ПРАКТИКУМ
З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ
ЧАСТИНА 1

За редакцією В.М.Мойсишина,
Я.І.Савчука

Рекомендовано
Вченою радою Івано-Франківського
національного технічного
університету нафти і газу

Івано-Франківськ
2022

УДК 51(075.8)
П 69

Рекомендовано Вченою радою Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу (протокол №03/634 від 28.04.2022р.)

А в т о р и:
В.М. Мойсишин, Я.І. Савчук, А.І. Бандура, К.В. Гресько, І.М. Гураль, Г.М. Кулініч, Д.Ф. Лялюк, І.Є. Овчар, Р.Й. Ріпецький, І.Р. Тимків, В.В. Тирлич, Л.М. Шегда

Р е ц е н з е н т и:
Бігун Я.Й. – завідувач кафедри прикладної математики та інформаційних технологій Чернівецького національного університету ім. Ю. Федьковича, доктор фіз.-мат. наук, професор;
Бомба А.Я. – професор кафедри комп'ютерних наук і прикладної математики Національного університету водного господарства та природокористування, доктор техн. наук, професор;
Никифорчин О.Р. – завідувач кафедри алгебри та геометрії Прикарпатського національного університету ім. В. Стефаника, доктор фіз.-мат. наук, професор.

П 69 **Практикум** з вищої математики. Частина 1: Навчальний посібник / В.М. Мойсишин, Я.І. Савчук, А.І. Бандура та ін.; За ред. В.М. Мойсишина, Я.І. Савчука. – Івано-Франківськ: ІФНТУНГ, 2022. – 623с.
ISBN 978-966-694-410-1

Навчальний посібник містить задачі та вправи з наступних розділів вищої математики: елементи лінійної алгебри, елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії, вступ до математичного аналізу, диференціальне числення функцій однієї змінної, комплексні числа і многочлени, інтегральне числення функцій однієї змінної, диференціальне числення функцій декількох змінних, диференціальні рівняння. Наводяться необхідні теоретичні відомості, приклади розв'язання задач.

Для студентів технічних ВНЗ.

УДК 51(075.8)

Зміст

Вступ

Практикум спрямований на опанування студентами технічних ВНЗ основних методів дослідження та розв’язування математичних задач.

Посібник складається з двох частин. Перша частина містить розділи: «Елементи лінійної алгебри» (підготували Ріпецький Р.Й., Савчук Я.І.), «Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії» (Тимків І.Р., Шегда Л.М.), «Вступ до математичного аналізу» (Бандура А.І.), «Диференціальне числення функцій однієї змінної» (Кулініч Г.М., Шегда Л.М.), «Комплексні числа і многочлени» (Овчар І.Є., Савчук Я.І.), «Інтегральне числення функцій однієї змінної» (Гураль І.М., Савчук Я.І.), «Диференціальне числення функцій декількох змінних» (Гресько К.В., Лялюк Д.Ф.), «Диференціальні рівняння» (Тирлич В.В., Шегда Л.М.).

Книга має наступну структуру. На початку кожного параграфа наводяться короткі теоретичні відомості (основні поняття, означення, формули, рівняння); далі подано приклади розв’язання задач різного ступеня складності, а також пропонується набір задач і вправ для самостійної роботи студентів та відповіді до них.

Зміст цього навчального посібника повністю відповідає типовій програмі з вищої математики для технічних спеціальностей. Ця книга цілком придатна і для студентів технологічних та економічних спеціальностей, які можуть пропустити ті розділи і задачі, які не входять до їхньої програми з вищої математики.

Відгуки, зауваження та побажання просимо надсилати за адресою:

кафедра вищої математики
Івано-Франківського національного
технічного університету нафти і газу;
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15.
e-mail: math@nung.edu.ua, тел. (0342) 72-71-31

60-річчю

кафедри вищої математики
Івано-Франківського
національного технічного
університету нафти і газу
присвячується

1 Елементи лінійної алгебри

§ 1. Матриці та визначники

1.1 Матриці, лінійні операції над ними

Алгебра – розділ математики, що досліджує операції, аналогічні додаванню, відніманню, множенню, діленню, які виконуються не тільки над числами, але і над іншими математичними об’єктами. У лінійній алгебрі вивчаються об’єкти трьох видів: матриці, простори і алгебраїчні форми.

Довільна сукупність чисел a_{ij}, розташована у вигляді прямокутної таблиці, яка складається з m рядків та n стовпців, називається *матрицею* розмірності $m \times n$ та позначається одним з наступних символів:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left\| a_{ij} \right\|_m^n .$$

Якщо усі елементи $a_{ij} = 0$, то така матриця називається *нульовою* і позначається Θ.

Дві матриці $A = \left\| a_{ij} \right\|_m^n$ та $B = \left\| b_{ij} \right\|_m^n$ називаються *рівними*, якщо $a_{ij} = b_{ij}$ при всіх $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Якщо кількість стовпців матриці A дорівнює 1, то таку матрицю називають матрицею-стовпцем. Аналогічно матрицю розмірності $1 \times n$ називають матрицею-рядком.

Матриця $B = \left\| b_{ji} \right\|_n^m$ називається *транспонованою* по відношенню до матриці $A = \left\| a_{ij} \right\|_m^n$, якщо $a_{ij} = b_{ji}$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$. При цьому матрицю B позначають символом A^T, а операцію переходу від матриці A до матриці A^T називають транспонуванням.

Матриці однакової розмірності можна додавати. *Сумою* матриць $A = \left\| a_{ij} \right\|_m^n$ та $B = \left\| b_{ij} \right\|_m^n$ називається матриця $A + B = \left\| a_{ij} + b_{ij} \right\|_m^n$.

Будь-яку матрицю можна множити на довільне число. *Добутком* матриці $A = \left\| a_{ij} \right\|_m^n$ на число α називається матриця $\alpha A = A\alpha = \left\| \alpha a_{ij} \right\|_m^n$.

Для довільних матриць A, B, C розмірності $m \times n$ та довільних чисел α, β легко переконатись в таких властивостях:

- $A + B = B + A$
- $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta) A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
- $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

Приклади розв’язання задач

1. Для матриць $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ знайти:

а) A^T; б) $3A$; в) $4A + B$; г) $5A - 2B$.

► а) $3A=\begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot(-3) & 3\cdot 0 & 3\cdot 2 \\ 3\cdot(-2) & 3\cdot 2 & 3\cdot 4 & 3\cdot 5 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 3 & -9 & 0 & 6 \\ -6 & 6 & 12 & 15 \end{pmatrix}$. ◄

► б) $4A+B=4\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 6 & 8 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 7 & 1 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 4 & -12 & 0 & 8 \\ -8 & 8 & 16 & 20 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 6 & 8 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 7 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & -4 & 3 & 4 \\ -8 & 8 & 23 & 21 \end{pmatrix}$. ◄

►в) $5A-2B=5\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 6 & 8 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 7 & 1 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 5 & -15 & 0 & 10 \\ -10 & 10 & 20 & 25 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 12 & 16 & 6 & -8 \\ 0 & -2 & 14 & 2 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} -7 & -31 & -6 & 18 \\ -10 & 12 & 6 & 23 \end{pmatrix}$ ◄

2. Якою повинна бути матриця A, щоб $A-A^T=\Theta$?

► По-перше, матриці A та A^T повинні бути однакової розмірності. Оскільки кількість рядків у матриці A^T така сама, як кількість стовпців у матриці A, і навпаки, то це означає, що матриця A повинна мати однакову кількість рядків та стовпців. Також елемент a_{ij} матриці A стає в матриці A^T в j-й рядок та i-й стовпець, отже, повинно бути $a_{ij}=a_{ji}$. Отже, шукана матриця має вигляд $A=\left\|a_{ij}\right\|_n^n$ і при цьому $a_{ij} = a_{ji}$ при всіх $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$. ◄

1.2 Визначник матриці

Матриця називається *квадратною*, якщо у неї кількості рядків та стовпців однакові, тобто $m = n$. Для квадратної матриці введемо поняття визначника, давши попередньо кілька означень.

Розглянемо n різних натуральних чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$, причому для всіх $k = 1, 2, \ldots, n$ виконується $1 \le c_k \le n$. Тоді запис $c_1, c_2, \ldots, c_n$ є деякою перестановкою n чисел $1, 2, \ldots, n$, яку називають перестановкою n-го порядку. Будемо казати, що числа p, k утворюють безлад в перестановці n-го порядку, якщо число p стоїть в ній лівіше від числа k і $p > k$.

Позначимо символом $P(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ кількість усіх безладів в перестановці n-го порядку $P(c_1, c_2, \ldots, c_n)$.

Визначником n-го порядку, що відповідає матриці $A = \|a_{ij}\|_n^n$, називається сума $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ доданків, яка береться по всеможливих перестановках n-го порядку:

$$\sum (-1)^{P(c_1, c_2, \ldots, c_n)} \cdot a_{1c_1} \cdot a_{2c_2} \cdot \ldots \cdot a_{nc_n} .$$

Визначник позначається одним із символів

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{vmatrix} = \det A .$$

Якщо у визначнику зібрати усі доданки, які містять елемент a_{ij}, і винести його за дужки, то величина, яка залишиться в дужках, називається алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} матриці A і позначається A_{ij}.

Якщо в матриці $A=\left\|a_{ij}\right\|_n^n$ викинути i-й рядок та j-й стовпець, то отримаємо матрицю $(n-1)$-го порядку. Визначник цієї матриці називається мінором визначника матриці A і позначається M_{ij}.

Виявляється, що $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

Сформулюємо властивості визначників n-го порядку.

• Визначник не змінюється при транспонуванні матриці, тобто $\det A=\det A^T$.

• При перестановці місцями двох стовпців визначник змінює знак.

• Визначник з двома однаковими стовпцями дорівнює нулю.

• Якщо усі елементи j-го стовпця визначника D мають вигляд $a_{ij}=\alpha b_{ij}+\beta c_{ij}$, $i=1,2,\ldots,n$, де α,β – фіксовані числа, то має місце формула $D=\alpha D_j(b)+\beta D_j(c)$, де $D_j(e)$ – визначник, отриманий з визначника D заміною j-го стовпця на стовпець з елементами e_i, $i=1,2,\ldots,n$.

• Загальний множник усіх елементів деякого стовпця визначника можна винести за знак визначника.

• Якщо деякий стовпець складається з нулів, то визначник дорівнює нулю.

• Визначник не зміниться, якщо до елементів одного із його стовпців додати відповідні елементи довільного іншого стовпця, помножені на деяке число.

• Визначник дорівнює сумі добутків елементів деякого стовпця на алгебраїчні доповнення цих елементів, тобто $D=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$, $j=1,2,\ldots,n$. Ця властивість називається розкриттям визначника за j-им стовпцем.

• Сума добутків усіх елементів деякого стовпця визначника D на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого стовпця дорівнює нулю, тобто $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{is} = 0$, $j \neq s$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Зауважимо, що усі сформульовані властивості, за винятком першої, мають місце і для рядків визначника.

З означення визначника отримуємо такі правила обчислення визначників другого та третього порядків:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Правило обчислення визначника третього порядку ще називають правилом трикутників.

Визначники четвертого і вище порядків обчислюють, розкриваючи його за якимось стовпцем чи рядком. Зрозуміло, що доцільно вибирати той стовпець чи рядок, в якому найбільше нулів.

З означення визначника легко бачимо, що коли у визначнику усі елементи, які знаходяться нижче (вище) головної діагоналі, дорівнюють нулю, то такий визначник дорівнює добутку діагональних елементів. Тому ефективним методом обчислення визначника є зведення його до трикутного вигляду, використовуючи сформульовані властивості.

Приклади розв'язання задач

3. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} \sin 3\alpha & \sin 2\alpha \\ \cos 3\alpha & \cos 2\alpha \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 5 & -4 & 3 \end{vmatrix}$.

► а) $\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 7\cdot 0 - 4\cdot 1 = -4$. ◄

► б) $\begin{vmatrix} \sin 3\alpha & \sin 2\alpha \\ \cos 3\alpha & \cos 2\alpha \end{vmatrix} = \sin 3\alpha \cdot \cos 2\alpha - \sin 2\alpha \cdot \cos 3\alpha =$

$= \sin(3\alpha - 2\alpha) = \sin\alpha$. ◄

► в) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 5 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 4\cdot 3 + (-3)\cdot(-2)\cdot 5 +$

$+1\cdot(-1)\cdot(-4) - 2\cdot(-2)\cdot(-4) - (-3)\cdot(-1)\cdot 3 - 1\cdot 4\cdot 5 = 13$. ◄

4. Розв'язати рівняння:

а) $\begin{vmatrix} 3x-2 & 4-x \\ -1 & 2x+3 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} 6^{x+1} & 3^{2-5x} \\ 2^{3x} & 6^{2x-1} \end{vmatrix} = 0$;

в) $\begin{vmatrix} 2 & -x & 1 \\ 3x & 4 & x \\ 5 & 2x & 3 \end{vmatrix} = 28$.

► а) За правилом розкриття визначника другого порядку отримуємо $(3x-2)(2x+3) - (4-x)(-1) = 0$, тобто $6x^2 + 4x - 2 = 0$. Розв'язками цього квадратного рівняння за формулами Вієта будуть $x_1 = -1,\ x_2 = \frac{1}{3}$. ◄

► б) $\begin{vmatrix} 6^{x+1} & 3^{2-5x} \\ 2^{3x} & 6^{2x-1} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 6^{x+1}\cdot 6^{2x-1} - 3^{2-5x}\cdot 2^{3x} = 0 \Leftrightarrow 6^{3x} =$

$= 3^{2-5x}\cdot 2^{3x} \Leftrightarrow 3^{3x}\cdot 2^{3x} = 3^{2-5x}\cdot 2^{3x} \Leftrightarrow 3^{3x} = 3^{2-5x} \Leftrightarrow 3x =$

$$= 2 - 5x \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \blacktriangleleft$$

► в) Розкриваючи визначник третього порядку за правилом трикутників, маємо

$$\begin{vmatrix} 2 & -x & 1 \\ 3x & 4 & x \\ 5 & 2x & 3 \end{vmatrix} = 24 + \left(-5x^2\right) + 6x^2 - 4x^2 - \left(-9x^2\right) - 20 = 6x^2 + 4 .$$

Отже, $6x^2 + 4 = 28 \Leftrightarrow 6x^2 = 24 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$. ◄

5. Обчислити визначники вищих порядків:

а) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ -3 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ -4 & 3 & 0 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 4 & -7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & 3 & 7 & -4 & 3 \\ 11 & 6 & 1 & 12 & 5 \\ 0 & 34 & 2 & -8 & 13 \\ 9 & 1 & 8 & 3 & 0 \end{vmatrix}$.

► а) Даний визначник четвертого порядку зручно розкрити за третім стовпцем

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ -3 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{31} + 3 \cdot A_{32} + 0 \cdot A_{33} + 4 \cdot A_{34} =$$

$$= 0 + 3 \cdot \left(-1\right)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} + 0 + 4 \cdot \left(-1\right)^{3+4} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -3\big(0 + (-2) + (-30) - 2 - 0 - 25\big) - 4\big(-1 + 12 + 0 - 10 - 0 - 15\big) =$$

$$= 233. \blacktriangleleft$$

$\blacktriangleright$ б) Обчислимо визначник, звівши його до трикутного вигляду. Нам буде зручно поміняти місцями перший та третій стовпці

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ -4 & 3 & 0 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & -3 \\ -2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & -5 & 3 \end{vmatrix}.$$

Замінивши в отриманому визначнику другий рядок сумою його з першим, помноженим на 2, а третій – сумою його з першим, помноженим на (-3), матимемо

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & -3 \\ -2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & -5 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & -3 \\ 0 & 11 & 8 & -5 \\ 0 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -11 & -14 & 12 \end{vmatrix}.$$

В останньому визначнику замінюємо третій рядок сумою його з другим, помноженим на $\left(-\frac{3}{11}\right)$, а останній – сумою його з другим

$$\Delta=-\begin{vmatrix}1&4&3&-3\\0&11&8&-5\\0&3&-4&2\\0&-11&-14&12\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&4&3&-3\\0&11&8&-5\\0&0&\frac{-68}{11}&\frac{37}{11}\\0&0&-6&7\end{vmatrix}.$$

І, накінець, замінивши останній рядок сумою його з третім, помноженим на $\left(-\frac{33}{34}\right)$ в останньому отриманому визначнику, дістаємо визначник трикутного вигляду, який легко обчислюємо

$$\Delta=-\begin{vmatrix}1&4&3&-3\\0&11&8&-5\\0&0&\frac{-68}{11}&\frac{37}{11}\\0&0&0&\frac{127}{34}\end{vmatrix}=-1\cdot 11\cdot\frac{-68}{11}\cdot\frac{127}{34}=254. \blacktriangleleft$$

▶ в) Замінивши в даному визначнику п’ятого порядку другий рядок сумою його з першим, помноженим на (-2), маємо

$$\begin{vmatrix}4&-7&3&2&6\\8&3&7&-4&3\\11&6&1&12&5\\0&34&2&-16&-18\\9&1&8&3&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&-7&3&2&6\\0&17&1&-8&-9\\11&6&1&12&5\\0&34&2&-16&-18\\9&1&8&3&0\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 4 & -7 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 17 & 1 & -8 & -9 \\ 11 & 6 & 1 & 12 & 5 \\ 0 & 2\cdot 17 & 2\cdot 1 & 2\cdot(-8) & 2\cdot(-9) \\ 9 & 1 & 8 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 4 & -7 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 17 & 1 & -8 & -9 \\ 11 & 6 & 1 & 12 & 5 \\ 0 & 17 & 1 & -8 & -9 \\ 9 & 1 & 8 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

бо в останньому визначнику другий та четвертий рядки однакові. ◄

1.3 Множення матриць, обернена матриця

Матриця $C = \left\| c_{ij} \right\|_m^n$ називається *добутком* матриці $A = \left\| a_{is} \right\|_m^k$ на матрицю $B = \left\| b_{sj} \right\|_k^n$, якщо її елементи визначаються за формулами

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{k} a_{is} b_{sj}\ , \quad i = 1, 2, \ldots, m\ , \quad j = 1, 2, \ldots, n\ .$$

Записуємо відповідно $C = AB$. Як бачимо, матрицю A можемо помножити на матрицю B тоді і тільки тоді, коли кількість стовпців матриці A така сама, як кількість рядків матриці B.

Квадратна матриця E розмірності $n \times n$ називається *одиничною*, якщо для довільної квадратної матриці A тієї ж розмірності має місце рівність

$$AE = EA = A\,.$$

Можна показати, що такому визначенню задовольняє єдина матриця – матриця, в якої на головній діагоналі знаходяться одиниці, а на всіх інших місцях – нулі

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сформулюємо деякі властивості добутку матриць. Якщо визначені ліві частини рівностей, то визначені і праві частини, причому:

- $(A\cdot B)C = A(B\cdot C)$
- $A(B+C) = AB + AC$
- $(A+B)C = AB + BC$
- $A(\alpha B) = (\alpha A)B = \alpha(AB)$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

Якщо для квадратної матриці $A = \|a_{ij}\|_n^n$ існує матриця B, для якої $AB = BA = E$, то матриця B називається *оберненою* до матриці A. Обернена матриця до матриці A позначається A^{-1}.

Квадратна матриця A називається *невиродженою*, якщо $\det A \neq 0$.

Для матриці $A = \|a_{ij}\|_n^n$ обернена існує тоді і тільки тоді, коли $\det A \neq 0$. При цьому

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ . & . & \dots & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

де A_{ij} – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} матриці A.

Приклади розв’язання задач

6. Перемножити матриці, якщо це можливо:

а) $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$,

$$B=\begin{pmatrix}-4\\2\\1\\5\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}5&7&3&-2\\0&-1&8&1\end{pmatrix}.$$

►а) Розмірності даних матриць такі, що можна перемножити A на B, а також B на A. Отже, відповідно до правила множення, маємо

$$AB=\begin{pmatrix}7&5&2\\1&-3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\-1&4\\3&-2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}7\cdot2+5\cdot(-1)+2\cdot3 & 7\cdot1+5\cdot4+2\cdot(-2)\\1\cdot2+(-3)\cdot(-1)+4\cdot3 & 1\cdot1+(-3)\cdot4+4\cdot(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15&23\\17&-19\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}2&1\\-1&4\\3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&5&2\\1&-3&4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot7+1\cdot1 & 2\cdot5+1\cdot(-3) & 2\cdot2+1\cdot4\\(-1)\cdot7+4\cdot1 & (-1)\cdot5+4\cdot(-3) & (-1)\cdot2+4\cdot4\\3\cdot7+(-2)\cdot1 & 3\cdot5+(-2)\cdot(-3) & 3\cdot2+(-2)\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15&7&8\\-3&-17&14\\19&21&-2\end{pmatrix}.◄$$

► б) Серед даних матриць ми можемо перемножити: A на B; B на A; C на B. Отже,

$$AB=\begin{pmatrix}-2&3&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\2\\1\\5\end{pmatrix}=\left(-2\cdot(-4)+3\cdot2+0\cdot1+4\cdot5\right)=(34),$$

$$AB=\begin{pmatrix}-4\\2\\1\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 3 & 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-4)\cdot(-2) & (-4)\cdot 3 & (-4)\cdot 0 & (-4)\cdot 4\\ 2\cdot(-2) & 2\cdot 3 & 2\cdot 0 & 2\cdot 4\\ 1\cdot(-2) & 1\cdot 3 & 1\cdot 0 & 1\cdot 4\\ 5\cdot(-2) & 5\cdot 3 & 5\cdot 0 & 5\cdot 4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}8 & -12 & 0 & -16\\ -4 & 6 & 0 & 8\\ -2 & 3 & 0 & 4\\ -10 & 15 & 0 & 20\end{pmatrix},$$

$$CB=\begin{pmatrix}5 & 7 & 3 & -2\\ 0 & -1 & 8 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\2\\1\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot(-4)+7\cdot 2+3\cdot 1+(-2)\cdot 5\\ 0\cdot(-4)+(-1)\cdot 2+8\cdot 1+1\cdot 5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-13\\11\end{pmatrix}. \blacktriangleleft$$

7. Знайти $AB-BA$, якщо $A=\begin{pmatrix}-9 & 4\\ 7 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 5\end{pmatrix}$.

► $AB-BA=\begin{pmatrix}-9 & 4\\ 7 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-9 & 4\\ 7 & 1\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}(-9)\cdot 2+4\cdot(-1) & (-9)\cdot 3+4\cdot 5\\ 7\cdot 2+1\cdot(-1) & 7\cdot 3+1\cdot 5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\cdot(-9)+3\cdot 7 & 2\cdot 4+3\cdot 1\\ (-1)\cdot(-9)+5\cdot 7 & (-1)\cdot 4+5\cdot 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-22 & -7\\ 13 & 26\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 11\\ 44 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-25 & -18\\ -31 & 25\end{pmatrix}. \blacktriangleleft$$

Як бачимо, не можна стверджувати що $AB=BA$ навіть у випадку квадратних матриць однакової розмірності.

8. Для матриці $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ -5 & -4 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ знайти обернену, якщо вона існує.

► $\det A = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ -5 & -4 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 72 + 0 + (-40) - (-48) - 45 - 0 = 35 \neq 0$,

отже, існує A^{-1}. Знаходимо алгебраїчні доповнення

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 20, \quad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 17,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -15,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -18, \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -5 & -4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -20, \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -24,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} = -9.$$

Тоді $A^{-1} = \dfrac{1}{35}\begin{pmatrix} 20 & 17 & 2 \\ -15 & -18 & 2 \\ -20 & -24 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/7 & 17/35 & 2/35 \\ -3/7 & -18/35 & 2/35 \\ -4/7 & -24/35 & -9/35 \end{pmatrix}$. ◄

1.4 Ранг матриці

Для матриці $A = \left\| a_{ij} \right\|_m^n$ зафіксуємо r рядків і таку саму кількість стовпців (зрозуміло, що $r \le \min\{m,n\}$). Елементи, які знаходяться на перетині взятих стовпців та рядків, утворять квадратну матрицю r-го порядку. Її визначник називається *мінором* r-го порядку матриці A.

Відзначимо, що мінорів одного і того ж порядку може бути кілька. Наприклад, для матриці $A = \|a_{ij}\|_m^n$ різних мінорів першого порядку буде $m \cdot n$, а для матриці розмірності 5×6 різних мінорів третього порядку буде $C_5^3 \cdot C_6^3 = 10 \cdot 20 = 200$.

Найвищий порядок відмінного від нуля мінора матриці A називається *рангом* цієї матриці і позначається символом $r(A)$. Якщо усі елементи матриці A дорівнюють нулю, то вважається, що $r(A) = 0$. Отже, рангом матриці є число r, яке задовольняє умову існування для матриці A відмінного від нуля мінора порядку r і відсутності у цієї матриці відмінних від нуля мінорів порядку більшого ніж r. Зауважимо, що ранг квадратної невиродженої матриці порядку n дорівнює n, бо для неї відмінним від нуля мінором порядку n буде її визначник.

Елементарними перетвореннями матриці називатимемо такі дії: заміна місцями двох довільних рядків (стовпців); множення довільного рядка (стовпця) на ненульове число; заміна елементів деякого рядка (стовпця) сумами цих елементів з відповідними елементами іншого рядка (стовпця), помноженими на деяке число. Співвідношення між матрицею A і матрицею B, отриманою з допомогою елементарних перетворень над A, записуватимемо $A \sim B$.

Виявляється, що ранг матриці не змінюється внаслідок елементарних перетворень над її рядками (стовпцями). Тому для знаходження рангу матриці ефективним є зведення її до так званого трапецієвидного вигляду з допомогою елементарних перетворень над рядками. Кількість ненульових рядків у матриці трапецієвидного вигляду дорівнюватиме її рангу, а, отже, і рангу заданої матриці. Будемо казати, що матриця має *трапецієвидний вигляд*, якщо для довільного її рядка усі елементи матриці, які знаходяться нижче першого ненульового елемента цього рядка, а також нижче і лівіше, дорівнюють нулю.

Приклади розв'язання задач

9. Знайти ранги матриць:

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 9 & -6 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 3 & -7 & 10 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

► а**)** На першому етапі елементарними перетвореннями над рядками матриці A доб'ємось, щоб усі елементи першого стовпця, які знаходяться нижче першого рядка, дорівнювали нулю. Для цього перший рядок залишимо без змін, другий рядок замінимо сумою його з першим, помноженим на (-3), а третій – сумою його з першим, помноженим на 4. Після цього отримаємо

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 9 & -6 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -7 \end{pmatrix} = B.$$

Матриця B ще не є матрицею трапецієвидного вигляду. Помінявши в ній місцями другий та третій рядки, матимемо

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 12 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C.$$

Матриця C має трапецієвидний вигляд і у неї два ненульові рядки. Отже, $r(A)=2$. ◄

► б) Щоб уникнути роботи з дробовими числами під час елементарних перетворень, в даній матриці поміняємо місцями перший та останній рядки

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -7 & 10 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 10 \\ 3 & -7 & 10 & -2 & 1 \end{pmatrix} = B.$$

В матриці B перший рядок залишаємо без змін, на місце другого рядка ставимо суму його з першим, помноженим на 2, на місце третього – суму його з першим, помноженим на (–2), а на місце четвертого – суму його з першим, помноженим на (-3). Отримаємо

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & 4 & -2 & -8 \end{pmatrix} = C.$$

В матриці C перші два рядки залишаємо без змін, на місце третього рядка ставимо суму його з другим, помноженим на 2, а на місце четвертого – суму його з другим, помноженим на (-4). Маємо

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -40 \end{pmatrix} = D.$$

Залишивши в матриці D перші три рядки без змін, а на місце останнього записавши суму його з третім, помноженим на 2, остаточно отримуємо

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Остання матриця має трапецієвидний вигляд і у неї три ненульові рядки. Тому $r(A) = 3$.

Дана задача уже розв'язана. Додатково переконаємось, що остання матриця трапецієвидного вигляду має мінор третього порядку, відмінний від нуля, і усі мінори четвертого порядку дорівнюють нулю. Останнє очевидно, бо будь-який мінор четвертого порядку обов'язково містить нульовий рядок. Мінор, утворений із елементів, які знаходяться на перетині перших трьох рядків та першого, другого і четвертого стовпців, дорівнює

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0. \blacktriangleleft$$

Завдання для самостійного розв'язання

1. Для матриць $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & -3 \\ 7 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ та $B=\begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ -5 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

знайти:

а) $B+B^T$; б) $B-B^T$; в) $7A^T-3B$.

2. Якою повинна бути матриця A, щоб $A+A^T=\Theta$**?**

3. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} tg\,2\alpha & -1 \\ \cos 4\alpha & \sin 4\alpha \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 7 & -8 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} a & -b & a \\ b & 1 & -b \\ a & b & a \end{vmatrix}$.

4. Розв’язати рівняння та нерівності:

а) $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \cos 4x & \sin 4x \end{vmatrix}=1$; б) $\begin{vmatrix} x+2 & 3-x \\ 5-x & 2x-4 \end{vmatrix}<x-5$;

в) $\begin{vmatrix} x & 3 & -2x \\ 1 & -x & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix}\geq 5x-15$.

5. Обчислити визначники вищих порядків:

а) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ -3 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ -4 & 3 & 0 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 4 & -7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & 3 & 7 & -4 & 3 \\ 11 & 6 & 1 & 12 & 5 \\ 0 & 34 & 2 & -8 & 13 \\ 9 & 1 & 8 & 3 & 0 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -9 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -7 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 8 & 3 & 0 & 2 & -2 & 9 \\ 6 & 4 & 0 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

6. Перемножити матриці, якщо це можливо:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$,

$D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & -4 & 2 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

7. Чи можна обчислити $AB - BA$ для матриць, заданих в задачі 6а? Якими повинні бути матриці якщо A та B, щоб можна було обчислити $AB - BA$?

8. Для заданих матриць знайти обернені, якщо вони існують:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & 4 & -8 \\ 2 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

9. Знайти ранги матриць:

а) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 7 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 4 & 1 \\ 9 & -2 & 9 \\ -8 & -11 & 2 \end{pmatrix}$;

в) $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 2 & 7 \\ 3 & -6 & 1 & -6 \end{pmatrix}$.

§ 2. Системи лінійних рівнянь

2.1 Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гаусса

В загальному випадку система m лінійних рівнянь з n невідомими має такий вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{2}$$

де $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – невідомі, які потрібно знайти (їхня кількість m не обов'язково співпадає з кількістю рівнянь n); величини $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$, які називаються коефіцієнтами системи, а також величини $b_1, b_2, \ldots, b_m$, які називаються вільними членами, вважаються відомими.

Розв'язком системи (2) називається така сукупність n чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$, яка при підстановці в систему (2) на місце невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$ перетворює усі рівняння цієї системи в тотожності.

Не кожна система лінійних рівнянь має розв'язки. Наприклад, система

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 5, \\ x_1 - 3x_2 = 8 \end{cases}$$

не має жодного розв'язку, оскільки в іншому випадку було б $5 = 8$.

Система, яка має хоча б один розв'язок, називається *сумісною*.

Систему лінійних рівнянь виду (2) досить зручно записувати в матричній формі. Для цього скористаємось означенням добутку матриць, розглянувши матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

Система рівнянь (2) означатиме рівність цього стовпця зі стовпцем

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Отже, систему рівнянь (2) одним еквівалентним їй матриччним рівнянням

$$AX = B\,. \tag{3}$$

Матриця A називається основною матрицею системи (1). Поряд з цією матрицею розглянемо так звану розширену матрицю

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Очевидно, ця матриця має розмірність $m \times (n+1)$.

Щодо сумісності системи лінійних рівнянь має місце

Теорема Кронекера-Капеллі. Система лінійних рівнянь (2) сумісна тоді і тільки тоді, коли ранги її основної та розширеної матриць рівні між собою

$$r(A) = r(\overline{A})\,. \tag{4}$$

Зауважимо, що, оскільки будь-який мінор матриці A є також мінором матриці $\overline{A}$, а кожний мінор матриці $\overline{A}$ є або мінором матриці A, або складається з елементів матриці A і елементів стовпця вільних членів, то невиконання рівності (4) рівносильне рівності $r(\overline{A}) = r(A) + 1$. Отже, рівність (4) може порушуватись хіба що за рахунок стовпця вільних членів.

Еквівалентними перетвореннями системи лінійних рівнянь називатимемо такі дії: заміна місцями двох довільних рівнянь; множення довільного рівняння на ненульове число; заміна довільного рівняння сумою цього рівняння з іншим рівнянням, помноженим на деяке число. Очевидно, внаслідок елементарних перетворень системи лінійних рівнянь її розв’язки не змінюються.

Метод Гаусса розв’язування системи лінійних рівнянь в послідовному виключенні змінних з допомогою еквівалентних перетворень над системою лінійних рівнянь. Оскільки еквівалентним перетворенням системи лінійних рівнянь відповідають елементарні перетворення над відповідними рядками розширеної матриці цієї системи, то зручно буде записати розширену матрицю і звести її до трапецієвидного вигляду з допомогою елементарних перетворень над рядками. При цьому ми зведемо одночасно до трапецієвидного вигляду і основну матрицю системи та, відповідно до теореми Кронекера-Капеллі, зробимо висновок про сумісність даної системи лінійних рівнянь. У випадку сумісності за допомогою розширеної матриці трапецієвидного вигляду записуємо систему лінійних рівнянь, яка еквівалентна заданій системі лінійних рівнянь і легко розв'язується.

Приклади розв'язання задач

10. Дослідити на сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку сумісності розв'язати їх:

а) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 7, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7x - 5y - 3z = -5, \\ 4x - y - z = -7, \\ -x - 4y - 6z = 2, \\ 5x + 3y + 5z = -9. \end{cases}$

в) $\begin{cases} -4x_2 - 5x_3 - 5x_5 = 1, \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 + 9x_4 - 7x_5 = -13, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 = -4, \\ 5x_1 - 3x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 3. \end{cases}$

► а) Запишемо розширену матрицю даної системи і з допомогою елементарних перетворень над рядками зведемо її до трапецієвидного вигляду. Одночасно зведеться до трапецієвидного вигляду і основна матриця системи. Для зручності відділятимемо останній стовпець вертикальною лінією

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&4&7\\-2&1&3&5\\3&-4&1&-1\end{array}\right).$$

Перший рядок залишимо без змін, другий рядок замінимо сумою його з першим, помноженим на 2, а третій – сумою його з першим, помноженим на (-3). Отримаємо

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&4&7\\-2&1&3&5\\3&-4&1&-1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&4&7\\0&-5&11&19\\0&5&-11&-22\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&4&7\\0&-5&11&19\\0&0&0&-3\end{array}\right).$$

Останню матрицю трапецієвидного вигляду ми отримали з попередньої, замінивши третій рядок сумою його з другим. З цієї матриці ми бачимо, що $r\left(\overline{A}\right)=3$, $r(A)=2\neq r\left(\overline{A}\right)$, тому за теоремою Кронекера-Капеллі дана система не має розв’язків. ◄

► б) Поступимо аналогічно як при розв’язуванні попереднього прикладу

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}7&-5&-3&-5\\4&-1&-1&-7\\-1&-4&-6&2\\5&3&5&-9\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}-1&-4&-6&2\\4&-1&-1&-7\\7&-5&-3&-5\\5&3&5&-9\end{array}\right)=B$$

Матрицю B ми отримали, помінявши у матриці $\overline{A}$

місцями перший та третій рядки. Перший рядок у цій матриці залишимо без змін, другий рядок замінимо сумою його з першим, помноженим на 4, третій – сумою його з першим, помноженим на 7, а четвертий – сумою його з першим, помноженим на 5. Отримаємо

$$\overline{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -4 & -6 & 2 \\ 0 & -17 & -25 & 1 \\ 0 & -33 & -45 & 9 \\ 0 & -17 & -25 & 1 \end{array} \right) = C .$$

В матриці C перші два рядки залишаємо без змін, на місце третього поставивши суму його з другим, помноженим на $\left(-33/17\right)$, а на місце четвертого – суму його з другим, помноженим на $\left(-1\right)$, матимемо

$$\overline{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -4 & -6 & 2 \\ 0 & -17 & -25 & 1 \\ 0 & 0 & 60/17 & 120/17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = D .$$

Матриця D має трапецієвидний вигляд. З неї ми бачимо, що $r\left(A\right) = r\left(\overline{A}\right) = 3 = n$. Тому наша система лінійних рівнянь сумісна, причому має єдиний розв’язок. За допомогою матриці D записуємо еквівалентну даній систему лінійних, яку легко розв’язуємо

$$\begin{cases} -x-4y-6z=2, \\ -17y-25z=1, \\ \dfrac{60}{17}z=\dfrac{120}{17}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4y-6z-2, \\ y=\dfrac{-25}{17}z-\dfrac{1}{17}, \\ z=2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2, \\ y=-3, \\ z=2. \end{cases} \blacktriangleleft$$

▶ в) Розширена матриця заданої системи чотирьох рівнянь з п'ятьма невідомими виглядатиме так

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & -4 & -5 & 0 & -5 & 1 \\ 3 & -5 & -1 & 9 & -7 & -13 \\ 1 & -3 & -2 & 3 & -4 & -4 \\ 5 & 0 & -3 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & -2 & 3 & -4 & -4 \\ 3 & -5 & -1 & 9 & -7 & -13 \\ 0 & -4 & -5 & 0 & -5 & 1 \\ 5 & 0 & -3 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right)=B.$$

Ми поміняли місцями в $\overline{A}$ перший та третій рядки і отриману матрицю позначили B. Перший рядок у цій матриці залишимо без змін, другий рядок замінимо сумою його з першим, помноженим на (-3), третій – залишимо без змін, а четвертий замінимо сумою його з першим, помноженим на (-5). Отримаємо

$$\overline{A}\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & -2 & 3 & -4 & -4 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & -4 & -5 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 15 & 7 & -12 & 22 & 23 \end{array}\right)=C.$$

У матриці C перший рядок залишаємо без змін, на місце третього ставимо суму його з другим, і, з метою уникнення роботи з дробами, на місце другого рядка ставимо різницю його, помноженого на 4, з останнім, і четвертий рядок замінюємо другим

$$\overline{A} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & -2 & 3 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 13 & 12 & -2 & -27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 5 & -1 \end{array}\right) = D.$$

У матриці D перші три рядки залишаємо без змін, а на місце останнього ставимо суму його з другим, помноженого на (-4)

$$\overline{A} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & -2 & 3 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 13 & 12 & -2 & -27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -47 & -48 & 13 & 107 \end{array}\right) = P.$$

Матриця P ще не має трапецієвидного вигляду. Але, помінявши в ній місцями два останні рядки, отримуємо матрицю трапецієвидного вигляду

$$\overline{A} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & -2 & 3 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 13 & 12 & -2 & -27 \\ 0 & 0 & -47 & -48 & 13 & 107 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

З останньої матриці, яка має трапецієвидний вигляд, бачимо, що $r(A) = r(\overline{A}) = 3 < 5 = n$. За цією матрицею записуємо систему лінійних рівнянь, еквівалентну заданій

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 = -4, \\ \quad x_2 + 13x_3 + 12x_4 - 2x_5 = -27, \\ \quad\quad -47x_3 - 48x_4 + 13x_5 = 107. \end{cases} \tag{4}$$

З останнього рівняння цієї системи знаходимо

$$x_3 = -\frac{107}{47} - \frac{48}{47}x_4 + \frac{13}{47}x_5. \tag{5}$$

З другого рівняння системи (4), враховуючи (5), отримуємо

$$x_2 = -27 - 13x_3 - 12x_4 + 2x_5 = -27 - 13\left(-\frac{107}{47} - \frac{48}{47}x_4 + \frac{13}{47}x_5\right) -$$

$$-12x_4 + 2x_5 = \frac{122}{47} + \frac{60}{47}x_4 - \frac{75}{47}x_5. \tag{6}$$

З першого рівняння системи (4) маємо $x_1 = -4 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 4x_5$. Підставивши сюди замість x_2 та x_3 вирази (5) та (6), знаходимо

$$x_1 = -\frac{36}{47} - \frac{87}{47}x_4 - \frac{11}{47}x_5. \tag{7}$$

У нашій системі невідомі x_4 та x_5 можуть приймати довільні значення. Тоді x_1, x_2 та x_3 знаходяться за формулами (5) – (7). Тому, якщо взяти $x_4 = \alpha$, $x_5 = \beta$, то

$$x_1 = -\frac{36}{47} - \frac{87}{47}\alpha - \frac{11}{47}\beta, \quad x_2 = \frac{122}{47} + \frac{60}{47}\alpha - \frac{75}{47}\beta,$$

$$x_3 = -\frac{107}{47} - \frac{48}{47}\alpha + \frac{13}{47}\beta.$$

Таким чином, дана система лінійних рівнянь має безліч розв'язків, які мають вигляд

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{36}{47}-\frac{87}{47}\alpha-\frac{11}{47}\beta\\ \frac{122}{47}+\frac{60}{47}\alpha-\frac{75}{47}\beta\\ -\frac{107}{47}-\frac{48}{47}\alpha+\frac{13}{47}\beta\\ \alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\frac{1}{47}\begin{pmatrix}-36\\122\\-107\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{\alpha}{47}\begin{pmatrix}-87\\60\\-48\\47\\0\end{pmatrix}+\frac{\beta}{47}\begin{pmatrix}-11\\-75\\13\\0\\47\end{pmatrix},$$

де α, β – довільні сталі. ◄

Ми побачили, що в задачі 8 б) система рівнянь має єдиний розв'язок і

$$r\left(A\right)=r\left(\overline{A}\right)=n\,,$$

а в задачі 8 в) система рівнянь має безліч розв'язків і

$$r\left(A\right)=r\left(\overline{A}\right)<n\,. \tag{8}$$

Це твердження має місце для будь-якої сумісної системи лінійних рівнянь.

2.2 Розв'язування систем лінійних рівнянь матричним методом

Система лінійних рівнянь називається *квадратною*, якщо у неї кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих. Отже, квадратна система лінійних рівнянь з n невідомими виглядатиме так

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{9}$$

Припустимо, що основна матриця A системи (9), яку можна записати у матричному вигляді (3), невироджена, тобто

$$\det A \neq 0 . \tag{10}$$

Тоді, як відомо, вона має обернену матрицю A^{-1} виду (1).

Домножимо зліва на A^{-1} обидві частини (3)

$$A^{-1}\left(AX\right) = A^{-1}B \Leftrightarrow \left(A^{-1}A\right)X = A^{-1}B . \tag{11}$$

Але $\left(A^{-1}A\right)X = EX = X$. Тому (11) перепишеться у вигляді

$$X = A^{-1}B . \tag{12}$$

Таким чином, якщо основна матриця квадратної системи невироджена, то знайшовши обернену матрицю для основної матриці, знаходимо розв’язок ситеми (9). В цьому полягає *матричний* метод розв’язування систем лінійних рівнянь.

Зауважимо, що, як уже згадувалось, для квадратної невиродженої матриці порядку n її ранг дорівнює n . Ранг розширеної матриці, яка має розмірність $n\times\left(n+1\right)$, не може бути більшим за n . Отже, у випадку виконання (10) тоді виконується (8) і система (9) має єдиний розв’язок.

Зрозуміло, що не кожну систему лінійних рівнянь (навіть квадратну) можна розв’язати матричним методом, на відміну від методу Гаусса.

Приклади розв’язання задач

11. Розв’язати системи лінійних рівнянь матричним методом:

а) $\begin{cases} 2x - y = -1, \\ 7x - 3y = 1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - 5y + z = 6, \\ 3x + y + 5z = 7, \\ -4x + 6y - 4z = -10. \end{cases}$

▶ а) Для основної матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$ даної квадратної системи маємо

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 7 = 1 \neq 0,$$

отже, можемо розв'язати систему матричним методом. Для матриці A шукаємо алгебраїчні доповнення

$$A_{11} = -3, \ A_{21} = -(-1) = 1, \ A_{12} = -7, \ A_{22} = 2,$$

тому

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Відповідно до (12) маємо

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3)\cdot(-1) + 1\cdot 1 \\ (-7)\cdot(-1) + 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix},$$

тобто $x = 4, \ y = 9$ – шуканий розв'язок. ◀

▶ б) Запишемо основну матрицю системи та обчислимо її визначник

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ -4 & 6 & -4 \end{pmatrix},$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ -4 & 6 & -4 \end{vmatrix} = -8+100+18-60-60+4 = -6 \neq 0 .$$

Обчислимо алгебраїчні доповнення

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = -34, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = -14, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -26 ,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} = -8, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -7 ,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 22, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 8, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 17 .$$

Тоді, враховуючи (1) та (12), знаходимо шуканий розв’язок

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = X = A^{-1}B = \frac{1}{-6}\begin{pmatrix} -34 & -14 & -26 \\ -8 & -4 & -7 \\ 22 & 8 & 17 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -10 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -42 \\ -6 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix},$$

тобто, $x = 7, \ y = 1, \ z = -3$. ◄

2.3 Розв’язування систем лінійних рівнянь методом Крамера

Нехай маємо квадратну систему лінійних рівнянь з n невідомими та невиродженою основною матрицею. Тоді, як ми встановили, її розв’язок матиме вигляд (12). Цю рівність, з врахуванням (1), можна подати у вигляді

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ . & . & \dots & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} b_1A_{11} + b_2A_{21} + \ldots + b_nA_{n1} \\ b_1A_{12} + b_2A_{22} + \ldots + b_nA_{n2} \\ \vdots \\ b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \ldots + b_nA_{nn} \end{pmatrix}.$$

Прирівнюючи ліві та праві елементи лівого і правого стовпців, маємо

$$x_k = \frac{1}{\det A}\left(b_1 A_{1k} + b_2 A_{2k} + \ldots + b_n A_{nk}\right), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \qquad (13)$$

Вираз $b_1 A_{1k} + b_2 A_{2k} + \ldots + b_n A_{nk}$ можемо розглядати як розкриття за k -им стовпцем визначника

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,k-1} & \ldots & a_{1,k+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{1,k-1} & \ldots & a_{1,k+1} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{1,k-1} & \ldots & a_{1,k+1} & \ldots & a_{mn} \end{vmatrix}. \qquad (14)$$

Ми бачимо, що визначник Δ_k отримуємо з визначника $\Delta = \det A$ основної матриці заміною в ньому k -го стовпця стовпцем вільних членів.

З урахуванням сказаного рівності (13) одержимо

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \qquad (15)$$

Формули (15) називаються формулами Крамера.

Отже, метод Крамера розв’язування квадратних систем лінійних рівнянь полягає в наступному: обчислюємо визначник Δ основної матриці, якщо $\Delta \neq 0$, то обчислюємо визначники $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$, замінюючи послідовно у визначнику Δ перший, другий, …, n -ий стовпець стовпцем вільних членів, після цього знаходимо невідомі за формулами (15).

Приклади розв’язання задач

12. Розв’язати системи лінійних рівнянь методом Крамера:

$$\text{а)}\ \begin{cases} 5x+4y=0, \\ 6x+7y=-11. \end{cases} \qquad \text{б)}\ \begin{cases} -2x+3y-4z=3, \\ x+7y-3z=-7, \\ \quad -5y+2z=7. \end{cases}$$

▶ а) Знаходимо

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 35-24=11 \neq 0,$$

тому обчислюємо

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -11 & 7 \end{vmatrix} = 44, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 6 & -11 \end{vmatrix} = -55.$$

Тоді, за формулами Крамера, отримуємо шуканий розв'язок

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{44}{11} = 4, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-55}{11} = -5. \ ◀$$

▶ б) Обчислимо визначник основної матриці даної системи лінійних рівнянь

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 1 & 7 & -3 \\ 0 & -5 & 2 \end{vmatrix} = -28+0+20-(-30)-6-0=16 \neq 0.$$

Далі, відповідно до методу Крамера, знаходимо

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -4 \\ -7 & 7 & -3 \\ 7 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 42-63-140-45+42+196=32,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 1 & -7 & -3 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 28+0-28-42-6-0=-48,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 1 & 7 & -7 \\ 0 & -5 & 7 \end{vmatrix} = -98 + 0 - 15 + 70 - 21 - 0 = -64 .$$

За формулами (15) маємо

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{32}{16} = 2 , \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-48}{16} = -3 , \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-64}{16} = -4 . \blacktriangleleft$$

2.4 Однорідні системи лінійних рівнянь

Система лінійних рівнянь називається *однорідною*, якщо усі її вільні члени дорівнюють нулю. Отже, відповідно до (2), в загальному випадку однорідна система m лінійних рівнянь з n невідомими запишеться так

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Очевидно, однорідна система завжди сумісна, бо незалежно від кількості рівнянь та кількості невідомих, а також коефіцієнтів, набір чисел

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \ldots,\ x_n = 0 \tag{16}$$

буде її розв’язком.

Це узгоджується з теоремою Кронекера-Капеллі, оскільки розширена матриця однорідної системи відрізняється від основної матриці тим, що у неї додатково ще є нульвий стовпець, тому $r(A) = r(\overline{A})$.

Розв’язок виду (16) називається нульовим або *тривіальним* розв’язком. Важливим завданням для однорідних систем лінійних рівнянь є з’ясування, чи має однорідна система нетривіальні розв’язки. Існування нетривіального розв’язку однорідної системи означає, що вона має більше одного розв’язку, тобто безліч. Як уже вказувалося, необхідною і достатньою умовою цього є виконання (8).

У випадку квадратної однорідної системи лінійних рівнянь з невиродженою основною матрицею нетривіальних розв'язків немає, отже, немає змісту розв'язувати матричним методом чи методом Крамера.

Приклади розв'язання задач

13. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} -3x_1+7x_3-2x_4-x_5=0, \\ 9x_1-5x_2-2x_3-4x_4-5x_5=0, \\ -5x_1+x_2+3x_3-x_4-x_5=0, \\ -4x_1+4x_2-x_3+5x_4+6x_5=0. \end{cases}$$

► Маємо однорідну систему чотирьох рівнянь з п'ятьма невідомими. Отже, ранг основної (як і розширеної) матриці не перевищує чотирьох, тому, навіть не розв'язуючи дану систему, можемо сказати, що вона має нетривіальні розв'язки і їх безліч. Запишемо основну матрицю системи і елементарними перетвореннями над рядками зведемо її до трапецієвидного вигляду. Розширену матрицю записувати немає потреби, бо вона відрізняється від основної нульовим стовпцем вільних членів і при елементарних перетвореннях над рядками він не змінюватиметься.

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 7 & -2 & -1 \\ 9 & -5 & -2 & -4 & -5 \\ -5 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ -4 & 4 & -1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 & -7 & -7 \\ 9 & -5 & -2 & -4 & -5 \\ -5 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ -4 & 4 & -1 & 5 & 6 \end{pmatrix}=B.$$

Замінивши в A перший рядок різницею його з четвертим, отримали еквівалентну їй матрицю, яку позначили B. Перший рядок у цій матриці залишимо без змін, другий рядок замінимо сумою його з першим, помноженим на (-9), третій – сумою його з першим, помноженим на 5, а четвертий – сумою його з першим, помноженим на 4. Отримаємо

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 & -7 & -7 \\ 0 & 31 & -74 & 59 & 58 \\ 0 & -19 & 43 & -36 & -36 \\ 0 & -12 & 31 & -23 & -22 \end{pmatrix} = C.$$

З метою уникнення роботи з великими числами у матриці C замінимо другий рядок сумою його з останнім, помноженим на 3, а четвертий – різницею його з останнім

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 & -7 & -7 \\ 0 & -5 & 19 & -10 & -8 \\ 0 & -7 & 12 & -13 & -14 \\ 0 & -12 & 31 & -23 & -22 \end{pmatrix} = D.$$

У матриці D перші два рядки залишаємо без змін, на місце останнього ставимо різницю його з сумою другого та третього, а на місце третього – суму його з другим, помноженим на $(-7/5)$

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 & -7 & -7 \\ 0 & -5 & 19 & -10 & -8 \\ 0 & 0 & -73/5 & 1 & -14/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P.$$

Матриця P має трапецієвидний вигляд. Ми бачимо, що $r\left(A\right)=3<5=n$. За цією матрицею записуємо систему лінійних рівнянь, еквівалентну заданій

$$\begin{cases} x_1-4x_2+8x_3-7x_4-7x_5=0, \\ -5x_2+19x_3-10x_4-8x_5=0, \\ \qquad -\dfrac{73}{5}x_3+x_4-\dfrac{14}{5}x_5=0. \end{cases} \tag{17}$$

З останнього рівняння цієї системи знаходимо

$$x_4=\frac{73}{5}x_3+\frac{14}{5}x_5. \tag{18}$$

З другого рівняння системи (17), враховуючи (18), отримуємо

$$x_2=\frac{19}{5}x_3-2x_4-\frac{8}{5}x_5=\frac{19}{5}x_3-2\left(\frac{73}{5}x_3+\frac{14}{5}x_5\right)-\frac{8}{5}x_5=$$

$$=-\frac{127}{5}x_3-\frac{36}{5}x_5. \tag{19}$$

З першого рівняння системи (17) маємо $x_1=4x_2-8x_3+7x_4+7x_5$. Підставивши сюди замість x_2 та x_4 вирази (18) та (19), знаходимо

$$x_1=-\frac{37}{5}x_3-\frac{11}{5}x_5. \tag{20}$$

Отже, ми з'ясували, що у нашій системі невідомі x_3 та x_5 можуть приймати довільні значення. Тоді невідомі x_1, x_2 та x_4 тоді знаходяться за формулами (18) – (20). Тому, якщо взяти $x_3 = 5\alpha$, $x_5 = 5\beta$, то $x_1 = -77\alpha - 11\beta$, $x_2 = -137\alpha - 36\beta$, $x_4 = 73\alpha + 14\beta$.

Таким чином, розв'язки даної системи лінійних рівнянь мають вигляд:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -37\alpha - 11\beta \\ -127\alpha - 36\beta \\ 5\alpha \\ 73\alpha + 14\beta \\ 5\beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -37 \\ -127 \\ 5 \\ 73 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -11 \\ -36 \\ 0 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix},$$

де α, β – довільні сталі. ◀

14. Визначити, при яких λ однорідна система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0, \\ 4x + 5y - 3z = 0, \\ 7x + \lambda y - 4z = 0 \end{cases}$$

має нетривіальні розв'язки і знайти ці розв'язки.

▶ Маємо квадратну систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими. Необхідною і достатньою умовою існування нетривіальних розв'язків такої системи є виродженість її основної матриці. Знайдемо λ, при яких $\det A = 0$,

$$0 = \det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -3 \\ 7 & \lambda & -4 \end{vmatrix} = -40 + 21 + 4\lambda + 6\lambda - 16 - 35 = 10\lambda - 70,$$

звідки $\lambda = 7$. Підставивши в систему це значення, шукаємо нетривіальні розв'язки. Очевидно, при цьому значенні дана система набуде вигляду

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0, \\ 4x + 5y - 3z = 0, \\ 7x + 7y - 4z = 0. \end{cases}$$

Елементарними перетвореннями зведемо основну матрицю цієї системи до трапецієвидного вигляду

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -3 \\ 7 & 7 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -5 \\ 0 & 21/2 & -15/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

Ми спочатку перший рядок матриці A залишили без змін, другий рядок замінили сумою його з першим, помноженим на (-2), а третій – сумою його з першим, помноженим на $(-7/2)$. Потім в отриманій матриці перші два рядки залишили без змін, а третій замінили сумою його з другим, помноженим на $(-3/2)$, і дістали таким чином матрицю B трапецієвидного вигляду, еквівалентну A. Відповідно до матриці B записуємо систему лінійних рівнянь, еквівалентну даній, і легко знаходимо розв'язок

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0, \\ 7y - 5z = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{y}{2} - \dfrac{z}{2}, \\ y = \dfrac{5}{7}z, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{z}{7}, \\ y = \dfrac{5}{7}z. \end{cases}$$

Невідому z можемо брати довільною. Взявши $z=7\alpha$, матимемо $x=-\alpha$, $y=5\alpha$. Отже, шукані розв'язки мають вигляд

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\alpha\\5\alpha\\7\alpha\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}-1\\5\\7\end{pmatrix},$$

де α – довільна стала. Очевидно, при усіх $\alpha\neq 0$ розв'язки будуть нетривіальними. ◄

Завдання для самостійного розв'язання

10. Дослідити на сумісність системи лінійних рівнянь і у випадку сумісності розв’язати їх:

а) $\begin{cases}2x-y=3,\\6x-3y=7;\end{cases}$ б) $\begin{cases}2x-y=3,\\6x-3y=9;\end{cases}$ в) $\begin{cases}4x_1-x_2=3,\\5x_1+3x_2=8,\\9x_1+2x_2=11;\end{cases}$

г) $\begin{cases}-3x+y-2z=6,\\2x+5y+4z=1,\\5x+4y+6z=-5;\end{cases}$ д) $\begin{cases}3x_3-4x_4+2x_5=7,\\5x_1+x_2-3x_3+x_5=2,\\2x_1-3x_2+x_3-x_4=0,\\7x_1-2x_2-2x_3-x_4+x_5=5.\end{cases}$

11. Розв’язати системи лінійних рівнянь матричним методом:

а) $\begin{cases}4x-13y=9,\\13x-14y=1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}2x_1+x_2-5x_3=-11,\\8x_1-4x_2+x_3=3,\\5x_1+2x_2-3x_3=0.\end{cases}$

12. Розв’язати системи лінійних рівнянь методом Крамера:

а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = -2, \\ 4x_1 + x_2 = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - 11y + 2z = 7, \\ 2x + 9y - z = 14, \\ -4x + 7y - 6z = 4. \end{cases}$

13. Розв’язати однорідні системи лінійних рівнянь:

а) $\begin{cases} 4x - y + 3z = 0, \\ 2x + 7y - z = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + y - z = 0, \\ 5x + y - 7z = 0, \\ 4x + 3y + z = 0, \\ 3x + y - 3z = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

14. Визначити, при яких λ однорідна система лінійних рівнянь має нетривіальні розв'язки, і знайти ці розв'язки:

а) $\begin{cases} 3x + 6y = 0, \\ 2x - \lambda y = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + y + 5z = 0, \\ 2x + y + 2z = 0, \\ \lambda x + y - 7z = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x - 3z = 0, \\ 3x + \lambda y - z = 0, \\ 5x + 2y - 4z = 0. \end{cases}$

Відповіді до завдань для самостійного розв'язування

1. а) $\begin{pmatrix} 14 & 7 & -4 \\ 7 & -4 & 3 \\ -4 & 3 & 12 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & 3 \\ -6 & -3 & 0 \end{pmatrix}$; **в)** $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 46 \\ -19 & 41 & -2 \\ 43 & -21 & 10 \end{pmatrix}$.

2. $A=\left\|a_{ij}\right\|_n^n$ і при цьому $a_{ij}=-a_{ji}$, $a_{ii}=0$ при всіх $i=1,2,\dots,n$, $j=1,2,\dots,n$.

3. а) 1; **б)** 12; **в)** $4ab^2$**.**

4. а) $x=\dfrac{2\pi n}{5}$, $n\in\mathbb{Z}$; **б)** $x\in(-9;2)$; **в)** $x\in[-3;4]$**.**

5. а) 0; **б)** 30; **в)** -2247; **в)** -720**.**

6. а) $AB=\begin{pmatrix}-6 & -4 & 4\\ -13 & 6 & -2\\ -4 & 1 & 0\end{pmatrix}$**,** $BA=\begin{pmatrix}-4 & -6\\ -9 & 4\end{pmatrix}$;

б) $CA=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -2 & 8 & -4\\ 4 & -16 & 8\end{pmatrix}$**,** $DC=\begin{pmatrix}-2\\ 22\\ 16\\ -8\end{pmatrix}$**,**

$BD=\begin{pmatrix}-36 & -16 & -27\end{pmatrix}$**,** $AC=(16)$**.**

7. Не можна. Матриці A та B повинні бути квадратними однакової розмірності.

8. а) $\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3/2 & -1/2\end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix}-10 & 8 & 11\\ 2 & -1 & -2\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$; **в)** не існує**.**

9. а) 2; **б)** 2; **в)** 3**.**

10. а) система не сумісна;

б) $x=\alpha$, $y=2\alpha-3$, $\alpha\in\mathbb{R}$**;**

в) $x=1$, $y=1$;

г) $x=-\frac{29}{17}+\frac{14}{17}\alpha$, $y=\frac{15}{17}-\frac{8}{17}\alpha$, $z=\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$;

д) система не сумісна.

11. а) $x=-1$, $y=-1$;

б) $x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3$.

12. а) $x_1=4,\ x_2=-7$;

б) $x=5$, $y=0$, $z=-4$

13. а) $x=-2\alpha$, $y=\alpha$, $z=3\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$;

б) $x=2\alpha$, $y=-3\alpha$, $z=\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$;

в) $x_1=-2\alpha$, $x_2=5\alpha$, $x_3=\alpha$, $x_4=3\alpha$, $x_5=\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

14. а) $\lambda=-4$: $x=-2\alpha$, $y=\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$;

б) $\lambda=-1$: $x=-3\alpha$, $y=4\alpha$, $z=\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$;

в) $\lambda=2$: $x=6\alpha$, $y=-7\alpha$, $z=4\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

2 Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії

§ 1. Елементи векторної алгебри

1.1 Лінійні операції над векторами

Вектором (геометричним вектором) називають напрямлений відрізок, у якого одна з його обмежуючих точок береться за початок, а друга – за кінець. Якщо A – початок вектора, а B – його кінець, то вектор позначається символом $\overrightarrow{AB}$. Вектор позначають також і символом $\vec{a}$. Напрям вектора на рисунку позначають стрілкою (рис. 1)

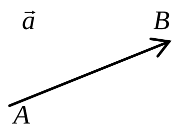


Рисунок 1

Довжиною (модулем) $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ вектора $\overrightarrow{AB}$ називається число, що дорівнює довжині відрізка AB. Якщо вектор позначають через $\vec{a}$, то його модуль позначається через $|\vec{a}|$. Вектор, у якого кінець збігається з початком, називається *нульовим* і позначається $\vec{0}$.

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, які лежать на одній прямій, або на паралельних прямих, називаються *колінеарними*. Якщо ж вектори в просторі лежать на одній площині або на паралельних площинах, то вони називаються *компланарними*.

Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, називаються *рівними*, якщо вони: 1) мають однакові модулі; 2) колінеарні; 3) напрямлені в один бік. У цьому випадку пишуть $\vec{a} = \vec{b}$.

Для кожного ненульового вектора $\vec{a}$ існує протилежний вектор, який позначається символом $-\vec{a}$. Вектор $-\vec{a}$ має модуль, який дорівнює модулю вектора $\vec{a}$, колінеарний з ним, але напрямлений у протилежний бік.

Добутком вектора $\vec{a}$ на число $\lambda \neq 0$ називається вектор $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, що колінеарний вектору $\vec{a}$, довжина якого $\left|\vec{b}\right| = |\lambda|\left|\vec{a}\right|$, а напрямок збігається з напрямком вектора $\vec{a}$ при $\lambda > 0$ і протилежний при $\lambda < 0$.

Сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ початок якого збігається з початком вектора $\vec{a}$, а кінець з кінцем вектора $\vec{b}$, за умови, що початок вектора $\vec{b}$ знаходиться в кінці вектора $\vec{a}$ (рис. 2).

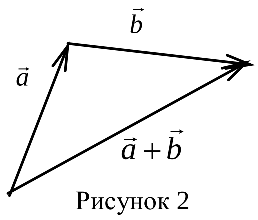


Рисунок 2

Різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, сума якого з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$.

Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається *одиничним*.

Лінійною комбінацією векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ з коефіцієнтами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ називається вектор $\vec{b} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n$. Система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ називається *лінійно незалежною*, якщо з рівності $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0}$ випливає, що $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$. Система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ *лінійно залежна*, якщо існують такі числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ не всі рівні одночасно нулеві, що $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0}$.

Два колінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – лінійно залежні й один виражається через інший, $\vec{b} = \lambda\,\vec{a}$, $\lambda \neq 0$. Два неколінеарні вектори лінійно незалежні.

Три компланарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ – лінійно залежні, а три некомпланарні – лінійно незалежні.

Будемо казати, що впорядкована трійка не компланарних векторів утворює *праву трійку*, якщо, дивлячись з кінця останнього вектора, найкоротший поворот від першого до другого здійснюється проти годинникової стрілки, при умові, що початки усіх трьох векторів суміщені в одній точці. У протилежному випадку трійку називають *лівою*.

Базисом системи векторів називають таку її підсистему, вектори якої лінійно незалежні, а будь який вектор системи лінійно виражається через вектори підсистеми.

На площині – базисом є два неколінеарні вектори $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$. Довільний вектор $\vec{a}$ що компланарний цим векторам, лінійно виражається через них: $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$ де a_1, a_2 – числа, які називаються координатами вектора $\vec{a}$ у базисі $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ і записують так: $\vec{a} = (a_1, a_2)$. У тривимірному просторі базисом є три некомпланарні вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ і $\vec{e}_3$. Будь який вектор $\vec{a}$ тривимірного простору лінійно виражається через них: $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$, де a_1, a_2, a_3 – числа, які називаються координатами вектора $\vec{a}$ у базисі $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, і записують так: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Базис називається *ортонормованим*, якщо його базисні вектори попарно перпендикулярні та мають одиничну довжину. У тривимірному просторі їх позначають векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, при умові, що $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – права трійка, а на площині – $\vec{i}$, $\vec{j}$, причому найкоротший рух від $\vec{i}$ до $\vec{j}$ здійснюється проти годинникової стрілки.

Нехай векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ утворюють ортонормований базис і є ортами координатних осей прямокутної системи координат *Oxyz*. Тоді довільний вектор $\vec{a}$ в цій системі координат однозначно розкладається $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ і має координати $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$. Якщо вектор $\overrightarrow{AB} = (a_x, a_y, a_z)$ задається двома точками простору з координатами $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$, то його координати визначаються за формулами

$$a_x = x_2 - x_1, \qquad a_y = y_2 - y_1, \qquad a_z = z_2 - z_1.$$

Довжина вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ визначається формулою

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Якщо вектор $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ утворює кути α, β, γ з координатними осями *Ox*, *Oy*, *Oz*, то косинуси цих кутів називаються *напрямними* і визначаються за формулами

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \qquad \cos\beta = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \qquad \cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

З цих формул легко отримуємо $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Нехай задано два вектори $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ і $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Тоді вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ *рівні*, якщо $a_x = b_x$, $a_y = b_y$, $a_z = b_z$, і *колінеарні*, якщо $\dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z}$.

Суму, різницю та добуток вектора на число визначають відповідними арифметичними операціями над їх координатами

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z), \qquad \lambda\vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z).$$

Нехай на прямій задано три різні точки A, B та C. Вектори $\overrightarrow{AC}$ та $\overrightarrow{CB}$ колінеарні, а тому знайдеться таке дійсне число λ, що $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \lambda \cdot \left|\overrightarrow{CB}\right|$. Число λ називається відношенням, в якому точка C ділить напрямлений відрізок AB $(\lambda \neq -1)$. Якщо відомо координати точок A і B та відношення λ, в якому точка C ділить напрямлений відрізок AB, то координати точки C знаходяться за формулами

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}, \qquad y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}, \qquad z_C = \frac{z_A + \lambda z_B}{1+\lambda}.$$

Приклади розв'язання задач

1. Знайти координати точки A, яка є початком вектора $\vec{a} = (2, 0, 3)$, якщо його кінець розміщується в точці $B(4,1,2)$.

► Нехай точка A має координати (x_0, y_0, z_0) тоді вектор $\overrightarrow{AB}$ має координати $(4 - x_0, 1 - y_0, 2 - z_0)$. Із рівності векторів $\overrightarrow{AB}$ та $\vec{a}$ маємо рівняння $4 - x_0 = 2;$ $1 - y_0 = 0;$ $2 - z_0 = 3.$ Розв'язавши їх, знаходимо $x_0 = 2,$ $y_0 = 1,$ $z_0 = -1$. Отже точка A має координати $(2;1;-1)$. ◄

2. Знайти косинуси кутів, які вектор $\overrightarrow{AB}$ утворює з координатними осями, якщо $A(-1,-2,3)$ і $B(1,-3,5)$.

► Маємо $\overrightarrow{AB} = \left(1-(-1);\ -3-(-2);\ 5-3\right)$, тобто $\overrightarrow{AB} = (2;-1;2)$. Тоді $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2^2+(-1)^2+2^2} = 3$, тому $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$, $\cos\beta = \dfrac{-1}{3}$, $\cos\gamma = \dfrac{2}{3}$. ◄

3. У паралелограмі $ABCD$ задано координати трьох вершин $A(1;-3;3)$, $B(3;2;1)$ і $C(6;4;4)$. Знайти координати четвертої вершини D.

► У паралелограмі $ABCD$ сторони BC і AD рівні і паралельні. Тому вектори $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{AD}$ рівні. Виходячи з умови, знаходимо $\overrightarrow{BC} = (6-3;\ 4-2;\ 4-1) = (3;2;1)$. Нехай вершина D має координати (x, y, z), тоді вектор $\overrightarrow{AD}$ має координати $(x-1, y+3, z-3)$. Із рівності $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ відносно невідомих (x, y, z) маємо $x-1=3;$ $y+3=2;$ $z-3=3.$ З цих рівностей знаходимо $x=4,$ $y=-1,$ $z=6.$ Отже вершина D має координати $D(4;-1;6)$.◄

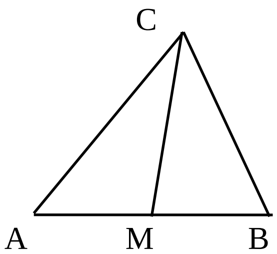


Рисунок 3

4. Задано три вершини трикутника $\mathrm{A}(-1;2)$, $\mathrm{B}(3;2)$ і $\mathrm{C}(5;5)$. Знайти довжину медіани, опущеної з вершини C на сторону AB.

► Оскільки медіана поділяє навпіл сторону AB, то точка M перетину медіани зі стороною є серединою відрізка AB. Отже, її координати $x = \frac{-1+3}{2} = 1$; $y = \frac{2+2}{2} = 2$. Тоді довжину медіани знаходимо, як довжину відрізка CM

$|CM| = \sqrt{(1-5)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{16+9} = 5.$ ◄

5. Знайти довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ та $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$.

► Згідно правила паралелограма додавання векторів, довжина однієї діагоналі паралелограма дорівнює $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|$, а іншої – $\left|\vec{a} - \vec{b}\right|$. Знайдемо ці вектори та обчислимо їх довжини. Отримаємо $\vec{a} + \vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{a} - \vec{b} = \vec{i} - 5\vec{j} + 5\vec{k}$. Отже,

$\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{19}$,

$\left|\vec{a} - \vec{b}\right| = \sqrt{1^2 + (-5)^2 + 5^2} = \sqrt{51}.$ ◄

Завдання для самостійного розв'язання

1. Знайти координати вектора $\overrightarrow{AB}$, його довжину, та напрямні косинуси, якщо:

а) $A = (3,1,2)$, $B = (1,0,1)$;

б) $A = (3,-2,2)$, $B = (-1,3,2)$;

в) $A = (7,1,-3)$, $B = (4,0,2)$;

г) $A = (0,-1,2)$, $B = (1,-1,4)$.

2. Дано $|\vec{a}| = 13$, $\left|\vec{b}\right| = 19$, $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = 24$. Знайти $\left|\vec{a} - \vec{b}\right|$.

3. У паралелограмі $ABCD$ дано координати трьох його вершин $A(3;-4;7)$, $B=(-5,3,-2)$ і $C=(1,2,-3)$. Знайти координати четвертої вершини D, протилежної вершині B.

4. При яких значеннях α і β вектори $\vec{a}=-2\vec{i}+3\vec{j}+\alpha\vec{k}$ та $\vec{b}=\beta\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}$ будуть колінеарні?

5. Точка $C(2;2;4)$ ділить відрізок AB у відношенні $\lambda=2/3$. Знайти координати точки B, якщо $A(-2;4;0)$.

6. Знайти довжину медіани трикутника з вершинами у точках $A(1;-3;2)$, $B(3;0;6)$, $C(3;2;6)$, проведеної з вершини A.

7. Вектори $\vec{a}=(-2;4;7)$, $\vec{b}=(0;1;2)$, $\vec{c}=(1;0;1)$ утворюють базис. Знайти розклад вектора $\vec{d}=(-1;2;4)$ за цим базисом.

8. Встановити вид чотирикутника $ABCD$ з вершинами у точках $A(-1;-2)$, $B(2;-5)$, $C(1;-2)$, $D(-2;1)$.

9. Відрізок, обмежений точками $A(2;-7;9)$ та $B(8;11;-3)$, поділили точками C і D у відношенні 1:2:3. Знайти координати цих точок.

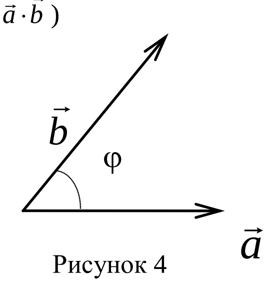
10. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні, причому $|\vec{a}|=5$ і $|\vec{b}|=12$. Знайти $|\vec{a}+\vec{b}|$ і $|\vec{a}-\vec{b}|$.

11. Обчислити периметр трикутника, якщо координати його вершин $A(-3;-6)$, $B(4;-1)$ та $C(5;-2)$.

12. Точка, рухаючись рівномірно та прямолінійно, за 4 секунди перемістилась із положення $A(6;-7)$ в положення $B(-4;-5)$. Де знаходилась точка в момент часу: 2 секунди; 3 секунди?

1.2 Скалярний добуток

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, яке дорівнює добутку довжин цих сторін на косинус кута φ між ними (позначають $\vec{a}\cdot\vec{b}$)



$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi.$$

Рисунок 4

Проекцією вектора $\vec{b}$ на ненульовий вектор $\vec{a}$ називається число $np_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\cos\varphi$. З цього означення і означення скалярного добутку бачимо, що

$$np_{\vec{a}}\vec{b}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}.$$

Поняття скалярного добутку використовується у фізиці при обчисленні роботи постійної сили $\vec{F}$ при переміщенні точки вздовж вектора $\vec{S}$. Якщо вектор $\vec{a}=\vec{F}$ – сила, $\vec{b}=\vec{S}$ – шлях переміщення точки, то $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{F}\cdot\vec{S}=|\vec{F}|\cdot|\vec{S}|\cos\varphi=A$ – робота сили $\vec{F}$ на шляху $\vec{S}$.

Властивості скалярного добутку:

1^0 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;

2^0 $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$;

3^0 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$;

4^0 $\vec{a}\cdot\vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$;

5^0 $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\vec{a}\perp\vec{b}$.

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задані координатами $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ і $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, то

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z ,$$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}} ,$$

де φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Приклади розв’язання задач

6. Обчислити скалярний добуток $\vec{a}\cdot\vec{b}$, якщо $\vec{a} = \vec{p}+4\vec{q},\ \vec{b} = 2\vec{p}-\vec{q}$, $|\vec{p}| = 7,\ |\vec{q}| = 2$, $\varphi = \frac{2\pi}{3}.$

► Відповідно до властивостей скалярного добутку отримуємо, що

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (\vec{p}+4\vec{q})(2\vec{p}-\vec{q}) = 2\vec{p}\cdot\vec{p} - \vec{p}\cdot\vec{q} + 8\vec{q}\cdot\vec{p} - 4\vec{q}\cdot\vec{q} =$$

$$= 2|\vec{p}|^2 + 7\vec{p}\cdot\vec{q} - 4|\vec{q}|^2 = 2\cdot 7^2 + 7\cdot 7\cdot 2\cos\frac{2\pi}{3} - 4\cdot 2^2 =$$

$$= 98 + 98\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - 16 = 32 \cdot$$ ◄

7. Задано вектор $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$, причому $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$, кут φ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює 60°. Знайти модуль вектора $\vec{c}$.

► Використовуючи формулу $\vec{c}^2 = |\vec{c}|^2$, одержимо, що $|\vec{c}| = \sqrt{\vec{c}^2} = \sqrt{(2\vec{a} + 3\vec{b})^2} = \sqrt{4\vec{a}^2 + 12 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + 9\vec{b}^2}$.

Оскільки $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = 4^2 = 16$, $\vec{b}^2 = |\vec{b}|^2 = 5^2 = 25$,

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi = 4 \cdot 5 \cdot \cos 60^o = 10$,

то $|\vec{c}| = \sqrt{4 \cdot 16 + 12 \cdot 10 + 9 \cdot 25} = \sqrt{409} \approx 20,22$. ◄

8. Дано вектори $\vec{a} = (1; -2; 3)$, $\vec{b} = (3; 0; -1)$. Обчислити $(\vec{a} + 2\vec{b})(\vec{b} - 3\vec{a})$.

► Оскільки вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задані своїми координатами, то маємо $(\vec{a} + 2\vec{b}) = (1; -2; 3) + 2(3; 0; -1) = (7; -2; 1)$,

$(\vec{b} - 3\vec{a}) = (3; 0; -1) - 3(1; -2; 3) = (0; 6; -10)$.

Враховуючи формулу скалярного добутку для векторів, заданих своїми координатами, отримуємо

$$(\vec{a} + 2\vec{b})(\vec{b} - 3\vec{a}) = 7 \cdot 0 + (-2) \cdot 6 + 1 \cdot (-10) = -22. \ ◄$$

9. При яких значеннях t вектори $\vec{c} = (t - 5; 2; 4)$ і $\vec{d} = (t; 4t - 1; -2)$ будуть перпендикулярними?

► Якщо вектори $\vec{c}$ і $\vec{d}$ перпендикулярні, то $\vec{c}\cdot\vec{d}=0$, тобто $t(t-5)+2(4t-1)-8=0$, або $t^2+3t-10=0$. Розв'язуючи дане рівняння, отримуємо $t_1=-5,\ t_1=2.$ ◄

10. У трикутнику з вершинами $A(2;-1;3)$, $B(-2;2;5)$, $C(1;2;3)$. Знайти косинус кута при вершині A.

► Кут при вершині A будемо шукати як кут між векторами $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$. Отже, $\overrightarrow{AB}=(-4;3;2)$, $\overrightarrow{AC}=(-1;3;0)$. Тоді

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{-4\cdot(-1)+3\cdot 3+2\cdot 0}{\sqrt{(-4)^2+3^2+2^2}\sqrt{(-1)^2+3^2}}=\frac{13}{\sqrt{29}\sqrt{10}}\approx 0,763.$$ ◄

11. Обчислити роботу, яку виконує рівнодійна трьох сил $\vec{F}_1=(3;-4;5)$, $\vec{F}_2=(2;1;-4)$ та $\vec{F}_3=(-3;5;2)$, прикладена до точки, яка прямолінійно переміщується з положення $A(4;2;-3)$ у положення $B(6;4;1)$.

► Обчислимо силу $\overline{F}$, яка є рівнодійною трьох сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ та $\vec{F}_3$,

$$\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=(3+2-3;-4+1+5;5-4+2)=(2;2;-2).$$

Вектор переміщення $\vec{S}=\overrightarrow{AB}=(2;2;4)$. Отже, робота $A=\vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}=2\cdot 2+2\cdot 2-2\cdot 4=0$. ◄

1.3 Векторний добуток

Векторним добутком неколінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (позначають $\vec{a}\times\vec{b}$) називають вектор $\vec{c}$, який має такі властивості:

1) $\vec{c}\perp\vec{a}$, $\vec{c}\perp\vec{b}$;

2) $|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, де φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

3) трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ права.

Властивості векторного добутку векторів $\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$ і $\vec{b}=(b_x, b_y, b_z)$:

1^0 $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ колінеарні;

2^0 $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$;

3^0 $\lambda\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\left(\lambda\vec{b}\right)=\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$;

4^0 $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$;

5^0 довжина векторного добутку двох неколінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ ($|\vec{c}|=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$) дорівнює площі паралелограма побудованого на цих векторах;

6^0 $\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0$, $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$; $\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$, $\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$, де $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – вектори ортонормованого базису;

7^0 $$\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}=$$

$$=\left(\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\right)$$

Розглянемо вектор сили $\vec{F}$, прикладеної до точки B. Векторний добуток $\overline{AB}\times\vec{F}$ є *моментом* $\vec{M}$ сили $\vec{F}$ прикладеної до точки A, тобто $\vec{M}=\overline{AB}\times\vec{F}$.

Приклади розв'язання задач

12. Нехай $\vec{a}=(-3;3;8)$, $\overline{b}=(3;-2;-6)$. Обчислити векторний добуток $\vec{a}\times\vec{b}$. Чому дорівнює площа паралелограма побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$?

► Нехай $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{j}$ – ортонормований базис, в якому задані вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ Тоді

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{j}\\ -3 & 3 & 8\\ 3 & -2 & -6\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}3 & 8\\ -2 & -6\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-3 & 8\\ 3 & -6\end{vmatrix}+\vec{j}\begin{vmatrix}-3 & 3\\ 3 & -2\end{vmatrix}=$$

$$=-2\vec{i}+6\vec{j}-3\vec{k}.$$

Тепер можемо знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$,

$$S_{пар.}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{(-2)^2+6^2+(-3)^2}=7.$$ ◄

13. Обчислити площу паралелограма побудованого на векторах $\overline{c}=2\vec{a}-\vec{b}$ та $\overline{d}=\vec{a}+3\vec{b}$, якщо $\left|\vec{a}\right|=4$, $\left|\vec{b}\right|=3$, $(\vec{a},\hat{\vec{b}})=\dfrac{\pi}{6}$.

► Відповідно до властивостей векторного добутку, маємо:

$\vec{c}\times\vec{d}=(2\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+3\vec{b})=2\vec{a}\times\vec{a}+6\vec{a}\times\vec{b}-\vec{b}\times\vec{a}-3\vec{b}\times\vec{b}=2\cdot 0+$

$+6\,\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{b}-3\cdot 0=7\,\vec{a}\times\vec{b}$.

Отже, $S=7\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=7\cdot 4\cdot 3\cdot\sin\dfrac{\pi}{6}=42$. ◄

14. Знайти довжину висоти трикутника ABC з вершинами у точках $A(1;3;1)$, $B(3;2;-2)$, $C(6;2;0)$, проведеної з вершини A.

► Нехай AH – висота трикутника ABC, проведена з вершини A. Тоді площа $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AH}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|$. Площа трикутника ABC дорівнює половині площі паралелограма побудованого на векторах $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{BC}$. Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{BC}$ та їх векторний добуток: $\overrightarrow{BA}=(2;-1;-3)$, $\overrightarrow{BC}=(3;0;2)$,

$$\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & -3\\ 3 & 0 & 2\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-1 & -3\\ 0 & 2\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}2 & -3\\ 3 & 2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 0\end{vmatrix}=$$

$=-2\vec{i}+13\vec{j}+3\vec{k}$.

Отже, $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}\right|=\dfrac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+13^2+3^2}=\dfrac{\sqrt{182}}{2}$.

Тоді $\frac{\sqrt{182}}{2}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AH}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|$, звідки $\left|\overrightarrow{AH}\right|=\frac{\sqrt{182}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\frac{\sqrt{182}}{\sqrt{9+4}}=\sqrt{14}$.◄

1.4 Мішаний добуток

Мішаним (векторно-скалярним) добутком трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називається скалярний добуток векторного добутку перших двох на третій

$$\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\vec{c}\ .$$

Сформулюємо властивості мішаного добутку векторів $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$ та $\vec{c}=(c_x,c_y,c_z)$:

1^0 $\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right)=\left(\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}\right)=\left(\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}\right)$, $\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right)=-\left(\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c}\right)$;

2^0 мішаний добуток трьох векторів дорівнює, з точністю до знаку, об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, як на ребрах (рис. 5), тобто $V=\pm\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)=\left|\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)\right|$;

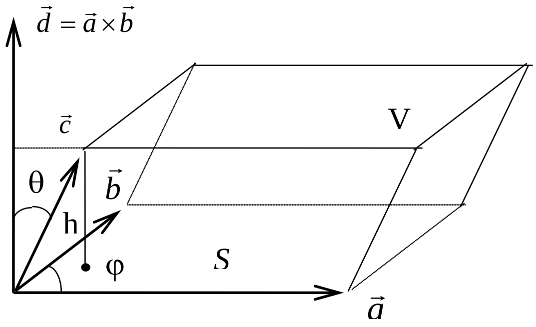


Рисунок 5

3^0 вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарні тоді і тільки тоді, коли $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)=0$;

4^0 $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$

Приклади розв’язання задач

15. Знайти об'єм піраміди з вершинами у точках 0(0;0;0), A(5;2;0), B(2;5;0), C(1;2;4).

► $\overrightarrow{OA}=\{5;2;0\}$, $\overrightarrow{OB}=\{2;5;0\}$, $\overrightarrow{OC}=\{1;2;4\}$.

Із елементарної геометрії відомо, що об'єм піраміди, побудованої на ребрах $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OC}$, дорівнює 1/6 об'єму паралелепіпеда, побудованого на тих же ребрах. Отже,

$$V_{nip}=\frac{1}{6}V_{nap}=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}\right)\right|.$$

Спочатку шукаємо мішаний добуток цих векторів

$$\left(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}\right)=\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}=4\cdot\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=84.$$

Таким чином, $V_{nip}=\frac{1}{6}\cdot 84=14(\text{куб.од.})$.◄

Завдання для самостійного розв’язання

13. Задано вектори $\vec{a}=(2;-1;4)$ та $\vec{b}=(3;-1;6)$. Обчислити:

а) $\vec{a}\cdot\vec{b}$;   б) $(2\vec{a}-3\vec{b})(3\vec{a}-2\vec{b})$.

14. Визначити внутрішні кути трикутника з вершинами $A(0;0;5)$, $B(1;1;1)$, $C(-1;2;3)$.

15. Обчислити натуральне значення x, при якому вектори $\vec{a}=(x;1;3)$ і $\vec{b}=(x;-x;-2)$ будуть перпендикулярними.

16. Задані точки A, B, C. Знайти кут між векторами $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$ і проекцію вектора $3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$ на вектор $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, якщо:

а) $A(-2;4;6)$, $B(0;2;-4)$, $C(-6;8;-10)$;

б) $A(1;4;-1)$, $B(-2;4;-5)$, $C(8;4;0)$.

17. Обчислити роботу, що її виконує сила $\vec{F}=(4;5;2)$, коли точка, до якої вона прикладена, рухаючись прямолінійно, перемістилась із положення $A(3;-7;1)$ у положення $B(6;-1;-2)$.

18. Обчислити роботу, яку виконує рівнодійна трьох сил $\vec{F}_1=(5;-3;1)$, $\vec{F}_2=(4;2;-6)$, $\vec{F}_3=(-5;-3;7)$, прикладена до точки, яка прямолінійно переміщується з положення $A(-5;3;7)$ у положення $B(-3;2;4)$.

19. Дано точки $A(-2;3;-4)$, $B(3;2;5)$, $C(1;-1;2)$, $D(3;2;-4)$. Обчислити $np_{\overline{CD}}\overrightarrow{AB}$.

20. Знайти площу трикутника ABC, якщо:

а) $A(1;2;0)$, $B(3;0;3)$, $C(5;2;6)$;

б) $A(3;1;4)$, $B(3;5;1)$, $C(7;-4;4)$;

в) $A(1;-1;2)$, $B(1;3;-1)$, $C(5;-6;2)$;

г) $A(3;-2;1)$, $B(-4;-2;0)$, $C(-1;-2;4)$.

21. Задано вершини трикутника ABC. Обчислити довжину висоти, опущеної з вершини B на сторону AC:

а) $A(1;-1;3)$, $B(5;1;0)$, $C(2;1;1)$;

б) $A(6;1;5)$, $B(5;1;0)$, $C(3;1;1)$;

в) $A(3;2;-2)$, $B(1;3;1)$, $C(6;2;0)$;

г) $A(3;0;6)$, $B(1;-3;2)$, $C(3;2;5)$.

22. Обчислити площу трикутника побудованого на векторах $\vec{c} = 3\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{d} = \vec{a} + 2\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \dfrac{\pi}{3}$.

23. Знайти момент сили $\vec{F} = \vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$, прикладеної до точки $A(-2;-1;2)$, відносно точки $O(-3;0;-1)$.

24. Знайти величину моменту сили $\vec{F} = -\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$, прикладеної до точки $A(3;5;-1)$, відносно точки $O(2;3;-1)$.

25. Обчислити мішаний добуток векторів $\vec{a} = (1;-1;-3)$, $\vec{b} = (2;3;1)$, $\vec{c} = (2;3;4)$.

26. Обчислити об’єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 7\vec{j} + 2\vec{k}$ та $\vec{c} = -2\vec{i} - \vec{k}$.

27. Обчислити об’єм піраміди з вершинами у точках:

а) $A(3;2;-2)$, $B(1;3;1)$, $C(6;2;0)$, $D(0;2;2)$;

б) $A(3;4;5)$, $B(1;2;1)$, $C(-2;-3;6)$, $D(3;-6;-3)$;

в) $A(1;3;1)$, $B(-1;4;6)$, $B(-2;-3;4)$, $C(3;4;-4)$;

г) $A(2;4;1)$, $B(-3;-2;4)$, $C(3;5;-2)$, $D(4;2;-3)$.

