,5498} \cdot 0,1374 \approx 18;$$

$$n'_3 = \frac{100 \cdot 10}{7,5498} \cdot 0,3956 \approx 52; \quad n'_4 = \frac{100 \cdot 10}{7,5498} \cdot 0,1965 \approx 26;$$

$$n'_5 = \frac{100 \cdot 10}{7,5498} \cdot 0,0167 \approx 2.$$

Далі за формулою (4) знайдемо спостережуване значення критерію

$$\chi_{cn}^2 = \sum_{i=1}^q \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i} = \frac{(2-1)^2}{1} + \frac{(14-18)^2}{18} + \frac{(60-52)^2}{52} +$$

$$+ \frac{(20-26)^2}{26} + \frac{(4-2)^2}{2} = 6,5.$$

За рівнем значущості $\alpha = 0,01$ і за кількістю ступенів вільності $s = 5 - 3 = 2$ з таблиці додатку 5 знайдемо критичну точку $\chi_{кр}^2 = 9,2$.

Оскільки $\chi_{сп}^2 > \chi_{кр}^2$, то гіпотеза про нормальний розподіл приймається. ◀

87. Дано межі інтервалів та емпіричні частоти потрапляння вибірових значень в ці інтервали. Необхідно визначити невідомі теоретичні частоти та використовуючи критерій Пірсона (χ^2) при рівні значущості $\alpha = 0,025$, перевірити чи узгоджується гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності випадкової величини з емпіричним розподілом вибірки.

Інтервал	Частота
[-4,59; -3,45)	1
[-3,45; -2,32)	12
[-2,32; -1,18)	20
[-1,18; -0,05)	31
[-0,05; 1,09)	48
[1,09; 2,22)	39
[2,22; 3,36)	28
[3,36; 4,49)	15
[4,49; 5,63]	6

► 1. Знаходимо середини даних інтервалів

$$x_i = \frac{1}{2}(y_{i-1} + y_i),$$

де $y_i (i = 0, 9)$ – послідовні кінці інтервалів.

$$x_1 = -4,02; x_2 = -2,89; x_3 = -1,75; x_4 = -0,62; x_5 = 0,52; x_6 = 1,66; \\ x_7 = 2,79; x_8 = 3,93; x_9 = 5,06.$$

2. Обчислюємо вибірові середнє та дисперсію (скористаємось незміщеними оцінками)

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i x_i n_i; \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_i (x_i - \bar{x})^2 n_i,$$

де $n = \sum_i n_i$. Тому $n = 200$, $\bar{x} = 0,821$; $s^2 = 3,912$; $s = 1,978$.

3. Пронормуємо X , тобто перейдемо до випадкової величини $Z \left(Z = \frac{X - \bar{x}_c}{\sigma_s} \right)$, та обчислимо кінці інтервалів

$$z_i = \frac{x_i - \bar{x}_s}{\sigma_s}, \quad z_{i+1} = \frac{x_{i+1} - \bar{x}_s}{\sigma_s}. \quad \text{При цьому найменше значення } Z,$$

тобто z_1 приймаємо рівним $-\infty$, а найбільше, тобто z_{s+1} , приймаємо рівним $+\infty$.

4. Обчислюємо теоретичні частоти

$$n'_i = n \times p_i,$$

де n – об'єм вибірки (сума всіх частот), $p_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$,

$\Phi(z_i)$ – функція Лапласа.

5. Порівнюємо емпіричні та теоретичні частоти за допомогою критерію Пірсона. Результати обчислень записуємо у вигляді таблиці, яку подано нижче.

i	z_i	z_{i+1}	$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	$p_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$	$n \times p_i$	n_i	$n_i - n_i'$	$\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$
1	$-\infty$	-2,16	-0,5	-0,4846	0,0154	3,08	1	-2,08	1,405
2	-2,16	-1,59	-0,4846	-0,4441	0,0405	8,1	12	3,9	1,88
3	-1,59	-1,01	-0,4441	-0,3438	0,1003	20,06	20	-0,06	0,000
4	-1,01	-0,44	-0,3438	-0,1700	0,1738	34,76	31	-3,74	0,402
5	-0,44	0,14	-0,1700	0,0557	0,2257	45,14	48	2,86	0,181
6	0,14	0,71	0,0557	0,2611	0,2054	41,08	39	-2,08	0,105
7	0,71	1,28	0,2611	0,3997	0,1386	27,72	28	0,28	0,003
8	1,28	1,85	0,3997	0,4678	0,0681	13,62	15	1,38	0,14
9	1,85	$+\infty$	0,4678	0,5	0,0322	6,44	6	0,44	0,030
Σ					1	200	200		4,146

Якість результатів, одержаних за критерієм Пірсона, можна вважати прийнятною, якщо всі теоретичні частоти $n \cdot p_i > 5$.