28. З'ясувати, чи лежать точки $A(2;3;1)$, $B(0;-1;1)$, $C(6;1;4)$, $D(2;-1;3)$ на одній площині.

§ 2. Аналітична геометрія

2.1 Лінії на площині, їхні рівняння

Лінією ℓ на координатній площині називатимемо множину усіх точок $M(x,y)$ цієї площини, координати кожної з яких задовольняють рівняння

$$F(x,y)=0, \tag{1}$$

яке не перетворюється в тотожність.

Рівняння (1) називається рівнянням лінії.

Приклади розв'язання задач

16. Скласти рівняння множини точок, рівновіддалених від двох точок $A(-4;3)$ і $B(1;-2)$.

► Віддаль між двома точками $A(x_1;y_1)$ і $B(x_2;y_2)$ визначається за формулою

$$\mathrm{d}=\sqrt{(\mathrm{x}_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Нехай $M(x;y)$ довільна точка шуканої лінії. Оскільки точка $M(x;y)$ рівновіддалена від точок $A(-4;3)$ і $B(1;-2)$, то відстань $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$. Використовуючи формулу відстані між двома точками, маємо

$$\sqrt{(x+4)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}.$$

Піднесемо до квадрата обидві частини рівняння. Після перетворень дістанемо $x-y+2=0$ або $y=x+2.$ ◄

2.2 Пряма на площині

В декартовій системі координат наведемо основні типи рівнянь прямої на площині.

1. *Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом*

$$y=kx+b, \tag{2}$$

де k – кутовий коефіцієнт прямої, тобто тангенс того кута, який пряма утворює з додатним напрямом осі Ox, цей кут відраховується від осі Ox до прямої проти годинникової стрілки; b – величина відрізка, що відтинає пряма на осі ординат. При $b=0$ рівняння (2) має вигляд $y=kx$, відповідна йому пряма проходить через початок координат.

2. *Загальне рівняння прямої*

$$Ax+By+C=0, \tag{3}$$

де A,B,C одночасно не дорівнюють нулю.

Часткові випадки загального рівняння прямої:

а) якщо $C = 0$, то рівняння (3) матиме вигляд $Ax + By = 0$, $y = -\frac{A}{B}x$ – пряма, що проходить через початок координат;

б) якщо в загальному рівнянні (3) $B = 0$, то рівняння матиме вигляд: $Ax + C = 0$, або $x = -\frac{C}{A}$ – пряма паралельна осі Oy;

в) якщо в загальному рівнянні (3) $A = 0$, то рівняння матиме вигляд: $By + C = 0$, або $y = -\frac{C}{B}$ – пряма паралельна осі Ox;

г) при $C = 0,\ A = 0$ рівняння (3) має вигляд $By = 0$, або $y = 0$ – рівняння осі Ox. При $C = 0,\ B = 0$, отримуємо $x = 0$ – рівняння осі Oy.

3. Якщо вектор $\vec{n} = (A, B)$ перпендикулярний до прямої, а точка $M_0(x_0, y_0)$ належить прямій, то рівняння прямої можна записати у вигляді

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{4}$$

Перпендикулярний до прямої вектор $\vec{n}$ надалі називатимемо *нормальним вектором прямої*, а рівняння (4) – *рівнянням прямої, що проходить через точку* $M_0(x_0, y_0)$ *і має нормальний вектор* $\vec{n} = (A, B)$.

4. Якщо задано вектор $\vec{s} = (m, n)$, паралельний прямій, і точку $M_0(x_0, y_0)$ на цій прямій, то рівняння прямої можна записати у вигляді

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \tag{5}$$

Вектор $\vec{s}$ називається *напрямним вектором прямої*, а рівняння (5) – *канонічним рівнянням прямої.*

5. Якщо пряма проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$ то рівняння

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \tag{6}$$

називається *рівнянням прямої, що проходить через дві задані точки* $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$.

6. Якщо праву частину рівняння (5) прирівняти до деякого дійсного параметра t, то отримуємо

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \end{cases} \tag{7}$$

параметричні рівняння прямої. Ці рівняння у векторній формі мають вигляд $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{s}t$, де $\vec{r}_0 = (x_0, y_0)$ – радіус-вектор точки $M_0(x_0, y_0)$, що належить прямій, $\vec{s} = (m, n)$ - напрямний вектор прямої.

7. *Рівняння прямої у відрізках* на осях

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \tag{8}$$

де a – величина відрізка, яку відтинає пряма на осі Ox; b – величина відрізка, яку відтинає пряма на осі Oy. Кожен з відрізків відкладається від початку координат.

8. Якщо пряма має кутовий коефіцієнт k і проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$, то її рівняння має вигляд

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{9}$$

Якщо в цьому рівнянні параметру k надавати різні значення, то будемо одержувати різні прямі, які проходять через задану точку (x_0, y_0). Тоді рівняння (9) дає *пучок (в'язку) прямих* з центром в точці $M_0(x_0, y_0)$.

9. Рівняння

$$x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0\,, \tag{10}$$

де $\cos\alpha$, $\cos\beta$ – напрямні косинуси нормального вектора $\vec{n}$, $p \geq 0$ – відстань від початку координат до прямої, називається *нормальним рівнянням*. Загальне рівняння (3) зводиться до нормального (10) множенням на нормуючий множник $\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, де знак перед коренем береться протилежним знаку вільного члена.

Якщо $\vec{n}_1 = (A_1, B_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2, B_2)$ нормальні вектори прямих ℓ_1 та ℓ_2 відповідно, то кут φ між ними визначається формулою

$$\cos\varphi = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Якщо k_1, k_2 – кутові коефіцієнти двох прямих, то кут між ними визначається за формулою

$$tg\varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} \right|, \quad k_1 k_2 \neq -1. \tag{11}$$

Запишемо умови паралельності та перпендикулярності прямих ℓ_1 та ℓ_2. Отже,

$$\ell_1 \| \ell_2 : \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}, \qquad \ell_1 \perp \ell_2 : \quad A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0,$$

або

$$\ell_1 \| \ell_2 : \quad k_1 = k_2, \qquad \ell_1 \perp \ell_2 : \quad k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Якщо задано рівняння прямої $Ax + By + C = 0$ і точка $M_0(x_0, y_0)$, то відстань від цієї точки до даної прямої обчислюємо за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{12}$$

Приклади розв’язання задач

17. Скласти рівняння прямої, що проходить:

1) через точку $M(-1,2)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}=(3,-2)$;

2) через точку $M(2,-3)$ паралельно вектору $\vec{s}=(2,-1)$;

3) через точки $A(0,1)$ та $B(3,-2)$, записати дане рівняння в параметричному вигляді;

4) через точку $M(-2,1)$ та має кутовий коефіцієнт $k=-\dfrac{1}{2}$.

► Складаючи рівняння, прямої передусім виберемо вигляд рівняння, який приводить до мети.

1) Використаємо рівняння прямої, яка проходить через задану точку перпендикулярно заданому нормальному вектору $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$. Отримаємо $3(x+1)-2(y-2)=0$, або $3x-2y-1=0$.◄

► 2) Використаємо канонічне рівняння $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}$.

Маємо $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+3}{-1}$, $x-2y+4=0$.◄

► 3) Запишемо рівняння даної прямої як рівняння прямої, що проходить через дві точки, $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

Отримаємо $\dfrac{x-0}{3-0}=\dfrac{y-1}{-2-1}$, $-3x=3y+3$, $x+y+1=0$ – загальне рівняння, $\begin{cases} x=3t, \\ y=1-3t, \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ – параметричні рівняння прямої. ◄

► 4) Складемо рівняння прямої використовуючи формулу (9)

$$y-1=-\frac{1}{2}(x+2)\text{, або } x+2y=0\,.◄$$

18. Задано координати вершин трикутника $A(-2,-3)$, $B(-1,2)$, $C(5,4)$. Скласти рівняння медіани AM та висоти BH.

► Медіана AM ділить сторону BC навпіл, тому координати точки M обчислюємо за формулами

$$x_M=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{-1+5}{2}=2,\qquad y_M=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{2+4}{2}=3.$$

Використовуючи рівняння прямої, що проходить через точки A та M, отримуємо $\frac{x+2}{2+2}=\frac{y+3}{3+3}$, звідки $3x-2y=0$ – рівняння медіани AM.

Оскільки $BH\perp AC$, то можемо взяти $\vec{n}=\overrightarrow{AC}=(7;7)$, тому рівняння висоти BH запишемо як рівняння прямої, що проходить через точку B і має нормальний вектор $\vec{n}=(7,7)$. Одержимо $7(x+1)+7(y-2)=0$, або $x+y-1=0$ – рівняння висоти BH.◄

19. Задано пряму $\ell: 2x+3y+4=0$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(2,1)$:

1) перпендикулярно даній прямій;

2) паралельно даній прямій;

3) під кутом 45^0 до даної прямої.

► 1) Запишемо рівняння прямої ℓ у вигляді $3y = -2x - 4$, або $y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$. Бачимо, що для ℓ: $k = -\frac{2}{3}$, $b = -\frac{4}{3}$. Нехай ℓ_1 – пряма перпендикулярна до ℓ, тоді $k_1 = -\frac{1}{k} = \frac{3}{2}$. Запишемо рівняння прямої ℓ_1 як рівняння прямої, що проходить через точку $M(2,1)$ і має кутовий коефіцієнт $k_1 = 3/2$,

$$\ell_1: \quad y - 1 = \frac{3}{2}(x-2), \qquad 2y - 2 = 3x - 6,$$

$$3x - 2y - 4 = 0. ◄$$

► 2) Оскільки пряма $\ell_2 \| \ell$, то $k_2 = k = -\frac{2}{3}$. Тому рівняння прямої ℓ_2 буде таким

$$y - 1 = -\frac{2}{3}(x-2), \qquad 3y - 3 = -2x + 4,$$

$$2x + 3y - 7 = 0. ◄$$

► 3) Нехай ℓ_3 – пряма, проведена під кутом 45^0 до прямої ℓ. Із формули $tg\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}\right|$, яка поєднує кутові коефіцієнти двох прямих отримуємо $tg45^0 = \left|\frac{k_3 + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}k_3}\right|$, звідки

$$1 - \frac{2}{3}k_3 = k_3 + \frac{2}{3}, \qquad \frac{5}{3}k_3 = \frac{1}{3}, \qquad k_3 = \frac{1}{5},$$

або

$$1 - \frac{2}{3}k_3 = -k_3 - \frac{2}{3}, \qquad k_3 = -5.$$

Отже, під кутом 45^0 до даної прямої можна провести дві прямі:

ℓ_3: $y - 1 = \frac{1}{5}(x - 2)$, $5y - 5 = x - 2$, $x - 5y + 3 = 0$,

або ℓ_3: $y - 1 = -5(x - 2)$, $5x + y - 11 = 0$.◄

20. Знайти площу квадрата, дві сторони якого лежать на прямих $x - 2y - 5 = 0$ та $x - 2y + 2 = 0$.

► Оскільки коефіцієнти нормальних векторів даних прямих рівні, то прямі паралельні. Довжину d сторони квадрата знайдемо як відстань від довільної точки однієї прямої до другої прямої. Знайдемо яку-небудь точку на першій прямій. Нехай наприклад $x = 1$, тоді $1 - 2y - 5 = 0$, звідки $y = 2$. Отже точка $M_0(1, 2)$ належить першій прямій. За формулою (11) знайдемо відстань від точки M_0 до другої прямої $d = \dfrac{|1-2\cdot 2-5|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \dfrac{8}{\sqrt{5}}$.

Площа квадрата $S = d^2 = \dfrac{64}{5}$ (кв. од.). ◄

21. Пряма проходить через точки $A(-2;3)$ і $B(4;-1)$. Знайти площу трикутника, який відсікає пряма від координатного кута.

► Рівняння прямої AB запишемо як рівняння прямої, що проходить через дві точки,

$$\frac{x+2}{4+2} = \frac{y-3}{-1-3}, \qquad \frac{x+2}{6} = \frac{y-3}{-4}, \quad \text{або} \quad 2x+3y-5=0.$$

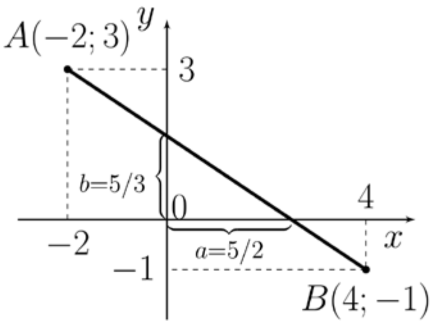


Рисунок 6

Рівняння прямої у відрізках на осях має вигляд

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

де a і b відрізки, які відтинає пряма на координатних осях.

Загальне рівняння прямої AB запишемо як рівняння прямої у відрізках на осях $\frac{x}{5/2}+\frac{y}{5/3}=1$. Отже, $a=\frac{5}{2}$; $b=\frac{5}{3}$.

Площа прямокутного трикутника дорівнює $S=\frac{1}{2}|a|\cdot|b|$,

тоді $S=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{3}=\frac{25}{12}=2\frac{1}{12}$ (кв.од.) ◄

Завдання для самостійного розв'язання

29. Знайти, які з точок $A_1(1;-2)$, $A_2(-2;3)$ та $A_3(3;-4)$ лежать на прямій $5x+3y+1=0$.

30. Скласти рівняння медіан трикутника з вершинами $A(-4;-2)$, $B(2;0)$ та $C(2;-4)$.

31. Записати рівняння сторін AB та CD прямокутника $ABCD$, якщо відомо координати вершин $A(-2;3)$ та $D(-1;1)$.

32. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку перетину прямих $x-5y+9=0$, $3x+2y+10=0$:

а) і точку $M(-1;2)$;

б) паралельно прямій $2x-5y+11=0$;

в) перпендикулярно прямій $3x+y-4=0$.

33. Скласти рівняння висот трикутника з вершинами $A(1;0)$, $B(4;5)$ та $C(7;3)$.

34. Знайти проекцію точки $P(1;-2)$ на пряму $3x-y-9=0$.

35. Знайти точку Q, симетричну точці $P(8;-9)$ відносно прямої, що проходить через точки $A(3;4)$ і $B(-1;-2)$.

36. Обчислити відстань між прямими: а) $4x-3y-10=0$, $8x-6y+15=0$; б) $3x+4y-11=0$, $3x+4y+14=0$.

37. Знайти відстань від точки $A(-3;4)$ до прямої, що проходить через точки $M_1(-2;7)$, $M_2(3;-3)$.

38. Задано дві суміжні вершини $A(2;5)$ і $B(5;3)$ паралелограма $ABCD$ і точка $O(-2;0)$ перетину його діагоналей. Скласти рівняння сторін цього паралелограма.

39. Задані координати вершин трикутника ABC:

1) $A(2;1)$, $B(3;0)$, $C(4;4)$;

2) $A(10;13)$, $B(13;6)$, $C(1;1)$;

3) $A(-1;7)$, $B(5;3)$, $C(-2;-16)$;

4) $A(-3;0)$, $B(1;4)$, $C(3;-2)$.

Визначити:

а) рівняння сторони AB;

б) рівняння середньої лінії MN трикутника, яка паралельна стороні AB;

в) рівняння висоти і медіани, проведених з вершини C;

г) значення кута BAC;

д) відстань від точки C до сторони AB.

40. Скласти рівняння катетів рівнобедреного прямокутного трикутника, знаючи рівняння гіпотенузи $3x - y + 5 = 0$ і вершину $B(-4;1)$ прямого кута.

41. Скласти рівняння прямої, яка відтинає на осі ординат відрізок довжиною 2, і проходить паралельно прямій $x - 2y + 3 = 0$.

2.3 Лінії другого порядку

Колом називається множина точок площини, рівновіддалених від заданої точки $C(x_0, y_0)$ на величину R.

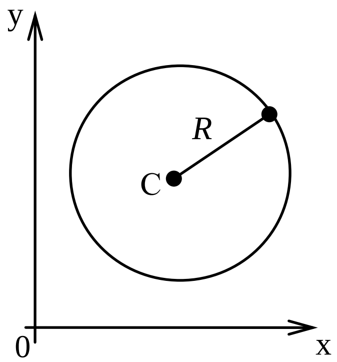


Рисунок 7

Точку $C(x_0, y_0)$ називають *центром кола*, а величину R його *радіусом*. Рівняння кола

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 .$$

Еліпсом називають множину точок площини, сума відстаней від кожної з яких до двох заданих точок площини є величиною сталою, що перевищує відстань між цими точками. Задані точки F_1 і F_2 називають фокусами еліпса, відстань F_1F_2 – фокусною відстанню; сталу позначають $2a$.

Для фокусів $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ за умови $2c<2a$ канонічне (найпростіше) рівняння еліпса має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

де $b=\sqrt{a^2-c^2}$. Числа a і b називають відповідно *великою та малою півосями еліпса*, початок координат – його *центром*. Відношення $\varepsilon=\dfrac{c}{a}<1$ називають *ексцентриситетом еліпса*, прямі $x=\pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ – його *директрисами*.

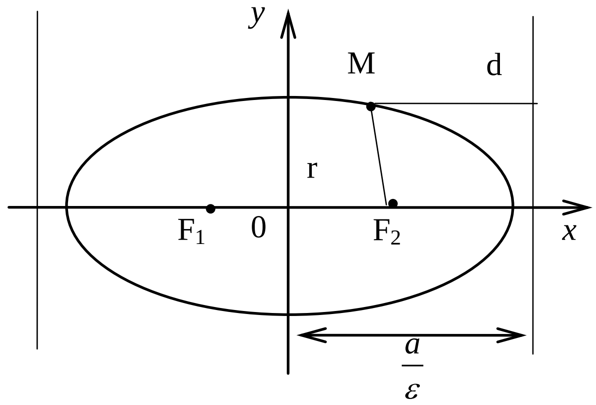


Рисунок 8

Еліпс із центром у точці $C(x_0,y_0)$ і півосями a і $b\,(a>b)$, що паралельні осям координат, має рівняння

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

Гіперболою називають множину точок площини, модуль різниці відстаней від кожної з яких до двох заданих точок є величиною сталою, що менша від відстані між цими точками. Дві задані точки F_1 і F_2 називають фокусами гіперболи, відстань F_1F_2 – фокусною відстанню; сталу позначають $2a$. Для фокусів $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ за умови $2c > 2a$ канонічне рівняння гіперболи має такий вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

де $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Числа a і b називають півосями гіперболи відповідно дійсною і уявною, початок координат – її центром. Відношення $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$ називають ексцентриситетом гіперболи, прямі $y = \pm\frac{b}{a}x$ – її асимптотами, а прямі $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ – її директрисами.

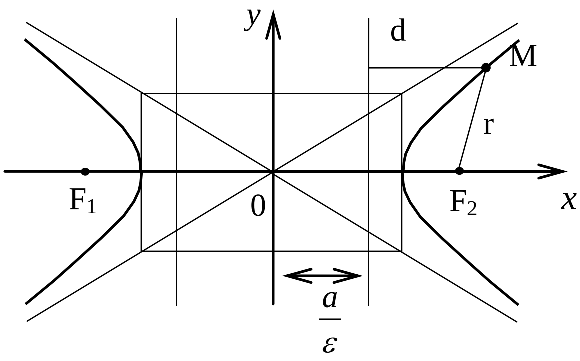


Рисунок 9

Канонічне рівняння гіперболи можна також зустріти у вигляді

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

Така гіпербола має центр в початку координат, асимптоти $y = \pm\frac{b}{a}x$, фокуси $F_1(0,-c)$ та $F_2(0,c)$, а вітки ідуть вгору та вниз.

Гіпербола із центром у точці $C(x_0, y_0)$ і півосями a і b $(a > b)$, що паралельні осям координат, має рівняння

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Параболою називають множину точок площини, відстань від кожної з яких до заданої точки дорівнює відстані до заданої прямої, що не проходить через задану точку. Задану точку F називають фокусом параболи, задану пряму її директрисою. Відстань від фокуса до директриси називають *фокальним параметром параболи* і позначають p.

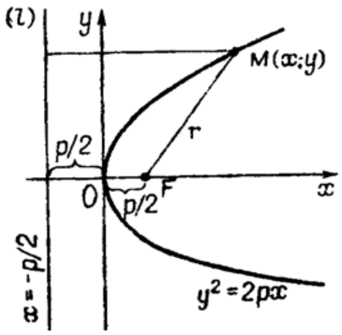


Рисунок 10

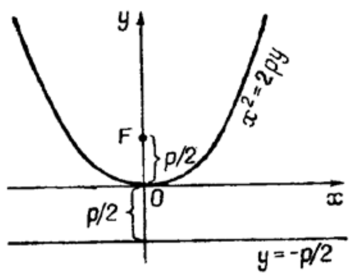


Рисунок 11

Для фокуса $F\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$ і директриси $x = -\dfrac{p}{2}$ канонічне рівняння параболи має вигляд (рис. 10)

$$y^2 = 2px.$$

Парабола симетрична відносно осі Ox, точку її перетину з цією віссю називають вершиною. Отже, вершина розміщується на початку координат.

Якщо вершина параболи розміщується в початку координат і парабола симетрична відносно осі Oy, то канонічне рівняння параболи є таким $x^2 = 2py$ (рис. 11). У цьому випадку точка $F(0, p/2)$ є фокусом параболи, пряма $y = -p/2$ – її директрисою.

Якщо вершина параболи розміщується в точці $C(x_0, y_0)$ і її вісь симетрії паралельна осі Ox, то рівняння параболи матиме такий вигляд

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0).$$

Приклади розв’язання задач

22. Скласти рівняння кола, якщо:

1) його центр розміщується в точці $C(2,-3)$ і точка $A(-1,1)$ лежить на колі;

2) його центр збігається з початком координат , а пряма $4x - 3y - 20 = 0$ є дотичною до кола.

► 1) Координатами центра кола є координати точки C, а радіусом кола – відстань між точками C і A

$$R^2 = (-1-2)^2 + (1+3)^2 = 25.$$

Отже, рівняння кола має вигляд $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$. ◄

► 2) Координатами центра кола є точка $(0,0)$, а радіусом кола – відстань від цієї точки до заданої прямої

$$R = \frac{|4 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - 20|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{20}{5} = 4.$$

Отже, рівняння кола $x^2 + y^2 = 16$. ◄

23. Визначити півосі, фокуси, ексцентриситет і директриси еліпса $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.

► З рівняння еліпса бачимо, що $a=5$, $b=4$. Тоді $c=\sqrt{a^2-b^2}=3$; $\varepsilon=\frac{3}{4}$. Отже велика піввісь дорівнює 5, мала – 4; $F_1(-3,0)$, $F_2(3,0)$. Директрисами еліпса є прямі $x=\pm\frac{20}{3}$.◄

24. Показати, що рівняння $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$ задає рівняння еліпса. Знайти центр, осі, фокуси та ексцентриситет цього еліпса.

► Виділимо повний квадрат у рівнянні

$$5(x^2-6x+9)-45+9(y^2+2y+1)-9+9=0,$$

$$5(x-3)^2+9(y+1)^2-45=0.$$

Звідси $5(x-3)^2+9(y+1)^2=45$, $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{5}=1$.

Центром еліпса є точка $C(3,1)$, велика піввісь $a=3$, мала піввісь $b=\sqrt{5}$. Фокуси еліпса лежать на прямій $y=-1$ і віддалені від центра еліпса на відстань $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{9-5}=2$. Тому $F_1(1,1)$, $F_2(5,-1)$. Ексцентриситет $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{2}{3}$.◄

25. Записати канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо таке:

а) відстань між фокусами дорівнює 10, дійсна піввісь $a=4$;

б) дійсна піввісь $a=4$, ексцентриситет $\varepsilon=1,25$;

в) відстань між фокусами дорівнює 6, ексцентриситет $\varepsilon = 1,5$;

г) відстань між фокусами, які лежать на осі абсцис, дорівнює 20, рівняння асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$;

д) гіпербола проходить через точку $M(9/2, -1)$ і відомі рівняння асимптот $y = \pm\frac{2}{3}x$.

► а) Оскільки $2c = 10$, то $c = 5$. Довжину уявної півосі обчислимо за формулою $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$. Отже, рівняння гіперболи має вигляд

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1. ◄$$

► б) Оскільки ексцентриситет гіперболи $\varepsilon = \frac{c}{a}$, то $c = 1,25a = 1,25 \cdot 4 = 5$. Знайдемо довжину уявної півосі за формулою $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$. Отже рівняння гіперболи є таким $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$.◄

► в) Із умови задачі одержуємо, що $c = 3$. Оскільки $\varepsilon = \frac{c}{a}$, то $a = \frac{c}{\varepsilon} = \frac{3}{1,5} = 2$. Тоді $b = \sqrt{3^2 - 2^2} = 5$. Таким чином, рівняння гіперболи має вигляд $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1$.◄

► г) З рівнянь асимптот отримуємо, що $\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$, або $b=\frac{4}{3}a$. Оскільки $2c=20$, то $c=10$. Знайдемо дійсну піввісь із формули $a^2=c^2-b^2$, $a^2=100-\frac{16}{9}a^2$, $\frac{25}{9}a^2=100$, $a=6$, тоді $b=8$. Тому рівняння гіперболи є таким $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$.◄

► д) Тут маємо $\frac{b}{a}=\frac{2}{3}$, звідки $b=\frac{2}{3}a$. Тоді рівняння гіперболи буде $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{\left(2a/3\right)^2}=1$ або $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{\left(2a/3\right)^2}=-1$. Координати точки $M(9/2,-1)$ повинні задовольняти рівнянню гіперболи, отже, $\frac{(9/2)^2}{a^2}-\frac{(-1)^2}{\left(2a/3\right)^2}=1$, або $\frac{(9/2)^2}{a^2}-\frac{(-1)^2}{\left(2a/3\right)^2}=-1$. З першого рівняння знаходимо $a^2=18$, а з другого – $a^2=-18$, що неможливо. Тому друге рівняння не підходить. Отже, $b^2=\frac{4}{9}a^2=8$ і шукане рівняння гіперболи матиме вигляд $\frac{x^2}{18}-\frac{y^2}{8}=1$.◄

26. Визначити півосі, координати фокусів, ексцентриситет, асимптоти і директриси гіперболи $4x^2-9y^2=-36$.

► Зведемо рівняння $4x^2 - 9y^2 = -36$ гіперболи до канонічного вигляду. Поділивши його на 36, отримаємо $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = -1$. Дане рівняння визначає спряжену гіперболу з півосями $a = 3,\ b = 2$, в якої вітки йдуть вгору та вниз. Знайдемо координати фокусів: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$, отже, $F_1\left(0, -\sqrt{13}\right)$, $F_2\left(0, \sqrt{13}\right)$. Ексцентриситет спряженої гіперболи шукаємо за формулою $\varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{13}}{2}$. Рівняння асимптот визначається формулою $y = \pm\frac{2}{3}x$, а рівняння директрис $y = \pm\frac{b}{\varepsilon} = \pm\frac{4}{\sqrt{13}}$.◄

27. Скласти рівняння параболи з вершиною в початку координат, якщо парабола симетрична:

а) відносно осі Ox і проходить через точку $M(3, -2)$;

б) відносно осі Oy і проходить через точку $M(2, -1)$;

в) відносно осі Ox і проходить через точку перетину двох прямих $y = x$ та $x + y = 2$.

► а) Канонічним рівнянням параболи, що симетрична відносно осі Ox, вершина якої знаходиться в початку координат, є $y^2 = 2px$. Залишається знайти значення параметра p. Так як парабола проходить через точку

$M(3,-2)$, то координати цієї точки задовольняють записаному рівнянню, отже, $(-2)^2 = 3p$, $p = \frac{4}{3}$. Звідси $y^2 = \frac{8}{3}x$. ◄

► б) Канонічним рівнянням параболи, що симетрична відносно осі Oy, вершина якої знаходиться в початку координат, є $x^2 = -2py$. Підставимо координати точки $M(2,-1)$ у рівняння параболи: $4 = 2p$, $p = 2$. Тоді $x^2 = -4y$. ◄

► в) Знайдемо точку N перетину прямих $y = x$ та $x + y = 2$: $2x = 2$, $x = 1$, $y = 1$. Канонічним рівнянням параболи, що симетрична відносно осі Ox, вершина якої знаходиться в початку координат, є $y^2 = 2px$. Підставивши координати точки $N(1,1)$, отримуємо $1 = 2p$, $p = 1/2$. Звідси $y^2 = x$. ◄

Завдання для самостійного розв'язання

42. Скласти рівняння кола, що проходить через точку $M(6;2)$ і його центр співпадає з точкою $C(2,-1)$.

43. Записати рівняння кола, центр якого співпадає з точкою $C(1;-1)$ і пряма $5x - 12y + 9 = 0$ є дотичною до кола.

44. Скласти рівняння кола, якщо точки $A(3;2)$ і $B(-1;6)$ є кінцями одного з діаметрів.

45. Записати канонічне рівняння еліпса, якщо відомо таке:

а) велика піввісь дорівнює 6, а лівий фокус міститься в точці $F_1(-4;0)$;

б) еліпс, ексцентриситет якого дорівнює $\varepsilon = 7/8$, проходить через точку $A(8;0)$;

в) велика вісь дорівнює 50, а ексцентриситет $\varepsilon = 3/5$;

г) еліпс проходить через точки $M_1\left(4;-\sqrt{3}\right)$, $M_2\left(2\sqrt{2};3\right)$.

46. Показати, що рівняння $9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$ визначає еліпс, знайти його півосі, координати фокусів, ексцентриситет, рівняння директрис.

47. Записати канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо таке:

а) уявна піввісь дорівнює $b = 3$, а правий фокус міститься в точці $F_1(7;0)$;

б) рівняння асимптот $y = \pm\dfrac{x}{3}$, а дійсна вісь дорівнює $2a = 6$;

в) дійсна піввісь дорівнює $a = 5$, а ексцентриситет $\varepsilon = 7/5$;

г) гіпербола проходить через точки $M_1\left(\sqrt{6};0\right)$ та $M_2\left(-2\sqrt{2};1\right)$.

48. Показати, що рівняння $4x^2 - 16y^2 = 64$ визначає гіперболу, знайти координати фокусів, ексцентриситет, рівняння асимптот та директрис.

49. Встановити, що рівняння $x^2 - 6y^2 - 12x + 36y - 48 = 0$ визначає гіперболу. Знайти її центр, півосі, координати фокусів, ексцентриситет, рівняння асимптот та директрис.

50. Скласти канонічне рівняння параболи:

а) симетричної відносно осі Oy, якщо рівняння директриси $y = 9$;

б) яка проходить через точку $A(4;1)$ і симетрична відносно осі Ox;

в) симетричної відносно осі Ox, якщо рівняння директриси $x = 6$;

г) симетричної відносно осі Oy, якщо рівняння директриси $y = -1$;

51. Скласти рівняння кола, яке проходить через праву вершину гіперболи $3x^2 - 25y^2 = 75$ і має центр в точці $C(-5;-2)$.

52. Скласти рівняння кола, яке проходить через лівий фокус еліпса $3x^2 + 7y^2 = 21$ і має центр в точці $A(-1;-3)$.

2.4. Площина у просторі

Запишемо найпоширеніші рівняння площини у просторі .

1. Нехай точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежить на площині, а вектор $\vec{n} = (A, B, C) \neq \vec{0}$ – вектор перпендикулярний до площини. Рівняння

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

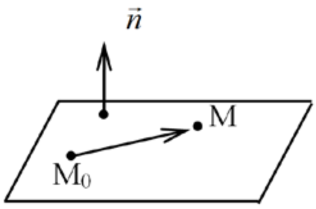


Рисунок 12

називається *рівнянням площини, що проходить через задану точку* M_0 *перпендикулярно вектору* $\vec{n}$

Вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ перпендикулярний до площини називається *нормальним вектором* цієї площини.

2. *Рівняння площини, що проходить через задану точку* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *і паралельна двом неколінеарним векторам* $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ *та* $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$,

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

3. *Рівняння площини, що проходить через три точки* $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 .$$

4. *Рівняння площини у відрізках на осях*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 .$$

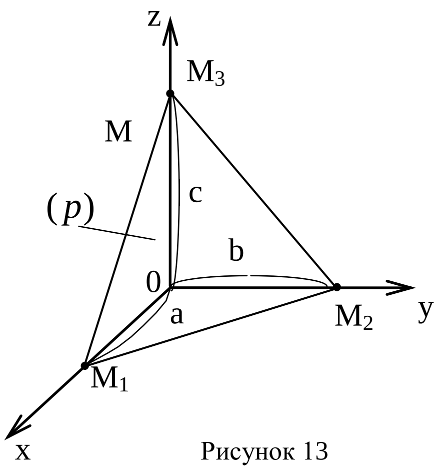


Рисунок 13

5. *Загальне рівняння площини*

$$Ax + By + Cz + D = 0\ ,$$

де коефіцієнти A, B, C, D – довільні числа, які одночасно не дорівнюють нулю.

1) Площина $Ax + By + Cz = 0$ проходить через початок координат.

2) Площини $By + Cz + D = 0$, $Ax + Cz + D = 0$, $Ax + By + D = 0$ відповідно паралельні координатним осям Ox, Oy, Oz.

3) Площина $Cz + D = 0$ або $z = -\dfrac{D}{B}$, $B \neq 0, D \neq 0$, паралельна осям Ox та Oy, тобто площина паралельна площині Oxy. Аналогічно інші випадки.

Розглянемо дві площини p_1 та p_2, задані загальними рівняннями відповідно

$$p_1:\quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0;\quad \vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)\,;$$

$$p_2:\quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0;\quad \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)\,.$$

Якщо $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$, то площини p_1 і p_2 збігаються.

Умова паралельності двох площин

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}\,.$$

Умова перпендикулярності двох площин

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0\,.$$

Кут між площинами p_1 і p_2 визначається за формулою

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Відстань від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$ обчислюється за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Приклади розв'язання задач

28. Скласти рівняння площини якщо:

а) площина проходить через точку $A(-3; 7; 2)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{BC}$, якщо $B(3; 5; 1)$, $C(4; 5; 3)$;

б) площина проходить через точки $M_1(3; 3; -1)$ та $M_2(5; -4; 2)$ паралельно осі Oy.

► а) Вектор $\overrightarrow{BC} = (1; 0; 2)$ є нормальним вектором даної площини. Тому запишемо шукане рівняння як рівняння площини, що проходить через точку $A(-3; 7; 2)$ перпендикулярно заданому вектору $\vec{n} = (1; 0; 2)$,

$1 \cdot (x + 3) + 0 \cdot (y - 7) + 2 \cdot (z - 2) = 0$, звідси $x + 2z - 1 = 0$. ◄

► б) Зауважимо, що вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (2; -7; 3)$ належить даній площині, отже, паралельний до неї, а за напрямний вектор осі Oy можна взяти вектор $\vec{j} = (0; 1; 0)$. Запишемо рівняння площини, що проходить через точку $M_1(3; 3; -1)$ паралельно векторам $\overrightarrow{M_1M_2}$ та $\vec{j}$:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-3 & z+1 \\ 2 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

звідси $-3(x-3) - 0\cdot(y-3) + 2\cdot(z+1) = 0$, $3x - 2z - 11 = 0$.◀

29. Обчислити об'єм піраміди, яку відтинає площина $7x + 4y - 14z - 28 = 0$ від координатного кута.

► Перейдемо від загального рівняння площини $7x + 4y - 14z - 28 = 0$, до рівняння площини у відрізках. Запишемо дане рівняння у вигляді $7x + 4y - 14z = 28$ і поділимо його на 28. Отримаємо $\frac{x}{4} + \frac{y}{7} - \frac{z}{2} = 1$. Як відомо об'єм піраміди $V = abc/6$. У нашому випадку $a = 4$, $b = 7$, $c = 2$, тому $V = 4\cdot 7\cdot 2/6 = 28/3$ (куб. од.). ◀

30. Знайти відстань від точки $M_0(1;-6;-5)$ до площини, яка проходить через три точки $M_1(-1;2;-3)$, $M_2(4;-1;0)$, $M_3(2;1;-2)$.

► Складемо рівняння площини, що проходить через три точки M_1, M_2, M_3, і зведемо його до загального рівняння

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z+3 \\ 4+1 & -1-2 & 0+3 \\ 2+1 & 1-2 & -2+3 \end{vmatrix} = 0,$$

звідси $0\cdot(x+1) + 4\cdot(y-2) + 4\cdot(z+3) = 0$, $y + z + 1 = 0$.

Отже, відстань від $M_0(1;-6;-5)$ до площини $y + z + 1 = 0$ складе $d = \frac{|0\cdot 1 + 1\cdot(-6) + 1\cdot(-5) + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$.◀

31. Знайти рівняння площини, яка проходить через вісь Oz та точку $M_0\left(-3;1;-2\right)$.

► Рівняння площини, яка проходить через вісь Oz, $Ax+By=0$. Тут обов'язково $A\neq 0$, бо інакше площина не проходила б через точку $M_0\left(-3;1;-2\right)$. Поділивши обидві частини рівняння на A, дістанемо $x+B/A\,y=0$.

Так як шукана площина проходить через точку $M_0\left(-3;1;-2\right)$, то її координати задовольняють рівняння цієї площини, тобто $-3+B/A=0$, звідси $B/A=3$.

Отже, $x+3y=0$ – рівняння шуканої площини. ◄

32. Знайти кут між площинами $5x+9y-3z-1=0$ та $3x-y+2z+15=0$.

► Кут між площинами знаходимо з формули

$$\cos\varphi=\frac{\left|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2\right|}{\left|\vec{n}_1\right|\left|\vec{n}_2\right|}=\frac{\left|5\cdot 3+9\cdot(-1)-3\cdot 2\right|}{\sqrt{5^2+9^2+(-3)^2}\sqrt{3^2+(-1)^2+2^2}}=0,\ \varphi=\frac{\pi}{2}.◄$$

Завдання для самостійного розв'язання

53. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $C(0;-2;8)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{AB}$, якщо $A(4;3;2)$, $B(1;4;3)$.

54. Записати рівняння площини, яка проходить через точку $M(2;5;1)$ і паралельна площині $x+3y-4z+5=0$.

55. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $P(1;2;3)$ перпендикулярно до площин $x-y+z-7=0$ та $3x+2y-12z+5=0$.

56. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(1;2;-5)$ та $M_2(4;-1;3)$ паралельно осі Oz.

57. Обчислити об'єм піраміди, яку відтинає площина $2x-3y-9z-18=0$ від координатного кута.

58. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M(2;-1;3)$ і відтинає на координатних осях рівні відрізки.

59. Знайти відстань від точки $M_0(1;-6;-5)$ до площини, яка проходить через три точки $M_1(-1;2;-3)$, $M_2(4;-1;0)$, $M_3(2;1;-2)$.

60. Скласти рівняння площини, відносно якої точки $A(1;-2;0)$ і $B(3;2;6)$ симетричні.

61. Знайти кут між площинами:

а) $2x-y+z-4=0$, $4x-2y+2z+1=0$;

б) $x+y+\sqrt{2}z-3=0$, $x-y+\sqrt{2}z-1=0$.

62. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M\left(2;-3;4\right)$ і відтинає на координатних осях рівні відрізки.

63. Скласти рівняння площини у відрізках, якщо вона проходить через точку $M(6;-10;1)$ і відтинає на осі Ox відрізок $a=-3$, а на осі Oz – відрізок $c=2$.

64. З'ясувати, при якому значенні параметра C площини $3x-5y+Cz-3=0$ і $x-3y+2z+5=0$ будуть перпендикулярними.

2.5. Пряма у просторі

1. *Загальні рівняння прямої визначаються як перетин двох площин*

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases}$$

за умови, що ці площини не паралельні і не збігаються, тобто їх нормальні вектори неколінеарні.

2. *Канонічні рівняння прямої, що проходить через задану точку* $M(x_0;y_0;z_0)$ *паралельно напрямному вектору* $\vec{s}=(m;n;p)$, мають вигляд

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

3. *Параметричні рівняння* $\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt, \end{cases}$

де $M(x_0;y_0;z_0)$ – точка, що лежить на прямій, $\vec{s}=(m;n;p)\neq\vec{0}$ – напрямний вектор, t – змінний параметр.

4. *Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки* $M_1(x_1;y_1;z_1)$ та $M_2(x_2;y_2;z_2)$, мають вигляд $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

Кут між двома прямими

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}, \qquad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

визначається за формулою

$$\cos\varphi=\frac{|\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2|}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

Умова паралельності $\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$.

Умова перпендикулярності $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$

Кутом між прямою ℓ *та площиною* p є кут між прямою ℓ та її проекцією на площину p. Нехай пряму і площину задано рівняннями

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}, \qquad Ax+By+Cz+D=0.$$

Тоді кут між ними обчислюється за формулою

$$\sin\varphi=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{s}|}{|\vec{n}||\vec{s}|}=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Якщо пряма ℓ паралельна площині p, то вектори $\vec{n}$ та $\vec{s}$ перпендикулярні, тобто $Am+Bn+Cp=0$ – умова паралельності прямої і площини. Якщо пряма ℓ перпендикулярна до площини p, то вектори $\vec{n}$ та $\vec{s}$ паралельні, тому співвідношення $\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$ – умова перпендикулярності прямої і площини.

Приклади розв'язання задач

33. Пряма задана загальними рівняннями: $\begin{cases} x-5y-2z+2=0, \\ x-y-z-1=0. \end{cases}$ Записати канонічні та параметричні рівняння цієї прямої.

► Напрямний вектор цієї прямої є перпендикулярним до нормальних векторів $\vec{n}_1$ та $\vec{n}_2$ площин, які задають загальні рівняння прямої. Тоді $\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$, де $\vec{n}_1=(1;-5;-2)$, $\vec{n}_2=(1;-1;-1)$, тобто

$$\vec{s}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -5 & -2\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-5 & -2\\ -1 & -1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & -1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}1 & -5\\ 1 & -1\end{vmatrix}=3\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}\,.$$

Виберемо довільну точку, що лежить на прямій, розв'язавши систему рівнянь. Нехай $x=1$, тоді $\begin{cases}-5y-2z=-3,\\ -y-z=0,\end{cases}$ $y=-z,\quad 3z=-3,\quad z=-1,\ y=1$. Записуємо шукані канонічні рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(1;1;-1)$ і має напрямний вектор $\vec{s}=(3;-1;4)$, $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{4}$.

Від канонічних рівнянь прямої легко переходимо до її параметричних рівнянь

$$\begin{cases}x=1+3t,\\ y=1-t,\\ z=-1+4t.\end{cases}\quad ◄$$

34. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точки $A(-3;-5;6),\ B(-3;1;-4)$.

► Рівняння прямої запишемо як рівняння прямої, що проходить через дві задані точки,

$$\frac{x+3}{-3+3}=\frac{y+5}{1+5}=\frac{z-6}{-4-6}, \quad \frac{x+3}{0}=\frac{y+5}{6}=\frac{z-6}{-10}.$$

З отриманих рівнянь бачимо, що пряма паралельна осі Ox.◄

35. Знайти кут між прямими

$$\begin{cases} 3x+y-5z+2=0, \\ 2x+3y-8z-3=0 \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} x=2-t, \\ y=3-2t, \\ z=3t. \end{cases}$$

► Бачимо, що для другої прямої напрямний вектор $\vec{s}_2=(-1;-2;3)$. Напрямний вектор першої прямої знаходимо із формули

$$\vec{s}_1=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & -8 \end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & -8 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -8 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=7\vec{i}+14\vec{j}+7\vec{k}.$$

Тоді

$$\cos\varphi=\frac{|\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2|}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}=\frac{|7\cdot 1+14\cdot(-2)+3\cdot 7|}{\sqrt{7^2+14^2+3^2}\sqrt{1^2+(-2)^2+7^2}}=0.$$

Отже, кут між прямими складає $\varphi=\frac{\pi}{2}$, тобто дані прямі перпендикулярні. ◄

36. Знайти проекцію точки $M(2;-2;3)$ на площину $2x-3y+z+1=0$.

► Проекцією точки M на площину буде основа перпендикуляра проведеного з цієї точки на площину. Отже, шукану проекцію знаходимо як точку перетину заданої площини прямою, проведеною через M перпендикулярно площині. В якості напрямного вектора цієї прямої можемо взяти нормальний вектор $\vec{n} = (2;-3;1)$ площини. Записавши канонічні рівняння прямої $\frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-3}{1}$, перейдемо до параметричних рівнянь $x = 2+2t$, $y = -2-3t$, $z = 3+t$. Знайдемо значення параметра t, яке відповідає проекції P. Координати точки P повинні задовольняти рівнянню площини, тобто $2\cdot(2+2t) - 3\cdot(-2-3t) + 3 + t + 1 = 0$, звідки $14t = -14$, $t = -1$. Тоді $x = 2 + 2\cdot(-1) = 0$, $y = -2 - 3\cdot(-1) = 1$, $z = 3 - 1 = 2$. Отже, $P(0;1;2)$ – проекція точки $M(2;-2;3)$ на площину $2x - 3y + z + 1 = 0$.◄

37. Задано піраміду з вершинами $A(2;-1;0)$, $B(5;5;3)$, $C(3;2;-2)$, $D(4;1;2)$. Знайти:

а) рівняння прямої, що проходить через точки A і B;

б) рівняння площини, що проходить через точки A, B, C;

в) рівняння висоти опущеної з вершини D на грань ABC та її довжину;

г) кут α між ребрами AB і AD;

д) кут β між ребром AD і гранню ABC.

► а) Рівняння прямої, що проходить через точки $A(2;-1;0)$ і $B(5;5;3)$, є таким

$$\frac{x-2}{5-2}=\frac{y+1}{5+1}=\frac{z-0}{3-0},\qquad \text{звідси} \qquad \frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{6}=\frac{z}{3},$$

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{1};$$ ◄

► б) Рівняння площини, що проходить через точки A, B, C, має вигляд

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-0 \\ 5-2 & 5+1 & 3-0 \\ 3-2 & 2+1 & -2-0 \end{vmatrix}=0,\quad 7x-3y-z+11=0.$$ ◄

► в) Нормальний вектор $\vec{n}=(7;-3;-1)$ площини грані ABC є напрямним вектором висоти, тому канонічні рівняння висоти матимуть вигляд

$$\frac{x-4}{7}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-2}{-1}.$$

Довжину висоти обчислимо як відстань від точки D до площини $7x-3y-z+11=0$

$$d=\frac{|7\cdot 4+(-3)\cdot 1-1\cdot 2+11|}{\sqrt{7^2+(-3)^2+(-1)^2}}=\frac{33}{\sqrt{59}}\ \text{(лін. од.)}.$$ ◄

► г) Кут α між ребрами AB і AD знаходимо як кут між векторами $\overrightarrow{AB}=(3;6;3)$ та $\overrightarrow{AD}=(2;2;2)$

$$\cos\alpha=\frac{3\cdot 2+6\cdot 2+3\cdot 2}{\sqrt{3^2+6^2+3^2}\sqrt{2^2+2^2+2^2}}=\frac{24}{18\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3},\ \alpha=\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$ ◄

► д) Кут β між ребром AD і гранню ABC шукаємо за формулою

$$\sin\beta = \frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}\right|}{\left|\vec{n}\right|\left|\overrightarrow{AD}\right|} = \frac{\left|7\cdot 2+(-3)\cdot 2+(-1)\cdot 2\right|}{\sqrt{7^2+(-3)^2+(-1)^2}\sqrt{2^2+2^2+2^2}} = \frac{6}{\sqrt{708}},$$

звідки $\beta = \arcsin\dfrac{6}{\sqrt{708}}$.◄

38. Знайти точку K, симетричну точці $P(1;2;3)$ відносно прямої $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z+1}{4}$.

► Через точку P проведемо площину, перпендикулярну даній прямій, і знайдемо координати точки O перетину площини і даної прямої. Напрямний вектор прямої $\vec{s}=(-1;-1;4)$ є перпендикулярним до площини. Запишемо рівняння площини, що проходить через точку $P(1;2;3)$ перпендикулярно вектору $\vec{s}=(-1;-1;4)$, отримаємо $-(x-1)-(y-2)+4(z-3)=0$, звідси $x+y-4z+9=0$. Координати точки O шукаємо із системи рівнянь

$$\begin{cases}\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z+1}{4},\\ x+y-4z+9=0,\end{cases} \quad \begin{cases}x=2-t,\\ y=3-t,\\ z=-1+4t,\\ 2-t+3-t-4(-1+4t)+9=0,\end{cases} \quad \begin{cases}t=1,\\ x=1,\\ y=2,\\ z=3.\end{cases}$$

Точка $O(1;2;3)$ є серединою відрізка PK, тому

$x_K = 2x_O - x_P = 0$, $y_K = 2y_O - y_P = 2$, $z_K = 2z_O - z_P = 3$,

тобто $K(0;2;3)$.◄

Завдання для самостійного розв’язання

65. Пряму задано загальними рівняннями:

а) $\begin{cases} 3x+4y+3z+1=0, \\ 2x-4y-2z+4=0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x+y+z-2=0, \\ 2x-y-3z+6=0. \end{cases}$

Записати канонічні та параметричні рівняння цієї прямої.

66. Скласти параметричні рівняння прямої, яка проходить через точки $A(2;3;1)$ та $B(4;1;-2)$.

67. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(0;2;3)$ перпендикулярно до площини $5x-3z+2=0$.

68. Знайти точку перетину прямої $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-4}{-1}$ і площини $2x-y+3z+23=0$.

69. Знайти проекцію точки $P(0;-3;-2)$ на площину $x-3y-2z+1=0$.

70. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(3;-2;7)$ паралельно прямій $\frac{x+2}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1}$.

71. Знайти точку A, симетричну точці $B(-1;2;0)$ відносно площини $4x-5y-z-7=0$.

72. Знайти точку C, симетричну точці $D(3;-1;0)$ відносно прямої $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z+1}{-1}$.

73. Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $A(5;3;1)$ на пряму $\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{3}$.

74. Знайти проекцію точки $P(-1;2;-1)$ на пряму $\frac{x+4}{2}=\frac{y+5}{5}=\frac{z+2}{4}$.

75. Знайти кут між прямими $\frac{x}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+2}{3}$ та $\begin{cases}2x+y-z-1=0,\\ 2x-y+3z-5=0\end{cases}$.

76. При яких значеннях m і C пряма $\frac{x-2}{m}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-5}{-6}$ перпендикулярна до площини $3x-2y+Cz+1=0$?

77. Обчислити відстань від точки $A(2;-1;0)$ до прямої $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{1}$.

78. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(2;3;1)$ перпендикулярно до прямої $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{3}$ і перетинає її.

79. При яких значеннях A та B площина $Ax+By+6z-7=0$ перпендикулярна до прямої $\frac{x-2}{2}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z+1}{3}$?

2.6 Поверхні другого порядку

Поверхнею другого порядку називається множина точок простору, декартові координати кожної з яких задовольняють рівняння другого степеня.

Сферою називається множина точок простору, рівновіддалених від заданої точки центра сфери. Якщо центром сфери є точка $O_1(a;b;c)$, а радіусом R, то рівняння сфери буде таким $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

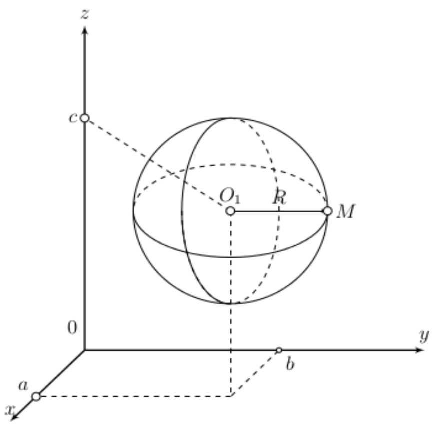


Рисунок 14

Якщо центр сфери знаходиться в точці $O(0;0;0)$ і радіус рівний R, то рівняння сфери має вигляд $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Поверхня називається *циліндричною*, якщо вона утворена прямою (твірною) паралельною до заданої прямої ℓ і проходить через задану лінію γ (напрямну лінію). Якщо твірна циліндричної поверхні паралельна осі Oz, а напрямна γ лежить в площині xOy і задана рівнянням $\begin{cases} F(x,y)=0, \\ z=0, \end{cases}$ то рівняння циліндричної поверхні матиме вигляд $\begin{cases} F(x,y)=0, \\ z\in(-\infty;+\infty). \end{cases}$

Рівняння $F(x,z)=0$ визначає циліндричну поверхню з твірною, що паралельна осі Oy, рівняння $F(y,z)=0$ – циліндричну поверхню з твірною, що паралельна осі Ox.

Розглянемо циліндри другого порядку :

а) *Еліптичним циліндром* називається поверхня (рис. 15), канонічне рівняння якої має вигляд $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

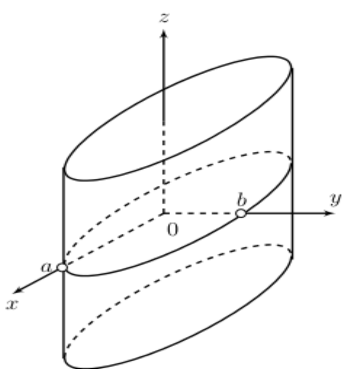


Рисунок 15

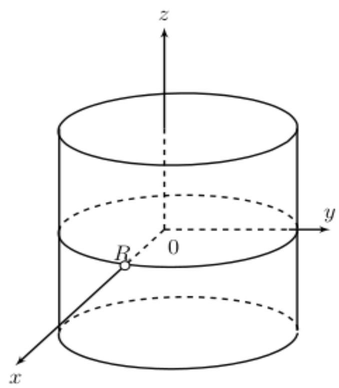


Рисунок 16

Якщо $a=b$ то маємо *круговий циліндр* $x^2+y^2=a^2$ (рис. 16).

б) *Гіперболічним циліндром* називається поверхня, рівняння якої має вигляд (рис. 17) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

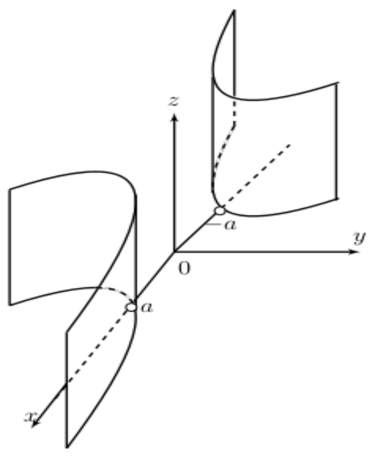


Рисунок 17

в) *Параболічним циліндром* називається поверхня, канонічне рівняння якої має вигляд (рис. 18)

$$y^2 = 2px .$$

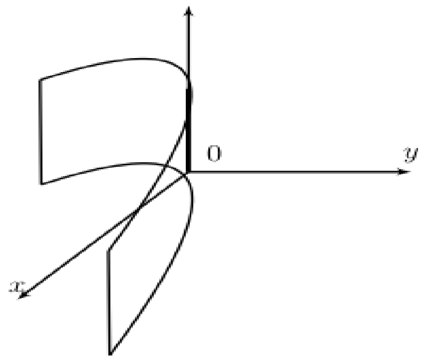


Рисунок 18

Еліпсоїдом називається поверхня, канонічне рівняння якої має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

де відрізки a, b, c – називають *півосями еліпсоїда* (рис. 19).

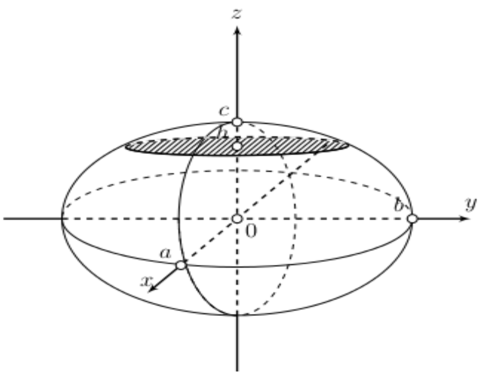


Рисунок 19

Однопорожнинним гіперболоїдом (рис. 20) називається поверхня, канонічне (найпростіше) рівняння якої має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

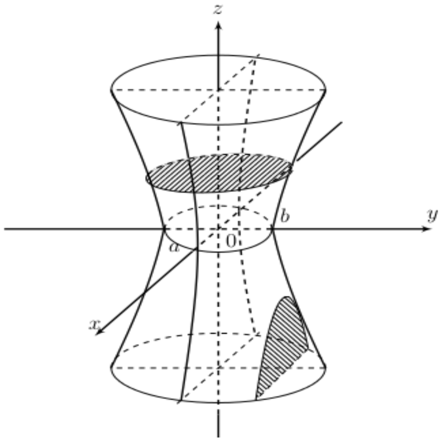


Рисунок 20

Двопорожнинним гіперболоїдом (рис. 21) називається поверхня, канонічне (найпростіше) рівняння якої має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

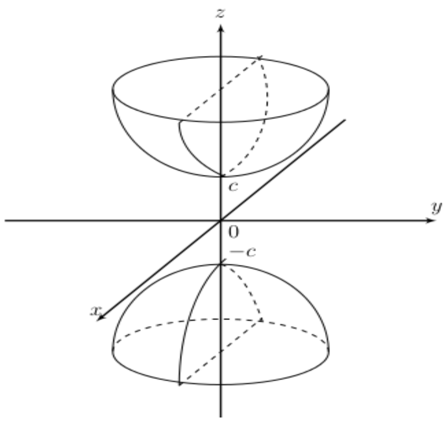


Рисунок 21

Еліптичним параболоїдом (рис. 22) називається поверхня канонічне (найпростіше) рівняння якої має вигляд

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z\ .$$

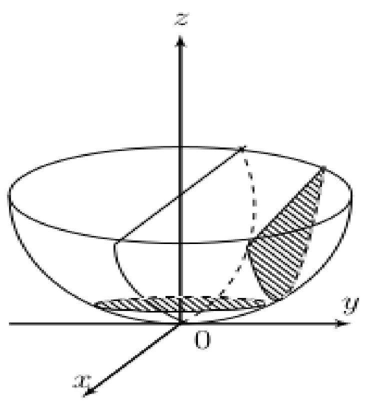


Рисунок 22

Гіперболічним параболоїдом (рис. 23) називається поверхня канонічне (найпростіше) рівняння якої має вигляд

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z\ .$$

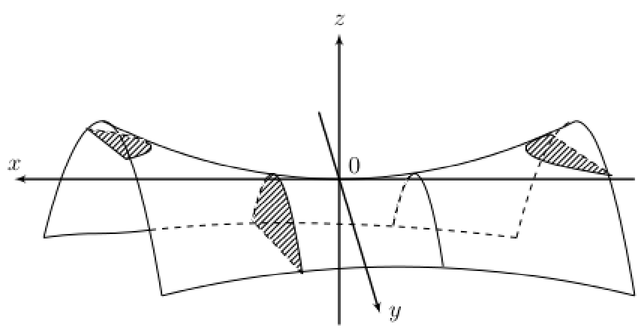


Рисунок 23

Конічною поверхнею (рис. 24) називається поверхня, яка описана прямою, що проходить через задану точку (вершину конуса), і перетинає задану лінію (напрямну конуса). Рівняння *конуса другого порядку* має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

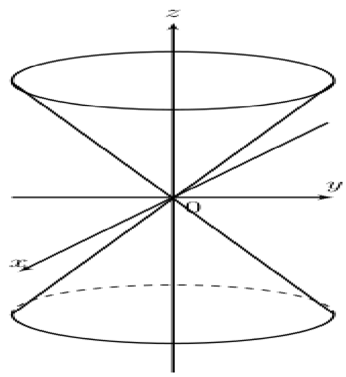


Рисунок 24

Приклади розв'язання задач

39. Визначити координати центра сфери і її радіус, якщо $x^2+y^2+z^2-6x+8y+10z+25=0.$

► Дане рівняння можемо перетворити так:

$x^2-2\cdot 3x+3^2-3^2+y^2+2\cdot 4y+4^2-4^2+z^2+2\cdot 5z+5^2-5^2+25=0,$
$(\mathrm{x}-3)^2+(y+4)^2+(\mathrm{z}+5)=25.$

Отже, центр сфери − точка $O(3;-4;-5)$, а радіус $R=5$.◄

40. Які поверхні визначаються рівняннями:

1) $x^2+z^2=9$, 2) $\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{6}=1$,

3) $z=2x^2$, 4) $\frac{x^2}{3}-\frac{z^2}{5}=1$?

► Кожне із цих рівнянь містить тільки дві змінні x і z та визначає в площині xOz криві: 1) коло; 2) еліпс; 3) параболу; 4) гіперболу.

У просторі ж кожне із них визначає циліндричну поверхню з твірними, що паралельні осі Oy, так як ці рівняння не містять змінної y. Напрямними цих циліндричних поверхонь є вказані криві. Отже:

1) $x^2 + z^2 = 9$ – рівняння прямого кругового циліндра;

2) $\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{6} = 1$ – рівняння еліптичного циліндра;

3) $z = 2x^2$ – рівняння параболічного циліндра;

4) $\frac{x^2}{3} - \frac{z^2}{5} = 1$ – рівняння гіперболічного циліндра. ◄

Завдання для самостійного розв'язання

80. Знайти центр та півосі еліпсоїда, заданого рівнянням $3x^2 + 4y^2 + 6z^2 - 6x + 16y - 36z + 49 = 0$.

81. Скласти рівняння сфери, якщо точки $A(2;-3;-5)$ і $B(4;-1;-3)$ є кінцями діаметра сфери.

82. Знайти лінії перетину однопорожниного гіперболоїда $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{4} = 1$ з площинами: а) xOy; б) yOz; в) $x = 6$.

83. Знайти точки перетину еліптичного параболоїда $z=\frac{x^2}{4}+y^2$ з прямою $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-10}{4}$.

84. Встановити, яку поверхню визначає рівняння $4x^2-2y^2-12z^2+4xy+12yz=0$.

85. Скласти рівняння конуса з вершиною в початку координат і твірною $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;\\ z=c\end{cases}$.

Відповіді до завдань для самостійного розв'язування

1. **а)** $\vec{AB}=(-2;-1;-1)$, $\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{6}$, $\cos\alpha=-\frac{2}{\sqrt{6}}$, $\cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{6}}$, $\cos\gamma=-\frac{1}{\sqrt{6}}$;

б) $\vec{AB}=(-4;5;0)$, $\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{41}$, $\cos\alpha=-\frac{4}{\sqrt{41}}$, $\cos\beta=\frac{5}{\sqrt{41}}$, $\cos\gamma=0$;

в) $\vec{AB}=(-3;-1;5)$, $\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{35}$, $\cos\alpha=-\frac{3}{\sqrt{35}}$, $\cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{35}}$, $\cos\gamma=\frac{5}{\sqrt{35}}$;

г) $\vec{AB} = (1;0;2)$, $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{5}$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta = 0$, $\cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

2. $\left|\vec{a} - \vec{b}\right| = 22$. **3.** $D(9;-5;6)$. **4**. $\alpha = -1$, $\beta = 4$.

5. $B(8;-1;10)$. **6**. 6. **7.** $\vec{d} = \vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$.

8. $ABCD$ – паралелограм. **9.** $C(3;-4;7)$, $D(5;2;3)$.

10. $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \left|\vec{a} - \vec{b}\right| = 13.$ **11.** $\sqrt{74} + \sqrt{2} + \sqrt{80}$.

12. $(1;-6)$, $\left(-\frac{3}{2};-\frac{11}{2}\right)$. **13. а)** 31; **б)** -1.

14. $45^0, 45^0, 90^0$. **15.** 3.

16. а) $\alpha = \arccos\frac{2}{\sqrt{6}}$, $np_{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}\left(3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}\right) = -\frac{18}{\sqrt{19}}$;

б) $\alpha = 135^0$, $np_{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}\left(3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}\right) = -10$.

17. 36. **18.** 6. **19.** $np_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB} = -\frac{47}{7}$.

20. а) $\frac{\sqrt{65}}{2}$; **б)** 12,5; **в)** 12,5; **г)** 12,5.

21. а) $\frac{\sqrt{65}}{3}$; **б)** $\frac{11}{5}$; **в)** $\sqrt{14}$; **г)** $\sqrt{\frac{141}{5}}$.

22. $21\sqrt{3}$. **23.** $\vec{M}(2;-1;-1)$. **24.** 3.

25. 15. **26.** 2.

27. а) 3; **б)** 42; **в)** 3; **г)** $\frac{25}{3}$.

28. Не лежать на одній площині.

29. $A_1, A_2 \in a, \quad A_3 \notin a$.

30. $y = -2, \quad x + y - 2 = 0, \quad x + y + 2 = 0$.

31. $AB: x - 2y + 8 = 0, \quad CD: x - 2y + 3 = 0$.

32. а) $x - 3y + 7 = 0$; **б)** $2x - 5y + 13 = 0$; **в)** $x - 3y + 7 = 0$.

33. $2x + y - 13 = 0, \quad 3x + 5y - 36 = 0, \quad 3x - 2y - 3 = 0$.

34. $(2,2;-2,4)$. **35.** $Q\left(-\frac{142}{13}; \frac{47}{13}\right)$.

36. а) $7\sqrt{5}$; **б)** $5\sqrt{5}$.

37. $\sqrt{5}$.

38. $2x + 3y - 19 = 0, \quad 2x + 3y + 27 = 0, \quad 8x - 11y - 7 = 0,$

$8x - 11y + 39 = 0$.

39. 1. а) $x + y - 3 = 0$; **б)** $2x + 2y + 11 = 0$; **в)** $x - y = 0$;

г) $\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{26}}\right)$; **д)** $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

2. а) $7x + 3y - 109 = 0$; **б)** $14x - 6y - 35 = 0$;

в) $17x - 21y + 4 = 0$; **г)** $\alpha = \arccos\frac{19}{5\sqrt{58}}$; **д)** $\frac{99}{\sqrt{58}}$.

3. а) $2x + 3y - 19 = 0$; **б)** $4x + 6y + 33 = 0$;

в) $21x-4y-22=0$; **г)** $\alpha=\arccos\frac{43}{\sqrt{6890}}$; **д)** $\frac{71}{\sqrt{13}}$.

4. а) $x-y+3=0$; **б)** $x-y-1=0$; **в)** $x+y-1=0$;

г) $\alpha=\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$; **д)** $4\sqrt{2}$.

40. $2x+y+7=0$, $x-2y+6=0$.

41. $x-2y+4=0$.

42. $(x-2)^2+(y+1)^2=25$.

43. $(x-1)^2+(y+1)^2=4$.

44. $(x-1)^2+(y-4)^2=8$.

45. а) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$; **б)** $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{15}=1$; **в)** $\frac{x^2}{625}+\frac{y^2}{400}=1$;

г) $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{15}=1$.

46. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$, $a=4$, $b=3$, $F_1\left(-\sqrt{7};0\right)$, $F_2\left(\sqrt{7};0\right)$,

$\varepsilon=\frac{\sqrt{7}}{4}$, $x=\pm\frac{16}{\sqrt{7}}$.

47. а) $\frac{x^2}{40}-\frac{y^2}{9}=1$; **б)** $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{1}=1$; **в)** $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}=1$;

г) $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$.

48. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$, $F_1\left(-2\sqrt{5};0\right)$, $F_2\left(2\sqrt{5};0\right)$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{2}$,

$x=\pm\frac{8}{\sqrt{5}}$, $y=\pm\frac{x}{2}$.

49. $\frac{(x-6)^2}{30}-\frac{(y-3)^2}{5}=1$, $(6;3)$, $a=\sqrt{30}$, $b=\sqrt{5}$,

$F_1(-\sqrt{35};0)$, $F_2(\sqrt{35};0)$, $\varepsilon=\sqrt{\frac{7}{6}}$, $x=\pm 6\sqrt{\frac{5}{7}}$, $y=\pm\frac{x}{\sqrt{6}}$.

50. а) $x^2=-36y$; **б)** $y^2=\frac{1}{4}x$; **в)** $y^2=-24x$; **г)** $x^2=4y$.

51. $(x+5)^2+(y+2)^2=104$. **52.** $(x+1)^2+(y+3)^2=10$.

53. $3x-y-z+6=0$. **54.** $x+3y-4z-13=0$.

55. $2x+3y+z-11=0$. **56.** $x+y-3=0$.

57. 27. **58.** $x+y+z-4=0$.

59. $5\sqrt{2}$. **60.** $x+2y+3z-11=0$.

61. а) 0^0; **б)** 60^0. **62.** $x+y+z-3=0$.

63. $4x+3y-6z+12=0$. **64.** -9.

65. а) $\frac{x}{4}=\frac{y-3,5}{12}=\frac{z+5}{-20}$, $\begin{cases} x=4t, \\ y=12t+7/2, \\ z=-20t-5; \end{cases}$

б) $\frac{x+1}{-2}=\frac{y-4}{8}=\frac{z}{-4}$, $\begin{cases} x=-2t-1, \\ y=8t+4, \\ z=-4t. \end{cases}$

66. $\begin{cases} x = 2t+2, \\ y == 2t+3, \\ z = -3t+1. \end{cases}$ **67.** $\dfrac{x}{5} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z-3}{-3}$**.**

68. $(-7;6;-1)$. **69.** $(-1;0;0)$.

70. $2x - y + z - 15 = 0$. **71.** $A(3;-3;-1)$.

72. $C(0;-1;-3)$. **73.** $\dfrac{x-5}{-6} = \dfrac{y-3}{0} = \dfrac{z-1}{2}$.

74. $(2;0;2)$. **75.** 90^0**.** **76.** $m = -6, \quad C = 3$.

77. $\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$. **78.** $\dfrac{x-2}{-3} = \dfrac{y-3}{-3} = \dfrac{z-1}{1}$.

79. $A = 4, \quad B = -8$.

80. $O(1;-2;3)$, $a = 2\sqrt{3}, \quad b = 3, \quad c = \sqrt{6}$.

81. $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z+4)^2 = 12$.

82. а) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$; **б)** $\dfrac{y^2}{25} - \dfrac{z^2}{4} = 1$; **в)** $\dfrac{z^2}{12} - \dfrac{y^2}{75} = 1$.

83. $M_1(-2;1;2)$ і $M_2(6;-3;18)$.

84. Дві площини

$$2x + (1+\sqrt{3})y - 2\sqrt{3}z = 0, \quad 2x + (1-\sqrt{3})y + 2\sqrt{3}z = 0.$$

85. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$.

3 Вступ до математичного аналізу

§ 1. Дійсні числа та множини

1.1 Множини

Одним із фундаментальних понять математики є *множина*. Поняття множини не означається, його можна хіба що описати як сукупність об'єктів довільної природи, об'єднаних за якоюсь ознакою. Так, можна говорити про множину студентів факультету, множину шахових фігур, множину парних чисел і т.д. Об'єкти, що входять в дану множину, називаються *елементами* множини.

Множини позначаються великими латинськими буквами $A, B, X, Y, \dots$, а їх елементи − малими латинськими буквами $a, b, x, y, \dots$. Якщо елемент a входить у множину A, то цей факт позначають $a \in A$, запис $a \notin A$ (або $a \,\overline{\in}\, A$) означає, що a не є елементом A.

Для часто вживаних множин використовують стандартні позначення: $\mathbb{N}$ − множина натуральних чисел, $\mathbb{Z}$ − множина цілих чисел, $\mathbb{Q}$ − множина раціональних чисел, $\mathbb{R}$ − множина дійсних чисел тощо. Якщо множина не містить жодного елемента, то її називають *порожньою* множиною і позначають $\varnothing$.

Запис $A = \{a, b, c, \dots\}$ означає, що множина A складається з елементів $a, b, c, \dots$. Якщо при цьому серед елементів A є рівні між собою, то їх пишуть лише один раз:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\},$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\},$$

$$\{1, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

В теорії множин часто множину задають за допомогою *характеристичної властивості* $F(x)$ її елементів. При цьому характеристичною вважають властивість, яку задовольняють всі елементи даної множини і тільки вони; це записують:

$$A=\{x \mid F(x)\} \text{ або } \{x\in A \mid F(x)\}.$$

Риску перед $F(x)$ слід читати як „такий, що“ або „при яких“, „де“. Також замість риски можна писати двокрапку $A=\{x : F(x)\}$.

Нехай A, B − множини. Запис $A\subset B$ означає, що кожний елемент множини A є також елементом множини B, тоді кажуть, що множина A є *підмножиною* множини B. Вважається, що порожня множина $\varnothing$ є підмножиною будь-якої множини. Відзначимо також, що $A\subset A$.

З множинами можна проводити операції, властивості яких нагадують властивості арифметичних операцій з числами. Це і зумовило назви таких операцій. *Сумою* (*об'єднанням*) множин A і B (позначається $A\bigcup B$) є множина елементів, які належать хоча б одній з множин A або B. *Добутком* (*перерізом або перетином*) множин A і B (позначається $A\bigcap B$) є множина їх спільних елементів; якщо $A\bigcap B=\varnothing$, то кажуть, що A і B не перетинаються. І, нарешті, *різницею* множин A і B (позначається $A\setminus B$) є множина таких елементів A, які не входять в B. За аналогією з арифметичними операціями з числами операції об'єднання та перерізу множин мають властивості комутативності та асоціативності, переріз є дистрибутивним відносно об'єднання, тобто для будь-яких множин A,B,C є слушним співвідношення $A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$ і т.д. Однак операції з множинами мають ряд властивостей, непритаманних операціям з числами. Так, для будь-якої множини A виконуються рівності $A\bigcap A=A$ і

$A \bigcup A = A$, а також справджується другий закон дистрибутивності $A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$ і т. д.

1.2 Логічні символи

У математичних твердженнях (означеннях, теоремах і т.п.) широко використовується економна символіка математичної логіки.

Спочатку введемо основні поняття математичної логіки. Одним з них є поняття *висловлювання*. Під висловлюванням розуміють твердження, сформульоване у вигляді речення, що задовольняє такі вимоги:

1. *кожне висловлювання є істинним (слушним) або хибним*;
2. *жодне висловлювання не може бути одночасно істинним (слушним) і хибним*.

Висловлювання позначаються великими рукописними буквами P, Q і т.п.

Приклад. «Число 7 не ділиться на 3 без остачі», «$8 > 5$» $-$ істинні висловлювання; „число 7 ділиться на 3 без остачі“, «$8 \le 5$» $-$ хибні висловлювання.

В математиці часто вживаються вирази: „для будь-якого елемента“ („яке б не було“, „всі“, „кожний“, „будь-який“) та „існує“ („знайдеться“, „деякий“, „хоча б один“). Для цих виразів прийняті особливі позначення: перший позначають символом $\forall$ (перевернута перша буква англійського слова „any“ $-$ „будь-який“), другий $-$ символом $\exists$ (повернута буква англійського слова „existence“ $-$ „існування“). Символи $\forall$ і $\exists$ називаються *кванторами* відповідно *загальності та існування*. Записують за допомогою кванторів і читають так: $\forall x$ «яке б не було x», «для кожного x »; $\exists x$ $-$«існує таке x, „знайдеться таке x» і т. п.

Користуються також символами обмежених кванторів: $\forall x \in B$ $-$ «для будь-якого x з множини B» (наприклад, $\forall \varepsilon > 0$ $-$ «для будь-якого додатного числа ε »); $\exists x \in B$ – «існує такий елемент x з множини B » ($\exists \delta > 0$ – „знайдеться таке додатне число δ “).

У розмовній мові для сполучення двох тверджень використовують слова „або“, „і“, „не“, „якщо , то“, „тоді і тільки тоді, коли ...“. В логічній символіці цьому відповідають операції над висловлюваннями.

Так, *логічною сумою* (*диз'юнкцією*) двох висловлювань P і Q називають висловлювання « P або Q », яке хибне тоді і тільки тоді, коли P і Q одночасно хибні. Позначення диз'юнкції – $P \vee Q$:

Логічним добутком (*кон'юнкцією*) висловлювань P і Q називають висловлювання P і Q , яке істинне тоді і тільки тоді, коли P і Q одночасно істинні. Позначення кон'юнкції – $P \wedge Q$.

Запереченням висловлювання P називають висловлювання „не P Р“, яке істинне, коли P хибне, і хибне, коли P істинне. Позначення заперечення – $\overline{P}$.

Розглянемо побудову заперечення до даного висловлювання з використанням логічних символів. Нехай висловлювання $P(x)$ сформульоване для будь-якого елемента x з множини B , тобто

$$\forall x \in B : P(x) \text{ або } (\forall x \in B)(P(x)).$$

Заперечення цього висловлювання можна сформулювати двома способами: $\overline{\forall x \in B : P(x)}$ – „не має місця твердження про те, що $P(x)$ істинне для всіх x із B “; $\exists x \in B : \overline{P}(x)$ – „в множині B знайдеться хоча б один елемент x , для якого не виконується $P(x)$ “. Аналогічно висловлювання $\overline{\exists x \in B : Q(x)}$ можна записати як $\forall x \in B : \overline{Q}(x)$.

Як бачимо, при „переході“ знаку заперечення через квантори $\forall$ і $\exists$ останні змінюються відповідно на $\exists$ і $\forall$, заперечуються також і висловлювання.

Слідуванням (*імплікацією*) двох висловлювань P і Q називають висловлювання «якщо P, то Q», яке хибне тоді і тільки тоді, коли P істинне, а Q хибне. Позначення імплікації $-$ PQ.

Якщо одночасно PQ та QP, то висловлювання P і Q називають *еквівалентними* і записують $P \Leftrightarrow Q$. Тоді в будь-яких міркуваннях одне з цих висловлювань можна замінити іншим.

І, нарешті, зробимо декілька зауважень щодо побудови *теорем* та їх *класифікації*.

Теорема – це математичне твердження, істинність якого встановлюється шляхом доведення (шляхом міркувань). Формулювання будь-якої теореми складається з двох частин: *умови* $P(x)$ і *висновку* $Q(x)$. При цьому теорему можна записати так

$$\forall x : P(x)Q(x) \text{ (або } PQ)$$

Для того, щоб показати, що теорема $P(x)Q(x)$ хибна, досить знайти хоча б одне таке x, при якому $P(x)$ має місце, а $Q(x)$ $-$ ні. Таке значення x називається *контрприкладом* для даної теореми.

В математиці розглядається чотири типи теорем: Пряма теорема $-$ PQ. Обернена теорема $-QP$. Протилежна теорема $-\overline{PQ}$. Обернена протилежній (протилежна оберненій) теорема $-\overline{QP}$. Користуючись імплікацією, можна довести, що $(PQ) \Leftrightarrow (\bar{Q}\bar{P})$ і $(QP) \Leftrightarrow (\bar{P}\bar{Q})$.

В математиці зустрічаються теореми з трьома різними умовами: *необхідна, достатня, необхідна і достатня*.

Якщо імплікація PQ істинна, то Q називають необхідною умовою для P, а P $-$ достатньою умовою для Q. При $P \Leftrightarrow Q$ говорять, що P є необхідною і достатньою умовою для Q.

1.3 Дійсні числа

Дійсним числом будемо називати будь-який десятковий дріб, скінченний або нескінченний. Зазначимо, що будь-який скінченний десятковий дріб можна вважати нескінченним періодичним, дописуючи, наприклад, як період число нуль. У такому розумінні кожне дійсне число є нескінченним десятковим дробом. При цьому періодичний десятковий дріб (в тому числі з періодом 0) називають *раціональним* числом, а неперіодичний десятковий дріб – *ірраціональним* числом.

Необхідність введення ірраціональних чисел продиктована хоча б практикою вимірювання довжин відрізків. Якби у нашому розпорядженні були лише раціональні числа, то ми не змогли б знайти довжину діагоналі квадрата, сторона якого дорівнює одиниці.

Будь-яке раціональне число можна записати у виді відношення $\frac{p}{q}$ двох цілих чисел p і q; дріб $\frac{p}{q}$ нескоротний. Сума, добуток і частка двох раціональних чисел є раціональним числом.

Кожне дійсне число (нескінченний десятковий дріб) можна замінити близьким до нього так званим *раціональним наближенням*: скінченним десятковим дробом, в якому перші n цифр після коми збігаються з першими n цифрами дійсного числа, а всі інші цифри замінюються нулем. Похибка при такій заміні не перевищує $1/10^n$.

В інженерних розрахунках арифметичні дії над дійсними числами замінюють відповідними діями над раціональними наближеннями.

Зауважимо, що практично для одержання наближеного результату з обумовленою точністю достатньо при всіх обчисленнях брати на один знак більше, ніж потрібно, а потім заокруглювати одержаний результат до потрібного числа знаків. Наприклад, для обчислення суми $\pi + \sqrt{3}$ з точністю до 0,01 одержимо

$$\pi + \sqrt{3} \approx 3{,}142 + 1{,}732 = 4{,}874 \approx 4{,}87 .$$

Кожне дійсне число зображається точкою координатної осі (числової прямої). Множину дійсних чисел позначають $\mathbb{R}$; через $\mathbb{R}_+$ позначають множину дійсних додатних чисел, а через $\mathbb{R}_-$ − множину дійсних від'ємних чисел. Вживають також позначення, про які йшлося вище: $\mathbb{N}$ − множина натуральних чисел, $\mathbb{Z}$ − множина цілих чисел, $\mathbb{Q}$ − множина раціональних чисел. Порожню множину (не тільки числову) позначають $\varnothing$.

Якщо X − підмножина дійсних чисел, то запис $x \in X$ означає, що число x належить X, а запис $x \notin X$ означає, що число x не належить X.

Перелічимо властивості множини всіх дійсних чисел (множини $\mathbb{R}$). Множина $\mathbb{R}$ *упорядкована*; це означає, що між будь-якими двома числами a і b має місце одне і тільки одне з трьох співвідношень: $a < b$, $a = b$, $a > b$. Множина $\mathbb{R}$ *щільна:* між будь-якими двома різними числами a і b міститься хоча б одне проміжне дійсне число c.

Множина дійсних чисел x, що задовольняють нерівність $a < x < b$, де a, b − фіксовані числа, називається *інтервалом* і позначається (a,b). Множина дійсних чисел x, що задовольняють нерівність $a \le x \le b$, називається *відрізком* (*сегментом*) і позначається $[a, b]$. Множина дійсних чисел x, що задовольняють нерівності $a \le x < b$ або $a < x \le b$, називається півінтервалом і позначається відповідно $[a,b)$ або $(a,b]$. Інтервал, відрізок, півінтервал об'єднуються загальною назвою *проміжок* з позначенням $\langle a,b\rangle$. Інтервал (a,b) називають також відкритим проміжком, відрізок $[a,b]$ − замкненим проміжком; тоді кожний з проміжків $[a,b)$, $(a,b]$ є „напівзамкненим“ чи „напіввідкритим“.

Інтервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ називається ε*-околом* числа a. В розмовній мові для образності вживається також термін «ε-окіл точки a». Множину дійсних чисел $x > E$ називаємо E-околом невластивої точки $+\infty$, а множину дійсних чисел $x < -E\,(E > 0)$ – відповідно E-околом невластивої точки $-\infty$.

1.4 Абсолютна величина

Абсолютною величиною (модулем) числа x називається число (позначається $|x|$), що визначається умовами:

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{якщо } x < 0, \\ x, & \text{якщо } x \geq 0. \end{cases}$$

Властивості абсолютних величин:

1. $\forall x \in \mathbb{R} \, |x| \geq 0$;
2. нерівність $|x| \leq \alpha,\ \alpha \geq 0$ означає, що $-\alpha \leq x \leq \alpha$;
3. нерівність $|x| \geq \alpha,\ \alpha > 0$ означає, що $x \leq -\alpha$ або $x \geq \alpha$;
4. $|x \pm y| \leq |x| + |y|$;
5. $|x \pm y| \geq |x| - |y|$;
6. $|xy| = |x| \cdot |y|$;
7. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|},\ (y \neq 0)$.

При цьому зазначимо, що $|x+y| = |x| + |y|$ тоді і тільки тоді, коли обидва доданки однакового знаку; $|x-y| = |x| - |y|$ тоді і тільки тоді, коли x та y мають однакові знаки і $|x| \geq |y|$.

Приклади розв'язання задач

1. Нехай $A=\{3;5;6;8;9;10\}$, $B=\{1;2;4;8;10\}$. Знайти $A\bigcup B,\ A\bigcap B,\ A\setminus B,\ B\setminus A$.

► Використовуючи означення теоретико-множинних операцій, маємо

$A\bigcup B=\{1;2;3;4;6;8;9;10\}$, $A\bigcap B=\{8;10\}$, $A\setminus B=\{3;5;6;9\}$, $B\setminus A=\{1;2;4\}$.◄

2. Визначити істинність висловлювання:

а) число 42 ділиться на 7;

б) Харків – столиця України;

в) $\exists x\in\mathbb{R}:\ x+3>8$;

г) Кубань впадає у Чорне море.

►а) Висловлювання істинне, бо $42:7=6$.◄

►б) Висловлювання хибне, бо насправді Київ – столиця України. ◄

►в) Висловлювання істинне, бо $x+3>8$ маємо, що $x>5$. Отже, усі $x>5$ задовольняють відповідну нерівність. ◄

►г) Висловлювання істинне, позаяк річка Кубань справді впадає у Чорне море. ◄

3. Довести ірраціональність чисел:

а) $0,2020020002\ldots2\underbrace{000\ldots0}_{n}2\ldots$;

б) $\alpha-\beta$, де α – раціональне число, β – ірраціональне;

в) $\sqrt{3}$;

г) $\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

►а) По суті, треба встановити, що заданий десятковий дріб неперіодичний. Справді, між n-ою двійкою і $(n+1)$-ою двійкою знаходиться n нулів, чого не може бути в періодичному дробі. ◄

►б) Доведення проведемо методом від супротивного. Припустимо, що $\alpha-\beta=\gamma$ є раціональним числом. Тоді $\beta=\alpha-\gamma$ також є раціональним числом як різниця двох раціональних чисел, що суперечить умові. А тому наше припущення неправильне і число $\alpha-\beta$ – ірраціональне. ◄

►в) Доведення проведемо методом від супротивного. Припустимо, що існує нескоротний дріб $\frac{p}{q}$, квадрат якого дорівнює 3. Тоді $p^2=3q^2$, тобто p^2 – кратне трьом. А тоді і p – кратне 3. Справді, якби p було не кратним 3, то $p=3m+1$ або $p=3m+2$. Звідси, для $p=3m+1$ (подібні міркування застосовні й для $p=3m+2$) маємо $p^2=\left(9m^2+6m\right)+1$ – не кратне 3, бо $\left(9m^2+6m\right)$ кратне 3, але 1 не кратне 3. Таке не може бути, бо $p^2=3q^2$. Але, якщо p – кратне 3, то $p=3m$ і з рівності $p^2=3q^2$ випливає $9m^2=3q^2$, тобто $q^2=3m^2$. А отже, і число q – кратне 3. Таким чином, дріб $\frac{p}{q}$ – скоротний. Одержане протиріччя показує, що наше припущення про існування раціонального числа (нескоротного дробу), квадрат якого дорівнює трьом, є хибним. ◄

►г) Знову застосуємо доведення від супротивного. Припустимо, що число $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ раціональне. Тоді число $\sqrt{5}-\sqrt{3}=\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ також раціональне (як відношення двох раціональних чисел). Тоді і число $\sqrt{3}=\frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)-\right.$ $\left.-\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\right)$ є раціональним, що суперечить доведеному в попередньому прикладі.

Можна показати, що ірраціональним є також відношення довжини кола до довжини його діаметра, тобто число $\pi=3{,}1425926\ldots$.◄

4. Розв'язати нерівності:

а) $|3x-1|<1$;

б) $(x-3)^2\geq 9$;

в) $\left|x^2-5x+6\right|>x^2-5x+6$.

►а) Враховуючи властивість абсолютної величини, дану нерівність перепишемо у вигляді $-1<3x-1<1$, звідки $0<3x<2$ і $0<x<2/3$ або $x\in\left(0;\ 2/3\right)$.◄

►б) Задана нерівність рівносильна нерівності $|x-3| \ge 3$, звідки

$$\left[\begin{array}{l} x-3 \ge 3, \\ x-3 \le -3, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 6, \\ x \le 0, \end{array}\right.$$

тобто $x \in (-\infty, 0] \cup [6, \infty)$.◄

►в) Задана нерівність виконується при тих значеннях x, для яких $x^2 - 5x + 6 < 0$, звідки $2 < x < 3$.◄

5. Чи мають розв'язки рівняння:

а) $|x| = x + 7$; б) $|x| = x - 7$.

►а) При $x \ge 0$ приходимо до рівняння $x = x + 7$, яке розв'язку не має. При $x < 0$ маємо $-x = x + 7$, звідки $x = -\dfrac{7}{2}$. Це значення задовольняє задане рівняння. ◄

►б) При $x \ge 0$ приходимо до рівняння $x = x - 7$, яке розв'язку не має. При $x < 0$ маємо $-x = x - 7$, звідки $x = \dfrac{7}{2}$, що суперечить умові $x < 0$. Таким чином, дане рівняння розв'язків не має. ◄

6. Знайти корені рівняння

а) $|\sin 2x| = \sin 2x + 1$;б) $x^2 - 3|x| - 4 = 0$.

►а) Це рівняння можуть задовольняти тільки ті значення x, при яких $\sin 2x < 0$, тому перепишемо його так

$$-\sin 2x = \sin 2x + 1 \quad \text{або} \quad \sin 2x = -\frac{1}{2},$$

Звідки $2x = \pi k - (-1)^k \pi / 6$, або

$$x = \frac{\pi}{2} k - (-1)^k \pi / 12 \quad \left(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right). ◄$$

►б) Можна розв'язати це рівняння стандартним способом, розглядаючи випадки $x \geq 0$ і $x < 0$, але є простіший спосіб. Запишемо рівняння у вигляді $|x|^2 - 3|x| - 4 = 0$, звідки, позначивши $|x| = y \geq 0$, одержуємо $y_1 = 4,\ y_2 = -1$. Оскільки $y_2 < 0$ не підходить, то залишиться $|x| = 4$, тобто $x_1 = -4,\ x_2 = 4$.◄

7. Дослідити на обмеженість:

а) множину натуральних чисел;

б) множину чисел виду $\left\{ \dfrac{n^2}{2n^2 + 7} \right\},\ n = 1, 2, 3, \ldots$

►а) Множина натуральних чисел $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ обмежена знизу числом 1 і не обмежена зверху. Найменшим елементом цієї множини є число 1. ◄

►б) Оскільки при будь-якому натуральному n виконуються нерівності $0 < \dfrac{n^2}{2n^2 + 7} < \dfrac{n^2}{2n^2} = \dfrac{1}{2}$, то множина чисел $\left\{ \dfrac{n^2}{2n^2 + 7} \right\}$ обмежена зверху числом $\dfrac{1}{2}$, а знизу – нулем. ◄

Завдання для самостійного розв'язання

1. Нехай $A=\{-1,2;4;6;11;14\}$, $B=\{-1;3;5;6;14;18\}$. Знайти $A\bigcup B$, $A\bigcap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$.

2. Визначити істинність висловлювання:

а) число 56 ділиться на 9;

б) Варшава – столиця Польщі;

в) $\forall x\in\mathbb{R}x-5>13$;

г) гора Говерла розміщена у Гімалаях.

3. Довести ірраціональність чисел:

а) $\sqrt{5}$; б) $\sqrt{7}$; в) $\sqrt{11}$; г) $0{,}838338333\ldots$;

4. Розв'язати рівняння:

а) $|5x-4|=x^2$;б) $|\cos x|+\cos x-2=0$;

в) $\left|\dfrac{2x-5}{2x+5}\right|=\dfrac{2x-5}{2x+5}$; г) $|x^2-9x+8|=-(x^2-9x+8)$;

5. Розв'язати нерівності:

а) $|3x-1|<5$; б) $|-2x+5|>2$;

в) $|2x-3|-|-3x+5|>0$; г) $|x^2+8x|>|x^2|+|8x|$.

6. Довести обмеженість числових множин:

а) множина дробів вигляду $\left\{\dfrac{11n^2}{3n^2+7}\right\}$, де $n\in\mathbb{N}$;

б) множина дробів вигляду $\left\{\dfrac{15n^3-1}{5n^3+4}\right\}$, де $n\in\mathbb{N}$.

§ 2. Функція

2.1 Функція

Поняття функції, будучи одним з основних понять математики, формально не означається, хіба що описується як відображення, закон відповідності тощо.

Нехай X і Y − дві не порожні числові множини і задано закон f, який кожному елементу $x \in X$ ставить у відповідність один елемент $y \in Y$. Такий закон f називають *функцією* (або *відображенням* множини X в множину Y) і пишуть $f : X \to Y$, або $X \xrightarrow{f} Y$, або $y = f(x)$.

Множина X називається *областю визначення* (позначають $D(f)$), а множина Y − *множиною значень* функції (позначають $E(f)$). Змінну x називають *незалежною* (аргументом), а y − *залежною* змінною (значенням функції). Відзначимо також, що, як правило, під областю визначення функції f розуміють так звану природну область її існування, тобто сукупність *всіх* тих $x \in \mathbb{R}$, при яких операція f має зміст (значення функції існують і дійсні).

Наприклад, функція $y = 1/\sqrt{4 - x^2}$ своєю областю визначення має множину $X = [-2, 2]$, а множина значень в цьому випадку $Y = [2, +\infty)$.

Для функції $y = \sqrt{-1 - \cos \pi x}$ маємо $X = \{1 + 2k \mid k \in \mathbb{N}\}$, а $Y = \{0\}$.

2.2 Способи задання функції

Основні способи задання функції: *аналітичний* (задано формулу, що зв'язує змінні x і y), *графічний, табличний, словесний, алгоритмічний* (так задають функцію для роботи з нею на ЕОМ).

Функція вважається заданою *аналітично*, якщо вона задається формулою. При цьому поняття формули може бути розширене в залежності від знання математичного апарату на даному етапі. Треба відзначити також, що будь-яка формула є символічним записом деякого описаного раніше співвідношення. А тому, зрештою, немає різниці між заданням функції за допомогою формули або за допомогою опису співвідношення; ці відмінності чисто зовнішні. Зауважимо, що аналітичний спосіб, у свою чергу, ділиться на *явне* та *неявне* задання функції. Якщо функція задана рівнянням $y = f(x)$ розв'язаним відносно залежної змінної y, то кажуть, що функція *задана у явній формі або що є явною*. Під *неявним заданням* функції розуміють її задання у вигляді рівняння $F(x, y) = 0$. Якщо це рівняння вдається розв'язати відносно залежної змінної y, то отримаємо явне задання функції. Однак, далеко не завжди це можна зробити (наприклад, $e^x - x + y^2 - \cos y = 0$).

Наведемо приклади функцій, що задаються словесно.

1. Функція „антьє x“ або „ціла частина x“ (від французького entier – цілий): найбільше ціле число, що не перевищує x, позначається $y = [x]$, або $y = E(x)$, $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{Z}$.

2. Функція Діріхле (Петер Густав Лежен Діріхле – німецький математик, 1805-1859)

$$\lambda(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x - \text{ірраціональне число,} \\ 1, \text{ якщо } x - \text{раціональне число,} \end{cases}$$

$$X = \mathbb{R}, \quad Y = \{0;1\}.$$

3. Функція «$\operatorname{sign} x$» (від латинського signum – знак) може задаватись описово як знак числа x або аналітично

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & \text{якщо } x - \text{від'ємне}, \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \\ 1, & \text{якщо } x - \text{ додатне}, \end{cases} \qquad X = \mathbb{R}, \quad Y = \{-1; 0; 1\}.$$

Треба мати на увазі, що кожна означена функція, якщо для неї введене спеціальне позначення, може бути використана для означення інших функцій за допомогою формул, що містять новий символ. І, нарешті, зазначимо, що функція може бути задана різними формулами на різних ділянках області свого визначення.

Функцію $f: X \to Y$ можна зобразити на площині xOy як множину всіх точок (x, y), у яких перший елемент $x \in X$, а другий $y = f(x) \in Y$; таку множину точок $x \in X$ називають *графіком* (Γ_f) функції f:

$$\Gamma_f = \left\{ \left(x, f(x)\right) |_{x \in X} \right\}.$$

Очевидно, що X і Y є проекціями графіка функції $y = f(x)$ на координатні осі Ox та Oy відповідно. Зазначимо також, що прямі, проведені перпендикулярно до осі Ox в точках $x \in X$, перетинають графік функції Γ_f, причому лише в одній точці.

Графік дає корисну інформацію про поведінку функції і, якщо зобразити графік або його частину, то можна „побачити“ функцію. Але, зрештою, наскільки корисний графік при вивченні деяких конкретних функцій, настільки мало можна на нього покластися при вивченні довільних функцій. Розглянемо, наприклад, функцію Діріхле. Оскільки в кожному як завгодно малому проміжку лежать як раціональні, так і ірраціональні числа, то в кожному такому проміжку функція $y = \lambda(x)$ нескінченно „стрибає“ вверх і вниз між значеннями 0 і 1. Зрозуміло, що цього не можна зобразити жодним чином.

Поки що ми говорили про побудову графіка Γ_f якщо функцію задано. Але, іноді (наприклад, показання осцилографа, барографа, сейсмографа тощо) графік Γ_f задано і тим самим визначено функцію $f(x)$. В такому разі говорять про *графічне* задання функції. Оскільки вимірювання практично можна здійснити лише з певним ступенем точності, то значення функції, заданої графічно, як правило, наближені.

Табличний спосіб задання функції полягає в заданні таблиці окремих значень аргумента і відповідних їм значень функції.

При табличному заданні функції можна наближено обчислити значення функції і в тих точках, яких у таблиці немає. Для цього застосовується метод інтерполяції, який полягає в заміні функції між її сусідніми табличними значеннями деякою функцією простішої природи (наприклад, лінійною або квадратичною).

2.3 Складена функція

Нехай задано дві функції $x = \varphi(t)$, $y = f(x)$, такі, що $\varphi : T \to E(\varphi)$, $f : X \to E(f)$. Зрозуміло, що для кожного $t \in T$, такого, що $\varphi(t) \in X$, можемо поставити у відповідність значення $y = f\left[\varphi(t)\right]$.

Функція, визначена співвідношенням $F(t) = f\left[\varphi(t)\right]$, називається *складеною* функцією або суперпозицією (композицією) (від латинського composition – складання) функцій f і φ. При цьому змінні t, x, y називають відповідно внутрішньою, проміжною і зовнішньою змінними. Очевидно перетин множин $E(\varphi)$ значень функції φ і області визначення $D(f)$ функції f не має бути порожньою множиною $E(\varphi) \bigcap D(f) \neq \varnothing$.

Приклади:

1. Суперпозицією функцій $y = \cos x$ і $x = \sqrt[5]{t}$ є функція $y = \cos \sqrt[5]{t}$.

2. Функція $y = \lg tgx$ є суперпозицією функцій $y = \lg u$, $u = \mathrm{tg}x$.

2.4 Параметрично задані функції

Нехай задано дві функції

$$x=\varphi(t),\, y=\psi(t) \tag{1}$$

однієї незалежної змінної t, визначені на одному й тому самому проміжку. Якщо функція $x=\varphi(t)$ строго монотонна, то, відповідно до попереднього пункту, вона має обернену функцію $t=\Phi(x)$. Тому змінну y можна розглядати як складену функцію від x: $y=\psi(\Phi(x))$.

Задання функціональної залежності між x і y у вигляді двох функцій (1) називають *параметричним заданням функцій*. Допоміжна змінна t при цьому називається параметром. Всяка параметрично задана функція (1) визначає на площині Oxy деяку криву, проте не всяка параметрично задана крива визначає функцію.

Приклади.

1. Рівняння $x=R\cos t,\quad y=R\sin t,\ t\in[0;\pi]$ визначають функцію, оскільки функція $x=R\cos t,\ t\in[0;\pi]$ строго монотонна. Задана функція визначає півколо $y=\sqrt{R^2-x^2}$, розміщене у верхній півплощині.

2. Рівняння $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t, \end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$, задають параметричні рівняння еліпса з центром у початку координат та осями a та b.

2.5 Деякі класи функцій

В математичному аналізі розглядаються не окремі функції, а функції у загальному розумінні. Вони класифікуються за такими ознаками як парність, непарність, періодичність, монотонність тощо. Ці питання відомі зі шкільного курсу математики. А тому зупинимось тут лише на деяких уточненнях і зауваженнях, потрібних для подальших викладок.

Функція f, що визначена на проміжку f, симетричному відносно початку координат $x=0$, називається *парною* (*непарною*), якщо $f(-x)=f(x)$ $\left(f(-x)=-f(x)\right)$. Зазначимо, що в обох випадках такі функції не змінюють своєї абсолютної величини при зміні знаку аргументу.

Якщо Γ_f – графік парної функції, то точки $M_1\left(x, f(x)\right)$ і $M_2\left(x, f(x)\right), x \in X$, що симетричні відносно осі Oy, лежать на цьому графіку. Отже, графік парної функції симетричний відносно осі ординат. Аналогічно, графік непарної функції симетричний відносно початку координат. Варто зазначити, що симетрії відносно початку координат можна досягти „двома кроками“: спочатку симетрією відносно однієї координатної осі, а потім – відносно другої координатної осі

Поділ функцій на парні і непарні не є повним: існують функції, які є ні парними, ні непарними.

Функція f називається *періодичною*, якщо існує таке додатне число T (його називають *періодом* функції), що при всіх x в області визначення функції виконується рівність $f(x+T)=f(x)$. О*сновним періодом* функції називається найменший з періодів. Неважко переконатись, що сумою (добутком, часткою) двох періодичних функцій з однаковими періодами є також періодична функція з тим же періодом. Якщо ж періоди різні ($T_1 \neq T_2$), то періодом, наприклад, їх суми є число $T=mT_1=nT_2$ $\left(m, n \in \mathbb{N}\right)$, отже, для того, щоб спільний період існував, має виконуватися умова $\frac{T_1}{T_2} \in \mathbb{Q}$.

Функція $y=f(x)$ називається *зростаючою* (*спадною*) на деякому проміжку $\langle a,b\rangle$, коли із $x_2 > x_1$ $\left(\forall x_2, x_1 \in \langle a,b\rangle\right)$ випливає, що

$f(x_2) > f(x_1)$ $\left(f(x_2) < f(x_1)\right)$. Аналогічно вводяться поняття *неспадної* на проміжку $\langle a,b\rangle$ функції ($f(x_2) \geq f(x_1)$ при $x_2 > x_1$, де $x_2, x_1 \in \langle a,b\rangle$) та *незростаючої* на $\langle a,b\rangle$ функції ($f(x_2) \leq f(x_1)$ при $x_2 > x_1$, де $x_2, x_1 \in \langle a,b\rangle$).

Зростаючі, неспадні, спадні і незростаючі функції називаються монотонними, а зростаючі і спадні – строго монотонними. Якщо ж область визначення X функції $y = f(x)$ можна розбити на скінченне число проміжків, на кожному з яких функція монотонна, то таку функцію називають кусково-монотонною.

Функція f називається *обмеженою зверху* (*знизу*) на множині X, якщо існує число M (m), таке, що для всіх $x \in X$ виконується нерівність $f(x) \leq M$ ($f(x) \geq m$).

Функція f, яка обмежена на множині X зверху і знизу, називається *обмеженою*. Це означення можна перефразувати ще й так: існує число $C > 0$, таке, що для всіх $x \in X$ виконується нерівність $|f(x)| \leq C$. Як бачимо, означення обмеженої функції $f : X \to Y$ і означення обмеженості множини Y значень змінної y еквівалентні.

Особливістю графіка обмеженої на X функції f є існування горизонтальної смуги між прямими $y = m$ і $y = M$ (чи між $y = -C,\ y = C,\ C > 0$), в якій повністю знаходиться графік Γ_f.

2.6 Обернена функція

Нехай функція $f : X \to Y$ така, що кожного свого значення $f(x)$ вона набуває лише один раз. Іншими словами, різним $x_1, x_2 \in X$

відповідають різні $y_1, y_2 \in Y$ (такі відображення називають ще взаємно однозначними, а саму функцію − оборотною).

Якщо функція $y = f(x)$ оборотна, то рівняння $f(x) = y$ при кожному $y = y_1 \in Y$ має єдиний розв'язок $x_1 \in X$ $\left(f(x_1) = y_1\right)$. Отже, за допомогою рівняння $f(x) = y$ здійснюється відображення $\varphi = f^{-1}$ множини Y в множину X. Функцію $x = f^{-1}(y)$ називають *оберненою функцією* до функції $y = f(x)$, яку в такому випадку прийнято називати *прямою* функцією (не плутати з лінійною функцією, графік якої є прямою лінією). Щоб не плутати f^{-1} з $\dfrac{1}{f}$, звичайно для обернених функцій вживають спеціальні позначення (lg, arcsin, $\sqrt{\ }$ та ін.).

З означення оберненої функції випливає, що областю визначення f^{-1} є множина значень f, а множиною значень f^{-1} − область визначення f.

Достатньою умовою існування оберненої функції є монотонність функції $y = f(x)$. При цьому якщо функція зростає (спадає), то і обернена функція зростає (спадає).

Відзначимо також, що суперпозиція двох взаємно обернених функцій є тотожним перетворенням, а саме

$$f\left[f^{-1}(y)\right] \equiv y \in Y, \qquad f^{-1}\left[f(x)\right] \equiv x \in X .$$

Графік оберненої функції $x = \varphi(y)$ збігається з графіком функції $y = f(x)$ якщо значення змінної y, яка стала тепер аргументом, відкладати на осі Oy. Якщо ж незалежну змінну відкладати на осі Ox, тобто якщо записати обернену функцію у вигляді $y = \varphi(x)$, то графік оберненої функції буде симетричним до графіка функції $y = f(x)$ відносно бісектриси першого і третього координатних кутів (рис. 1) .

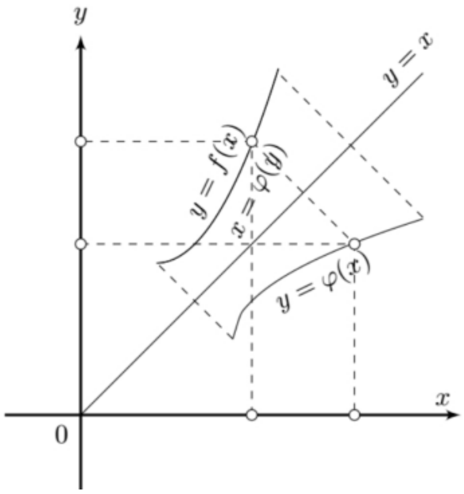


Рисунок 1: обернена функція

Цю властивість можна використати для побудови графіка оберненої функції, якщо відомо графік прямої функції.

2.7 Елементарні функції

Основними елементарними функціями є:

- степенева $f(x) = ax^{\alpha}$, $a \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$;
- показникова $f(x) = a^{x}$, $a > 0$, $a \neq 1$;
- тригонометрична $f(x) = \sin x$.

Зазначимо, що ми обмежились лише позначеннями основних елементарних функцій, бо їх властивості і графіки вивчають у шкільному курсі математики.

Елементарними функціями називаються функції, які можна задати одним аналітичним виразом, складеним з основних елементарних функцій за допомогою скінченного числа арифметичних операцій і скінченного числа утворень складених функцій. Також, якщо існує обернена функція до елементарної, то вона є елементарною.

Як бачимо, клас елементарних є доволі широким. Наприклад, $y = \cos x$ – елементарна, бо вона є суперпозицією функцій $y = \sin u$ і $u = x + \pi / 2$; $y = \mathrm{tg} x$ є елементарною як частка від ділення функції $y = \sin x$ на функцію $y = \cos x$. Також елементарною буде логарифмічна функція $y = \log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1$ як обернена до показникової.

2.8 Елементарні перетворення графіків функцій

При побудові графіків функцій застосовують наступні прийоми: побудова „за точками“, за властивостями функції (парність, непарність, періодичність, зростання, спадання тощо), дії з графіками (додавання, віднімання, множення графіків).

Поки що, у зв'язку з обмеженістю математичних засобів (в першу чергу, з відсутністю апарату диференційного числення), будемо використовувати геометричні перетворення відомих графіків: паралельне перенесення, розтяг, стиск, поворот. Так, знаючи графік функції $y = f(x)$, можна побудувати графіки функцій: $y = f(-x)$ – будуємо графік, симетричний даному відносно осі Oy; $y = -f(x)$ – будуємо графік, симетричний даному відносно осі Ox; $y = f(x) - a$ – початковий графік паралельно зсуваємо вздовж осі Ox на $|a|$ одиниць масштабу в напрямі знаку a; $y = f(x) + B$ – зсуваємо графік функції $y = f(x)$ вздовж осі Oy на $|B|$ одиниць в напрямі знаку B; [г)] $y = Af(x)$ $(A > 0)$ – початковий графік функції $y = f(x)$ „розтягуємо“ від осі Ox в A разів при $A > 1$ і

„стискаємо“ до осі Ox в $\frac{1}{A}$ разів при $A<1$; $y=f(kx)$ $(k>0)$ – заданий графік „стискуємо“ до осі Oy в k разів при $k>1$ і „розтягуємо“ від осі Oy в $\frac{1}{k}$ разів при $k<1$. Останні перетворення можна об'єднати у виді постановки такої задачі: за даним графіком функції $y=f(x)$ побудувати графік функції $y=Af(kx+b)+B$. Вираз доцільно переписати так

$$Af(kx+b)+B=Af\left(k\left(x+\frac{b}{k}\right)\right)+B.$$

Зрозуміло, що при цих перетвореннях треба враховувати знаки параметрів A та k.

Відзначимо також, що графік функції $y=f(|x|)$ одержується з графіка $y=f(x)$ так: для $x\geq 0$ зберігається графік функції $y=f(x)$, а потім будуємо графік, симетричний відносно осі Oy до збереженої частини (корисно пам'ятати, що функція $y=f(|x|)$ – парна).

Графік функції $y=|f(x)|$ розташований не нижче осі Ox. Він одержується з графіка $y=f(x)$ так: та частина, що не лежить нижче осі Ox, залишається без змін, а та, що лежить під віссю Ox, симетрично відображається відносно осі Ox.

Приклади розв’язання задач

8. Задано функцію $f(x)=\dfrac{3x+1}{3x-1}$. Знайти:

а) $f(3x)$; б) $3f(x)$; в) $f(x^3)$; г) $[f(x)]^3$.

► Легко переконуємось, що:

а) $f(3x)=\dfrac{9x+1}{9x-1}$; б) $3f(x)=3\dfrac{3x+1}{3x-1}$;

в) $f\left(x^3\right)=\dfrac{3x^3+1}{3x^3-1}$; г) $[f(x)]^3=\left(\dfrac{3x+1}{3x-1}\right)^3$.◄

9. Задано функцію $f(x)=x^2$. Знайти $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

► Знаходимо значення даної функції при $x=a$ і $x=b$: $f(a)=a^2$, $f(b)=b^2$. Тоді одержимо

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{b^2-a^2}{b-a}=b+a.◄$$

10. Задано функцію $f(x)=\begin{cases} 5^x-4 \text{ при } -1\le x<0, \\ 2-\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} \text{ при } 0\le x<\pi, \\ \dfrac{2-x}{x^2-3} \text{ при } \pi\le x\le 6. \end{cases}$

Знайти $f(-1)$, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$, $f(4)$, $f(6)$.

►Точка $x=-1$ знаходиться в проміжку $[-1;0)$, тому $f(-1)=5^{(-1)}-4=\dfrac{1}{5}-4=-\dfrac{19}{4}$.

Точки $x=\dfrac{\pi}{2}$, $x=\dfrac{2\pi}{3}$ лежать в проміжку $[0;\pi)$, тому $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2-\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}=2-1=1$, $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=2-\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}=2-\sqrt{3}$.

Точки $x=4,\ x=6$ лежать в проміжку $[\pi;6]$, тому $f(4)=\frac{2-4}{4^2-3}=-\frac{2}{13},\ f(6)=\frac{6-4}{6^2-3}=\frac{2}{33}$.◄

11. Знайти $\varphi[\psi(x)]$ і $\psi[\varphi(x)]$, якщо $\varphi(x)=x^3$ і $\psi(x)=5^x$.

► $\varphi[\psi(x)]=[\psi(x)]^3=(5^x)^3=5^{3x}$; $\psi[\varphi(x)]=5^{\varphi(x)}=5^{x^3}$.◄

12. Складені функції записати у виді суперпозицій основних елементарних функцій:

а) $y=\arccos\left(\cos^2 x\right)$; б) $y=tg^5\left(\ln\sin x\right)$.

►а) Задану функцію запишемо у вигляді $y=\arccos v$, де $v=u^2$, $u=\cos x$. Тут y – зовнішня змінна, x – внутрішня змінна, u і v – проміжні змінні.◄

►б) Суперпозиції основних елементарних функцій, починаючи із зовнішньої змінної y і закінчуючи внутрішньою змінною x, можна записати у вигляді ланцюжка $y=u^5,\ u=\mathrm{tg}v,\ v=\ln z,\ z=\sin x$.◄

13. Знайти області визначення функцій:

а) $f(x)=\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}$; б) $f(x)=\lg\left(x^2-16\right)$;

в) $f(x)=\arcsin\frac{2x}{3+x}$; г) $f(x)=\arccos\frac{3}{4+2\cos x}$;

д) $f(x)=\log_2\log_3\log_4 x$.

►а) Область визначення знаходимо як сукупність значень x, при яких одночасно виконуються нерівності $x-3\ge 0$ і $5-x\ge 0$, звідки $D(f)=[3;5]$.◄

►б) Вираз $\lg\left(x^2-16\right)$ має зміст при $x^2-16>0$, тобто при $x^2>16\Leftrightarrow |x|>4$. Звідси, областю визначення є об'єднання $(-\infty,-4)\cup(4;+\infty)$.◄

►в) Функція визначена при тих x, для яких $x\ne -3$ і $\left|\frac{2x}{3+x}\right|\le 1$, отже, мають одночасно виконуватись нерівності $\frac{2x}{3+x}\le 1$ і $\frac{2x}{3+x}\ge -1$.

Розв'язуємо кожну з цих нерівностей

$$\left(\frac{2x}{3+x}\le 1\right)\Leftrightarrow\left(\frac{2x}{3+x}-1\le 0\right)\Leftrightarrow\left(\frac{x-3}{3+x}\le 0\right)\Leftrightarrow x\in(-3;3];$$

$$\left(\frac{2x}{3+x}\ge -1\right)\Leftrightarrow\left(\frac{2x}{3+x}+1\ge 0\right)\Leftrightarrow\left(\frac{3x+3}{3+x}\ge 0\right)\Leftrightarrow x\in(-\infty;-3)\cup[-1;\infty).$$

Областю визначення функції є перетин цих множин, тобто $D(f)=[-1;3]$.◄

►г) Функція визначена при тих x, для яких $-1\le\frac{3}{4+2\cos x}\le 1$.

Оскільки $|\sin x| \le 1$, то при будь-яких x вираз $4+2\cos x>0$. Тому достатньо розв'язати нерівність $\dfrac{3}{4+2\cos x} \le 1$, звідки

$$(3 \le 4+2\cos x) \Leftrightarrow \left(\cos x \ge -\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \left(-\frac{2\pi}{3}+2\pi k \le x \le \frac{2\pi}{3}+2\pi k, k \in \mathbb{Z}\right).$$

Отже, $D(f)=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\left[-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k;\ \dfrac{2\pi}{3}+2\pi k\right]$.◄

►д) Функція $\log_2 \log_3 \log_4 x$ визначена при $\log_3 \log_4 x > 0$, а тому $(\log_4 x > 1) \Leftrightarrow (x > 4)$. Таким чином, $D(f)=(4;+\infty)$.◄

14. Функція $f(x)$ визначена на відрізку $[0;1]$. Знайти області визначення функцій:

а) $f\left(5x^4\right)$; б) $f(\mathrm{ctg}x)$.

►а) Введемо проміжний аргумент $u=5x^4$. Тоді функція $f\left(5x^4\right)=f(u)$ визначена, якщо $0 \le u \le 1$, тобто $0 \le 5x^4 \le 1$, звідки $-\dfrac{1}{\sqrt[4]{5}} \le x \le \dfrac{1}{\sqrt[4]{5}}$.◄

►б) Оскільки $0 \le \mathrm{ctg}x \le 1$, то $\dfrac{\pi}{4}+k\pi \le x \le \pi+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.◄

15. Дослідити на парність і непарність функції:

а) $f(x)=\lg\left(x^3+\sqrt{1+x^6}\right)$; б) $f(x)=x\dfrac{a^x+1}{a^x-1}$;

в) $f(x)=x^6\sqrt[5]{x}+2\sin x$; г) $f(x)=x^8+3x^3$.

►а) Знаходимо $f(x)+f(-x)=\lg\left(x^3+\sqrt{1+x^6}\right)+$
$+\lg\left(-x^3+\sqrt{1+x^6}\right)=\lg\left(-x^6+1+x^6\right)=\lg 1=0$, тобто $f(x)$.

Отже, задана функція непарна. ◄

►б) $f(-x)=-x\dfrac{a^{-x}+1}{a^{-x}-1}=-x\dfrac{1+a^x}{1-a^x}=x\dfrac{a^x+1}{a^x-1}=f(x)$.

Отже, функція $f(x)$ парна. ◄

►в) $f(-x)=x^6\sqrt[5]{-x}-2\sin x=-\left(x^2 6\sqrt[5]{x}+2\sin x\right)=-f(x)$, тобто функція непарна. ◄

►г) $f(-x)=x^8-3x^3$, тобто $f(-x)\neq f(x)$, $f(-x)\neq -f(x)$. Тому функція $f(x)$ не є ні парною, ні непарною. Тут $\left|f(-x)\right|\neq\left|f(x)\right|$; при зміні знаку аргумента змінюється абсолютна величина значення функції. ◄

16. Дослідити на періодичність функції:

а) $y=\sin x^2$; б) $y=\sin\omega x,\ \omega>0$;

в) $y=\sin x+\sin 3x$.

►а) Припустимо, що існує *число* $T>0$, таке, що при всіх значеннях x виконується рівність $\sin x^2=\sin(x+T)^2$.

Розв'язуємо рівняння

$$(\sin x^2-\sin\left(x+T)^2=0\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(2\sin\frac{x^2-(x+T)^2}{2}\cos\frac{x^2+(x+T)^2}{2}=0\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\sin\frac{2xT-T^2}{2}\cos\frac{2x^2+2xT+T^2}{2}=0\right).$$

Розв'язок цього рівняння існує, але не є числом, позаяк $T=T(x)$. Тому функція неперіодична. ◄

►б) Шукаємо число T з рівняння

$$\left(f(x+T)-f(x)=0\right)\Leftrightarrow\left(\sin\omega(x+T)-\sin\omega x=0\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(2\sin\frac{\omega T}{2}\cos\left(\omega x+\frac{\omega T}{2}\right)=0\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin\frac{\omega T}{2}=0,\\ \cos\left(\omega x+\frac{\omega T}{2}\right)=0.\end{array}\right.$$

Розв'язки другого рівняння $T=T(x)$. З першого рівняння знаходимо $\omega T/2=\pi k$, $k=\pm1,\pm2,\ldots$, тобто $T=2k\pi/\omega,\ k=\pm1,\pm2,\ldots$.

Отже, функція $\sin\omega x$ – періодична; її періоди $\frac{2\pi}{\omega},\ \frac{4\pi}{\omega},\ \frac{6\pi}{\omega},\ \ldots$,основний період $\frac{2\pi}{\omega}$.◄

►в) Кожний з доданків суми $f(x)=\sin 2x+\sin 3x$ є періодичною функцією (див. попередній приклад) з періодами відповідно $\{\pi,2\pi,3\pi,4\pi,\ldots,k\pi,\ldots\}$ і $\left\{\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3},2\pi,\frac{8\pi}{3},\ldots,\frac{2\pi n}{3},\ldots\right\}$, де $k,n\in\mathbb{N}$. Найменший спільний елемент цих двох множин є періодом функції $f(x)$. Отже, $T=2\pi$.◄

17. Знайти функції, обернені до заданих:

а) $y=\frac{1}{4}x-5$; б) $y=\sqrt[6]{x}$;

в) $y=x^2-x+1$; г) $y=\arcsin x^4,\ 0\le x\le 1$.

►а) Функція $y=\frac{1}{4}x-5$ визначена на всій числовій осі. Отже, її область визначення $X=D(y)=(-\infty,+\infty)$, а множина значень $Y=E(y)=(-\infty,+\infty)$. В області свого визначення вона зростає. Справді, при $x_2>x_1$ (тобто при $x_2-x_1>0$) маємо

$$y(x_2)-y(x_1)=\left(\frac{1}{4}x_2-5\right)-\left(\frac{1}{4}x_1-5\right)=\frac{1}{4}(x_2-x_1)>0\Rightarrow\left(y(x_2)>y(x_1)\right).$$

Тому обернена функція існує. Розв'язавши рівняння $y=\frac{1}{4}x-5$ відносно x, знаходимо обернену функцію $x=4y+20$. Переходимо тепер до звичних позначень: аргумент позначимо через x, а залежну змінну − y. Обернена функція − $y=4x+20$.◄

►б) Із змісту рівності $y=\sqrt[6]{x}$ бачимо, що область визначення функції $D(y)=[0;+\infty)$, а множина значень $E(y)=[0;+\infty)$. Функція в області визначення зростає $y_2-y_1=\sqrt[6]{x_2}-\sqrt[6]{x_1}>0$, якщо $x_2-x_1>0$.

Тому обернена функція існує і також зростає. Для вираження x через y перетворюємо рівняння $y=\sqrt[6]{x}$ таким чином $y^6 = x$. Переходячи до звичних позначень (замінюємо y на x, а x на y), одержимо $y = x^6$, де $0 \le x < \infty$. ◄

►в) Знаходимо проміжки зростання і спадання функції $y = x^2 - x + 1$. Нехай $x_2 > x_1$. Зробивши перетворення

$$y(x_2) - y(x_1) = \left(x_2^2 - x_2 + 1\right) - \left(x_1^2 - x_1 + 1\right) = \left(x_2^2 - x_1^2\right) - \left(x_2 - x_1\right) =$$

$$= \left(x_2 - x_1\right)\left(x_2 + x_1 - 1\right) = \left(x_2 - x_1\right)\left(\left(x_2 - \frac{1}{2}\right) + \left(x_1 - \frac{1}{2}\right)\right),$$

бачимо, що $y(x_2) - y(x_1) > 0$ при $x_2,\, x_1 \in \left[\frac{1}{2},\, +\infty\right)$ і $y(x_2) - y(x_1) < 0$ при $x_2,\, x_1 \in \left(-\infty,\, \frac{1}{2}\right]$. Отже, функція $y = x^2 - x + 1$ зростає на проміжку $\left[\frac{1}{2},\, +\infty\right)$ і спадає на проміжку $\left(-\infty,\, \frac{1}{2}\right]$, набираючи значень з $E(y) = Y = \left(\frac{3}{4}; +\infty\right)$. Тому на кожному з проміжків вона має обернену.

Знайдемо функцію, обернену до $y = x^2 - x + 1$ на проміжку зростання. Перепишемо задану функцію так $y = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$, звідки $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = y - \frac{3}{4}$. Отже, при $x \ge \frac{1}{2}$ маємо $x - \frac{1}{2} = \sqrt{y - \frac{3}{4}}$, $y \ge \frac{3}{4}$. Одержали обернену функцію

$x = \frac{1}{2} + \sqrt{y - \frac{3}{4}}$. Поміняємо місцями x та y, тоді $y = \frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{3}{4}}$. Ця функція здійснює відображення проміжку $\left[\frac{3}{4}; +\infty\right)$ на $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Подібним чином, знаходиться функція, обернена до даної на проміжку спадання $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$.◄

►г) Відомо, що функція $y = \arcsin t$ при $-1 \le t \le 1$ зростає. Тому, враховуючи, що $x^4 > 0$, можемо стверджувати: функція $y = \arcsin x^4$ при $x \in [0;1] = X$ також зростає. Множиною її значень є проміжок $Y = [\arcsin 0; \arcsin 1] = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Таким чином, функція, обернена до $y = \arcsin x^4$ при $x \in [0;1]$, існує

$$\left(y = \arcsin x^4\right) \Rightarrow \left(x^4 = \sin y, 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\right).$$

У звичних позначеннях (x – незалежна змінна, y – залежна змінна) цю функцію запишемо у вигляді $y = \sqrt[4]{\sin x}$. Вона відображає $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ на $[0;1]$.◄

18. Побудувати графіки функцій:

а) $y = 3^x - 3^{-x}$; б) $y = x \sin x$;

в) $y = 2^{|x|}$; г) $y = 2\sin\left(2x - 1\right)$.

►а) Будуємо графіки функцій $y_1 = 3^x$ і $y_2 = 3^{-x}$ пунктирними лініями, додаємо графічно їх ординати: оскільки знаки y_1 і y_2 протилежні то таке „додавання“ означає зменшення ординати y_1 на абсолютну величину ординати y_2. При цьому треба враховувати, що із зростанням x ордината y_2 нескінченно скорочується (прямує до нуля). Аналогічно, ордината $y_1 \to 0$ при русі абсциси x точки графіка на нескінченність вліво. Шуканий графік показано на рисунку суцільною лінією (рис. 2).◄

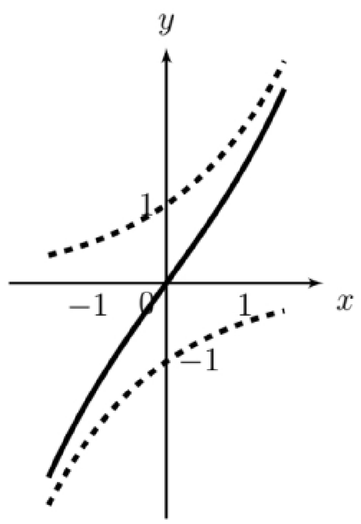


Рисунок 2: побудова графіка $y = 3^x - 3^{-x}$

►б) Функція $y = x\sin x -$ парна як добуток двох непарних функцій $y_1 = x$ і $y_2 = \sin x$, тому аналіз і побудову графіка досить проводити для $x \geq 0$. Звертаємо увагу на абсциси точок графіків-множників, ординати яких дорівнюють нулю або ±1. В точках з такими абсцисами ординати добутку $y(x) = x\sin x$ будуть відповідно нулем (графік перетинає вісь Ox) або ординатою першого множника: $y(x) = x,\ y(x) = -x$.

Останні рівності підказують: для побудови графіка $y = x\sin x$ доцільно побудувати графіки функцій $y_1 = x$ і $y_3 = -x$; тоді графік $y(x) = x\sin x$ „коливатиметься“ в куті між прямими $y(x) = x$ і $y(x) = -x$ аналогічно до того, як синусоїда „коливається“ у смузі між прямими $y = \pm 1$ (рис. 3).◄

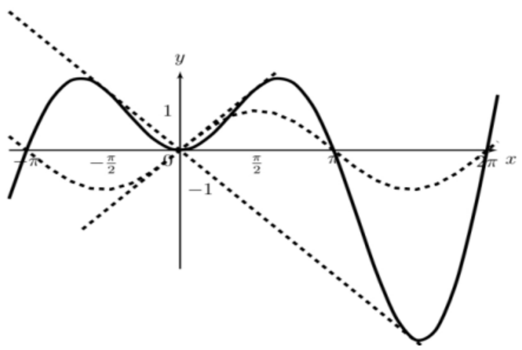


Рисунок 3: побудова графіка $y = x\sin x$

►в) Для побудови графіка $y = 2^{|x|}$ досить побудувати лише частину графіка функції $y = 2^x$ для $x \geq 0$. Графіком

$y=2^{|x|}$ для $x<0$ буде дзеркальне відображення відносно осі ординат вже побудованого графіка $y=2^{x}$, $x\geq 0$ (рис. 4).◄

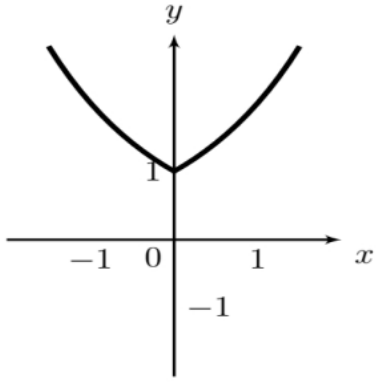
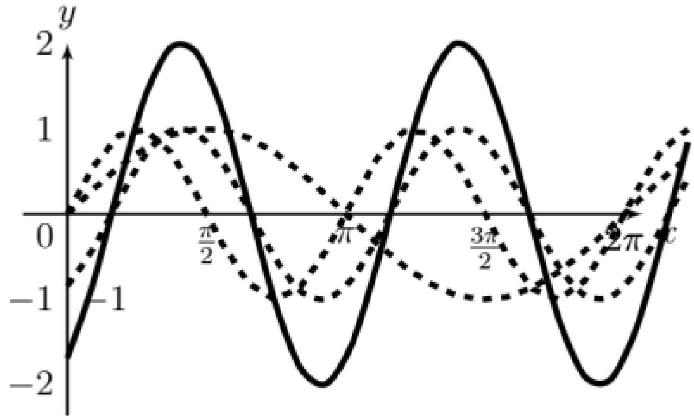


Рисунок 4: побудова графіка $y=2^{|x|}$

►г) Для побудови графіка функції $y=2\sin(2x-1)$ перепишемо дане рівняння у вигляді $y=2\sin 2\left(x-\frac{1}{2}\right)$ і скористаємось „перетворенням“ графіка функції $y=\sin x$ до графіка $Af\left(kx+b\right)$: тут $A=2,\ k=2,\ b=-1$ $\left(a=\frac{b}{k}=-\frac{1}{2}\right)$.

Отже, послідовність побудови така. Будуємо графік функції $y=\sin x$; „стискаємо“ його вздовж осі Ox (до осі Oy) в два рази – одержуємо $y_2=\sin 2x$; після цього зсуваємо його на $1/2$ одиниці праворуч – одержуємо $y_3=\sin 2\left(x-1/2\right)=$ $=\sin\left(2x-1\right)$ і, нарешті, розтягуємо останній графік вздовж осі ординат (від осі Ox) у два рази – одержимо $y = 2\sin(2x-1)$ (рис. 5)◄



Риунок 5: побудова графіка $y = 2\sin(2x-1)$

Завдання для самостійного розв'язання

7. Задано функцію $f(x) = \dfrac{2x^3 - 8}{4+3x}$. Знайти:

а) $f(-2x)$; б) $f(-x^2)$; в) $4f(x)$; г) $[f(x)]^2$.

8. Задано функції $f(x) = 3^{x^3}$, $\varphi(x) = x^3$. Знайти вираз для $f^3(x) + \varphi^2(x)$.

9. Задано функцію $f(x) = |x+2| - x - 2$. Знайти значення:

а) $f(-3)$; б) $f(0)$; в) $f(3)$; г) $f(-2)$;

д) $f(2)$ і побудувати графік функції.

10. Задано функцію $f\left(x\right)=\begin{cases} 2x^{3} & \text{при} \quad 0\le x\le 1, \\ 3-x & \text{при} \quad 1<x\le 2. \end{cases}$

Знайти значення: а) $f\left(0\right)$; б) $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$; в) $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$; г) $f\left(2\right)$ і побудувати графік функції.

11. Задано функцію $f\left(x\right)=\begin{cases} \cos x & \text{при} \quad -1<x<0, \\ 1+\sqrt{x} & \text{при} \quad 0\le x\le 2. \end{cases}$

Знайти значення: а) $f\left(1\right)$; б) $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$; в) $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$; г) $f\left(0\right)$; д) чи існує $f\left(3\right)$?

12. Суперпозицією яких основних елементарних функцій можуть бути одержані функції:

а) $y=\sin^{2}\dfrac{x+2}{4}$; б) $y=\sqrt[3]{(x-7)^{4}}$;

в) $y=3^{\arccos^{2}x^{3}}$; г) $y=\operatorname{arctg}^{2}\left(tg\,\dfrac{x^{2}+3x}{5}\right)$?

13. Знайти області визначення функцій:

а) $f\left(x\right)=\sqrt{9-x^{2}}+\dfrac{7}{x}$; б) $f\left(x\right)=\arcsin\left(\dfrac{x}{9}-3\right)$;

в) $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\left(3-x\right)e^{x}}$; г) $f\left(x\right)=\dfrac{x-6}{\cos 6x}$;

д) $f\left(x\right)=\ln\left|25-x^{2}\right|$; е) $f\left(x\right)=\dfrac{x}{\lg\left(3+x\right)}$;

є) $f\left(x\right)=\dfrac{4x-9}{\sqrt{x^2+2x+3}}$; ж) $f\left(x\right)=\sqrt{6-x}+\arcsin\dfrac{x+2}{5}$

.

14. Функцію $y=f\left(x\right)$ задано на відрізку $\left[0;1\right]$. Які області визначення функцій:

а) $f\left(\cos x\right)$; б) $f\left(3x-4\right)$?

15. Дослідити на парність і непарність функції

а) $f\left(x\right)=x^2-4\left|x\right|$; б) $f\left(x\right)=x\sin x-x^4$;

в) $f\left(x\right)=\dfrac{(1-2^x)^3}{4}$; г) $f\left(x\right)=3^x+3^{-x}$;

д) $f\left(x\right)=\lg\cos x$; е) $f\left(x\right)=x^2\cos 9x$.

16. Знайти основні періоди функцій:

а) $f\left(x\right)=\sin 5x$; б) $f\left(x\right)=-2\cos\dfrac{x}{3}+1$;

в) $f\left(x\right)=\lg\cos 2x$; г) $f\left(x\right)=\mathrm{tg}3x+\cos 4x$.

17. Знайти функції, обернені до заданих; вказати їх області визначення і множини значень:

а) $f\left(x\right)=\arccos\dfrac{x}{3}$ при $-3\le x\le 3$;

б) $f\left(x\right)=6^{\ln x}$; в) $f\left(x\right)=3^{\frac{x+3}{x-9}}$;

г) $f\left(x\right)=\sin\left(3x-1\right)$ при $\left(-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{3}\right)\le x\le\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{3}\right)$.

18. Побудувати графіки функцій за відомими графіками функцій $y=\varphi(x)$:

а) $f(x)=\cos(-3x+4)+1 \quad (\varphi(x)=\cos x)$;

б) $f(x)=-3\sin(5x+3) \quad (\varphi(x)=\sin x)$;

в) $f(x)=\arccos(2x-5) \quad (\varphi(x)=\arccos x)$;

г) $f(x)=2\sin x-3\cos x \quad (\varphi_1(x)=\sin x,\ \varphi_2(x)=\cos x)$;

ґ) $f(x)=3x-\dfrac{1}{x} \quad \left(\varphi_1(x)=x,\ \varphi_2(x)=\dfrac{1}{x}\right)$;

д) $f(x)=x+2\cos x \quad (\varphi_1(x)=x,\ \varphi_2(x)=\cos x)$;

е) $f(x)=\begin{cases}-x^3 & \text{при } x<0,\\ 2x^2 & \text{при } x\ge 0;\end{cases}$

є) $f(x)=\begin{cases}4-x & \text{при } x<-1,\\ 5 & \text{при } -1\le x\le 0,\\ x^2+5 & \text{при } x>0.\end{cases}$

§ 3. Числова послідовність. Границя послідовності

3.1 Числова послідовність

Послідовністю (*нескінченною числовою послідовністю*) називається функція $f(x)$, аргумент якої послідовно набуває значень натуральних чисел: $f(x)$, $x = 1, 2, 3, \dots$ (при цьому вважаємо, що множина $\mathbb{N}$ входить в область визначення D функції f).

Множину значень цієї функції можна записати в порядку зростання аргумента: $f(1), f(2), f(3), \dots, f(n), \dots$. Одержаний ряд чисел позначають $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ або скорочено $\{x_n\}$, де $x_n = f(n) -$ *загальний член* послідовності, $n -$ номер члена послідовності. Якщо відомий закон утворення загального члена, то послідовність вважається заданою.

Звернемо увагу на те, що між поняттями множина X значень членів послідовності x_n і послідовність $\{x_n\}$ є принципові відмінності: в множині X кожне число зустрічається лише один раз, а в послідовності $\{x_n\}$ воно може зустрічатись декілька (і навіть нескінченне число) разів: $-1, +1, \dots, (-1)^n, \dots$ (тут $X = \{-1, 1\}$); для членів послідовності $\{x_n\}$ встановлюється певний порядок, чого не можна сказати про елементи множини X .

3.2 Класифікація послідовностей та арифметичні операції з послідовностями

Послідовності класифікуються так само, як і функції. Зокрема, якщо $\forall n \in \mathbb{N} : x_{n+1} > x_n$ ($x_{n+1} < x_n$), то $\{\mathrm{x_n}\} -$ *зростаюча* (*спадна*) послідовність.

Якщо ж $x_{n+1} \geq x_n$ $(x_{n+1} \leq x_n)$, то послідовність *неспадна* (*незростаюча*). Зростаючі, неспадні, спадні, незростаючі послідовності утворюють клас так званих *монотонних* послідовностей. З цього класу виділяють клас *строго монотонних* послідовностей.

Послідовність $\{x_n\}$ називається *обмеженою*, якщо обмежена множина X *усіх* її значень, тобто якщо існує число $M > 0$, таке, що для *всіх* членів послідовності $\{x_n\}$ виконується нерівність $|x_n| \leq M$.

Якщо ж, яким би великим не було число $M > 0$, знайдеться хоча б один член x_n^* послідовності $\{x_n\}$, такий, що $|x_n^*| > M$, то така послідовність називається *необмеженою*. З необмежених послідовностей виділяють клас так званих *нескінченно великих* послідовностей: так називають послідовності $\{x_n\}$, для яких при довільному $M > 0$ знайдеться номер $N = N(M)$, такий, що *всі* (а не тільки деякі) члени x_N, x_{N+1}, x_{N+2}, … задовольняють нерівність $|x_n| \geq M$, якщо $n \geq N$.

З послідовностями виконують арифметичні операції в такому розумінні. Якщо $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ – дві числові послідовності, то їх сумою, добутком і часткою від ділення першої послідовності на другу називають відповідно послідовності $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$ і $\{x_n / y_n\}$. Зауважимо, що частку $\{x_n / y_n\}$ є зміст розглядати, якщо $y_n \neq 0$, хоча б починаючи з деякого номера N. Під добутком числа $\lambda \in \mathbb{R}$ на послідовність $\{x_n\}$ розуміють послідовність $\{(\lambda x_n)\}$.

3.3 Границя послідовності

Сформулюємо тепер поняття границі послідовності.

Означення 1 *Число a називають границею послідовності $\{x_n\}$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться номер $N = N(\varepsilon)$, такий, що для всіх членів послідовності x_n, номер яких $n > N$, виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$. При цьому записують $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ або $x_n \to a$* при $n \to \infty$. *Говорять також, що послідовність збігається до числа a.*

Сформульоване означення границі послідовності у логічній символіці можна записати так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}):(n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon)$$

За ε можна взяти будь-яке як завгодно мале додатне число. Номер N не може бути вибраним раз назавжди; він, взагалі кажучи, залежить від ε: $N = N(\varepsilon)$. Як правило, N не зменшується при зменшенні ε: чим більшої близькості значень x_n до числа a ми хочемо досягнути, тим більшими повинні бути номери членів послідовності.

У геометричному тлумаченні запис $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ означає, що в будь-якому як завгодно малому околі ε-точки a знаходяться всі члени послідовності, починаючи з деякого номера $N(\varepsilon)$, тобто зовні цього інтервалу залишається лише скінченне число членів послідовності.

Послідовність, що має границю, називається *збіжною*, в протилежному випадку − *розбіжною*.

Приклади:

1. Послідовність $N(\varepsilon)$ − збіжна, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-1}{n+1} = 2$.

2. Послідовність $-2,\ 2,\ -2,\ 2,\ \ldots,\ (-2)^n,\ \ldots$ − розбіжна.

Границю нескінченно великої послідовності (н.в.п.) позначають символом ∞ (нескінченність). Зокрема, якщо починаючи з певного номера, всі значення нескінченно великої послідовності додатні (від'ємні), то пишуть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty\right)$.

Для збіжних послідовностей є слушними ряд теорем.

Теорема 1. *Послідовність може мати тільки одну границю.*

Ця теорема відображає так звану властивість єдиності границі: двох різних границь у даної послідовності бути не може.

Теорема 2. *Якщо послідовність* $\{x_n\}$, *має границю, то ця послідовність обмежена.*

Зазначимо, що теорема 2 містить лише необхідну умову збіжності послідовності. Обернена до неї теорема дає достатню умову розбіжності: якщо послідовність $\{x_n\}$ необмежена, то вона не може мати границі (скінченної).

3.4 Нескінченно малі послідовності

Послідовність називається *нескінченно малою* (скорочено - н.м.п.), якщо її границя дорівнює нулю, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. В логічній символіці означення нескінченно малих записується так

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) : (n > N \Rightarrow |x_n| < \varepsilon)$$

Якщо порівняти означення границі $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ з означенням нескінченно малої, то одержуємо теорему.

Теорема 3. *Необхідною і достатньою умовою того, щоб послідовність* $\{x_n\}$ *мала границю* a, *є можливість зображення цієї послідовності у вигляді суми сталої* a *і нескінченно малої*

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n = a\right) \Leftrightarrow \left(x_n = a + \alpha_n,\ \text{де}\ \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0\right).$$

Перелічимо властивості нескінченно малих послідовностей:

а) алгебраїчна сума скінченного числа нескінченно малих є нескінченно малою;

б) добуток нескінченно малої послідовності і обмеженої послідовності є нескінченно малою;

в) величина, обернена до нескінченно малої $\{\alpha_n\}$, є нескінченно великою;

г) величина, обернена до нескінченно великої $\{A_n\}$, є нескінченно малою.

Зауваження 1. З властивості б) випливає, що добуток сталої на нескінченно малу і добуток двох нескінченно малих є нескінченно малою.

Зауваження 2. У властивості в) маємо на увазі, що нескінченно мала $\{\alpha_n\}$ не набуває значень, які б дорівнювали нулю (треба, щоб $\{A_n = 1/\alpha_n\}$ існувала).

3.5 Граничний перехід у рівностях і нерівностях

Шляхом арифметичних операцій з послідовностей $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ утворюють нові послідовності $\{u_n = x_n + y_n\}$, $\{v_n = x_n \cdot y_n\}$ і $\{w_n = x_n / y_n, y_n \neq 0\}$. Виникає питання про здійснення в одержаних рівностях граничного переходу. Для збіжних послідовностей $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$, де $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, є слушними теореми.

Теорема 4 *(про граничний перехід у рівностях). Якщо послідовності* $\{x_n\}$ *і* $\{y_n\}$ *мають границями відповідно* a *і* b, *то їх алгебраїчна сума, різниця, добуток і частка також мають границі, що дорівнюють*

$$\lim_{n\to\infty}(x \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n = a \pm b,$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = a \cdot b,$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n / y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n / \lim_{n\to\infty} y_n = a / b,$$

остання за умови, що $b \neq 0$.

Ця теорема дає можливість звести обчислення границь послідовностей до обчислення границь інших послідовностей, для яких така задача розв'язується простіше.

Зауваження. Твердження, обернене до теореми 4, взагалі кажучи, є хибним. Так, послідовності $\left\{x_n = \dfrac{1}{n} + (-2)^n\right\}$ і $\left\{y_n = \dfrac{1}{n+1} - (-2)^n\right\}$ границь не мають (бо $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ не існує); тоді як границя їх суми $\left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right\}$ існує і дорівнює нулю.

Теорема 5 *(про граничний перехід у нерівностях). Якщо послідовності* $\{x_n\}$ *і* $\{y_n\}$ *збігаються і, починаючи з деякого номера* N, *виконується нерівність* $x_n < y_n$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Зауваження. Якщо $x_n > c$ і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ існує, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \ge c$. Зокрема, границя послідовності додатних чисел не може бути від'ємною.

3.6 Ознаки існування границь

Зупинимось на деяких ознаках існування границі.

Теорема 6 *(про границю „проміжної“ змінної). Якщо члени послідовностей* $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ *і* $\{z_n\}$ *зв'язані нерівностями* $x_n \le y_n \le z_n$ *і при цьому границі „крайніх“ змінних* x_n *і* z_n *існують і рівні між собою, то границя „проміжної“ змінної* y_n *також існує і дорівнює границі „крайніх“ змінних.*

Теорема 7 *(теорема Больцано-Вейєрштрасса про границю монотонної обмеженої послідовності). Якщо послідовність* $\{x_n\}$ *зростає і обмежена зверху, то її границя існує.*

Відзначимо, що обидві умови (зростання і обмеженість) тут суттєві, у чому достатньо переконатися на прикладах.

Приклад 1. Послідовність $\left\{x_n = (-2)^n\right\}$ обмежена, оскільки $|x_n| \le 2$, але не монотонна; $\lim\limits_{n\to\infty}(-2)^n$ не існує.

Приклад 2. Послідовність $\left\{x_n = n^3\right\}$ зростаюча, але не обмежена; ця послідовність не має скінченої границі.

Разом з тим відзначимо, що монотонність послідовності не є необхідною умовою існування границі. Про це свідчить приклад $\left\{ x_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n+1} \right\}$.

Аналогічно, достатньою умовою існування границі спадної послідовності є її обмеженість знизу.

3.7 Число *e*. Експоненційна і гіперболічні функції. Натуральні логарифми

Класичним прикладом застосування теореми 7 є доведення існування границі послідовності $\left\{ x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \right\}$. Для цього спочатку переконуються, що змінна $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ зростає, а потім – що вона обмежена зверху.

Границю цієї послідовності позначають (на честь Ейлера) через e

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e .$$

Можна показати, що $2 < x_n < 3$, а тому в таких же межах знаходиться і число e. Відзначимо, що e – ірраціональне число (нескінченний неперіодичний десятковий дріб); його раціональні наближення: $e \approx 2,7$; $e = 2,71828182845\dots$. Границею $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ користуються при знаходженні багатьох інших границь.

Число e широко застосовується для утворення нових функцій. До них належить показникова функція з основою e: $y = e^x$. Її називають ще експонентою або експоненційною функцією. За допомогою експоненти означають гіперболічні функції: гіперболічний косинус ($\operatorname{ch} x$), гіперболічний синус ($\operatorname{sh} x$), гіперболічний тангенс ($\operatorname{th} x$), гіперболічний котангенс ($\operatorname{cth} x$)

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}; \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}.$$

Назва „гіперболічні функції“ пояснюється тим, що геометрично функції $\mathrm{u} = \operatorname{ch} x$ і $v = \operatorname{sh} x$ можуть бути визначені з розгляду рівнобічної гіперболи $u^2 - v^2 = 1$ за таким же правилом, за яким функції $u = \cos x$ і $v = \sin x$ (кругові функції) визначаються з розгляду одиничного кола $u^2 + v^2 = 1$.

Гіперболічні функції мають ряд властивостей аналогічних до теорем додавання для тригонометричних функцій, формули „тригонометричної одиниці“ та ін. Наведемо кілька таких формул

$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y, \quad \operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad \operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x.$$

І, нарешті, розглядають логарифми, основою яких є число e. Такі логарифми називають натуральними логарифмами і позначають $\ln$. Хоча, як для десяткових, так і для натуральних логарифмів складені таблиці значень, запишемо формули зв'язку між цими логарифмами

$$\ln x = \frac{1}{\lg e} \lg x \approx 2{,}3026 \cdot \lg x, \quad \lg x = \frac{1}{\ln 10} \ln x = \lg e.$$

Приклади розв’язання задач

19. Заданий загальний член послідовності $\{x_n\}$ $x_n = \dfrac{\sin\frac{\pi n}{2}}{n}$. Записати п'ять перших членів послідовності.

► Надаючи в загальному члені x_n послідовно 1, 2, 3, 4, 5, одержимо:

$$x_1 = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1} = 1, \quad x_2 = \frac{\sin\frac{2\pi}{2}}{2} = \frac{\sin\pi}{2} = 0,$$

$$x_3 = \frac{\sin\frac{3\pi}{2}}{3} = -\frac{2}{3}, \quad x_4 = \frac{\sin\frac{4\pi}{2}}{4} = 0, \quad x_5 = \frac{\sin\frac{5\pi}{2}}{5} = \frac{1}{3}. \blacktriangleleft$$

20. Знаючи декілька перших членів послідовності, написати один із можливих виразів для загального члена:

а) $\frac{1}{3}, \frac{4}{8}, \frac{9}{13}, \frac{16}{18}, \frac{25}{23};$ б) $1, \frac{1}{3}, 2, \frac{1}{4}, 3, \frac{1}{5}, 4, \frac{1}{6}.$

►а) Зауважимо, що чисельник кожного заданого члена дорівнює квадрату номера цього члена, тобто n^2. Неважко помітити також, що знаменники утворюють арифметичну прогресію $3, 8, 13, 18, 25, \ldots$ з першим членом $a_1 = 3$ і різницею $d = 5$. Отже, $a_n = a_1 + d(n-1) = 3 + 5(n-1) = 5n - 2$, тому $x_n = \frac{n^2}{5n-2}$. ◄

►б) В цьому прикладі загальний член послідовності можна записати за допомогою двох формул

$$x_n = \begin{cases} k & \text{при} \quad n = 2k-1, \\ 1/(k+2) & \text{при} \quad n = 2k. \end{cases} \blacktriangleleft$$

21. Користуючись означенням границі послідовності, показати, що:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-1}{3n+1}=1$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3+1}{7n^3-1}=\dfrac{2}{7}$.

►а) Тут $x_n=\dfrac{3n-1}{3n+1}$. Для будь-якого $\varepsilon>0$ спробуємо знайти таке натуральне число $N(\varepsilon)$, щоб для всякого натурального $n>N(\varepsilon)$ виконувалась нерівність $|x_n-1|<\varepsilon$.

Задача зводиться до розв'язання відносно n нерівності

$$\left(\left|\frac{3n-1}{3n+1}-1\right|<\varepsilon\right)\Leftrightarrow\left(\left|\frac{-2}{3n+1}\right|<\varepsilon\right)\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3n+1}<\varepsilon\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(2<(3n+1)\varepsilon)\quad\Leftrightarrow\quad\left(n>\left(\frac{2}{3\varepsilon}-\frac{1}{3}\right)\right).$$

За N можна взяти будь-яке натуральне число більше від числа $\left(\dfrac{2}{3\varepsilon}-\dfrac{1}{3}\right)$. Оскільки останнє число, взагалі кажучи, дробове, то номер N можна взяти на одиницю більшим за цілу частину від цього числа, тобто $N=\left[\dfrac{2}{3\varepsilon}-\dfrac{1}{3}\right]+1$.◄

►б) Тут $x_n=\dfrac{2n^3+1}{7n^3-1}$. Знайдемо n з нерівності $\left|x_n-\dfrac{2}{7}\right|<\varepsilon$

$$\left(\left|x_n-\frac{2}{7}\right|<\varepsilon\right)\Leftrightarrow\left(\left|\frac{2n^3+1}{7n^3-1}-\frac{2}{7}\right|<\varepsilon\right)\Leftrightarrow\left(\frac{9}{49n^3-7}<\varepsilon\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(49n^3-7\right)>\frac{9}{\varepsilon})\Leftrightarrow\left(n^3>\frac{9}{49\varepsilon}+\frac{1}{7}\right)\Leftrightarrow\left(n>\sqrt[3]{\frac{9+7\varepsilon}{49\varepsilon}}\right).$$

За N візьмемо натуральне число, більше від цілої частини числа $\sqrt[3]{\dfrac{9+7\varepsilon}{49\varepsilon}}$, наприклад, $N=\left[\sqrt[3]{\dfrac{9+7\varepsilon}{49\varepsilon}}\right]+1$.◄

22. Довести, що послідовність $\left\{\dfrac{1}{n^k}\right\}$ $(k>0)$ нескінченно мала.

► Візьмемо довільне число $\varepsilon>0$ і знайдемо n з нерівності $|x_n-0|<\varepsilon$

$$\left(\frac{1}{n^k}<\varepsilon\right)\Leftrightarrow\left(n^k>\frac{1}{\varepsilon}\right)\Leftrightarrow\left(n>\sqrt[k]{\frac{1}{\varepsilon}}\right),$$

а остання нерівність виконується, наприклад, при $N=\left[\sqrt[k]{\dfrac{1}{\varepsilon}}\right]+1$.◄

23. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2-3n-2\sqrt{n}\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-4n+5}{4n^2+3n-6}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n^2+1}-\sqrt{n^2+3}\right)$.

►а) Під знаком границі маємо різницю нескінченно великих, а тому для знаходження границі скористатись теоремою 4 не можемо. Винесемо у виразі $n^2-3n-2\sqrt{n}$ старший степінь, тобто n^2, за дужки. Тоді

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^2-3n-2\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(1-\frac{3}{n}-\frac{2}{n^{3/2}}\right)=\infty,$$

бо перший множник n^2 є нескінченно великою величиною, а вираз в дужках має границю, відмінну від нуля. ◄

►б) Як і в попередньому прикладі, переконуємось, що чисельник і знаменник дробу $\dfrac{3n^2-4n+5}{4n^2+3n-6}$ нескінченно великі. Оскільки при знаходженні границі не можемо застосувати теорему 4, то ділимо чисельник і знаменник дробу $\dfrac{3n^2-4n+5}{4n^2+3n-6}$ на n^2 (або виносимо в чисельнику і знаменнику цього дробу за дужки вираз n^2 і скорочуємо на нього)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-4n+5}{4n^2+3n-6}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}}{4+\frac{3}{n}-\frac{6}{n^2}}=\frac{3}{4},$$

бо $\dfrac{2}{n}, \dfrac{1}{n^2}, \dfrac{1}{n}$ є нескінченно малими як величини, обернені до нескінченно великих; а вже потім застосовуємо теорему 4. ◄

►в) Кожна з послідовностей $\left\{\sqrt{2n^2+1}\right\}$, $\left\{\sqrt{n^2+3}\right\}$ є нескінченно великою. Для знаходження границі їх різниці не можемо використати теорему 4. Тут ми маємо так звану невизначеність $\{\infty-\infty\}$. Щоб „розкрити“ цю невизначеність, вираз під знаком границі помножимо і поділимо на вираз

$\left(\sqrt{2n^2+1}+\sqrt{n^2+3}\right)$, який спряжений до даного. Таким чином, позбудемося коренів, отримавши у чисельнику різницю квадратів,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n^2+1}-\sqrt{n^2+3}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1-\left(n^2+3\right)}{\sqrt{2n^2+1}+\sqrt{n^2+3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2}{\sqrt{2n^2+1}+\sqrt{n^2+3}}.$$

Тепер чисельник і знаменник є нескінченно великими (невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$). При цьому старший степінь n у чисельнику – другий, а в знаменнику – перший; тому можемо стверджувати, що границею дробу буде ∞. Для переконливості в чисельнику і знаменнику винесемо за дужки старші степені n, тоді одержимо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1-\frac{2}{n^2}\right)}{n\left(\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1-\frac{2}{n^2}\right)}{\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}}=\infty,$$

бо границя знаменника $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}\right)=\sqrt{2}+1$, а чисельник є нескінченно великою величиною. ◄

24. Довести, що послідовності збіжні і знайти їхні границі:

а) $x_1=\sqrt{2},\ x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}},\ x_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\ldots,$

$$x_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n\text{ доданків}}, \ldots;$$

б) $x_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

►а) Очевидно, що $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < x_{n+1} < \ldots$, тобто дана послідовність зростаюча. Покажемо, що вона обмежена зверху.

Маємо $x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}$, $n = 2, 3, \ldots$. Оскільки $x_1 = \sqrt{2} < 2$, то $x_2 = \sqrt{2 + x_1} < \sqrt{2+2} = 2$. А далі „працюємо“ методом повної математичної індукції: припустимо, що $x_{n-1} < 2$ тоді $x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}} < \sqrt{2+2} = 2$. Отже, $\{x_n\}$ обмежена зверху, а тому границя послідовності існує. Позначимо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$. Знову виходимо з того, що $x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}$. Підносячи до квадрату, знаходимо $x_n^2 = 2 + x_{n-1}$.

Переходячи в цій рівності до границі, одержуємо

$$\lim_{n\to\infty} x_n^2 = \lim_{n\to\infty}\left(2 + x_{n-1}\right), \text{ або } y^2 = 2 + y.$$

Корені одержаного квадратного рівняння $y_1 = 2,\ y_2 = -1$.

Від'ємний корінь є стороннім, бо $x_n > 0$. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y_1 = 2$.◄

►б) Послідовність спадна. Справді,

$$x_{n+1}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}=\frac{n!}{(n+1)^n}=\frac{n!}{n^n}\frac{n^n}{(n+1)^n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n x_n<x_n,\text{ бо }\frac{n}{n+1}<1.$$

Оскільки $x_n>0$, то $\{x_n\}$ обмежена знизу. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ існує. Позначимо цю границю через l. Для знаходження l переходимо до границі у встановленому вище співвідношенні $x_{n+1}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n x_n$. Враховуючи другу важливу границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$, одержимо

$$l=\frac{1}{e}l \quad\Rightarrow\quad l=0.$$

Таким чином, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$.◄

25. Знайти границі послідовностей:

$$\text{а) }\lim_{n\to\infty}\frac{n!(n+1)^{n+1}}{n^n(n+1)!};\quad \text{б) }\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!(n+1)^{n+1}}{n^n(2n+1)!}.$$

Розкриваючи символи факторіалів, одержуємо

►а) $x_n=\frac{n!(n+1)^n(n+1)}{n^n n!(n+1)}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to e$.◄

►б) $x_n=\frac{(2n-1)!!(n+1)^{n+1}}{n^n(2n+1)!!}=\frac{(2n-1)!!(n+1)^n(n+1)}{n^n(2n+1)!!(2n+1)}=$

$$=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\frac{n+1}{2n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}.$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}=\frac{1}{2},\text{ то }\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{e}{2}.$$ ◄

Завдання для самостійного розв'язання

19. За заданими декількома першими членами послідовності підібрати одну з формул загального члена:

а) $\sqrt{1\cdot 2},\ \sqrt{2\cdot 3},\ \sqrt{3\cdot 4},\ \sqrt{4\cdot 5},\ldots;$

б) $\frac{1}{11},\ \frac{1}{21},\ \frac{1}{31},\ \frac{1}{41},\ldots;$

в) $\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{2\sqrt{2}},\ \frac{7}{4},\ \frac{9}{4\sqrt{2}},\ldots;$

г) $\frac{3}{4},\ -\left(\frac{6}{7}\right)^2,\ \left(\frac{9}{10}\right)^3,\ -\left(\frac{12}{13}\right)^4,\ldots.$

20. Знайти перші п'ять членів послідовності, якщо її загальний член задається формулою:

а) $x_n=2n\sin\frac{\pi n}{2}-3n^2\cos\pi n;$

б) $x_n = 2^{-n} \sin \dfrac{\pi n}{2}$;

в) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{3k(k+3)}$;

г) $x_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (n^2 - 2n - 5)$.

21. Довести, що послідовності зростаючі і обмежені:

а) $x_n = \dfrac{3n^2}{2n^2+3}$; б) $x_n = 3 - \arcsin \dfrac{1}{n^2+4}$.

22. Знайти найбільший член кожної з послідовностей, заданих своїми загальними членами:

а) $x_n = \dfrac{2n}{n^2+100}$; б) $x_n = \cos \pi n$;

в) $x_n = -1 + \dfrac{1}{n}$; г) $x_n = \dfrac{n+1}{n!}$.

23. Користуючись означенням границі послідовності, довести граничні рівності:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-1}{3n+5} = \dfrac{2}{3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+7}{8n^2-9} = \dfrac{3}{8}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{4^n} = 0$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3}{3^n} = 0$.

24. Довести збіжність послідовностей $\{x_n\}$ і знайти їхні границі:

а) $x_n = \sqrt[n]{a},\ a > 0$; б) $x_n = \dfrac{3n^2+2}{n^2}$;

в) $x_n = \dfrac{n^2-5}{2n^2}$; г) $x_n = 2+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\dots+\dfrac{1}{n!}$;

г) $x_1=\sqrt{3},\ x_2=\sqrt{3+\sqrt{3}},\ x_3=\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3}}},\ \dots,$

$$x_n = \underbrace{\sqrt{3+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{3}}}}_{n\text{ доданків}},\dots .$$

25. Знайти границі послідовностей:

а) $x_n = \dfrac{3-2n}{5n+1}-\dfrac{2n^2+7}{3n^2+4}$; б) $x_n = \dfrac{2n}{2n^2-1}\cos\dfrac{n+1}{2n-1}$;

в) $x_n = \dfrac{1-n-n^2}{(3n+1)^3}$; г) $x_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2+n}-\sqrt{n}}$;

г) $x_n = \sqrt{3n}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-4}\right)$; д) $x_n = \dfrac{(2n)^n(2n+3)!}{(2n+1)!\left(2(n+1)\right)^{n+1}}$;

е) $x_n = \dfrac{n^n((n+1)!)^3}{(n!)^3(n+1)^{n+1}}$; є) $x_n = \left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n}\right)\sin n^2$;

ж) $x_n = \left(4^{-n}-2\right)\left(5^{-n}-3\right)$; з) $x_n = \dfrac{5}{2^{1/n}-1}$.

§ 4 Границя функції

4.1 Означення границі функції

Поняття границі функції $f(x)$ в точці x_0 допомагає з'ясувати поведінку функції при наближенні аргумента x до значення x_0. При цьому йде мова не про суміщення x з x_0, а лише зближення, тобто про "мализну" величини $|x-x_0|$. Останнього можна досягти вимогою: x потрапляє в досить малий δ-окіл точки x_0, тобто $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$, де $\delta > 0$.

Зрозуміло, що нас цікавитимуть точки x з області X визначення функції $f(x)$. А тому, говорячи про наближення x до x_0, будемо вимагати, щоб функція $f(x)$ була визначена в точках $x \in X$, що належать деякому околу точки x_0. Як правило, вважатимемо, що функція визначена в усіх точках, хай і досить малого, околу точки x_0, крім, можливо, самого центру: тобто в усіх точках, для яких $0<|x-x_0|<\delta$ (так званий „проколений δ-окіл").

Дамо тепер означення границі функції в точці.

Означення 2 *(на „мові $\varepsilon-\delta$"). Число A називається границею функції $f(x)$ при $x \to x_0$ (в точці x_0), якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $\delta > 0$, що для всіх x, які задовольняють нерівність $0<|x-x_0|<\delta$, значення функції $f(x)$ задовольняють нерівність: $|f(x)-A|<\varepsilon$. Записується цей факт у вигляді*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A. \tag{2}$$

В логічній символіці дане означення записують так

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f)): (0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon).$$

Сформульоване означення пов'язують з іменем французького математика Коші (Огюстен Луї Коші, 1789-1857). В термінах „$\varepsilon-\delta$" рівність (0.2) означає: який би малий ε-окіл точки A ми не взяли, знайдеться проколений δ-окіл точки x_0 такий, що всі значення функції $f(x)$ в точках з цього δ-околу потраплятимуть в ε-окіл точки A.

Зауваження. У наведеному означенні число ε ($\varepsilon > 0$) беремо довільно, а число δ ($\delta > 0$) вже знаходимо: воно залежить від ε ($\delta = \delta(\varepsilon)$); як правило, із зменшенням ε зменшується і δ. Взагалі кажучи, δ залежить не лише від ε, а ще й від того, до якого значення прямує змінна x: при одному і тому ж ε можна одержати різні значення δ, якщо розглядати два різні процеси: $x \to x_1$, $x \to x_2$, тобто границю функції в різних точках.

Означення 3 *(на „мові послідовностей“). Число A називається границею функції $f(x)$ при $x \to x_0$, якщо для будь-якої послідовності значень аргументу $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ $(x_n \in X)$, що прямує до x_0, відповідна послідовність значень функції $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ має границею число A.*

Означення границі функції на мові послідовностей пов'язують з іменем німецького математика Гейне (Генріх Едуард Гейне, 1821-1881).

В літературі з математичного аналізу доводиться, що ці два означення границі функції в точці еквівалентні, тобто справедлива така теорема.

Теорема 8 *Для того, щоб існувала границя функції за Коші, необхідно і достатньо, щоб існувала границя функції за Гейне.*

Не віддаючи перевагу жодному з наведених означень, треба мати на увазі, що означенням границі функції на мові послідовностей зручно користуватись для доведення того, що функція $f(x)$ в деякій точці x_0 границі не має. Для цього вибирають дві різні послідовності значень аргумента, що прямують до одного і того ж числа x_0:

$$x'_n \to x_0, \quad x''_n \to x_0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

але такі, що відповідні їм послідовності значень функції мають своїми границями різні числа:

$$f(x'_n) \to A', \quad f(x''_n) \to A'' \text{ при } n \to \infty, \quad A' \neq A''.$$

Якщо у виразі (2) розглядати тільки $x < x_0$ ($x > x_0$),то одержимо поняття лівосторонньої (правосторонньої) границі функції $f(x)$ в точці x_0, яка позначається $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$, або $f(x_0 - 0)$ ($\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, або $f(x_0 + 0)$).

Якщо $x_0 = 0$, то замість $f(0-0)$ часто пишуть $f(-0)$, а замість $f(0+0)$ пишуть $f(+0)$.

Якщо існує границя (2), то існують і дві рівні між собою односторонні границі

$$\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = A\right) \Leftrightarrow \left(f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A\right).$$

Але з існування односторонніх границь функції $f(x)$ в точці x_0 ще не випливає існування границі функції в цій точці, бо односторонні границі можуть виявитися різними.

Зауваження. В наведених вище означеннях границі функції $f(x)$ в точці x_0 фактично вважається, що x_0 — внутрішня точка проміжку $\langle a,b \rangle$ існування функції. Якщо ж x_0 — один з країв проміжку $\langle a,b \rangle$, наприклад, $x_0 = b$, то до x_0 можна наближатись лише з „півоколу“ $(b-\delta,\, b)$, а тому одностороння границя $f(b-0)$ — це границя функції $f(x)$ у правому кінці проміжку $\langle a,b \rangle$. Аналогічно, $f(a+0)$ — це границя функції $f(x)$ в лівому кінці проміжку $\langle a,b \rangle$.

Означення (2) границі функції $f(x)$ в точці x_0 будемо вважати *першим випадком*: функція $f(x)$ в скінченній точці $(|x_0| < \infty)$ має скінченну границю $(|A| < \infty)$.

Другий випадок — цескінченна границя функції на нескінченності $x_0 = \pm\infty$, $|A| < \infty$. Геометрично цей випадок можна ілюструвати так: яку б вузьку горизонтальну ε-смугу (між прямими $y = A - \varepsilon$ і $y = A + \varepsilon$) ми не взяли, все ж з певного місця (при $|x| > \Delta$) графік функції $f(x)$ повністю потрапляє у цю смугу. Кажуть, що графік функції асимптотично наближається до прямої $y = A$ (має *горизонтальну асимптоту* $y = A$).

Означення на мові „$\varepsilon - \Delta$“ в логічній символіці у цьому випадку записується наступним чином

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists\Delta > 0)(\forall x \in D(f)) : (x > \Delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon);$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists\Delta > 0)(\forall x \in D(f)) : (x < -\Delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon).$$

Якщо $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$, то пишуть $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.

Третій випадок: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ геометрично ілюструють так: яку б широку $2E$-смугу (між прямими $y = -E$ і $y = E$) ми не взяли, знайдеться проколений δ-окіл точки x_0, в усіх точках якого графік функції $y = f(x)$ виходить за межі цієї смуги.

Пряму $x = x_0$ називають *вертикальною асимптотою*. Цьому випадку відповідає означення на мові „$E - \delta$“

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall E > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in D(f)) : (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > E);$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow (\forall E > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in D(f)) : (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -E).$$

Четвертий випадок: $x_0 = \pm\infty$, $A = \pm\infty$. Йому відповідають наступні означення на мові „$E - \Delta$“

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall E > 0)(\exists\Delta > 0)(\forall x \in D(f)) : (x > \Delta \Rightarrow f(x) > E),$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow (\forall E > 0)(\exists\Delta > 0)(\forall x \in D(f)) : (x > \Delta \Rightarrow f(x) < -E),$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow (\forall E>0)(\exists\Delta>0)(\forall x\in D(f)):(x<-\Delta\Rightarrow f(x)>E),$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \Leftrightarrow (\forall E>0)(\exists\Delta>0)(\forall x\in D(f)):(x<-\Delta\Rightarrow f(x)<-E).$$

Вище були розглянуті випадки, коли $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ при скінченному x_0 і $x_0=\infty$. У таких випадках ми говоримо, що в точці x_0 або при $x\to\infty$ функція має своєю границею нескінченність і записуємо

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty,$$

а саму функцію називаємо *нескінченно великою* (н.в.ф.) у цій точці (або на нескінченності).

4.2 Властивості границі функції

Означення границі функції на мові послідовностей дає можливість перенести встановлені вище твердження для границь послідовностей на границі функцій, а саме:

а) функція в заданій точці може мати тільки одну границю;

б) якщо функція $f(x)$ має при $x\to x_0$ скінченну границю, то в деякому околі точки x_0 ця функція обмежена.

Звертаємо увагу на принципову відмінність цього твердження від аналогічної теореми для послідовностей: функція $f(x)$ в області визначення може і не бути обмеженою, тоді як послідовність $\{x_n\}$ обмежена для всіх n (теорема 2).

Нескінченно малою функцією при граничному переході $x\to x_0$ (в точці x_0) називається функція $\alpha(x)$, для якої $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

Домовимося вживати скорочення н.м.ф. – нескінченно мала функція. Відзначимо такі властивості н.м.ф. при одному і тому ж граничному переході $x\to x_0$ (в тому числі і при $x\to\infty$):

1) сума скінченного числа нескінченно малих функцій є н.м.ф.;

2) добуток н.м.ф. на обмежену функцію є н.м.ф.

Розглянемо також властивості нескінченно великих функцій (н.в.ф.) при одному і тому ж граничному переході:

1) сума н.в.ф. однакового знаку є н.в.ф.;

2) добуток нескінченно великих функцій є н.в.ф.;

3) якщо $f(x)$ — н.в.ф., а $\varphi(x)$ в деякому околі точки x_0 задовольняє умову $|\varphi(x)| > c$, то $\varphi(x) \cdot f(x)$ — н.в.ф. Тут c — деяке додатне стале число.

4) *Зв'язок між н.м.ф. і н.в.ф. при однаковому граничному переході:* функція, обернена по величині до н.м.ф., є н.в.ф., а функція, обернена по величині до н.в.ф. — н.м.ф.. При цьому, говорячи про функції, обернені по величині до заданих, маємо на увазі, що в досить малому околі точки x_0 останні не дорівнюють нулю.

Основні теореми про границі функцій при $x \to x_0$ *(в тому числі і при* $x \to \infty$ **):**

1) $\lim\limits_{x \to x_0} C = C$, де C — стала;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(C \cdot f(x)\right) = C \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ де C — стала;

3) якщо існують скінченні границі $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ і $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = B$, то

$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x) \pm \varphi(x) \right] = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = A \pm B,$$

$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x) \cdot \varphi(x) \right] = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = A \cdot B,$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)} = \frac{A}{B}, \text{ якщо } B \neq 0;$$

4) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{\varphi(x)}=\left(\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}=A^B$, якщо A та B – скінченні, причому $A>0$;

5) якщо для всіх значень x в деякому околі точки x_0 (крім, можливо, $x=x_0$) функції $f\left(x\right)$ і $\varphi\left(x\right)$ рівні між собою і одна з них має границю при $x\to x_0$, то і друга має ту ж границю.

4.3 Порівняння нескінченно малих функцій

Нехай $\alpha\left(x\right)$ і $\beta\left(x\right)$ – н.м.ф. при $x\to x_0$ (в тому числі і при $x\to\infty$). Для порівняння цих функцій при $x\to x_0$ розглядають границі їх відношення. При цьому можливі такі випадки:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha\left(x\right)}{\beta\left(x\right)}=0, \tag{3}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha\left(x\right)}{\beta\left(x\right)}=\infty, \tag{4}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha\left(x\right)}{\beta\left(x\right)}=C,\ C\neq 0,\ C\neq\infty, \tag{5}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha\left(x\right)}{\beta\left(x\right)} - \text{не існує.} \tag{6}$$

У випадку (3) кажуть, що $\alpha\left(x\right)$ є нескінченно малою *вищого порядку* в порівнянні з $\beta\left(x\right)$ і пишуть $\alpha=o\left(\beta\right)$ (читається: „α дорівнює o мале від β“ при $x\to x_0$) а $\beta\left(x\right)$ – відповідно нескінченно малою *нижчого порядку* по відношенню до $\alpha\left(x\right)$. У випадку (4) $\beta=o\left(\alpha\right)$ при $x\to x_0$.

Якщо має місце (5), то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називають нескінченно малими *однакового порядку*. Зокрема, якщо $C=1$, то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називають *еквівалентними* (або *рівносильними*) нескінченно малими і записують $\alpha(x)\sim\beta(x)$ при $x\to x_0$. Зазначимо, що в термінах „еквівалентності“ з (5) випливає: $\alpha(x)\sim C\beta(x)$ при $x\to x_0$.

У випадку (6) нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ $-$ *непорівнювані*.

Іноді виникає потреба в більш точній порівняльній характеристиці нескінченно малих. Порядок "мализни" виражається числом k: $\beta(x)$ вважають нескінченно малою k-того порядку у порівнянні з $\alpha(x)$ при $x\to x_0$, якщо $\alpha^k(x)$ і $\beta(x)$ мають однаковий порядок "мализни", тобто при $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha^k(x)}{\beta(x)}=C\neq 0$.

При обчисленні границь функції користуються ще такими теоремами про еквівалентні нескінченно малі функції.

Теорема 9 *Границя відношення двох н.м.ф. не зміниться, якщо ці нескінченно малі замінити їм еквівалентними.*

Теорема 10 *Для того, щоб дві н.м.ф. були еквівалентними, необхідно і достатньо, щоб їх різниця була нескінченно малою більш високого порядку у порівнянні з кожною з них.*

Зауваження. Подібним чином порівнюють і нескінченно малі послідовності (н.м.п.), тобто і в цьому випадку можна говорити про порядок "мализни", еквівалентні (рівносильні) н.м.п. тощо.

4.4 Порівняння нескінченно великих функцій

Подібно до задачі порівняння н.м.ф. можна ставити питання про порівнювання нескінченно великих функцій (н.в.ф.). Зокрема, якщо границя відношення двох нескінченно великих при $x \to x_0$ ($x \to \infty$) функцій $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ дорівнює одиниці

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1,$$

то їх називають *еквівалентними* (*рівносильними*) н.в.ф. При знаходженні границі відношення двох н.в.ф. в точці x_0 (або на нескінченності) будь-яку з цих функцій можемо замінювати на еквівалентну.

Зокрема, якщо $x \to \infty$, то

$$P_n(x) = a_n x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x \sim a_0 x^n, \; a_0 \neq 0.$$

Все сказане буде слушним і для нескінченно великих послідовностей (н.в.п.).

4.5 Техніка обчислення границь

При обчисленні границь функцій потрібно керуватись такими положеннями:

1. Треба знати основні теореми про границі, сформульовані вище.

2. При знаходженні границь елементарних функцій в точках x_0 з області їх існування потрібно мати на увазі, що вони мають так звану „властивість *неперервності*" — знаходження границь таких функцій в точках $x_0 \in D(f)$ зводиться до обчислення значень функцій у відповідних точках

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x)\big|_{x=x_0}.$$

3. Треба пам'ятати важливі границі і наслідки з них:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ (перша важлива границя);

б) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$, $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ (друга важлива границя);

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\ x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg\ x}{x}=1$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$, зокрема $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$, зокрема $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^k-1}{x}=k$, зокрема $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\frac{1}{n}$.

4. Застосовувати теорему 9 про заміну нескінченно малих (або нескінченно великих) еквівалентними. Для зручності наведемо таблицю еквівалентних н.м.ф. ($\alpha(x)$ — н.м.ф. при $x\to 0$ або при $x\to x_0$, де $x_0\neq 0$):

$$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x),\qquad 1-\cos\alpha(x)\sim\frac{(\alpha(x))^2}{2};$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha(x)\sim\alpha(x),\ \ \arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x),\ \ \mathrm{arctg}\,\alpha(x)\sim\alpha(x);$$

$$\log_a(1+\alpha(x))\sim\frac{\alpha(x)}{\ln a},\ \text{зокрема,}\ \ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x);$$

$$a^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\ln a,\ \text{зокрема,}\ e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x);$$

$$(1+\alpha(x))^k-1\sim k\alpha(x),\ \text{зокрема,}\ \sqrt[n]{1+\alpha(x)}-1\sim\frac{\alpha(x)}{n}.$$

5. Якщо при знаходженні границі степенево-показникової функції $\lim\limits_{x\to x_0}(U(x))^{V(x)}$ виявиться, що границя основи $\lim\limits_{x\to x_0}U(x)=1$, а границя показника $\lim\limits_{x\to x_0}V(x)=\infty$, то можна рекомендувати перетворення

$$\lim_{x\to x_0}(U(x))^{V(x)}=\lim_{x\to x_0}\left(1+(U(x)-1)\right)^{V(x)}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left(1+(U(x)-1)^{\frac{1}{U(x)-1}}\right)^{V(U(x)-1)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}V(x)(U(x)-1)}.$$

6. Можна застосувати і так званий „метод підстановки“. Його суть полягає у здійсненні заміни (підстановки) $x=\varphi(t)$ так, щоб шукану границю $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ звести до вже відомих границь, або хоча б спростити вид функції $f(x)$. При цьому однією з вимог до вибору функції $x=\varphi(t)$ є існування оберненої до неї і здійснення граничного переходу $(x\to x_0)\Leftrightarrow(t\to t_0)$, де $x_0=\varphi(t_0)$.