Даній умові не задовольняє перший інтервал. Тому об'єднуємо його із сусіднім.

Тоді кількість інтервалів буде рівна $k = 9 - 1 = 8$.

Нові частоти

$$\begin{aligned}
n_1' &= 13; np_1' = 8,408; & n_2' &= 20; np_2' = 20,06; \\
n_3' &= 31; np_3' = 34,74; & n_4' &= 48; np_4' = 45,14; \\
n_5' &= 39; np_5' = 41,08; & n_6' &= 28; np_6' = 27,72; \\
n_7' &= 15; np_7' = 13,62; & n_8' &= 6; np_8' = 6,44;
\end{aligned}$$

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(n_i' - np_i')^2}{np_i'} = 3,368 < \chi_{0,975}^2(8-2-1) = \chi_{0,975}^2(5) = 12,8.$$

Тут $\chi_{0,975}^2(5) = 12,8$ – квантиль порядку 0,975 χ^2 – розподілу з 5 степенями вільності, яку визначаємо за таблицями. Гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності випадкової величини узгоджується з емпіричним розподілом вибірки. ◀

Завдання для самостійного розв'язання

96. При рівні значущості $\alpha = 0,05$ перевірити гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності на основі інтервального статистичного розподілу вибірки

$[x_i, x_{i+1})$	[0,4)	[4,8)	[8,12)	[12,16)	[16,20)	[20,24]
n_i	5	10	30	35	15	5

97. Дано межі інтервалів та емпіричні частоти потрапляння вибірових значень в цій інтервали.

Інтервал	Частота
[-0,49; 0,05)	4
[0,05; 0,6)	10
[0,6; 1,14)	28
[1,14; 1,68)	34

[1,68; 2,23)	40
[2,23; 2,77)	43
[2,77; 3,31)	25
[3,31; 3,86)	11
[3,86; 4,4]	5

Необхідно визначити невідомі теоретичні частоти та, використовуючи критерій Пірсона (χ^2) при рівні значущості $\alpha = 0,05$, перевірити чи узгоджується гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності випадкової величини з емпіричним розподілом вибірки.

Відповіді до завдань для самостійного розв'язування

1. а) 4; б) 18; в) 4; г) 6. 2. 900000. 3. а) 84; б) 504.

4. а) 720; б) 120. 5. а) $C_8^2 C_{42}^3$; б) $C_8^2 C_{42}^3 + C_8^3 C_{42}^2 + C_8^4 C_{42}^1 + C_8^5 C_{42}^0$.

6. а) C_{20}^5 ; б) C_4^2 ; в) $C_4^1 C_{16}^4$;

г) $C_4^1 C_{16}^5 + C_4^2 C_{16}^4 + C_4^3 C_{16}^3 + C_4^4 C_{16}^2$; д) $C_4^2 + C_{16}^2$.

7. а) $C_9^3 \cdot C_{27}^1$; б) $C_9^2 C_9^1 C_{18}^1$; в) $C_9^2 C_{27}^2$;

г) $C_{36}^1 C_{27}^1 C_4^2 C_{16}^4 + C_4^3 C_{16}^3 + C_4^4 C_{16}^2$; д) $C_4^2 + C_{16}^2$.

8. а) $A_9^3 P_2$, б) $A_{10}^8 - A_9^3 P_2$. 9. а) 9^4 ; б) A_9^4 ; в) $C_4^1 8^3$.

10. $C_{10}^5 C_5^2 C_3^3$. 11. а) $\frac{7}{22}$; б) $\frac{15}{77}$; в) $\frac{10}{77}$; г) $\frac{5}{22}$; д) 0,028; е) $\frac{6}{7}$.

12. $\frac{1}{10^4}$. 13. $\frac{1}{10}$. 14. а) 0,25; б) $\frac{C_9^2}{C_{36}^2}$; в) $\frac{C_9^2 C_9^1 C_{18}^1}{C_{36}^4}$;

$$\text{г)} \frac{C_9^1 C_9^1 C_9^1 C_9^1}{C_{36}^4}; \text{ д)} \frac{C_9^1 C_9^1 C_9^1 C_4^3}{C_{36}^3}; \text{ е)} 1 - \frac{C_9^1 C_9^1 C_9^1 C_9^1}{C_{36}^4}.$$

$$15. \frac{C_{48}^{12} C_{36}^{12} C_{24}^{12} P_4}{C_{52}^{13} C_{39}^{13} C_{26}^{13}}. \quad 16. \frac{2}{35}.$$

$$17. P(A) = \frac{8^3 \cdot C_4^1}{9^4}, P(B) = \frac{1}{9^3}, P(C) = \frac{A_9^4}{9^4}. \quad 18. 0,09. \quad 19. \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

$$20. \frac{\pi}{4}. \quad 21. 0,25; 0,75. \quad 22. 0,116; \quad 23. \text{ а) } 0,579; \text{ б) } 0,421.$$

$$24. 0,556. \quad 25. \text{ а) } 0,56; \text{ б) } 0,06; \text{ в) } 0,94; \text{ г) } 0,38. \quad 26. 0,5.$$

$$27. \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6}. \quad 28. \frac{1}{3}. \quad 29. \text{ а) } 0,6; \text{ б) } 0,583. \quad 30. 0,625. \quad 31. 0,52.$$

$$32. 0,486. \quad 33. \text{ а) } 0,267; \text{ б) } 0,375. \quad 34. 0,67. \quad 35. \text{ Так. } \quad 36. 0,947.$$

$$37. \text{ Для першого. } \quad 38. \text{ а) } 0,86. \quad \text{ б) } 0,154. \quad 39. \text{ а) } 0,041; \text{ б) } 0,495.$$

$$40. \text{ а) } 0,188; \text{ б) } 0,473. \quad 41. \text{ а) } 0,147; \text{ б) } 0,00000256; \text{ в) } 0,168;$$

$$\text{ г) } 0,99; \text{ д) } 0,9988; \text{ е) } 0,056; \text{ є) } 0,999. \quad 42. \text{ а) } 0,00048; \text{ б) } 0;$$

$$\text{ в) } 0; \text{ г) } 0,0007; \text{ д) } 0; \text{ е) } 0,7874. \quad 43. \text{ а) } 0,1563; \text{ б) } 0,0183;$$

$$\text{ в) } 0,0053; \text{ г) } 0,6289; \text{ д) } 0,4335; \text{ е) } 0,5471. \quad 44. \text{ а) } 0,273;$$

$$\text{ б) } 0,996. \quad 45. 0,721. \quad 46. \text{ а) } 0,1115; \text{ б) } 0,0001; \text{ в) } 0,006;$$

$$\text{ г) } 0,8328; \text{ д) } 0,954; \text{ е) } 0,5867; \text{ є) } 0,9999. \quad 47. 0,3. \quad 48. 37.$$

$$49. 8. \quad 50. 69. \quad 51. 2. \quad 52. \text{ а) } 0; \text{ б) } 0,0039; \text{ в) } 0,9938; \text{ г) } 0,0997;$$

$$\text{ д) } 0,6853; \text{ е) } 0; \text{ є) } 0. \quad 53. \text{ а) } 0; \text{ б) } 0,0903; \text{ в) } 0,998; \text{ г) } 0,0014;$$

$$\text{ д) } 0,0013. \quad 54. \text{ а) } 0,0037; \text{ б) } 0,0047; \text{ в) } 0,001; \text{ г) } 0,9906.$$

$$55. \text{ а) } 0,1353; \text{ б) } 0,0361; \text{ в) } 0,0166; \text{ г) } 0,9991; \text{ д) } 0,3067.$$

$$56. \text{ а) } 0,0613; \text{ б) } 0,0001; \text{ в) } 0,0187; \text{ г) } 0,9997; \text{ д) } 0,0036.$$

$$57. 0,9786. \quad 58. 0,05. \quad 59. 7225. \quad 60. 0,055. \quad 61. 20000.$$

62. $a = 0,1; 0,25; 0,8$.

63.

X	0	1	2	3	4	5	6
p	0,047	0,187	0,311	0,276	0,138	0,037	0,004

64.

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1; \\ 0,7, & 1 < x \leq 2; \\ 0,91, & 2 < x \leq 3; \\ 0,973, & 3 < x \leq 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

65.