Приклади розв’язання задач

26. Користуючись означенням границі

а) на „мові послідовностей“ і теоремами про „границі послідовностей“,

б) на „мові $\varepsilon-\delta$ “

довести, що $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x+1}{x+3}=-\dfrac{1}{2}$.

Тут йде мова про границю функції $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+3}$ в точці $x_0=-1$.

►а) Розглянемо будь-яку послідовність $\{x_n\}$ з області визначення функції $f(x)$ (тобто при $x_n\neq -3$), що прямує до числа -1. Цій послідовності аргументів відповідає послідовність значень функції $\{f(x_n)\}=\left\{\dfrac{2x_n+1}{x_n+2}\right\}$.

Щоб знайти границю цієї послідовності, знайдемо границі її чисельника і знаменника

$\lim\limits_{n\to\infty}(2x_n+1)=2\cdot(-1)+1=-1,\ \lim\limits_{n\to\infty}(x_n+3)=-1+3=2$.

Таким чином, якою б не була послідовність $\{x_n\}$, що прямує до числа -1($x_n \neq -3$), відповідна послідовність значень функції $\{f(x_n)\}$ прямує до числа $-\frac{1}{2}$. А тому $\lim\limits_{x\to-1}\frac{2x+1}{x+3}=-\frac{1}{2}$.◄

►б) Відповідно до означення границі на „мові $\varepsilon-\delta$“, треба показати, що для будь-якого $\varepsilon>0$ існує таке $\delta>0$, що з нерівності $|x-(-1)|<\delta$ випливає $\left|f(x)-\left(-\frac{1}{2}\right)\right|<\varepsilon$. Задача, таким чином, зводиться до розв'язування останньої нерівності відносно $|x-(-1)|$

$$\left|f(x)-\left(-\frac{1}{2}\right)\right|<\varepsilon \iff \left|\frac{2x+1}{x+3}+\frac{1}{2}\right|<\varepsilon,$$
$$\left|\frac{5x+5}{2(x+3)}\right|<\varepsilon \iff \left|\frac{x+1}{x+3}\right|<\frac{2}{5}\varepsilon.$$

Не обмежуючи загальності, можемо вважати що $\delta<1$. Але якщо $|x+1|<1$, то $|x+3|=|x+1+2|>2-|x+1|>2-1=1$. Тому при $|x+1|<1$ маємо $\left|\frac{x+1}{x+3}\right|<|x+1|$. Щоб виконувалась нерівність $\left|\frac{x+1}{x+3}\right|<\frac{2}{5}\varepsilon$, досить щоб $|x+1|<\frac{2}{5}\varepsilon$. Таким чином, за

ε можна взяти менше з двох чисел 1 і $\frac{2}{5}\varepsilon$, тобто $\delta = \min\left\{1, \frac{2}{5}\varepsilon\right\}$. ◄

27. Довести, користуючись означенням границі функції за Коші, такі граничні рівності:

а) $\lim\limits_{x\to 1}(5x-3)=2$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(1-x)^2}=+\infty$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x+1}{3x+9}=\frac{5}{3}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=+\infty$ $(a>1)$.

►а) $x_0=1$ – скінченне число, $A=2$ – скінченне число. Виходимо з „$\varepsilon-\delta$“ означення границі функції. Нехай ε – довільне додатне дійсне число; шукаємо таке число $\delta>0$, щоб при $0<|x-x_0|<\delta$ виконувалась нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$. Задача, таким чином, зводиться до розв'язання відносно $|x-1|$ нерівності $|f(x)-2|<\varepsilon$

$$\left(|f(x)-2|<\varepsilon\right)\Leftrightarrow\left(|5x-3-2|<\varepsilon\right)\Leftrightarrow\left(|5x-5|<\varepsilon\right)\Leftrightarrow\left(|x-1|<\frac{\varepsilon}{5}=\delta\right).$$

Розв'язок існує, $\delta=\frac{\varepsilon}{5}$. ◄

►б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(1-x)^2}=+\infty$; $x_0=1$ – скінченне число, $A=\infty$.

Тут треба виходити з „$E-\delta$“ означення границі функції. Нехай $E>0$ – довільне додатне дійсне число; шукаємо таке

$\delta > 0$, щоб при $0 < |x - x_0| < \delta$ виконувалася нерівність $|f(x)| > E$. Розв'яжемо відносно $|x-1|$ нерівність $|f(x)| > E$

$$\left(\left|\frac{1}{(1-x)^2}\right| > E\right) \Leftrightarrow \left(|x-1| < \frac{1}{\sqrt{E}} = \delta\right).$$

Таким чином, $\delta = \frac{1}{\sqrt{E}}$. Отже, якщо $0 < |x-1| < \frac{1}{\sqrt{E}}$, то $|f(x)| > E$, а значить $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \infty$.◄

►в) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{5x+1}{3x+9} = \frac{5}{3}$, $x_0 = \infty$, $A = \frac{5}{3}$ – скінченне число. Треба застосувати „$\varepsilon - \Delta$“ означення границі функції. Нехай $\varepsilon > 0$ – довільне як завгодно мале додатне дійсне число. Шукаємо $\Delta > 0$ таке, щоб для всіх $|x| > \Delta$ виконувалась нерівність $\left|f(x) - \frac{5}{3}\right| < \varepsilon$

$$\left(\left|f(x) - \frac{5}{3}\right| < \varepsilon\right) \Leftrightarrow \left(\left|\frac{5x+1}{3x+9} - \frac{5}{3}\right| < \varepsilon\right) \Leftrightarrow \left(\left|\frac{3(5x+1) - 5(3x+9)}{3(x+9)}\right| < \varepsilon\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\left|\frac{42}{3(3x+9)}\right| < \varepsilon\right) \Leftrightarrow \left(\frac{14}{|3x+9|} < \varepsilon\right) \Leftrightarrow \left(|3x+9| > \frac{14}{\varepsilon}\right).$$

Оскільки $|3x+9| \geq |3x| - 9$, то остання нерівність буде виконуватись, якщо $|3x| > \frac{14}{\varepsilon} + 9$, тобто $|x| > \frac{14}{3\varepsilon} + 3$.

Як бачимо, достатньо взяти $\Delta = \dfrac{14}{3\varepsilon} + 3$.◄

►г) У даному випадку $x_0 = +\infty$, $A = +\infty$. Застосуємо „$E - \Delta$“ означення границі функції. Беремо будь-яке як завгодно велике число $E > 0$ і шукаємо число $\Delta > 0$, таке, щоб при $x > \Delta$ виконувалась нерівність $f(x) > E$. Задача, таким чином, зводиться до розв'язання відносно x нерівності $f(x) > E$

$$(f(x) > E) \Leftrightarrow (\log_a x > E) \Leftrightarrow (x > a^E = \Delta).$$

Одержали, що при $x > a^E$ виконується нерівність $\log_a x > E$. Отже, $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$ (при $a > 1$). ◄

28. Довести, що границі не існують:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \sin\dfrac{1}{x}$; б) $\lim\limits_{x \to 1} \cos\dfrac{1}{1-x}$;

в) $\lim\limits_{x \to 0} 2^{\frac{1}{x}}$; г) $\lim\limits_{x \to \infty} \cos x$.

►а) Вибираємо дві різні послідовності аргументів $\{x'_n\}$ і $\{x''_n\}$, що прямують до нуля, так, щоб відповідні їм послідовності значень функцій $\{f(x'_n)\}$ і $\{f(x''_n)\}$ мали різні границі. За x'_n беремо, наприклад, розв'язки рівняння $\sin\dfrac{1}{x} = 0$

$$\left(\sin\frac{1}{x} = 0\right) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}\right).$$

Отже, можемо взяти $x_n' = \dfrac{1}{\pi n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Очевидно, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n' = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\pi n} = 0$.

За x_n'' візьмемо розв'язки рівняння $\sin\dfrac{1}{x} = 1$ $x_n'' = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Також $x_n'' \to 0$ при $n \to \infty$.

Відповідні цим послідовностям аргументів послідовності значень функції мають границі:

$$\lim_{n\to\infty} f\left(x_n'\right) = \lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{x_n'} = \lim_{n\to\infty} \sin \pi n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(x_n''\right) = \lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{x_n''} = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = \lim_{x\to 0} 1 = 1,$$

тобто $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_n'\right) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_n''\right)$. Отже, $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$ не існує. ◄

► б) Вибираємо такі дві послідовності аргументів:

$$x_n' = 1 - \frac{1}{2\pi n}, \quad x_n'' = 1 - \frac{1}{\pi + 2\pi n}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Очевидно, що $x_n' \to 1$, $x_n'' \to 1$ при $n \to \infty$, але відповідні їм послідовності значень функції мають різні границі:

$$\lim_{n\to\infty} f\left(x_n'\right) = \lim_{n\to\infty} \cos\frac{1}{1 - x_n'} = \lim_{n\to\infty} \cos 2\pi n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(x_n''\right) = \lim_{n\to\infty} \cos\frac{1}{1-x_n''} = \lim_{n\to\infty} \cos\left(\pi + 2\pi n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(-1\right) = -1.$$

Тому $\lim\limits_{x\to 1} \cos\dfrac{1}{1-x}$ не існує. ◄

►в) За послідовності аргументів, які прямують до числа $x_0 = 0$, виберемо такі:

$$x_n' = \frac{1}{n}, \quad x_n'' = -\frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Знайдемо границі відповідних послідовностей значень функції:

$$\lim_{n\to\infty} f\left(x_n'\right) = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{x_n'}} = \lim_{n\to\infty} 2^n = \infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(x_n''\right) = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{x_n''}} = \lim_{n\to\infty} 2^{-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to 0} 2^{\frac{1}{x}}$ не існує. ◄

►г) Розглянемо такі дві послідовності аргументів:

$$x_n' = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad x_n'' = \pi + 2\pi n, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n' = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n'' = \infty$. Знайдемо тепер границі відповідних їм послідовностей значень функції:

$$\lim_{n\to\infty} \cos x_n' = \lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \cos x_n'' = \lim_{n\to\infty} \cos\left(\pi + 2\pi n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(-1\right) = -1.$$

Границі двох останніх послідовностей різні, тому $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ не існує. ◄

29. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\left(3x^2-4x+1\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2-1}{3x^2+2x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}(5x)^{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} tg\ x$.

►а) Функція $f\left(x\right)=\left(3x^2-4x+1\right)-$ елементарна, тому її границя в точці $x_0=2$, що належить області визначення, дорівнює $f\left(x\right)\Big|_{x=x_0}$, тобто

$$\lim_{x\to 2}\left(3x^2-4x+1\right)=3\cdot 2^2-4\cdot 2+1=5\,.◄$$

►б) Знаходимо границі чисельника і знаменника як елементарних функцій:

$$\lim_{x\to 0}\left(2x^2-1\right)=2\cdot 0-1=-1\,;$$

$$\lim_{x\to 0}\left(3x^2-4x+1\right)=3\cdot 0+2\cdot 0+1=1\neq 0\,.$$

Тоді за формулою про границю дробу

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^2-1}{3x^2+2x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\left(2x^2-1\right)}{\lim\limits_{x\to 0}\left(3x^2-4x+1\right)}=\frac{-1}{1}=-1\,. ◄$$

►в) Оскільки $\lim\limits_{x\to 2}\left(5x\right)=5\cdot 2=10$, $\lim\limits_{x\to 2}2^2=4$, то за формулою про границю степенево-показникової функції

$$\lim_{x\to 2}(5x)^{x^2}=10^4=10000\,.◄$$

►г) Функція $f(x)=\mathrm{tg}x$ – елементарна, в точці $x_0=\dfrac{\pi}{4}$ вона існує, а тому $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} tg\ x = tg\dfrac{\pi}{4}=1$. ◄

30. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-7x+6}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+4x+1}{x^2-3x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-4x+3}$; г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos x}$;

ґ) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-x^3}-1}{x^3}$.

►а) Знаходимо границі чисельника і знаменника при $x\to 2$:

$$\lim_{x\to 2}\left(x^2-3x+2\right)=2^2-3\cdot 2++2=0,$$

$$\lim_{x\to 2}\left(x^2-7x+6\right)=2^2-7\cdot 2+6=-4\neq 0.$$

Оскільки „границя відношення“ дорівнює „відношенню границь“, то $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-7x+6}=\dfrac{0}{-4}=0$.◄

►б) Знаходимо границі чисельника і знаменника при $x\to 3$:

$$\lim_{x\to 3}\left(x^2+4x+1\right)=3^2+4\cdot 3+1=22\neq 0,$$

$$\lim_{x\to 3}\left(x^2-3x\right)=3^2-3\cdot 3=0.$$

Тут знаменник $\left(x^2-3x\right)$ при $x\to 3$ є н.м.ф.; отже, функція $\dfrac{1}{x^2-3x}$ при $x\to 3$ як обернена за величиною до нескінченно малої, є нескінченно великою. Тому задана в умові функція, тобто добуток $\left(x^2+4x+1\right)\dfrac{1}{x^2-3x}$ при $x\to 3$, є н.в.ф. Отже, $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+4x+1}{x^2-3x}=\infty$.◄

►в) Шукаємо границі чисельника і знаменника:

$$\lim_{x\to 3}\left(x^2-9\right)=0,\quad \lim_{x\to 3}\left(x^2-4x+3\right)=0.$$

Обидві границі дорівнюють нулю. Тому безпосередньо застосувати правило про границю дробу не можна. Маємо так звану невизначеність „нуль поділено на нуль“, яку позначатимемо $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$. Щоб знайти границю, або показати, що вона не існує (коротко „щоб розкрити цю невизначеність“), зробимо так. Для $x\neq 3$ розглянемо функції

$$f\left(x\right)=\frac{x^2-9}{x^2-4x+3}=\frac{\left(x-3\right)\left(x+3\right)}{\left(x-3\right)\left(x-1\right)}=\frac{x+3}{x-1}\quad \text{та}\quad \varphi\left(x\right)=\frac{x+3}{x-1},$$

які в області свого існування при $x\neq 3$ рівні між собою, а тому мають і однакові границі в точці $x=3$

$$\lim_{x\to 3}f\left(x\right)=\lim_{x\to 3}\varphi\left(x\right)=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x-1}=\frac{3+3}{3-1}=3.$$

Зауваження. При розкритті невизначеності $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ ми виділили в чисельнику і знаменнику дробу множник, за рахунок якого вони перетворюються в нуль, і скоротили на цей спільний множник. Хоч цей метод не є універсальним, але його варто мати на увазі. ◄

►г) знаходимо значення чисельника і знаменника при $x=\frac{\pi}{2}$:

$$\left.\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)\right|_{x=\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=0,$$

$$\left.\cos x\right|_{x=\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}=0.$$

Отже, при знаходженні границі дробу маємо невизначеність $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Для її розкриття, як і вище, виділяємо в чисельнику і знаменнику дробу множник $\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}$ і скорочуємо на нього дріб

$$\lim_{x\to 2}\frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos x}=\lim_{x\to 2}\frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$ ◄

►г) Маємо невизначеність $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Для її розкриття чисельник і знаменник дробу множимо і ділимо на спряжений до знаменника вираз

$$\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)\left(\sqrt{6x^2+3}-3x\right)}{\left(\sqrt{6x^2+3}+3x\right)\left(\sqrt{6x^2+3}-3x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)\left(\sqrt{6x^2+3}-3x\right)}{3-3x^2}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)\left(\sqrt{6x^2+3}-3x\right)}{3(1-x)(1+x)}=$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{6x^2+3}-3x}{3(1-x)}=\frac{\sqrt{6+3}+3}{3\cdot 2}=1.◄$$

►д) Позбуваємось ірраціональності в чисельнику, домножуючи чисельник і знаменник дробу на вираз, завдяки якому отримаємо різницю кубів у чисельнику

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1-x^3}-1}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt[3]{1-x^3}-1\right)\left(\sqrt[3]{(1-x^3)^2}+\sqrt[3]{1-x^3}+1\right)}{x^3\left(\sqrt[3]{(1-x^3)^2}+\sqrt[3]{1-x^3}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(1-x^3-1\right)}{x^3\left(\sqrt[3]{(1-x^3)^2}+\sqrt[3]{1-x^3}+1\right)}=-\frac{1}{3}.◄$$

31. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(0,01x^3-100x^2-2x-5\right)$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, де

$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,\ a_0\neq0$,

$$Q_m(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + b_m,\quad b_0 \neq 0;$$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{3x^2-4} - \dfrac{x^2}{3x-2}\right)$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2}+\sqrt[3]{2x-3}}$;

г) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2-3}-5x\right)$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^3+9}}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}3^{\frac{2x}{x+3}}$.

►а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(0,001x^3 - 100x^2 - 2x - 5\right) =$

$$= \lim_{x\to\infty} x^3\left(0,001 - \frac{100}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{5}{x^3}\right).$$

Границею виразу в дужках є $0,001$ – обмежена величина, що не дорівнює нулю (!), а x^3 – н.в.ф. при $x\to\infty$, тому

$$\lim_{x\to\infty} x^3\left(0,01 - \frac{100}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{5}{x}\right) = \infty\,.$$◄

►б) Переконуємось, що $\lim\limits_{x\to\infty}P_n(x)=\infty$ і $\lim\limits_{x\to\infty}Q_m(x)=\infty$, тому маємо невизначеність $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$. Виносячи за дужки x в старших степенях, одержимо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^m\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}\right)}{x^m\left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_m}{x^m}\right)} = \begin{cases}\infty & \text{при } n > m,\\ \dfrac{a_0}{b_0} & \text{при } n = m,\\ 0 & \text{при } n < m.\end{cases}$$

Отже, якщо $x\to\infty$, то при $n>m$ многочлен $P_n(x)$ є н.в.ф. вищого порядку у порівнянні з $Q_m(x)$. При $x\to\infty$

многочлени $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ – н.в.ф. одного порядку, тут границя відношення двох многочленів дорівнює відношенню коефіцієнтів при старшому степені аргументу. При $n < m$ многочлен $Q_m(x)$ є н.в.ф. вищого порядку у порівнянні з $P_n(x)$.◄

►в) Тут маємо невизначеність виду $\{\infty - \infty\}$; зводимо доданки до спільного знаменника

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{3x^2-4}-\frac{x^2}{3x+2}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+4x^2}{9x^3+6x^2-12x-8} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(2+\frac{4}{x}\right)}{x^3\left(9+\frac{6}{x}-\frac{12}{x^2}-\frac{8}{x^3}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{4}{x}}{9+\frac{6}{x}-\frac{12}{x^2}-\frac{8}{x^3}} = \frac{2}{9}. \blacktriangleleft$$

►г) В подібних прикладах варто мати на увазі, що функція $f(x)=\sqrt[n]{P_m(x)}$, де $P_m(x)$ – многочлен степеня m при $x\to\infty$, є н.в.ф. такого ж порядку, як і $\sqrt[n]{x^m}$. А тому, як і в попередніх прикладах, встановлюємо найвищий степінь x у чисельнику та знаменнику і виносимо його за дужки (чи ділимо на нього чисельник і знаменник). У даному прикладі ділимо на $\sqrt{x}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{2x-3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{\sqrt[6]{x}}+\frac{5}{\sqrt[10]{x^3}}}{\sqrt{3-\frac{2}{x}}+\sqrt[6]{\frac{4}{x}-\frac{12}{x^2}+\frac{9}{x^3}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}. \blacktriangleleft$$

►г) Оскільки сума двох нескінченно великих однакового знаку є також нескінченно великою, то одержимо

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2-2}-5x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2-2}+(-5x)\right)=+\infty.$$ ◄

►д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^3+9}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x\cdot\sqrt[3]{1+\dfrac{9}{x^3}}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+\dfrac{9}{x^3}}}=1.$ ◄

►е) Показником степеня є відношення многочленів однакового степеня, а тому границя цього показника при $x\to\infty$ дорівнює відношенню коефіцієнтів при старших степенях x у чисельнику і знаменнику; тому

$$\lim_{x\to\infty}3^{\frac{2x}{x+3}}=3^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x+3}}=3^2=9.$$ ◄

32. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 7x}{x^2}$.

►а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 2x}{2x}=2$ (за першою важливою границею). ◄

►б) Маємо невизначеність $\{0\cdot\infty\}$. Для її розкриття перетворюємо дріб так, щоб звести до випадку невизначеності

$$\left\{\frac{0}{0}\right\}:\quad \lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\left|\begin{array}{l}\dfrac{1}{x}=\alpha\\ \alpha\to 0\end{array}\right|=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1.$$

Ми тут зробили заміну $\frac{1}{x}=\alpha$, тому $\alpha \to 0$ при $x \to \infty$. ◄

$$\text{►в)} \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 7x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{7x}{2}}{x^2}=2\cdot\left(\frac{7}{2}\right)^2\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{7x}{2}}{\frac{7x}{2}}\right)^2=$$

$$=2\cdot\frac{49}{4}=\frac{49}{2}. ◄$$

33. Знайти границі:

$$\text{а)} \lim_{x\to -1}\frac{x+1}{\sqrt[4]{x+17}-2}; \qquad \text{б)} \lim_{x\to -1}\frac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}};$$

$$\text{в)} \lim_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt[3]{-2}\cdot\cos x}; \qquad \text{г)} \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sqrt[3]{\left(1-\sin x\right)^2}}$$

►а) Маємо невизначеність $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Для її розкриття робимо підстановку $\sqrt[4]{x+17}=t$. При такій підстановці вдається позбутись ірраціональності; при цьому $x=t^4-17$ і $(x\to(-1))\Rightarrow(t\to 2)$. Отже,

$$\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{\sqrt[4]{x+17}-2}=\lim_{t\to 2}\frac{t^4-16}{t-2}=\lim_{t\to 2}\frac{(t-2)(t+2)(t^2+4)}{t-2}=$$

$$=\lim_{t\to 2}(t+2)(t^2+4)=32.$$

Зауваження. Проведені в цьому прикладі записи, пов'язані із заміною змінної, надалі будемо оформляти так

$$\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{\sqrt[4]{x+17}-2}=\left|\begin{array}{l}x+17=t^4,\\ x=t^4-17,\\ x\to -1, t\to 2\end{array}\right|=\lim_{t\to 2}\frac{t^4-16}{t-2}=$$

$$=\lim_{t\to 2}\frac{(t-2)(t+2)\left(t^2+4\right)}{t-2}=\lim_{t\to 2}(t+2)\left(t^2+4\right)=32. ◄$$

►б) Безпосереднє обчислення показує, що маємо невизначеність $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Щоб позбутися ірраціональності, робимо заміну $x=-t^{15}$. Отже, $\lim\limits_{x\to -1}\frac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}=\left|\begin{array}{l}x=-t^{15},\\ x\to -1, t\to 1\end{array}\right|=\lim\limits_{t\to 1}\frac{1-t^5}{1-t^3}=$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{(1-t)\left(1+t+t^2+t^4\right)}{(1-t)\left(1+t+t^2\right)}=\frac{4}{3}.$$

Тут ми скористалися формулою розкладу на добуток різниці

$$1-a^n=1^n-a^n=(1-a)\left(1+a+a^2+a^3+\ldots+a^n\right). ◄$$

►в) Тут також маємо невизначеність $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Для розкриття цієї невизначеності можна застосувати першу важливу границю. Для цього зробимо заміну $x-\frac{\pi}{6}=z$. Тоді

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{3}-\cos x}=\left|\begin{array}{l}x-\pi/6=z,\\ x=z+\pi/6\\ x\to \pi/6\\ z\to 0\end{array}\right|=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{\sqrt{3}-2\cos\left(z+\frac{\pi}{6}\right)}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{\sqrt{3}-\sqrt{3}\cos z+\sin z}=\lim_{z\to 0}\frac{2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}}{2\sqrt{3}\sin^2\frac{z}{2}+2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\cos\frac{z}{2}}{\sqrt{3}\sin\frac{z}{2}+\cos\frac{z}{2}}=1. \blacktriangleleft$$

►г) При знаходженні цієї границі маємо також невизначеність $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Зробимо підстановку $x-\frac{\pi}{2}=z$, тоді

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}}=\left|\begin{array}{l}x-\pi/2=x,\\ x=\pi/2+z,\\ x\to\pi/2,\ z\to 0\end{array}\right|=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{\sqrt[3]{(1-\cos z)^2}}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{\sqrt[3]{(2\sin^2\frac{z}{2})^2}}=\lim_{z\to 0}\frac{2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}}{\sqrt[3]{4}\sin\frac{z}{2}\sqrt[3]{\sin\frac{z}{2}}}=\lim_{z\to 0}\frac{2\cos\frac{z}{2}}{\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{\sin\frac{z}{2}}}.$$

При $z\to 0$ чисельник прямує до 2, а в знаменнику маємо нескінченно малу. Тому дріб $-$ н.в.ф. Отже,

$$\lim_{z\to 0}\frac{2\cos\frac{z}{2}}{\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{\sin\frac{z}{2}}}=\infty \quad \text{і} \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}}=\infty. \blacktriangleleft$$

34. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{3x}}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x}{1+x})^{x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{3^x-1}$; ґ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{tg\,x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x^2})^x$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{8x^2+3}$; є) $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{ctg\,x}$.

►а) Маємо невизначеність $\{1^\infty\}$. Для розкриття невизначеності будемо перетворювати вираз під знаком границі до можливості використання другої важливої границі

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{5}=e^5.$$ ◄

►б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{3x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{3}}=e^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{e}$.◄

►в) Основа цієї степенево-показникової функції $(\dfrac{x}{1+x})^x$ прямує до одиниці, отже, маємо невизначеність $\{1^\infty\}$. Тому

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{x})^x}=\frac{1}{e}.$$ ◄

►г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{3^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\cdot\dfrac{x}{3^x-1}\right)=1\cdot\dfrac{1}{\ln 3}=\dfrac{1}{\ln 3}$,

враховуючи важливі границі та наслідки з них. Це стосується і двох наступних прикладів. ◄

►г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{tgx}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{4x}-1}{4x}\cdot 4\dfrac{x}{tgx}\right)=1\cdot 4\cdot 1=4.$ ◄

►д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x=\left\{1^\infty\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{x^2}\right)^{\frac{1}{x}}=e^0=1.$ ◄

►е) Маємо невизначеність $\left\{1^\infty\right\}$. При знаходженні границі від U^V, в якій $\lim\limits_{x\to x_0}U=1$, а $\lim\limits_{x\to x_0}V=\infty$, можна скористатися такою формулою

$$\lim_{x\to x_0}\left(U\left(x\right)\right)^{V(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}V(x)(U(x)-1)}.$$

У нашому прикладі $x\to\infty$, $U\left(x\right)=\dfrac{2x^2+3}{2x^2+5}$, $V\left(x\right)=8x^2+3$,

$$U\left(x\right)-1=\frac{2x^2+3}{2x^2+5}-1=\frac{-2}{2x^2+5},\quad V\left(x\right)\left(U\left(x\right)-1\right)=\frac{-2\left(8x^2+3\right)}{2x^2+5}.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{8x^2+3}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2\left(8x^2+3\right)}{2x^2+5}}=e^{-8}.$ ◄

►є) Як і в попередньому прикладі, маємо степенево-показникову невизначеність $\left\{1^\infty\right\}$. Оскільки

$$x\to 1,\ V\left(x\right)=ctg\pi x,\ U\left(x\right)-1=\sin\pi x,$$

$$V\left(x\right)\left(U\left(x\right)-1\right)=\sin\pi\cdot ctg\pi=\cos\pi x,$$

то $\lim\limits_{x\to 1}\left(1+\sin\pi x\right)^{ctg\pi x}=e^{\lim\limits_{x\to 1}ctg\pi x\left(\sin\pi x\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\cos\pi x}=e^{\cos\pi}=\dfrac{1}{e}.$ ◄

35. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\ln(1+4x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\cos\frac{x}{2}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\sqrt[4]{1+x^2}-1}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 4x}$;

ґ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x\sin x)}{tg\,x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x+\arcsin^2 x-\mathrm{arctg}^2 x}{3x}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sin x-\mathrm{tg}\,x)^2+(1-\cos x)^4+x^5}{7\mathrm{tg}^7 x+\sin^6 x+2\sin^5 x}$;

є) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\sqrt[3]{x}\ln(1+x)}{(\mathrm{arctg}\sqrt{x})^2\left(e^{5\sqrt[3]{x}}-1\right)}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^3+2x^4}}{\ln(1+2x)}$;

з) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3+(2^{x^2}-1)^2+(\cos x-1)^2}{3\arcsin^3 x+x^3\ln(1+x)}$.

При знаходженні цих границь застосуємо теорему про заміну нескінченно малих функцій їм еквівалентними і таблицю еквівалентних н.м.ф.

► а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\ln(1+4x)}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left|\begin{array}{l}\text{при } x\to 0\\ \sin 5x\sim 5x,\\ \ln(1+4x)\sim 4x\end{array}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{4x}=\frac{5}{4}$. ◄

$$\blacktriangleright \text{б) } \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\cos\frac{x}{2}}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left|\begin{array}{l}\text{при } x\to 0\\ 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2},\\ 1-\cos\frac{x}{2}\sim\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot 8}{2\cdot x^2}=4.\blacktriangleleft$$

$$\blacktriangleright \text{в) } \lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\sqrt[4]{1+x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\left(\cos x-1\right)\right)}{\sqrt[4]{1+x^2}-1}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{при } x\to 0\\ \ln\left(1+\left(\cos x-1\right)\right)\sim\cos x-1,\\ \cos x-1\sim-\frac{x^2}{2},\\ \sqrt[4]{1+x^2}-1\sim\frac{1}{4}x^2\end{array}\right|\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{4}}=-2.\blacktriangleleft$$

$$\blacktriangleright \text{г) } \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 4x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left|\begin{array}{l}\text{при } x\to 0\\ \sqrt{1+x+x^2}-1\sim\frac{1}{2}\left(x+x^2\right),\\ \frac{1}{2}\left(x+x^2\right)\sim\frac{1}{2}\cdot x,\text{ бо } x^2=0\left(x\right),\\ \sin 4x\sim 4x\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x}{4x}=\frac{1}{8}.\blacktriangleleft$$

►г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+3x\sin x\right)}{tg\, x^2}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=$

$$\left|\begin{array}{l}\text{при } x\to 0\\ \ln\left(1+3x\sin x\right)\sim 3x\sin x\sim 3x^2,\\ tg\, x^2\sim x^2\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{x^2}=3.\ ◄$$

►д) Тут при $x\to 0$ $\arcsin^2 x\sim x^2, arctg^2 x\sim x^2$, тобто $\arcsin^2 x\sim \mathrm{arctg}^2 x$, а тому їх різниця $\arcsin^2 x-arctg^2 x$ є нескінченно малою більш високого порядку у порівнянні з кожною з них *(теорема 10)*. Отже,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x+\arcsin^2 x-arctg^2 x}{3x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{при } x\to 0\\ \sin 2x+\arcsin^2 x-arctg^2 x\sim 2x\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}.\ ◄$$

►е) Спочатку оцінимо порядок “мализни” різниці $\left(\sin x-tg\, x\right)$. Для цього виконуючи тотожні наступні перетворення

$$\sin x-tgx=\sin x-\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\sin x\left(\cos x-1\right)}{\cos x}=-\frac{2\sin x\cdot\sin^2\frac{x}{2}}{\cos x}\sim$$

$$\sim -2x\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2=-\frac{x^3}{2}\quad\text{при}\quad x\to 0,\quad\text{бо}\quad \lim_{x\to 0}\cos x=1.$$

Тому при $x\to 0$ $\left(\sin x-tgx\right)^2\sim\left(-\dfrac{x^3}{2}\right)^2=\dfrac{x^6}{4}.$

Розглянемо наступний доданок чисельника

$$\left(1-\cos 2x\right)^2 \sim \left(\frac{\left(2x^2\right)^2}{2}\right)^4 = 2^4 \cdot x^8 \quad \text{при} \quad x \to 0.$$

Враховуючи порядки "мализни" кожного з доданків чисельника, маємо при $x \to 0$

$$(\sin x - \operatorname{tg} x)^2 + (1-\cos 2x)^4 + x^5 \sim \frac{1}{4}x^6 + 2^4 x^8 + x^5 \sim x^5.$$

Аналогічно, оцінюючи "мализну" доданків знаменника при $x \to 0$, одержуємо

$$7\operatorname{tg}^7 x + \sin^6 x + 2\sin^5 x \sim \left(7x^7 + x^6 + 2x^5\right) \sim 2x^5.$$

Тоді $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin x - \operatorname{tg} x)^2 + (1-\cos 2x)^4 + x^5}{7\operatorname{tg}^7 x + \sin^6 x + 2\sin^5 x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^5}{2x^5} = \dfrac{1}{2}$. ◄

► є) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\sqrt[3]{x}\cdot\ln\left(1+3x\right)}{\left(arctg\sqrt{x}\right)^2\left(e^{5\sqrt[3]{x}}-1\right)} = \left\{\dfrac{0}{0}\right\} =$

$$\left|\begin{array}{l} \text{при } x \to 0 \\ \sin\sqrt[3]{x} \sim \sqrt[3]{x}, \\ \ln\left(1+3x\right) \sim 3x, \\ \left(arctg\sqrt{x}\right)^2 \sim \left(\sqrt{x}\right)^2 = x, \\ e^{5\sqrt[3]{x}} - 1 \sim 5\sqrt[3]{x} \end{array}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}\cdot 3x}{x\cdot 5\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{5}. \blacktriangleleft$$

► ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x^4}}{\ln\left(1+2x\right)} = \left\{\dfrac{0}{0}\right\} = \left|\begin{array}{l} \text{при } x \to 0 \\ \ln\left(1+2x\right) \sim 2x, \\ \sqrt[3]{x^3+2x^4} \sim x, \text{ бо } 2x^4 = 0\left(x^3\right) \end{array}\right| =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$. ◄

►з) При $x \to 0$: $\quad 2^{x^2} - 1 \sim x^2 \ln 2, \quad \cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$,

$\arcsin x \sim x, \quad \ln(1+x) \sim x$. Тоді

$$x^3 + (2^{x^2} - 1)^2 + (\cos x - 1)^2 \sim \left(x^3 + x^4 \ln^2 2 + \frac{x^4}{4} \right) \sim x^3,$$

$$3 \arcsin^3 x + x^3 \ln(1+x) \sim \left(3x^3 + x^4\right) \sim 3x^3.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3 + (2^{x^2} - 1)^2 + (\cos x - 1)^2}{3\arcsin^3 x + x^3 \ln(1+x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3}{3x^3} = \frac{1}{3}$. ◄

36. Знайти односторонні границі функцій:

а) $f(x) = \begin{cases} -2x + 3, \text{ якщо } x \le 1, \\ 3x - 5, \text{ якщо } x > 1, \end{cases}$ при $\quad x \to 1$;

б) $f(x) = \frac{x}{x-2}$ при $x \to 2$;

в) $f(x) = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}$ при $x \to 0$;

г) $f(x) = \frac{\sqrt{x+3} - 3}{x^2 - 36}$ при $x \to 6$;

ґ) $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$ при $x \to 0$.

►а) Знаходимо спочатку лівосторонню границю $f(1-0)$. Якщо $x < 1$, то $f(x) = -2x + 3$. Отже,

$f(1-0)=\lim\limits_{x\to 1-0}(-2x+3)=-2+3=1.$ Аналогічно, при $x>1$: $f(x)=3x-5$, отже, $f(1+0)=\lim_{x\to 1+0}(3x-5)=3-5=-2.$ ◀

▶б) Якщо $x<2,$ то $x-2<0$ і при наближенні x до 2 знаменник дробу $\dfrac{x}{x-2}$ є від'ємною н.м.ф., тоді $\dfrac{1}{x-2}$ – від'ємна н.в.ф. Оскільки границя чисельника $\lim\limits_{x\to 2-0}x=\lim\limits_{x\to 2+0}x=2>0,$ то $f(2-0)=\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{x}{x-2}=-\infty.$ Якщо ж $x>2,$ то $x-2>0$ і $\dfrac{1}{x-2}$ – додатна н.в.ф. при $x\to 2,$ тому $f(2+0)=\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{x}{x-2}=+\infty.$ ◀

▶в) Якщо $x\to +0,$ то $\dfrac{1}{x}\to +\infty.$ При цьому $2^{\frac{1}{x}}\to\infty$ і $1+2^{\frac{1}{x}}\to\infty,$ отже, $f(+0)=\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}=0.$ Якщо $x\to -0,$ то $x<0$ і $\dfrac{1}{x}\to -\infty.$ При цьому показникова функція $2^{\frac{1}{x}},$ маючи основу $2>1,$ прямує до нуля.

Отже, $f(-0)=\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}=\dfrac{1}{1+0}=1.$ ◀

▶г) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}-3}{x^2-36}=\dfrac{\left(\sqrt{x+3}-3\right)\left(\sqrt{x+3}+3\right)}{(x-6)(x+6)}=$

$$=\frac{x-6}{(x-6)(x+6)\left(\sqrt{x+3}+3\right)}=\frac{1}{(x+6)\left(\sqrt{x+3}+3\right)}.$$

Тому $\lim\limits_{x\to 6} f\left(x\right)=\dfrac{1}{12\left(\sqrt{9}+3\right)}=\dfrac{1}{72}$, тобто $\lim\limits_{x\to 6} f\left(x\right)$ існує.

Отже, існують і односторонні границі

$$f\left(6\pm 0\right)=\lim_{x\to 6} f\left(x\right)=\frac{1}{72}. \blacktriangleleft$$

►г) Розглянемо дві послідовності додатних чисел, які прямують до нуля: $\left\{x_n'\right\}=\left\{\dfrac{1}{n}\right\}\to +0, \left\{x_n''\right\}=\left\{\dfrac{2}{1+4n}\right\}\to +0.$

Послідовності значень функції, що їм відповідають, мають неоднакові границі:

$$\left\{f\left(x_n'\right)\right\}=\left\{\sin \pi n\right\}=\left\{0\right\}\to 0, \left\{f\left(x''_n\right)\right\}=\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\right\}=\left\{1\right\}\to 1.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to +0}\sin\dfrac{\pi}{x}$ не існує. Оскільки функція $f\left(x\right)=\sin\dfrac{\pi}{x}$ непарна, то не існує також і лівостороння границя $f\left(-0\right)=\lim\limits_{x\to -0}\sin\dfrac{\pi}{x}$. ◄

Завдання для самостійного розв'язання

26. Користуючись означенням границі функції, довести що:

а) $\lim\limits_{x\to -2}\left(4x^2-3x\right)=22$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{5x-8}=\dfrac{2}{5}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos 2x}{x}=0$.

27. Довести, що границі функцій не існують:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\cos\dfrac{1}{x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}7^{\frac{1}{x}}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty} ctg\, x$.

28. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{5}{9-x^2}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+x}-2x\right)$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$, де $m,n\in N$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+9}{3x^2-7x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-6x+2}{7x+8}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$; є) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}$.

29. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\sin 7x}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sin(x-4)}{\sqrt{x-4}}$;

в) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{1-\dfrac{x^2}{\pi^2}}$; г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{tg^3 x-3tg\, x}{\cos(x+\frac{\pi}{6})}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+5}-\sin\sqrt{x}\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9^x-8^x}{7^x-6^x}$.

30. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{x+9}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-2x}-1}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{8}}(\sin 4x)^{tg^2 4x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x-3}{7x+3}\right)^x$;

ґ) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+4x+5}{x^2+3x+7}\right)^{\frac{5x+3}{4x+7}}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+5x}{7+5x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$;

е) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{ctg}x}$; є) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\ln\left(1+7\sin2x\right)$.

31. Вважаючи, що $x\to\infty$, порівняти н.в.ф.:

а) $f\left(x\right)=3x^2+7x+8,\quad \varphi\left(x\right)=9x^2+2x+5$;

б) $f\left(x\right)=4x^2+7x, \varphi\left(x\right)=(2x+5)^2$;

в) $f\left(x\right)=\sqrt[3]{x+4}, \varphi\left(x\right)=\sqrt[3]{x+6}$.

32. Нехай $x\to0$. Знайти порядок н.м.ф. у порівнянні з x:

а) $9\sin^6x-x^6$; б) $4\sin^3x-x^5$; в) $\sqrt{4+x^6}-2$;

г) $\sin\sqrt[3]{x}$; ґ) $\cos x-\sqrt[3]{\cos x}$; д) $e^{3x}-\cos3x$.

33. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin6x}{\ln\left(1+7x\right)}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1+\sin4x\right)}{e^{5x}-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(2-\cos3x\right)}{\ln^3\left(\sin9x+1\right)}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{\ln\left(1+x^4\right)}}{1-\cos x}$;

ґ) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin5x}-1}{\ln\left(1+\operatorname{tg}6x\right)}$; д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1+3x-4x^2+7x^3\right)}{\ln\left(1-2x+6x^2+8x^3\right)}$.

34. Знайти односторонні границі функцій при $x\to x_0$:

а) $f\left(x\right)=\dfrac{3+x}{5-5^{\frac{1}{x}}}$ при $x\to0$;

б) $f\left(x\right)=\dfrac{\left|\sin 2x\right|}{x}$ при $x\to 0$;

в) $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-25}{x+5}$ при $x\to\left(-5\right)$;

г) $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{3x}, \text{ якщо } x\neq 0,\\ 1, \text{ якщо } x=0\end{cases}$ при $x\to 0$;

г) $f\left(x\right)=\begin{cases}4^{\frac{5}{x}}, \text{ якщо } x\neq 0,\\ 0, \text{ якщо } x=0\end{cases}$ при $x\to 0$.

§ 5. Неперервність і точки розриву

5.1 Різні означення неперервності функції в точці

Неперервність функції $f\left(x\right)$ характеризує плавність проходження процесу, що описується цією функцією: якщо незалежна змінна x наближається до точки x_0, то значення функції $y=f\left(x\right)$ наближаються до значення цієї функції в точці x_0, тобто до $f\left(x_0\right)$.

Дамо тепер строгі означення неперервності функції.

Означення 4. *Функція $y=f\left(x\right)$ називається неперервною в точці x_0 якщо: функція визначена в точці x_0 і в деякому її околі, що містить цю точку; функція має границю при $x\to x_0$, границя функції при $x\to x_0$ дорівнює значенню функції в точці x_0, тобто*

$$\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)=f\left(x_0\right). \tag{7}$$

Якщо в точці x_0 функція неперервна, то точка x_0 називається *точкою неперервності* даної функції.

Розшифровуючи поняття границі функції можемо дати ще такі означення неперервності.

Означення 5. Функція $f(x)$ називається *неперервною в точці* x_0 якщо вона визначена в цій точці і в деякому її околі, існують обидві односторонні границі функції у цій точці, причому $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$.

Дамо означення неперервності функції в термінах „приростів". При цьому під приростом деякої величини розуміють різницю двох її значень. Зокрема, для функції $y=f(x)$ можна розглядати приріст аргументу

$$\Delta x = x_2 - x_1 = (x+\Delta x)-x, \quad (x_2 = x+\Delta x,\ x_1 = x)$$

і приріст функції, що відповідає цьому приросту аргументу, $\Delta y = \Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$.

Якщо тепер врахувати, що в наших означеннях $(x \to x_0) \Leftrightarrow (\Delta x \to 0)$, а $(f(x) \to f(x_0)) \Leftrightarrow (\Delta f(x) \to 0)$, то маємо таке означення неперервності функції.

Означення 6. Функція $f(x)$, що визначена в точці x_0 і в деякому її околі, називається *неперервною* в цій точці, якщо нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції, тобто

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 . \tag{8}$$

Рівності (7) і (8) можна записати у вигляді $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim\limits_{x \to x_0} x\right)$, тобто визначальним в означенні неперервності функції $f(x)$ в точці x_0 є „комутативність" понять (символів, слів) „границя" і „функція" $(\lim\ i\ f)$.

Якщо скористатись означеннями границі функції за Коші чи за Гейне, то можемо одержати ще два означення неперервності функції. Зупинимось лише на одному з них (на „мові $\varepsilon-\delta$ “).

Означення 7. *Функція $f(x)$, що визначена в точці x_0 і в деякому її околі, називається неперервною в цій точці, якщо*

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall x\left(0<|x-x_0|<\delta\right)\Rightarrow\left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon.$$

Останнє означення заслуговує на увагу тим, що в ньому явно не використовується поняття границі функції.

Функцію, що неперервна в кожній точці проміжку $\langle a,b\rangle$, називають неперервною на цьому проміжку. Множину таких функцій позначають $C_{\langle a,b\rangle}$.

5.2 Одностороння неперервність

Якщо функція $f(x)$, визначена в деякому правому півоколі точки x_0, включаючи його лівий край, тобто в $[x_0;x_0+\delta]$, $\delta>0$, має в точці x_0 правосторонню границю $f(x_0+0)$, що дорівнює значенню функції в цій точці $f(x_0+0)=f(x_0)$, то кажуть, що функція $f(x)$ *неперервна в* x_0 *справа*. Аналогічно, якщо функція визначена на проміжку $[x_0-\delta;x_0]$, $\delta>0$ та існує $f(x_0-0)$, причому $f(x_0-0)=f(x_0)$, то кажуть, що функція $f(x)$ *неперервна в* x_0 *зліва*.

Зрозуміло, що твердження „функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 “ і „функція $f(x)$ одночасно неперервна в точці x_0 і зліва і справа“ еквівалентні.

Під неперервністю функції на замкненому проміжку $a\le x\le b$ (на відрізку $[a,b]$) розуміють її неперервність в інтервалі (a,b) і односторонню неперервність в лівому кінці a справа, а в правому кінці b – зліва.

Аналогічно, неперервність функції на проміжку $[a, b)$ означає неперервність в інтервалі (a, b) і правосторонню неперервність в лівому кінці a проміжку. Подібним чином розшифровується неперервність функції в $(a, b]$.

5.3 Властивості функцій, неперервних в точці

Розглянемо властивості неперервних функцій. Доведення їх випливає з означення неперервності та властивостей границь функції.

Теорема 11 *(про арифметичні операції над неперервними функціями). Нехай функції* $f_1(x)$ *і* $f_2(x)$ *неперервні в точці* x_0. *Тоді функції*

$$f_1(x)+f_2(x),\ f_1(x)-f_2(x),\ f_1(x)\cdot f_2(x),\ і\ f_1(x)/f_2(x)$$

неперервні в точці x_0 *(частка – за умови, що* $f_2(x)\neq 0$*).*

Теорема 12 *(про неперервність складеної функції). Якщо функція* $u=\varphi(x)$ *неперервна в точці* x_0, *а функція* $y=f(u)$ *неперервна в точці* $u_0=\varphi(x_0)$, *то складена функція* $y=f[\varphi(x)]=F(x)$ *неперервна в точці* x_0.

5.4 Властивості функцій, неперервних на замкненому проміжку

Теорема 13 *(про обмеженість неперервної функції). Якщо функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a, b]$, *то вона обмежена на цьому відрізку.*

Теорема 14 *(про досягнення найбільшого і найменшого значень). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то вона досягає на цьому відрізку своїх найбільшого і найменшого значень.*

Теорема 15 *(про проміжні значення). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і на його кінцях набирає різних значень $f(a) = A$, $f(b) = B$, $A \neq B$, то для будь-якого числа C, що лежить між A і B всередині сегмента $[a, b]$ знайдеться хоча б одна точка c така, що $f(c) = C$.*

На практиці *теорему 15* зручно використовувати в такому формулюванні:

Теорема 16 *(про нуль неперервної функції). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і на його кінцях набирає значення різних знаків $\left(f(a)\cdot f(b) < 0\right)$, то всередині цього відрізка знайдеться хоча б одна точка, в якій функція дорівнює нулю.*

Теорема 17 *(про існування і неперервність оберненої функції). Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і зростає (спадає) на цьому відрізку, тоді обернена функція $x = f^{-1}(y) \equiv \varphi(y)$ на відповідному відрізку осі Oy існує і є також неперервною зростаючою (спадною) функцією.*

5.5 Точки розриву та їх класифікація

Для глибшого розуміння поняття „неперервність функції $f(x)$ в точці x_0“ потрібно розглянути його „заперечення“ – так званий „розрив функції“. З цією метою введемо поняття „межі“ (краю, границі) області визначення (існування) функції.

Означення 8. *Точка* x_0 *називається межовою (крайовою, граничною) точкою області існування функції, якщо будь-який окіл цієї точки містить як точки області визначення функції, так і точки, які в цю область не входять.*

Означення 9. *Сукупність всіх межових точок області існування функції називається межею (краєм, границею) цієї області.*

Так, для функцій $y=\sqrt{1-x^2}$, $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ межею області їх існування є сукупність точок $x_1=1$ і $x_2=-1$, а для функцій $y=\dfrac{1}{x}$, $y=\log_a x$ межовою є точка $x=0$.

Означення 10. *Точка* x_0 *називається точкою розриву функції* $f(x)$ *якщо вона належить області визначення цієї функції або її межі і не є точкою неперервності. Про саму функцію* $f(x)$ *кажуть, що вона розривна в точці* x_0

Точки розриву функції поділяють на два типи (роди).

Означення 11. *Точка* x_0 *розриву функції* $f(x)$ *називається точкою розриву першого роду, якщо обидві односторонні границі* $f(x_0-0)$ *і* $f(x_0+0)$ *існують і скінченні.*

Означення 12. *Точка* x_0 *розриву функції* $f(x)$ *називається точкою розриву другого роду, якщо хоча б одна з односторонніх границь* $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ *не існує або дорівнює* ∞.

Для точок розриву першого роду вводять поняття *стрибка* функції, під яким розуміють різницю $h=f(x_0+0)-f(x_0-0)$.

Точки розриву, в яких стрибок $h = 0$, тобто коли $f\left(x_0 + 0\right) = f\left(x_0 - 0\right)$, називаються *усувними* точками розриву (або точками усувного розриву). У цьому випадку функцію можна „підправити“ – перевизначити або довизначити в точці x_0 так, щоб одержати неперервну функцію (але це вже буде інша функція).

5.6 Дослідження функції на неперервність

При дослідженні на неперервність не виникає проблеми з елементарними функціями. Насправді основні елементарні функції неперервні у всіх точках, в яких вони визначені. Тоді з теорем 11-12 випливає: кожна елементарна функція неперервна в усіх точках з області її визначення. Точками розриву тут можуть бути хіба що межові точки області її існування.

Якщо ж функція $f\left(x\right)$ неелементарна, то, не вдаючись до загальних рекомендацій, обмежимось лише випадком, коли на різних ділянках області свого визначення вона задається різними аналітичними виразами. Розриви тут можуть бути не тільки в точках, де функція не існує, але і в точках, в яких змінюється аналітичний вираз функції – в так званих „точках стику“ областей задання різними аналітичними виразами.

Дослідити функцію на неперервність – означає встановити проміжки неперервності, знайти точки розриву і класифікувати їх.

Означення 13. *Функція* $y = f\left(x\right)$ *називається кусково-неперервною на відрізку* $\left[a, b\right]$, *якщо вона неперервна в усіх внутрішніх точках цього відрізка за винятком скінченної кількості точок, у яких функція має розрив першого роду; крім того існують односторонні границі функції в точках* a *і* b.

Функція називається *кусково-неперервною на числовій прямій*, якщо вона є кусково-неперервною на будь-якому відрізку.

Приклади розв'язання задач

37. Користуючись лише означенням, довести неперервність на всій числовій прямій функцій:

а) $f(x) = \sin x$; б) $\varphi(x) = x^3$.

Будемо використовувати означення неперервності в термінах приростів. Обидві функції існують при $\forall\, x \in R$.

►а) Розглянемо довільну точку $x_0 \in \mathbb{R}$. Надамо аргументу x приросту Δx в точці x_0. Тоді $f(x)$ одержить приріст $\Delta f(x_0) = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)$.

Оскільки $\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right| \le \left|\frac{\Delta x}{2}\right|$, $\left|\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \le 1$, то

$\left|\Delta f(x_0)\right| \le 2\cdot\left|\frac{\Delta x}{2}\right| = \left|\Delta x\right|$. Тому $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0) = 0$, з чого і випливає неперервність досліджуваної функції в довільно вибраній точці, а отже, і на всій числовій прямій. ◄

►б) Як і вище, розглянемо

$$\Delta\varphi(x_0) = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = 3x_0^2\Delta x + 3x_0\cdot\Delta x^2 + \Delta x^3.$$

Тоді $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta\varphi(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(3x_0^2\Delta x + 3x_0\cdot\Delta x^2 + \Delta x^3\right) = 0.$ ◄

38. Дослідити на неперервність функції:

а) $y=\dfrac{1}{x^3}$; б) $y=\log_a x\left(a>1\right)$;

в) $y=\cos\dfrac{1}{x}$; г) $y=\dfrac{1}{1+3^{\frac{1}{1-x}}}$;

г) $y=\sqrt{1-x^2}+\dfrac{1}{1-x}$; д) $y=\dfrac{x}{x^2-1}$.

Всі задані тут функції – елементарні. Тому проміжками неперервності є області їх існування.

►а) Областю існування функції є множина точок $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. В усіх точках цієї області функція неперервна. Межовою точкою області існування є точка $x_0=0$. Оскільки $x_0\notin D\left(f\right)$, то x_0 – точка розриву. Знаходимо односторонні границі: $f\left(+0\right)=+\infty$, $f\left(-0\right)=+\infty$. Отже, x_0 – точка розриву другого роду. ◄

►б) Функція визначена на інтервалі $\left(0;+\infty\right)$. Там же вона неперервна. Межовою точкою області визначення є точка $x_0=0$. Права границя функції в цій точці дорівнює $-\infty$. Отже, x_0 – точка розриву другого роду. ◄

►в) Задана функція є складеною з двох елементарних функцій $u=\dfrac{1}{x}$ і $y=\sin u$. Отже, вона – елементарна і область її визначення $D\left(f\right)=\left(-\infty;0\right)\cup\left(0;+\infty\right)$.

Межова точка області визначення $-x_0 = 0$. Жодна з односторонніх границь функції $f(x) = \cos\frac{1}{x}$ точці x_0 не існує. Отже, x_0 – точка розриву другого роду. ◄

►г) Функція існує, а отже, і неперервна при всіх $x \neq 1$, тобто $D(f) = (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$. Межовою точкою області визначення є $x_0 = 1$. Оскільки ця точка не належить $D(f)$, то $x_0 = 1$ – точка розриву. Знаходимо односторонні границі.

При $x \to 1-0$ вираз $x-1<0$, а тому

$$\left(\frac{1}{x-1} \to -\infty\right) \Rightarrow \left(3^{\frac{1}{x-1}} \to 0\right) \Rightarrow \left(\frac{1}{1+3^{\frac{1}{x-1}}} \to \frac{1}{1+0} = 1\right).$$

Аналогічно, при $x \to 1+0$ вираз $x-1>0$,тому

$$(x \to 1+0) \Rightarrow \left(\frac{1}{x-1} \to +\infty\right) \Rightarrow \left(3^{\frac{1}{x-1}} \to +\infty\right) \Rightarrow \left(\frac{1}{1+3^{\frac{1}{x-1}}} \to 0\right).$$

Таким чином, обидві односторонні границі існують і скінченні, але не дорівнюють одна одній. Отже, $x_0 = 1$ є точкою розриву першого роду. „Стрибок“ функції складає $|h| = |0-1| = 1$. ◄

►г) Область існування функції встановлюємо з умов

$$\begin{cases} 1-x^2 \geq 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad -1 \leq x < 1,$$

тобто $D(f)=[-1;1)$. Межовими точками області існування функції є $x_1=-1$, $x_2=1$. Точка $x_1=-1$ входить в область існування, а при $x_2=1$ функція не існує. Тому функція неперервна в проміжку. Оскільки при $x\to 1-0$ маємо $1-x>0$, то $\frac{1}{1-x}\to +\infty$; тому $f(1-0)=-\infty$. Отже, в точці $x_2=1$ функція має розрив другого роду. ◄

►д) Функція існує і неперервна в усіх точках, де знаменник не дорівнює нулю, тобто $D(f)=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

Межовими точками області визначення є $x_1=-1$, $x_2=1$. В цих точках функція не існує, отже, вони є точками розриву. Оскільки односторонні границі в цих точках нескінченні, то $x=\pm 1-$ точки розриву другого роду. ◄

39. Дослідити на неперервність функції:

а) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$;

б) $\varphi(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} \text{ при } x\neq 0,\\ 2 \text{ при } x=0.\end{cases}$

в) $\psi(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} \text{ при } x\neq 0,\\ 1 \text{ при } x=0.\end{cases}$

Всі три наведені тут функції – різні: перша не визначена в точці $x_0 = 0$, а дві інші в точці $x_0 = 0$ набувають певних значень.

►а) Функція $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ – елементарна, її область визначення $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$. В межовій точці області визначення $x_0 = 0$ дана функція не визначена, отже, $x_0 = 0$ – точка розриву. Як відомо, границя $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, тобто існує і скінченна (перша важлива границя). Тому $x_0 = 0$ – точка розриву першого роду, до того ж розрив функції у цій точці усувний, бо $\lim\limits_{x \to \pm 0} f(x) = 1$. ◄

►б) Функція $\varphi(x)$ неелементарна; вона визначена на всій числовій осі, тобто $D(\varphi) = \mathbb{R}$. На інтервалах $(\infty; 0)$ і $(0; \infty)$ дана функція неперервна. Дослідимо цю функцію ще в точці $x_0 = 0 : \varphi(-0) = \varphi(+0) = 1$, але $\varphi(0) = 2 \neq 1$. Отже, $x_0 = 0$ – точка усувного розриву. ◄

►в) Функція $\psi(x)$ також неелементарна. Вона, як і попередня функція, визначена на всій числовій прямій і неперервна на інтервалах $(-\infty; 0)$ і $(0; \infty)$. Дослідимо цю функцію ще в точці $x_0 = 0$

$$\begin{cases}\psi(+0)=\psi(-0)=1,\\ \psi(0)=1,\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \psi(-0)=\psi(+0)=\psi(0),$$

тобто $\psi(x)$ неперервна також і в точці 0. Таким чином, областю неперервності функції $\psi(x)$ є множина точок: $(-\infty,0)\cup(0;\infty)\cup\{0\}=\mathbb{R},$ тобто вся числова пряма. ◄

40. Дослідити на неперервність функції:

а) $y=E(x)$ (цілочислова функція);

б) $y=\lambda(x)$ (функція Діріхле);

в) $y=\operatorname{sign} x$.

Означення цих функцій були дані в § 2. Всі задані тут функції неелементарні.

►а) Функція $y=E(x)$ була означена у § 2 описово. Для зручності її дослідження на неперервність охарактеризуємо $E(x)$ аналітично: якщо x знаходиться між двома послідовними цілими числами m і $m+1$, то $E(x)=m$; точніше $E(x)=m$ при $m\le x\le m+1$, $m\in\mathbb{Z}$.

Останню рівність запишемо так

$$E(x)=\begin{cases}\ldots\ldots,\\ m-1 \text{ при } x\in[m-1,m),\\ m \text{ при } x\in[m,m+1),\\ m+1 \text{ при } x\in[m+1,m+2),\\ \ldots\ldots,\end{cases} \quad \text{де} \quad m\in\mathbb{Z}. \qquad (9)$$

Всередині проміжків, що фігурують в (9), тобто в інтервалах $(m, m+1)$, функція $y = E(x)$ − стала і тому неперервна. Точками стику цих інтервалів є сусідні цілі числа. Оскільки стрибки в точках стику

$$h = E(m+0) - E(m-0) = m - (m-1) = 1 \neq 0,$$

то всі цілі числа є точками розриву першого роду функції $E(x)$. Зазначимо також, що $E(m+0) = E(m)$, тобто функція $y = E(x)$ неперервна в точках $x = m$ справа. ◄

►б) Покажемо, що $y = \lambda(x)$ розривна в кожній точці x_0 числової осі. Для цього досить переконатись, що $\lim\limits_{x \to x_0} \lambda(x)$ не існує при будь-якому $x_0 \in \mathbb{R}$.

Нехай x_0 – довільне дійсне число. Тоді можемо вибрати послідовності дійсних чисел $\{x_n\}$ що прямують до x_0.

Нехай одна з цих послідовностей $\{x_n'\}$ складається з раціональних чисел, а друга $\{x_n''\}$ – з ірраціональних чисел: $x_n' \to x_0$, $x_n'' \to x_0$ при $n \to \infty$.

Розглянемо границі відповідних послідовностей значень функції $\lambda(x)$ в цих точках:

$$\lambda(x_n') = 1 \to 1,\ \lambda(x_n'') = 0 \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Одержані границі послідовностей значень функції – різні. Тому $\lim\limits_{x \to x_0} \lambda(x)$ не існує $\forall x_0 \in \mathbb{R}$. Отже, в кожній точці $x_0 \in \mathbb{R}$ функція Діріхле $\lambda(x)$ має розрив другого роду. Графічно зобразити функцію Діріхле неможливо.

Зауваження. Послідовності раціональних $\{x'_n\}$ і ірраціональних чисел $\{x''_n\}$, збіжних до x_0, можна вибирати, зокрема, наступним чином. Нехай $\{\varepsilon_n\}$ – нескінченно мала послідовність додатних чисел. В кожному з ε_n-околів точки x_0 існує хоча б одне раціональне число x'_n і хоча б одне ірраціональне число x''_n; утворюємо з цих чисел послідовності послідовності $\{x'_n\}$, $\{x''_n\}$, які при $\varepsilon_n \to 0$ мають своїми границями x_0.◄

►в) Функція $y = \operatorname{sign} x$ визначена на всій числовій осі. На інтервалі $(-\infty;\, 0)$ вона дорівнює -1, тобто є сталою, а отже, і неперервною. Аналогічно, $\operatorname{sign} x$ неперервна на $(0;\, +\infty)$, тому що і там є сталою, дорівнює 1. Знайдемо односторонні границі цієї функції в точці $x_0 = 0$:

$$\operatorname{sign}(-0) = \lim_{x \to -0}(-1) = -1,\ \operatorname{sign}(+0) = \lim_{x \to +0} 1 = 1.$$

Таким чином, $x=0$ – точка розриву першого роду функції $y=\operatorname{sign}x$. Позаяк $\operatorname{sign}(-0)\neq\operatorname{sign}0$ і $\operatorname{sign}(+0)\neq\operatorname{sign}0$, то $y=\operatorname{sign}x$ не є неперервною в точці $x=0$ ні справа, ні зліва. ◄

41.Задано функції:

а) $f(x)=\dfrac{x^3}{x}$; б) $\varphi(x)=\dfrac{1}{x^3}$;

в) $\psi(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2}$; г) $\gamma(x)=\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}$;

ґ) $\nu(x)=x\cos\dfrac{1}{x}$,

які не визначені в точці $x=0$, але визначені і неперервні в деякому околі цієї точки. Чи можна визначити (довизначити) кожну з цих функцій в точці $x=0$ так, щоб вона стала неперервною і в цій точці?

►а) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3}{x}=\lim\limits_{x\to0}x^2=0$. Отже, якщо за значення функції в точці $x=0$ взяти число нуль, то одержимо функцію неперервну і в точці $x=0$. Це вже буде інша функція

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x} & \text{при } x\neq0,\\ 0 & \text{при } x=0.\end{cases}$$

Функцію $F(x)$ можна записати простішим аналітичним виразом $F(x)=x^2$. ◄

►б) $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}=+\infty$, тому точка $x=0$ є точкою розриву другого роду. При будь-якому довизначенні $\varphi(0)$

$$\Phi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2} & \text{при } x\neq 0,\\ A & \text{при } x=0\end{cases}$$

ця функція залишається розривною в точці $x=0$.◄

►в) $\lim\limits_{x\to 0}\psi(x)=\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{\pi}{2}$. Отже, якщо за значення функції в точці $x=0$ взяти число $\dfrac{\pi}{2}$, то нова функція

$$\Psi(x)=\begin{cases}arctg\,\dfrac{1}{x^2} \text{ при } x\neq 0,\\ \dfrac{\pi}{2} \text{ при } x=0\end{cases}$$

буде неперервною в точці $x=0$.◄

►г) Знайдемо односторонні границі функції в точці $x=0$

$$\gamma(-0)=\lim_{x\to -0}\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}=\operatorname{arcctg}(-\infty)=\pi,$$

$$\gamma(+0)=\lim_{x\to +0}\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}=\operatorname{arcctg}(+\infty)=\pi\neq\gamma(-0),$$

тобто границя $\lim\limits_{x\to 0}\gamma(x)=\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}$ не існує. Тому при будь-якому довизначенні функції в точці $x=0$

$$\Gamma(x)=\begin{cases}\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x} & \text{при } x\neq 0,\\ \Delta & \text{при } x=0\end{cases}$$

нова функція $\Gamma(x)$ не буде неперервною в точці $x=0$.◄

►г) $\lim\limits_{x\to 0}\nu(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cos\dfrac{1}{x}\right)=0$, як границя добутку нескінченно малої функції на обмежену, а тому, якщо змінити дану функцію у такий спосіб

$$\mathrm{H}(x)=\begin{cases}x\cos\dfrac{1}{x} & \text{при } x\neq 0,\\ 0 & \text{при } x=0,\end{cases}$$

то одержимо нову функцію, яка буде неперервною в точці $x=0$.◄

42. Дослідити на неперервність функції:

а) $f(x)=\begin{cases}3^{\frac{1}{x}} & \text{при } x\neq 0,\\ 0 & \text{при } x=0;\end{cases}$

б) $\varphi(x)=\begin{cases}x-1 & \text{при } 0\le x<3,\\ 3-x & \text{при } 3\le x\le 4;\end{cases}$

в) $\psi(x)=\begin{cases}-x-1 & \text{при } x<-1,\\ 1 & \text{при } x=-1,\\ x-1 & \text{при } x>0.\end{cases}$

г) $\gamma(x)=\begin{cases}x^4 & \text{при } x<0,\\ x+2 & \text{при } x>0.\end{cases}$

►а) Функція $f(x)$ неелементарна. Вона визначена на всій числовій прямій. При $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ вона дорівнює функції $f(x)$, яка є елементарною і, отже, неперервною в області свого визначення. Тому про функцію $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$ можна також сказати, що в області $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ вона неперервна. Знайдемо ще односторонні границі цієї функції в точці $x = 0$:

$f(-0) = \lim\limits_{x \to -0} e^{\frac{1}{x}} = 0$, бо $e > 1$ і $\dfrac{1}{x} \to -\infty$ при $x \to -0$;

$f(+0) = \lim\limits_{x \to +0} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$, бо $e > 1$ і $\dfrac{1}{x} \to +\infty$ при $x \to +0$.

Оскільки одна з односторонніх границь − нескінченна, робимо висновок, що $x = 0$ є точкою розриву другого роду функції $f(x)$. Рівність $f(-0) = f(0) = 0$ вказує на те, що $f(x)$ в точці $x = 0$ неперервна зліва.

Висновок: функція $f(x)$ неперервна при всіх $x \neq 0$, а в точці $x = 0$ має розрив другого роду, причому у цій точці функція є неперервною зліва. ◄

►б) Функція $\varphi(x)$ визначена на проміжку $[0;\ 4]$, вона неелементарна, тобто на різних ділянках області визначення задається різними аналітичними виразами. Дослідимо $\varphi(x)$ в точці „стику“ цих ділянок − в точці $x = 3$:

$$\varphi(3-0)=\lim_{x\to 3-0}(x-1)=3-1=2,$$

$$\varphi(3+0)=\lim_{x\to 3+0}(3-x)=3-3=0,$$

$$\varphi(3)=(3-x)\big|_{x=3}=3-3=0.$$

Таким чином, $\varphi(3-0)$ і $\varphi(3+0)$ – скінченні і різні, тому $x=3$ – точка розриву першого роду функції $\varphi(x)$. Оскільки $\varphi(3+0)=\varphi(3)$, то функція $\varphi(x)$ неперервна в точці $x=3$ справа.

На проміжку $[0;\ 3)$ вона задана неперервною елементарною функцією $\varphi^*(x)=x-1$. Отже, $\varphi(x)$ на проміжку $[0;3)$ неперервна. Аналогічно переконуємося, що $\varphi(x)$ неперервна на $[3;4]$.

Отже, функція $\varphi(x)$ неперервна на $[0;3]$ і на $[3;4]$, $x=3$– точка розриву першого роду, в якій задана функція є неперервною справа. ◄

►в) Областю визначення функції $\psi(x)$ є вся числова пряма $D(\psi(x))=\mathbb{R}$. Вона неелементарна, тому що на різних проміжках області визначення функція $\psi(x)$ задається різними аналітичними виразами. Зокрема, при $x\in(-\infty;\ -1)$ функція $\psi(x)=-x-1$– лінійна функція, отже, неперервна.

Аналогічно переконуємось в неперервності $\psi(x)$ при $x \in (-1;\ +\infty)$. Залишається з'ясувати поведінку функції $\psi(x)$ в точці $x=-1$ (точка „стику“ областей задання функції різними аналітичними виразами):

$$\psi(-1-0)=\lim_{x\to -1-0}(-x-1)=1-1=0,$$

$$\psi(-1+0)=\lim_{x\to -1+0}(x-1)=-1-1=-2,$$

$\psi(-1-0)\neq\psi(-1+0)$ – скінченні, різні. Отже, $x=-1$ – точка розриву першого роду, причому досліджувана функція розривна і справа і зліва, оскільки $\psi(-1\pm 0)\neq\psi(-1)$. ◄

►г) Функція $\gamma(x)$ визначена при всіх $x\in R$, тобто $D(\gamma)=\mathbb{R}$. На різних проміжках своєї області визначення вона задається різними аналітичними виразами. Елементарні функції $y=x^3$ і $y=x+2$ неперервні скрізь, зокрема, відповідно на $(-\infty;0]$ і $(0;+\infty)$. В точці „стику“ $x=0$:

$\gamma(-0)=\lim\limits_{x\to -0}x^3=0$, $\quad\gamma(+0)=\lim\limits_{x\to +0}(x+2)=2$, $\quad\gamma(0)=0^3=0.$

Оскільки $\gamma(-0)$, $\gamma(+0)$ – скінченні, різні, то $x=0$ – точка розриву першого роду. Крім того, дана функція неперервна в точці $x=0$ зліва, бо $\gamma(-0)=\gamma(0)$.

Отже, функція $\gamma(x)$ неперервна на проміжках $(-\infty;0]$ і $(0;+\infty)$, $x=0$ – точка розриву першого роду. ◄

Завдання для самостійного розв'язання

35. Дослідити на неперервність функції:

а) $f(x)=\dfrac{e^{\frac{x}{2}}-1}{x-2}$; б) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{\frac{x}{2}}-1}{x-2} & \text{при } x\neq 0,\\ 3 & \text{при } x=0;\end{cases}$

в) $f(x)=\dfrac{|\cos x-1|}{\cos x-1}$; г) $f(x)=E(x)+E(-x)$;

ґ) $f(x)=x-E(x)$.

36. Визначити, якого роду розрив в точці $x=x_0$ мають функції:

а) $f(x)=\begin{cases}2x+3 & \text{для } x<3,\\ 2x^2-5 & \text{для } x\geq 3,\end{cases}$ $x_0=3$;

б) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2x-5}, x_0=\dfrac{5}{2}$;

в) $f(x)=\dfrac{1}{1+4^{\frac{1}{x-5}}}, x_0=5$;

г) $f(x)=\operatorname{ctg} x, x_0=\pi$;

ґ) $f(x)=\sqrt{x}-E\left(\sqrt{x}\right); x_0=n^2$, де $n\in\mathbb{N}$.

37. Дослідити функції на неперервність:

а) $f(x)=\dfrac{4x-1}{x^2-6x+9}$; б) $f(x)=2x-7+\dfrac{x-6}{|x-6|}$;

в) $f\left(x\right)=\dfrac{4\left|x-5\right|}{5x^2-x^3}$; г) $\begin{cases}-x^2+5x-3 & \text{при} \quad x\le 1,\\ \dfrac{2x+7}{4x^2-9} & \text{при} \quad x>1.\end{cases}$

38. Дані функції довизначити в точці $x=0$ так, щоб вони стали неперервними:

а) $f\left(x\right)=\dfrac{tg\, x}{x}$; б) $f\left(x\right)=\dfrac{-3x^3+7x}{4x}$;

в) $f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$; г) $f\left(x\right)=\dfrac{5\sin^2 4x}{1-\cos 3x}$.

Відповіді до завдань для самостійного розв'язання

1. $A\bigcup B=\left\{-1;2;3;4;5;6;11;14;18\right\}$, $A\bigcap B=\left\{-1;6;14\right\}$,

$A\setminus B=\left\{2;4;11\right\}$, $B\setminus A=\left\{3;5;18\right\}$.

2. **а)** хибне; **б)** істинне; **в)** хибне; **г)** хибне.

3. Доведення ірраціональності див. приклад 11 у розділі 1.

4. **а)** $-1;\ 4;\ \dfrac{-5\pm\sqrt{41}}{2}$; **б)** $2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$;

в) $\left(-\infty;-\dfrac{5}{2}\right)\cup\left[\dfrac{5}{2};+\infty\right);[1;8]$.

5. **а)** $\left(-\dfrac{4}{3};2\right)$; **б)** $\left(-\infty;\dfrac{3}{2}\right)\cup\left(\dfrac{7}{2};+\infty\right)$; **в)** $\left(\dfrac{8}{5};2\right)$; **г)** $\varnothing$.

6. **а)** $\dfrac{11n^2}{3n^2+7}<\dfrac{11}{7} \quad \forall n\in\mathbb{N}$; **б)** $\dfrac{15n^3-1}{5n^3+4}<3 \quad \forall n\in\mathbb{N}$.

7. **а)** $f\left(-2x\right)=\dfrac{8x^3+4}{3x-2}$; **б)** $f\left(-x^2\right)=\dfrac{2x^6+8}{3x^2-4}$;

в) $4f(x)=\dfrac{4(2x^3-8)}{4+3x}$; **г)**$[f(x)]^2=\left(\dfrac{2x^3-8}{4+3x}\right)^2$.

8. $f^3(x)+\varphi^2(x)=3^{3x^3}+x^6$.

9. **а)** $f(-3)=2$; **б)** $f(0)=0$; **в)** $f(3)=0$;

г) $f(-2)=0$; **ґ)** $f(2)=0$.

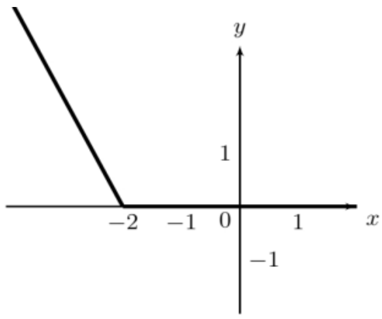


Рисунок 6: графік $f(x)=|x+2|-x-2$ до прикладу 9

10. **а)** $f(0)=0$; **б)** $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$; **в)** $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{3}{2}$; **г)** $f(2)=1$.

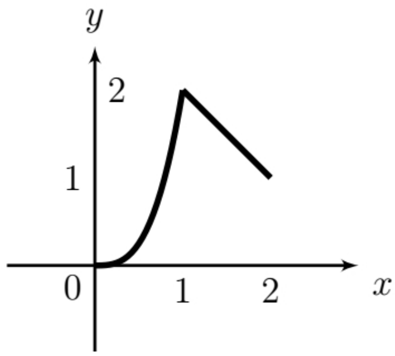


Рисунок 7: графік $f(x)$ до прикладу 10

11. а) $f(1)=2$; **б)** $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ невизначено;

в) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1+\sqrt{\frac{\pi}{2}}$; **г)** $f(0)=1$; **ґ)** $f(3)$ не існує.

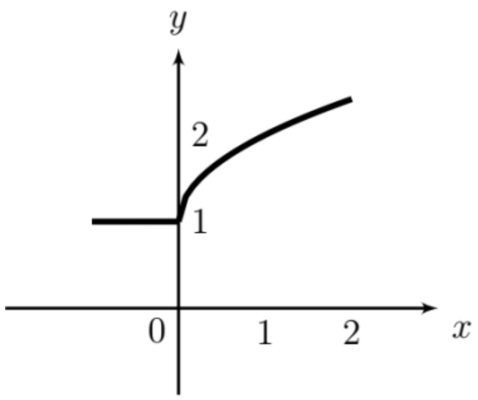


Рисунок 8: графік $f(x)$ до прикладу 11

12. а) $y=u^2$, де $u=\sin w, w=\frac{x+2}{4}$;

б) $y=u^{\frac{4}{3}}$, де $u=x-7$;

в) $y=3^u$, де $u=v^2, v=\arccos w, w=x^3$;

г) $y=u^2$, де $u=\operatorname{arctg} v, v=\operatorname{tg} w, w=\frac{x^2+3x}{5}$.

13. а) $[-3;0)\cup(0;3]$; **б)** $[18;36]$; **в)** $(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$;

г) $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{6};\ \frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{6}\right)$ **ґ)** $(-5;5)$;

д) $(-3;-2)\cup(-2;+\infty)$; **е)** $(-\infty;+\infty)$; **є)** $[-7;3]$.

14. **а)** $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\left[-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k;\ \dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right]$ **б)** $\left[\dfrac{4}{3};\dfrac{5}{3}\right]$.

15. **а)** парна; **б)** парна; **в)** ні парна, ні непарна;

г) парна; **ґ)** парна; **д)** парна.

16. **а)** $\dfrac{2\pi}{5}$; **б)** 6π; **в)** π; **г)** π.

17. **а)** $y=\cos 3x, x\in[0;\pi], y\in[-3;3]$;

б) $y=e^{log_6 x}, x\in(0;+\infty), y\in(0;+\infty)$;

в) $y=9+\dfrac{12}{\log_3\dfrac{y}{3}}, x\in(0;\infty), y\in(-\infty;9)\cup(9;+\infty)$;

г) $y=\dfrac{1}{3}\arcsin x+\dfrac{1}{3}, x\in[-1;1], y\in\left[-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{3};\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{3}\right]$.

18. **а)** графік до прикладу на рис. 9;

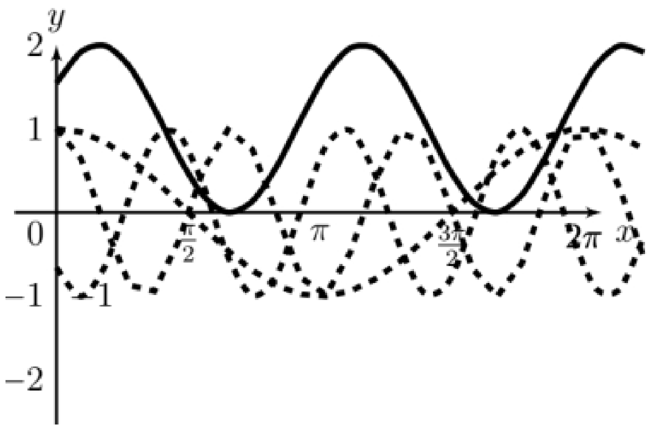


Рисунок 9: побудова графіка $y=cos(-3x+4)+1$

б) графік до прикладу на рис. 10;

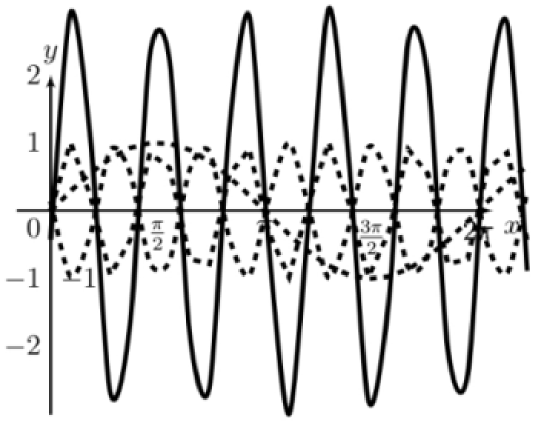


Рисунок 10: побудова графіка $y = -3sin(5x+3)$

в) графік до прикладу на рис. 11;

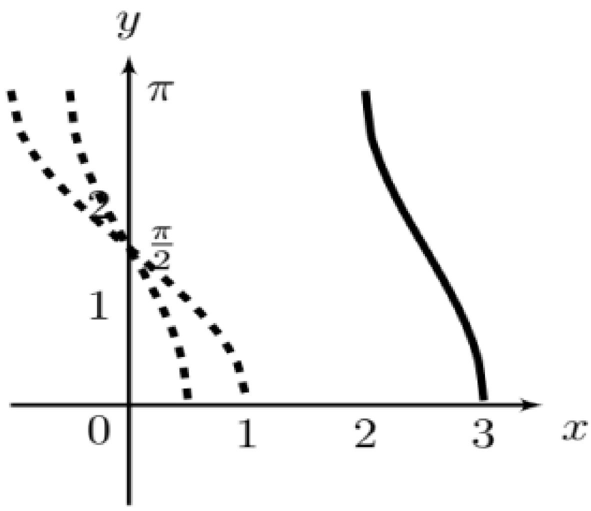


Рисунок 11: побудова графіка $y = arccos(2x-5)$

г) графік до прикладу на рис. 12;

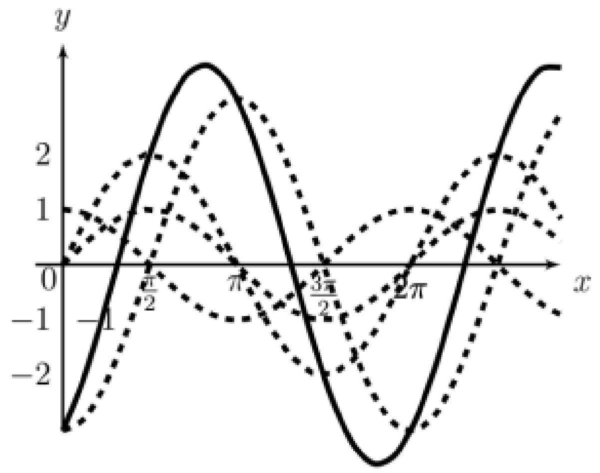


Рисунок 12: побудова графіка $y = 2sinx - 3cosx$

г) графік до прикладу на рис. 13;

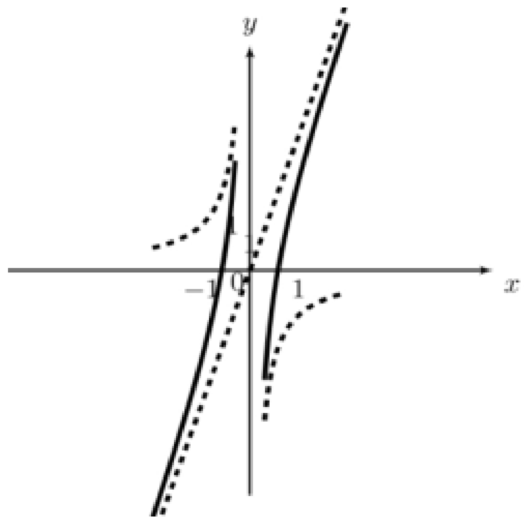


Рисунок 13: побудова графіка $y = 3x - \frac{1}{x}$

д) графік до прикладу на рис. 14;

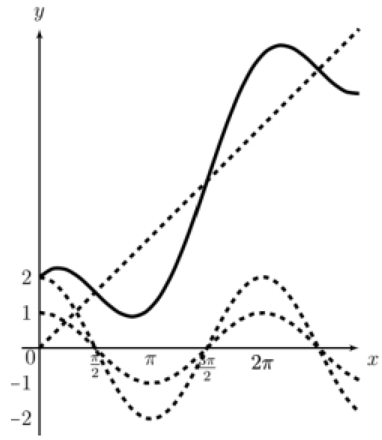


Рисунок 14: побудова графіка $y = x + 2cosx$

е) графік до прикладу на рис. 15;

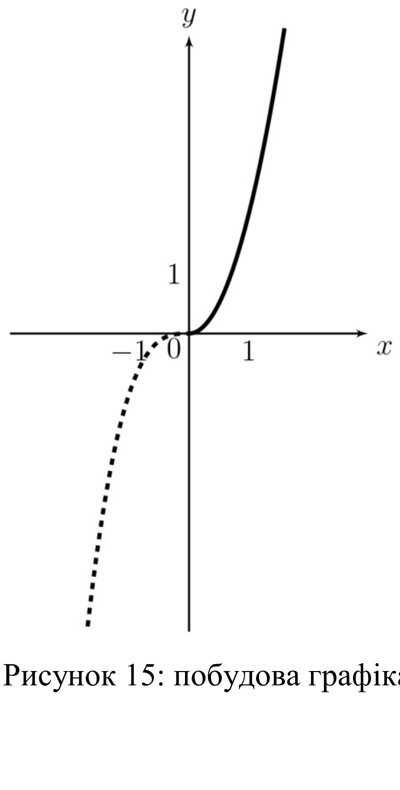


Рисунок 15: побудова графіка $f\left(x\right)$

є) графік до прикладу на рис. 16.

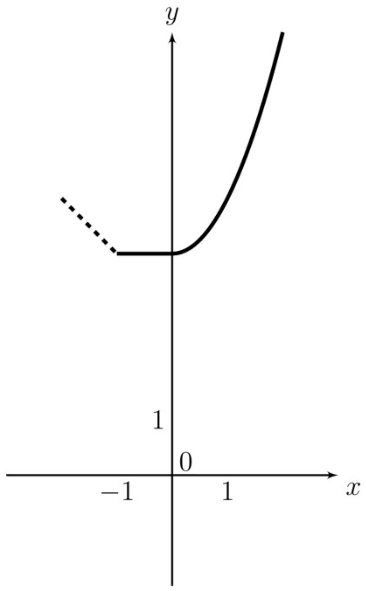


Рисунок 16: побудова графіка $f\left(x\right)$

19. **а)** $\sqrt{n\left(n+1\right)}$; **б)** $\dfrac{1}{10n+1}$; **в)** $\dfrac{2n-1}{\sqrt{2^n}}$; **г)** $(-1)^{n-1}\left(\dfrac{3n}{3n+1}\right)^n$.

20. **а)** $5; -12; 21; -48; -65$; **б)** $\dfrac{1}{2}; 0; -\dfrac{1}{8}; 0; \dfrac{1}{32}$;

в) $\dfrac{1}{12}; \dfrac{7}{60}; \dfrac{73}{540}; \dfrac{139}{945}; \dfrac{235}{1512}$; **г)** $6; 5; -2; 3; -10$.

21. **а)** $\dfrac{3n^2}{2n^2+4} < \dfrac{3}{2}$; **б)** $3 - \arcsin\dfrac{1}{n^2+4} < 3$;

22. **а)** $\dfrac{1}{10}$; **б)** 1; **в)** 0; г) 2.

23. У всіх прикладах цього пункту необхідно розв'язати відносно n таку нерівність $\left|x_n - a\right| < \varepsilon$, де число a –

границя відповідної послідовності.

24. **а)** 1; **б)** 3; **в)** $\frac{1}{2}$; **г)** e; **ґ)** $\frac{1-\sqrt{13}}{2}$.

25. **а)** $-\frac{16}{15}$; **б)** 0; **в)** 0; **г)** $+\infty$; **ґ)** $3\sqrt{6}$;

е) ∞; **є)** ∞; **ж)** 0; **з)** $\frac{2}{3}$; **и)** ∞.

26. Використайте означення на мові „$\varepsilon-\delta$“.

27. **а)** $x'_n=\sqrt{1+\frac{1}{\pi n}}, x``_n=\sqrt{1+\frac{1}{\frac{\pi}{2}+\pi n}}$;

б) $x'_n=\frac{1}{n}, x''_n=-\frac{1}{n}$; **в)** $x'_n=\frac{\pi}{2}+\pi n, x``_n=\frac{\pi}{4}+\pi n.$

28. **а)** ∞; **б)** 4; **в)** $\frac{1}{4}$; **г)** $\frac{m}{n}$; **ґ)** 0; **д)** ∞; **е)** 1; **є)** 0.

29. **а)** $\frac{1}{42}$; **б)** 0; **в)** $\frac{1}{2}$; **г)** -24; **ґ)** не існує; **д)** $\frac{\ln 9-\ln 8}{\ln 7-\ln 6}$.

30. **а)** e^3; **б)** -2; **в)** $\frac{1}{\sqrt{e}}$; **г)** $e^{-\frac{6}{7}}$; **ґ)** $2^{\frac{5}{4}}$; **д)** 1; **е)** 1; **є)** 14.

31. **а)** одного порядку; **б)** одного порядку; **в)** одного порядку.

32. **а)** 6; **б)** 3; **в)** 6; **г)** $\frac{1}{3}$; **ґ)** 2; **д)** 1.

33. **а)** $\frac{6}{7}$; **б)** $\frac{4}{5}$; **в)** ∞; **г)** 2; **ґ)** $\frac{5}{6}$; **д)** $-\frac{3}{2}$.

34. **а)** $f(-0)=\frac{3}{5}, \quad f(+0)=0$; **б)** $f(-0)=-2, \quad f(+0)=2$.