X	0	1	2	3
p	0,006	0,092	0,398	0,504

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 0,006, & 0 < x \leq 1; \\ 0,098, & 1 < x \leq 2; \\ 0,496, & 2 < x \leq 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

66.

X	0	1	2	3
p	0,04	0,26	0,46	0,24

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 0,04, & 0 < x \leq 1; \\ 0,30, & 1 < x \leq 2; \\ 0,76, & 2 < x \leq 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

$$67. a = \frac{1}{2}; f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin x, & \text{якщо } x \in (0; \pi); \\ 0, & \text{якщо } x \in (0; \pi). \end{cases}$$

$$68. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ a(1 - \cos x), & 0 < x \leq \pi; \\ 1, & x > \pi; \end{cases} \quad P\left(\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

$$69. M(X) = 0,3; D(X) = 5,21; \sigma(X) \approx 2,28.$$

70.

X	0	1	2	3	4	5
P	0,001	0,0146	0,088	0,2636	0,3955	0,2373

$$M(X) = 3,75; D(X) = 0,94; \sigma(X) \approx 0,97.$$

71.

X	0	1	2
P	0,42	0,46	0,12

$$M(X) = 0,7; Mo = 1; Me = 1.$$

72.

X	-0,8	3,4
P	0,5	0,5

73. $M(X) = \frac{\pi}{2}$; $D(X) = \frac{\pi^2}{4} - 2$; $\sigma(X) \approx 0,68$; $P\left(\frac{\pi}{2} < X < \pi\right) = \frac{1}{2}$.

74. $M(X) = \frac{\pi}{2}$; $D(X) = \frac{\pi^2 - 4}{4}$, $Mo = Me = \frac{\pi}{2}$.

75. $f(x) = \frac{1}{60}$; $P(0 \leq X \leq 20) = \frac{1}{3}$.

76. $M(X) = 6$; $D(X) = 3$; $\sigma(X) \approx 1,73$.

77. а) 0,5328; б) 0,9973. 78. 0,68.

79. $M(X) = 0,1$; $D(X) = 0,01$; $\sigma(X) \approx 0,1$.

80.

X	0	1	2	3
p	0,001	0,027	0,243	0,729

$M(X) = 2,7$; $D(X) = 0,27$.

81.

X	1	2	3	4
p	0,0036	0,0487	0,2916	0,6561

$M(X) = 3,6$; $D(X) = 0,3604$.

82.

Y	-1	0	1
p	0,3	0,5	0,2

 ,

X	0	1
p	0,3	0,7

 ,

Y	-1	0	1
-----	----	---	---

 .

$P_{x=1}\{Y=Y_j\}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$
--------------------	---------------	---------------	---------------

83. $r_{xy} = -0,218$. **84.** $a = 3$; $r_{xy} = 0$. **85.** $\bar{x}_g = 10$; $\sigma_g = 2$.

86. $\bar{x}_g = 35,75$; $\sigma_g = 0,576$. **87.** $\bar{x}_g = 201$; $\sigma_g = 13,85$.

90. $a \in (173,81;176,19)$. **91.** $a \in (376;380,27)$.

92. $a \in (23,95;24,75)$. **93.** $a \in (376;380,27)$. **94.** $\sigma \in (0;13,692)$.

95. $p \in (0,202;0,305)$. **96.** Приймається. **97.** Приймається.

Додаток 1.

Таблиця значень функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013

Продовження додатку 1.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Додаток 2.

Таблиця значень функції $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-x^2/2} dx$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,24	0,0948	0,48	0,1844	0,72	0,2642
0,01	0,0040	0,25	0,0987	0,49	0,1879	0,73	0,2673
0,02	0,0080	0,26	0,1026	0,50	0,1915	0,74	0,2703
0,03	0,0120	0,27	0,1064	0,51	0,1950	0,75	0,2734
0,04	0,0160	0,28	0,1103	0,52	0,1985	0,76	0,2764
0,05	0,0199	0,29	0,1141	0,53	0,2019	0,77	0,2794
0,06	0,0239	0,30	0,1179	0,54	0,2054	0,78	0,2823
0,07	0,0279	0,31	0,1217	0,55	0,2088	0,79	0,2852
0,08	0,0319	0,32	0,1255	0,56	0,2123	0,80	0,2881
0,09	0,0359	0,33	0,1293	0,57	0,2157	0,81	0,2910
0,10	0,0398	0,34	0,1331	0,58	0,2190	0,82	0,2939
0,11	0,0438	0,35	0,1368	0,59	0,2224	0,83	0,2967
0,12	0,0478	0,36	0,1406	0,60	0,2257	0,84	0,2995
0,13	0,0517	0,37	0,1443	0,61	0,2291	0,85	0,3023
0,14	0,0557	0,38	0,1480	0,62	0,2324	0,86	0,3051
0,15	0,0596	0,39	0,1517	0,63	0,2357	0,87	0,3078
0,16	0,0636	0,40	0,1554	0,64	0,2389	0,88	0,3106
0,17	0,0675	0,41	0,1591	0,65	0,2422	0,89	0,3133
0,18	0,0714	0,42	0,1628	0,66	0,2454	0,90	0,3159
0,19	0,0753	0,43	0,1664	0,67	0,2486	0,91	0,3186
0,20	0,0793	0,44	0,1700	0,68	0,2517	0,92	0,3212
0,21	0,0832	0,45	0,1736	0,69	0,2549	0,93	0,3238
0,22	0,0871	0,46	0,1772	0,70	0,2580	0,94	0,3264
0,23	0,0910	0,47	0,1808	0,71	0,2611	0,95	0,3289

Продовження додатку 2.

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,96	0,3315	1,37	0,4147	1,78	0,4625	2,36	0,4909
0,97	0,3340	1,38	0,4162	1,79	0,4633	2,38	0,4913
0,98	0,3365	1,39	0,4177	1,80	0,4641	2,40	0,4918
0,99	0,3389	1,40	0,4192	1,81	0,4649	2,42	0,4922
1,00	0,3413	1,41	0,4207	1,82	0,4656	2,44	0,4927
1,01	0,3438	1,42	0,4222	1,83	0,4664	2,46	0,4931
1,02	0,3461	1,43	0,4236	1,84	0,4671	2,48	0,4934
1,03	0,3485	1,44	0,4251	1,85	0,4678	2,50	0,4938
1,04	0,3508	1,45	0,4265	1,86	0,4686	2,52	0,4941
1,05	0,3531	1,46	0,4279	1,87	0,4693	2,54	0,4945
1,06	0,3554	1,47	0,4292	1,88	0,4699	2,56	0,4948
1,07	0,3577	1,48	0,4306	1,89	0,4706	2,58	0,4951
1,08	0,3599	1,49	0,4319	1,90	0,4713	2,60	0,4953
1,09	0,3621	1,50	0,4332	1,91	0,4719	2,62	0,4956
1,10	0,3643	1,51	0,4345	1,92	0,4726	2,64	0,4959
1,11	0,3665	1,52	0,4357	1,93	0,4732	2,66	0,4961
1,12	0,3686	1,53	0,4370	1,94	0,4738	2,68	0,4963
1,13	0,3708	1,54	0,4382	1,95	0,4744	2,70	0,4965
1,14	0,3729	1,55	0,4394	1,96	0,4750	2,72	0,4967
1,15	0,3749	1,56	0,4406	1,97	0,4756	2,74	0,4969
1,16	0,3770	1,57	0,4418	1,98	0,4761	2,76	0,4971
1,17	0,3790	1,58	0,4429	1,99	0,4767	2,78	0,4973
1,18	0,3810	1,59	0,4441	2,00	0,4772	2,80	0,4974
1,19	0,3830	1,60	0,4452	2,02	0,4783	2,82	0,4976
1,20	0,3849	1,61	0,4463	2,04	0,4793	2,84	0,4977
1,21	0,3869	1,62	0,4474	2,06	0,4803	2,86	0,4979
1,22	0,3883	1,63	0,4484	2,08	0,4812	2,88	0,4980
1,23	0,3907	1,64	0,4495	2,10	0,4821	2,90	0,4981
1,24	0,3925	1,65	0,4505	2,12	0,4830	2,92	0,4982
1,25	0,3944	1,66	0,4515	2,14	0,4838	2,94	0,4984
1,26	0,3962	1,67	0,4525	2,16	0,4846	2,96	0,4985
1,27	0,3980	1,68	0,4535	2,18	0,4854	2,98	0,4986
1,28	0,3997	1,69	0,4545	2,20	0,4861	3,00	0,49865
1,29	0,4015	1,70	0,4554	2,22	0,4868	3,20	0,49931
1,30	0,4032	1,71	0,4564	2,24	0,4875	3,40	0,49966
1,31	0,4049	1,72	0,4573	2,26	0,4881	3,60	0,499841
1,32	0,4066	1,73	0,4582	2,28	0,4887	3,80	0,499928
1,33	0,4082	1,74	0,4591	2,30	0,4893	4,00	0,499968
1,34	0,4099	1,75	0,4599	2,32	0,4898	4,50	0,499997
1,35	0,4115	1,76	0,4608	2,34	0,4904	5,00	0,499997
1,36	0,4131	1,77	0,4616				

Додаток 3.