в) $f(-5-0)=f(-5+0)=-10;$ **г)** $f(-0)=f(+0)=\dfrac{1}{3};$

ґ) $f(+0)=+\infty,\ f(-0)=0.$

35. **а)** $x=2$ – точка розриву другого роду;

б) $x=0$ – точка розриву першого роду, $x=2$ – точка розриву другого роду;

в) $x=2\pi k\ (k\in\mathbb{Z})$ – точка усувного розриву;

г) $x=k\ (k\in\mathbb{Z})$ – точка усувного розриву;

ґ) $x=k\ (k\in\mathbb{Z})$ – точка розриву першого роду.

36. **а)** $x=3$ – точка розриву першого роду;

б) $x=\dfrac{5}{2}$ – точка розриву першого роду;

в) $x=5$ – точка розриву першого роду;

г) $x=\pi$ – точка розриву другого роду;

ґ) $x=n$ – точка розриву першого роду.

37. **а)** $x=3$ – точка розриву другого роду;

б) $x=6$ – точка розриву першого роду;

в) $x=0$ – точка розриву другого роду, $x=5$ – точка розриву першого роду;

г) $x=1$ – точка розриву першого роду, $x=\dfrac{3}{2}$ – точка розриву другого роду.

38. **а)** $f(0)=1;$ **б)** $f(0)=\dfrac{7}{4};$ **в)** $f(0)=\dfrac{1}{3};$ **г)** $f(0)=\dfrac{160}{9}.$

4 Диференціальне числення функцій однієї змінної

§ 1. Диференціювання функцій

1.1 Похідна функції. Диференціювання складених функцій

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому δ– околі точки x_0 і $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ – її приріст в цій точці, що відповідає приросту аргументу $\Delta x = x - x_0 \neq 0$, де $x \in \left(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta\right)$.

Границя відношення $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ називається *похідною функції* $y = f(x)$ в точці x_0. Ця границя позначається $f'(x_0)$, $y'(x_0)$, $f'(x)\big|_{x=x_0}$. Таким чином,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Інші позначення похідної в точці x: $\left(f(x)\right)'$, $\dfrac{df(x)}{dx}$, $\dfrac{d}{dx}\left(f\left(x\right)\right)$, $\dfrac{dy}{dx}$, y'_x, y'.

Операція знаходження похідної функції називається *диферентціюванням* цієї функції.

Основні правила диференціювання:

1. $C' = 0$.
2. $(Cu)' = u'{\pm}v'$.
3. $\left(u \pm v\right)' = u' \pm v'$.

4. $\left(uv\right)' = u'\cdot v + u\cdot v'$.

5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$, $v\neq 0$.

6. $\left(f\left(u\right)\right)'_x = f'_u\cdot u'_x$.

7. $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$, де $x = x\left(y\right)$ – обернена функція для функції $y = y\left(x\right)$.

У правилах диференціювання 1-6: C – стала, $u=u(x)$, $v=v(x)$.

Має місце також *правило диференціювання добутку n функцій* $u=u(x)$, $v=v(x)$, $w=w(x)$,…, $z=z(x)$:

$(u\cdot v\cdot w\cdot\ldots\cdot z)'=u'\cdot v\cdot w\cdot\ldots\cdot z+u\cdot v'\cdot w\cdot\ldots\cdot z+\ldots+u\cdot v\cdot w\cdot\ldots\cdot z'$.

Основні формули диференціювання

1. $(u^a)' = au^{a-1}\cdot u'$, $a\in$ R.

2. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u\ln a}\cdot u'$.

3. $(\ln u)' = \dfrac{1}{u}\cdot u'$.

4. $(a^u)' = a^u\ln a\cdot u'$.

5. $(e^u)' = e^u\cdot u'$.

6. $(\sin u)' = \cos u\cdot u'$.

7. $(\cos u)' = -\sin u\cdot u'$.

8. $(\mathrm{tg}\, u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$.

9. $(\mathrm{ctg}\, u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$.

10. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$.

11. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$.

12. $(\mathrm{arctg}\, u)' = \dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$.

13. $(\mathrm{arcctg}\, u)' = -\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$.

14. $(\mathrm{sh}\, u)' = \mathrm{ch}\, u\cdot u'$.

15. $(\mathrm{ch}\, u)' = \mathrm{sh}\, u\cdot u'$.

16. $(\mathrm{th}\, u)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 u}\cdot u'$.

17. $(\mathrm{cth}\, u)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 u}\cdot u'$.

Тут $u=u(x)$. Якщо $u(x)=x$, то $u'(x)=x'=1$.

Приклади розв'язання задач

1. Виходячи із означення похідної, знайти похідну функції $y=\sqrt[3]{x}$ в будь-якій точці $x\in R\setminus\{0\}$.

► Надамо фіксованому значенню $x\in R\setminus\{0\}$ приросту Δx. Йому відповідає приріст функції $\Delta y=\sqrt[3]{x+\Delta x}-\sqrt[3]{x}$. Виходячи з означення, знайдемо границю

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+\Delta x}-\sqrt[3]{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{1+\Delta x/x}-1)}{\Delta x}=$$

$$\left|\begin{array}{l}\sqrt[3]{1+\Delta x/x}-1\sim\Delta x/3x\\ \Delta x\to 0\end{array}\right|=\sqrt[3]{x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{3x\Delta x}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Значить, $y'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\quad\forall x\in \mathrm{R}\setminus\{0\}$. ◄

2. Знайти похідні вказаних функцій

а) $y=5x^3-6x^2+7x+4$; б) $y=x^3\,\mathrm{arctg}\,x$;

в) $y=\dfrac{\arcsin x}{x}$; г) $y=\left(17+\dfrac{3}{x^4}\right)^{12}$;

д) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1}$; е) $y=x\sqrt{x}(3\ln x-2)$.

►а) Застосовуючи правило диференціювання суми функцій, маємо

$$y'=(5x^3-6x^2+7x+4)'=5\cdot 3x^2-6\cdot 2x+7\cdot 1+0=15x^2-12x+7.$$ ◄

►б) Застосовуючи правило диференціювання добутку функцій, маємо

$$y' = (x^3 \operatorname{arctg} x)' = 3x^2 \operatorname{arctg} x + x^3 \frac{1}{1+x^2} = 3x^2 \operatorname{arctg} x + \frac{x^3}{1+x^2}. ◄$$

►в) Застосовуючи правило диференціювання частки функцій, маємо

$$y' = \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot x - \arcsin x \cdot 1}{x^2} = \frac{x - \sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x}{x^2 \cdot \sqrt{1-x^2}}. ◄$$

►г) Застосовуючи правило диференціювання складної функції, степеневої функції та суми, маємо

$$y' = \left(\left(17 + \frac{3}{x^4}\right)^{12}\right)' = \left((17+3x^{-4})^{12}\right)' = 12(17+3x^{-4})^{11} \cdot 3 \cdot (-4)x^{-5} =$$

$$= -\frac{144}{x^5}\left(17 + \frac{3}{x^4}\right)^{11}. ◄$$

►д) Застосовуючи правило диференціювання складної функції, логарифмічної функції та суми, маємо

$$y' = \left(\ln(x + \sqrt{x^2+1}\right)' = \left(\ln(x + (x^2+1)^{\frac{1}{2}})\right)' = \frac{1}{x + (x^2+1)^{\frac{1}{2}}}\left(1 + \frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x\right) =$$

$$= \frac{1}{x + (x^2+1)^{\frac{1}{2}}}\left(1 + \frac{x}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}\right) = \frac{1}{x + (x^2+1)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}} + x}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}. ◄$$

►е) Перепишемо задану функцію $y = x\sqrt{x}(3\ln x - 2)$ у вигляді $y = x^{\frac{3}{2}}(3\ln x - 2)$. Тоді

$$y' = \left(x^{\frac{3}{2}}(3\ln x - 2)\right)' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}(3\ln x - 2) + x^{\frac{3}{2}} \cdot 3 \cdot \frac{1}{x} = \frac{9}{2}x^{\frac{1}{2}}\ln x. ◄$$

3. Обчислити значення похідної функції $f(x) = (1 + x^2)\ln x \cdot \operatorname{arctg} x$ при $x = 1$.

► На основі формули диференціювання добутку функцій отримаємо

$$f'(x) = 2x\ln x \operatorname{arctg} x + \left(1 + x^2\right)\frac{1}{x}\operatorname{arctg} x + \left(1 + x^2\right)\ln x \cdot \frac{1}{1 + x^2} =$$

$$= 2x\ln x \operatorname{arctg} x + \left(\frac{1}{x} + x\right)\operatorname{arctg} x + \ln x.$$

Підставляючи $x = 1$, обчислюємо $f'(1) = 2\operatorname{arctg} 1 = \pi / 2$. ◄

Завдання для самостійного розв'язання

У задачах 1 – 14 знайти похідні вказаних функцій.

1. $y = 3x^2 - 5x + 1$. **2.** $y = 3 - 2x + \frac{2}{3}x^4$.

3. $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$. **4.** $y = 2\sqrt{x} - \frac{1}{x} + \sqrt{3}$.

5. $y = \frac{4}{\sqrt[4]{x^3}} - \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}$. **6.** $y = (x^2 - 3x + 3)(x^2 + 2x - 1)$.

7. $y = (x^2 - 3x + 2)(x^4 + x^2 - 1)$. **8.** $y = (\sqrt{x} + 1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)$.

9. $y=(x^2-1)(x^2-4)(x^2+9)$. **10.** $y=\dfrac{x-1}{x+1}$.

11. $y=\dfrac{x^2+1}{x^3-x}$. **12.** $y=\dfrac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$.

13. $y=\dfrac{1}{x^3+3x-1}$. **14.** $y=\dfrac{a+bx}{c+dx}$.

15. $f(x)=3x-2\sqrt{x}$. Знайти: $f(1)$, $f'(1)$, $f(4)$, $f'(4)$.

16. $f(t)=\dfrac{t^2-5t-1}{t^3}$. Знайти: $f(-1)$, $f'(-1)$, $f'(2)$.

17. $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$. Знайти: $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$.

18. $f(x)=\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{3}{x^2+1}$. Знайти: $f'(0)$, $f'(-1)$.

У задачах 19 – 64 знайти похідні вказаних функцій.

19. $y=(1+4x^2)^3$. **20.** $y=(1-x)^{20}$.

21. $y=(x^3-x)^6$. **22.** $y=\left(\dfrac{1+x^2}{1+x}\right)^5$.

23. $y=(1-2\sqrt{x})^4$. **24.** $y=\sqrt[3]{\dfrac{1}{1+x^2}}$.

25. $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}$. **26.** $y=\sin 3x$.

27. $y=3\sin(3x+5)$. **28.** $y=6\cos\dfrac{2x}{3}$.

29. $y=\cos^2 x$. **30.** $y=\cos^3 4x$.

31. $y=3\sin^2 x-\sin^3 x$. **32.** $y=\cos x^3$.

33. $y = \sin^2 x \cdot \sin x^2$.

34. $y = \sin\sqrt{1+x^2}$.

35. $y = (1+\sin^2 x)^4$.

36. $y = \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)$.

37. $y = x \arcsin x$.

38. $y = (\arcsin x)^2$.

39. $y = \frac{\arccos x}{x}$.

40. $y = \arcsin(x-1)$.

41. $y = \operatorname{arctg} x^2$.

42. $y = \arcsin\frac{2}{x}$.

43. $y = \operatorname{arctg}^2 \frac{1}{x}$.

44. $y = x^2 \log_3 x$.

45. $y = \ln^2 x$.

46. $y = \frac{1}{\ln x}$.

47. $y = \ln(x^2 - 4x)$.

48. $y = \log_3(x^2 - 1)$.

49. $y = \ln \operatorname{tg} x$

50. $y = \ln^4 \sin x$.

51. $y = x \cdot 10^x$.

52. $y = x \cdot e^x$.

53. $y = e^x \cos x$.

54. $y = x^3 - 3^x$.

55. $y = 10^{2x-3}$.

56. $y = a^{\sin^3 x}$.

57. $y = 10^{1-\sin^4 3x}$.

58. $y = \operatorname{sh}^3 x$.

59. $y = \ln \operatorname{ch} x$.

60. $y = \operatorname{th}(1-x^2)$.

61. $y = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x$.

62. $y = \sqrt{\operatorname{ch} x}$.

63. $y = e^{\operatorname{ch}^2 x}$.

64. $y = x \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x$.

1.2 Логарифмічне диференціювання. Похідні неявних функцій та функцій, заданих параметрично

Логарифмічне диференціювання. *Логарифмічною похідною* функції $y = f(x)$ називається похідна від логарифму цієї функції, тобто

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y}.$$

Послідовне застосування логарифмування та диференціювання функцій називається *логарифмічним диференціюванням.* У деяких випадках попереднє логарифмування функції спрощує знаходження її похідної.

Для знаходження похідної від складеної *показникової* функції

$$y = u^v,$$

де $u=u(x)$, $v=v(x)$, $u(x)>0$, попередньо застосовують логарифмування.

Маємо

$$\ln y = v\ln u, \quad \frac{y'}{y} = v'\ln u + v\frac{u'}{u}, \quad y' = y\left(v'\ln u + v\frac{u'}{u}\right),$$

$$y' = u^v\left(v'\ln u + v\frac{u'}{u}\right) = u^v \ln u \cdot v' + vu^{v-1} \cdot u'.$$

Зауважимо, що похідну від складеної показникової функції можна також знаходити, подаючи цю функцію у вигляді

$$y = u^v = e^{\ln u^v} = e^{v\ln u}.$$

Тоді

$$y' = (u^v)' = \left(e^{v\ln u}\right)' = e^{v\ln u}\left(v'\ln u + v\frac{u'}{u}\right) = u^v\left(v'\ln u + v\frac{u'}{u}\right) = u^v \ln u \cdot v' + vu^{v-1} \cdot u'.$$

Отримали такий же результат.

Похідна неявної функції. Якщо залежність між x та y задана в неявній формі $F(x, y) = 0$, то для знаходження похідної $y'_x = y'$ треба:

1) обчислити похідну по x від лівої та правої частини заданого рівняння $F(x, y) = 0,$ вважаючи y функцією від x.

Отримаємо $F_1(x, y, y') = 0$;

2) розв'язати останнє рівняння відносно y'.

Похідна функції, заданої параметрично. Якщо функція $y = f(x)$ задана параметрично рівняннями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ то похідна від неї обчислюється за формулою $\begin{cases} y'_x = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'_t}{x'_t}, \\ x = x(t). \end{cases}$

Приклади розв'язання задач

4. Знайти похідну функції $y = (\operatorname{arctg} 4x)^{x^2}$.

► Приймаємо логарифмічне диференціювання і будемо також використовувати наступні властивості логарифмів:

$$\ln uv = \ln u + \ln v;\ \ln \frac{u}{v} = \ln u - \ln v;\ \ln u^v = v \ln u.$$

Логарифмуючи дану функцію за основою e, знаходимо

$$\ln y = x^2 \ln \operatorname{arctg} 4x.$$

Диференціюємо обидві частини цього рівняння по x, враховуючи, що y є функція аргумента x, і звертаючи увагу на праву частину рівняння, де записано похідні двох функцій,

$$\frac{y'}{y} = 2x \ln \operatorname{arctg} 4x + x^2 \frac{1}{\operatorname{arctg} 4x} \frac{4}{1 + (4x)^2}.$$

Перемножуючи обидві частини останнього рівняння на y

і підставляючи $(\operatorname{arctg} 4x)^{x^2}$ замість y, отримуємо

$$y' = \left(2x \ln \operatorname{arctg} 4x + \frac{4x^2}{(1+16x^2)\operatorname{arctg} 4x} \right)(\operatorname{arctg} 4x)^{x^2}. ◄$$

5. Знайти похідну функції $y = x^{\cos 3x}$.

► Маємо складену показникову функцію, бо і основа і степінь залежать від x.

Прологарифмувавши задану функцію $y = x^{\cos 3x}$, маємо

$$\ln y = \cos 3x \cdot \ln x.$$

Далі диференціюємо обидві частини останньої рівності по x

$$(\ln y)' = (\cos 3x \cdot \ln x)'.$$

Звідси $\dfrac{y'}{y} = -\sin 3x \cdot 3 \cdot \ln x + \cos 3x \cdot \dfrac{1}{x}$.

Отже, $y' = y\left(-3\sin 3x \cdot \ln x + \dfrac{\cos 3x}{x} \right)$, тобто

$$y' = x^{\cos 3x}\left(-3\sin 3x \cdot \ln x + \frac{\cos 3x}{x} \right). ◄$$

6. Знайти похідну функції $y = \dfrac{(2x-3)^3 \cdot \sqrt{3x+2}}{(5x+4)^2 \cdot \sqrt[3]{1-x}}$.

► Запишемо задану функцію у вигляді

$$y = \frac{(2x-3)^3 \cdot (3x+2)^{\frac{1}{2}}}{(5x+4)^2 \cdot (1-x)^{\frac{1}{3}}}.$$

Прологарифмуємо задану функцію

$$\ln y = 3\ln(2x-1) + \frac{1}{2}\ln(3x+2) - 2\ln(5x-4) - \frac{1}{3}\ln(1-x).$$

Продиференціювавши обидві частини останньої рівності по x

$$(\ln y)' = \left(3\ln(2x-1) + \frac{1}{2}\ln(3x+2) - 2\ln(5x-4) - \frac{1}{3}\ln(1-x)\right)',$$

одержимо

$$\frac{y'}{y} = 3\cdot\frac{1}{2x-1}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3x+2}\cdot 3 - 2\cdot\frac{1}{5x+4}\cdot 5 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-x}\cdot(-1),$$

$$y' = y\left(\frac{6}{2x-1} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3x+2} - \frac{10}{5x+4} + \frac{1}{3(1-x)}\right).$$

Отже,

$$y' = \frac{(2x-1)^3\cdot\sqrt{3x+2}}{(5x+4)^2\cdot\sqrt[3]{1-x}}\cdot\left(\frac{6}{2x-1} + \frac{3}{2(3x+2)} - \frac{10}{5x+4} + \frac{1}{3(1-x)}\right). ◄$$

7. Знайти похідну від неявної функції $y = y(x)$, заданої рівнянням:

а) $x^3 - 2xy^2 + y^3 = a^3$; б) $\cos\frac{y}{x} = y^2$.

►а) Диференціюємо обидві частини рівняння по змінній x, вважаючи y функцією аргумента x (тоді $\frac{d}{dx}(y^2) = 2yy'$ і $\frac{d}{dx}(y^3) = 3y^2y'$), і враховуємо, що a^3=const.

В результаті виконання зазначених операцій отримаємо

$$3x^2 - 2(y^2 + 2xyy') + 3y^2y' = 0.$$

Звідси $3y^2-4xy)y'=2y^2-3x^2$; $y'=\dfrac{2y^2-3x^2}{3y^2-4xy}$.

►б) Диференціюючи по x, маємо

$$-\sin\frac{y}{x}\cdot\frac{y'x-y}{x^2}=2yy' \quad\Leftrightarrow\quad \left(2x^2y+x\sin\frac{y}{x}\right)y'=y\sin\frac{y}{x},$$

звідси $\quad y'=\dfrac{y\sin\dfrac{y}{x}}{2x^2y+x\sin\dfrac{y}{x}}$.◄

8. Знайти похідну $\dfrac{dy}{dx}$ функції, заданої параметрично:

$$\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t. \end{cases}$$

► Знайдемо похідну $\dfrac{dy}{dx}$. Оскільки

$$\frac{dy}{dt}=3a\sin^2 t\cos t\,;\ \frac{dx}{dt}=-3a\cos^2 t\sin t\,,$$

то $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\Big/\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t}=-\operatorname{tg} t, \\ x=a\cos^3 t. \end{cases}$.

Завдання для самостійного розв'язання

У задачах 65 – 72 знайти похідні від заданих функцій, використовуючи логарифмічне диференціювання.

65. $y=x^{x^2}$. **66.** $y=(\sin x)^{\cos x}$.

67. $y=(\ln x)^x$.

68. $y=x^{\frac{1}{x}}$.

69 . $y=(x^2+1)^{\sin x}$.

7**0 .** $y=x^3 e^{x^2}\sin 2x$.

71. $y=\dfrac{(x-2)^2\cdot\sqrt[3]{x+1}}{(x-5)^3}$.

72. $y=\sqrt{\dfrac{1-\arcsin x}{1+\arcsin x}}$.

У задачах 73 – 82 знайти похідні від функцій *y*, заданих неявно.

73. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

74. $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$.

75. $x^3+y^3-3axy=0$.

76. $y^3-3y+2ax=0$.

77. $y^2-2xy+b^2=0$.

78. $\sin(xy)+\cos(xy)=0$.

79. $2^x+2^y=2^{x+y}$.

80. $y=\cos(x+y)$.

81. $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

82. $y=1+xe^y$.

У задачах 83 – 93 знайти похідну $y'=\dfrac{dy}{dx}$ від функцій, заданих параметрично.

83. $\begin{cases} x=2t-1, \\ y=t^3. \end{cases}$

84. $\begin{cases} x=1-t^2, \\ y=t-t^3. \end{cases}$.

85. $\begin{cases} x=\dfrac{t+1}{t}, \\ y=\dfrac{t-1}{t}. \end{cases}$

86. $\begin{cases} x=a\cos\varphi, \\ y=b\sin\varphi. \end{cases}$

87. $\begin{cases} x = a\cos^3\varphi, \\ y = b\sin^3\varphi. \end{cases}$ **88.** $\begin{cases} x = a(\phi - \sin\phi), \\ y = a(1 - \cos\phi). \end{cases}$

89. $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \mathrm{arctg}\, t. \end{cases}$ **90.** $\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = e^{2t}. \end{cases}$

91. $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[3]{t}. \end{cases}$ **92.** $\begin{cases} x = e^t \sin t, \\ y = e^t \cos t. \end{cases}$

93 . $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t). \end{cases}$

1.3 Диференціал функції. Застосування диференціала для наближених обчислень

Диференціал функції. Якщо функція $y = f(x)$ диференційована в точці *x*, тобто має в цій точці скінчену похідну y', то її приріст подамо у вигляді $\Delta y = y'\Delta x + a\Delta x$, де $a \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Диференціалом функції $y = f(x)$ називається головна частина її приросту, лінійна відносно приросту аргумента Δx. Позначається dy.

Отже, $dy = y'\Delta x$, або $dy = y'dx$

Застосування в наближених обчисленнях. Порівняння *Δy* з dy показує, що $\Delta y \approx dy$.

Звідси, $f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$, $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$.

Ця формула застосовується для наближеного обчислення значень функції при малому прирості Δx незалежно від змінної *x*.

Геометричний зміст диференціала. Геометрично диференціал dy є приростом ординати дотичної до графіка функції в точці $M(x,y)$: $dy = \text{tg}\alpha \cdot \Delta x$ (рис.1).

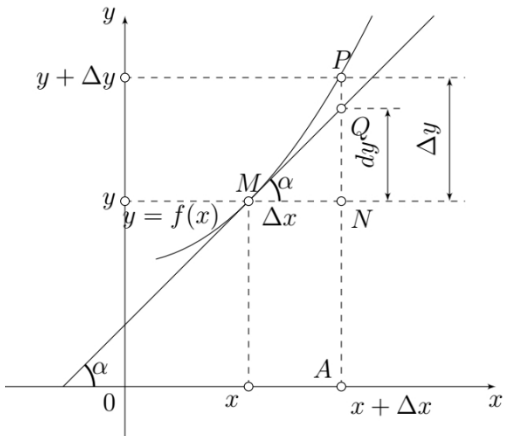


Рисунок 1

Приклади розв'язання задач

9. Знайти приріст і диференціал функції $y = x^3 + 4$ при переході аргумента від значення $x_1 = 2$ до значення $x_2 = 2{,}01$.

► Знайдемо спочатку приріст заданої функції при довільних значеннях x і Δx

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^3 + 4 - (x^3+4) = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 +$$
$$+(\Delta x)^3 + 4 - x^3 - 4 = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3,$$

тобто $\Delta y = 3x^2\Delta x + (3x\Delta x + (\Delta x)^2)\Delta x$.

Знайдемо тепер Δy і dy при заданих значеннях аргумента. Враховуючи, що $\Delta x = x_2 - x_1 = 2{,}01 - 2 = 0{,}01$, отримаємо

$$\Delta y\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0,01}} = 3\cdot 2^2\cdot 0,01 + 3\cdot 2(0,01)^2 + (0,01)^3 =$$

$$= 0,12 + 0,0006 + 0,000001 = 0,120601;$$

$$dy\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0,01}} = 3\cdot 2^2\cdot 0,01 = 0,12\,.$$

Обчислимо абсолютну похибку, яку ми допустили при заміні приросту функції її диференціалом,

$$|\Delta y - dy| = |0,120601 - 0,12| = 0,000601\,.$$

Відносна похибка

$$\frac{|\Delta y - dy|}{|\Delta y|} = \frac{0,000601}{0,120601} \approx 0,00498 \approx 0,005 \text{ (або 0,5 \%)}. \blacktriangleleft$$

10. Знайти диференціал dy функції $y = \sin^6 3x$.

► Відповідно до означення $dy = y'\Delta x$. Знаходимо похідну заданої функції

$$y' = (\sin^6 3x)' = 6\sin^5 3x\cdot\cos 3x\cdot 3\,.$$

Отже, $dy = 18\sin^5 3x\cdot\cos 3x dx$. ◄

11. Обчислити наближене значення $\sqrt[3]{27,1}$.

► Розглянемо функцію $y = \sqrt[3]{x}$. Покладемо x=27, Δx=0,1 і застосуємо формулу $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$.

В нашому випадку $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. Отже, маємо

$$\sqrt[3]{27{,}1} \approx \sqrt[3]{27} + \frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}} \cdot 0{,}1 = 3 + \frac{1}{3 \cdot 3^2} \cdot 0{,}1 = 3 + \frac{0.1}{27} = 3{,}0037. \blacktriangleleft$$

12. Обчислити наближено $\sqrt{\dfrac{(2{,}037)^2 - 3}{(2{,}037)^2 + 5}}$.

► Розглянемо функцію $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 3}{x^2 + 5}}$ і обчислимо її наближене значення в точці $x = 2{,}037$, прийнявши $x_0 = 2$ і $\Delta x = 0{,}037$. Тоді $f(x_0) = f(2) = 1/3$,

$$f'(x_0) = f'(2) = \sqrt{\frac{x^2 + 5}{x^2 - 3}} \frac{8x}{(x^2 + 5)^2}\bigg|_{x=2} = \frac{16}{27}.$$

Отже, $\sqrt{\dfrac{(2{,}037)^2 - 3}{(2{,}037)^2 + 5}} \approx \dfrac{1}{3} + \dfrac{16}{27} \cdot 0.037 \approx 0{,}333 + 0{,}022 = 0{,}355$. ◄

Завдання для самостійного розв'язання

У задачах 94 – 98 знайти диференціал заданих функцій.

94. $y = (1 + x - x^2)^3$. **95.** $y = \operatorname{tg}^2 x$. **96.** $y = 2^{-\frac{1}{\cos x}}$.

97. $y = \dfrac{\cos x}{1 - x^2}$. **98.** $y = 3^{-\frac{1}{x}} + 3x^3 - 4\sqrt{x}$.

99. Обчислити наближено:

а) $\arcsin 0{,}05$; б) $\operatorname{arcctg} 1{,}04$; в) $\ln 1{,}2$.

100. Обчислити наближено:

а) $\operatorname{arctg} 1{,}02$; б) $\operatorname{arctg} 0{,}97$.

101. Обчислити наближено:

а) $\sqrt{5}$, $\sqrt{17}$; б) $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt[3]{70}$; в) $\sqrt[4]{17}$.

102. Обчислити наближено:

а) $\sin 31^0$; б) $\cos 61^0$; в) $tg\,44^0$.

103.Знайти наближені значення функцій:

а) $f(x)=\sqrt{x^2-7x+10}$ при x = 0,98;

б) $f(x)=\sqrt{1+x}$ при x = 0,2;

в) $f(x)=e^{1-x^2}$ при x = 1,05.

1.4 Похідні і диференціали вищих порядків

Похідні вищих порядків. *Похідною другого порядку від функції* $y=f(x)$ називається похідна від її першої похідної, тобто

$$\left(f'(x)\right)' = f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}=y''_{xx}.$$

Аналогічно визначаються похідні більш високих порядків:

$$\left(f''(x)\right)' = f'''(x)=\frac{d^3y}{dx^3}=f'''_{xxx},$$

………………………………..

$$\left(f^{(n-1)}(x)\right)' = f^{(n)}(x)=\frac{d^ny}{dx^n}.$$

Механічний зміст другої похідної. Якщо $s = s(t)$ – функція, що описує закон руху матеріальної точки, то $\frac{d^2s}{dt^2}=a$ – прискорення цієї точки в момент часу t.

Похідні вищих порядків від функцій, що задані неявно. Нехай функція $y = f(x)$ задана неявно рівнянням $F(x, y) = 0$.

Продиференціювавши обидві частини цього рівняння по змінній *x*, вважаючи, що $y = f(x)$, отримаємо рівняння першого степеня відносно y', тобто $F_1(x, y, y') = 0$. Звідси знаходимо y'.

Продиференціювавши обидві частини останнього рівняння по *x*, вважаючи, що *y* та y' функції від *x*, отримаємо рівняння відносно y'', тобто $F_2(x, y, y', y'') = 0$, і т. д.

Похідні вищих порядків від функцій заданих параметрично. Нехай функція $y = f(x)$ задана параметрично рівняннями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

Похідні від такої функції обчислюються за формулами

$$\begin{cases} y'_x = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'_t}{x'_t}, \\ x = x(t); \end{cases} \quad \begin{cases} y''_{xx} = \dfrac{d(y'_x)}{dx} = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}, \\ x = x(t); \end{cases} \quad \begin{cases} y'''_{xxx} = \dfrac{d(y''_{xx})'_t}{x'_t}, \\ x = x(t); \end{cases}$$

і т. д.

Диференціал вищих порядків. *Диференціалом n-го порядку* від функції $y = f(x)$ називається диференціал від диференціала $(n-1)$ порядку цієї функції, тобто $d^n y = d(d^{n-1}y).$

Якщо задана функція $y = f(x)$, де *x* – незалежна змінна, то маємо

$$d^2 y = d(dy) = y'' dx^2,$$

$$d^3 y = d(d^2 y) = y''' dx^3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$$

$$d^n y = d(d^{n-1} y) = y^n dx^n.$$

Якщо $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, *u* – *залежна змінна*, то маємо

$$d^2y = y''_{uu}du^2 + y'_u d^2u$$

Аналогічно знаходяться диференціали більш високих порядків.

Приклади розв'язання задач

13. Знайти похідну другого порядку від функції $y = \ln(1-x)$.

► Знаходимо першу похідну $y' = \left(\ln(1-x)\right)' = \dfrac{-1}{1-x}$.

$y'_x = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d(t^3+2t+1)}{d(\ln t)} = \dfrac{(t^3+2t+1)'_t}{(\ln t)'_t} = \dfrac{3t^2+2}{\frac{1}{t}} = 3t^3 + 2t$ Тоді

$y'' = \left(\dfrac{-1}{1-x}\right)' = \dfrac{-1}{(1-x)^2}$. ◄

14. Знайти $y'_x = \dfrac{dy}{dx}$ та $y''_{xx} = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ від функції, заданої параметрично $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^3 + 2t + 1. \end{cases}$

► $\begin{cases} y'_x = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d(t^3+2t+1)}{d(\ln t)} = \dfrac{(t^3+2t+1)'_t}{(\ln t)'_t} = \dfrac{3t^2+2}{1/t} = 3t^3 + 2t, \\ x = \ln t; \end{cases}$

$$\begin{cases} y''_{xx} = \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d(y'_x)}{dx} = \dfrac{d(3t^3+2t)}{d(\ln t)} = \dfrac{(3t^3+2t)'_t}{(\ln t)'_t} = \dfrac{9t^2+2}{1/t} = 9t^3 + 2t, \\ x = \ln t. \end{cases}$$ ◄

15. Знайти y' та y'' від функції, заданої неявно рівнянням $x^2+y^2=1$.

► Диференціюємо ліву та праву частини рівняння

$$x^2+y^2=1$$

вважаючи, що $y=y(x)$. Згідно з правилом диференціювання складеної функції, маємо $2x+2y\cdot y'=0$, або $x+y\cdot y'=0$.

Звідси $y'=-\dfrac{x}{y}$. Далі диференціюємо ліву та праву частини рівняння $x+y\cdot y'=0$, вважаючи, що $y=y(x)$, $y'=y'(x)$. Маємо $1+\left(y'\right)^2+y\cdot y''=0$. Звідси

$$y''=-\frac{1+\left(y'\right)^2}{y}.$$

Враховуючи вираз для $y'=-\dfrac{x}{y}$, отримаємо

$$y''=-\frac{1+\dfrac{x^2}{y^2}}{y}=-\frac{y^2+x^2}{y^3}.$$

Але згідно з умовою $x^2+y^2=1$, отже остаточно маємо

$$y''=-\frac{1}{y^3}.$$ ◄

16. Знайти диференціал другого порядку d^2y від функції $y=\ln(1+x^2)$.

► Відповідно до означення $d^2y = y''dx^2$.

Знаходимо y' та y'':

$$y' = \frac{2x}{1+x^2}; \; y'' = \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Отже, $d^2y = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}dx^2$.

Завдання для самостійного розв’язання

У задачах 104 – 112 знайти похідні другого порядку від заданих функцій.

104. $y = x^2 - 3x + 2$. **105.** $y = (x^2+1)^3$.

106. $y = \cos^2 x$. **107.** $y = \operatorname{arctg} x^2$.

108. $y = e^{x^2}$. **109.** $y = \dfrac{1}{1+x^3}$.

110. $y = (1+x^2)\operatorname{arctg} x$. **111.** $y = \sqrt{a^2 - x^2}$.

112. $y = \sqrt{1-x^2}\arcsin x$.

113. Знайти f ''(1), якщо $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

114. Знайти $f^{(4)}$ (1), якщо $f(x) = x^6 - 4x^3 + 4$.

115. Знайти f''(1), якщо $f(x) = e^{2x-1}$.

116. Знайти $y'(0)$, y'' (0), $y'''(0)$, якщо $y(x) = e^{2x}\sin 3x$.

117. Знайти y'' (2), якщо $y(x) = \ln(x-1)$.

118. Знайти $f^{(4)}$ (1), якщо $y(x) = x^3\ln x$.

У задачах 119 –124 знайти формулу для похідної n-го порядку від заданих функцій.

119. $y = e^{ax}$.

120. $y = e^{-x}$.

121. $y = xe^{x}$.

122. $y = \dfrac{1}{ax+b}$.

123. $y = \ln(ax+b)$.

124. $y = \log_a x$.

У задачах 125 – 131 знайти похідні вказаних порядків для функцій заданих неявно.

125. $y^2 = 2px$. Знайти y''.

126. $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Знайти y''.

127. $x^2 + y^2 = r^2$. Знайти y'''.

128. $y = \mathrm{tg}(x+y)$. Знайти y'''.

129. $s = 1 + t \cdot e^{s}$. Знайти s''.

130. $y^3 + x^3 - 3axy = 0$. Знайти y''.

131. $e^{x+y} = xy$. Знайти y''.

У задачах 132 – 138 знайти похідні вказаних порядків від функцій, заданих параметрично.

132. $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^3. \end{cases}$ Знайти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

133. $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$ Знайти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

134. $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$ Знайти $\dfrac{d^3y}{dx^3}$.

135. $\begin{cases} x = a(\varphi - \sin\varphi), \\ y = a(1 - \cos\varphi). \end{cases}$ Знайти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

136. $\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = t^3. \end{cases}$ Знайти $\dfrac{d^3y}{dx^3}$.

137. $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^2 - 1. \end{cases}$ Знайти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

138. $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$ Знайти $\dfrac{d^3y}{dx^3}$.

У задачах 139 – 145 знайти диференціали вказаних порядків.

139. $y = \sqrt[3]{x^2}$. Знайти d^2y.

140. $y = x^m$. Знайти d^3y.

141. $y = (x+1)^3(x-1)^2$. Знайти d^2y.

142. $y = 4^{-x^2}$. Знайти d^2y.

143. $y = x(\ln x - 1)$. Знайти dy, d^2y, d^3y .

144. $y = x^2e^{-x}$. Знайти d^3y.

145. $y = \dfrac{x^4}{2-x}$. Знайти d^4y.

1.5 Розкриття невизначеностей за допомогою правила Лопіталя

Розкриття невизначеностей типу $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ та $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$

Теорема (*правило Лопіталя*). Нехай функції $f(x)$ та $g(x)$:

1) задовольняють умовам теореми Коші в деякому околі точки $x = a$;

2) прямують до 0 (або $\pm\infty$) при $x \to 0$;

3) існує границя $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (скінченна або нескінченна, рівна $+\infty$ або $-\infty$).

Тоді існує і $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, причому

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Правило Лопіталя справедливе і при $a = \pm\infty$.

Правило Лопіталя може застосовуватись повторно. На кожному етапі застосування правила Лопіталя слід користуватися спрощеними тотожними перетвореннями, а також комбінувати це правило з будь-якими способами обчислення границь, зокрема, використовувати еквівалентні нескінченно малі та нескінченно великі.

Слід також пам'ятати, що $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ може існувати, а $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ не існує. Тоді правило Лопіталя не може бути застосовано.

Розкриття невизначеностей типу $\{0\cdot\infty\}$ *та* $\{\infty-\infty\}$.

У цих випадках слід алгебраїчно перетворити дану функцію так, щоб привести її до невизначеного типу $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ або $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$, а далі використовувати правило Лопіталя.

а) нехай $f(x)\to 0$, $g(x)\to\infty$ при $x\to a$. Перетворимо $f(x)\ g(x)$ таким чином $f\cdot g = \dfrac{f}{\frac{1}{g}}$, або $f\cdot g = \dfrac{g}{\frac{1}{f}}$.

Тоді маємо невизначеність типу $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ або $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$ при $x\to a$.

б) нехай $f(x) \to +\infty$, $g(x) \to +\infty$ при $x \to a$. Перетворимо вираз $f(x) - g(x)$ таким чином

$$f - g = \frac{1}{\frac{1}{f}} - \frac{1}{\frac{1}{g}} = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{f} \cdot \frac{1}{g}}.$$

Маємо невизначеність типу $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ при $x \to a$.

Розкриття невизначеностей типу $\{1^\infty\}$, $\{\infty^0\}$, $\{0^0\}$

У всіх трьох випадках розглядаємо обчислення границі виразу $(f(x))^{g(x)}$ при $x \to a$, причому:

якщо $f \to 1$, $g \to \infty$, маємо невизначеність типу $\{1^\infty\}$;

якщо $f \to \infty$, $g \to 0$, маємо невизначеність типу $\{\infty^0\}$;

якщо $f \to 0$, $g \to 0$, маємо невизначеність типу $\{0^0\}$.

Перетворимо вираз $(f(x))^{g(x)}$ таким чином $f^g = e^{g \ln f}$.

Тоді $\lim\limits_{x \to a} f^g = \lim\limits_{x \to a} e^{g \ln f} = e^{\lim\limits_{x \to a} g \ln f}$.

В усіх трьох випадках вираз $g \ln f$ при $x \to a$ представляє невизначеність типу $\{0 \cdot \infty\}$.

До такого ж результату приходимо, якщо попередньо прологарифмуємо праву і ліву частину рівності $y = f^g$.

Маємо $\ln y = g \ln f$. Звідси $y = e^{g \ln f}$, або $f^g = e^{g \ln f}$.

Приклади розв'язання задач

17. Показати, що правило Лопіталя не може бути використане для обчислення вказаної границі

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x + \sin x}{x + \cos x}.$$

Обчислити цю границю, не використовуючи правило Лопіталя.

► Чисельник і знаменник даного дробу неперервні, диференційовні та прямують до нескінченності. Відношення похідних $\frac{(x+\sin x)'}{(x+\cos x)'}=\frac{1+\cos x}{1-\sin x}$ не має границі при $x\to\infty$, бо якщо $k\to\infty$, то при $x_k=2\pi k\to\infty$ це відношення дорівнює 2, а при $\tilde{x}_k=\pi+2\pi k\to\infty$ дорівнює нулю.

Отже, правило Лопіталя не може бути використано, бо границя відношення похідних не існує.

Обчислюємо границю безпосередньо, не використовуючи цього правила,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x+\cos x}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\cos x}{x}}=1. \blacktriangleleft$$

18. Знайти границі, використовуючи правило Лопіталя (невизначеність типу $\left\{\frac{0}{0}\right\}$):

а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$; г) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\pi-2\operatorname{arctg} x}{e^{\frac{3}{x}}-1}$.

► а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x^2-1+\ln x\right)'}{\left(e^x-e\right)'}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+\dfrac{1}{x}}{e^x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+1}{xe^x}=\dfrac{3}{e}$; ◄

► б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{6x}=$

$=\left|\sin x\underset{x\to 0}{\sim}x\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{6x}=\dfrac{1}{6}$ (тут правило Лопіталя застосовується двічі); ◄

► в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x}-\cos x}{3x^2}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x^2\cos^2 x}=$

$=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{x^2\cos^2 x}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\cos x+\cos^2 x}{\cos^2 x}=$

$=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)}{x^2}\cdot 3=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)}{x^2}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x}=$

$=\left|\sin x\underset{x\to 0}{\sim}x\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2x}=\dfrac{1}{2}$; ◄

► г) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg}x}{e^{\frac{3}{x}}-1}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-2\dfrac{1}{1+x^2}}{e^{\frac{3}{x}}\left(-\dfrac{3}{x^2}\right)}=$

$=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x}{2x}=\dfrac{2}{3}$. ◄

19. Знайти границі, використовуючи правило Лопіталя (невизначеність типу $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$):

$$\text{а) } \lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}; \quad \text{б) } \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{x^3}; \quad \text{в) } \lim_{x\to5+0}\frac{x\ln(x-5)}{\ln(e^x-e^5)}.$$

► а) $$\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}=-\lim_{x\to+0}\frac{\sin^2 x}{x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=$$

$$=\left|\sin x \underset{x\to0}{\sim} x\right|=-\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to0}x=0;$$ ◄

► б) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{x^3}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{3x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^3}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{3x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3x^3}=0;$$ ◄

► в) $$\lim_{x\to5+0}\frac{x\ln(x-5)}{\ln(e^x-e^5)}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=5\lim_{x\to5}\frac{\frac{1}{x-5}}{\frac{1}{e^x-e^5}\cdot e^x}=$$

$$=5\lim_{x\to5}\frac{e^x-e^5}{(x-5)e^5}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\frac{5}{e^5}\lim_{x\to5}\frac{e^x}{1}=\frac{5}{e^5}e^5=5.$$ ◄

20. Знайти границі, використовуючи правило Лопіталя (невизначеність типу $\{0\cdot\infty\}$):

$$\text{а) } \lim_{x\to\infty}x^3e^{-x}; \quad \text{б) } \lim_{x\to1}\sin(x-1)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}; \quad \text{в) } \lim_{x\to+0}x^2\ln x.$$

► а) $\lim\limits_{x\to\infty} x^3e^{-x} = \{0\cdot\infty\} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{e^x} = \left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2}{e^x} = \left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\} =$

$= 3\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{e^x} = \left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\} = 6\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{e^x} = 0$; ◄

► б) $\lim\limits_{x\to1}\sin(x-1)\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi x}{2} = \{0\cdot\infty\} = \left|\sin(x-1) \underset{x\to1}{\sim} x-1\right| =$

$= \lim\limits_{x\to1}(x-1)\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi x}{2} = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\mathrm{ctg}\,\dfrac{\pi x}{2}} = \left\{\dfrac{0}{0}\right\} =$

$= \lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{-\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{\pi x}{2}}\cdot\dfrac{\pi}{2}} = -\dfrac{2}{\pi}\lim\limits_{x\to1}\sin^2\dfrac{\pi x}{2} = -\dfrac{2}{\pi}\cdot1^2 = -\dfrac{2}{\pi}$; ◄

► в) $\lim\limits_{x\to+0} x^2\ln x = \{0\cdot\infty\} = \lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x^2}} = \left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\} =$

$= \lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{2}{x^3}} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to+0} x^2 = 0$. ◄

21. Знайти границі, використовуючи правило Лопіталя (невизначеність типу $\{\infty-\infty\}$):

а) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin^3 x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{\mathrm{ctg}\,x} - \dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$.

► а) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin^3 x} - \dfrac{1}{x^2}\right) = \{\infty-\infty\} = \lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}\right) = \left\{\dfrac{0}{0}\right\} =$

$$=\left|x^2\sin^2 x \underset{x\to 0}{\sim} x^4\right| = \lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin 2x}{4x^3} =$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{2-\cos 2x\cdot 2}{3x^2} = \frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2} = \left\{\frac{0}{0}\right\} =$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x} = \left|\sin 2x \underset{x\to 0}{\sim} 2x\right| = \frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x} = \frac{1}{3};\ ◄$$

► б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x}{\operatorname{ctg} x} - \frac{\pi}{2\cos x}\right) = \{\infty-\infty\} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x\cdot\sin x}{\cos x} - \frac{\pi}{2\cos x}\right) =$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2x\sin x-\pi}{2\cos x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x+2x\cos x}{2(-\sin x)} = -1.\ ◄$$

22. Знайти границі, використовуючи правило Лопіталя (невизначеності типу $\{1^\infty\}$, $\{\infty^0\}$, $\{0^0\}$):

а) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\operatorname{tg} x)^{2\cos x}$; в) $\lim\limits_{x\to +0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$.

► а) Для знаходження $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$ скористаємось

співвідношенням $\left(\cos 2x\right)^{\frac{3}{x^2}} = e^{\ln(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}} = e^{\frac{3}{x^2}\ln\cos 2x}$.

Тоді

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} = \{1^\infty\} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{3}{x^2}\ln\cos 2x} = \left\{e^{\frac{0}{0}}\right\} = e^{3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{x^2}} = e^{3A}.$$

Тут позначено $A = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{x^2}$. Знайдемо цю границю,

застосовуючи правило Лопіталя,

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{x^2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos 2x}\cdot(-\sin 2x)\cdot 2}{2x}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\sin 2x \underset{x\to 0;}{\sim} 2x,\\ \cos 2x \underset{x\to 0.}{\to} 1,\end{array}\right|=2\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{2x}=-2.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}=e^{3\cdot(-2)}=e^{-6}$. ◄

► б) При знаходженні $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\operatorname{tg}x)^{2\cos x}$ врахуємо, що $(\operatorname{tg}x)^{2\cos x}=e^{2\cos x\ln\operatorname{tg}x}$. Маємо

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\operatorname{tg}x)^{2\cos x}=\{\infty^0\}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}e^{2\cos x\ln\operatorname{tg}x}=\{e^{0\cdot\infty})=e^{2\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\ln\operatorname{tg}x}{\frac{1}{\cos x}}}=e^{2A},$$

де $$A=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\ln\operatorname{tg}x}{\frac{1}{\cos x}}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\frac{1}{\operatorname{tg}x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{1}{\cos^2 x}\cdot(-\sin x)}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{1}{\operatorname{tg}x\cdot\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\cos x}{\sin^2 x}=0.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\operatorname{tg}x)^{2\cos x}=e^{2\cdot 0}=e^0=1$. ◄

► в) $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}=\{0^0\}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}\cdot\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\ln(e^x-1)}}=e^A$, де

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\ln(e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{e^x-1}e^x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{xe^x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=1.$$

Отже, $\lim\limits_{x \to 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}} = e$. ◄

Завдання для самостійного розв'язання

У задачах 146 – 157 знайти границі, використовуючи правило Лопіталя (невизначеності типу $\left\{\frac{0}{0}\right\}$).

146. $\lim\limits_{x \to a} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$.

147. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln \cos x}{x}$.

148. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$.

149. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{\alpha x} - \cos \alpha x}{e^{\beta x} - \cos \beta x}$.

150. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - arctgx}{x^3}$.

151. $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$, $a > 0$.

152. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1 + x)}$

153. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^3 - 4x^2 + 3}$.

154. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{\arcsin 3x}$.

155. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{ctgx - 1}{\sin 4x}$.

156. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\pi - 2arctgx}{e^{\frac{3}{x}} - 1}$.

157. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{x\sqrt{1 - x^2}}$.

У задачах 158 – 165 знайти границі, використовуючи правило Лопіталя (невизначеності типу $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$).

158. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{tgx}{tg5x}$.

159. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^5}$.

160. $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$.

161. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^m}$, $m>0$.

162. $\lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{tg\dfrac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$.

163. $\lim\limits_{x\to3+0}\dfrac{\cos x\cdot\ln(x-3)}{\ln(e^x-e^3)}$.

164. $\lim\limits_{x\to1+0}\dfrac{\ln(x-1)}{ctg\pi x}$.

165. $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$.

У задачах 166 – 171 знайти границі, використовуючи правило Лопіталя (невизначеності типу $\{0\cdot\infty\}$).

166. $\lim\limits_{x\to\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)$.

167. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-x}$.

168. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{a}{x}$.

169. $\lim\limits_{x\to0}x^2e^{\frac{1}{x^2}}$.

170. $\lim\limits_{x\to+0}x\ln^3 x$.

171. $\lim\limits_{x\to\pi}(\pi-x)tg\dfrac{x}{2}$.

У задачах 172 – 177 знайти границі, використовуючи правило Лопіталя (невизначеності типу $\{\infty-\infty\}$).

172. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$.

173. $\lim\limits_{x\to0}\left(ctgx-\dfrac{1}{x}\right)$.

174. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

175. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{arctgx}-\dfrac{1}{x}\right)$.

176. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{ctgx}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$.

177. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-ctg^2x\right)$.

У задачах 178 – 189 знайти границі, використовуючи правило Лопіталя (невизначеності типу $\{1^\infty\}$, $\{\infty^0\}$, $\{0^0\}$).

178. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos 2x\right)^{\frac{3}{x^2}}$.

179. $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x + x\right)^{\frac{1}{x}}$.

180. $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\dfrac{x}{a}\right)^{tg\frac{\pi x}{2a}}$.

181. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{x}$.

182. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

183. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

184. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$.

185. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} (tgx)^{2x-\pi}$.

186. $\lim\limits_{x\to +0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$.

187. $\lim\limits_{x\to +0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{tgx}$.

188. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x+2^x\right)^{\frac{3}{x}}$.

189. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} (\pi-2x)^{\cos x}$.

190. Довести, що задані границі не можуть бути знайдені за правилом Лопіталя. Знайти границі безпосередньо:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$.

§ 2. Застосування диференціального числення

2.1 Геометричні та механічні застосування похідної

Геометричний зміст похідної полягає в тому, що похідна функції $f(x)$ при даному значенні аргументу x_0 рівна кутовому коефіцієнту дотичної до графіка цієї функції в точці $M_0(x_0, f(x_0))$, тобто $f'(x_0) = \mathrm{tg}\,a$, де a – величина кута, утвореного дотичною з додатнім напрямком осі Ox. Тому рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці $M_0\left(x_0,\, y_0\right)$, де $y_0 = f(x_0)$, має вигляд

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Пряма, яка проходить через точку M_0 (x_0, y_0) перпендикулярна до дотичної, називається *нормаллю* до графіка функції $y = f(x)$ в цій точці.

Якщо $f'(x_0) \neq 0$, то рівняння нормалі записується у вигляді

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Коли $f'(x_0) = 0$, нормаль має рівняння $x = x_0$.

Дотична та нормаль до кривої $y = f(x)$ у точці M визначає такі чотири відрізки (рис. 2): $t = TM$ – відрізок дотичної, $s_t = TK$ – *піддотична*, $n = NM$ – відрізок нормалі, $s_n = KN$ – *піднормаль.*

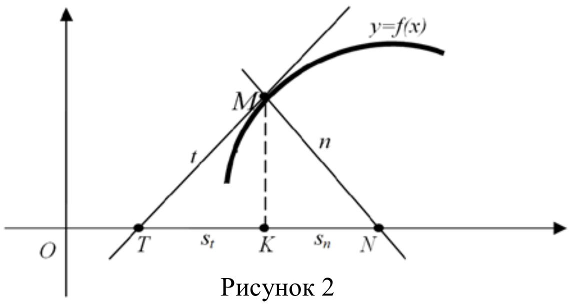


Рисунок 2

Кутом між двома кривими $y = f_1\left(x\right)$ та $y = f_2\left(x\right)$ у точці їх перетину $M_0\left(x_0,\, y_0\right)$ називається кут φ між дотичними до цих кривих у точці M_0. Кут між двома кривими знаходиться за формулою

$$tg\varphi = \left|\frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0)\cdot f_2'(x_0)}\right|.$$

Фізичний зміст похідної. Якщо при прямолінійному русі точки задано закон руху $s = s(t)$, то швидкість руху в момент часу t є похідною від шляху по часу, тобто $v = s'(t)$; а прискорення цієї точки в момент часу t другою похідною від шляху по часу, тобто $a = s''(t)$.

Приклади розв'язання задач

23. Які кути утворюють з віссю Ox дотичні до кривої $y = x - x^2$ у точках з абсцисами: а) $x = 0$; б) $x = \frac{1}{2}$; в) $x = 1$?

► Знаходимо похідну $y' = 1 - 2x$.

а) При $x = 0$ $y' = 1$, тобто $tg\alpha = 1$, $\alpha = 45°$. ◄

► б) При $x = \frac{1}{2}$ $y' = 0$, тобто $tg\alpha = 0$, $\alpha = 0°$. ◄

► в) При $x = 1$ $y' = -1$, тобто $tg\alpha = -1$, $\alpha = 135°$. ◄

Результати проілюстровано на рис.3.

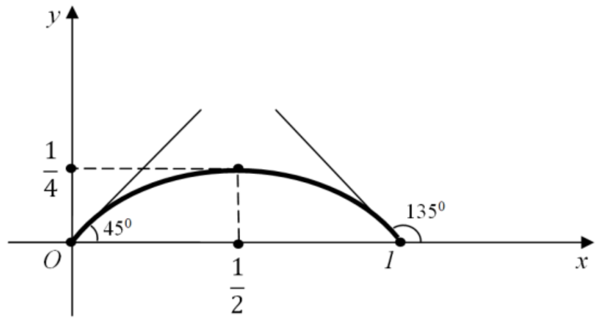


Рисунок 3

24. Написати рівняння дотичної і нормалі до параболи $y = \sqrt{x}$ у точці з абсцисою $x = 4$.

► Знаходимо похідну функції $y=\sqrt{x}$: $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Звідси, кутовий коефіцієнт дотичної $k=y'(4)=\dfrac{1}{4}$. Оскільки, точка дотику має координати $x=4,\ y=2$, то рівняння дотичної має вигляд $y-2=\dfrac{1}{4}(x-4)$, або $x-4y+4=0$. З умови перпендикулярності двох прямих $k_1\cdot k=-1$, кутовий коефіцієнт нормалі $k_1=-4$. Звідси, рівняння нормалі

$$y-2=-4(x-4) \text{ або } 4x+y-18=0. ◄$$

25. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої $x^2+2xy^2+3y^4=6$ у точці M(1;-1).

► З рівняння кривої $x^2+2xy^2+3y^4=6$ знаходимо похідну $y'=-\dfrac{x+y^2}{2xy+6y^3}$.

Звідси, $y'\big|_{(1;-1)}=-\dfrac{1+(-1)^2}{2\cdot1\cdot(-1)+6\cdot(-1)^3}=\dfrac{1}{4}$.

Рівняння дотичної $y+1=\dfrac{1}{4}(x-1)$, або $x-4y-5=0$.

Рівняння нормалі $y+1=-4(x-1)$, або $4x+y-3=0$. ◄

26. Знайти кут між параболами $y=8-x^2$ та $y=x^2$.

► Знаходимо координати точок перетину парабол

$$\begin{cases} y=8-x^2, \\ y=x^2; \end{cases} 8-x^2=x^2 \Rightarrow 2x^2=8 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm2.$$

Тоді $y=4$. Отже, маємо дві точки перетину парабол: $A(2;4)$ та $B(-2;4)$. Продиференціюємо рівняння парабол. З рівняння $y=8-x^2$ маємо $y'=-2x$, а з рівняння $y=x^2$ одержимо $y'=2x$.

Знайдемо кутові коефіцієнти дотичних до парабол у точці $A(2;4)$: $k_1=(-2x)\big|_{x=2}=-4$, $k_2=(2x)\big|_{x=2}=4$. Отже,

$$tg\varphi_1=\left|\frac{4+4}{1-16}\right|=\frac{8}{15},\qquad \varphi_1=arctg\frac{8}{15}.$$

Аналогічно визначається кут між кривими в точці $B(-2;4)$: $k_1=(-2x)\big|_{x=-2}=4$, $k_2=(2x)\big|_{x=-2}=-4$. Отже,

$$tg\varphi_2=\left|\frac{-4-4}{1-16}\right|=\frac{8}{15},\qquad \varphi_2=arctg\frac{8}{15}.$$ ◄

27. Залежність шляху від часу при прямолінійному русі точки задана рівнянням $s=\frac{t^5}{5}+\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi t}{8}$ (t – у секундах, s – у метрах). Визначити швидкість руху в кінці другої секунди.

► Знаходимо похідну від шляху по часу. Отримуємо швидкість руху $v=\frac{ds}{dt}=t^4+\frac{1}{4}\cos\frac{\pi t}{8}$.

При $t=2$ маємо $v\big|_{t=2}=16+\frac{1}{8}\cdot\sqrt{2}\approx 16{,}18.$

Отже, швидкість руху в кінці другої секунди $v\approx 16{,}18$ м/с. ◄

28. Тіло, кинуте вертикально вгору, рухається за законом $s(t)=-4{,}905t^2+981t+950$ (t – у секундах, s – у метрах).

Знайти: швидкість тіла в будь-який момент часу; його початкову швидкість; момент часу, при якому швидкість тіла стане рівною нулю; висоту, яку досягне тіло в цей момент часу.

► На основі механічного змісту похідної маємо $v(t) = s'(t) = -9{,}81t + 981.$ Вважаючи $t = 0,$ отримаємо початкову швидкість тіла $v_0 = s(0) = 981$ (м/с). Визначаємо тепер, в який момент часу t швидкість тіла стане рівною нулю. Із рівняння $-9{,}81t + 981 = 0$ знайдемо, що $t = 100$ с. Тоді висота, якої досягло тіло в момент часу $t = 100$ с, дорівнюватиме $s = -4{,}905 \cdot 100^2 + 981 \cdot 100 + 950 = 50000$ (м). Зрозуміло, що ця висота є найбільшою. ◄

29. По параболі $y = x(8 - x)$ рухається точка так, що її абсциса змінюється в залежності від часу t за законом $x = t\sqrt{t}, (t -$ у секундах, $x -$ у метрах). Яка швидкість зміни ординати у точці М(1,7)?

► Знайдемо закон зміни ординати, поклавши $x = t\sqrt{t}$ у рівняння параболи $y = x(8 - x)$. Отримаємо $y = 8t\sqrt{t} - t^3$. Швидкість зміни ординати є похідна від ординати по часу: $y' = 12\sqrt{t} - 3t^2$. Для точки $M(1{,}7)$ значення $t = 1$. Отже, $y'\big|_{t=1} = 9,$ тобто швидкість зміни ординати дорівнює 9 м/с. ◄

Завдання для самостійного розв'язання

191. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної, яка проведена до параболи $y = x^2$: 1) у початку координат; 2) у точці (3,9); 3) у точці (–2,4); 4) у точках перетину її з прямою $y = 3x - 2$.

192. В яких точках кутовий коефіцієнт дотичної до кубічної параболи $y = x^3$ дорівнює 3?

193. В якій точці дотична до параболи $y = x^2$:

1) паралельна осі *Ox*; 2) утворює з віссю *Ox* кут 45°?

194. В яких точках дотична до параболи $y = x^2$:

1) паралельна прямій $y = 4x - 5$;

2) перпендикулярна до прямої $2x - 6y + 5 = 0$;

3) утворює з прямою $3x - y + 1 = 0$ кут у 45°?

195. На лінії $y = x^2(x-2)^2$, знайти точки в яких дотична паралельна осі абсцис.

196. На гіперболі $y = \dfrac{x-1}{x+1}$, знайти точки в яких дотичні паралельні прямій $y = 2x + 1$.

197. На параболі $y = x^2$ зафіксовано дві точки з абсцисами $x_1 = 1, x_2 = 3$. Через ці точки проведено січну. В якій точці параболи дотична до неї паралельна проведеній січній?

198. Написати рівняння дотичної і нормалі, проведених до кривої $y = x^3$ в точці з абсцисою 2. Знайти піддотичну s_t

і піднормаль s_n.

199. Скласти рівняння дотичної та нормалі до гіперболи $y = \frac{1}{x}$ у точці з абсцисою $x = -\frac{1}{2}$. Знайти піддотичну s_t і піднормаль s_n.

У задачах 200 – 205 скласти рівняння дотичної та нормалі до даних ліній в даній точці.

200. $y = x^2 - 5x + 4, x_0 = -1.$

201. $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3, x_0 = -2.$

202. $y = \sqrt{x}, x_0 = 4.$

203. $y = tg2x, x_0 = 0.$

204. $y = \ln x, x_0 = 1.$

205. Написати рівняння дотичної і нормалі в точці $M_0(2,2)$ до кривої, заданої параметрично $\begin{cases} x = \dfrac{1+t}{t^3}, \\ y = \dfrac{3}{2t^3} + \dfrac{1}{2t}. \end{cases}$

206. Написати рівняння дотичної до кривої $\begin{cases} x = t\cos t, \\ y = t\sin t \end{cases}$ у початку координат і в точці $t = \pi / 4$.

207. Написати рівняння дотичної та нормалі до кривої $x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0$ в точці з ординатою $y_0 = 3$.

208. Написати рівняння дотичної у точці $M_0(1,1)$ до кривої $x^5 + y^5 - 2xy = 0.$

209. Довести, що дотична до еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в точці $M(x_0, y_0)$ має рівняння $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$

210. Довести, що дотична до гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ в точці $M(x_0, y_0)$ має рівняння $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1.$

211. Під яким кутом перетинається парабола $y = x^2$ прямою $3x - y - 2 = 0$?

У задачах 212 – 217 знайти кути, під якими перетинаються задані криві.

212. Параболи $y = x^2$ та $y^2 = x.$

213. Гіпербола $y = \frac{1}{x}$ з параболою $y = \sqrt{x}.$

214. Кола $x^2 + y^2 - 4x = 1$ та $x^2 + y^2 + 2y = 9.$

215. Параболи $y = (x-2)^2$ та $y = 4x - x^2 + 4.$

216. Коло $x^2 + y^2 = 8$ та парабола $y^2 = 2x.$

217. Гіпербола $x^2 - y^2 = 5$ та еліпс $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1.$

218. Відстань, пройдена матеріальною точкою за час t, визначається за формулою $s = \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^3 + 2t + 1$ (t– у секундах, s – у метрах). Знайти швидкість руху даної точки у моменти часу t =0; 1; 2 с.

219. Задано рівняння руху точки вздовж осі Ox $x(t)=100+5t-0{,}001t^3$ (t – у секундах, s – у метрах). Знайти швидкість v та прискорення a цієї точки у моменти часу $t_0=0, t_1=1, t_2=10c.$

220. Точка рухається прямолінійно, закон її руху $s=\frac{2}{9}\sin\frac{\pi t}{2}+s_0$. Знайти прискорення в кінці першої секунди (t – у секундах, s – у сантиметрах).

221. Закон руху матеріальної точки по прямій має вигляд $s=\frac{1}{4}t^4-4t^3+16t^2$. Визначити:

а) в які моменти часу точка знаходиться у початку координат?

б) в які моменти часу її швидкість дорівнює нулю?

в) в які моменти часу напрямок її руху співпадає з додатним напрямом осі Ox ?

г) в які моменти часу її прискорення дорівнює нулю?

222. Залежність шляху від часу задано рівнянням $s=t\ln(t+1)$ (t – у секундах, s – у метрах). Знайти швидкість руху в кінці другої секунди.

223. По кубічній параболі $y=x^3$ точка рухається так, що її ордината змінюється в залежності від часу t за законом

$y = at^3$. Яка швидкість зміни абсциси в залежності від часу?

2.2 Основні теореми диференціального числення

Теорема 1 (*Ферма*). Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки c і досягає в цій точці найменшого або найбільшого значення. Тоді, якщо існує $f'(c)$, то $f'(c) = 0$.

Теорема 2 (*Ролля*). Нехай функція $f(x)$ визначена та неперервна на $[a,b]$ і диференційовна на (a,b). Тоді, якщо $f(a) = f(b)$, то існує така точка $c \in (a,b)$, що $f'(c) = 0$.

Теорема 3 (*Лагранжа*). Нехай функція $f(x)$ визначена та неперервна на $[a,b]$ і диференційовна на (a,b). Тоді існує така точка $c \in (a,b)$, що $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Теорема 4 (*Коші*). Нехай функції $f(x)$ та $g(x)$ визначена та неперервні на $[a,b]$, диференційовні на (a,b) і $g'(x) \neq 0$ в усіх точках $x \in (a,b)$. Тоді існує така точка $c \in (a,b)$, що

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Приклади розв'язання задач

30. Показати, що задана функція $f(x)$ задовольняє умовам теореми Ролля на $[a,b]$:

а) $f(x) = x^2 - 6x + 100; \quad a = 1, b = 5;$

б) $f(x) = \sqrt[3]{8x - x^2}; \quad a = 0, b = 8.$

Знайти таке значення $c \in (a,b)$, що $f'(c) = 0$.

►а) Функція $f(x) = x^2 - 6x + 100$ неперервна на відрізку $[1;5]$. Очевидно, що при всіх x існує $f'(x) = 2x - 6$, тому функція диференційовна на інтервалі $(1;5)$. Також $f(1) = f(5) = 95$. Отже, виконуються усі умови теореми Ролля. Для знаходження такого $c \in (1;5)$, що $f'(c) = 0$, розв'язуємо рівняння $f'(x) = 2x - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$, тобто $c = x = 3$. ◄

►б) Функція $f(x) = \sqrt[3]{8x - x^2}$ неперервна на відрізку $[0;8]$. Похідна $f'(x) = \dfrac{8-2x}{3 \cdot \sqrt[3]{(8x - x^2)^2}}$ існує для $x \neq 0, x \neq 8$. Отже, існує на інтервалі $(0;8)$, при цьому $f(0) = f(8) = 0$. Як бачимо, усі умови теореми Ролля виконуються.

Для знаходження точки $c \in (0;8)$ розв'язуємо рівняння

$$f'(x) = \frac{8-2x}{3 \cdot \sqrt[3]{(8x - x^2)^2}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 8 - 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4.$$

Отже, $c = 4$. ◄

31. Чи виконуються умови теореми Ролля для функцій:

а) $f(x) = \dfrac{5 - x^2}{x^4}$ на відрізку $[-1;1]$;

б) $f(x) = \sqrt[3]{(x-8)^2}$ на відрізку $[0;16]$?

►а) Для $f(x) = \dfrac{5 - x^2}{x^4}$ порушена умова неперервності функції на відрізку $[-1;1]$. Точка $x=0\in[-1;1]$ є точкою розриву функції. ◄

►б) Для $f(x)=\sqrt[3]{(x-8)^2}$ порушена умова диференційовності функції на інтервалі $(1;\,16)$. Дійсно, $f'(x)=\dfrac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x-8}}$ у точці $x=8\in(1;16)$ не існує. ◄

32. Показати, що похідна многочлена $f(x)=x^5-x^4-x+1$ має дійсний корінь на інтервалі $(-1;\,1)$.

► Функція $f(x)$ задовольняє умовам теореми Ролля (вона неперервна на $[-1;\,1]$, диференційовна на інтервалі $(-1;\,1)$, $f(-1)=f(1)=0$). Отже, існує така точка $c\in(-1;\,1)$, що $f'(c)=0$, тобто многочлен $f'(x)=5x^4-4x^3-1$ має хоча б один дійсний корінь на інтервалі $(-1;\,1)$. ◄

33. Перевірити виконання умов теореми Лагранжа для функції $f(x)=x-x^3$ на відрізку $[-2;\,1]$ і знайти відповідне проміжне значення c.

► Функція $f(x)=x-x^3$ неперервна на відрізку $[-2;\,1]$; існує $f'(x)=1-3x^2$ для усіх $x\in\mathbb{R}$. Отже, функція диференційовна на інтервалі $(-2;\,1)$. Як бачимо, умови теореми Лагранжа виконуються на відрізку $[-2;\,1]$, тому існує таке $c\in(-2;\,1)$, що

$$f(1)-f(-2)=f'(c)(1-(-2))\Leftrightarrow 0-6=f'(c)\cdot 3 \quad\Leftrightarrow\quad f'(c)=-2.$$

Враховуючи вираз для $f'(x)$, маємо $1-3c^2=-2 \;\Leftrightarrow\; 3c^2=3 \;\Leftrightarrow\; c^2=1 \;\Leftrightarrow\; c=\pm 1$. Шукане $c=-1$, бо $-1\in(-2;1)$. ◄

34. На дузі AB кривої $f(x)=2x-x^2$ знайти точку M, в якій дотична паралельна хорді AB, якщо $A(1;\,1)$, $B(3;\,-3)$.

► Функція $f(x)=2x-x^2$ неперервна та диференційовна при всіх значеннях $x\in\mathbb{R}$, а значить, і на відрізку $[1;\,3]$. Відповідно до теореми Лагранжа існує така точка $c\in(1;\,3)$, що виконується рівність $f(3)-f(1)=f'(c)(3-1)$. У нас $f'(x)=2-2x$. Тому, $(2\cdot 3-3^2)-(2\cdot 1-1^2)=(2-2c)\cdot 2 \;\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\; -4=4(1-c) \;\Leftrightarrow\; c=2$, $f(2)=0$.

Оскільки $f'(2)=-2=\dfrac{-3-1}{3-1}$, то значення похідної рівне кутовому коефіцієнту прямої, на якій лежить хорда AB. Отже, ця хорда паралельна дотичній до графіка функції в знайденій точці $M(2;\,0)$.◄

Завдання для самостійного розв'язання

У задачах 224 – 227 перевірити справедливість теореми Ролля для заданої функції $f(x)$ на даному відрізку $[a;b]$.

224. $f(x)=x^3+4x^2-7x-10,\quad [-1;2]$.

225. $f(x)=\ln\sin x,\quad [\pi/6;5\pi/6]$.

226. $f(x) = 4^{\sin x}, \quad [0;\pi].$

227. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}, \quad [1;2].$

228. Функція $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$ на кінцях відрізка $[0;4]$ приймає рівні значення $f(0) = f(4) = \sqrt[3]{4}$. Чи справедлива для цієї функції теорема Ролля на відрізку $[0;4]$?

229. Чи виконані умови теореми Ролля для функції $f(x) = tgx$ на відрізку $[0;\pi]$?

230. Чи виконані умови теореми Ролля для функції $f(x) = (2 - x^2)/x^4$ на відрізку $[-1;1]$?

231. Перевірити виконання умов теореми Лагранжа і знайти відповідну проміжну точку *c* для функції $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$ на відрізку $[-1;1]$?

232. Записавши формулу Лагранжа на відрізку $[0;1]$ для функції $f(x) = \sqrt{3}x^3 + 3x$, знайти на інтервалі (0;1) відповідне значення *c*.

233. Для дуги параболи $y = x^2$, що міститься між точками *A*(1;1) та *B*(3;9), знайти точку, дотична до якої паралельна хорді *AB*.

234. Записавши формулу Коші на відрізку $[0;2]$ для функцій $f(x) = 2x^3 + 5x + 1$ та $g(x) = x^2 + 4$, знайти відповідне значення *c*.

235. Для заданих функцій *f*(*x*) та *g*(*x*) перевірити виконання умов теореми Коші на заданому відрізку $[a;b]$ та знайти відповідне значення *c:*

а) $f(x)=x^2+2,\quad g(x)=x^3-1,\quad [1;2];$

б) $f(x)=\sin x,\quad g(x)=\cos x,\quad [0;\pi/2].$

2.3 Формула Тейлора

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі $U_\delta(a)=(x-\delta;\ x+\delta)$ точки a і диференційовна n раз у точці $x=a$. Тоді для будь-якого $x\in U_\delta(a)$ справедлива формула

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+R_n(x),$$

яка називається формулою *Тейлора* для функції $f(x)$ з центром в точці a. Тут $f^{(0)}(a)=f(a)$, $R_n(x)$ – залишковий член.

Як бачимо, формула Тейлора подає функцію у вигляді суми многочлена та залишкового члена. Залишковий член можна записати у *формі Пеано* $R_n(x)=o((x-a)^n)$ при $x\to a$.

Відзначимо, що коли функція $f(x)$ диференційовна до $(n+1)$-го порядку включно в $U_\delta(a)$, то залишковий член можна подати у *формі Лагранжа* $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, де ξ знаходиться між точками a і x (чи x і a), тобто $\xi=a+\theta(x-a)$, $0<\theta<1$.

При $a=0$ з формули Тейлора, отримуємо, як частинний випадок, *формулу Маклорена*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}x^k+R_n(x).$$

Для цієї формули залишкові члени мають вигляд:

у формі Пеано $R_n(x) = o(x)^n$ при $x \to 0$;

у формі Лагранжа $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}(x)^{n+1}$, $0 < \theta < 1$.

Наведемо основні розклади функцій за формулою Маклорена з залишковим членом у формі Пеано:

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n); \qquad \sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + o(x^{2n});$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}); \qquad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n);$$

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!} x^k + o(x^n).$$

У випадку залишкового члена у формі Лагранжа маємо:

для функції $R_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}$, $0 < \theta < 1$;

для функції $\sin x$: $R_{2n-1} = (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos\theta x$, $0 < \theta < 1$;

для функції $\cos x$: $R_{2n} = (-1)^{n+1} \dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos\theta x$, $0 < \theta < 1$;

для функції $\ln(1+x)$: $R_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+1} \left(\dfrac{x}{1+\theta x} \right)^{n+1}$, $0 < \theta < 1$;

для функції $(1+x)^m$: $R_n(x) = \dfrac{m(m-1)\ldots(m-n)}{(n+1)!} x^{n+1} (1+\theta x)^{m-n-1}$, $0 < \theta < 1$.

Формула Тейлора широко застосовується при обчисленні значень функції з заданою точністю. Нехай, наприклад, потрібно обчислити значення функції $f(x)$ в точці x_0 з абсолютною похибкою, яка не перевищує ε, якщо відомо значення цієї функції та її похідних у точці a. З формули Тейлора випливає, що

$$f(x_0) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x_0 - a) + \ldots + \frac{f^{(n_0)}(a)}{n_0!}(x_0 - a)^{n_0},$$

де n_0 – мінімальний з номерів *n*, для яких $|R_{n+1}(x)| < \varepsilon$.

Приклади розв'язання задач

35. Розкласти многочлен $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ за степенями двочлена $x = 2$.

► Знаходимо похідні многочлена та їх значення в точці $x = 2$: $P'(x) = 3x^2 + 4x + 3$; $P''(x) = 6x - 4$; $P'''(x) = 6$; $P^{(n)}(x) = 0$ при $n \geq 4$. Обчислюємо $P(2) = 11$; $P'(2) = 7$; $P''(2) = 8$; $P'''(2) = 6$. Тоді за формулою Тейлора маємо

$$x^3 - 2x^2 + 3x + 5 = 11 + 7(x-2) + \frac{8}{2!}(x-2)^2 + \frac{6}{3!}(x-2)^3,$$

або $x^3 - 2x^2 + 3x + 5 = 11 + 7(x-2) + 4(x-2)^2 + (x-2)^3$.◄

36. Розкласти функцію $f(x) = tgx$ за формулою Маклорена до члена, що містить x^3 включно.

► Знаходимо похідні функції $f(x) = tgx$ до третього порядку включно, а також їх значення при $x = 0$.

Маємо $f(x) = tgx$, $f(0) = 0$; $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \cos^{-2} x$, $f'(0) = 1$;

$$f''(x) = -2\cos^{-3} x \cdot (-\sin x) = 2\cos^{-3} x \cdot \sin x, \quad f''(0) = 0;$$

$$f'''(x) = 6\cos^{-4} x \cdot \sin^2 x + 2\cos^{-2} x, \quad f'''(0) = 2.$$

За формулою Маклорена з залишковим членом у формі

Пеано маємо $tgx = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$.

Відзначимо, що оскільки
$f^{(4)}(x) = 6(4\cos^{-5} x \cdot \sin^3 x + \cos^{-4} x \cdot 2\sin x \cdot \cos x) + 2 \cdot 2 \cdot \cos^{-3} x \cdot \sin x$,
$f^{(4)}(0) = 0$, то залишковий член можна записати у вигляді $o(x^4)$, тобто $tgx = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^4)$. ◄

37. Розвинути функцію $f(x) = \sqrt[3]{x}$ за формулою Тейлора з центром розкладу у точці $a = 1$ (за степенями $(x-1)$) до члена $(x-1)^3$ включно.

► Обчислимо значення функції $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ та її похідні до третього порядку включно при $x = a = 1$

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}},\ f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}},\quad f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}},\ f'''(x) = \frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}};$$

$$f(1) = 1,\ f'(1) = \frac{1}{3},\quad f''(1) = -\frac{2}{9},\ f'''(1) = \frac{10}{27}.$$

Отже, за формулою Тейлора одержимо

$$\sqrt[3]{x} = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{2}{9 \cdot 2!}(x-1)^2 + \frac{10}{27 \cdot 3!}(x-1)^3 + o((x-1)^3).$$ ◄

38. Знайти з точністю до 10^{-3} наближене значення $\sqrt[3]{29}$.

► Запишемо $\sqrt[3]{29} = \sqrt[3]{27+2} = 3(1 + \dfrac{2}{27})^{\frac{1}{3}}$.

Скористаємось біноміальним розкладом:

$$(1+x)^m = 1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+R_n.$$

Звідси маємо наближену рівність

$$(1+x)^m \approx 1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n,$$

похибка якої $R_n = \dfrac{m(m-1)\ldots(m-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\theta x)^{m-n-1}$ може стати як завгодно малою при $|x|<1$ і достатньо великому n.

Поклавши $x=\dfrac{2}{27}$ і $m=\dfrac{1}{3}$, отримаємо

$$\sqrt[3]{29} = 3(1+\frac{2}{27})^{\frac{1}{3}} = 3(1+\frac{2}{81}-\frac{2^2}{81^2}+\frac{2^3\cdot 5}{3\cdot 81^3}.-\frac{2^5\cdot 5}{3\cdot 81^4}+\ldots+R_n).$$

Оцінюючи послідовно величини похибок обчислення $3|R_n|$, знаходимо $3|R_1| < 3\cdot\dfrac{2^2}{81^2} < 0{,}002$; $3|R_2| < \dfrac{2^3\cdot 5}{81^3} < 0{,}00007.$

Отже, для обчислення $\sqrt[3]{29}$ з заданою точністю достатньо взяти три члени, які передують залишку R_2, тобто

$$\sqrt[3]{29} \approx 3(1+0{,}024-0{,}0006) = 3{,}072. \blacktriangleleft$$

39. Використовуючи розклади функції за формулою Тейлора (Маклорена), обчислити задані границі:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)-\sin 2(x-1)}{(x-1)+\sin 3(x-1)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx+2\sin x-3x}{x^4}$.

► а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)-\sin 2(x-1)}{(x-1)+\sin 3(x-1)}=\left|\begin{array}{l}\sin 2(x-1)=\dfrac{2(x-1)}{1!}+o(x-1),\\ \sin 3(x-1)=\dfrac{3(x-1)}{1!}+o(x-1)\end{array}\right|=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)-2(x-1)-o(x-1)}{(x-1)+3(x-1)+o(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)}{4(x-1)}=-\frac{1}{4};$$ ◄

► б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx+2\sin x-3x}{x^4}=\left|\begin{array}{l}tgx=x+\dfrac{x^3}{3}+o(x^4),\\ \sin x=x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^4)\end{array}\right|=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+\dfrac{x^3}{3}+o(x^4)+2(x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^4)-3x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{o(x^4)}{x^4}=0.$$ ◄

Завдання для самостійного розв’язання

236. Розкласти многочлен $P(x)=x^4-5x^3+x^2-3x+4$ за степенями двочлена $x-4$.

237. Розкласти многочлен $P(x)=x^3+3x^2-2x+4$ за степенями двочлена $x+1$.

238. Нехай $P(x)$ – многочлен четвертого степеня. Обчислити $P(-1),\ P'(0),\ P''(1)$, коли відомо, що $P(2)=-1, P'(2)=0, P''(2)=2, P'''(2)=-12, P^{(4)}(2)=24.$

239. Розкласти задану функцію $f(x)$ за формулою Маклорена до члена вказаного порядку включно:

а) $f(x)=e^{-x}$, до члена з x^n;

б) $f(x)=e^{2x-x^2}$, до члена з x^5;

в) $f(x)=\sqrt{1-x+2x^2}$, до члена з x^3;

г) $f(x)=xe^x$, до члена з x^n.

240. Розкласти задану функцію $f(x)$ за формулою Тейлора з центром розкладу у точці x = a (за степенями $(x-a)$) до члена вказаного порядку включно:

а) $f(x)=\dfrac{1}{x}, a=-1,$ до члена з $(x+1)^n$;

б) $f(x)=\sqrt{x}, a=4,$ до члена з $(x-4)^2$;

в) $f(x)=x^3\ln x, a=1,$ до члена з $(x-1)^4$;

г) $f(x)=\sin\dfrac{\pi x}{2}, a=1,$ до члена з $(x-1)^4$.

241. Написати формулу Тейлора для заданої функції $f(x)$ з центром у точці x = a до члена вказаного порядку включно. Побудувати графік даної функції та її многочлена Тейлора:

а) $f(x)=tgx, a=0,$ до члена з x;

б) $f(x)=\arcsin x, a=0,$ до члена з x^3;

в) $f(x)=\ln x, a=1,$ до члена з $(x-1)^2$.

242. За допомогою формули Тейлора обчислити наближені значення чисел з точністю до 10^{-3}:

а) $\sin 1$; б) $\sqrt{e}$; в) $\ln 1{,}05$; г) $\sqrt[5]{33}$.

243. Використовуючи розклади функцій за формулою Маклорена, обчислити задані границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^3+x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3+x^4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-2tgx}{\ln(1+x^3)}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{2x^2}$.

2.4 Дослідження функцій та побудова графіків

Зростання та спадання функцій. Функція $f(x)$ називається *зростаючою* на інтервалі (a,b), якщо для $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$: $x_1 < x_2$ виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$. Якщо ж при $x_1 < x_2$ виконується нерівність $f(x_1) > f(x_2)$, то функція називається *спадною*.

Якщо $f'(x) > 0$ на (a,b), то функція $f(x)$ *зростає* на цьому інтервалі. Якщо $f'(x) < 0$ на (a,b), то функція $f(x)$ *спадає* на цьому інтервалі.

Інтервали зростання та спадання функції називаються інтервалами *монотонності*.

Екстремуми функції. Точка $x = x_0$ називається точкою *локального максимуму* функції $f(x)$, якщо існує такий окіл $U_\delta(x_0)$ точки x_0, що $\forall x \in U_\delta(x_0)$, $x \ne x_0$ виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$.

Аналогічно точка $x = x_0$ – точка *локального мінімуму* функції $f(x)$, якщо для $\forall x \in U_\delta(x_0)$, $x \ne x_0$ виконується нерівність $f(x) > f(x_0)$.

Точки локального максимуму та локального мінімуму функції $f(x)$ називаються точками *локального екстремуму* цієї функції, а значення функції в цих точках – локальними екстремумами. Надалі ми слово «локальний» опускатимемо.

Необхідна умова екстремуму. Якщо функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0 і має в цій точці екстремум, то $f'(x_0)=0$.

Відзначимо, що ця умова не є достатньою. Наприклад, точка $x_0=0$ не є точкою екстремуму для функції $f(x)=x^3$, а $f'(0)=0$.

Точка x_0, в якій $f'(x_0)=0$, називається *стаціонарною.* Точки, в яких $f'(x_0)$ рівна нулю, нескінченності або не існує, називаються *критичними* точками. В цих точках дотична до кривої $y=f(x)$ або горизонтальна, або вертикальна, або не має двосторонньої дотичної.

Достатні умови екстремуму. Ці умови задаються такими правилами:

1. Нехай функція $f(x)$ диференційовна в деякому околі $U_\delta(x_0)$ критичної точки x_0, за виключенням, можливо, самої точки x_0. Тоді, якщо:

а) $f'(x)>0$, $x\in(x_0-\delta,x_0)$ і $f'(x)<0$, $x\in(x_0,x_0+\delta)$, то x_0 – точка локального максимуму функції $f(x)$;

б) $f'(x)<0$), $x\in(x_0-\delta,x_0)$ і $f'(x)>0$, $x\in(x_0,x_0+\delta)$, то x_0 – точка локального мінімуму функції $f(x)$;

в) $f'(x)$ не змінює знаку при $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta), x\neq x_0$, то точка x_0 не є точкою локального екстремуму.

2. Нехай функція $f(x)$ двічі диференційовна в критичній точці x_0 і в деякому її околі. Тоді, якщо:

а) $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка максимуму;

б) $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка мінімуму;

в) $f''(x_0) = 0$, то потрібні додаткові дослідження.

3. Нехай функція $f(x)$ n раз диференційовна в критичній точці x_0 і $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тоді, якщо:

а) n – парне число, то x_0 – точка локального екстремуму; при цьому, якщо $f^{(n)}(x_0) < 0$, то x_0 – точка локального максимуму, $f^{(n)}(x_0) > 0$, то x_0 – точка локального мінімуму;

б) n – непарне число, то точка x_0 не є точкою локального екстремуму.

Опуклість, угнутість. Точки перегину. Нехай функція $f(x)$ диференційовна на інтервалі $(a;\, b)$. Графік функції $f(x)$ називається *опуклим уверх* або *опуклим* на інтервалі $(a;\, b)$, якщо він розташований нижче дотичної, проведеної до графіка в будь-якій точці з абсцисою із цього інтервалу. Графік функції $f(x)$ називається *опуклим униз* або *угнутим* на інтервалі $(a;\, b)$, якщо він розташований вище дотичної, проведеної до графіка в будь-якій точці з абсцисою із цього інтервалу.

Точка $(x_0, f(x_0))$ графіка функції, яка відділяє його опуклу частину від угнутої, називається *точкою перегину*.

Достатня умова опуклості (угнутості) графіка функції. Нехай функція $f(x)$ двічі диференційовна на інтервалі (a,b). Тоді, якщо:

а) $f''(x) < 0$ на $(a;\, b)$, то графік функції $f(x)$ є *опуклим* на $(a;\, b)$;

б) $f''(x) > 0$ на $(a;\, b)$, то графік функції $f(x)$ є *угнутим* на $(a;\, b)$.

Із означення точки перегину та достатніх умов опуклості (угнутості) випливає, що коли x_0 – абсциса точки перегину графіка функції $y = f(x)$, то друга похідна в цій точці дорівнює нулю, нескінченності або не існує.

Точки, в яких $f''(x)$ рівна нулю, нескінченності або не існує, називаються *критичними точкам другого роду.*

Достатня умова точки перегину. Нехай функція $f(x)$ двічі диференційовна в деякому околі $U_\delta\left(x_0\right)$ критичної точки другого роду x_0, за виключенням, можливо, самої точки x_0. Тоді, якщо $f''(x)$ в інтервалах $\left(x_0 - \delta, x_0\right)$, $\left(x_0, x_0 + \delta\right)$ має протилежні знаки, то x_0 – абсциса точки перегину. Якщо $f''(x)$ має однаковий знак у цих інтервалах, то x_0 не є точкою перегину.

Асимптоти. Пряма L називається *асимптотою* графіка функції $f(x)$, якщо відстань від точки M графіка функції до прямої L $\rho(M, L) \to 0$ при віддаленні точки M у нескінченність.

Вертикальні асимптоти. Пряма $x = a$ *є вертикальною* асимптотою графіка функції $f(x)$, якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$. Неперервні функції не мають вертикальних асимптот.

Похилі асимптоти. Пряма $y = kx + b$ є *похилою* асимптотою графіка функції $f(x)$, якщо існують скінченні границі

$k = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - kx\right)$, або $k = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) - kx\right)$.

Як бачимо, похилих асимптот може бути не більше двох. У випадку, коли $k = 0$, похилу асимптоту називають *горизонтальною*.

Схема повного дослідження функції.

Для повного дослідження функції та побудови її графіка можна рекомендувати таку схему:

1) вказати область визначення функції; по можливості знайти точки

перетину функції з осями координат;

2) дослідити функцію на неперервність, знайти точки розриву функції, якщо вони існують, і встановити їх характер;

3) знайти асимптоти графіка функції;

4) дослідити функцію на парність, непарність (симетрію графіка), періодичність;

5) визначити інтервали зростання та спадання функції та екстремуми;

6) визначити інтервали опуклості та угнутості графіка функції та точки перегину;

7) провести необхідні додаткові дослідження: сталість знаку функції, розташування графіка відносно осей координат (вище, нижче), поведінка функції на нескінченності, тощо.