Таблиця значень $t_{\gamma} = t(\gamma, n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,001	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Додаток 4.

Таблиця значень $q = q(\gamma, n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Додаток 5.

Критичні точки розподілу χ^2

Число ступенів вільності k	Рівень значущості α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Література

1. Вища математика: Підручник: У 2 кн. – 2-е вид., перероб. і доп. – К.: Либідь, 2003. – Кн.1. Основні розділи / Г.Й. Призва, В.В. Плахотник, Л.Д. Гординський та ін.; За ред. Г.Л. Кулініча. – 400с. – Кн.2. Спеціальні розділи / Г.Л. Кулініч, Є.Ю. Таран, В.М. Бурим та ін.; За ред. Г.Л. Кулініча. – 368 с.
2. Вища математика: основні означення, приклади і задачі: Навч. посібник. У двох частинах. Частина 1 / Г.Л. Кулініч, Л.О. Максименко, В.В. Плахотник, Г.Й. Призва. – К.: Либідь, 1992. – 288 с. – Частина 2 / І.П. Васильченко, В.Я. Данилов, А.І. Лобанов, Є.Ю. Таран. – К.: Либідь, 1992. – 256с.
3. Інтегральне числення функцій декількох змінних. Елементи теорії поля: Конспект лекцій / Б.С. Сікора, В.І Горгула, С.І Гургула, В.М. Мойсишин. – Івано-Франківськ: Факел, 2003. – 286 с.
4. Рівняння математичної фізики: основні методи, приклади, задачі: Навчальний посібник / С.Д. Івасишен, В.П. Лавренчук, Т.І. Готинчан, Л.М. Мельничук. – Чернівці: Видавничий дім «Родовід», 2016. – 212с.
5. Анциферов В.С. Уравнение математической физики: Учебное пособие. В двух частях. Часть 1. – М.: Изд-во МИНХ и ГП им. И.М. Губкина, 1975. – 191с.

6. Стійкість і коливання бурильної колони / В.М. Мойсишин, Б.Д. Борисевич, Ю.Л. Гаврилів, С.А. Зінченко. – Івано-Франківськ: Лілея – НВ, 2013. – 590с.
7. Бойко В.С., Бойко Р.В. Підземна гідрогазомеханіка: Підручник. – Львів: Апріорі, 2007. – 452с.
8. Шелковников Ф.А., Такайшвили К.Г. Сборник упражнений по операционному исчислению. Изд.2-е. – М.: Высшая школа, 1968. – 256с.
9. Сеньо П.С. Теорія ймовірності та математична статистика: Підручник. – Київ: Центр навчальної літератури, 2004. – 448 с.
10. Тестові завдання з вищої математики: Навчальний посібник / С.І. Гургула, В.М. Мойсишин, В.О. Воробйова та ін.; За ред. С.І. Гургули, В.М. Мойсишина. – Івано-Франківськ: Факел, 2008. – 737 с.
11. Збірник завдань для розрахункових робіт з вищої математики / С.І. Гургула, В.М. Мойсишин, С.С. Гулька та ін.; За ред. С.І. Гургули, В.М. Мойсишина. – Івано-Франківськ: ІФНТУНГ, 2009. – 451 с.

658

УДК 51(075.8)

П 69

**Мойсишин Василь Михайлович, Савчук Ярослав
Іванович, Бандура Андрій Іванович, Гураль Інеса Михайлівна,
Мельничук Лілія Михайлівна, Мойсеєнко Лідія Анатоліївна,
Смоловик Ліана Романівна, Тирлич Володимир Васильович**

ПРАКТИКУМ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ Частина 2

Навчальний посібник

За редакцією В.М.Мойсишина, Я.І.Савчука

Відповідальний за випуск	В.М. Мойсишин
Набір та макетування	І.Ф. Демків
Комп'ютерна правка	І.Ф. Демків

ISBN 978-966-694-411-8