Побудову графіка рекомендується виконувати поступово, переходячи від пункту до пункту схеми, з нанесенням знайдених у кожному пункті характеристик.

Приклади розв’язання задач

40. Дослідити функцію $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x-2}$ та побудувати її графік.

►1. Область визначення $D(f)=(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$. На інтервалі $(-\infty;2)$ маємо $f(x)<0$, на інтервалі $(2;+\infty)$ маємо $f(x)>0$. Точки перетину з осями координат: (–1;0) та $\left(0;-1/2\right)$.

2. Функція елементарна, отже, неперервна в усіх точках своєї області визначення, тобто при всіх дійсних $x\neq 2$.

Оскільки $\lim\limits_{x\to 2-0} f\left(x\right)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 2+0} f\left(x\right)=+\infty$, то $x=2$ є точкою розриву другого роду.

3. Вертикальна асимптота $x=2$, бо $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\infty$.

Похилі асимптоти шукаємо у вигляді $y=kx+b$. У нас

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\left(x+1\right)^2}{x-2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{4x+1}{x-2}=4.$$

Отже, $y=x$ – похила асимптота.

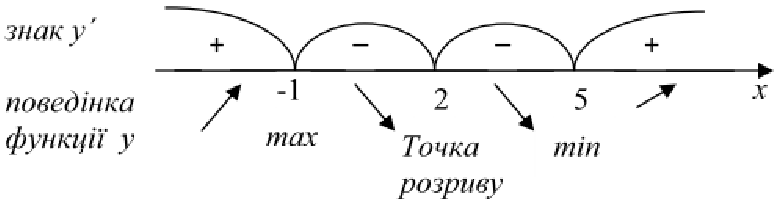
4. Функція ні парна, ні непарна, бо область визначення не є симетричною відносно початку координат. Функція неперіодична, бо не існує такого числа $T>0$, щоб

$$f(x+T)=f(x)\ \forall x\in D(f).$$

5. Знаходимо точки екстремуму та визначаємо інтервали монотонності функції. Обчислимо похідну

$$f'(x)=\frac{2(x+1)(x-2)-(x+1)^2}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x-5}{(x-2)^2}=\frac{(x+1)(x-5)}{(x-2)^2}.$$

Для визначення критичних точок розв'язуємо рівняння $f'\left(x\right)=0$, тобто $(x+1)(x–5)=0$, $(x-2)^2\neq 0$, звідки $x_1=-1$, $x_2=5$. Критичні точки $x_1=-1$, $x_2=5$ та точка $x=2$ (це точка розриву функції) поділяють область визначення функції на інтервали, які вказані на наведеній нижче схемі. На цій схемі над віссю Ox вказано знак похідної функції $y' = f'(x)$, під віссю Ox показана поведінка функції $y = f(x)$ на вказаних інтервалах. Стрілки ↗, ↘ вказують відповідно, що функція зростає або спадає. Слова *max, min* вказують точки, в яких функція досягає максимуму чи мінімуму.



Отже, $y_{max} = y(-1) = 0, \quad y_{min} = y(5) = 12.$

На проміжках $(-\infty; -1)$ і $(5; +\infty)$ функція зростає; на проміжках $(-1; 2)$ і $(2; 5)$ функція спадає.

7. Знаходимо точки перегину графіка функції та визначаємо інтервали опуклості та угнутості. Обчислимо другу похідну

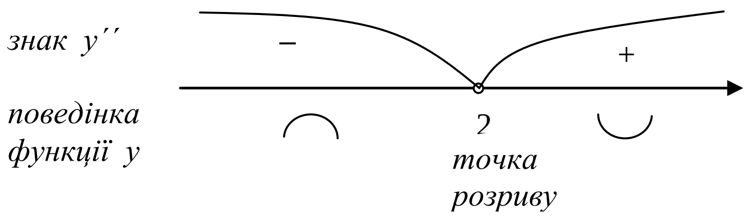
$$f''(x) = \left(\frac{x^2-4x-5}{(x-2)^2}\right)' = \frac{(2x-4)(x-2^2)-(x^2-4x-5)2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{18}{(x-2)^3},$$

$f''(x) \neq 0;$

$f''(x) < 0$ на проміжку $(-\infty; 2)$ тобто крива опукла на цьому проміжку; $f''(x) > 0$ на проміжку $(2; +\infty)$, тобто крива угнута на цьому проміжку.

Точок перегину немає, бо точка $x = 2$, в околі якої змінюється знак другої похідної, є точкою розриву функції.

Результати цього дослідження наведено на схемі.



Тут знак $\cap$ означає опуклість, знак $\cup$ – угнутість.

На основі дослідження поступово будуємо графік функції $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x-2}$, який наведено на рис.4. ◄

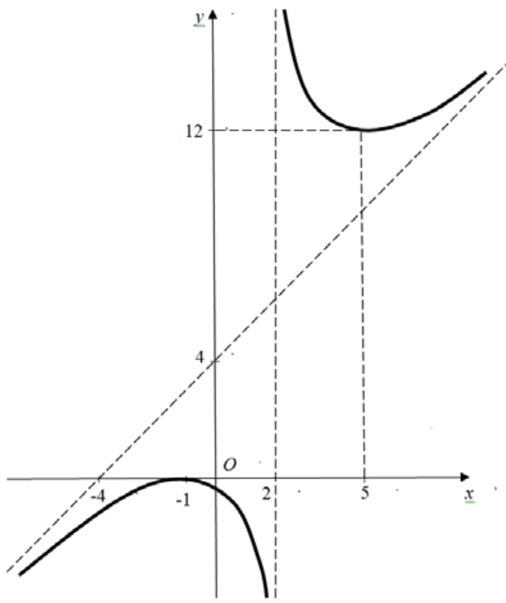


Рисунок 4

41. Дослідити функцію $f(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}$ та побудувати її графік.

► 1. Область визначення функції $D(f)=(-\infty;+\infty)$. На інтервалі $(-\infty;\,0)$ маємо $f(x)<0$, на інтервалі $(0;\,+\infty)$ маємо $f(x)>0$. Графік функції перетинається з осями координат в точці $(0;\,0)$.

2. Функція елементарна, отже, неперервна в усіх точках своєї області визначення, тобто на всій числовій осі. Точок розриву немає.

3. Вертикальних асимптот функція немає, бо не існує такого числа a, щоб $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$. Похилі асимптоти шукаємо у вигляді $y=kx+b$. Маємо

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{xe^{-\frac{x^2}{2}}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{e^{\frac{x^2}{2}}}=0;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\pm\infty}xe^{-\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{e^{\frac{x^2}{2}}}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{e\frac{x^2}{2}}=0\,.$$

Отже, $y=0$ – горизонтальна асимптота.

4. Функція є непарною, бо область визначення симетрична відносно початку координат і виконується умова $f(-x)=-xe^{-\frac{(-x)^2}{2}}=-xe^{-\frac{x^2}{2}}=-f(x)$, тому і графік симетричний

відносно початку координат.

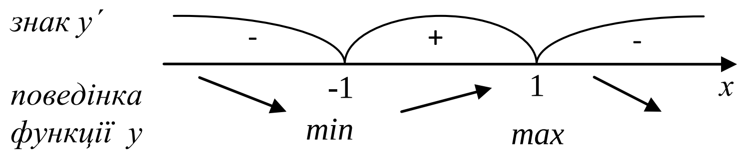
Функція неперіодична, бо не існує такого числа $T>0$, щоб $f(x+T)=f(x)\ \forall x\in D(f)$.

5. Досліджуємо функцію на екстремуми та знаходимо інтервали монотонності. Знайдемо похідну

$$f'(x)=\left(xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)'=e^{-\frac{x^2}{2}}+xe^{-\frac{x^2}{2}}(-x)=e^{-\frac{x^2}{2}}(1-x^2);$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 1-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1,\\ x=1.\end{array}\right.$$

Отримали критичні точки, які розбивають числову вісь на три інтервали. Дослідження знаку першої похідної на цих інтервалах та висновки відносно поведінки функції на них наведено на схемі



На проміжках $(-\infty;-1)$ і $(1;+\infty)$ функція спадає; а на проміжку $(-1;\,1)$ вона зростає. При цьому

$$y_{\min}=y(-1)=-e^{-\frac{1}{2}}\approx-0,6\,,\ y_{\max}=y(1)=e^{-\frac{1}{2}}\approx 0,6\,.$$

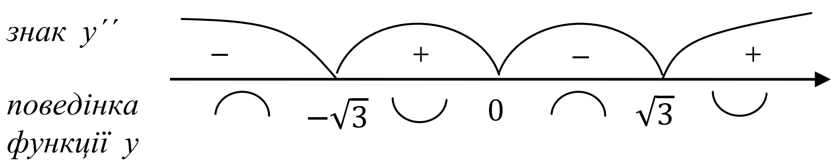
6. Досліджуємо функцію на опуклість, угнутість та знаходимо точки перегину. Для цього обчислимо другу похідну і знайдемо критичні точки

$$f''(x)=\left(e^{-\frac{x^2}{2}}(1-x^2)\right)'=-xe^{-\frac{x^2}{2}}\cdot(1-x^2)+e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\left(-2x\right)=$$

$$=xe^{-\frac{x^2}{2}}(-1+x^2-2)=x(x^2-3)e^{-\frac{x^2}{2}};$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow x(x^2-3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=\pm\sqrt{3}.\end{array}\right.$$

Отримали критичні точки другого роду, які розбивають числову вісь на чотири інтервали



Функція опукла на проміжках $(-\infty;-\sqrt{3})$ і $(0;\sqrt{3})$, бо $f''(x)<0$. Функція угнута на проміжках $(-\sqrt{3};0)$ і $(\sqrt{3};+\infty)$, бо $f''(x)>0$.

Оскільки y'' змінює знак в точках $x_1=-\sqrt{3}$, $x_2=0$, $x_3=\sqrt{3}$, то для цих значень абсцис маємо точки перегину.

Обчислимо значення функції в цих точках: $y(\pm\sqrt{3})=\pm\sqrt{3}e^{\frac{3}{2}}\approx\pm 0,4;$ $y(0)=0.$ Отже, точки перегину $P_1(-\sqrt{3};-0,4)$, $P_2(\sqrt{3};0,4)$, $P_3(0;0)$.

На основі дослідження поступово будуємо графік функції $f(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}$, який наведено на рис. 5. ◄

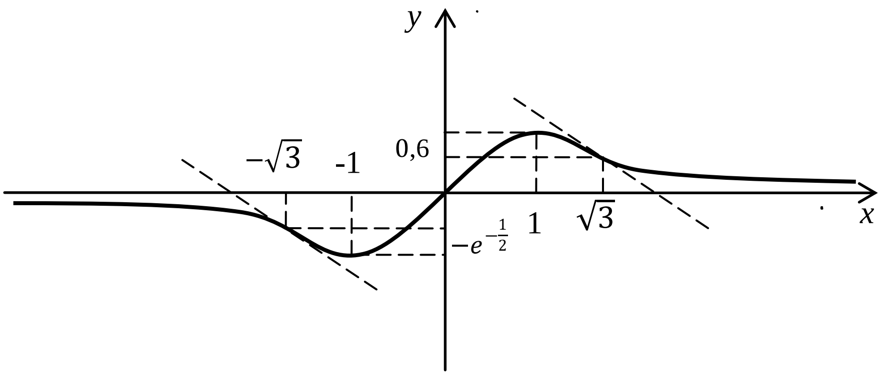


Рисунок 5

42. Дослідити та побудувати графік функції, заданої параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases} \quad a > 0.$$

► 1. Область визначення. Параметр $t \in (-\infty, +\infty)$, але, оскільки функції $\cos^3 t$, $\sin^3 t$ періодичні з періодом 2π, будемо вважати, що $t \in [0;\ 2\pi]$. Змінна $x \in [-a;\ a]$.

Область значень функції $D(y) = [-a, a]$.

Знаходимо нулі функцій $x = x(t)$, $y = y(t)$ на проміжку $t \in [0;\ 2\pi]$ та області знакосталості цих функцій

$$x = a\cos^3 t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \pi/2; 3\pi/2.$$

Функція $x(t)$ знакододатна на проміжках

$$\left[0; \pi/2\right] \text{ та } \left[3\pi/2; 2\pi\right].$$

$$y = a\sin^3 t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 0;\ \pi;\ 2\pi .$$

Функція $y(t)$ знакододатна на проміжку $[0;\ \pi]$.

2. Як елементарна задана функція неперервна. Точок розриву немає.

3. Крива не має ніяких асимптот, бо вона обмежена.

4. Симетрія кривої. З урахуванням $x(t) = x(-t)$, $y(-t) = y(t)$ маємо, що крива симетрична відносно кожної з координатних осей.

5. Знаходимо точки $t_k \in [0; 2\pi]$, в яких хоча б одна з похідних x_t', y_t' дорівнює нулю або розривна,

$$x_t' = -3a\cos^2 t \cdot \sin t; x_t' = -3a\cos^2 t \cdot \sin t = 0 \ \Rightarrow \ t = 0; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; 2\pi.$$

$$y_t' = 3a\sin^2 t \cdot \cos t; y_t' = 3a\sin^2 t \cdot \cos t = 0 \ \Rightarrow \ t = 0; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; 2\pi.$$

Маємо $\begin{cases} y_x' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y_t'}{x_t'} = \dfrac{3a\sin^2 t \cdot \cos t}{-3a\cos^2 t \cdot \sin t} = -tgt, \\ x = a\cos^3 t. \end{cases}$

Далі складаємо таблицю, враховуючи отримані точки та значення похідних, з якої видно, що задані параметричні рівняння визначають дві неперервні функції вигляду $y = f(x)$:

при $0 \le t \le \pi$ маємо $y(t) \ge 0$ (два перші рядки таблиці);

при $\pi \le t \le 2\pi$ маємо $y(t) \le 0$ (два останніх рядки таблиці).

Область зміни t	Відповідна область зміни x	Відповідна область зміни y	Знак $\frac{dy}{dx}$	Характер зміни y як функції від x $\left(y = f(x)\right)$
$0 < t < \frac{\pi}{2}$	$a > x > o$	$0 < y < a$	$-$	спадає
$\frac{\pi}{2} < t < \pi$	$0 > x > -a$	$a > y > o$	$+$	зростає
$\pi < t < \frac{3\pi}{2}$	$-a < x < 0$	$0 > y > -a$	$-$	спадає
$\frac{3\pi}{2} < t < 2\pi$	$0 < x < a$	$-a < y < 0$	$+$	зростає

При $t = \frac{\pi}{2}$ $x = 0,$ $y = a$, отже , $y_{\max} = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = a$.

При $t = \frac{3\pi}{2}$ $x = 0,$ $y = -a,$ отже $y_{\min} = y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -a.$

7. Знаходимо другу похідну по змінній x

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d(y'_x)}{dx} = \dfrac{d(-tgx)}{d(a\cos^3 t)} = \dfrac{-\dfrac{1}{\cos^2 t}}{3a\cos^2\cdot(-\sin t)} = \dfrac{1}{3a\cos^4 t\cdot\sin t}, \\ x = a\cos^3 t. \end{cases}$$

З'ясовуємо, що $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ при $0 < t < \pi$ – крива угнута; $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ при $\pi < t < 2\pi$ – крива опукла.

На основі дослідження будуємо криву, яка називається *астроїдою.* ◄

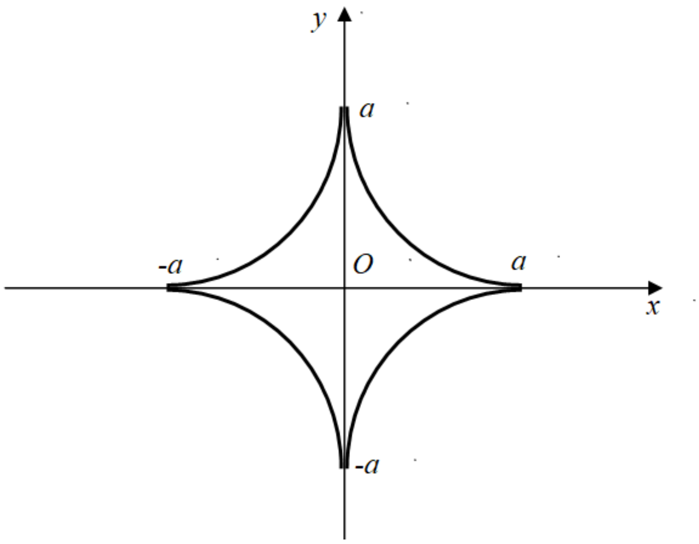


Рисунок 6

43. Дослідити та побудувати графік функції, заданої в полярних координатах рівнянням $\rho = a\sin 3\varphi$ (трипелюсткова троянда).

► 1. Періодичність (знаходження такого значення $T > 0$, що $f(\varphi + T) = f(\varphi)$).

$$\sin[3(\varphi + T)] = \sin\varphi, \quad 3(\varphi + T) = 3\varphi + 2\pi,$$

$$3(\varphi + T) = 3\varphi + 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad 3T = 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad T = \frac{2\pi}{3}.$$

2. Область визначення (ті значення φ, при яких $\rho \geq 0$).

$$\sin 3\varphi \geq 0, \quad 0 \leq 3\varphi \leq \pi \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}.$$

Далі, з урахуванням періоду, маємо $\frac{2\pi}{3} \leq \varphi \leq \pi$, $\frac{4\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{3}$.

3. Промені симетрії (такі півпрямі, що виходять з полюса, відносно яких графік функції симетричний).

Враховуючи, що для функції $\rho = \sin\varphi$ промінь симетрії $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, то для функції $\rho = a\sin 3\varphi$ маємо $3\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, звідки $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$ – промінь симетрії. Враховуючи періодичність, отримаємо ще два промені:

$$\varphi = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6};\ \varphi = \frac{5\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{9\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}.$$

4. Знаходимо точки екстремумів.

$$\rho' = 3a\cos 3\varphi;\quad \rho' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos 3\varphi = 0, \quad \varphi = \pi/6.$$

$\rho'' = -9a\sin 3\varphi < 0$ на $(0;\ \pi/3)$, отже, $\rho_{\max} = \rho(\pi/6) = a\sin\pi/2 = a.$

$\rho' > 0$ при $\varphi \in [0;\ \pi/6)$ – функція зростає;

$\rho' < 0$ при $\varphi \in (\pi/6, \pi/3]$ – функція спадає.

5. Складаємо таблицю значень функції на проміжку $[0;\ \pi/6]$.

φ	0	$\pi/18$	$\pi/12$	$\pi/6$
3φ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/2$
$\sin 3\varphi$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	1
ρ	0	$a/2$	$\sqrt{2}a/2$	a

На основі дослідження будуємо графік *трипелюсткової троянди*. ◄

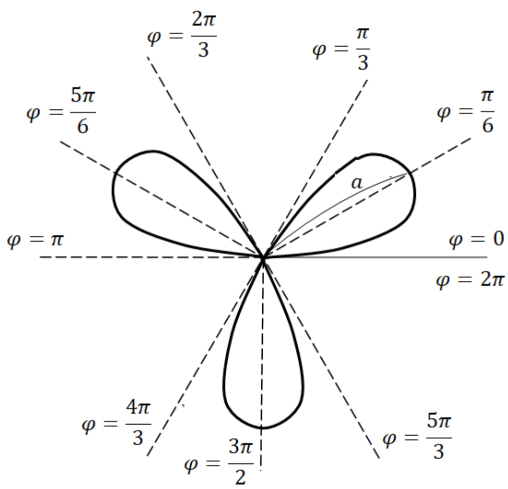


Рисунок 7

2.5 Знаходження найбільшого та найменшого значення функції на відрізку

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то вона досягає на цьому відрізку своїх найбільшого та найменшого значень. Для знаходження цих значень треба:

а) знайти всі критичні точки функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$;

б) обчислити значення функції $f(x)$ у знайдених критичних точках;

в) обчислити значення функції $f(x)$ у точках $x=a$, $x=b$;

г) серед обчислених значень вибрати найбільше та найменше.

Приклади розв'язання задач

44. Знайти найбільше M та найменше m значення функції $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ на відрізку $[-4; 4]$.

► Знаходимо критичні точки даної функції, що лежать всередині відрізка $[-4; 4]$ і обчислюємо значення функції в цих точках: $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$; $3x^2 - 6x - 9 = 0$; $x_1 = -1, x_2 = 3$ – критичні точки функції, що належать заданому відрізку;

$$f(-1) = 40, \quad f(3) = 8.$$

Обчислюємо значення даної функції в точках $x = -4, \ x = 4$ – межах відрізка $[-4; 4]$:

$$f(-4) = 41, \quad f(4) = 15.$$

З отриманих чотирьох значень вибираємо найбільше та найменше. Отже, $M = f(-1) = 40, \quad m = f(-4) = -41$. ◄

45. Знайти такий циліндр, який мав би найбільший об'єм при заданій повній поверхні *S*.

► Нехай радіус основи циліндра $R = x$, а висота $H = y$. Тоді $S = 2S_{осн} + S_{бічн} = 2\pi x^2 + 2\pi xy$. Звідси, $y = \dfrac{S - 2\pi x^2}{2\pi x}$.

Об'єм циліндра буде

$$V = V(x) = S_{осн} \cdot H = \pi x^2 \cdot \frac{S - 2\pi x^2}{2\pi x} = \frac{S}{2}x - \pi x^3.$$

Задача зводиться до дослідження функції $V(x)$ на максимум при $x > 0$. Знайдемо похідну

$$V'(x) = \frac{S}{2} - 3\pi x^2, \ \frac{S}{2} - 3\pi x^2 = 0, \ x = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}.$$

Це критична точка. Дослідимо її на екстремум

$$V''(x) = -6\pi x,\ V''\left(\sqrt{\frac{S}{6\pi}}\right) = -6\pi\sqrt{\frac{S}{6\pi}} = -\sqrt{6\pi S} < 0.$$

Значить, в точці $x = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ функція має максимум, тобто об'єм має найбільше значення. Висота циліндра при цьому

$$H = y = \frac{S - 2\pi\frac{S}{6\pi}}{2\pi\sqrt{\frac{S}{6\pi}}} = 2\sqrt{\frac{S}{6\pi}} = 2x = 2R.$$

Отже, висота H циліндра дорівнює $2R$ – діаметру основи циліндра. За цієї умови циліндр має найбільший об'єм. ◄

Завдання для самостійного розв'язання

У задачах 244 – 265 провести повне дослідження функцій та побудувати їх графіки.

244. $y = \frac{x}{1+x^2}$. **245.** $y = \frac{1}{1-x^2}$.

246. $y = \frac{x}{x^2-1}$.. **247.** $y = \frac{x^2}{x^2-1}$..

248. $y = \frac{(x^2-5)^3}{125}$.. **249**. $y = \frac{x^3}{2(x-1)^2}$.

250. $y = \frac{x^3}{x^2-3}$. **251.** $y = \frac{x}{e^x}$.

252. $y = e^{2x-x^2}$. **253.** $y = xe^{\frac{1}{x}}$.

254. $y=(2x-1)e^{\frac{2}{x}}$.

255. $y=\dfrac{1}{x\ln x}$.

256. $y=x-\ln(x+1)$.

257. $y=\ln(x^2+1)$.

258. $y=\sqrt[3]{x^2-2x}$.

259. $y=\sqrt[3]{1-x^3}$.

260. $y=\dfrac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}$.

261. $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

262. $y^2=x^3+1$.

263. $y^2=x(x-1)^2$.

264. $y^2=\dfrac{x^3-2}{3x}$.

У задачах 265 – 268 дослідити функції, задані параметрично, та побудувати їх графіки.

265. $x=t^2-2t,\quad y=t^2+2t$.

266. $x=t+e^{-t},\quad y=2t+e^{-2t}$.

267. $x=t^3-3\pi,\quad y=t^3-6arctgt$.

268. $x=\dfrac{3t}{1+t^3},\quad y=\dfrac{3t^2}{1+t^3}$.

У задачах 269 – 273 дослідити лінії, рівняння яких задані у полярних координатах, та побудувати їх.

269. $\rho=a\cos 3\varphi$ (трипелюсткова троянда).

270. а) $\rho=3\sin 2\varphi$ (чотирипелюсткова троянда);

б) $\rho=3\cos 2\varphi$ (чотирипелюсткова троянда).

271. $\rho=a\sqrt{\cos 2\varphi}$ (лемніската Бернуллі).

272. $\rho = a(1+\cos\varphi)$ (кардіоїда).

273. $\rho = \sqrt{\pi / \varphi}$ (жезл).

У задачах 274 – 275 дослідити та побудувати лінії, попередньо звівши їх рівняння до полярних координат.

274. $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$.

275. $(x^2+y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$.

У задачах 276 – 281 знайти найбільше M та найменше m значення функцій на вказаних відрізках.

276. $y = x^4 - 2x^2 + 5$, $[-2,2]$. **277.** $y = \sqrt{100 - x^2}$, $[-6,8]$.

278. $y = \dfrac{x-1}{x+1}$, $[0,4]$. **279.** $y = \dfrac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$, $[0,1]$.

280. $y = \sin 2x - x$, $[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$. **281.** $y = arctg\dfrac{1-x}{1+x}$, $[0,1]$.

282. Число 8 розбити на два таких доданки, щоб сума їх кубів була найменшою.

283. Яке додатне число, складене з оберненим йому числом, дає найменшу суму?

284. Число 36 розкласти на два таких множники, щоб сума їх квадратів була найменшою.

285. Об’єм правильної трикутної призми дорівнює V. Якою повинна бути сторона основи, щоб повна поверхня призми була найменшою?

286. Периметр осьового перерізу циліндра дорівнює $6a$. Знайти найбільший об’єм такого циліндра.

287. Циліндр вписаний в конус з висотою h і радіусом основи r. Знайти найбільший об'єм вписаного циліндра.

288.Знайти найменший об'єм конуса, описаного навколо кулі радіуса r.

289. Знайти найбільший об'єм конуса при заданій довжині l його твірної.

290. Визначити найбільшу площу прямокутника, вписаного в круг радіуса r.

291. На параболі $y = x^2$ знайти точку N, яка найменш віддалена від прямої $y = 2x - 4$.

292. У півколі радіуса R вписано прямокутник з найбільшою площею. Визначити його сторони.

293. Відрізок довжиною a розділили на дві частини так, що сума площ квадратів, побудованих на цих частинах, була найменшою.

Відповіді до завдань для самостійного розв'язування

1. $6x - 5.$ **2.** $-2 + \frac{8}{3}x^3.$ **3.** $-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^4}.$ **4.** $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}.$

5. $\frac{1}{x}(-\frac{3}{\sqrt[4]{x^3}} + \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}).$ **6.** $4x^3 - 3x^2 - 8x + 9.$

7. $6x^5 - 15x^4 + 12x^3 - 9x^2 + 2x + 3.$ **8.** $\frac{x+1}{2x\sqrt{x}}.$

9. $2x(3x^4+8x^2-41)$. **10.** $\frac{2}{(x+1)^2}$. **11.** $\frac{1-4x^2-x^4}{(x^3-x)^2}$.

12. $\frac{2}{\sqrt{x}(2-\sqrt{x})^2}$. **13.** $\frac{-3(x^2+1)}{(x^3+3x-1)^2}$. **14.** $\frac{bc-ad}{(c+dx)^2}$.

15. $f(1)=1,\ f'(1)=2,\ f(4)=8,\ f'(4)=2,5$.

16. $f(-1)=-5,\ f'(-1)=-8,\ f'(2)=\frac{19}{16}$.

17. $f'(0)=11,\ f'(1)=2,\ f'(2)=-1$.

18. $f'(0)=-0,25;\ f'(-1)=0,5$.

19. $24x(1+4x^2)^2$. **20.** $-20(1-x)^{19}$.

21. $6(x^3-x)^5(3x^2-1)$. **22.** $\frac{5(1+x^2)^4(x^2+2x-1)}{(1+x)^6}$.

23. $\frac{-4(1-2\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}$. **24.** $-\frac{2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^4}}$. **25.** $\frac{x(x^2+2a^2)}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$.

26. $3\cos 3x$. **27.** $9\cos(3x+5)$. **28.** $-4\sin\frac{2x}{3}$.

29. $-\sin 2x$. **30.** $-12\cos^2 4x\cdot\sin 4x$. **31.** $\frac{3}{2}\sin 2x(2-\sin x)$.

32. $-3x^2\sin x^3$. **33.** $2\sin x(x\sin x\cdot\cos x^2+\cos x\cdot\sin x^2)$.

34. $\frac{x\cos\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$. **35.** $4(1+\sin^2 x)^3\cdot\sin 2x$.

36. $\frac{1}{2}\sin x$. **37.** $\arcsin x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. **38.** $\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

39. $-\dfrac{x+\arccos x\cdot\sqrt{1-x^2}}{x^2\cdot\sqrt{1-x^2}}$. **40.** $\dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$.

41. $\dfrac{2x}{1+x^4}$. **42.** $-\dfrac{2}{\sqrt{x^4-4x^2}}$. **43.** $-\dfrac{2arctg\,\frac{1}{x}}{x^2+1}$.

44. $2x\log_3 x+\dfrac{x}{\ln 3}$. **45.** $\dfrac{2\ln x}{x}$. **46.** $-\dfrac{1}{x\ln^2 x}$.

47. $\dfrac{2x-4}{x^2-4x}$. **48.** $\dfrac{2x}{(x^2-1)\ln 3}$. **49.** $\dfrac{2}{\sin 2x}$.

50. $4\ln^3\sin x\cdot ctgx$. **51.** $10^x(1+x\ln 10)$. **52.** $e^x(1+x)$.

53. $e^x(\cos x-\sin x)$. **54.** $3x^2-3^x\ln 3$. **55.** $2\cdot 10^{2x-3}\ln 10$.

56. $a^{\sin^3 x}\ln a\cdot 3\sin^2 x\cdot\cos x$.

57. $-12\cdot 10^{1-\sin^4 3x}\ln 10\cdot\sin^3 3x\cdot\cos 3x$.

58. $3sh^2x\cdot chx$. **59.** thx. **60.** $-\dfrac{2x}{ch^2(1-x^2)}$.

61. $2sh2x$. **62.** $\dfrac{shx}{2\sqrt{chx}}$. **63.** $e^{ch^2x}sh2x$.

64. $x\cdot chx$. **65.** $x^{x^2+1}(2\ln x+1)$.

66. $(\sin x)^{\cos x}\left(\dfrac{\cos^2 x}{\sin x}-\sin x\cdot\ln\sin x\right)$.

67. $(\ln x)^x\left(\dfrac{1}{\ln x}+\ln\ln x\right)$. **68.** $x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$.

69. $(x^2+1)^{\sin x}\left(\dfrac{2x\sin x}{x^2+1}+\cos x\cdot\ln(x^2+1)\right)$.

70. $x^2 e^{x^2} \sin 2x(3+2x^2+2xctg2x).$

71. $-\dfrac{2(x-2)(x^2+11x+1)}{3(x-5)^4 \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2}}.$

72. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\,((\arcsin x)^2-1)} \cdot \sqrt{\dfrac{1-\arcsin x}{1+\arcsin x}}.$

73. $-\dfrac{b^2 x}{a^2 y}.$ **74.** $-\sqrt{\dfrac{y}{x}}.$ **75.** $\dfrac{ay-x^2}{y^2-ax}.$ **76.** $\dfrac{2a}{3(1-y^2)}.$

77. $\dfrac{y}{y-x}.$ **78.** $-\dfrac{y}{x}.$ **79.** $2^{x-y}\dfrac{2^y-1}{1-2^x}.$ **80.** $-\dfrac{\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}.$

81. $\dfrac{x+y}{x-y}.$ **82.** $\dfrac{e^y}{1-xe^y}.$ **83.** $\dfrac{3}{2}t^2.$ **84.** $\dfrac{3t^2-1}{2t}.$ **85.** $-1.$

86. $-\dfrac{b}{a}ctg\varphi.$ 87. $-\dfrac{b}{a}tg\varphi.$ **88.** $ctg\dfrac{\varphi}{2}.$ **89.** $\dfrac{t}{2}.$ **90.** $-2e^{3t}.$

91. $\dfrac{2}{3\cdot\sqrt[6]{t}}.$ **92.** $\dfrac{1-tgx}{1+tgx}.$ **93.** $tgt.$ **94.** $3(1+x-x^2)^2(1-2x)dx.$

95. $\dfrac{2tgx}{\cos^2 x}dx.$ **96.** $-2^{-\frac{1}{\cos x}} \cdot \ln 2 \cdot \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}dx.$

97. $\dfrac{(x^2-1)\sin x + 2x\cos x}{(1-x^2)^2}dx.$ **98.** $\left(3^{-\frac{1}{x}} \cdot \ln 3 \cdot \dfrac{2}{x^2} + 9x^2 - \dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)dx.$

99. а) 0,05; **б)** 0,765; **в)** 0,2. **100. а)** 0,795; **б)** 0,77.

101.а) 2,25; 4,13; **б)** 2,17; 4,13; **в)** 2,03.

102.а) 0,515; **б)** 0,485; **в)** 0,965. **103.а)** 2,03; **б)** 1,1; **в)** 0,9.

104. 2. **105.** $6(5x^4+6x^2+1).$ **106.** $-2\cos 2x.$

107. $\dfrac{2-6x^4}{(1+x^4)^2}$. **108.** $2e^{x^2}(1+2x^2)$. **109.** $\dfrac{6x(2x^3-1)}{(x^3+1)^3}$.

110. $\dfrac{2x}{1+x^2}+2arctgx$. **111.** $-\dfrac{a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$.

112. $-\dfrac{\arcsin x+x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$. **113.** $-\dfrac{1}{2}$. **114.** 360. **115.** $4e$.

116. $y'(0)=3$, $y''(0)=12$, $y'''(0)=9$. **117.** -1.

118. 6. **119.** $a^n e^{ax}$. **120.** $(-1)^n e^{-x}$. **121.** $e^x(x+n)$.

122. $\dfrac{(-1)^n a^n n!}{(ax+b)^{n+1}}$. **123.** $\dfrac{(-1)^{n-1}a^n(n-1)!}{(ax+b)^n}$. **124.** $\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n\ln a}$.

125. $-\dfrac{p^2}{y^3}$. **126.** $-\dfrac{b^4}{a^2y^3}$. **127.** $-\dfrac{3r^2x}{y^5}$.

128. $-\dfrac{2(3y^4+8y^2+5)}{y^8}$. **129.** $\dfrac{(3-s)e^{2s}}{(2-s)^3}$.

130. $-\dfrac{2a^3xy}{(y^2-ax)^3}$. **131.** $-\dfrac{y((x-1)^2+(y-1)^2)}{x^2(y-1)^3}$.

132. $9t^3$. **133.** $-\dfrac{b}{a^2\sin^3 t}$. **134.** $-\dfrac{3b\cos t}{a^3\sin^5 t}$.

135. $-\dfrac{1}{4a\sin^4\dfrac{\varphi}{2}}$. **136.** $-6e^{3t}(t^2+3t+1)$.

137. $4t^2$. **138.** $\dfrac{1-5\sin^2 t}{9a^2\cos^7 t\sin^3 t}$. **139.** $-\dfrac{2}{9x\cdot\sqrt[3]{x}}dx^2$.

140. $m(m-1)(m-2)x^{m-3}dx^3$. **141.** $4(x+1)(5x^2-2x-1)dx^2$.

142. $2\cdot 4^{-x^2}\cdot \ln 4\cdot(2x^2\ln 4-1)$.

143. $dy=\ln x dx,\ d^2y=\frac{1}{x}dx^2,\ d^3y=-\frac{1}{x^2}dx^3$.

144. $-e^{-x}(x^2-6x+6)dx^3$. **145.** $\frac{384}{(2-x)^5}dx^4$.

146. $\frac{2}{3\sqrt[6]{a}}$. **147.** 0. **148.** 1. **149.** $\frac{\alpha}{\beta}$. **150.** $\frac{1}{3}$.

151. $\frac{m}{n}a^{m-n}$. **152 .** 2. **153.** $\frac{3}{5}$. **154.** $\frac{2}{3}$. **155.** $\frac{1}{2}$.

156. $\frac{2}{3}$. **157.** $\ln\frac{a}{b}$. **158.** 5. **159.** $+\infty$. **160.** $\frac{1}{2}$.

161. 0. **162.** $-\infty$. **163.** $\cos 3$. **164.** 0. **165.** 1.

166. 1. **167.** 0. **168.** a. **169.** ∞. **170.** 0. **171**. 2.

172. -1. **173.** 0. **174.** $\frac{1}{2}$. **175.** 0. **176.** -1.

177. $\frac{2}{3}$. **178.** e^{-6}. **179.** e^2. **180.** $e^{\frac{2}{\pi}}$. **181.** 1.

182. $\frac{1}{\sqrt[6]{e}}$. **183.** $\frac{1}{e}$. **184.** 1. **185.** 1. **186.** e. **187.** 1.

188. 8. **189.** 1. **190. а)** 0 ; **б)** 1.

191. 1) 0; 2) 6; 3) -4; 4) $k=2,\ k=4$.

192. $(1;1),\ (-1;-1)$.

193. 1) $(0;0)$, 2) $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$, $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$.

194. 1) $(2,4)$, 2) $\left(-\frac{3}{2};\frac{9}{4}\right)$; 3) $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{16}\right)$, $(-1;1)$.

195. $(0;0)$, $(1;1)$, $(2;0)$. **196.** $(-2;3)$, $(0;-1)$. **197.** $(2,4)$.

198. $12x-y-16=0$; $x+12y-98=0$; $s_t=\frac{2}{3}$; $s_n=96$.

199. $4x+y+4=0$; $2x-8y-15=0$; $s_t=\frac{1}{2}$; $s_n=8$.

200. $7x+y-3=0$; $x-7y+71=0$.

201. $y-5=0$; $x+2=0$.

202. $x-4y+7=0$; $4x+y-18=0$.

203. $2x-y=0$; $x+2y=0$.

204. $x-y-1=0$; $x+y-1=0$.

205. $7x-10y+6=0$; $10x+7y-34=0$.

206. $y=0$; $(\pi+4)x+(\pi-4)y-\pi^2\frac{\sqrt{2}}{4}=0$.

207. $5x+6y-13=0$; $6x-5y+21=0$.

208. $x+y-2=0$.

211. $\alpha_1=arctg\,\frac{1}{7}$; $\alpha_2=arctg\,\frac{1}{13}$.

212. $\alpha_1=\frac{\pi}{2}$; $\alpha_2=arctg\,\frac{3}{4}$.

213. $arctg3$. **214**. $45°$. **215.** $arctg\,\frac{8}{15}$.

216. $arctg3$. **217.** $90°$. **218.** 2 м/с; 2 м/с; 6 м/с.

219. v=5; 4,997; 4,7 м/с; a=0; – 0,006; – 0,06 м/c^2.

220. $a=-\dfrac{\pi^2}{18}см/с^2.$

221. а) $t_1=0; t_2=8;$ **б)** $t_1=0;\ t_2=4;\ t_3=8;$

в) $t\in(0,4)\cup(8,+\infty);$ **г)** $t_1=\dfrac{4}{3}(3+\sqrt{3}),\ t_2=\dfrac{4}{3}(3-\sqrt{3})$.

222. 1,76 м/с. **223.** $x_t'=\sqrt[3]{a}.$

228. Ні, бо $f'(2)$ не існує.

229. Ні, бо $x=\dfrac{\pi}{2}$ – точка розриву функції.

230. Ні, бо $x=0$ – точка розриву функції.

231. $c=0.$ **232.** $c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}.$ **233.** (2,4).

234. $c_1=\dfrac{1}{2};\ c_2=\dfrac{5}{3}.$ **235.а)** $c=\dfrac{14}{9};$ **б)** $c=\dfrac{\pi}{2}.$

236. $P(x)=(x-4)^4+11(x-4)^3+37(x-4)^2+21(x-4)-56.$

237. $P(x)=(x+1)^3-5(x+1)+8.$

238. $P(-1)=143,\ P'(0)=-60,\ P''(0)=26.$

239. а) $1-x+\dfrac{x^2}{2!}-\dfrac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n);$

б) $1+2x+x^2-\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{5}{6}x^4-\dfrac{1}{15}x^5+o(x^5);$

в) $1-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{8}x^2+\dfrac{7}{16}x^3+o(x^3);$

г) $\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{(k-1)!} + o(x^n).$

240. а) $\sum_{k=1}^{n} (-1)(x+1)^k + o((x+1)^n);$

б) $2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + o((x-4)^2);$

в) $(x-1) + \frac{5}{2}(x-1)^2 + \frac{11}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{4}(x-1)^4 + o((x-1)^4);$

г) $1 - \frac{\pi^2}{8}(x-1)^2 + \frac{\pi^4}{384}(x-1)^4 + o((x-1)^4).$

241. а) $x + o(x^3);$ **б)** $x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^4);$

в) $(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2).$

242.а) 0,842; **б)** 1,648; **в)** 0,049; **г)** 2,012.

243. а) $\frac{1}{2}$; **б)** $\frac{1}{2}$; **в)** 1; **г)** $-\frac{1}{12}$; **д)** -2; **е)** $\frac{1}{2}$.

244. $y_{\max} = y(1) = \frac{1}{2}$, $y_{\min} = y(-1) = -\frac{1}{2}$; точки перегину $P_1(-\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{3}}{4})$, $P_2(\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{4})$, $P_3(0;0)$; асимптота $y = 0$.

245. $y_{\min} = y(0) = 1$; точок перегину немає; асимптоти $x = \pm 1$, $y = 0$.

246. Екстремумів немає; точка перегину $P(0;0)$; асимптоти $x = \pm 1$, $y = 0$.

247. $y_{\max}=y(0)=0;$ точок перегину немає; асимптоти $x=\pm 1,$ $y=1.$

248. $y_{\min}=y(0)=-1;$ точки перегину $(\pm 1;-\frac{64}{125}),$ $(\pm\sqrt{5};0).$

249. $y_{\min}=y(3)=\frac{27}{e};$ точка перегину $(0;0);$ $x=1,$ $y=\frac{1}{2}x+1.$

250. $y_{\max}=y(-3)=-4{,}5,$ $y_{\min}=y(3)=4{,}5;$ точка перегину $(0;0);$ асимптоти $x=\pm\sqrt{3},$ $y=x.$

251. $y_{\max}=y(1)=\frac{1}{e};$ точка перегину $(2;\frac{2}{e^2});$ асимптота $y=0.$

252. $y_{\max}=y(1)=e;$ точки перегину $(\frac{2\pm\sqrt{2}}{2};\sqrt{e});$ асимптота $y=0.$

253. $y_{\min}=y(1)=e;$ точок перегину немає; асимптоти $y=x+1,$ $x=0$.

254. Точка перегину $(1;e^2);$ асимптоти $y=2x+3,$ $x=0$.

255. $y_{\max}=y(\frac{1}{e})=-e;$ асимптоти $x=1,$ $x=0$, $y=0$ (права асимптота).

256. $y_{\min}=y(0)=0;$ точок перегину немає; асимптота $x=-1.$

257. $y_{\min}=y(0)=0;$ точки перегину $(\pm 1;\ln 2).$

258. $y_{\min}=y(1)=-1;$ точки перегину $(0;0),$ $(2;0).$

259. Точки перегину $(0;1),(1;0);$ асимптота $y=-x.$

260. Точки перегину $(0;0)$, $(\pm 1;\pm\sqrt[3]{2})$; асимптота $y = x$.

261. Точка перегину $(0,0)$; асимптоти $y = -1$ (ліва), $y = 1$ (права).

262. Визначена при $x \geq -1$, двозначна; екстремумів немає; графік симетричний відносно осі *Ox;* точки перегину $(0;1)$, $(0;-1)$; асимптот немає.

263. Визначена при $x \geq 0$, двозначна; графік симетричний відносно осі *Ox;* $|y|_{\max} = |y(\frac{1}{3})| = \frac{2\sqrt{\pi}}{9}$; точок перегину немає; асимптот немає.

264. Визначена при $x < 0$ та при $x \geq \pm\sqrt[3]{2}$; двозначна; графік симетричний відносно осі *Ox;* $|y|_{\max} = |y(-1)| = 1$; точок перегину немає; асимптоти $x=0$, $y = \pm\frac{x\sqrt{3}}{3}$.

265. $x_{\min} = -1$ при $t = 1$ $(y(1) = 3)$, $y_{\min} = -1$ при $t = -1$ $(x(-1) = 3)$; парабола з вершиною у початку координат, вісь якої – пряма $y = x (x > 0, y > 0)$.

266. $x_{\min} = y_{\min} = 1$ при $t = 0$ (точка звороту), $y = 2x -$ асимптота при $t \to \infty$.

267. $(-1-3\pi;-1+\frac{3\pi}{2})$ – максимум, $(1-3\pi;1-\frac{3\pi}{2})$ – мінімум; точка перегину $(-3\pi;0)$; асимптоти $y = x$, $y = x + 6\pi$.

268. Асимптота $x+y+1=0$; $(0;0)$ – точка самоперетину, дотичними в цій точці є осі координат; точок перегину немає; у першому квадранті – замкнена петля.

269. Замкнена трипелюсткова троянда; $D(\rho)=\left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right]\bigcup\left[\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{6}\right]\bigcup\left[\frac{7\pi}{6};\frac{3\pi}{2}\right]$; екстремуми при $\varphi=0$, $\varphi=\frac{2\pi}{3}$, $\varphi=\frac{4\pi}{3}$ (достатньо дослідити лінію при $-\frac{\pi}{6}\le\varphi<\frac{\pi}{6}$).

270. а) Екстремуми при $\varphi=\frac{\pi}{4}, \varphi=\frac{3\pi}{4}, \varphi=\frac{5\pi}{4}, \varphi=\frac{7\pi}{4}$

(достатньо дослідити лінію при $0\le\varphi<\frac{\pi}{2}$);

б) графік отримується з графіка $\rho=3\sin 2\varphi$ за допомогою повороту на кут $-\frac{\pi}{4}$.

271. $D(\rho)=\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]\bigcup\left[\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right]$; екстремуми при $\varphi=0$, $\varphi=\pi$

(достатньо дослідити лінію при $0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$).

272. Кардіоїда, полюс – точка звороту; $\rho_{\max}=\rho(0)=2a$, $\rho_{\min}=\rho(\pi)=0$.

273. $D(\rho)=(0;+\infty)$; лінія спірально завивається навколо полюса, асимптотично до нього наближаючись; точка перегину $(\sqrt{2\pi};\frac{1}{2})$; горизонтальна асимптота – полярна вісь

($\varphi = 0$).

274. Лемніската Бернуллі (див. № 271).

275. Чотирипелюсткова троянда (див. №270 а).

276. $M = 13,\ m = 4.$ **277.** $M = 10,\ m = 6.$

278. $M = \frac{3}{5},\ m = -1.$ **279.** $M = 1,\ m = \frac{3}{5}.$

280. $M = \frac{\pi}{2},\ m = -\frac{\pi}{2}.$ **281.** $M = \frac{\pi}{4},\ m = 0.$

282. 4та 4. **283.** 1. **284.** 6 та 6. **285.** $\sqrt[3]{4V}$.

286. πa^3. **287.** $\frac{4}{27}\pi r^2 h$. **288.** $\frac{8}{3}\pi r^3$.

289. $\frac{2}{9\sqrt{3}}\pi e^3$. **290.** $2r^2$. **291.** $N(1;1)$.

292. $x = R\sqrt{2},\ y = \frac{R}{\sqrt{2}}.$ **293.** Розділити відрізок навпіл.

5 Комплексні числа. Многочлени, раціональні функції

§ 1. Комплексні числа

1.1 Поняття комплексного числа. Операції з комплексними числами

У шкільній програмі з математики теорія чисел вивчається на прикладах множин натуральних, цілих, раціональних, ірраціональних чисел, тобто на множині дійсних чисел, зображення яких заповнюють всю числову вісь. Але на множині дійсних чисел неможливо добувати корені парного степеня із від'ємних чисел, наприклад $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt[4]{-16}$. І тому дійсних чисел виявляється замало, наприклад, для розв'язання квадратних рівнянь з від'ємним дискримінантом.

У зв'язку з цим постає необхідність доповнити множину дійсних чисел з допомогою комплексних чисел, для яких квадратний корінь із від'ємного числа має зміст.

Розв'язання багатьох задач математики, фізики зводиться до розв'язання алгебраїчних рівнянь, тобто рівнянь вигляду

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_n$ дійсні числа. Тому дослідження алгебраїчних рівнянь є однією із найважливіших задач математики. Розглянемо, наприклад, рівняння $x^2 + 1 = 0$. Очевидно, воно не має дійсних розв'язків. Для того, щоб це рівняння мало розв'язки, потрібно розширити множину дійсних чисел шляхом приєднання до неї кореня рівняння $x^2 = -1$. Позначимо цей корінь через i. Таким чином, за означенням,

$$i^2 = -1 \text{ та } i = \sqrt{-1}.$$

Символ i називається уявною одиницею. З його допомогою, а також для довільної пари дійсних чисел (x, y) складається вираз вигляду

$$z = x + iy, \tag{1}$$

$x, y \in \mathbb{R}$, а $i = \sqrt{-1}$. Отриманий вираз називається алгебраїчною формою запису комплексного числа. Отже, комплексними числами називаються числа вигляду (1), де $x, y \in \mathbb{R}$, а $i = \sqrt{-1}$. Число $x = \operatorname{Re} z$ називається дійсною частиною комплексного числа , а число $y = \operatorname{Im} z$ – його уявною частиною. Множину комплексних чисел позначають $\mathbb{C}$.

Комплексні числа вигляду $z = x + i \cdot 0 = x$ є дійсними числами, а тому множина комплексних чисел включає в себе множину дійсних чисел. Комплексні числа вигляду $z = 0 + iy = iy$ є уявними.

Два комплексні числа вигляду $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ називаються рівними, якщо рівними є їхні дійсні і уявні частини, тобто, якщо виконуються рівності: $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

В множині комплексних чисел роль "нуля" відіграє число $0 + i \cdot 0 = 0$, бо

$$(x + iy) + (0 + i \cdot 0) = (x + 0) + (y + 0)i = x + iy.$$

Сумою двох комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ називатимемо комплексне число

$$z = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i.$$

Таким чином, при додаванні двох комплексних чисел потрібно додати їх дійсні частини та уявні частини.

Властивості операції додавання комплексних чисел:

- асоціативність $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$,
- комутативність $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

Комплексне число $-z = -x - iy$ називається протилежним комплексному числу $z = x + iy$ і позначається $-z$. Сума комплексних чисел z і $-z$ дорівнює нулю, тобто $z + (-z) = 0$.

Різницею двох комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ називатимемо комплексне число

$$z = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i .$$

Таким чином, при відніманні двох комплексних чисел потрібно відняти їх дійсні частини та коефіцієнти при уявній одиниці.

Множення комплексних чисел виконується за правилом множення двочленів, тобто

$$(x_1 + iy_1)\cdot(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + (x_1y_2 + x_2y_1) + y_1y_2i^2 = \left|i^2 = -1\right| =$$

$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i \cdot$$

Властивості операції множення комплексних чисел:

- асоціативність: $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$,
- комутативність: $z_1z_2 = z_2z_1$.

Додавання і множення комплексних чисел зв'язані правилом, яке називається законом дистрибутивності множення відносно додавання,

$$(z_1 + z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3 .$$

Комплексне число $\overline{z} = x - iy$ називається *спряженим* до числа $z = x + iy$.

Очевидно, $z\cdot\overline{z} = (x + iy)\cdot(x - iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2$.

Часткою $z = \dfrac{z_1}{z_2}$ $(z_2 \neq 0 + 0i)$ двох комплексних чисел z_1 і z_2 є таке комплексне число z, що отримається шляхом множення чисельника і знаменника на спряжене до знаменника число.

Для кожного комплексного числа $z = x + iy$ $(z \neq 0)$ існує обернене до нього, що позначається z^{-1}, таке, що $zz^{-1} = 1$.

Приклади розв’язання задач

1. Знайти степені уявної одиниці**:** i^3; i^{20}; i^{50}; i^{61}.

► $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $i^{20} = (i^2)^{10} = 1$,

$i^{50} = (i^2)^{25} = -1$, $i^{61} = (i^2)^{30} \cdot i = i$. ◄

2. Для комплексних чисел $(3+4i)$ та $\left(-2-5i\right)$ знайти їхні суму, різницю та добуток.

► $(3+4i)+(-2-5i) = (3+(-2))+(4+(-5)) = 1-i$,

$(3+4i)-(-2-5i) = (3-(-2))+(4-(-5)) = 5+9i$,

$(3+4i)\cdot(-2-5i) = -6-15i-8i-20i^2 = 14-23i$. ◄

3. Розв'язати рівняння $(2x+2yi)+(3y-xi) = 5+i$.

► Виконаємо додавання комплексних чисел в лівій частині рівняння

$$(2x+3y)+(2y-x)i = 5+i.$$

Використаємо умову рівності двох комплексних чисел

$$2x+3y = 5, \qquad -x+2y = 1.$$

Отже, розв'язок даної системи $x = 1,\ y = 1.$ ◄

4. Знайти z^{-1} для $z = 3+i$.

► $z^{-1} = \dfrac{1}{3+i} = \dfrac{3-i}{(3+i)(3-i)} = \dfrac{3-i}{3^2+1^2} = \dfrac{3-i}{10} = \dfrac{3}{10} - \dfrac{1}{10}i.$ ◄

5. Обчислити $\dfrac{2+i}{2-i}$.

► $\dfrac{2+i}{2-i} = \dfrac{(2+i)^2}{(2-i)(2+i)} = \dfrac{4+4i+i^2}{2^2+1^2} = \dfrac{3+4i}{5} = \dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}i.$ ◄

1.2 Тригонометрична та показникова форми запису комплексного числа

Подібно до того, як дійсні числа можна зображати точками числової прямої, комплексні числа можна зображати точками площини, тобто кожному комплексному числу $z = x + iy$ відповідає пара дійсних чисел (x, y), що зображається точкою в прямокутній декартовій системі координат xOy. З іншої сторони, кожній точці M координатної площини xOy можна поставити у відповідність вектор $\overrightarrow{OM}$, який виходить з початку координат і закінчується у точці M. Таким чином, кожне комплексне число $z = x + iy$ можна геометрично інтерпретувати як вектор $\overrightarrow{OM}$ з координатами (x, y). (рис.1). Координати вектора $\overrightarrow{OM}$ при цьому будуть такими ж, як і координати точки M, а саме (x, y).

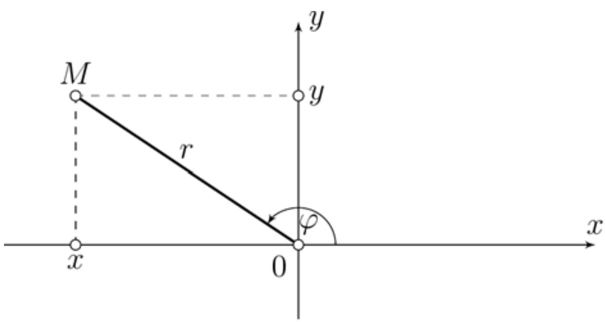


Рисунок 1: Комплексна площина

Одне і те ж саме комплексне число, відмінне від нуля, крім алгебраїчної форми запису, може бути представлене і у *тригонометричній* формі. Нехай комплексне число $z = x + iy \neq 0$ зображене вектором $\overrightarrow{OM}$ з координатами (x, y) (рис. 1). Позначимо довжину вектора $\overrightarrow{OM}$ буквою r: $r = |\overrightarrow{OM}|$, а кут, який він утворює з додатним напрямом осі Ox – через φ (φ вимірюється в радіанах).

Очевидно, що

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi.$$

Тоді

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) . \qquad (2)$$

Цей вираз називається тригонометричною формою запису комплексного числа. Кут φ будемо називатимемо *аргументом* комплексного числа, а $r = |\overrightarrow{OM}|$ – його *модулем*. Зауважимо, що аргумент визначається не однозначно. Для одного і того ж комплексного числа $z \neq 0$ є безліч значень аргумента і усі вони відрізняються між собою на $2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

З рис. 1 зрозуміло, що

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \cos\varphi = \frac{x}{r}, \qquad \sin\varphi = \frac{y}{r}, \qquad \varphi = \frac{y}{x}.$$

Відзначимо, що модулі двох будь-яких комплексних чисел z_1 і z_2 задовольняють співвідношення:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \qquad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|,$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} (z_2 \neq 0), \qquad |z^n| = |z|^n .$$

Множення і *ділення* комплексних чисел зручно виконувати, коли ці числа представлені в тригонометричній формі.

Нехай $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$ тоді

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right],$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right].$$

Має місце формула

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi ,$$

яка називається формулою *Ейлера*.

Якщо в цій формулі замінити φ на $-\varphi$, то отримаємо

$$e^{-i\phi} = \cos\varphi - i\sin\varphi.$$

З останніх двох рівностей будемо мати

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \qquad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2}.$$

Ці дві формули виражають тригонометричні функції через показникові та дозволяють алгебраїчним шляхом отримати деякі формули тригонометрії.

Враховуючи формулу Ейлера, комплексне число (2) можна записати у вигляді $z = re^{i\varphi}$, який називається *показниковою* формою запису комплексного числа.

Очевидно, що $\overline{z} = re^{-i\varphi} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$.

Приклади розв'язання задач

6. Знайти модуль комплексного числа $z = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$.

► Запишемо це число в алгебраїчній формі $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Тоді $r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$. ◄

7. Записати числа в тригонометричній формі:

а) $z = \sqrt{3} - i$; б) $z = -5$; в) $z = 2i$.

►а) Знаходимо $r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$, $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\varphi = -\frac{1}{2}$, тому можемо взяти $\varphi = \frac{11\pi}{6}$. Отже,

$$z = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right). \blacktriangleleft$$

► б) Маємо $r = 5, \quad \cos\varphi = -1, \quad \sin\varphi = 0,$

тому $\varphi = \pi$. Отже $z = 5(\cos\pi + i\sin\pi)$. ◄

► в) Маємо $r = 2, \quad \cos\varphi = 0, \quad \sin\varphi = 1,$

тому $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Отже $z = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$.◄

8. Нехай $z_1 = 2\sqrt{3} + 2i, \quad z_2 = 1 - i\sqrt{3}$. Знайти: $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$.

► Знайдемо спочатку

$$r_1 = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4, \qquad r_2 = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = 2,$$

$$\cos\varphi_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \ \sin\varphi_1 = \frac{1}{2} \ \Rightarrow \ \varphi_1 = \frac{\pi}{6},$$

$$\cos\varphi_2 = \frac{1}{2}, \ \sin\varphi_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \ \Rightarrow \ \varphi_2 = \frac{5\pi}{3}.$$

Отже, $z_1 \cdot z_2 = 4 \cdot 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{3}\right)\right] =$

$$= 8\left[\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right] = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = 4(\sqrt{3} - i),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{3}\right)\right] = 2\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right] =$$

$$= 2(0 + i) = 2i. \blacktriangleleft$$

9. З допомогою формули Ейлера довести, що

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad \sin 2x = 2\cos x \sin x.$

► Оскільки, за формулою Ейлера, з однієї сторони

$e^{i2x} = \cos 2x + i\sin 2x$, а з іншої

$e^{i2x} = \left(e^{ix}\right)^2 = (\cos x + i\sin x)^2 = (\cos^2 x - \sin^2 x) + i\cdot 2\cos x\sin x$, то

$Re(e^{i2x}) = \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,\ Im(e^{i2x}) = \sin 2x = 2\cos x\sin x.$ ◄

10. Обчислити: а) $5e^{i\frac{\pi}{2}}$; б) $2e^{i\pi}$.

► а) $5e^{i\frac{\pi}{2}} = 5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 5i$. ◄

► б) $2e^{i\pi} = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = -2$. Як бачимо, $e^{i\pi} = -1$. ◄

1.3 Формула Муавра. Корінь степеня n із комплексного числа

n-им степенем комплексного числа z називається таке комплексне число w, що отримується із даного множенням числа z самого на себе n разів, тобто $w = z^n$, де число z є основою степеня, а натуральне число n - показником степеня.

n-ий степінь комплексного числа z, поданого у тригонометричній формі, обчислюється за формулою Муавра

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \tag{3}$$

Коренем степеня n із комплексного числа z називається таке комплексне число w, *n-ий* степінь якого дорівнює z, тобто $w^n = z$.

Корінь степеня n із комплексного числа z позначається $\sqrt[n]{z}$. На відміну від кореня з дійсного числа, корінь степеня n із комплексного числа знаходиться неоднозначно, тобто в множині комплексних чисел існує рівно n значень кореня степеня n із даного комплексного числа.

Усі значення кореня степеня n із комплексного числа, поданого у тригонометричній формі $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ знаходяться за формулою

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \tag{4}$$

де $k = 0, 1, \ldots, \quad n-1$.

Геометрично всі n значень кореня степеня n із комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ зображуються точками, які розміщені у вершинах правильного n-кутника з центром описаного кола в початку координат і радіусом, що дорівнює $\sqrt[n]{r}$.

Приклади розв'язання задач

11. Обчислити $z = \left(\dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{20}$.

► Розглянемо $z_1 = -1 + i\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad r_1 = 2, \ \ \varphi_1 = \dfrac{2\pi}{3}$,

$z_2 = 1 + i \quad \Rightarrow \quad r_2 = \sqrt{2}, \ \ \varphi_2 = \dfrac{\pi}{4}$

Тоді

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\right] =$$

$$= \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right].$$

Тому

$$z = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{20} = \left(\sqrt{2}\right)^{20}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right]^{20} =$$

$$= 2^{10}\left[\cos\left(20\cdot\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(20\cdot\frac{5\pi}{12}\right)\right]= 2^{10}\left[\cos\left(\frac{25\pi}{3}\right)+\right.$$

$$\left.+i\sin\left(\frac{25\pi}{3}\right)\right]= 2^{10}\left[\cos\left(8\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(8\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right]=$$

$$= 2^{10}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]= 2^{10}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)= 512(1+i\sqrt{3}).$$ ◄

12. Знайти і зобразити на xOy всі значення $\sqrt[3]{-1}$.

► Запишемо комплексне число $z=-1$ у тригонометричній формі $-1=1\cdot(\cos\pi+i\sin\pi)$.

За формулою (4) маємо $\sqrt[3]{-1}=\sqrt[3]{1}\cdot\sqrt[3]{\cos\pi+i\sin\pi}=$

$$=\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3},\ k=0,1,2;$$

$$k=0:\quad z_0=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$k=1:\quad z_1=\cos\pi+i\sin\pi=-1+i\cdot 0=-1;$$

$$k=2:\quad z_2=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Як видно з рис. 2, знайдені значення $z_0,\ z_1,\ z_2$ є вершинами правильного трикутника, вписаного в коло радіуса $R=1$ з центром у початку координат. ◄

13. Розв'язати рівняння $z^4+16i=0$.

► Оскільки $z^4=-16i$, то

$$z=\sqrt[4]{-16i}=\sqrt[4]{16\left(\cos\frac{3\pi}{2}+\sin\frac{3\pi}{2}\right)}=$$

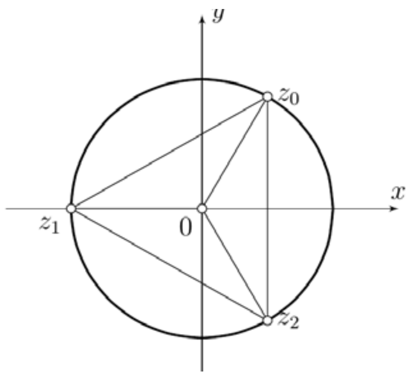


Рисунок 2: Комплексні корені

$$= 2\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{4}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Маємо

$$k = 0: \quad z_0 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}\right);$$

$$k = 1: \quad z_1 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{8}+i\sin\frac{7\pi}{8}\right);$$

$$k = 2: \quad z_2 = 2\left(\cos\frac{11\pi}{8}+i\sin\frac{11\pi}{8}\right);$$

$$k = 3: \quad z_3 = 2\left(\cos\frac{15\pi}{8}+i\sin\frac{15\pi}{8}\right).$$

Зрозуміло, що усі ці корені знаходяться на колі з центром у початку координат і радіусом $R = 2$, на однаковій відстані один від одного. ◄

Завдання для самостійного розв'язання

1. Виконати дії:

$а)\ i^{11}+i^{12}+i^{13}+i^{14},\qquad б)\ (4i-2i^2)^2+(3i+1)^3,$

$в)\ \dfrac{(-3+2i)^2}{(1+i)^3}+3i-2.$

2. Записати числа в тригонометричній формі. Обчислити в тригонометричній формі $z_1\bar{z}_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, z_1^2, z_2^3, якщо $z_1=2\sqrt{3}-2i,\quad z_2=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{i}{\sqrt{2}}.$

3. Записати числа в показниковій формі. Обчислити в показниковій формі добуток $z_1\bar{z}_2$, частку $\dfrac{z_1}{z_2}$, якщо $z_1=-\sqrt{3}+i,\quad z_2=4i.$

4. Обчислити, використовуючи формулу Муавра:

$а)\ (2+2i)^5,\qquad б)\ (-1-i\sqrt{3})^{11}.$

5. Знайти всі корені рівняння та зобразити їх на комплексній площині:

$а)\ z^2+4z+16=0,\quad б)\ 27z^3+1=0,\quad в)\ z^4+16=0.$

6. Записати квадратне рівняння з дійсними коефіцієнтами, якщо відомий один з коренів:

$а)\ z_1=4+i,\qquad б)\ z_1=-3i.$

§ 2. Многочлени, раціональні функції

2.1 Многочлени в комплексній області

Многочленом n-ого степеня в комплексній області називається вираз

$$P_n(z) = c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \ldots + c_{n-1} z + c_n ,$$

де $c_j = a_j + ib_j$ – сталі комплексні коефіцієнти, $c_0 \neq 0$, $z = x + iy$ – комплексна змінна.

Число z_0 називається коренем многочлена, якщо $P_n(z_0) = 0$. *Основна теорема алгебри* стверджує, що кожний многочлен степеня не нижче першого має корінь. Виходячи з наслідку з теореми Безу, многочлен $P_n(z)$ можна подати у вигляді

$$P_n(z) = (z - z_0) P_{n-1}(z), \tag{5}$$

де $P_{n-1}(z)$ – якийсь многочлен $(n-1)-$ого степеня.

При $n-1 \geq 1$ многочлен $P_{n-1}(z)$, в свою чергу, матиме корінь, який позначимо z_1, який, очевидно, буде коренем многочлена $P_n(z)$, тому $P_{n-1}(z)$ можемо подати аналогічно до (5) і підставити в (5). Продовжуючи такі міркування, ми врешті-решт прийдемо до формули

$$P_n(z) = c_0 (z - z_0)(z - z_1) \cdot \ldots \cdot (z - z_{n-1}), \tag{6}$$

У цій формулі деякі z_j можуть повторюватись. Якщо якийсь корінь повторюється k разів, то він називається коренем кратності k. При $k = 1$ корінь називається простим. Як бачимо, многочлен *n-ого* степеня має рівно n коренів, якщо кожний корінь рахувати стільки разів, яка його кратність.

Якщо усі c_j – дійсні числа, то $P_n(z)$ на називається многочленом з дійсними коефіцієнтами. Однією з властивостей такого многочлена є та, що якщо $z_0 = \alpha + i\beta$ – його корінь кратності k, то $\overline{z}_0 = \alpha - i\beta$ також корінь тієї ж кратності k. Оскільки $(z - z_0)(z - \overline{z}_0) = (z - \alpha - i\beta)(z - \alpha + i\beta) =$ $= z^2 - 2\alpha z + \alpha^2 + \beta^2$ – квадратний тричлен з дійсними коефіцієнтами та від'ємним дискримінантом, то, враховуючи (6), після перегрупування множників многочлен з дійсними коефіцієнтами завжди можна розкласти на добуток лінійних та квадратичних множників

$$\begin{aligned} P_n(x) = a_0 (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x - x_s)^{k_s} \left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{m_1} \times \\ \times \left(x^2 + p_2 x + q_2\right)^{m_2} \cdot \ldots \cdot \left(x^2 + p_r x + q_r\right)^{m_r}, \end{aligned} \tag{7}$$

де x_j, p_j, q_j – дійсні числа, причому $p_j^2 < 4q_j$.

Приклади розв'язання задач

14. Розкласти на лінійні і квадратичні множники многочлен $P(x) = 3x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 2$, якщо відомо, що $x_1 = 1 - i$ є його коренем.

► Якщо рівняння з дійсними коефіцієнтами має корінь $x_1 = 1 - i$, то коренем цього рівняння є комплексно спряжене число $x_2 = 1 + i$. Знайдемо квадратичний множник, що відповідає $x_{1,2}$. Оскільки $x_1 + x_2 = 2$, $x_1 \cdot x_2 = 2$, то маємо квадратний тричлен $Q(x) = x^2 - 2x + 2$. Виконавши ділення многочлена $P(x)$ на $Q(x)$, отримаємо квадратний тричлен $3x^2 + x - 1$. Розв'язками квадратного рівняння $3x^2 + x - 1 = 0$ є числа $x_{3,4} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{13}}{6}$. Отже, $3x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 2 =$

$$= 3(x^2 - 2x + 2)(x + \frac{1+\sqrt{13}}{6})(x + \frac{1-\sqrt{13}}{6}). \blacktriangleleft$$

2.2 Раціональні функції

Раціональною функцією називається частка двох многочленів. Якщо степінь чисельника менший за степінь знаменника, то раціональна функція називається *правильним раціональним дробом*, у протилежному випадку – *неправильним раціональним дробом*. Ділячи многочлен-чисельник на многочлен-знаменник, неправильний раціональний дріб завжди можна подати у вигляді суми многочлена та правильного раціонального дробу.

Важливою задачею є розклад правильного раціонального дробу на суму так званих елементарних дробів – раціональних функцій виглядів

$$\frac{A}{x+a}, \quad \frac{A}{(x+a)^k}, \quad \frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \quad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k},$$

де $p^2 < 4q$, $k = 2, 3, 4, \dots$.

Якщо маємо правильний раціональний дріб $R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$, то, розклавши $P_n(x)$ за формулою (7), методом невизначених коефіцієнтів $R(x)$ розкладається єдиним чином на суму елементарних дробів за формулою

$$R(x) = \frac{A_1^{(1)}}{x-x_1} + \frac{A_1^{(2)}}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{A_1^{(k_1)}}{(x-x_1)^{k_1}} + \frac{A_2^{(1)}}{x-x_2} + \frac{A_2^{(2)}}{(x-x_2)^2} + \dots + \frac{A_2^{(k_2)}}{(x-x_2)^{k_2}} +$$

$$+ \dots + \frac{A_s^{(1)}}{x-x_s} + \frac{A_s^{(2)}}{(x-x_s)^2} + \dots + \frac{A_1^{(k_s)}}{(x-x_s)^{k_s}} +$$

$$+\frac{B_1^{(1)}x+C_1^{(1)}}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{B_1^{(2)}x+C_2^{(2)}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^2}+\ldots+\frac{B_1^{(m_1)}x+C_1^{(m_1)}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{m_1}}+$$

$$+\frac{B_2^{(1)}x+C_2^{(1)}}{x^2+p_2x+q_2}+\frac{B_2^{(2)}x+C_2^{(2)}}{\left(x^2+p_2x+q_2\right)^2}+\ldots+\frac{B_2^{(m_2)}x+C_2^{(m_2)}}{\left(x^2+p_2x+q_2\right)^{m_2}}+$$

………………………………………………………………

$$+\frac{B_r^{(1)}x+C_r^{(1)}}{x^2+p_rx+q_r}+\frac{B_r^{(2)}x+C_r^{(2)}}{\left(x^2+p_rx+q_r\right)^2}+\ldots+\frac{B_r^{(m_r)}x+C_r^{(m_r)}}{\left(x^2+p_rx+q_r\right)^{m_r}}. \qquad (8)$$

Приклади розв’язання задач

14. Розкласти раціональні функції на суми елементарних дробів .

а) $\dfrac{4x^2+12x-10}{x^3+x^2-2x}$; б) $\dfrac{7x^3+5x^2-12x-6}{(x-3)(x+1)^3}$;

в) $\dfrac{18-13x}{(x+4)\left(x^2-3x+7\right)}$.

►а) В чисельнику маємо многочлен другого степеня, а в знаменнику – третього. Отже, дана раціональна функція є правилним дробом. Спочатку розкладемо знаменник на множники, знайшовши його корені,

$$x^3+x^2-2x=0 \Leftrightarrow x\left(x^2+x-2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x^2+x-2=0, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=1, \\ x=-2. \end{array}\right.$$

Корені квадратного тричлена ми легко знайшли за формулами Вієта. Як бачимо, усі корені знаменника дійсні та різні.

Відповідно до формули (8) можемо записати

$$\frac{4x^2+12x-10}{x^3+x^2-2x}=\frac{4x^2+12x-10}{x(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}, \tag{9}$$

де A, B, С – невідомі коефіцієнти, які знайдемо, звівши праву частину до спільного знаменника і прирівнявши після цього чисельники,

$$4x^2+12x-10=A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1). \tag{10}$$

Відзначимо, що записана рівність виконується також і для коренів знаменника. У випадку, коли усі корені знаменника дійсні прості, невідомі коефіцієнти зручно знаходити, підставляючи в (9) замість x послідовно значення коренів знаменника.

При $x=0$ маємо $-10=-2A$, звідки $A=5$.

При $x=1$ маємо $6=3B$, звідки $B=2$.

При $x=-2$ маємо $-18=6C$, звідки $C=-3$.

Підставивши знайдені значення A, B, C в (9), запишемо шуканий розклад

$$\frac{4x^2+12x-10}{x^3+x^2-2x}=\frac{5}{x}+\frac{2}{x-1}-\frac{3}{x+2}.$$

►б) Дана раціональна функція також є правильним дробом, бо чисельник є многочленом третього степеня, а знаменник – четвертого. Очевидно, усі корені знаменника дійсні: $x=3$ – простий корінь; $x=-1$ – корінь кратності 3. За формулою (8) можемо записати

$$\frac{7x^3+5x^2-12x-6}{(x-3)(x+1)^3}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}+\frac{D}{(x+1)^3}. \qquad (11)$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів A, B, C, D зведемо праву частину до спільного знаменника і після цього прирівняємо чисельники

$$7x^3+5x^2-12x-6=A(x+1)^3+B(x-3)(x+1)^2+$$
$$+C(x-3)(x+1)+D(x-3).$$

Перетворивши праву частину, отримаємо

$$\begin{aligned}7x^3+5x^2-12x-6&=(A+B)x^3+(3A-B+C)x^2+\\&+(3A-5B-2C+D)x+(A-3B-3C-3D).\end{aligned} \qquad (12)$$

Два многочлени тотожно рівні тоді і тільки тоді, коли рівні коефіцієнти при відповідних степенях. Тому з (12) отримуємо таку систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases}A+B=7,\\3A-B+C=5,\\3A-5B-2C+D=-12,\\A-3B-3C-3D=-6.\end{cases}$$

Розв’язавши цю систему, знаходимо $A=3,\ B=4,$ $C=0,\ D=-1$. Тоді шуканий розклад, з урахуванням (11), матиме такий вигляд

$$\frac{7x^3+5x^2-12x-6}{(x-3)(x+1)^3}=\frac{3}{x-3}+\frac{4}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^3}.◄$$

►в) Бачимо, що маємо частку многочленів першого та третього степенів, отже, дана раціональна функція є правильним дробом. Знаменник є добутком лінійного двочлена та квадратного тричлена з від'ємним дискримінантом. Тому за формулою (8) маємо

$$\frac{18-13x}{(x+4)\left(x^2-3x+7\right)}=\frac{A}{x+4}+\frac{Bx+C}{x^2-3x+7}. \qquad (13)$$

Звівши, аналогічно як у випадку б), праву частину до спільного знаменника, і прирівнявши після цього чисельники правої та лівої частин, отримаємо

$$A\left(x^2-3x+7\right)+\left(Bx+C\right)\left(x+4\right)=18-13x,$$

або $(A+B)x^2+(-3A+4B+C)x+(7A+4C)=-13x+18$.

Прирівнявши коефіцієнти при відповідних степенях, дістанемо

$$\begin{cases} A+B=0, \\ -3A+4B+C=-13, \\ 7A+4C=18. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему лінійних рівнянь, знаходимо $A=2,\ B=-2,\ C=1$. Тоді, відповідно до (13), записуємо шуканий розклад $\dfrac{18-13x}{(x+4)\left(x^2-3x+7\right)}=\dfrac{2}{x+4}+\dfrac{1-2x}{x^2-3x+7}$. ◄

Завдання для самостійного розв'язання

7. Розкласти вирази на лінійні та квадратичні множники, якщо відомий один з коренів:

а) $z^3+6z^2+9z-50$, $\quad z_1=-4-3i$;

б) $z^4-z^3-11z^2+29z+78$, $\quad z_1=3+2i$;

8. Розкласти раціональні функції на суми елементарних дробів:

а) $\dfrac{4x^2-27x+20}{x^3-7x^2+10x}$; $\quad$ б) $\dfrac{5x^2+42x+93}{\left(x^2+8x+15\right)^2}$; $\quad$ в) $\dfrac{3x^2-x+51}{x^3+27}$.

Відповіді до завдань для самостійного розв'язування

1. а) 0**;** $\quad$ **б)** $-28-2i$**;** $\quad$ **в)** $-2-2i$**.**

2. $z_1=4\left(\cos\dfrac{11\pi}{6}+i\sin\dfrac{11\pi}{6}\right)$, $\quad z_2=\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}$,

$\dfrac{z_1}{z_2}=4\left(\cos\dfrac{13\pi}{12}+i\sin\dfrac{13\pi}{12}\right)$, $\quad z_1^2=16\left(\cos\dfrac{5\pi}{3}+i\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)$,

$z_2^3=\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}$.

3. $z_1=2e^{\frac{3\pi i}{4}}$, $\quad z_2=e^{\frac{\pi i}{2}}$, $\quad z_1\overline{z}_2=8e^{\frac{\pi i}{4}}$, $\quad \dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{1}{2}e^{\frac{\pi i}{4}}$.

4. а) $-128-128i$**;** $\quad$ **б)** $-1024+1024\sqrt{3}i$**.**

5. а) $-2\pm2\sqrt{3}i$**;** $\quad$ **б)** $-1/3,\ 1/6\pm\sqrt{3}/6\,i$**;** $\quad$ **в)** $\pm2\sqrt{2}\pm2\sqrt{2}i$**.**

6. а) $z^2-8z+17=0$**;** $\quad$ **б)** $z^2+9=0$**.**

7. а) $(z-2)\left(z^2+8z+25\right)$**;** $\quad$ **б)** $(z-2)\left(z^2+8z+25\right)$**.**

8. а) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{1}{x-5}$**;** $\quad$ **б)** $\dfrac{3}{x+3}+\dfrac{8}{x^2-3x+9}$**.**

6 Інтегральне числення функцій однієї змінної

§ 1. Невизначений інтеграл

1.1 Безпосереднє інтегрування

Функція $F(x)$ називається *первісною* функції $f(x)$ на деякому проміжку X, якщо для всіх значень x з цього проміжку виконується рівність $F'(x)=f(x)$.

Якщо $F(x)$– первісна функції $f(x)$ на деякому проміжку X, то будь-яка інша первісна функції $f(x)$ на цьому ж проміжку відрізняється від $F(x)$ на тотожню сталу. Також очевидно, що для довільної сталої C разом з $F(x)$первісною буде також функція $F(x)+C$.

Якщо функція $F(x)$ – первісна функції $f(x)$ на проміжку X, то множина функцій $F(x)+C$, де C – довільна стала, називається *невизначеним інтегралом* від функції $f(x)$ на цьому проміжку і позначається $\int f(x)dx$. Таким чином, за означенням

$$\int f(x)dx = F(x)+C .$$

Символ $\int$ – називається *знаком інтеграла,* $f(x)$ – *підінтегральною функцією,* $f(x)dx$ – *підінтегральним виразом*, а змінна x – *змінною інтегрування*.

Відновлення функції за її похідною, або що те ж саме, знаходження невизначеного інтеграла за заданою функцією називається *інтегруванням.*

Властивості невизначеного інтеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$, $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.

2. $\int F'(x)dx = F(x) + C$, $\int dF(x) = F(x) + C.$

3. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, де $k = const \neq 0$.

4. $\int \left[f(x) \pm g(x) \right] dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

Таблиця основних невизначених інтегралів

1. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \; (\alpha \neq -1)$.

2. $\int \dfrac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C$.

3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$, $(a > 0, a \neq 1)$.

4. $\int e^x dx = e^x + C$.

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

6. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

9. $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\dfrac{x}{a} + C = -\mathrm{arcctg}\dfrac{x}{a} + C$.

10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C = -\arccos\dfrac{x}{a} + C$

11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + k}\right| + C$.

12. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$, $\quad (a \neq 0)$.

13. $\int \text{sh} x dx = \text{ch} x + C$.

14. $\int \text{ch} x dx = \text{sh} x + C$.

15. $\int \frac{dx}{\text{ch}^2 x} = \text{th} x + C$.

16. $\int \frac{dx}{\text{sh}^2 x} = -\text{ch} x + C$.

Безпосереднім інтегруванням називають інтегрування з допомогою властивостей невизначеного інтеграла, тотожних перетворень підінтегральної функції та таблиці основних інтегралів.

Приклади розв'язання задач

1. Знайти інтеграли:

а) $\int \left(5\cos x + 2 - 3x^2 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2+1} \right) dx$;

б) $\int \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} \right)^2 dx$;

в) $\int \frac{2 \cdot 3^x + 3 \cdot 2^x}{5^x} dx$.

►а) Використовуючи властивості 3, 4 невизначеного інтегралата табличні інтеграли 1, 2, 6, 9, отримаємо

$$\int \left(5\cos x + 2 - 3x^2 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2+1} \right) dx = 5\int \cos x dx + 2\int dx - 3\int x^2 dx +$$

$$+\int \frac{dx}{x} - 4\int \frac{dx}{x^2+1} = 5\sin x + 2x - x^3 + \ln|x| - 4arctgx + C. ◄$$

►б) Піднесемо двочлен до квадрата, скористаємося тригонометричною тотожністю $\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}=1$ та формулою $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$. Далі використовуємо властивість 4 та табличні інтеграли 1,5

$$\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx = \int\left(\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)dx =$$

$$=\int(1+\sin x)dx = \int dx + \int \sin x = x - \cos x + C. ◄$$

►в) В підінтегральному виразі виконаємо почленне ділення і виділимо показникові функції. Далі використовуємо властивості 3,4 та табличний інтеграл 3

$$\int\frac{2\cdot 3^x+3\cdot 2^x}{5^x}dx = \int\left(2\cdot\frac{3^x}{5^x}+3\cdot\frac{2^x}{5^x}\right)dx = 2\int\left(\frac{3}{5}\right)^x dx + 3\int\left(\frac{2}{5}\right)^x dx =$$

$$=2\cdot\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^x}{\ln\frac{3}{5}}+3\cdot\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\frac{2}{5}}+C. ◄$$

Завдання для самостійного розв'язання

1. Знайти інтеграли:

а) $\int\left(2x-\sqrt[3]{x^2}+2\sin x+5\right)dx$; б) $\int\frac{(x+3)^2}{x^2}dx$;

в) $\int\left(2^x+3^x\right)^2 dx$; г) $\int\frac{1+\cos 2x}{\cos x}dx$;

д) $\int \frac{\sqrt{4+x^2}-\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{16-x^4}}dx$;е) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-3x^2}}$.

1.2 Інтегрування підстановкою (заміною змінної)

В багатьох випадках введення нової змінної інтегрування дозволяє звести знаходження заданого інтеграла до знаходження табличного інтеграла. Такий метод називається *методом підстановки* або *методом заміни змінної.* Він базується на наступній теоремі.

Теорема. Нехай функція $x=\varphi(t)$ визначена і диференційовна на деякому проміжку T і нехай X – множина значень цієї функції, на якій визначена функція $f(x)$. Тоді, якщо на множині X функція $f(x)$ має первісну, то на множині T справедлива формула

$$\int f(x)dx\Big|_{x=\varphi(t)} = \int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt .$$

Ця формула називається *формулою заміни змінної в невизначеному інтегралі.* Функцію $\varphi(t)$ стараються вибрати таким чином, щоб права частина формули набула найбільш зручного для інтегрування вигляду.

Приклади розв'язання задач

2. Знайти інтеграли:

а) $\int \frac{x^3}{(x-1)^2}dx$; б) $\int x\sqrt{x-1}dx$.

►а) $\int \frac{x^3}{(x-1)^2}dx = \begin{vmatrix} x=t+1 \\ dx=dt \end{vmatrix} = \int \frac{(t+1)^3}{t^2}dt = \int\left(t+3+\frac{3}{t}+\frac{1}{t^2}\right)dt =$

$$=\frac{1}{2}t^2+3t+3\ln\ |t|-\frac{1}{t}+C=\frac{1}{2}(x-1)^2+3(x-1)+3\ln\ |x-1|-\frac{1}{x-1}+C$$

(тут і надалі вертикальними рисками відокремлено допоміжні записи).◄

$$►\text{б)}\int x\sqrt{x-1}dx=\left|\begin{matrix}\sqrt{x-1}=t,\ \ x=t^2+1,\\ dx=2tdt\end{matrix}\right|=\int\left(t^2+1\right)t\cdot 2tdt=$$

$$=2\int\left(t^4+t^2\right)dt=\frac{2}{5}t^5+\frac{2}{3}t^3+C=\frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+C.$$

При заміні змінної в невизначеному інтегралі інколи доцільніше задавати не x як функцію t, а навпаки, задавати t як функцію x. Нехай потрібно обчислити інтеграл $\int f(x)dx$. Припустимо, що існує диференційовна функція $t=\varphi(x)$ і функція $g(t)$ такі, що підінтегральний вираз можна записати у вигляді

$$f(x)dx=g(\varphi(x))\varphi'(x)dx=g(t)dt$$

(вказане перетворення називається *внесенням функції* $t=\varphi(x)$ *під знак диференціала*). Зауважимо, що виконується співвідношення

$$\int f(x)dx=\int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\int g(t)dt\Big|_{t=\varphi(x)}.$$

Тому знаходження інтеграла $\int f(x)dx$ зводиться до обчислення інтеграла $\int g(t)dt$ (який може виявитися простішим за початковий) і підстановки $t=\varphi(x)$. Тобто, якщо $\int g(t)dt=F(t)+C$, то $\int f(x)dx=F(\varphi(x))+C$.◄

3. Знайти інтеграли:

а) $\int \sin^4 x \cos x dx$; б) $\int \cos(3x+2)dx$;

в) $\int x^2 \sqrt[3]{\left(x^3+1\right)^2}dx$; г) $\int \frac{x^4 dx}{x^5+2}$.

►а) $\int \sin^4 x \cos x dx = \int \sin^4 x d(\sin x) = \int t^4 dt =$

$= \left.\frac{t^5}{5}\right|_{t=\sin x} + C = \frac{\sin^5 x}{5} + C$;◄

►б) $\int \cos(3x+2)dx = \frac{1}{3}\int \cos(3x+2)\, d(3x+2) = \frac{1}{3}\int \cos t dt =$

$= \left.\frac{1}{3}\sin t\right|_{t=3x+2} + C = \frac{1}{3}\sin(3x+2) + C$; ◄

►в) $\int x^2 \sqrt[3]{\left(x^3+1\right)^2}dx = \frac{1}{3}\int \left(x^3+1\right)^{\frac{2}{3}} d\left(x^3+1\right) = \frac{1}{3}\int t^{\frac{2}{3}} dt =$

$= \left.\frac{1}{5}t^{\frac{5}{3}}\right|_{t=x^3+1} + C = \frac{1}{5}\left(x^3+1\right)^{\frac{5}{3}} + C$;◄

►г) $\int \frac{x^4 dx}{x^5+2} = \frac{1}{5}\int \frac{d\left(x^5+2\right)}{x^5+2} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{t} = \left.\frac{1}{5}\ln|t|\right|_{t=x^5+2} + C =$

$= \frac{1}{5}\ln\left|x^5+2\right| + C$.◄

Завдання для самостійного розв'язання

2. Використовуючи вказані підстановки, знайти інтеграли:

а) $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}, \quad x=\frac{2}{t}$; б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}, \quad x=t^2-1.$

3. Знайти інтеграли:

а) $\int \sqrt[4]{1-5x}dx$; б) $\int \cos 5xdx$; в) $\int e^{-x^3}x^2dx$;

г) $\int \frac{dx}{x\ln x}$; д) $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt{4-\cos^2 x}}$.

1.3 Інтегрування частинами

Якщо $u(x)$ і $v(x)$ – диференційовні на деякому проміжку функції, то має місце *формула інтегрування частинами*

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Ця формула використовується в тих випадках, коли підінтегральний вираз $f(x)dx$ можна так представити у вигляді udv, що інтеграл $\int vdu$ при належному виборі виразів u і dv може виявитися простішим за початковий. При цьому слід виходити з того, що частина u надалі диференціюється, а частина dv – інтегрується.

Не існує загальних правил, що вказують, який саме співмножник підінтегрального виразу слід приймати за u, а який за dv.

Основні класи інтегралів, до яких можна застосовувати метод інтегрування частинами і рекомендовані прийоми вибору частин:

а) $\int P_n(x)e^{\alpha x}dx$, $\int P_n(x)\sin\alpha xdx$, $\int P_n(x)\cos\alpha xdx$, де $P_n(x)$ – многочлен n-го степеня від x, $\alpha \neq 0$ – дійсне число. За множник $u(x)$ приймають многочлен $P_n(x)$, степінь якого при диференціювання понижується.

б) Якщо підінтегральна функція містить співмножником логарифмічну або обернену тригонометричну функції, то їх слід приймати за u, бо в результаті диференціювання ці функції спрощуються.

Метод інтегрування частинами можна застосовувати стільки разів, скільки необхідно для знаходження первісної.

в) Інколи після дворазового застосування формули інтегрування частинами, приходимо в правій частині до виразу, який містить початковий інтеграл, тобто одержуємо рівняння з шуканим інтегралом як невідомим.

Приклади розв’язання задач

4. Знайти інтеграли:

а) $\int x^2 \cos 2x dx$; б) $\int x \ln x dx$;

в) $\int \mathrm{arctg} x dx$; г) $\int e^{ax} \sin bx dx$.

►а) Представимо підінтегральний вираз у вигляді добутку множників x^2 і $\cos 2x dx$. Нехай $u = x^2$ і $dv = \cos 2x dx.$ Продиференціюємо частину u і зінтегруємо частину dv

$$du = 2x dx, \quad v = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x,$$

(тут прийнято, що стала інтегрування $C = 0$).

Підставляючи знайдені вирази у формулу інтегрування частинами, одержимо

$$\int x^2 \cos 2x dx = \frac{1}{2} x^2 \sin 2x - \int x \sin 2x dx.$$

Щоб обчислити останній інтеграл, знову застосуємо метод інтегрування частинами

$$\int x\sin 2xdx = \left| \begin{matrix} u = x, du = dx, \\ dv = \sin 2xdx, v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{matrix} \right| = -\frac{1}{2}x\cos 2x -$$

$$-\frac{1}{2}\int \cos 2xdx = -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C_1.$$

Таким чином,

$$\int x^2 \cos 2xdx = \frac{1}{2}x^2 \sin 2x + \frac{1}{2}x\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x + C,$$

де $C = -C_1$. ◄

► б) $\int x\ln xdx = \left| \begin{matrix} u = \ln x, du = \dfrac{dx}{x}, \\ dv = xdx, v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx =$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$ ◄

► в) $\int \operatorname{arctg} xdx = \left| \begin{matrix} u = \operatorname{arctg} x, du = \dfrac{dx}{1+x^2}, \\ dv = dx, v = x \end{matrix} \right| = x\operatorname{arctg} x -$

$$-\int x\frac{dx}{1+x^2} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2+1\right)}{1+x^2} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C.$$ ◄

► г) $\int e^{ax}\sin bxdx = \left| \begin{matrix} u = e^{ax}, du = ae^{ax}dx, \\ dv = \sin bxdx, v = -\dfrac{1}{b}\cos bx \end{matrix} \right| =$

$$=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bxdx=\left|\begin{array}{l}u=e^{ax},du=ae^{ax}dx,\\ dv=\cos bxdx,v=\dfrac{\sin bx}{b}\end{array}\right|=$$

$$=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b^2}e^{ax}\sin bx-\frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\sin bxdx;$$

в результаті одержано рівняння відносно невідомого інтеграла $\int e^{ax}\sin bxdx$. Знайдемо його розв'язок

$$\int e^{ax}\sin bxdx=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b^2}e^{ax}\sin bx-\frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\sin bxdx,$$

$$\int e^{ax}\sin bxdx=\frac{e^{ax}\left(a\sin bx-b\cos bx\right)}{a^2+b^2}+C.\blacktriangleleft$$

Завдання для самостійного розв'язання

4. Знайти інтеграли:

а) $\int(2x+1)\sin 3xdx$; б) $\int x^2e^{5x}dx$; в) $\int x^3\ln xdx$;

г) $\int \arcsin xdx$; д) $\int e^x\cos 2xdx$.

1.4 Інтегрування раціональних функцій

Важливий клас функцій, інтеграли від яких завжди виражаються через елементарні функції, утворюють раціональні функції (раціональні дроби). Раціональним називається дріб вигляду $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, де $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлени степенів n та m відповідно.

Якщо $n < m$, то раціональний дріб $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ називається *правильним*, в протилежному випадку $(n \ge m)$ дріб називають неправильним. Неправильний раціональний дріб діленням многочлена $P_n(x)$ на многочлен $Q_m(x)$ можна подати у вигляді

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = R_{n-m}(x) + \frac{P_k(x)}{Q_m(x)}$$

де $R_{n-m}(x)$, $P_k(x)$ – многочлени степенів $n-m \ge 0$ і k відповідно, причому $k < m$, тобто дріб $\dfrac{P_k(x)}{Q_m(x)}$ – правильний.

Таким чином, інтегрування довільного раціонального дробу зводиться до інтегрування многочлена і правильного раціонального дробу.

Будь-який правильний раціональний дріб можна розкласти на суму скінченного числа найпростіших раціональних дробів. Розрізняють чотири типи таких дробів:

$$1)\ \frac{A}{x-a};\quad 2)\ \frac{A}{(x-a)^k};\quad 3)\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q};\quad 4)\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k},$$

де $k = 2,3,\dots$; A, a, M, N, p, q – дійсні числа, $p^2 - 4q < 0$.

Якщо $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ – правильний дріб і

$$Q_m(x) = B(x-\alpha_1)^{s_1}\dots(x-\alpha_l)^{s_l}(x^2+p_1x+q_1)^{t_1}\dots(x^2+p_kx+q_k)^{t_k},$$

$$x^2 + p_\nu x + q_\nu = \left(x-\beta_\nu\right)\left(x-\overline{\beta}_\nu\right), \quad \nu = 1,\dots,k,$$

де B – коефіцієнт при старшому степені многочлена $Q_m(x)$, $\alpha_1,\dots,\alpha_l$ – попарно різні дійсні корені многочлена $Q_m(x)$ кратностей $s_1,\dots,s_l$ і комплексно-спряжені пари коренів $\beta_1, \overline{\beta}_1,\dots,\beta_k, \overline{\beta}_k$ кратностей $t_1,\dots,t_k$

відповідно $\left(s_1 + ... + s_l + 2t_1 + ... + 2t_k = m\right)$, то розклад на найпростіші дроби проводиться за формулою

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{x-\alpha_1} + ... + \frac{A_{s_1}^{(1)}}{(x-\alpha_1)^{s_1}} + ... + \frac{A_1^{(l)}}{x-\alpha_l} + ... + \frac{A_{s_l}^{(l)}}{(x-\alpha_l)^{s_l}} +$$

$$+\frac{M_1^{(1)}x + N_1^{(1)}}{x^2 + p_1 x + q_1} + ... + \frac{M_{t_1}^{(1)}x + N_{t_1}^{(1)}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{t_1}} + ... + \frac{M_1^{(k)}x + N_1^{(k)}}{x^2 + p_k x + q_k} + ... + \frac{M_{t_k}^{(k)}x + N_{t_k}^{(k)}}{(x^2 + p_k x + q_k)^{t_k}} .$$

Для знаходження коефіцієнтів A_i, M_i, N_i в цьому розкладі прирівнюють коефіцієнти при однакових степенях x у многочлена $P_n\left(x\right)$ і многочлена, який одержимо в чисельнику правої частини після зведення її до спільного знаменника (метод невизначених коефіцієнтів). Можна також знаходити ці коефіцієнти шляхом надання в отриманій тотожності двох многочленів змінній x конкретних значень (в першу чергу значень, які дорівнюють дійсним кореням многочлена $Q_m(x)$). Зауважимо, що в окремих випадках розклад на найпростіші дроби можна одержати швидше і простіше, не використовуючи метод невизначених коефіцієнтів.

Розглянемо, як знаходяться інтеграли від найпростіших дробів.

1) $\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln\left|x-a\right| + C$.

2) $\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = A\int (x-a)^{-n} d(x-a) = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C$.

3) $$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx = \int \frac{\frac{M}{2}(2x+p) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)}{x^2+px+q} dx = \frac{M}{2}\int \frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q} +$$

$$+\left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{M}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C .$$

4) $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx = \frac{M}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}dx + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}.$

Перший інтеграл береться підстановкою $x^2+px+q=t$, $(2x+p)dx=dt$, згідно якої

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}dt = \int \frac{dt}{t^n} = \frac{t^{-n+1}}{1-n}+C = \frac{1}{(1-n)(x^2+px+q)^{n-1}}+C.$$

Другий інтеграл позначимо I_n і подамо його у вигляді

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} = \int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^n} = \left| \begin{array}{l} x+\frac{p}{2}=t, dx=dt \\ q-\frac{p^2}{4}=a^2 \end{array} \right| = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} =$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2+a^2-t^2}{(t^2+a^2)^n}dt = \frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^n}dt.$$

Останній інтеграл зінтегруємо частинами

$$\int \frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^n} = \left| \begin{array}{l} u=t, du=dt \\ dv=\frac{tdt}{(t^2+a^2)^n}, v=-\frac{1}{2(n-1)}\frac{1}{(t^2+a^2)^{n-1}} \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{2(n-1)}\left[t\frac{1}{(t^2+a^2)^{n-1}} - \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}}\right].$$

Отже, $I_n = \frac{1}{a^2}I_{n-1} + \frac{t}{a^2(2n-2)(t^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2(2n-2)}I_{n-1}$.

Звідки при $n>1$ отримаємо рекурентну формулу

$$I_n = \frac{t}{a^2(2n-2)(t^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{a^2(2n-2)}I_{n-1}.$$

Інтеграл I_1 легко обчислюється

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{t}{a}+C.$$

Підставивши потім всюди замість t і a їхні значення, одержимо вираз інтеграла четвертого типу через x і задані числа M, N, p, q.

Приклади розв'язання задач

5. Знайти інтеграли:

а) $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$; б) $\int \frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2}$;

в) $\int \frac{(2x^2-5)dx}{(x+3)(x^2-4x+5)}$; г) $\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^2}$

►а) Оскільки степінь чисельника вищий за степінь знаменника, тобто дріб неправильний, то спочатку виділимо цілу частину. Для цього поділимо чисельник на знаменник за правилом ділення многочленів

$$\begin{array}{l|l} x^5+x^4-8 & x^3-4x \\ \underline{x^5-4x^3} & \overline{x^2+x+4} \\ \quad x^4+4x^3-8 & \\ \quad \underline{x^4-4x^2} & \\ \qquad 4x^3+4x^2-8 & \\ \qquad \underline{4x^3-16x} & \\ \qquad\quad 4x^2+16x-8. & \end{array}$$

Отже,

$$\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx = \int \left(x^2+x+4+\frac{4\left(x^2+4x-2\right)}{x^3-4x} \right) dx =$$

$$= \int \left(x^2 + x + 4\right)dx + 4\int \frac{x^2 + 4x - 2}{x^3 - 4x}dx.$$

Інтегрування цілої частини дає

$$\int \left(x^2 + x + 4\right)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + C_1.$$

Перейдемо до інтегрування правильного раціонального дробу $\int \frac{x^2 + 4x - 2}{x^3 - 4x}dx.$ Для цього спочатку розкладемо знаменник дробу на лінійні множники

$$x^3 - 4x = x\left(x^2 - 4\right) = x(x-2)(x+2).$$

Розклад правильного раціонального дробу на суму найпростіших дробів має вигляд

$$\frac{x^2 + 4x - 2}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}.$$

Зводячи праву частину тотожності до спільного знаменника і звільняючись від нього, одержимо

$$x^2 + 4x - 2 = A\left(x^2 - 4\right) + Bx(x+2) + Cx(x-2).$$

Підставляючи в цій тотожності відповідні значення, маємо

$$x = 0: \quad -2 = -4A \quad \Rightarrow \quad A = 1/2,$$

$$x = 2: \quad 10 = 8B \quad \Rightarrow \quad B = 5/4,$$

$$x = -2: \quad -6 = 8C \quad \Rightarrow \quad C = -3/4.$$

Отже, $\int \frac{x^2 + 4x - 2}{x^3 - 4x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} + \frac{5}{4}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{3}{4}\int \frac{dx}{x+2} =$

$$=\frac{1}{2}\ln|x|+\frac{5}{4}\ln|x-2|-\frac{3}{4}\ln|x+2|+C_2$$

і $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\ln|x|+5\ln|x-2|-3\ln|x+2|+C.$◄

►б) Правильний раціональний дріб подамо у вигляді суми найпростіших дробів

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{D}{(x+1)^2}.$$

Зведемо праву частину рівності до спільного знаменника і прирівняємо чисельники

$$x=A(x+1)^2+B(x^2-1)+D(x-1).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, отримаємо

$$\begin{array}{c|l} x^2 & 0=A+B, \\ x & 1=2A+D, \\ x^0 & 0=A-B-D. \end{array}$$

Звідси знаходимо $A=\frac{1}{4}$, $B=-\frac{1}{4}$, $D=\frac{1}{2}$.

Зауважимо, що при розв\`язуванні цього прикладу найзручніше було б комбінувати 1-й і 2-й способи, знайти $A=\frac{1}{4}$ при $x=1$, $D=\frac{1}{2}$ при $x=-1$, а B визначити з умови рівності коефіцієнтів при x^2, тобто рівності $A+B=0$.

Отже, $\int\frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-1)^2}=$

$$=\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}+C\,.◄$$

►в) Правильний раціональний дріб подамо у вигляді суми найпростіших дробів

$$\frac{2x^2-5}{(x+3)\left(x^2-4x+5\right)}=\frac{A}{x+3}+\frac{Bx+D}{x^2-4x+5}\,.$$

Приведемо праву частину рівності до спільного знаменника і прирівняємо чисельники

$$2x^2-5=A\left(x^2-4x+5\right)+(Bx+D)(x+3)\,.$$

При $x=-3$ одержимо $13=26A \Rightarrow A=\frac{1}{2}$. Прирівняємо коефіцієнти при x^2: $2=A+B \Rightarrow B=\frac{3}{2}$. При $x=0$ одержимо $-5=5A+3D \Rightarrow D=-\frac{5}{2}$. Тому

$$\int\frac{\left(2x^2-5\right)dx}{(x+3)\left(x^2-4x+5\right)}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+3}+\frac{1}{2}\int\frac{3x-5}{x^2-4x+5}dx=\frac{1}{2}\ln|x+3|+$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{\frac{3}{2}(2x-4)+1}{x^2-4x+5}dx=\frac{1}{2}\ln|x+3|+\frac{3}{4}\int\frac{(2x-4)\,dx}{x^2-4x+5}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-2)^2+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x+3|+\frac{3}{4}\ln\left|x^2-4x+5\right|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x-2)+C\,.◄$$

►г) Знайдемо розклад правильного раціонального дробу на найпростіші, не використовуючи метод невизначених коефіцієнтів

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)^2}=\frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(1+x^2)^2}=\frac{1}{x^2(1+x^2)}-\frac{1}{(1+x^2)^2}=$$

$$=\frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(1+x^2)}-\frac{1}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{(1+x^2)^2}.$$

Знайдемо окремо інтеграл від кожного доданка

$$\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}+C_1,\ \int\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x+C_2,$$

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}=\int\frac{\left(1+x^2-x^2\right)dx}{(1+x^2)^2}=\int\frac{dx}{1+x^2}-\int\frac{x^2dx}{(1+x^2)^2}=$$

$$=\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\int xd\left(\frac{1}{1+x^2}\right)=\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2}=$$

$$=\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C_3=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2}+C_3.$$

У підсумку шуканий інтеграл дорівнює

$$\int\frac{dx}{x^2(1+x^2)^2}=-\frac{1}{x}-\frac{3}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2}+C.$$

Завдання для самостійного розв'язання

5. Знайти інтеграли:

а) $\int\frac{x^2-x+4}{(x+1)(x-2)(x-3)}dx$; б) $\int\frac{x^3-2x^2+4}{x^2+2x-3}dx$;

в) $\int\frac{3x^2+2x-1}{(x-1)^2(x+2)}dx$; г) $\int\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx$;

д) $\int \frac{xdx}{x^3+1}$; е) $\int \frac{xdx}{\left(x^2+2x+2\right)^2}$.

1.5 Інтегрування деяких ірраціональних виразів

Інтеграли вигляду $\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ обчислюються за допомогою наступних перетворень

$$\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \int \frac{\frac{m}{2a}(2ax+b)+\left(n-\frac{mb}{2a}\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \frac{m}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx +$$

$$+\left(n-\frac{mb}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)}} = \frac{m}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} +$$

$$+\left(n-\frac{mb}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)}}.$$

Тоді при $c \neq \frac{b^2}{4a}$ і $a > 0$ останній інтеграл можна звести до вигляду $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm q^2}} = \ln\left|t+\sqrt{t^2 \pm q^2}\right| + C$, а при $c > \frac{b^2}{4a}$ і $a < 0$ – до вигляду $\int \frac{dt}{\sqrt{q^2-t^2}} = \arcsin\frac{t}{q} + C.$

Інтеграли вигляду $\int \frac{dx}{(mx+n)^r\sqrt{ax^2+bx+c}}$ $(r = 1,2)$ за допомогою підстановки $\frac{1}{mx+n} = t$ зводяться до інтегралів попереднього типу.

Інтеграли вигляду $\int R\left[x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_1}{s_1}},\dots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_n}{s_n}}\right]dx$, де R – раціональна функція вказаних аргументів, a, b, c, d – сталі, причому $ad-b\,c\neq 0$, r_i – цілі числа, s_i – натуральні числа, $i=\overline{1,n}$, обчислюються за допомогою підстановки $\frac{ax+b}{cx+d}=t^m$ (тут число m – найменше спільне кратне чисел $s_1,\dots s_n$).

Відзначимо, що до інтегралів вказаного вигляду відносяться інтеграли

$$\int R\left(x,(ax+b)^{\frac{r_1}{s_1}},\dots,(ax+b)^{\frac{r_n}{s_n}}\right)dx, \text{ в тому числі і } \int R\left(x,x^{\frac{r_1}{s_1}},\dots,x^{\frac{r_n}{s_n}}\right)dx.$$

Інтеграли від диференціального бінома, тобто інтеграли вигляду $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$, де n, m і p – раціональні, а a і b дійсні числа, зводяться до інтегралу від раціональної функції в трьох випадках. Наведемо ці випадки та відповідні підстановки:

а) p – ціле число. Підстановка $x=t^s$, де s – найменше спільне кратне знаменників дробів m і n;

б) $\frac{m+1}{n}$ – ціле число. У цьому випадку раціоналізуюча підстановка $a+bx^n=t^s$, s – знаменник дробу p;

в) $\frac{m+1}{n}+p$ – ціле число. Раціоналізація інтеграла здійснюється за допомогою підстановки $ax^{-n}+b=t^s$, s – знаменник дробу p.

Приклади розв’язання задач

6. Знайти інтеграли:

а) $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2-4x+8}}dx$; б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-1}}$;

в) $\int \frac{1}{(x-1)^2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$; д) $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$.

►а) $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2-4x+8}}dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x-4)+5}{\sqrt{x^2-4x+8}}dx = \frac{3}{2}\int \frac{(2x-4)dx}{\sqrt{x^2-4x+8}} +$

$+5\int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2+4}} = 3\sqrt{x^2-4x+8} + 5\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+8}\right| + C$.◄

►б) При $x>0$ матимемо

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-1}} = \left|x=\frac{1}{t},\ dx=-\frac{dt}{t^2}\right| = \int \frac{-dt}{t^2\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{\sqrt{1-2t-t^2}}{t}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{2-(t+1)^2}} =$$

$= \arccos\frac{t+1}{\sqrt{2}} + C = \arccos\frac{1+x}{x\sqrt{2}} + C$, аналогічно

$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-1}} = -\arccos\frac{1+x}{x\sqrt{2}} + C$ при $x<0$.◄

►в) $$\int \frac{1}{(x-1)^2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx = \left|\begin{array}{l} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} = t,\ x = \frac{t^3+1}{t^3-1} \\ dx = \frac{-6t^2dt}{(t^3-1)^2},\ x-1 = \frac{2}{t^3-1} \end{array}\right| =$$

$$= \int \frac{(t^3-1)^2}{4}t\frac{-6t^2dt}{(t^3-1)^2} = -\frac{3}{2}\int t^3dt = -\frac{3}{8}t^4 + C = -\frac{3}{8}\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\right)^4 + C.$$◄

►г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \left| \begin{matrix} \sqrt[6]{x}=t,\ x=t^6, \\ dx=6t^5dt \end{matrix} \right| = 6\int \frac{t^5}{t^2+t^3}dt =$

$$= 6\left[\int (t^2-t+1)dt - \int \frac{dt}{t+1} \right] = 2t^3-3t^2+6t-6\ln|1+t|+C =$$

$= 2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(\sqrt[6]{x}+1)+C$.◄

►д) $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}} = \int x^{-4}\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx$.

Тут $m=-4, n=2, p=-\frac{1}{2}, \frac{m+1}{n}+p=\frac{-4+1}{2}-\frac{1}{2}=-2-$ ціле число. Отже, маємо третій випадок інтегрованості диференціального бінома. Взявши $x^{-2}+1=t^2$, матимемо $-2x^{-3}dx=2tdt \Rightarrow x^{-3}dx=-tdt$.

Виконаємо вказану вище підстановку

$$\int x^{-4}\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx = \int x^{-4}\left(x^2\left(x^{-2}+1\right)^{-\frac{1}{2}}\right)dx = \int x^{-2}\left(x^{-2}+1\right)^{-\frac{1}{2}}x^{-3}dx =$$

$$= -\int\left(t^2-1\right)t^{-1}tdt = \int\left(1-t^2\right)dt = t-\frac{t^3}{3}+C = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}-\frac{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}{3x^3}+C.$$ ◄

Завдання для самостійного розв’язання

6. Знайти інтеграли:

а) $\int \frac{x-3}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$; б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+3}}$;

в) $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$; г) $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx$;

д) $\int x^3\left(1+2x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx$.

1.6 Інтегрування виразів, які містять тригонометричні функції

Інтеграли вигляду $\int R(\sin x, \cos x)dx$, де R – раціональна функція, аргументами якої є $\sin x$ та $\cos x$, в загальному випадку приводяться до інтегралів від раціональних функцій з аргументом u за допомогою універсальної тригонометричної підстановки $u = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$ $(-\pi < x < \pi)$. При цьому $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$; $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$; $x = 2\,\mathrm{arctg}\,u$; $dx = \frac{2du}{1+u^2}$.

Тоді $\int R(\sin x, \cos x)dx = 2\int R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{du}{1+u^2}$, тобто отримали інтеграл від раціональної функції.

Зауважимо, що хоча розглядувані інтеграли завжди можна звести до інтеграла від раціонального дробу вказаним методом, при практичному його застосуванні він часто приводить до громіздких обчислень; разом з тим інші методи, зокрема підстановки вигляду $u = \sin x$, $u = \cos x$, $u = \mathrm{tg}x$, інколи значно швидше дозволяють обчислити потрібний інтеграл.

У вказаних нижче випадках віддається перевага наступним підстановкам, які також раціоналізують інтеграл:

1) Якщо інтеграл має вигляд $\int R(\sin x)\cos x dx$, то підстановка $u = \sin x$, $du = \cos x dx$ приводить цей інтеграл до вигляду $\int R(u)du$.

2) Якщо інтеграл має вигляд $\int R(\cos x)\sin x dx$, то він зводиться до інтеграла від раціональної функції заміною $u = \cos x$, $du = -\sin x dx$.

3) Якщо підінтегральна функція залежить тільки від $\mathrm{tg}x$, то заміна $u = \mathrm{tg}x$, $x = \mathrm{arctg}u$, $dx = \dfrac{du}{1+u^2}$ зводить цей інтеграл до інтеграла від раціональної функції $\int R(\mathrm{tg}x)dx = \int R(u)\dfrac{du}{1+u^2}.$

4) Якщо підінтегральна функція має вигляд $R(\sin x, \cos x)$, але $\sin x$ і $\cos x$ входять тільки в парних степенях, то застосовується підстановка $u = \mathrm{tg}x$, оскільки $\sin^2 x$ і $\cos^2 x$ виражаються раціонально через tgx наступним чином

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x} = \frac{1}{1+u^2}; \quad \sin^2 x = \frac{\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x} = \frac{u^2}{1+u^2}; \quad dx = \frac{du}{1+u^2}.$$

Відзначимо, що підстановку $u = \mathrm{tg}x$ можна застосовувати в більш загальному випадку, коли $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$.

Інтеграли вигляду $\int \sin^m x \cos^n x dx$ знаходять з допомогою різних тригонометричних формул, застосування яких залежить від показників степенів m і n.

Нехай m і n – раціональні числа. Інтеграл $\int \sin^m x \cos^n x dx$ за допомогою підстановок $u = \sin x$ або $u = \cos x$ зводиться до інтеграла від диференціального бінома.

Дійсно, поклавши, наприклад, $u = \sin x$, одержимо $\cos x = (1-u^2)^{\frac{1}{2}}$, $du = \cos x dx$, $dx = (1-u^2)^{-\frac{1}{2}} du$, тому $\int \sin^m x \cos^n x dx = \int u^m (1-u^2)^{\frac{n-1}{2}} du.$

Таким чином, інтеграл $\int \sin^m x \cos^n x dx$ виражається або ні через елементарні функції в залежності від того, має або ні цю властивість інтеграл від диференціального бінома.

У випадку, коли m і n цілі (не обов'язково додатні) числа, інтеграл $\int \sin^m x \cos^n x dx$ можна раціоналізувати за допомогою універсальної тригонометричної підстановки, або наступних підстановок:

Якщо $m = 2k+1$ (відповідно $n = 2k+1$) – непарне число, то можна зробити підстановку $u = \cos x$ (відповідно $u = \sin x$)

$\int \sin^{2k+1} x \cos^n x dx = -\int (1-\cos^2 x)^k \cos^n x d\cos x = -\int (1-u^2)^k u^n du.$

Інтеграл зведено до інтеграла від раціонального дробу.

Аналогічний результат можна одержати і для інтеграла $\int \sin^m x \cos^{2k+1} x dx$ за допомогою підстановки $u = \sin x$.

Якщо $m = 2k+1$, $n = 2l+1$, то буває корисною підстановка $u = \cos 2x$. Тоді $\int \sin^{2k+1} x \cos^{2l+1} x dx = \int \sin^{2k} x \cos^{2l} x \sin x \cos x dx =$

$$= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^k \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^l \left(-\frac{1}{2} d\cos 2x\right) = -\frac{1}{2^{k+l+1}} \int (1-u)^k (1+u)^l du,$$

тобто знову отримуємо інтеграл від раціонального дробу.

Якщо обидва показники m і n невід'ємні і парні, то доцільно застосувати формули $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$, які, очевидно, зводять розглядуваний інтеграл до інтеграла того ж типу, але з меншими, також невід'ємними показниками.

Інтеграли типу $\int \sin \alpha x \cos \beta x dx$ обчислюються, якщо в них підінтегральні функції перетворити за формулами:

$$\sin \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x\right);$$

$$\sin\alpha x\sin\beta x=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)x-\cos(\alpha+\beta)x\right);$$

$$\cos\alpha x\cos\beta x=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)x+\cos(\alpha-\beta)x\right).$$

Приклади розв'язання задач

7. Знайти інтеграли:

а) $\int\frac{dx}{\sin x}$; б) $\int\frac{dx}{4\cos x+3\sin x+5}$; в) $\int \mathrm{tg}^2 x dx$;

г) $\int\frac{dx}{2-\sin^2 x}$; д) $\int\cos^2 x dx$; е) $\int\sin 2x\cos x dx$.

►а) $\int\frac{dx}{\sin x}=\left|\begin{array}{l} u=\mathrm{tg}\frac{x}{2},\quad x=2\,\mathrm{arctg}\,u,\\ \sin x=\frac{2u}{1+u^2},\quad dx=\frac{2du}{1+u^2}\end{array}\right|=\int\frac{2}{1+u^2}\cdot\frac{1+u^2}{2u}du=$

$=\int\frac{du}{u}=\ln|u|+C=\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|+C$. ◄

►б) $\int\frac{dx}{4\cos x+3\sin x+5}=\left|\begin{array}{c} u=\mathrm{tg}\frac{x}{2},\quad x=2\,\mathrm{arctg}\,u,\\ \sin x=\frac{2u}{1+u^2},\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2},\\ dx=\frac{2du}{1+u^2}\end{array}\right|=$

$$=2\int\frac{du}{\left(4\cdot\frac{1-u^2}{1+u^2}+3\cdot\frac{2u}{1+u^2}+5\right)\left(1+u^2\right)}=2\int\frac{du}{u^2+6u+9}=$$

$$= 2\int \frac{du}{(u+3)^2} = -\frac{2}{u+3} + C = -\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 3} + C. \blacktriangleleft$$

$$\blacktriangleright \text{в) } \int \operatorname{tg}^2 x dx = \left| \begin{matrix} u = \operatorname{tg} x,\ x = \operatorname{arctg} u, \\ dx = \dfrac{du}{1+u^2} \end{matrix} \right| = \int \frac{u^2 du}{1+u^2} = \int \left(1 - \frac{1}{1+u^2}\right) du =$$

$$= u - \operatorname{arctg} u + C = \operatorname{tg} x - x + C. \blacktriangleleft$$

$$\blacktriangleright \text{г) } \int \frac{dx}{2 - \sin^2 x} = \left| \begin{matrix} u = \operatorname{tg} x, \\ x = \operatorname{arctg} u, \\ dx = \dfrac{du}{1+u^2}, \\ \sin^2 x = \dfrac{u^2}{1+u^2} \end{matrix} \right| = \int \frac{du}{\left(2 - \dfrac{u^2}{1+u^2}\right)(1+u^2)} =$$

$$= \int \frac{du}{2+u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) + C. \blacktriangleleft$$

$$\blacktriangleright \text{д) } \int \cos^2 x dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C. \blacktriangleleft$$

$$\blacktriangleright \text{е) } \int \sin 2x \cos x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 3x + \sin x) dx =$$

$$= -\frac{1}{6} \cos 3x - \frac{1}{2} \cos x + C. \blacktriangleleft$$

Завдання для самостійного розв'язання

7. Знайти інтеграли:

а) $\int \frac{dx}{\cos x}$; б) $\int \frac{dx}{3-2\sin x+\cos x}$; в) $\int tg^5 x dx$;

г) $\int \sin^5 x dx$; д) $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$; е) $\int \sin 7x \sin 2x dx.$

1.7 Інтегрування деяких ірраціональних функцій за допомогою тригонометричних підстановок

Розглянемо інтеграл $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$, де $a \neq 0$ і $c - \frac{b^2}{4a} \neq 0$.

Проведемо перетворення тричлена, який знаходиться під коренем

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c-\frac{b^2}{4a}\right)$$

Зробимо заміну змінної, взявши $x+\frac{b}{2a}=t$, $dx = dt$. Тоді

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{at^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)}.$$

Розглянемо всі можливі випадки:

1) Нехай $a>0$, $c-\frac{b^2}{4a}>0$. Ввівши позначення $a=m^2$, $c-\frac{b^2}{4a}=n^2$, одержимо $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{m^2t^2+n^2}$.

2) Нехай $a>0$, $c-\frac{b^2}{4a}<0$, тоді $a=m^2$, $c-\frac{b^2}{4a}=-n^2$. Отже,

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{m^2t^2-n^2}.$$

3) Нехай $a<0$, $c-\frac{b^2}{4a}>0$, тоді $a=-m^2$, $c-\frac{b^2}{4a}=n^2$. Отже,

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{n^2-t^2m^2}.$$

4) Нехай $a<0$, $c-\dfrac{b^2}{4a}<0$. У цьому випадку $ax^2+bx+c<0$ при всіх дійсних x. Отже, областю визначення підінтегральної функції є порожня множина.

Таким чином, інтеграл $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ перетвориться до одного з наступних типів інтегралів $\int R(t,\sqrt{m^2t^2+n^2})dt$, $\int R(t,\sqrt{m^2t^2-n^2})dt$, $\int R(t,\sqrt{n^2-m^2t^2})dt$. Ці інтеграли за допомогою *тригонометричних підстановок* відповідно $t=\dfrac{n}{m}tgz$, $t=\dfrac{n}{m}\dfrac{1}{\cos z}$, $t=\dfrac{n}{m}\sin z$ зводяться до інтегралів вигляду $\int R(\sin z,\cos z)dz$.

Приклади розв'язання задач

8. Знайти інтеграли

$$\text{а)}\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+4x+7)^3}};\qquad \text{б)}\int\frac{\sqrt{\left(5-x^2\right)^3}}{x^6}dx.$$

►а) Виділивши повний квадрат у квадратному тричлені, маємо $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+4x+7)^3}}=\int\frac{dt}{\sqrt{(t^2+3)^3}}$, де $t=x+2$.

Виконавши тепер підстановку $t=\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,z$, $dt=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2 z}dz$, $\sqrt{t^2+3}=\sqrt{3}\dfrac{1}{\cos z}$, одержимо

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+4x+7)^3}}=\int\frac{\sqrt{3}\cos^3 z}{\sqrt{3^3}\cos^2 z}=\frac{1}{3}\int\cos zdz=$$

$$=\frac{1}{3}\sin z+C=\frac{1}{3}\frac{t}{\sqrt{t^2+3}}+C=\frac{1}{3}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+7}}+C. ◄$$

► б) $$\int\frac{\sqrt{\left(5-x^2\right)^3}}{x^6}dx=\left|\begin{matrix}x=\sqrt{5}\sin t,\\ dx=\sqrt{5}\cos t dt\end{matrix}\right|=$$

$$=\int\frac{\sqrt{\left(5-5\sin^2 t\right)^3}}{\left(\sqrt{5}\right)^6\sin^6 t}\sqrt{5}\cos tdt=\int\frac{\left(\sqrt{5}\right)^3\cos^3 t}{\left(\sqrt{5}\right)^6\sin^6 t}\sqrt{5}\cos tdt=\frac{1}{5}\int\frac{\cos^4 t}{\sin^6 t}dt=$$

$$=\frac{1}{5}\int \mathrm{ctg}^4 t\frac{dt}{\sin^2 t}=-\frac{1}{5}\int \mathrm{ctg}^4 td\left(\mathrm{ctg}t\right)=-\frac{1}{25}\mathrm{ctg}^5 t+C=$$

$$=\left|\begin{matrix}\sin t=\frac{x}{\sqrt{5}},\ \cos t=\frac{\sqrt{5-x^2}}{\sqrt{5}},\\ \mathrm{ctg}t=\frac{\sqrt{5-x^2}}{x}\end{matrix}\right|=-\frac{1}{25}\frac{\sqrt{\left(5-x^2\right)^5}}{x^5}+C. ◄$$

Завдання для самостійного розв’язання

8. Знайти інтеграли:

а) $\int\sqrt{\left(3-2x-x^2\right)^3}dx$; б) $\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$.

§ 2. Визначений інтеграл

2.1 Обчислення визначеного інтеграла

Нехай функція $y=f(x)$ визначена на відрізку $[a,b]$. Розіб’ємо відрізок довільно точками $a=x_0<x_1<x_2<...<x_{i-1}<x_i<...<x_n=b$ на n

елементарних відрізків $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ завдовжки $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1,...,n$. Виберемо в кожному з них відповідні точки ξ_i $(x_{i-1} \le \xi_i \le x_i)$. Сума вигляду $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ називається *інтегральною сумою* для функції $f(x)$ на $\left[a;b\right]$.

Якщо існує скінченна границя інтегральної суми S_n, яка не залежить від способу розбиття відрізка $[a,b]$ на елементарні і способу вибору точок $\xi_i \in \left[x_{i-1}, x_i\right]$, знайдена за умови, що найбільша з довжин Δx_i прямує до нуля, то ця границя називається *визначеним інтегралом* від функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i .$$

В цьому випадку функція $f(x)$ називається *інтегровною* на $[a,b]$. Числа a і b називаються відповідно *нижньою* і *верхньою межами* інтегрування, $f(x)$ – *підінтегральною функцією, x – змінною інтегрування.*

Якщо функція неперервна на $[a,b]$, то вона інтегровна на цьому відрізку.

Властивості визначеного інтеграла.

1. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0.$

2. $\int\limits_b^a f(x)dx = -\int\limits_a^b f(x)dx.$

3. $\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx.$

4. $\int\limits_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$.

5. Які б не були числа $a,b,c,$ які належать відрізку інтегрування функції $f(x)$, має місце рівність $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$

6. Якщо всюди на відрізку $[a,b]$, де $a<b$, функція $f(x)\geq 0,$ то $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$.

7. Якщо всюди на відрізку $[a,b]$, де $a<b$, $f(x)\leq g(x),$ то $\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx$.

8. Для функції $f(x)$, визначеної на відрізку $[a,b]$ $(a<b)$ має місце нерівність $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx.$

9. Якщо m і M – відповідно найменше і найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$, то $m(b-a)\leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$

10. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то існує така точка $c\in(a;b)$, що $\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

Число $f(c)=\dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$ називають *середнім значенням* функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$.

11. Якщо $f(x)$ парна, то $\int\limits_{-a}^a f(x)dx = 2\int\limits_0^a f(x)dx$. Якщо $f(x)$ непарна, то $\int\limits_{-a}^a f(x)dx = 0$.

Якщо $F(x)$ – одна з первісних неперервної на $[a,b]$ функції $f(x),$ то справедлива *формула Ньютона-Лейбніца*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) .$$

Нехай $f(x)$ – неперервна функція на відрізку $[a,b]$. Тоді, якщо:

1) функція $x = \varphi(t)$ диференційовна на $[\alpha, \beta]$ і $\varphi'(t)$ неперервна на $[\alpha, \beta]$;

2) множиною значень функції $x = \varphi(t)$ є відрізок $[a,b]$;

3) $\varphi(\alpha) = a$ і $\varphi(\beta) = b$, то має місце рівність $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$

Ця формула називається *формулою заміни змінної у визначеному інтегралі,* або *формулою інтегрування підстановкою.*

Якщо функція $u(x)$ і $v(x)$ мають неперервні похідні на відрізку $[a,b]$, то має місце *формула інтегрування частинами* у визначеному інтегралі

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Приклади розв'язання задач

9. Обчислити, виходячи з означення, інтеграл $\int_1^2 x^2 dx$.

► Розіб'ємо відрізок $[1, 2]$ на частини так, щоб абсциси точок розбиття утворювали геометричну прогресію:

$$x_0 = 1, x_1 = q, x_2 = q^2, ..., x_{n-1} = q^{n-1}, x_n = q^n = 2 ,$$

де $q = 2^{1/n}$. Точку ξ_i виберемо на лівому кінці i-го відрізка.

Тоді $f(x_0) = 1,\ f(x_1) = q^2, f(x_2) = q^4, \ldots, f(x_{n-1}) = q^{2(n-1)},$

$$\Delta x_1 = q - 1, \quad \Delta x_2 = q^2 - q = q(q-1),$$

$$\Delta x_3 = q^2(q-1), \ldots, \Delta x_n = q^{n-1}(q-1),$$

$$S_n = 1\cdot(q-1) + q^3(q-1) + q^6(q-1) + \ldots + q^{3(n-1)}(q-1) = (q-1)\times$$

$$\times(1 + q^3 + q^6 + \ldots + q^{3(n-1)}) = (q-1)\frac{q^{3n}-1}{q^3-1} = \frac{q^{3n}-1}{q^2+q+1} =$$

$$= \frac{2^3-1}{2^{\frac{2}{n}} + 2^{\frac{1}{n}} + 1} = \frac{7}{2^{\frac{2}{n}} + 2^{\frac{1}{n}} + 1}.$$

Отже, $\int\limits_1^2 x^2 dx = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{7}{2^{\frac{2}{n}} + 2^{\frac{1}{n}} + 1} = \frac{7}{3}$. ◄

10. Оцінити інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

► Оскільки $1 \le 1 + x^4 \le 2$ при $0 \le x \le 1$ $\frac{1}{\sqrt{2}} \le \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \le 1$,

тобто $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $M = 1$, $b - a = 1$, то $\frac{1}{\sqrt{2}} \le \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} \le 1$. ◄

11. Застосовуючи формулу Ньютона-Лейбніца обчислити інтеграл $\int\limits_{-1}^1 (2x+3)\,dx$.

► $\int\limits_{-1}^1 (2x+3)\,dx = \left(x^2+3x\right)\Big|_{-1}^1 = (1+3) - (1-3) = 6.$ ◄

12. Знайти середнє значення функції $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ на відрізку $[1;5]$.

► $f(c) = \frac{1}{5-1}\int\limits_1^5 \left(3x^2+2x-1\right)dx = \frac{1}{4}\left(x^3+x^2-x\right)\Big|_1^5 =$

$$=\frac{1}{4}\left(\left(125+25-5\right)-\left(1+1-1\right)\right)=36. \blacktriangleleft$$

13. Обчислити за допомогою заміни змінної інтеграл $\int\limits_{\sqrt{2}/2}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$.

$$\blacktriangleright \int\limits_{\sqrt{2}/2}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx=\left|\begin{array}{c} x=\sin t, \\ dx=\cos t dt, \\ \alpha=\frac{\pi}{4}, \quad \beta=\frac{\pi}{2} \end{array}\right|=\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}dt=$$

$$=\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}dt=\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\left(\frac{1}{\sin^2 t}-1\right)dt=\left(-\mathrm{ctg}t-t\right)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}=$$

$$=-\frac{\pi}{2}+1+\frac{\pi}{4}=1-\frac{\pi}{4}. \blacktriangleleft$$

14. Обчислити інтеграл $\int\limits_{1}^{e}\ln xdx$ методом інтегрування частинами.

$$\blacktriangleright \int\limits_{1}^{e}\ln xdx=\left|\begin{array}{c} u=\ln x, du=\frac{dx}{x}, \\ dv=dx, v=x \end{array}\right|=x\ln x\Big|_1^e-\int\limits_{1}^{e}x\frac{dx}{x}=e-x\Big|_1^e=1. \blacktriangleleft$$

Завдання для самостійного розв’язання

9. Обчислити, виходячи з означення, інтеграл $\int\limits_{0}^{5}\left(1+x\right)dx$ (відрізок $\left[0;5\right]$ розбити на n рівних частин).

10. Оцінити інтеграл $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{5+2\sin x}}$.

11. Застосовуючи формулу Ньютона-Лейбніца обчислити інтеграл $\int\limits_{0}^{1} \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}\right) dx$.

12. Знайти середнє значення функції $f(x) = \cos x$ на відрізку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

13. Обчислити інтеграл $\int\limits_{1}^{5} \frac{dx}{x+\sqrt{2x-1}}$ за допомогою заміни змінної.

14. Обчислити інтеграл $\int\limits_{0}^{1} xe^x dx$ методом інтегрування частинами.

2.2 Невласні інтеграли

Невласні інтеграли першого роду (з нескінченними межами)

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на $[a;+\infty)$ і інтегровна на будь-якому відрізку $[a;b] \subset [a;+\infty)$. Тоді $\lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ називається *невласним інтегралом 1-го роду* від функції $f(x)$ в межах від a до $+\infty$ і позначається $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$. Таким чином,

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x)dx.$$

Аналогічно визначаються невласні інтеграли

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} f(x)dx,$$

де c – будь-яке число.

Якщо вказані границі існують і є скінченними, то відповідний невласний інтеграл називається *збіжним*. У протилежному випадку кажуть, що інтеграл р*озбігається*.

Ознаки збіжності та розбіжності приведемо для інтегралів вигляду $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$, причому вважатимемо, що функції $f(x)$ та $g(x)$ інтегровні на будь-якому відрізку $[a;b]\subset[a;+\infty)$.

1. Якщо первісна $F(x)$ для функції $f(x)$ має скінченну границю $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = F(+\infty)$, то існує й збігається невласний інтеграл

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a).$$

Якщо ж $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ не існує, то невласний інтеграл розбігається.

2. Нехай при $a \le x < +\infty$ виконується $0 \le f(x) \le g(x)$. Якщо $\int_{a}^{+\infty} g(x)dx$ збігається, то збігається і $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$, причому $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx \le \int_{a}^{+\infty} g(x)dx$. Якщо $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ розбігається, то розбігається і $\int_{a}^{+\infty} g(x)dx$ (*ознака порівняння*).

3. Якщо при $a \le x < +\infty$ функції $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ та існує скінченна границя $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} \ne 0$, то інтеграли $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ і $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ збігаються або розбігаються одночасно (*гранична ознака порівняння*).

4. Якщо збігається $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$, то збігається і $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$. У цьому випадку інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ називається *абсолютно збіжним*. Якщо ж інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається, а інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ розбігається, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ називають *умовно збіжним*.

5. Якщо при $x \to +\infty$ функція $f(x) > 0$ є нескінченно малою порядку α в порівнянні з $\dfrac{1}{x}$, то інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається при $\alpha > 1$ і розбігається при $\alpha \le 1$.

Невласні інтеграли другого роду (від необмежених функцій)

Нехай $f(x)$ визначена при $a \le x < b$, інтегровна на будь-якому відрізку $[a;b-\varepsilon]$, $0 < \varepsilon < b-a$ і необмежена в точці b, тоді $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ називається *невласним інтегралом 2-го роду*, тобто

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx .$$

Якщо існує скінченна границя у правій частині формули, то невласний інтеграл називається *збіжним*. Якщо ж ця границя не існує, то – *розбіжним*.

Аналогічно визначається невласний інтеграл у випадку $f(a+0) = \infty$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx\,.$$

У випадку, коли $c \in (a;b)$ – точка розриву і $f(c) = \infty$, то маємо

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1\to 0} \int_a^{b-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0} \int_{a+\varepsilon_2}^b f(x)dx\,.$$

Якщо первісна $F(x)$ функції $f(x)$ неперервна при $a \le x \le b$, то невласний інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ збігається і обчислюється за формулою Ньютона-Лейбніца $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Ознаки збіжності і розбіжності невласних інтегралів від необмежених функцій аналогічні до ознак збіжності та розбіжності невласних інтегралів 1-го роду.

На практиці за інтеграл, що використовується для порівняння, часто береться інтеграл $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ $(\alpha > 0)$, який збігається при $\alpha < 1$ і розбігається при $\alpha \ge 1$.

Приклади розв'язання задач

15. Обчислити інтеграл $\int_0^{+\infty} e^{-3x}dx$ або встановити його розбіжність.

$$\blacktriangleright \int_0^{+\infty} e^{-3x}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-3x}dx = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\Big|_1^e\right) = \frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}\left(1 - e^{-3b}\right) = \frac{1}{3}. \blacktriangleleft$$

16. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^{-x})}$.

► Порівняємо підінтегральну функцію $\dfrac{1}{x^2(1+e^{-x})}$ з функцією $\dfrac{1}{x^2}$ на $1 \le x < +\infty$. Очевидно, що $\dfrac{1}{x^2(1+e^{-x})} < \dfrac{1}{x^2}$.

Невласний інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2}$ збігається, оскільки $\alpha = 2 > 1$. Отже, за ознакою порівняння збігається і заданий інтеграл. ◄

17. Обчислити або встановити розбіжність інтеграла $\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{dx}{x^4}$.

$$► \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^4} = \lim_{\varepsilon_1 \to 0+} \int\limits_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{dx}{x^4} + \lim_{\varepsilon_2 \to 0+} \int\limits_{\varepsilon_2}^{1} \frac{dx}{x^4} = \lim_{\varepsilon_1 \to 0+} \left. \frac{-1}{3x^3} \right|_{-1}^{-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2 \to 0+} \left. \frac{-1}{3x^3} \right|_{\varepsilon_2}^{1} =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0+} \left(\frac{1}{3\varepsilon_1^3} - 1 \right) + \lim_{\varepsilon_2 \to 0+} \left(\frac{1}{3\varepsilon_2^3} - 1 \right) = +\infty$$ – інтеграл розбігається.◄

18. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_1^2 \dfrac{dx}{\ln x}$.

► $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\frac{1}{\ln x}}{\frac{1}{x-1}} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\ln x} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{1/x} = 1$; інтеграл $\int\limits_1^2 \dfrac{dx}{x-1}$ розбігається $(\alpha = 1)$. Отже, розбігається і $\int\limits_1^2 \dfrac{dx}{\ln x}$.◄

Завдання для самостійного розв’язання

15. Обчислити інтеграли або встановити їхню розбіжність:

а) $\int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$; в) $\int_{0}^{+\infty} \sin x\, dx$;

г) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2+x^4}$; д) $\int_{0}^{2} \frac{x\,dx}{\left(x^2-1\right)^{4/5}}$; е) $\int_{0}^{2/\pi} \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}$.

16. Дослідити на збіжність інтеграли:

а) $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+\cos^2 x}$; б) $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+5}$;

в) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$; г) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{e^x-\cos x}$.

§ 3. Деякі застосування визначеного інтеграла

3.1 Площа плоскої фігури

Площа фігури, обмеженої графіком неперервної функції $y=f(x)$ $\left(f(x)\geq 0\right)$, прямими $x=a$, $x=b$ і віссю Ox (рис.1), або площа *криволінійної трапеції* обчислюється за формулою

$$S=\int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Площа фігури, обмеженої графіками неперервних функцій $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ $\left(f_1(x)\leq f_2(x)\right)$ і прямими $x=a$, $x=b$ (рис.2), обчислюється за формулою

$$S=\int_{a}^{b}\left(f_2(x)-f_2(x)\right)dx.$$

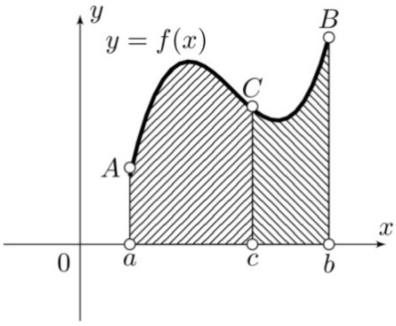


Рисунок 1

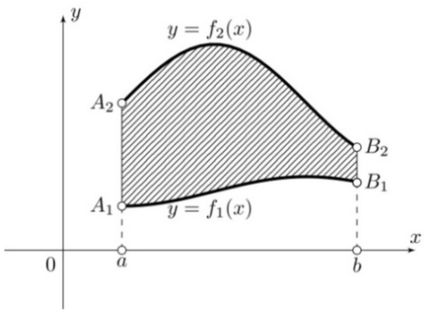


Рисунок 2

Приклади розв'язання задач

19. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = f_1(x) = x$ і $y = f_2(x) = 2 - x^2$ (рис.3).

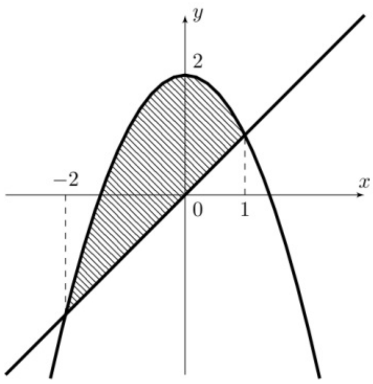


Рисунок 3

► Знайдемо абсциси точок перетину прямої $y = x$ з параболою $y = 2 - x^2$. Розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases} y = x, \\ y = 2 - x^2 \end{cases}$

і одержимо $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. Це межі інтегрування. Площа фігури дорівнює

$$S = \int_{-2}^{1} \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx = \int_{-2}^{1} \left((2 - x^2) - x \right) dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_{-2}^{1} = \frac{9}{2}. \blacktriangleleft$$

Якщо крива задана рівняннями в параметричній формі $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то площа криволінійної трапеції, яка обмежена цією кривою, прямими $x = a$, $x = b$ та відрізком осі Ox, обчислюється за формулою $S = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\varphi'(t)dt,$ де α і β визначаються з рівнянь $a = \varphi(\alpha)$ і $b = \varphi(\beta)$ $\left(\psi(t) \geq 0\right.$ на відрізку $\left.[\alpha; \beta]\right)$.

20. Обчислити площу фігури, обмеженої еліпсом

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

► Еліпс симетричний відносно осей координат, тому достатньо обчислити площу частини фігури, яка знаходиться в I чверті (рис.4). Отже,

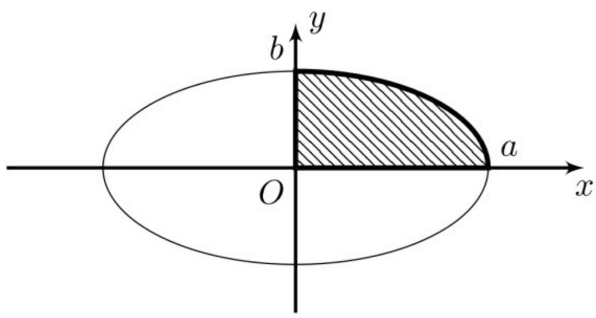


Рисунок 4

$$S = 4\int_{\pi/2}^{0} b\sin t(a\cos t)'dt = 4ab\int_{0}^{\pi/2} \sin^2 tdt = 2ab\int_{0}^{\pi/2} (1-\cos 2t)dt =$$

$$= 2ab\left[t - \frac{1}{2}\sin 2t\right]\Bigg|_{0}^{\pi/2} = \pi ab.$$

Зокрема, якщо $a = b = R$, то одержимо відому формулу площі круга $S = \pi R^2$.◄

Площа фігури, обмеженої графіком неперервної функції $r = r(\varphi)$ і двома променями $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, де r і φ – полярні координати, або площа *криволінійного сектора* (рис.5), обмеженого дугою графіка функції $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, обчислюється за формулою $S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi$.

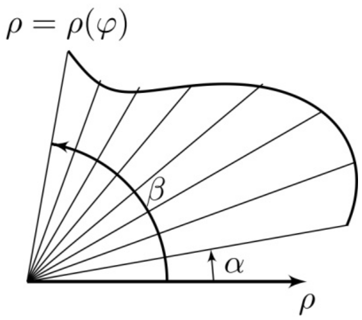


Рисунок 5

21. Обчислити площу фігури, обмеженої кардіоїдою $r = a(1+\cos\varphi)$ (рис.6).

► $S = \dfrac{a^2}{2}\displaystyle\int_{0}^{2\pi} (1+\cos\varphi)^2 d\varphi = \dfrac{a^2}{2}\displaystyle\int_{0}^{2\pi} d\varphi + a^2\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \cos\varphi d\varphi +$

$$+\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi=\frac{3}{2}\pi a^2. \blacktriangleleft$$

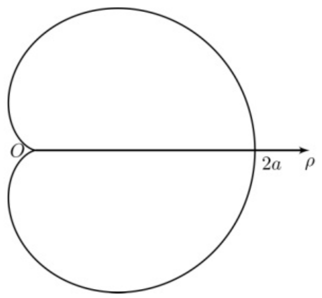


Рисунок 6

Завдання для самостійного розв'язання

17. Обчислити площі фігур, обмежених лініями:

а) $y=2x-x^2,\quad y=-x$; б) $y=x^2,\quad y=\dfrac{x^2}{2},\quad y=2x$;

в) $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x=a\left(2\cos t-\cos 2t\right), \\ y=a\left(2\sin t-\sin 2t\right); \end{cases}$

д) $r=a\sin 3\varphi\quad \left(a>0\right)$; е) $r=4\cos\varphi,\quad \varphi=0,\quad \varphi=\pi/4$.

3.2 Обчислення об'ємів тіл

Нехай маємо деяке вимірне тіло, проекцією якого на вісь Ox є відрізок $\left[a;b\right]$. Якщо площа $S(x)$ перерізу тіла площиною, перпендикулярною до осі Ox, є неперервною функцією на відрізку $\left[a;b\right]$, то об'єм обчислюється за формулою $V=\int_a^b S\left(x\right)dx$.

Якщо тіло, утворене обертанням криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = f(x)$, віссю абсцис і прямими $x = a$ і $x = b$ $(a < b)$, відповідно навколо осей Ox та Oy, то справедливими є формули

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx, \qquad V_y = 2\pi \int_a^b x\left|f(x)\right|dx, \quad a \ge 0.$$

Об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої кривою $x = g(y)$, віссю Oy і прямими $y = c$ і $y = d$ $(c < d)$, можна обчислювати за формулою

$$V_y = \pi \int_c^d g^2(y)\,dy$$

Якщо криву задано параметричними рівняннями, то в указаних формулах слід виконати відповідну заміну змінної.

Якщо криволінійний сектор, обмежений кривою $r = r(\varphi)$ і променями $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, обертається навколо полярної осі, то об'єм тіла обертання дорівнює

$$V = \frac{2}{3}\pi \int_\alpha^\beta r^3 \sin\varphi\, d\varphi.$$

Приклади розв'язання задач

22. Знайти об'єм тіла, обмеженого еліпсоїдом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

► У перерізі еліпсоїда (рис.7) площинами, перпендикулярними до осі Ox, матимемо фігури. обмежені еліпсом. Рівняння еліпса, що знаходиться на відстані x від площини Oyz має вигляд $\dfrac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)}+\dfrac{z^2}{c^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)}=1$. Отже, півосі дорівнюватимуть $b_1=b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$, $c_1=c\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$.

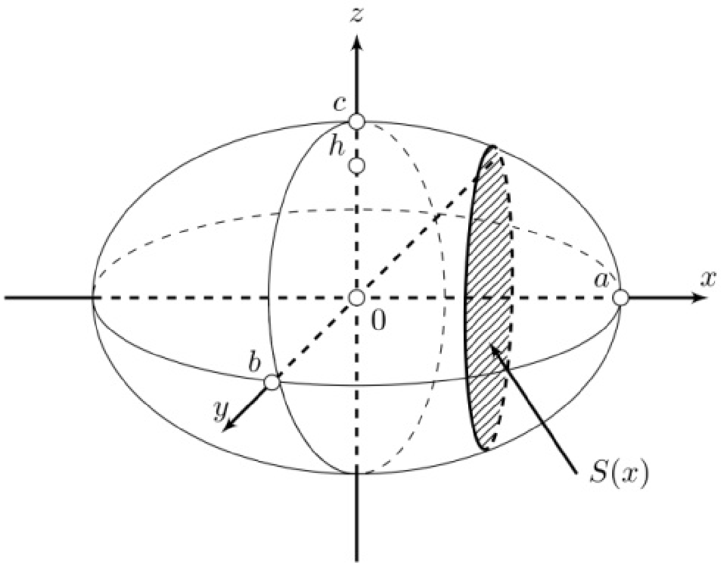


Рисунок 7

Площа такого еліпса складе $\pi b_1 c_1$. Тому $S(x)=\pi bc\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)$ і

$$V=\pi bc\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi bc\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi abc.$$

Зокрема, якщо $a=b=c=R$, то еліпсоїд перетворюється в кулю, об'єм якої $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$. ◀

23. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями $y = 2x - x^2$ і $y = 0$, навколо осі: а) Ox; б) Oy.

►а) При обертанні криволінійної трапеції навколо осі Ox утвориться тіло зображене на рис. 8а, об'єм якого дорівнює $V_x = \pi\int\limits_0^2 \left(2x - x^2\right)^2 dx = \pi\int\limits_0^2 \left(4x^2 - 4x^3 + x^4\right)dx =$

$$= \pi\left(\frac{4}{3}x^3 - x^4 + \frac{1}{5}x^5\right)\Bigg|_0^2 = \frac{16\pi}{15}. ◄$$

►б) *Перший спосіб*. Рівняння $x = 1 + \sqrt{1-y}$ (рис.8б) задає праву гілку параболи, а рівняння $x = 1 - \sqrt{1-y}$ – ліву. Шуканий об'єм знайдемо як об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої лініями $x = 1 \pm \sqrt{1-y}$, $y \in [0;1]$,

$$V_y = \pi\int\limits_0^1 \left(x_2^2(y) - x_1^2(y)\right)dy = \pi\int\limits_0^1 \left(\left(1 + \sqrt{1-y}\right)^2 - \left(1 - \sqrt{1-y}\right)^2\right)dy =$$

$$= \pi\int\limits_0^1 4\sqrt{1-y}dy = 4\pi\left(-\frac{2}{3}\right)(1-y)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{8}{3}\pi.$$

Другий спосіб. Знайдемо об'єм за формулою $V_y = 2\pi\int\limits_a^b x\left|f(x)\right|dx$.

Отже, $V_y = 2\pi\int\limits_0^2 x\left(2x - x^2\right)dx = 2\pi\int\limits_0^2 \left(2x^2 - x^3\right)dx =$

$$= 2\pi\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 = 2\pi\left(\frac{16}{3} - 4\right) = \frac{8}{3}\pi. ◄$$

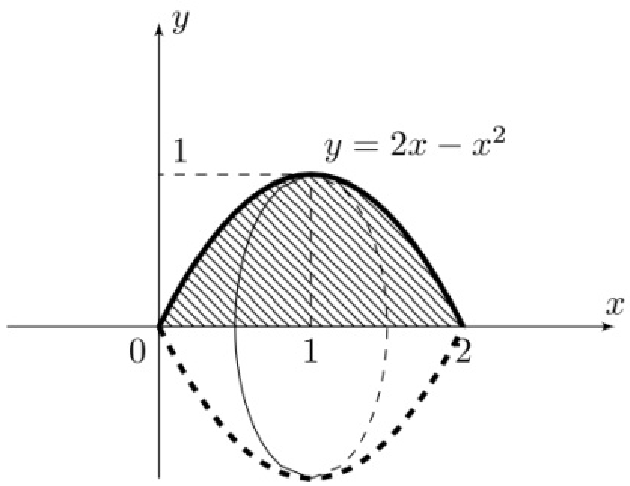


Рисунок 8а

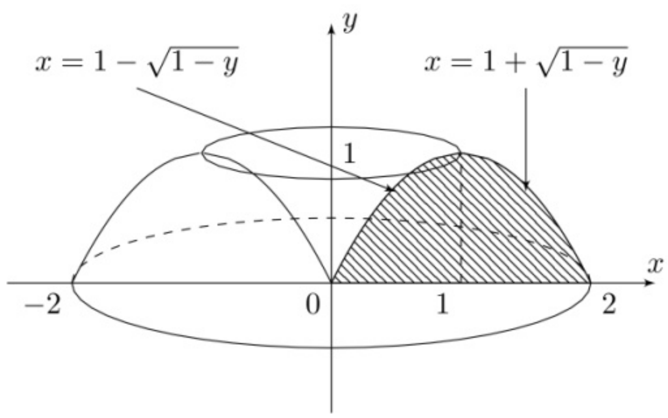


Рисунок 8б

24. Знайти об’єм тіла обертання, отриманого обертанням однієї арки циклоїди: $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$ навколо своєї основи.

► Основа арки циклоїди співпадає з віссю Ox (рис.9).

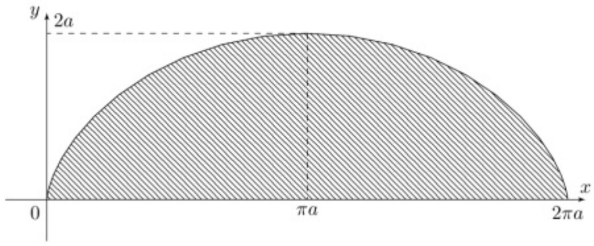


Рисунок 9

Отже,

$$V_x = \pi \int_0^{2\pi a} y^2 dx = \left| \begin{array}{c} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \\ dx = a(1 - \cos t)\, dt, \\ \alpha = 0, \quad \beta = 2\pi \end{array} \right| = \pi \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 a(1 - \cos t)\, dt =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3\, dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t\right) dt =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(1 - 3\cos t + \frac{3}{2}(1 + \cos 2t) - \left(1 - \sin^2 t\right)\cos t\right) dt =$$

$$= \pi a^3 \left(t - 3\sin t + \frac{3}{2} t + \frac{3}{4} \sin 2t - \sin t \right)\Bigg|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \sin^2 t d(\sin t) =$$

$$= 5\pi^2 a^3 + \frac{\sin^3 t}{3}\Bigg|_0^{2\pi} = 5\pi^2 a^3. ◄$$

25. Кардіоїда $r = a(1 - \cos\varphi)$ обертається навколо полярної осі. Знайти об’єм тіла обертання.

► $V = \dfrac{2}{3}\pi \displaystyle\int_0^{\pi} a^3 (1 - \cos\varphi)^3 \sin\varphi d\varphi = \dfrac{2}{3}\pi a^3 \dfrac{(1 - \cos\varphi)^4}{4}\Bigg|_0^{\pi} = \dfrac{8}{3}\pi a^3$. ◄

Завдання для самостійного розв'язання

18. Знайти об'єм клина, що відтинається від прямого кругового циліндра радіуса a площиною, яка проходить через діаметр основи під кутом α до площини основи.

19. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої віссю Ox, параболою $y = 2x^2$ і прямою $y + x = 3$.

20. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої віссю Oy, параболою $y = x^2$ і прямою $y = 1$.

21. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням астроїди $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$ навколо осі Ox.

22. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням кривої $r = a\sin^2 \varphi$ навколо полярної осі.

3.3. Довжина дуги кривої

Якщо гладка крива задана рівнянням $y = f(x)$, то довжина l її дуги дорівнює

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\,dx,$$

де a і b – абсциси кінців дуги.

Якщо крива задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$, то $l = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt$.

Аналогічно виражається довжина дуги просторової кривої, яка задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$,

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt .$$

Якщо задано полярне рівняння гладкої кривої $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, то

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi.$$

Приклади розв'язання задач

26. Обчислити довжини дуг кривих

а) $y = x^{\frac{3}{2}}$, якщо $0 \le x \le 5$;

б) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $y = a\sin^3 t \in [0; 2\pi]$;

в) $r = 6\sin\varphi$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3}$.

►а) З рівняння $y = x^{\frac{3}{2}}$ знайдемо $y' = \dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$. Отже,

$$l = \int_0^5 \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,dx = \frac{8}{27}\left(1 + \frac{9x}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^5 = \frac{335}{27}. ◄$$

►б) Астроїда симетрична відносно координатних осей. Тому можна обчислити довжину дуги астроїди, розташованої в першій чверті, і результат помножити на 4. Отже,

$$\frac{l}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\left(a\cos^3 t\right)'\right)^2 + \left(\left(a\sin^3 t\right)'\right)^2}\,dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\left(-3\cos^2 t\sin t\right)^2 + a^2\left(3\sin^2 t\cos t\right)^2}\,dt =$$

$$= 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^4 t\sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 t}\ dt = 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t\sqrt{\cos^2 t + \cos^2 t}\,dt =$$

$$= 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t\,dt = 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t d\left(\sin t\right) = 3a\frac{\sin^2 t}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}a\,,$$

звідси $l = 6a$.◄

$$►\text{в)}\ l = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\left(6\sin\varphi\right)^2 + \left(\left(6\sin\varphi\right)'\right)^2}\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{36\sin^2\varphi + 36\cos^2\varphi}\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 6\,d\varphi = 6\varphi\Big|_0^{\pi/3} = 2\pi\ .◄$$

Завдання для самостійного розв'язання

23. Обчислити довжини дуг кривих:

а) $y = \dfrac{2}{\pi}\ln\sin\dfrac{\pi x}{2}, \quad \dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{3}{2}$;

б) $x = a\left(t - \sin t\right), \quad y = a\left(1 - \cos t\right), \quad 0 \le t \le 2\pi$;

в) $r = a\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$.

3.4 Обчислення площ поверхонь тіл обертання

Площа поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox дуги кривої, заданої функцією $y = f\left(x\right)$, $a \le x \le b$, обчислюється за формулою

$$P_x = 2\pi \int_a^b \left| f(x) \right| \sqrt{1 + \left(f'(x) \right)^2}\, dx .$$

Якщо дугу задано параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$, то

$$P_x = 2\pi \int_\alpha^\beta \left| y(t) \right| \sqrt{\left(x'(t) \right)^2 + \left(y'(t) \right)^2}\, dt .$$

Якщо криву задано в полярних координатах $r = r(\varphi)$, $\alpha \le t \le \beta$, то

$$P_x = 2\pi \int_\alpha^\beta r \left| \sin\varphi \right| \sqrt{r^2 + \left(r' \right)^2}\, d\varphi .$$

Приклади розв’язання задач

27. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox частини кривої $y^2 = 2x + 1$, що відтинається прямими $x = 1$, $x = 7$.

► Крива симетрична відносно осі Ox, тому поверхня може бути утворена тільки верхньої частини параболи $y = \sqrt{2x+1}$ (рис.10).

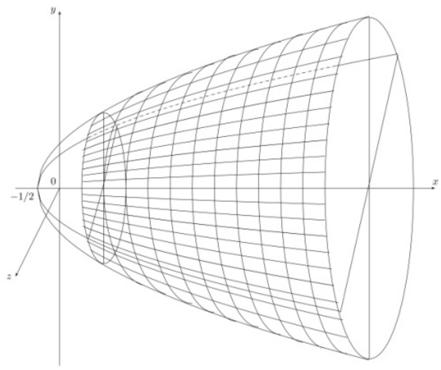


Рисунок 10

Звідси $P_x = 2\pi\int\limits_1^7 \sqrt{2x+1}\sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{2x+1}}\right)^2}dx = 2\pi\int\limits_1^7 \sqrt{2x+2}dx =$

$$2\pi\frac{1}{2}\frac{\left(2x+2\right)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_1^7 = \frac{2}{3}\pi\left(64-8\right) = \frac{112\pi}{3}.◄$$

28. Знайти площу поверхні, отриманої обертанням циклоїди $x = a\left(t-\sin t\right)$, $y = a\left(1-\cos t\right)$, $0 \le t \le 2\pi$, навколо осі Ox.

► $P = 2\pi\int\limits_0^{2\pi} a\left(1-\cos t\right)\sqrt{\left(a\left(1-\cos t\right)\right)^2+\left(a\sin t\right)^2}dt =$

$$= 2\sqrt{2}\pi a^2\int\limits_0^{2\pi}\left(1-\cos t\right)^{3/2}dt = 2\sqrt{2}\pi a^2\int\limits_0^{2\pi}\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)^{3/2}dt = 8\pi a^2\int\limits_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}dt =$$

$$= -16\pi a^2\int\limits_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)d\left(\cos\frac{t}{2}\right) = -16\pi a^2\left(\cos\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\cos^3\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{64}{3}\pi a^2.◄$$

29. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням кардіоїди $r = 2a\left(1+\cos\varphi\right)$ навколо полярної осі.

► $r' = -2a\sin\varphi, \sqrt{r^2+r'^2} = \sqrt{4a^2\left(1+\cos\varphi\right)^2+4a^2\sin^2\varphi} =$

$= 4a\cos\frac{\varphi}{2}$. Отже, $P_x = 2\pi\int\limits_0^{\pi} 2a\left(1+\cos\varphi\right)\sin\varphi 4a\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi =$

$$= 64\pi a^2\int\limits_0^{\pi}\cos^4\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi = -128\pi a^2\int\limits_0^{\pi}\cos^4\frac{\varphi}{2}d\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right) =$$

$$= -\frac{128}{5}\pi a^2\cos^5\frac{\varphi}{2}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{128}{5}\pi a^2.◄$$

Завдання для самостійного розв'язання

24. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox дуги кривої $y = e^{-x}$ від $x = 0$ до $x = +\infty$.

25. Знайти площу поверхні, отриманої обертанням навколо осі Ox дуги кривої $x = a\left(3\cos t - \cos 3t\right)$, $y = a\left(3\sin t - \sin 3t\right)$, $0 \le t \le 2\pi$.

26. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням лемніскати $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ навколо полярної осі.

3.5 Застосування визначених інтегралів в задачах фізики

Координати центра мас матеріальної однорідної дуги плоскої кривої (густина приймається рівною одиниці), заданої рівнянням $y = f\left(x\right)$, $a \le x \le b$, обчислюються за формулами

$$x_c = \frac{1}{l}\int_a^b x dl; \qquad y_c = \frac{1}{l}\int_a^b y dl,$$

де l – довжина дуги, $dl = \sqrt{1 + \left(y'\right)^2}\,dx$ – диференціал довжини дуги.

Координати центра мас матеріальної однорідної криволінійної трапеції обчислюються за формулами

$$x_c = \frac{1}{S}\int_a^b xy dx; \qquad y_c = \frac{1}{2S}\int_a^b y^2 dx,$$

де S – площа криволінійної трапеції.

Робота змінної сили $f\left(x\right)$, яка діє у напрямку осі Ox на відрізку $\left[a;b\right]$, визначається формулою

$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

Довжина шляху s, який проходить матеріальна точка, що рухається зі швидкістю $v(x)$, за проміжок часу $[t_1, t_2]$, обчислюється за формулою

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt.$$

Приклади розв'язання задач

30. Знайти координати центра мас півкола $x^2 + y^2 = a^2$, яке розташоване над віссю Ox.

► Визначимо ординату центра мас

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

,

$$y_c = \frac{\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx}{\pi a} = \frac{a \int_{-a}^{a} dx}{\pi a} = \frac{2a}{\pi},$$

x_c=0 (оскільки півколо симетричне відносно осі *Oy*).◄

31. Визначити координати центра мас сегмента параболи $y^2 = ax$, що відтинається прямою $x = a$.

► Оскільки $f_2(x) = \sqrt{ax}$, $f_1(x) = -\sqrt{ax}$, то

$$x_c = \frac{2\int\limits_a^b x\sqrt{ax}dx}{2\int\limits_a^b \sqrt{ax}dx} = \frac{2\sqrt{a}\,\frac{2}{5}x^{5/2}\Big|_0^a}{2\sqrt{a}\,\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^a} = \frac{\frac{4}{5}a^3}{\frac{4}{3}a^2} = \frac{3}{5}a\,,$$ $y_c = 0$ (оскільки сегмент симетричний відносно осі Ox).◄

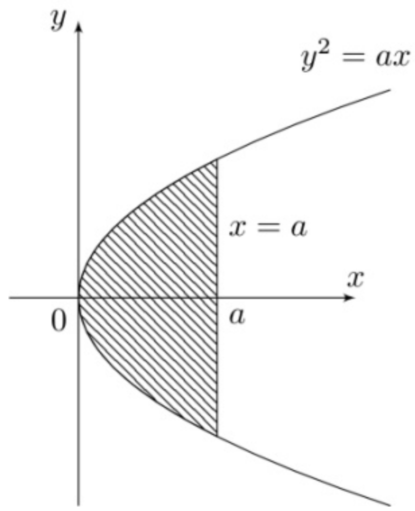


Рисунок 11

32. Визначити роботу A, необхідну для запуску тіла масою m з поверхні Землі вертикально вгору на висоту h.

► Позначимо через F силу притягання тіла Землею. Нехай $M_{\text{З}}$ – маса Землі. За законом Ньютона $F = G\dfrac{mM_{\text{З}}}{x^2}$, де x – відстань від тіла до центру Землі. Покладемо $GmM_{\text{З}} = K$, одержимо $F(x) = \dfrac{K}{x^2}$, $R \le x \le h + R$, де R – радіус Землі. При

$R = x$ сила $F(R)$ дорівнює вазі тіла $P = mg$, тобто $\dfrac{K}{R^2} = P$,

звідки $K = PR^2$ $F(x) = \dfrac{PR^2}{x^2}$. Таким чином, одержимо

$$A = \int_R^{R+h} F(x)dx = PR^2 \int_R^{R+h} \frac{dx}{x^2} = -PR^2 \left.\frac{1}{x}\right|_R^{R+h} = \frac{PRh}{R+h}. ◄$$

33. Швидкість тіла задається формулою $v = 2t + 3t^2$ (м/с). Знайти шлях, який пройде тіло за перші 5 с від початку руху.

$$► \ s = \int_0^5 \left(2t + 3t^2\right)dt = \left.\left(t^2 + t^3\right)\right|_0^5 = 150 \text{ (м)}. ◄$$

Завдання для самостійного розв'язання

27. Знайти координати центра ваги кривої

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0.$$

28. Знайти координати центра ваги фігури, обмеженої лініями $y = 2 - x^2$ і $y = x$.

29. Обчислити роботу, що виконується при стисканні пружини на 20 см, якщо відомо, що прикладена сила пропорційна стисканню пружини і для стискання на 1 см необхідна сила 2 Н.

30. Швидкість тіла, яке кинули вертикально вгору з початковою швидкістю v_0, без урахування сил опору дорівнює

$v = v_0 - gt$, де t час, g – прискорення вільного падіння. На яку максимальну висоту підніметься тіло?

Відповіді до завдань для самостійного розв'язання

1. а) $x^2 - \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} - \cos x + 5x + C;$ **б)** $x + 6\ln|x| - \frac{9}{x} + C;$

в) $\frac{2^{2x}}{2\ln 2} + \frac{6^x}{\ln 6} + \frac{3^{2x}}{2\ln 3} + C;$ **г)** $2\sin x + C;$

д) $\arcsin\frac{x}{2} - \ln\left|x + \sqrt{4 + x^2}\right| + C;$ **е)** $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin x + C.$

2. а) $-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2 + \sqrt{4 - x^2}}{x}\right| + C;$ **б)** $2\ln\left|\frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x+1} + 1}\right| + C.$

3. а) $-\frac{4}{25}(1 - 5x)^{\frac{5}{4}} + C;$ **б)** $\frac{\sin 5x}{5} + C;$

в) $-\frac{1}{3}e^{-x^3} + C;$ **г)** $\ln|\ln x| + C;$

д) $\arccos\frac{\cos x}{2} + C.$

4. а) $\frac{2}{9}\sin 3x - \frac{2x+1}{3}\cos 3x + C;$ **б)** $\frac{50x^2 - 20x + 4}{125}e^{5x} + C;$

в) $\frac{4\ln x - 1}{16}x^4 + C;$ **г)** $x\arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C;$

д) $\frac{\cos 2x + 2\sin 2x}{5}e^x + C.$

5. а) $\frac{1}{2}\ln|x+1| - 2\ln|x-2| + \frac{5}{2}\ln|x-3| + C;$

б) $\frac{x^2}{2}-4x+\frac{3}{4}\ln|x-1|+\frac{41}{4}\ln|x+3|+C;$

в) $\frac{20}{9}\ln|x-1|+\frac{7}{9}\ln|x+2|-\frac{4}{3x-3}+C;$

г) $\frac{3}{2}\ln|x^2-2x+5|-\ln|x-1|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C;$

д) $\frac{1}{6}\ln\frac{x^2-x+1}{x^2+2x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C;$

е) $\frac{-x-2}{2\left(x^2+2x+2\right)}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(x+1\right)+C.$

6. а) $4\arccos\frac{x+1}{2}-\sqrt{3-2x-x^2}+C;$

б) $-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{6}-\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{3x}+\frac{1}{3}}\right|+C;$

в) $\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{1-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}\right|-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+C;$

г) $4\sqrt[4]{x}+2\ln\left(\sqrt{x}+1\right)-4\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x}+C;$

д) $\frac{x^2-1}{6}\sqrt{1+2x^2}+C.$

7. а) $\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}+C;$ **б)** $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right)+C;$

в) $\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4}-\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}-\ln|\cos x|+C;$ **г)** $-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{\cos^5 x}{5}+C;$

д) $\frac{x}{8}-\frac{\sin 4x}{32}+C$; **е)** $\frac{\sin 5x}{10}-\frac{\sin 9x}{18}+\mathrm{C}$.

8. а) $6\arcsin\frac{x+1}{2}-\frac{1}{4}\left(x^3+3x^2-7x-9\right)\sqrt{3-2x-x^2}+C$;

б) $\sqrt{x^2-1}+\arcsin\frac{1}{x}+C$.

9. $17{,}5$. **10.** $\frac{2\pi}{\sqrt{7}}<\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{\sqrt{5+2\sin x}}<\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

11. $\frac{19}{15}$. **12.** $\frac{2}{\pi}$. **13.** $\ln 4-\frac{1}{2}$. **14.** 1.

15. а) Інтеграл розбіжний; **б)** π ; **в)** розбіжний;

г) розбіжний; **д)** $5\frac{\sqrt[5]{3}+1}{2}$; **е)** розбіжний.

16. а) розбіжний; **б)** розбіжний;

в) збіжний**;** **г)** розбіжний.

17. а) $4{,}5$; **б)** 4 ; **в)** $\frac{3a^2\pi}{8}$; **г)** $6a^2\pi$; **д)** $\frac{a^2\pi}{4}$; **е)** $\pi+2$.

18. $\frac{2}{3}a^3\operatorname{tg}\alpha$. **19.** $\frac{52}{15}\pi$. **20.** $\frac{\pi}{2}$. **21.** $\frac{32}{105}\pi$. **22.** $\frac{64}{105}a^3\pi$.

23. а) $\frac{4}{\pi}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$; **б)** $8a$; **в)** $a\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln\left(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right)$.

24. $\pi\left(\sqrt{2}+\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right)$. **25.** $36a^2\pi^2$. **26.** $\left(4-2\sqrt{2}\right)a^2\pi$.

27. $x_c=\frac{2a}{5}$, $y_c=\frac{2a}{5}$. **28.** $x_c=-0{,}45$, $y_c=1{,}62$.

29. 4 *Дж*. **30.** $\frac{v_0^2}{2g}$.

7 Диференціальне числення функцій декількох змінних

§ 1. Функція, її границя та неперервність

1.1 Поняття функції декількох змінних. Лінії та поверхні рівня

Нехай $D \subset \mathbb{R}^2$ і $G \subset \mathbb{R}$ – дві непорожні множини (нагадаємо, що $\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел). Якщо кожній впорядкованій парі дійсних чисел $(x;y) \in D$ за певним правилом ставиться у відповідність одне і тільки одне число $z \in G$, то кажуть, що на множині D задано *функцію двох змінних* $z = f(x,y)$. Змінні x, y – незалежні змінні (аргументи), z – залежна змінна. Множину D називають *областю визначення (існування)* функції, а множину G, що складається з усіх чисел виду $f(x,y)$, де $(x,y) \in D$, – *множиною (областю) значень* функції. Значення функції $z = f(x,y)$ в точці $M_0(x_0;y_0)$ називають частинним (окремим) її значенням і позначають $f(x_0;y_0)$, або $f(M_0)$.

Областю визначення функції $z = f(x,y)$ в простих випадках є частина площини xOy (обмежена замкненою лінією, причому точки цієї лінії (межі області) можуть належати або не належати області визначення), або вся площина, або сукупність декількох частин площини xOy.

Якщо множина D є областю, а функція $f(x,y)$ неперервна, то сукупність точок простору з координатами (x,y,z), де $z = f(x,y)$ утворює деяку поверхню, яку й називають *графіком* функції (геометричним зображенням функції). Проекція її на площину xOy збігається з областю D. Таким чином, графік – це повна таблиця функції: у ньому міститься вся інформація про функцію. Якщо побудувати графік, то можна «побачити» функцію. Форма графіка відображає властивості функції.

Аналогічно визначаються функція трьох змінних $u = f(x, y, z)$ та більшого скінченного числа змінних $u = f(x, y, z, ..., t)$. Областю визначення функції трьох змінних є увесь простір або його частина. Усі такі функції називаються функціями багатьох змінних.

Із аналітичної геометрії відомо, що точки площини можна задавати впорядкованими парами дійсних чисел, а точки тривимірного простору – впорядкованими трійками, а саме їх координатами. Тому функцію двох змінних $z = f(x, y)$ можна розглядати як функцію точки $M(x; y)$: $f(x, y) = f(M)$; функцію трьох змінних $u = f(x, y, z)$ – як функцію точки $M(x; y, z)$: $f(x, y, z) = f(M)$ і т.д. Для функції багатьох змінних $u = f(x, y, z, ..., t)$ використовують запис $u = f(M)$, де $M = M(x, y, z, ..., t)$.

Надалі будемо розглядати функції двох або трьох змінних. Це зумовлено тим, що ми проживаємо у тривимірному просторі.

Якщо для функції, заданої аналітично, не вказують явно область визначення, то в цьому разі вважають, що область визначення функції $z = f(x, y)$ $(u = f(x, y, z))$ збігається з областю визначення виразу $f(x, y)$ $(f(x, y, z))$, тобто з множиною тих значень x і y $(x, y\ i\ z)$, для яких вираз $f(x, y)$ $(f(x, y, z))$ має зміст. Для функції трьох і більшого числа змінних геометричного зображення немає.

Лінією рівня функції $z = f(x,y)$ називається лінія $f(x,y) = c$ на площині xOy, в точках якої функція набуває одного й того самого значення $z = c$.

Поверхнею рівня функції $u = f(x,y,z)$ називається поверхня $f(x,y,z) = c$, в точках якої функція зберігає стале значення $u = c$.

Приклади розв'язання задач

1. Знайти та зобразити області визначення функцій:

а) $z = \ln\left(x^2 + y^2 - 4\right)$; б) $z = \dfrac{5x + 2y}{x^2 - y^2}$;

в) $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$; г) $z = \sqrt{(x-2)(y+2)}$;

д) $z = \arccos(x - y)$; е) $z = \arcsin\left(x^2 + y^2 - 3\right)$;

є) $z = \ln\dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$; ж) $u = \sqrt{1 + \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{16}}$.

►а) Функція визначена за умови $x^2 + y^2 - 4 > 0$, тобто $x^2 + y^2 > 4$. Геометрично – це частина площини xOy, що лежить поза кругом із центром $O(0;0)$ і радіусом $r = 2$ (точки кола $x^2 + y^2 = 4$ в область D не входять) (рис.1). ◄

►б) Областю визначення цієї функції є множина $\{(x, y)\}$ усіх точок площини xOy, для яких $y^2 \neq x^2$, тобто коли $y \neq \pm x$. Геометрично – це множина усіх точок площини, що не лежать на бісектрисах першого й третього та другого й четвертого координатних кутів (рис.2). ◄

►в) Областю визначення такої функції є множина всіх точок площини xOy, для яких $9 - x^2 - y^2 \geq 0$, тобто $x^2 + y^2 \leq 9$. Це круг із центром у початку координат і радіусом $r = 3$ разом з його межею, тобто колом $x^2 + y^2 = 9$ (рис.3). ◄

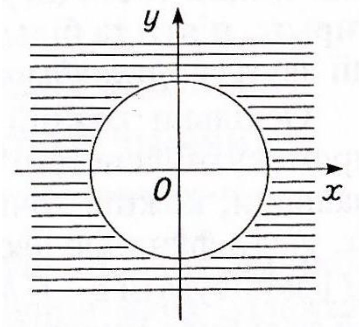


Рисунок 1

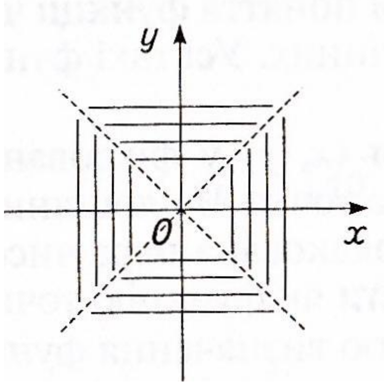


Рисунок 2

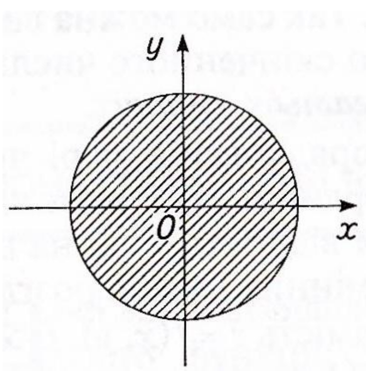


Рисунок 3

►г) Область існування цієї функції визначається з умови, що $(x-2)(y+2)\geq 0$. Ця нерівність еквівалентна двом системам нерівностей:

$$\begin{cases} x-2\geq 0, \\ y+2\geq 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x-2\leq 0, \\ y+2\leq 0. \end{cases}$$

Перша система дає розв'язки $x\geq 2, y\geq -2$, а друга – $x\leq 2, y\leq -2.$ Область визначення заданої функції зображена на (рис.4). ◄

►д) Функція визначена у тій частині площини xOy, координати точок якої задовольняють подвійну нерівність $-1\leq x-y\leq 1.$ Це смуга, обмежена двома паралельними прямими $y=x+1$ і $y=x-1$ (рис.5). ◄

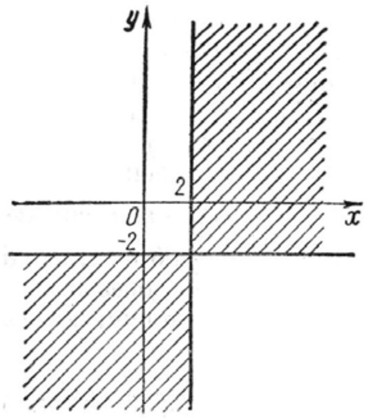


Рисунок 4

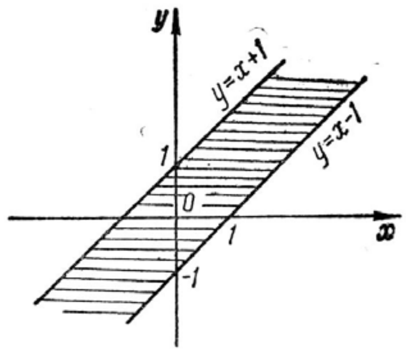


Рисунок 5

►е) Функція визначена за умови $-1 \le x^2 + y^2 - 3 \le 1$, яка рівносильна умові $2 \le x^2 + y^2 \le 4$. Межові лінії області визначення є колами $x^2 + y^2 = 2$ і $x^2 + y^2 = 4$, які також належать області.

Отже, областю визначення цієї функції є множина точок площини xOy, що лежать між колами $x^2 + y^2 = 2$; $x^2 + y^2 = 4$, і точок, що належать цим колам.

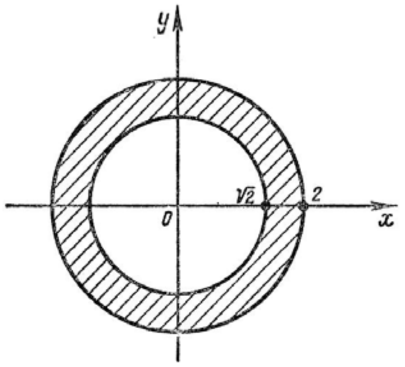


Рисунок 6

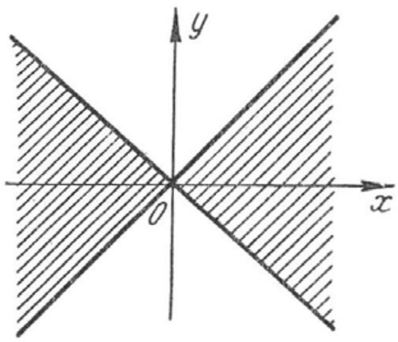


Рисунок 7

►є) Областю визначення цієї функції є множина точок (x, y), для яких $\dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} > 0$. Цей дріб додатний, коли додатний його знаменник, тобто $x^2 - y^2 > 0$, або $y^2 < x^2$, а це рівнозначне умові $|y| < |x|$. Розглянемо два можливі випадки:

1) Якщо $x > 0$, то $|x| = x$ і тоді $|y| < x$, або $-x < y < x$. Геометрично це означає, що областю D визначення функції є

частина правої півплощини (оскільки розглядається значення $x > 0$), обмеженої прямими $y = x$ і $y = -x$ (точки, що лежать на цих прямих в область D не входять);

2) якщо $x < 0$, то $|x| = -x$, і тоді $|y| < -x$, або $x < y < -x$, що визначає ту частину лівої півплощини, яка знаходиться між прямими $y = -x$ і $y = x$ (точки, що лежать на цих прямих в область D не входять) (рис.7). ◄

►ж) Функція визначена для тих значень змінних x, y *і* z, для яких

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} + 1 \geq 0. \qquad (1)$$

Звідси

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} \geq -1, \quad \text{або} \quad \frac{z^2}{16} \leq 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}. \qquad (2)$$

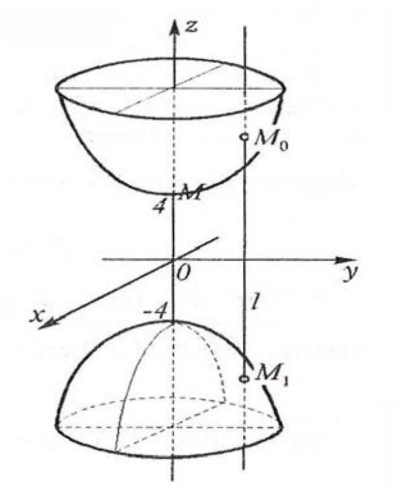


Рисунок 8

Межа цієї області визначається рівнянням $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = -1$. Це рівняння виражає поверхню, яка називається двопорожнинним гіперболоїдом (рис.8).

Проведемо в просторі пряму $l \,//\, Oz$, яка перетне двопорожнинний гіперболоїд в точках M_0 *і* M_1.

Звідси видно, що умова (2), а отже, і умова (1) виконуються для всіх зовнішніх точок простору по відношенню до поверхні гіперболоїда. ◄

2. Знайти лінії рівня функцій:

а) $z=\dfrac{y}{x}$;   б) $z=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$;   в) $z=x^2-y^2$.

►а) Лінії рівня визначаються рівнянням $\dfrac{y}{x}=c$, де с – довільна стала; звідси $y=cx$.

Геометрично це рівняння описує сім'ю прямих на площині xOy, що проходять через початок координат, за виключенням самого початку координат (рис.9). ◄

►б) Ця функція двох змінних визначена скрізь на площині xOy, крім точки О – початку координат. Покладемо $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=c,\ \ |c|\le 1$, тоді $x^2=c^2(x^2+y^2)\Rightarrow(1-c^2)x^2=c^2y^2$.

Звідси, $(1-c)x^2-c^2y^2=0\Rightarrow\left(\sqrt{1-c^2}x-cy\right)\left(\sqrt{1-c^2}x+cy\right)=0.$

Отже, лініями рівня є дві сім'ї прямих: $(\sqrt{1-c^2}x+cy)=0$ $і$ $(\sqrt{1-c^2}x-cy)=0$, що проходять через початок координат, за виключенням самого початку координат. ◄

►в) Функція $z=x^2-y^2$ визначає в просторі поверхню – гіперболічний параболоїд (рис.10). Рівняння ліній рівня має вигляд $x^2 - y^2 = C$. Геометрично – це рівносторонні гіперболи: якщо $C > 0$ – гіперболи з вершинами на осі Ox; $C < 0$ – гіперболи з вершинами на осі Oy; якщо $C = 0$ одержуємо прямі $y = \pm x$ – асимптоти цих гіпербол (рис.11). ◄

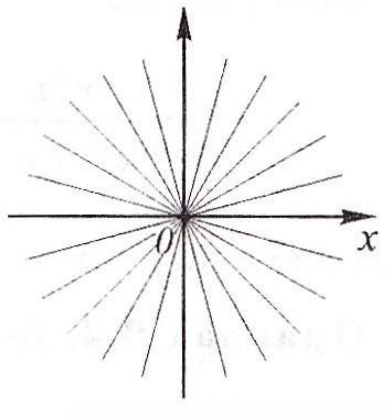


Рисунок 9

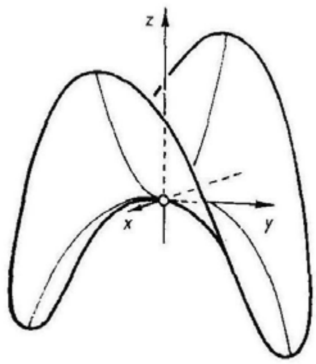


Рисунок 10

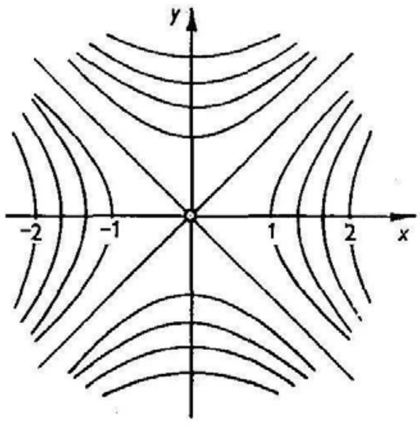


Рисунок 11

3. Знайти поверхні рівня функцій:

а) $u = x^2 + y^2 - z$; б) $u = arctg\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

в) $u = x^2 + y^2 - z^2$.

►а) Поверхні рівня f визначаються з рівняння $x^2 + y^2 - z = C$, або $z = x^2 + y^2 + C$. Це – сім'я параболоїдів обертання з віссю Oz, вершини яких лежать на цій же осі (рис.12). ◄

►б) Оскільки поверхні рівня визначаються рівнянням $f(x,y,z) = c$, то маємо $arctg\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} = c$. Звідси $\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} = tgc$, або $z^2 = (x^2+y^2)tg^2c$, $x^2+y^2 \neq 0$, а це рівняння задає сім'ю кругових конусів із спільною вершиною в початку координат, не включаючи цю вершину, і спільною віссю Oz.◄

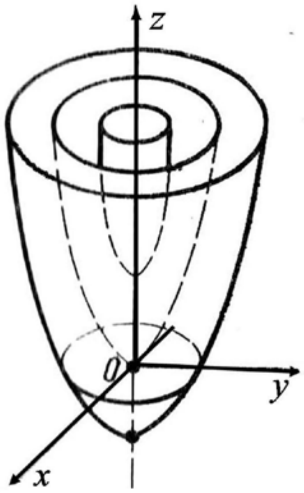


Рисунок 12

►в) Рівняння сім'ї поверхонь рівня має вигляд $x^2 + y^2 - z^2 = C$. Якщо $C = 0$, то $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ – конус; якщо $C > 0$, то $x^2 + y^2 - z^2 = C$ – сім'я однопорожнинних гіперболоїдів; якщо $C < 0$, то $x^2 + y^2 - z^2 = C$ – сім'я двопорожнинних гіперболоїдів. ◄

Завдання для самостійного розв'язання

1. Знайти області визначення функцій:

а) $z = x^2 + y^2$; **б)** $z = \dfrac{1}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$;

в) $z = \arcsin 3xy$; **г)** $z = \sqrt{\ln x + \ln y}$;

д) $u = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2}}$; **е)** $u = \dfrac{z}{x+y}$;

є) $u = \arcsin\left(\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$; **ж)** $u = \sqrt{x + y + z}.$

2. Знайти лінії рівня функцій:

а) $z = x + 2y$; **б)** $z = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}.$

3. Знайти поверхні рівня функцій:

а) $u = 2x + y + z$; **б)** $u = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2}.$

1.2 Границя і неперервність функції

Поняття границі і неперервності функції декількох змінних залишаються такими ж, як і у випадку функцій однієї дійсної змінної.

Околом ($\delta -$ околом) точки M_0 називається множина усіх точок M, таких що $\left|\overline{M_0M}\right| < \delta$. З цього випливає, що на площині $\delta -$ околом точки $M_0(x_0, y_0)$ буде відкритий круг з радіусом δ і центром в точці M_0, а в просторі $\delta -$ околом точки $M_0(x_0, y_0, z_0) -$ відкрита куля з радіусом δ і центром в точці M_0.

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякій області D площини xOy і точка $M_0(x_0, y_0)$ є граничною для цієї області, тобто в будь-якому околі цієї точки є точки із D, відмінні від M_0.

Число A називається границею функції двох змінних $z = f(x, y) = f(M)$ при $M \to M_0$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться такий δ - окіл точки $M_0(x_0, y_0)$, що для будь-якої точки $M(x, y) \in D$ з цього околу (за винятком точки M_0) справджується нерівність

$$|f(M) - A| < \varepsilon \quad \textit{або} \quad |f(x, y) - A| < \varepsilon .$$

Це позначається так

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = A \qquad \textit{або} \qquad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$$

оскільки при $M(x, y) \to M_0(x_0, y_0)$, очевидно, $x \to x_0$, $y \to y_0$.

Відзначимо, що до точки M_0 можна наближатись різними шляхами. У випадку існування границі ми повинні отримувати одне і те саме значення по кожному зі шляхів. Тому, якщо можна вказати хоча б два шляхи руху до точки M_0, по яких отримаємо різні значення, то в точці M_0 функція не має границі.

Функція двох змінних називається *нескінченно малою*, якщо її границя рівна нулю.

Функція двох змінних $u = f(M)$ називається *неперервною в точці* $M_0 \in D$, якщо існує границя функції в цій точці і ця границя дорівнює $f(M_0)$, тобто $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$.

Точки, в яких умова неперервності функції порушується, називаються *точками розриву* функції. Точки розриву можуть бути ізольовані, утворювати лінії розриву, поверхні розриву.

Оскільки означення границі та неперервності функції декількох змінних за формою дослівно збігаються з відповідними означеннями для функції однієї змінної, для випадку функції декількох змінних зберігаються всі властивості границь функцій і неперервних функцій однієї змінної, крім, природно, тих, для яких суттєвою є впорядкованість точок числової прямої.

Функція називається *неперервною в області* D, якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

Приклади розв'язання задач

4. З'ясувати, чи існують такі границі:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$**;** **б)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x-y}{x+y}$**.**

►а) Нехай точка $M(x,y)\to M_0(x_0 y_0)$. Розглянемо зміну x $і$ y вздовж прямої $y=kx$. Маємо

$$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}.$$

Таким чином, наближаючись до точки $O(0;0)$ по різних прямих, що відповідають різним значенням *k,* отримуємо різні граничні значення.

Звідси випливає, що границя цієї функції в точці $O(0;0)$ не існує. ◄

►б) Нехай точка *(x,y)* наближається до точки (0;0) уздовж прямої $y=kx$. При $k\neq -1$ маємо

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\dfrac{x-y}{x+y}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-kx}{x+kx}=\dfrac{1-k}{1+k}$. Помічаємо, що в досить малому околі точки (0;0) є точки, в яких значення функції дорівнює нулю, (при $k=1$) і точки, в яких значення функції дорівнює одиниці (при $k=0$).

Отже, границя функції в точці (0;0) не існує. ◄

5. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{(x,y)\to(1;3)}\dfrac{2-xy}{x^2-y^2}$; **б)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}(1+xy)^{\frac{2}{x^2+xy}}$;

в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$; **г)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}}\dfrac{\sin 2xy}{x}$.

►а) Використовуючи теорему про арифметичні операції над границями, а також те, що границя сталої дорівнює значенню цієї сталої, і $\lim\limits_{(x,y)\to(1;3)}x=1,\ \lim\limits_{(x,y)\to(1;3)}y=3,$ дістанемо

$$\lim_{(x,y)\to(1;3)}\frac{2-xy}{x^2-y^2}=\frac{\lim\limits_{(x,y)\to(1;3)}(2-xy)}{\lim\limits_{(x,y)\to(1;3)}(x^2-y^2)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{(x,y)\to(1;3)}2-\lim\limits_{(x,y)\to(1;3)}x-\lim\limits_{(x,y)\to(1;3)}y}{\lim\limits_{(x,y)\to(1;3)}x\cdot x-\lim\limits_{(x,y)\to(1;3)}y\cdot y}=\frac{2-1\cdot 3}{1\cdot 1-3\cdot 3}=\frac{1}{8}.$$ ◄

►б) Запишемо дану функцію у вигляді $\left[(1+xy)^{\frac{1}{xy}}\right]^{\frac{2y}{x+y}}$.

Оскільки $t = xy \to 0$, при $\begin{pmatrix} x \to 0 \\ y \to 2 \end{pmatrix}$, то $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} (1+xy)^{\frac{1}{xy}} =$

$= \lim\limits_{t\to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$. Так як $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{2y}{x+y} = 2$, то шукана границя

дорівнюватиме $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \left[(1+xy)^{\frac{1}{xy}} \right]^{\frac{2y}{x+y}} = \left[\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} (1+xy)^{\frac{1}{xy}} \right]^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \frac{2y}{x+y}} = e^2$. ◄

►в) Перейдемо до полярних координат (цей спосіб зручно використовувати при обчисленні границь в точці (0;0)), покладаючи $x = \rho\cos\varphi,$ $y = \rho\sin\varphi,$ де $0 \le \rho < +\infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi.$ Тоді

$$\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \frac{\rho^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{\rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} = \rho^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi.$$

Оскільки функція $\cos^2\varphi\sin^2\varphi$ обмежена, а $\rho = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$ при $(x;y) \to (0;0)$, то $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0$ (як добуток нескінченно малої функції на обмежену). ◄

►г) Маємо невизначеність типу $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$. Покладемо $2xy = t$. Тоді при $x \to 0$ *і* $y \to 3$ маємо $t \to 0$ і

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}} \dfrac{\sin 2xy}{x} = \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ y\to 3}} \dfrac{\sin t}{t} \cdot 2y = 1 \cdot 6 = 6$. ◄

6. Знайти точки розриву функцій:

а) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$; **б)** $u=\dfrac{1}{x^2+y^2-z}$;

в) $z=\dfrac{x+y}{x^3+y^3}$; **г)** $u=\dfrac{1-xyz}{2x+3y-z+4}$.

►а) Функція x^2+y^2 неперервна для будь-яких значень x і y як многочлен від x і y. За теоремою про неперервність суперпозиції неперервних функцій функція $(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$ також неперервна для будь-яких x і y, крім точки (0;0), де знаменник $\sqrt{x^2+y^2}$ перетворюється в нуль. Тому точка (0;0) є точкою нескінченного розриву. ◄

►б) Функція розривна в кожній точці параболоїда обертання $z=x^2+y^2$. Він є поверхнею розриву даної функції. ◄

►в) Оскільки чисельник і знаменник дробу є неперервними функціями, то функція може мати розрив лише в тих точках, де знаменник $x^3+y^3=0$. Звідси знаходимо $y=-x$. Отже, функція має розриви в точках прямої $y=-x$.

Нехай $x_0\neq 0$, $y_0\neq 0$ і $x_0+y_0\neq 0$. Тоді $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\dfrac{x+y}{x^3+y^3}=$

$$=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y}}\frac{1}{x^2-xy+y^2}=\frac{1}{x_0^2-x_0y_0+y_0^2}.$$

Отже, точки прямої $y=-x$. $(x\neq 0)$ є точками усувного розриву функції z.

Із співвідношення $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x+y}{x^3+y^3} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1}{x^2-xy+y^2} = +\infty$ випливає, що точка (0;0) є точкою нескінченного розриву. ◄

►г) Функція не визначена в точках, у яких знаменник перетворюється в нуль. Тому вона має поверхню розриву – площину $2x+3y-z+4=0$. ◄

Завдання для самостійного розв'язання

4. З'ясувати, чи існують границі:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$; **б)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3-y^3}{x^3+y^3}$.

5. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to 0}} \frac{\sin xy}{y}$; **б)** $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \frac{tg2xy}{x^2y}$;

в) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$; **г)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$;

д) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}} \frac{x^2-y^2}{x^2-xy-x+y}$; **е)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y}{4x^2+y^2}$.

6. Знайти точки розриву функцій:

а) $z=\frac{x^2+2y}{x^2+y^2-4}$; **б)** $z=\frac{1}{xy}$;

в) $u=\frac{1}{x^2+y^2-z^2}$; **г)** $u=\frac{1}{xyz}$.

§ 2. Похідні і диференціали функцій

2.1 Частинні похідні першого порядку

Нехай функція $z = f\left(x, y\right)$ визначена в деякій відкритій області D і точка $M_0(x_0; y_0) \in D$. Тоді різниця $\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0; y_0)$ називається *частинним приростом* функції $z = f\left(x, y\right)$ по змінній x, різниця $\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)$ – *частинним приростом* функції по змінній y, а різниця $\Delta z = f(x_0, +\Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)$ – *повним приростом* функції $z = f\left(x, y\right)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$.

Аналогічно визначаються частинні та повний прирости функцій для довільної кількості змінних. Наприклад, для функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$:

$$\Delta_x u = f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0),$$

$$\Delta_y u = f(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0),$$

$$\Delta_z u = f(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0),$$

$$\Delta u = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0).$$

Якщо позначити $x - x_0 = \Delta x, \quad y - y_0 = \Delta y,$ то рівність $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x; y) =$ $= f(x_0; y_0)$ можна записати так $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} (f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)) = 0$, або $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$.

Ця рівність дає означення неперервності функції $z = f\left(x, y\right)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$.

Якщо існує скінченна границя відношення частинного приросту функції по якомусь із аргументів в точці $M_0 \in D$ до приросту цього аргументу, за умови, що цей приріст прямує до нуля, то цю границю називають *частинною похідною* від функції f по вказаному аргументу.

Для функції двох змінних $z = f\left(x, y\right)$ частинну похідну по x позначають одним із символів: $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$, $f'_x(x_0, y_0)$. Аналогічно частинну похідну по y позначають $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$, $f'_y(x_0, y_0)$.

Отже, за означенням, частинні похідні в точці $M_0(x_0; y_0)$ визначаються співвідношеннями: $f'_x(x_0, y_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0}{\Delta x}$;

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Якщо замість фіксованої точки $M_0(x_0; y_0)$ беруть довільну точку $M(x; y) \in D$, то частинні похідні відповідно записують $f'_x(x, y)$ та $f'_y(x, y)$.

З означення випливає, що частинна похідна функції $z = f(x; y)$ по змінній x є звичайною похідною від функції однієї змінної x при фіксованому значенні змінної *y*, а похідна по *y* є похідною від функції однієї змінної *y* при фіксованому значенні *x*. Тому частинні похідні обчислюють за формулами й за правилами знаходження похідних функції однієї змінної.

Приклади розв'язання задач

7. Знайти частинні похідні функцій:

а) $z = x^2 + 5xy + 3y^2$; **б)** $z = e^{\frac{x}{y}}$;

в) $z = e^{arctg\sqrt{xy}}$; **г)** $z = x^y \, (x > 0)$;

д) $u = \cos(2x + 3y - 5z)$; **е)** $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

►а) Функція z – функція двох незалежних змінних x і y. При знаходженні частинної похідної по x змінну y вважають сталою, а при знаходженні похідної по y змінну x вважають сталою. Тоді $\frac{\partial z}{\partial x} = (x^2 + 5xy + 3y^2)'_x = 2x + 5y$, оскільки похідна $(3y^2)'_x = 0$. Аналогічно $\frac{\partial z}{\partial y} = (x^2 + 5xy + 3y^2)'_y = 5x + 6y$, бо $(x^2)'_y = 0$.◄

►б) $\frac{\partial z}{\partial x} = \left(e^{\frac{x}{y}}\right)'_x = e^{\frac{x}{y}}\left(\frac{x}{y}\right)'_x = e^{\frac{x}{y}}\frac{1}{y} = \frac{e^{\frac{x}{y}}}{y},$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(e^{\frac{x}{y}}\right)'_y = e^{\frac{x}{y}}\left(\frac{x}{y}\right)'_e = e^{\frac{x}{y}}\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}.$$ ◄

►в) При фіксованому y функція z є складеною функцією аргумента x. Знаходимо похідну цієї функції

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{arctg\sqrt{xy}} \cdot \frac{1}{1+xy} \cdot \frac{1}{2\sqrt{xy}} \cdot y = \frac{\sqrt{y}e^{arctg\sqrt{xy}}}{2\sqrt{x}(1+xy)}.$$

При фіксованому x функція z є складеною функцією аргумента y, тому

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{arctg\sqrt{xy}} \frac{1}{1+xy}\frac{1}{2\sqrt{xy}} x = \frac{\sqrt{x}e^{arctg\sqrt{xy}}}{2\sqrt{y}(1+xy)}.$$ ◄

►г) При знаходженні частинної похідної функції $z = x^y$ за змінною x розглядаємо функцію z як функцію однієї змінної x (вважаємо, що y має фіксоване значення), при цьому функція $z = x^y$ є степеневою функцією аргумента x. За правилом диференціювання степеневої функції маємо $\frac{\partial z}{\partial x} = (x^y)'_x = yx^{y-1}$.

Аналогічно при знаходженні частинної похідної $\frac{\partial z}{\partial y}$ вважаємо, що зафіксовано значення x, і розглядаємо функцію $z = x^y$ як показникову функцію аргумента y. Одержуємо $\frac{\partial z}{\partial y} = (x^y)'_y = x^y \ln x$. ◄

►д) Функція u є функцією трьох незалежних змінних x, y і z. При знаходженні частинної похідної по кожній із цих змінних дві інші змінні вважають сталими величинами. Тому

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (\cos(2x+3y-5z))'_x = -\sin(2x+3y-5z)(2x+3y-5z)'_x =$$
$$= -2\sin(2x+3y-5z),$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = (\cos(2x+3y-5z))'_y = -\sin(2x+3y-5z)(2x+3y-5z)'_y =$$
$$= -3\sin(2x+3y-5z),$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} = (\cos(2x+3y-5z))'_z = -\sin(2x+3y-5z)(2x+3y-5z)'_z =$$
$$= 5\sin(2x+3y-5z).$$ ◄

►е) При фіксованих значеннях y і z функція $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ є складеною функцією аргумента x. Знаходимо похідну цієї функції по x

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Аналогічно $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot 2y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot 2z=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Зазначимо, що одержані формули не мають змісту в точці (0;0;0). Покажемо, що в цій точці частинні похідні цієї функції не існують. Справді, $u(x;0;0)=\sqrt{x^2}=|x|$, а ця функція аргумента x не має похідної в точці $x=0$, тобто частинна похідна $\frac{\partial u}{\partial x}$ в точці (0;0;0) не існує.

Аналогічно можна показати, що частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial y}$ і $\frac{\partial u}{\partial z}$ в точці O також не існують. ◄

8. Показати, що функція:

а) $z=\ln(e^x+e^y)$ задовольняє рівнянню $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$;

б) $z=y^2\sin(x^2-y^2)$ задовольняє рівнянню $y^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xz$.

►а) Знаходимо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{e^x}{e^x+e^y},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{e^y}{e^x+e^y}.$$

Сума частинних похідних складе

$$\frac{e^x}{e^x+e^y}+\frac{e^y}{e^x+e^y}=\frac{e^x+e^y}{e^x+e^y}=1. \blacktriangleleft$$

►б) Знаходимо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y^2\cos(x^2-y^2)2x=2xy^2\cos(x^2-y^2),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2y\sin(x^2-y^2)+y^2\cos(x^2-y^2)(-2y)=$$

$$=2y\sin(x^2-y^2)-2y^3\cos(x^2-y^2).$$

Домножимо обидві частини першої рівності на y^2, а другої – на xy і почленно додамо одержані вирази, дістанемо $y^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xy^2\sin(x^2-y^2)$. Оскільки $z=y^2\sin(x^2-y^2)$, то права частина останньої рівності є $2xz$, що і доводить потрібне. ◄

Завдання для самостійного розв'язання

7. Знайти частинні похідні функцій:

а) $z=3x^2+xy^3+y^2$; **б)** $z=\frac{x}{y}+\cos xy-\ln(x^2+y^2)$;

в) $z=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$; **г)** $z=x^n+y^n$;

д) $z=\cos(ax+by)$; **е)** $u=ax+by+cz$;

є) $z=y\sin x+\sin y$; **ж)** $z=x^{\sin y}\,(x>0)$;

з) $u = z^{xy} \, (z > 0)$; **и)** $u = 2y\sqrt{x} + 3y^2 \cdot \sqrt[3]{z^2}$.

8. Показати, що функція задовольняє заданому рівнянню:

а) $z = arctg\dfrac{y}{x}, \quad y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = -1$;

б) $z = \dfrac{x^2}{2y} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}, \quad x^2\dfrac{\partial z}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x^3}{y}$.

2.2 Повний диференціал функції та його застосування до наближених обчислень

Повним приростом функції $z = f(x, y)$ в точці $M(x, y)$ називається різниця $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$, де Δx та Δy – довільні прирости аргументів $\left(M(x + \Delta x,\, y + \Delta y) \in D\left(f\right)\right)$.

Функція $z = f(x, y)$ називається *диференційовною* в точці $\left(x, y\right)$, якщо в цій точці повний приріст можна подати у вигляді $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho), \quad \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, де A і B – дійсні числа, що не залежать від приростів Δx та Δy. Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці $M_0(x_0, y_0)$, то в цій точці існують частинні похідні функції, причому $f'_x(x_0, y_0) = A, \quad f'_y(x_0, y_0) = B$.

Повним диференціалом функції $z = f(x, y)$ називається головна частина повного приросту Δz, лінійна відносно приростів аргументів Δx та Δy, тобто $dz = A\Delta x + B\Delta y$.

Диференціали незалежних змінних збігаються з їх приростами, тобто $dx = \Delta x \;\; i \;\; dy = \Delta y.$

Повний диференціал функції $z = f(x, y)$ обчислюється за формулою

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\ . \qquad (1)$$

Аналогічно, повний диференціал функції трьох аргументів $u = f(x, y, z)$ визначається за формулою

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz\ . \qquad (2)$$

При досить малому $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ для диференційовної функції $z = f(x, y)$ справедлива наближена рівність $\Delta z \approx dz,$ а звідси

$$f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y. \qquad (3)$$

У випадку функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$ аналогічно $\Delta u \approx du$, тоді

$$\begin{gathered} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) \approx f(x_0, y_0, z_0) + \\ + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}\Delta z. \end{gathered} \qquad (4)$$

Наближена рівність тим точніша, чим менші величини $\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z$. Обчислення приросту функції Δf значно складніше, ніж обчислення її диференціала df . Тому в практичних обчисленнях з достатньою точністю при малих приростах незалежних змінних обчислення приросту функції заміняють обчисленням її диференціала.

Приклади розв’язання задач

9. Знайти повний приріст Δz і повний диференціал dz функції $z = x^2 y$ в точці $P_0(1;2)$, якщо:

а) $\Delta x = 1; \quad \Delta y = 2;$ **б)** $\Delta x = 0,1; \quad \Delta y = 0,2;$

в) $\Delta x = 0,01; \quad \Delta y = 0,02.$

►а) Знайдемо повний приріст і повний диференціал функції в деякій точці $P_0(x,y)$ за довільних Δx *і* Δy. Таким чином

$$\begin{aligned}\Delta z = & \ f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = (x+\Delta x)^2(y+\Delta y) - x^2 y = \\ & = (x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2)(y+\Delta y) - x^2 y = x^2 y + 2xy\Delta x + y(\Delta x)^2 + \\ & + x^2\Delta y + 2x\Delta x\Delta y + (\Delta x)^2\Delta y - x^2 y = 2xy\Delta x + x^2\Delta y + 2x\Delta x\Delta y + \\ & + y(\Delta x)^2 + (\Delta x)^2\Delta y.\end{aligned} \tag{5}$$

Згідно означення повний диференціал функції

$$dz = 2xy\Delta x + x^2\Delta y\,. \tag{6}$$

Різниця складе

$$\left|\Delta z - dz\right| = \left|2x\Delta x\Delta y + y(\Delta x)^2 + (\Delta x)^2\Delta y\right|. \tag{7}$$

Рівність (7) – це похибка, яка виникає при заміні приросту Δz функції її диференціалом dz.

Знайдемо повний приріст Δz, повний диференціал dz і похибку $\left|\Delta z - dz\right|$ при заданих числових значеннях.

Підставляючи $x=1,\ y=2,\ \Delta x=1,\ \Delta y=2$ в (5), (6), (7), одержимо $\Delta z = 14,\quad dz = 6,\quad \left|\Delta z - dz\right| = 8.$ ◄

►б) При $x=1;\ y=2;\ \Delta x=0,1;\ \Delta y=0,2$ маємо $\Delta z = 0,062;\quad dz = 0,6;\quad \left|\Delta z - dz\right| = 0,062.$ ◄

►в) При $x=1;\ y=2;\ \Delta x=0,01;\ \Delta y=0,02$ маємо $\Delta z = 0,060602;\quad dz = 0,06;\quad \left|\Delta z - dz\right| = 0,000602.$

З аналізу одержаних результатів видно, що у випадку зменшення приростів Δx і Δy абсолютна похибка також зменшується. ◄

10. Знайти повний диференціал функції $z = \ln(y + \sqrt{x^2 + y^2})$.

► Знаходимо частинні похідні: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{y + \sqrt{x^2 + y^2}} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y + \sqrt{x^2 + y^2}}\left(1 + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

За формулою (1) маємо

$$dz = \frac{x}{(y + \sqrt{x^2 + y^2})\sqrt{x^2 + y^2}}\,dx + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,dy.$$ ◄

11. Знайти повний диференціал функції $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$ в точках $P(x; y; z)$ і $P_0(1;4;8)$.

► Знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = -x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2y = -y(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2z = -z(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

Тоді за формулою (2) $du(P) = -\dfrac{xdx + ydy + zdz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$, зокрема в точці P_0 диференціал дорівнюватиме

$$du(P_0) = -\frac{dx + 4dy + 8dz}{(1 + 16 + 64)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{729}(dx + 4dy + 8dz).$$

Зауваження. Функція $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, очевидно, неперервна в точці (0;0;0), але не є диференційовною в ній, бо ж не має в ній частинних похідних (див. приклад 7е). Це доводить, що неперервність функції є тільки необхідною умовою диференційовності, але не є достатньою. ◄

12. Обчислити наближено за допомогою повного диференціала величину $(1,04)^{5,001}$.

►Шукане число будемо вважати значенням функції $f(x,y)=x^y, x>0$ при $x=x_0+\Delta x, y=y_0+\Delta y.$ Скористаємось формулою

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\approx f(x_0,y_0)+f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y.$$

Маємо $f'_x=yx^{y-1},\ f'_y=x^y\ln x.$ Поклавши $x_0=1;\ y_0=5;$ $\Delta x=0,04;\ \Delta y=0,001,$ знайдемо $f(x_0,y_0)=f(1;5)=1^5=1,$

$f'_x(x_0,y_0)=f'_x(1;5)=5,\quad f'_y(x_0,y_0)=f'_y(1;5)=0.$

Скориставшись (3), остаточно одержимо:

$(x+\Delta x)^{y+\Delta y}\approx x^y+yx^{y-1}\Delta x+x^y\ln x\Delta y,$ тобто

$(1,04)^{5,001}\approx 1+5\cdot 0,04+0\cdot 0,001=1,2.$ ◄

Завдання для самостійного розв’язання

9. Знайти повний приріст Δz і повний диференціал dz функції $z=x^3y^2$ в точці $P_0\left(2;1\right)$, якщо:

а) $\Delta x=-0,1;\ \Delta y=-0,1;$ **б)** $\Delta x=-0,01;\ \Delta y=-0,01.$

10. Знайти повні диференціали заданих функцій:

а) $z = arctg\dfrac{y}{x}$; **б)** $z = x\sin y + y\sin x$;

в) $z = \dfrac{arctgy}{1+x^2}$; **г)** $z = \ln tg\dfrac{x}{y}$;

д) $z = \arcsin\sqrt{\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$; **е)** $u = e^{\frac{x}{y}} + e^{\frac{z}{y}}$.

11. Знайти диференціали:

а) $du(2;2;2)$, якщо $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$;

б) $du(0;2;3)$, якщо $u = e^{\sin\frac{xz}{y}}$.

12. Обчислити наближено за допомогою повного диференціала величини:

а) $(0,97)^{2,02}$; **б)** $(1,003)^{2,07}$; **в)** $\sqrt{(6,03)^2 + (8,04)^2}$.

2.3 Частинні похідні і диференціали вищих порядків

Частинними похідними другого порядку від функції $z = f(x,y)$ називаються частинні похідні від її частинних похідних першого порядку. Їх позначають наступним чином

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x,y) = f^{(2)}_{x^2}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x,y) = f^{(2)}_{xy}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x,y) = f^{(2)}_{yx}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x,y) = f^{(2)}_{y^2}(x,y).$$

Аналогічно визначаються частинні похідні третього і вищих порядків, зокрема

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}= f'''_{xxx}(x,y)= f^{(3)}_{x^3}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}= f'''_{xxy}(x.y)= f^{(3)}_{x^2y}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}= f'''_{xyy}(x,y)= f^{(3)}_{xy^2}(x,y) \text{ і т.д.}$$

Якщо мішані похідні f''_{xy} і f''_{yx} в точці (x,y) неперервні, то $f''_{xy}(x,y)= f''_{yx}(x,y)$ (результат не залежить від порядку диференціювання). Це твердження узагальнюється на випадок мішаних похідних третього і вищих порядків, наприклад: $\dfrac{\partial^4 z}{\partial x\partial y^2\partial x}=\dfrac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial y^2}$; $\dfrac{\partial^5 z}{\partial x\partial y^2\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^5 z}{\partial x^2\partial y^3}$.

Диференціалом другого порядку від функції $z= f(x,y)$ називається диференціал від її диференціала першого порядку, тобто $d^2z=d(dz)$.

Аналогічно визначаються диференціали третього і вищих порядків, тобто $d^3z=d(d^2z)$, ..., $d^nz=d(d^{n-1}z)$.

Якщо x *і* $y-$ незалежні змінні і функція $f(x,y)$ має неперервні частинні похідні, то диференціали вищих порядків визначаються за формулами:

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2; \tag{8}$$

$$d^3z=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}dx^2dy+3\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}dxdy^2+\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3. \tag{9}$$

Взагалі, справедлива символічна формула $d^nz=\left(\dfrac{\partial}{\partial x}dx+\dfrac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z$, яка формально розкривається за біноміальним законом.

У випадку функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$ матимемо

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \right)^n u.$$

Зокрема, при $n = 2$

$$d^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dxdy + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} dxdz + \\ + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} dydz + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz^2. \tag{10}$$

Приклади розв'язання задач

13. Знайти частинні похідні другого порядку від функцій:

а) $z = (x^2 + y^2)^2$**;** **б)** $z = x^y$; **в)** $z = x \cos xy^2$.

►а) Знаходимо частинні похідні першого порядку

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2(x^2 + y^2)(x^2 + y^2)'_x = 4x^3 + 4xy^2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2(x^2 + y^2)(x^2 + y^2)'_y = 4x^2 y + 4y^3.$$

Диференціюємо кожну з частинних похідних по x і по y:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (4x^3 + 4xy^2)'_x = 12x^2 + 4y^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (4x^3 + 4xy^2)'_y = 8xy,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4x^2 y + 4y^3)'_y = 4x^2 + 12y^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (4x^2 y + 4y^3)'_x = 8xy. \blacktriangleleft$$

►б) Знаходимо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^y)'_x = yx^{y-1}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = (x^y)'_y = x^y \ln x.$$

Потім визначаємо частинні похідні від частинних похідних першого порядку, отримуємо частинні похідні другого порядку від даної функції:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (yx^{y-1})'_x = y(y-1)x^{y-2},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (yx^{y-1})'_y = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x = x^{y-1}(1 + y\ln x),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (x^y \ln x)'_x = yx^{y-1}\ln x + x^y \cdot \frac{1}{x} = x^{y-1}(1 + y\ln x),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (x^y \ln x)'_y = (x^y \ln x)\ln x = x^y (\ln x)^2. \; ◄$$

►в) Послідовно знаходимо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos xy^2 + x(-\sin xy^2)y^2 = \cos xy^2 - xy^2 \sin xy^2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x(-\sin xy^2)2xy = -2x^2 y \sin xy^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -y^2 \sin xy - y^2 \sin xy^2 - xy^2 y^2 \cos xy^2 =$$

$$= -2y^2 \sin xy^2 - xy^4 \cos xy^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2xy \sin sy^2 - 2xy \sin xy^2 - xy^2 \cdot 2xy \cos xy^2 =$$

$$= xy^2 \cdot 2xy \cos xy^2 = -4xy \sin xy^2 - 2x^2 y^3 \cos xy^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (-2x^2 y \sin xy^2)'_x = -4xy \sin xy^2 - 2x^2 yy^2 \cos xy^2 =$$

$= -4xy\sin xy^2 - 2x^2y^3\cos xy^2,$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (-2x^2 y\sin xy^2)'_y = -2x^2\sin xy^2 - 2x^2\, y\cos xy^2\, 2xy =$$

$= -2x^2\sin xy^2 - 4x^3y^2\cos xy^2.$ ◄

Зауваження. Ми бачимо, що в кожному з прикладів 13 мішані частинні похідні рівні між собою. Це наслідок того, що вони неперервні.

14. Знайти частинні похідні третього порядку від функції $z = x^4 + 3x^3y - 4x^2y^2 + 5xy^3 - y^4$.

►Знаходимо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 + 9x^2y - 8xy^2 + 5y^3,\ \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^3 - 8x^2y + 15xy^2 - 4y^3,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (4x^3 + 9x^2y - 8xy^2 + 5y^3)'_x = 12x^2 + 18xy - 8y^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (3x^3 - 8x^2y + 15xy^2 - 4y^3)'_y = -8x^2 + 30xy - 12y^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = (4x^3 + 9x^2y - 8xy^2 + 5y^3)'_y = 9x^2 - 16xy + 15y^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = (3x^3 - 8x^2y + 15xy^2 - 4y^3)'_x = 9x^2 - 16xy + 15y^2.$$

Тут варто зауважити відмінність у позначеннях $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$: символ $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ означає, що від функції z спочатку взято похідну по змінній x, а одержаний результат продиференційовано по змінній y, тобто $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),$

а $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$. Отже, похідні $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ відрізняються порядком (послідовністю), в якому здійснюється диференціювання.

Якщо продиференціювати по змінній y похідну $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, то дістанемо третю похідну (похідну третього порядку) $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = (12x^2 + 18xy - 8y^2)'_y = 18x - 16y.$

Якщо продиференціювати по змінній x похідну $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, то дістанемо третю похідну

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = (9x^2 - 16xy + 15y^2)'_x = 18x - 16y.$$

Аналогічно, продиференціювавши по змінній y похідну $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, дістанемо

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = (9x^2 - 16xy + 15y^2)'_y = -16x + 30y.$$

Похідна по x від $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ є третьою похідною вигляду

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = (9x^2 - 16xy + 15y^2)'_x = 18x - 16y.$$

Похідні $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} = (9x^2 - 16xy + 15y^2)'_y = -16x + 30y$ та

$\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = (-8x^2 + 30xy - 12y^2)'_x = -16x + 30y$ рівні між собою.

Нарешті, похідна по x від $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ дорівнює $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 24x + 18y$,

а похідна по y від $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ складе $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 30x - 24y$.

Тут варто зауважити, що похідні $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \dfrac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y}, \dfrac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}$

та $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}, \dfrac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$ відрізняються тільки порядком диференціювання.

Як бачимо, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \dfrac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} = \dfrac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}$,

$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \dfrac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$. ◄

15. Знайти похідну $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$, якщо $u = \sin(xyz)$.

► Послідовно знаходимо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (\sin(xyz))'_x = yz\cos(xyz),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = (yz\cos(xyz))'_y = z\cos(xyz) - xyz^2\sin(xyz),$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = (z\cos(xyz) - xyz^2\sin(xyz))'_z = \cos(xyz) - xyz\sin(xyz) -$$

$$-2xyz\sin(xyz) - x^2y^2z^2\cos(xyz) = (1 - x^2y^2z^2)\cos(xyz) -$$
$$-3xyz\sin(xyz). \blacktriangleleft$$

16. Показати, що функція $z = arctg\,\frac{y}{x}$ задовольняє рівнянню Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

► Знаходимо частинні похідні першого та другого порядків:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y}{(x^2+y^2)^2}2x = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{x}{(x^2+y^2)^2}2y = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Підставивши знайдені вирази $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ у ліву частину рівняння Лапласа, одержимо $\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = 0,$ що й треба було довести. ◄

17. Знайти повні диференціали другого порядку функцій:

а) $z = e^{x-y^2} + \cos x$; **б)** $u = e^{xyz}$.

►а) Знайдемо частинні похідні заданої функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{x-y^2}-\sin x,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^{x-y^2}-\cos x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2ye^{x-y^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-2ye^{x-y^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2e^{x-y^2}(1-2y^2).$$

Відтак, за формулою (8) запишемо

$$d^2z=(e^{x-y^2}-\cos x)dx^2-4ye^{x-y^2}dxdy+2e^{x-y^2}(2y^2-1)dy^2. \blacktriangleleft$$

►б) Задана функція є функцією трьох змінних. Скористаємось формулою (10). Знайдемо усі частинні похідні, які входять у цю формулу. Отже,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=(e^{xyz})'_x-=yze^{xyz},\ \frac{\partial u}{\partial y}=(e^{xyz})'_y=xze^{xyz},\ \frac{\partial u}{\partial z}=(e^{xyz})'_z-=xye^{xyz},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=(yze^{xyz})'_x=y^2z^2e^{xyz},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=(yze^{xyz})'_y=(z+xyz^2)e^{xyz},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=(yze^{xyz})'_z=(y+xy^2z)e^{xyz},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(xze^{xyz})'_y=x^2z^2e^{xyz},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=(xze^{xyz})'_z=(x+x^2yz)e^{xyz},\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=(xye^{xyz})'_z=x^2y^2e^{xyz}.$$

Підставимо знайдені частинні похідні у формулу (10)

$$d^2u=(y^2z^2dx^2+2(z+xyz^2)dxdy+2(y+xy^2z)dxdz+x^2z^2dy^2+$$
$$+2(x+x^2yz)dydz+x^2y^2dz^2)e^{xyz}=(y^2z^2dx^2+x^2z^2dy^2+x^2y^2dz^2+$$
$$+2yz^2xdxdy+2xy^2zdxdz+2x^2yzdydz+2zdxdy+2ydxdz+$$
$$+2xdydz)e^{xyz}=((yzdx+zxdy+xydz)^2+2(zdxdy+xdydz+ydzdx))e^{xyz}.$$

Таким чином,

$$d^2u=((yzdx+zxdy+xydz)^2+2(zdxdy+xdydz+ydzdx))e^{xyz}. \blacktriangleleft$$

18. Знайти d^2z послідовним диференціюванням, якщо $z=x^3+3x^2y-y^3$.

► Визначимо спочатку диференціал першого порядку цієї функції. Оскільки похідні дорівнюють

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^3 + 3x^2 y - y^3)'_x = 3(x^2 + 2xy),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^3 + 3x^2 y - y^3)'_y = 3(x^2 - y^2),$$

то $dz = 3(x^2 + 2xy)dx + 3(x^2 - y^2)dy.$

Диференціюючи цю рівність, зважимо на те, що диференціали dx і dy незалежних змінних вважаємо сталими величинами, а тому виносимо їх за знак диференціала

$$\begin{aligned} d^2 z &= d(dz) = d[3(x^2 + 2xy)dx + 3(x^2 - y^2)dy] = (3(x^2 + 2xy)dx + \\ &+ 3(x^2 - y^2)dy)'_x dx + (3(x^2 + 2xy)dx + 3(x^2 + 2xy)dx + \\ &+ 3(x^2 - y^2)dy)'_y dy = 3(2x + 2y)dx^2 + 6xdydx + 6xdxdy - \\ &- 6ydy^2 = 6[(x + y)dx^2 + 2xdxdy - ydy^2]. \end{aligned} \qquad (11)$$

Тепер, знаючи диференціал другого порядку, можна знайти частинні похідні другого порядку. Очевидно, що коефіцієнт при dx^2 дорівнює $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, коефіцієнт при $dxdy$ є $2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, а коефіцієнт при dy^2 є $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. Це випливає з того, що при довільних dx і dy рівність

$$Adx^2 + Bdxdy + Cdy^2 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

справедлива тільки за умов

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = A, \quad 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = B, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = C.$$

Таким чином, з (11) робимо висновок, що

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6(x+y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -6y. \ ◄$$

19. Знайти диференціал третього порядку $d^3 z$ функції $z = \cos(x + 2y^2)$.

► Знаходимо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\sin(x+2y^2), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (-\sin(x+2y^2)'_y = -\cos(x+2y^2),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (-\sin(x+2y^2))'_y = -4y\cos(x+2y^2),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -4\sin(x+2y^2),$$

$$\frac{\partial^2 z}{{}^2 y^2} = (-4y\sin(x+2y^2))'_y = -4\sin(x+2y^2 - 16y^2\cos(x+2y^2),$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = (-\cos(x+2y^2))'_x = \sin(x+2y^2),$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = (-\cos(x+2y^2)'_y = 4y\sin(x+2y^2),$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = (-4y\cos(x+2y^2))'_y = -4\cos(x+2y^2) + 16y^2\sin(x+2y^2),$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = (-4\sin(x+2y^2) - 16y^2\cos(x+2y^2))'_y = -16y\cos(x+2y^2) -$$

$$-32y\cos(x+2y^2) + 64y^3\sin(x+2y^2) = -48y\cos(x+2y^2) +$$

$$+64y^3\sin(x+2y^2).$$

За формулою (9) запишемо

$$d^3z = \sin(x+2y^2)dx^3 + 12y\sin(x+2y^2)dx^2dy + [-12\cos(x+2y^2) + $$
$$+ 48y^2\sin(x+2y^2)]dxdy^2 + [-48y\cos(x+2y^2) + 64y^3\sin(x+2y^2)]dy^3.$$

Тепер обчислимо диференціал третього порядку d^3z шляхом трьох послідовних диференціювань. Спершу маємо

$$dz = -\sin(x+2y^2)dx - 4y\sin(x+y^2)dy =$$
$$= -\sin(x+2y^2)\cdot(dx+4ydy).$$

Диференціюючи другий раз треба пам'ятати, що диференціали dx і dy незалежних змінних треба вважати сталими величинами, а тому виносимо їх за знак диференціала

$$d^2z = d\left(dz\right) = d\left[-\sin\left(x+2y^2\right)\cdot\left(dx+4ydy\right)\right] =$$
$$= d\left[-\sin\left(x+2y^2\right)\right]\cdot\left(dx+4ydy\right) + \left[-\sin\left(x+2y^2\right)\right]d\left(dx+4ydy\right) =$$
$$= \left[-\cos\left(x+2y^2\right)dx - 4y\cos\left(x+2y^2\right)dy\right]\cdot\left(dx+4ydy\right) +$$
$$+ \left[-\sin\left(x+2y^2\right)\right]4dydy = -\cos\left(x+2y^2\right)dx^2 - 4y\cos\left(x+2y^2\right)dydx -$$
$$-4y\cos\left(x+2y^2\right)dxdy - 16y^2\cos\left(x+2y^2\right)dy^2 - 4\sin\left(x+2y^2\right)dy^2 =$$
$$= -\cos\left(x+2y^2\right)dx^2 - 8y\cos\left(x+2y^2\right)dxdy -$$
$$-\left[16y^2\cos\left(x+2y^2\right) + 4\sin\left(x+2y^2\right)\right]dy^2.$$

Щоб спростити обчислення диференціала третього порядку, вираз диференціала другого порядку подамо у вигляді

$$d^2z = -\cos(x+2y^2)(dx^2 + 8ydxdy + 16y^2dy^2) - 4\sin(x+2y^2)dy^2.$$

Тоді $d^3z = d(d^2z) = d[-\cos(x+2y^2)(dx^2 + 8ydxdy + 16y^2dy^2] +$

$$+d[-4\sin(x+2y^2)dy^2]=d[-\cos(x+2y^2)](dx^2+8ydxdy+$$
$$+16y^2dy^2)+[-\cos(x+2y^2]d(dx^2+8ydxdy+16y^2dy^2)+$$
$$+d[-4\sin(x+2y^2)]dy^2=[\sin(x+2y^2)dx+4y\sin(x+2y^2)dy]$$
$$(dx^2+8ydxdy+16y^2dy^2)+[-\cos(x+2y^2)](8dydxdy+32ydydy^2)+$$
$$+[-4\cos(x+2y^2)dx-16y\cos(x+2y^2)dy]dy^2=$$
$$+16y^2\sin(x+2y^2)dxdy^2+64y^3\sin(x+2y^2)dy^3-$$
$$-8\cos(x+2y^2)dxdy^2-32y\cos(x+2y^2)dy^3-$$
$$-4\cos(x+2y^2)dxdy^2-16y\cos(x+2y^2)dy^3=$$

$$=\sin(x+2y^2)dx^3+12y\sin(x+2y^2)dx^2dy+$$
$$+[48y^2\sin(x+2y^2)-12\cos(x+2y^2)]dxdy^2+$$
$$+[64y^3\sin(x+2y^2)-48y\cos(x+2y^2)]dy^3.$$

З одержаного результату видно, що коефіцієнти при dx^3, dx^2dy, $dxdy^2$, dy^3 відповідно дорівнюють

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3},\ \ 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y},\ \ 3\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2},\ \ \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.\ \blacktriangleleft$$

Завдання для самостійного розв'язання

13. Знайти частинні похідні другого порядку від функцій:

а) $z=\ln(x^2+y^2)$; **б)** $z=e^{xy}$; **в)** $z=arctg\,\dfrac{y}{x}$.

14. Перевірити, чи задовольняє функція $z=e^{xy}$ рівняння:

а) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2xy\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2xyz=0$;

б) $x^2 \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2xyz = 0.$

15. Знайти частинні похідні третього порядку:

а) $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ *і* $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$, якщо $z = \cos(ax + e^y);$

б) $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ *і* $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, якщо $z = \sin xy;$

16. Знайти диференціал другого порядку $d^2u,$ якщо:

а) $u = \sqrt{x^2 + y^2};$ **б)** $u = x \ln \dfrac{y}{x};$ **в)** $u = e^{x-2y+z}.$

17. Знайти $d^3 z,$ якщо:

а) $z = e^y \sin x;$ **б)** $z = x \sin y + y \cos x.$

18. Послідовним диференціюванням знайти:

а) $d^2 z,$ якщо $z = y + e^{xy};$

б) $d^3 z,$ якщо $z = x^4 y - xy^4.$

2.4 Диференціювання складених функцій

Нехай $z = f(x, y) -$ функція двох змінних x і y, які залежать від змінних u і v: $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, тоді функція $z = f(x(u, v), y(u, v))$ є складеною функцією незалежних змінних u і v. Якщо функції f, x та y диференційовні (кожна у своїй області), то частинні похідні складеної функції z обчислюються за формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}; \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \tag{12}$$

Якщо $z = f(x, y)$ – диференційовна функція змінних x і y, які, в свою чергу, є диференційовними функціями незалежної змінної t, тобто $x = \varphi(t),\ y = \psi(t),$ то існує повна похідна $\frac{dz}{dt}$ складеної функції $z = f(\varphi(t),\ \psi(t))$ за змінною t, яка обчислюється за формулою:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{13}$$

Зокрема, якщо t збігається із змінною x, то повна похідна $\frac{dz}{dx}$ функції z за змінною x дорівнює

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}; \tag{14}$$

Аналогічно для функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$, де $y = y(x),\ z = z(x)$ маємо формулу повної похідної

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dx}. \tag{15}$$

Приклади розв'язання задач

20. Знайти $\frac{\partial z}{\partial u}$ i $\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо:

а) $z = \ln(x^2 + y^2)$, де $x = uv,\ y = \frac{u}{v}$;

б) $z = arctg\frac{x}{y}$, де $x = u\sin v,\ y = u\cos v$.

► а) Скориставшись формулами (12), знаходимо

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\left(\ln(x^2+y^2)\right)'_x\cdot(uv)'_u+\left(\ln(x^2+y^2)\right)'_y\left(\frac{u}{v}\right)'_u=$$

$$=\frac{2x}{x^2+y^2}v+\frac{2y}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{v}=\frac{2}{u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\left(\ln(x^2+y^2)\right)'_x\cdot(uv)'_v+\left(\ln(x^2+y^2)\right)'_y\left(\frac{u}{v}\right)'_v=$$

$$=\frac{2x}{x^2+y^2}u+\frac{2y}{x^2+y^2}\cdot\left(-\frac{u}{v^2}\right)=\frac{2(v^4-1)}{v(v^4+1)}.\ ◄$$

► б) $\frac{\partial z}{\partial u}=\left(arctg\frac{x}{y}\right)'_x(u\sin v)'_u+\left(arctg\frac{x}{y}\right)'_y(u\cos v)'_u=$

$$=\frac{y^2}{x^2+y^2}\frac{1}{y}\sin v+\frac{y^2}{x^2+y^2}\left(-\frac{x}{y^2}\right)\cos v=\frac{1}{x^2+y^2}(y\sin v-x\cos v)=$$

$$=\frac{1}{u^2\sin^2 v+u^2\cos^2 v}(u\sin v\cos v-u\sin v\cos v)=0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\left(arctg\frac{x}{y}\right)'_x(u\sin v)'_v+\left(arctg\frac{x}{y}\right)'_y(u\cos v)'_v=$$

$$=\frac{y^2}{x^2+y^2}\frac{1}{y}u\cos v+\frac{y^2}{x^2+y^2}\left(\frac{x}{y^4}\right)u\sin v=$$

$$=\frac{1}{x^2+y^2}(yu\cos v+xu\sin v)=\frac{1}{u^2}(u^2\cos^2 v+u^2\sin^2 v)=1.◄$$

21. Знайти $\frac{dz}{dt}$, якщо:

а) $z=x^y$, де $x=\sin t, y=t^2$;

б) $z = \sin\dfrac{x}{y}$, де $x = t^3, y = t^2 + 1.$

►а) Складена функція z залежить від однієї змінної t через проміжні змінні x і y, які в свою чергу залежать від змінної t. Тому за формулою (13) повна похідна цієї функції

$$\frac{dz}{dt} = (x^y)'_x \cdot (\sin t)' + (x^y)'_y \cdot (t^2)' = yx^{y-1}\cos t + x^y \ln x \cdot 2t = t^2(\sin t)^{t^2-1}\cos t +$$

$$+2t(\sin t)^{t^2}\ln\sin t = t(\sin t)^{t^2-1}(t\cos t + 2\sin t \cdot \ln\sin t). ◄$$

►б) Тут також за формулою (13) знаходимо

$$\frac{dz}{dt} = \left(\sin\frac{x}{y}\right)'_x \cdot (t^3)' + \left(\sin\frac{x}{y}\right)'_y \cdot (t^2+1)' = \frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}\cdot 3t^2 - \frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\cdot 2t =$$

$$= \left(3t^2 - 2t\frac{t^3}{t^2+1}\right)\frac{1}{t^2+1}\cos\frac{t^3}{t^2+1} = \frac{t^4+3t^2}{(t^2+1)^2}\cos\frac{t^3}{t^2+1}. ◄$$

22. Знайти $\dfrac{dz}{dx}$ якщо:

а) $z = arctg\,\dfrac{y}{x}$, де $y = x^2$;

б) $z = \ln(x^2 + y^2)$, де $y = e^{x^2}$;

в) $z = \sin(3u + 2v - 4w)$, де $u = \sqrt[3]{x^2}$, $v = \sqrt{1-x^2}$, $w = \dfrac{\ln x}{x}$.

►а) Складена функція z залежить від змінних x та y, де y є функцією змінної x. За формулою (14) маємо

$$\frac{dz}{dx} = \left(arctg\,\frac{y}{x}\right)'_x + \left(arctg\,\frac{y}{x}\right)'_y \cdot (x^2)' = \frac{x^2}{x^2+y^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) +$$

$$+\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{x}\cdot 2x=-\frac{y}{x^2+y^2}+\frac{2x^2}{x^2+y^2}=\frac{1}{1+x^2}. \blacktriangleleft$$

►б)Аналогічно $\frac{dz}{dx}=(\ln(x^2+y^2))'_x+(\ln(x^2+y^2))'_y\cdot(e^{x^2})'=$

$$=\frac{2x}{x^2+y^2}+\frac{2y}{x^2+y^2}e^{x^2}\cdot 2x=\frac{2x}{x^2+e^{2x^2}}(1+2e^{2x^2}). \blacktriangleleft$$

►в) Складена функція z залежить від змінних u, v і w, які є функціями однієї змінної x. Формула повної похідної функції z в цьому випадку має вигляд

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{dw}{dx},$$

а тому $\frac{dz}{dx}=\cos(3u+2v-4w)\frac{2}{\sqrt[3]{x}}+2\cos(3u+2v-4w)\times$

$$\times\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}-4\cos(3u+2v-4w)\frac{(\ln x-1)}{x^2}=2\cos(3u+2v-4w)\times$$

$$\times\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}+\frac{2(\ln x-1)}{x^2}\right).$$

В одержаному виразі замість u, v і w потрібно підставити відповідно $\sqrt[3]{x^2}$, $\sqrt{1-x^2}$, $\ln x/x$. ◄

Завдання для самостійного розв'язання

19. Знайти $\frac{\partial z}{\partial u}$ і $\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо:

а) $z=x^2-y^2$, а $x=uv,\ y=\frac{u}{v+1}$;

б) $z=arctg\frac{x}{y}$, де $x=u+v,\ y=u-v$.

20. Знайти повну похідну $\dfrac{dz}{dt}$, якщо:

а) $z=\sin\dfrac{x}{y}$, де $x=e^t, y=t^2$;

б) $z=e^{x^2+y^2}$, де $x=a\cos t, y=a\sin t$.

21. Знайти $\dfrac{dz}{dx}$, якщо:

а) $z=\sqrt{x^2+y^2}$, де $y=\sin^2 x$;

б) $z=\ln(x^2-y^2)$, де $y=e^x$.

2.5 Диференціювання функцій, заданих неявно

Похідну неявної функції $y=y(x)$, заданої за допомогою рівняння $F(x,y)=0$, де $F(x,y)$ – диференційовна функція змінних x та y, можна обчислити за формулою

$$\frac{dy}{dx}=y'_x=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} \text{ за умови } F'_y\neq 0. \tag{16}$$

Похідні вищих порядків неявної функції можна знайти послідовним диференціюванням заданої формули, вважаючи при цьому y функцією від x.

Аналогічно, частинні похідні неявної функції двох змінних $z=\varphi(x,y)$, заданої рівнянням $F(x,y,z)=0$, де $F(x,y,z)$ – диференційовна функція змінних x, y і z, можна за умови $F'_z\neq 0$ обчислити за формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x,y)=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'(x,y,z)_z};\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x,y)=-\frac{F'(x,y,z)_y}{F'(x,y,z)_z}, \tag{17}$$

Обчислення частинних похідних $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ буде показано на прикладах.

Приклади розв'язання задач

23. Знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ від функцій, заданих неявно:

а) $e^{2x} - e^{2y} = 2xy$; **б)** $\cos(x+y) + y = 0$.

►а) Запишемо рівняння у вигляді $e^{2x} - e^{2y} - 2xy = 0$. Розглянемо функцію $F(x,y) = e^{2x} - e^{2y} - 2xy$, знайдемо частинні похідні

$$F'_x = 2e^{2x} - 2y = 2(e^{2x} - y),\ \ F'_y = -2e^{2y} - 2x = -2(e^{2y} + x).$$

Згідно (16) записуємо $\frac{dy}{dx} = -\frac{2(e^{2x} - y)}{-2(e^{2y} + x)} = \frac{e^{2x} - y}{e^{2y} + x}$. ◄

►б) Тут $F(x,y) = \cos(x+y) + y$. Знаходимо частинні похідні $F'_x = -\sin(x+y)$, $F'_y = -\sin(x+y) + 1$. Тоді

$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin(x+y)}{1 - \sin(x+y)}$. ◄

24. Знайти $\frac{dy}{dx}$ і $\frac{d^2y}{dx^2}$, якщо $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$.

► Позначимо ліву частину даного рівняння через $F(x,y)$. Тоді $F'_x(x,y) = y - \frac{ye^{xy} - ye^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}} = \frac{2ye^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}}$,

$$F'_y(x,y) = x - \frac{xe^{xy} - xe^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}} = \frac{2xe^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}}.$$

За формулою (16) маємо $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2ye^{-xy}}{2xe^{-xy}} = -\dfrac{y}{x}.$

Диференціюємо ще раз, зваживши на те, що y є функцією від x,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{y}{x}\right) = -\frac{x\dfrac{dy}{dx} - y}{x^2} = \frac{y - x(-\dfrac{y}{x})}{x^2} = \frac{2y}{x^2}. \ ◄$$

25. Знайти частинні похідні першого і другого порядків функції, заданої рівнянням $z^3 - 3xyz = a^3$.

► Частинні похідні першого порядку функції $z(x,y)$ визначаємо за формулами (17):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{-3yz}{3z^2 - 3xy} = \frac{yz}{z^2 - xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz}{z^2 - xy} \quad (z^2 \neq xy).$$

Знаходимо другі частинні похідні, зваживши при цьому на те, що $z = z(x,y)$: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{(z^2 - xy)y\dfrac{\partial z}{\partial x} - yz(2z\dfrac{\partial z}{\partial x} - y)}{(z^2 - xy)^2} =$

$$= \frac{(z^2 - xy)y\dfrac{yz}{z^2 - xy} - yz(2z\dfrac{yz}{z^2 - xy} - y)}{(z^2 - xy)^2} = -\frac{2xy^3z}{(z^2 - xy)^3},$$

аналогічно $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\dfrac{2x^3yz}{(z^2 - xy)^3}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{(z^2 - xy)\left(z + y\dfrac{\partial z}{\partial y}\right) - yz\left(2z\dfrac{\partial z}{\partial y} - x\right)}{(z^2 - xy)^2} =$$

$$= \frac{(z^2 - xy)\left(z + \frac{xyz}{z^2 - xy}\right) - yz\left(\frac{2xz^2}{z^2 - xy} - x\right)}{(z^2 - xy)^2} =$$

$$= \frac{z(z^4 - 2z^2xy - x^2y^2)}{(z^2 - xy)^3} \quad (z^2 \neq xy). \blacktriangleleft$$

26. Для заданої неявно функції $z(x, y)$ обчислити частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точці M:

а) $x^3 + y^3 + z^3 - 3x - 2y + 2z = 0, \ M(2;3;1)$;

б) $xe^y + ye^x + ze^x = 5$, $M(2;2;3)$.

►а) Позначимо ліву частину рівняння через $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3x - 2y + 2z$. Знаходимо частинні похідні $F'_x = 3x^2 - 3; \ F'_y = 3y^2 - 2; \ F'_z = 3z^2 + 2.$

За формулою (17) маємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3x^2 - 3}{3z^2 + 2}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3y^2 - 2}{3z^2 + 2}.$$

Підставивши в одержані вирази частинних похідних $x = 2, \ \ y = 3, \ \ z = 1,$ одержимо $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = -\frac{9}{5}; \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = -5.$ ◄

►б) Позначимо $F(x, y, z) = xe^y + ye^x + ze^x - 5$. Тоді частинні похідні $F'_x = e^y + ye^x + ze^x, \quad F'_y = xe^y + e^x, \ F'_z = e^x$.

За формулами (17) маємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{e^y + (y + z)e^x}{e^x} = -y - z - e^{y-x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xe^y + e^x}{e^x} = -1 - xe^{y-x}.$$

Отже, $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_M = -6$; $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_M = -3$. ◄

27. Знайти dz і d^2z, якщо $\dfrac{x}{z} = \ln\dfrac{z}{y} + 1$.

► Продиференціюємо цю рівність, зваживши на те, що $z = z(x, y)$. Одержимо $\dfrac{zdx - xdz}{z^2} = \dfrac{y}{z}\dfrac{ydz - zdy}{y^2}$, або

$$yzdx - xydz - yzdz + z^2dy = 0. \tag{18}$$

Звідси

$$dz = \frac{z(ydx + zdy)}{y(x+z)} \quad (x \neq -z). \tag{19}$$

Продиференціюємо рівність (18), виконаємо деякі спрощення і одержимо $y(x+z)d^2z = zdxdy + (zdy - xdy)dz - ydz^2$.

Відтак, враховуючи рівність (19), запишемо

$$d^2z = -\frac{z^2(ydx - xdy)^2}{y^2(x+z)^3} \quad (x \neq -z). \text{ ◄}$$

Завдання для самостійного розв'язання

22. Знайти похідні $\dfrac{dy}{dx}$ і $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ від функцій, заданих неявно:

а) $x - y + arctgy = 0$, **б)** $\dfrac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) = arctg\dfrac{y}{x}$.

23. Знайти частинні похідні $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функцій, заданих неявно, в точці M:

а) $4x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy + yz + x = 4$, $M(1;-5;-1)$;

б) $x + y + z = e^x$, $M(0;-1;2)$.

24. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, якщо

$x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0$.

25. Знайти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, якщо $x + y + z = e^z$.

§ 3. Деякі застосування частинних похідних

3.1 Дотична площина та нормаль до поверхні

Дотичною площиною до поверхні в точці M_0 називається площина, яка містить в собі дотичні до всіх кривих, проведених на поверхні через цю точку.

Нормаллю до поверхні в точці M_0 називається пряма, яка проходить через цю точку і перпендикулярна до дотичної площини.

Якщо поверхня задана рівнянням $z = f(x, y)$, де частинні похідні $f'_x(\tilde{M}_0)$ і $f'_y(\tilde{M}_0)$ в точці $\tilde{M}_0(x_0; y_0)$ скінченні (і не можуть бути рівні нулю одночасно), то *рівняння дотичної площини* до поверхні в точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$ має вигляд

$$z - z_0 = f'_x(x_0; y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0; y_0)(y - y_0), \tag{20}$$

а *рівняння нормалі*

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0; y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0; y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \tag{21}$$

Рівність нулю, наприклад $f_x'(x_0; y_0) = 0$, означає, що дотична площина паралельна осі Ox, а нормаль лежить у площині $x = x_0$.

Якщо поверхня задана рівнянням $F(x; y; z) = 0$ і в точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$ частинні похідні $F_x'(M_0)$, $F_y'(M_0)$, $F_z'(M_0)$ скінченні і не перетворюються в нуль одночасно, то *рівняння дотичної площини* до поверхні в цій точці має вигляд

$$F_x'(M_0)(x - x_0) + F_y'(M_0)(y - y_0) + F_z'(M_0)(z - z_0) = 0, \qquad (22)$$

а рівняння нормалі в цій же точці

$$\frac{x - x_0}{F_x'(M_0)} = \frac{y - y_0}{F_y'(M_0)} = \frac{z - z_0}{F_z'(M_0)}. \qquad (23)$$

Приклади розв'язання задач

28. Знайти рівняння дотичної площини та рівняння нормалі до поверхні $z = x^2 + 2y^2$ в точці $M(1;1;3)$.

► Оскільки поверхню задано рівнянням, розв'язаним відносно z, то дотична площина визначається рівнянням (20), а нормаль – рівнянням (21). Знайдемо частинні похідні f_x' *і* f_y' і обчислимо їхні значення в точці $\tilde{M}(1;1)$. Отже,

$$f_x' = 2x, \quad f_x'(1;1) = 2; \qquad f_y' = 4y, \quad f_y'(1;1) = 4.$$

Підставимо ці значення і координати точки M відповідно у рівняння (20) і (21), одержимо рівняння дотичної площини

$$z - 3 = 2(x - 1) + 4(y - 1), \text{ або } 2x + 4y - z - 3 = 0$$

і рівняння нормалі $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z-3}{-1}$. ◄

29. Скласти рівняння дотичної площини і рівняння нормалі до поверхні, заданої рівнянням $e^{xyz}+\sqrt{x^2+y^2}-z^3=6$, в точці $M(4;3;0)$.

► Рівняння поверхні задано в неявному вигляді $F(x,y,z)=0$. У нашому випадку маємо $F(x,y,z)=$ $=e^{xyz}+\sqrt{x^2+y^2}-z^3-6$.

Знайдемо частинні похідні

$$F'_x = yze^{xyz}+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad F'_y = xze^{xyz}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad F'_z = xye^{xyz}-3z,$$

та їх значення в точці $M(4;3;0)$

$$F'_x(M)=0,8;\qquad F'_y(M)=0,6;\qquad F'_z(M)=12.$$

Скориставшись формулами (22) і (23), одержимо шукані рівняння дотичної площини $4x+3y+60z-25=0$ і рівняння нормалі $\frac{x-4}{0,8}=\frac{y-3}{0,6}=\frac{z}{12}$, або $\frac{x-4}{4}=\frac{y-3}{3}=\frac{z}{60}$. ◄

Завдання для самостійного розв'язання

26. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні:

а) $z=\ln(x^2+y^2)$ в точці $A(1;0;0)$;

б) $z=arctg\frac{y}{x}$ в точці $A(1;1;\frac{\pi}{4})$;

в) $z=2x^2+y^2$ в точці $A(1;1;3)$.

27. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні:

а) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ в точці $B(a;b;c)$;

б) $2^{\frac{x}{z}}+2^{\frac{y}{z}}=8$ в точці $A(2;2;1)$;

в) $x^2+y^2-x+2y+4z-13=0$ в точці $P(2;1;2)$.

3.2 Похідна за напрямом та градієнт функції

Похідною функції $z=f(x,y)$ у точці $M_0(x_0;y_0)$ *за напрямом* вектора $\vec{l}=\overrightarrow{M_0M}$ називається границя $\left.\dfrac{\partial z}{\partial l}\right|_{M_0}=\lim\limits_{M\to M_0}\dfrac{f(M)-f(M_0)}{|M_0M|}=\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\Delta z}{\rho}$,

де $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$.

Якщо функція $f(x,y)$ диференційовна, то похідна за даним напрямом обчислюється за формулою

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha, \tag{24}$$

де α – кут, утворений вектором $\vec{l}$ з додатним напрямом осі Ox.

У випадку функції трьох аргументів $u=f(x,y,z)$ похідна за даним напрямом визначається аналогічно

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma, \tag{25}$$

де $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ напрямні косинуси вектора $\vec{l}$.

Похідна за напрямом характеризує швидкість зміни функції за даним напрямом.

Градієнтом функції $z=f(x,y)$ в точці $M(x,y)$ називається вектор з початком в точці M, координатами якого є значення частинних похідних функції z в цій точці

$$\overrightarrow{grad}\, z = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}. \qquad (26)$$

Градієнт функції в даній точці задає напрям найшвидшого росту функції в заданій точці. Похідна $\frac{\partial z}{\partial l}$ за напрямом градієнта має найбільше значення, яке дорівнює $\left(\frac{\partial z}{\partial l}\right)_{найб.} = \left|\overrightarrow{grad}\, z\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$.

Градієнт функції $z = f(x, y)$ і похідна за напрямом вектора $\vec{l}$ зв'язані формулою $\frac{\partial z}{\partial l} = np_{\vec{l}}\, \overrightarrow{grad}\, z.$

Для функцій трьох змінних її градієнт

$$\overrightarrow{grad}\, u = = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\,. \qquad (27)$$

Градієнт функції в кожній точці напрямлений по нормалі до відповідної лінії (поверхні) рівня.

Приклади розв'язання задач

30. Обчислити похідну функції $z = \ln(6x + 7y)$ у точці $M(-2;2)$ за напрямом вектора $\overrightarrow{MN}$, де $N(2;-1)$.

► Знаходимо орт $\vec{l}$, що має заданий напрям, $\overrightarrow{MN} = (2+2; -1-2) = (4; -3) = 4\vec{i} - 3\vec{j},\ \left|\overrightarrow{MN}\right| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5.$

Отже, $\vec{l} = \frac{\overrightarrow{MN}}{\left|\overrightarrow{MN}\right|} = \left(\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right),\ \cos\alpha = \frac{4}{5},\ \sin\alpha = -\frac{3}{5}.$

Обчислимо значення частинних похідних в точці $M(-2;2)$:

$f'_x = \dfrac{6}{6x+7y}$, $f'_y = \dfrac{7}{6x+7y}$. Тоді $f'_x(M) = \dfrac{6}{6\cdot(-2)+7\cdot 2} = 3$,

$f'_y(M) = \dfrac{7}{6\cdot(-2)+7\cdot 2} = \dfrac{7}{2}$.

За формулою (24) знайдемо похідну цієї функції в точці M за напрямом вектора $\overrightarrow{MN}$. Таким чином, $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_M = 3\cdot\dfrac{4}{5} + \dfrac{7}{2}\cdot(-\dfrac{3}{5}) = 0,3$; тобто задана функція в точці M зростає в напрямі $\overrightarrow{MN}$ зі швидкістю 0,3. ◄

31. Знайти похідну функції $u = x^2 - 2xz + y^2$ в точці $P_1(1;2;-1)$ за напрямом від точки $P_1(1;2;-1)$ до точки $P_2(2;4;-3)$.

► Знайдемо вектор $\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ і відповідний йому одиничний вектор $\vec{l} = \dfrac{\overrightarrow{P_1P_2}}{\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|} = \dfrac{\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}}{\sqrt{1+4+4}} = \dfrac{1}{3}\vec{i} + \dfrac{2}{3}\vec{j} - \dfrac{2}{3}\vec{k}$.

Отже, напрямні косинуси вектора $\vec{l}$ такі:

$$\cos\alpha = \frac{1}{3},\ \cos\beta = \frac{2}{3},\ \cos\gamma = -\frac{2}{3}.$$

Знаходимо частинні похідні функції u

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = (x^2 - 2xz + y^2)'_x = 2x - 2z$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = (x^2 - 2xz + y^2)'_y = 2y$,

$\frac{\partial u}{\partial z} = (x^2 - 2xz + y^2)'_z = -2x$. Їхні значення в точці $P_1(1;2;-1)$ будуть наступними $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{P_1} = 4,\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{P_1} = 4,\ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{P_1} = -2$.

Отже, згідно формули (25) шукана похідна в точці P_1 дорівнює $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{P_1} = 4 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{2}{3} + (-2) \cdot (-\frac{2}{3}) = \frac{16}{3}$. Оскільки $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{P_1} > 0$, то функція u в даному напрямку зростає. ◄

32. Знайти величину та напрям градієнта функції $u = x^2 + 2y^2 - z^2 - 5$ в точці $P(2;-1;1)$.

► Позначимо $x^2 + 2y^2 - z^2 - 5 = F(x, y, z)$. Тоді частинні похідні $F'_x(x, y, z) = 2x,\ F'_y(x, y, z) = 4y,\ F'_z(x, y, z) = -2z.$

За формулою (26) вираз градієнта цієї функції в довільній точці x, y, z буде мати вигляд $\overrightarrow{grad}\, u = 2x\vec{i} + 4y\vec{j} - 2z\vec{k}.$

Знаходимо $F'_x(P) = 4,\ F'_y(P) = -4,\ F'_z(P) = -2,$ тоді $\overrightarrow{grad}\, u(P) = 4\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k},\ \left|\overrightarrow{grad}\, u(P)\right| = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + (-2)^2} = 6.$

Отже, $\cos\alpha = \frac{4}{6} = \frac{2}{3},\ \cos\beta = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3},\ \cos\gamma = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$.◄

33. Знайти похідну функції $z = \ln(x^2 + y^2)$ в точці $M(3;4)$ за напрямом градієнта функції z.

► Тут вектор $\vec{l}$ збігається з градієнтом функції $z = \ln(x^2 + y^2)$ в точці $M(3;4)$.

Знаходимо похідні:

$$z'_x = \frac{2x}{x^2 + y^2}; \quad z'_y = \frac{2y}{x^2 + y^2}; \qquad z'_x\big|_M = \frac{6}{25}; \quad z'_y\big|_M = \frac{8}{25}.$$

За формулою (27) $\overrightarrow{grad}\, z = \frac{6}{25}\vec{i} + \frac{8}{25}\vec{j}$, тому

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \left|\overrightarrow{grad}\, z\right| = \sqrt{(\frac{6}{25})^2 + (\frac{8}{25})^2} = \frac{2}{5}.$$ ◄

34. Знайти найбільшу швидкість зростання функції $u = x^2 + y^2 + z^2$ в точці $P(1;1;1)$.

► Оскільки $\overrightarrow{grad}\, u = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}$,

$$\overrightarrow{grad}\, u(1;1;1) = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}, \quad \left|\overrightarrow{grad}\, u(1;1;1)\right| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{3},$$

то $v_{\max} = 2\sqrt{3}.$

Поверхнею рівня функції u, яка проходить через точку $P(1;1;1)$, є сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Найбільшою швидкість зростання функції u буде в напрямі радіуса цієї сфери, проведеного від початку координат до точки P. ◄

Завдання для самостійного розв'язання

28. Знайти похідну функції $z = x^2 - y^2$ в точці $M(1;1)$ за напрямом вектора $\vec{l}$, який утворює з додатним напрямом осі Ox кут $\alpha = 60^\circ$.

29. Знайти похідну функції $u = xy^2z^3$ в точці $P_1(3;2;1)$ за напрямом вектора $\overrightarrow{P_1P_2}$, де $P_2(5;4;2)$.

30. Знайти величину і напрям градієнта функції $u = tgx - x + 3\sin y - \sin^3 y + z + ctgz$ в точці $P(\pi/4;\pi/3;\pi/2)$.

31. Знайти величину і напрям градієнта функції $u = xyz$ в точці $M(-2;3;4)$.

3.3 Формула Тейлора для функції двох змінних

Якщо функція $f(x,y)$ диференційовна до n-го порядку в деякому околі точки $P_0(x_0,y_0)$, то для будь-якої точки (x,y) з цього околу справджується формула Тейлора

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + (f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)) +$$
$$+\frac{1}{2!}(f''_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f''_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) +$$
$$+f''_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2) + \ldots + \frac{1}{n!}((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y})^n f(x_0,y_0) + o(\rho^n), \quad (28)$$

де $\rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ (залишковий член у формі Пеано). При $x_0 = y_0 = 0$ одержуємо формулу Маклорена.

Приклади розв'язання задач

33. Розвинути функцію $f(x,y) = e^{\frac{x}{y}}$ за формулою Тейлора в околі точки $P_0(0;1)$ до членів другого порядку включно.

► Знаходимо частинні похідні функції $f(x,y)=e^{\frac{x}{y}}$ до другого порядку включно:

$$f_x'(x,y)=\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}},\quad f_y'(x,y)=-\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}},\quad f_{xx}''(x,y)=\frac{1}{y^2}e^{\frac{x}{y}},$$

$$f_{xy}''(x,y)=-\frac{x}{y^3}e^{\frac{x}{y}}-\frac{1}{y^2}e^{\frac{x}{y}}=-\frac{e^{\frac{x}{y}}(x+y)}{y^3},$$

$$f_{yy}''(x,y)=e^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{x^2}{y^4}+e^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{2x}{y^3}=e^{\frac{x}{y}}\left(\frac{x^2}{y^4}+\frac{2x}{y^3}\right).$$

В точці $P_0(0;1)$ маємо: $f(0;1)=1;$ $f_x'(0;1)=1;$ $f_y'(0;1)=0;$ $f_{xx}''(0;1)=1;$ $f_{xy}''(0;1)=-1;$ $f_{yy}''(0;1)=0.$

Підставивши значення функції та її частинних похідних в точці $P_0(0;1)$ у формулу (28) при $n=2$, одержимо

$$e^{\frac{x}{y}}=1+x+\frac{1}{2}x^2-x(y-1)+o(x^2+(y-1)^2)=$$

$$=1+2x+\frac{1}{2}x^2-xy+o(x^2+(y-1)^2).◄$$

34. Функцію $f(x,y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5$ розвинути за формулою Тейлора в околі точки $A(1;-2)$.

► Задана функція має частинні похідні будь-якого порядку. Знаходимо частинні похідні:

$$f_x'(x,y)=4x-y-6;\qquad f_y'(x,y)=-x-2y-3;$$

$$f_{xx}''(x,y)=4;\quad f_{xy}''(x,y)=-1;\quad f_{yy}''(x,y)=-2.$$

Обчислимо значення функції та її похідних у точці $A(1;-2)$:

$f(1;-2)=5;\quad f'_x(1;-2)=0;\quad f'_y(1;-2)=0;$

$f''_{xx}(1;-2)=4;\quad f''_{xy}(1;-2)=-1;\quad f''_{yy}(1;-2)=-2.$

Усі частинні похідні 3-го і вище порядків дорівнюють нулю.

Скориставшись формулою (24), маємо

$f(x,y)=5+2(x-1)^2-(x-1)(y+2)-(y+2)^2.$ ◄

Завдання для самостійного розв'язання

32. Функцію $f(x,y)=x^3-2y^2+3xy$ розвинути за формулою Тейлора в околі точки $A(2;1)$.

33. Розвинути функцію $f(x,y)=y^x$ за формулою Тейлора в околі точки $M(1;1)$ до членів 2-го порядку включно.

34. Розвинути за формулою Маклорена до членів третього порядку включно функцію $f(x,y)=e^y\cos x.$

3.4 Екстремуми функції

Нехай функція $u=f(M)$ визначена в деякому околі точки $M_0(x_0,y_0,...,t_0)$.

Функція $u=f(M)$ має в точці M_0 *локальний максимум (мінімум),* якщо існує такий окіл точки M_0, що для всіх точок з цього околу при $M\neq M_0$ виконується умова $f(M)<f(M_0)$ $\left(f(M)>f(M_0)\right)$.

Максимум чи мінімум функції називають її локальним екстремумом (або просто екстремумом). Точка M_0, в якій функція має екстремум, називається *точкою екстремуму*.

Необхідні умови екстремуму. Якщо диференційовна функція $u = f(M)$ має в точці M_0 екстремум, то її частинні похідні першого порядку в цій точці рівні нулю, тобто

$$f'_x(M_0) = 0, \quad f'_y(M_0) = 0, \quad f'_z(M_0) = 0, \quad \ldots, \quad f'_t(M_0) = 0 \tag{29}$$

або $du(M_0) = 0$.

Точка, в якій виконуються умови (29), називається *стаціонарною точкою* даної функції $u = f(M)$. Не всяка стаціонарна точка є точкою екстремуму.

Якщо M_0 – точка екстремуму функції $u = f(M)$, то або M_0 – стаціонарна точка, або в цій точці функція не є диференційованою.

Достатні умови екстремуму. Щоб визначити, при яких значеннях незалежних змінних, одержаних із рівнянь (29), функція має максимум або мінімум, досліджують диференціал другого порядку цієї функції.

Якщо при значеннях незалежних змінних, знайдених із рівнянь (29), диференціал другого порядку $d^2u(M_0)$ функції зберігає сталий знак при всіх можливих досить малих за абсолютною величиною приростах незалежних змінних, то функція при цих значеннях має екстремум, зокрема, максимум, коли диференціал другого порядку від'ємний, а мінімум – коли він додатний.

Якщо диференціал другого порядку $d^2u(M_0)$ при значеннях незалежних змінних, знайдених із системи рівнянь (29), не зберігає сталого знака, то для таких значень функція не має ні максимуму, ні мінімуму.

Якщо виявиться, що при цих значеннях диференціал другого порядку $d^2u(M_0) = 0$, то екстремум може бути, а може й не бути (потрібно досліджувати диференціали вищого порядку).

Для функції двох змінних $z = f(x, y)$ необхідні умови існування екстремуму функції наступні: функція $z = f(x, y)$ може мати екстремум лише у точках, в яких $f'_x = 0$ і $f'_y = 0$.

Для з'ясування достатніх умов існування екстремуму функції $z = f(x, y)$ введемо позначення: $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$, $\Delta = AC - B^2$. Тоді:

1) якщо $\Delta > 0$, то функція $z = f(x, y)$ має в точці $M_0(x_0, y_0)$ екстремум, а саме – максимум при $A < 0$ $(C < 0)$ і мінімум при $A > 0$ $(C > 0)$;

2) якщо $\Delta < 0$, то екстремуму в точці $M_0(x_0, y_0)$ немає;

3) якщо $\Delta = 0$, то потрібні додаткові дослідження.

Приклади розв'язання задач

35. Дослідити функцію $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ на локальний екстремум.

► Знаходимо частинні похідні першого порядку: $f'_x = 3x^2 + 3y^2 - 15, \quad f'_y = 6xy - 12$.

Визначаємо стаціонарні точки, розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0, \\ 6xy - 12 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ xy = 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 = 9, \\ (x - y)^2 = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x + y| = 3, \\ |x - y| = 1, \end{cases}$$

звідки $\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 1, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = -2, \\ y_2 = -1, \end{cases}$ $\begin{cases} x_3 = 1, \\ y_3 = 2, \end{cases}$ $\begin{cases} x_4 = -1, \\ y_4 = -2. \end{cases}$

Отже, функція z має чотири стаціонарні точки:

$M_1(2;1)$, $M_2(-2;-1)$, $M_3(1;2)$, $M_4(-1;-2)$.

Знаходимо частинні похідні другого порядку $f''_{xx} = 6x$, $f''_{xy} = 6y$, $f''_{yy} = 6x$ та обчислюємо визначник $\Delta = AC - B^2$ для кожної стаціонарної точки.

Для точки M_1 маємо: $A = f''_{xx}(M_1) = 12;\ B = f''_{xy}(M_1) = 6;$ $C = f''_{yy}(M_1) = 12;\ \Delta = 12 \cdot 12 - 6^2 = 108 > 0.$ Оскільки $\Delta > 0, A > 0$, то точка M_1 є точкою мінімуму функції; $z_{\min} = f(2;1) = -28$.

Для точки M_2: $A = f''_{xx}(M_2) = -12;\ B = f''_{xy}(M_2) = -6;$ $C = f''_{yy}(M_2) = -12;\ \Delta = -12 \cdot (-12) - 36 = 108 > 0.$ Оскільки $\Delta > 0$, $A < 0$, то точка M_2 є точкою максимуму функції; $z_{\max} = f(-2;-1) = 28.$

Для точки M_3: $A = f''_{xx}(M_3) = 6;\ B = f''_{xy}(M_3) = 12;$ $C = f''_{yy}(M_3) = 6;\ \Delta = 6 \cdot 6 - 144 = -108 < 0.$ Отже, в точці M_3 локального екстремуму немає.

Для точки M_4: $A = f''_{xx}(M_4) = -6;\ B = f''_{xy}(M_4) = -12;$ $C = f''_{yy}(M_4) = -6;\ \Delta = -6 \cdot (-6) - 144 = -108 < 0.$ В точці M_4 екстремуму немає. ◄

36. Дослідити на екстремум функцію двох змінних $z = 3x^2 y - x^3 - y^4$.

► Знайдемо частинні похідні функції:

$f'_x = -3x^2 + 6xy,\ f'_y = 3x^2 - 4y^3.$

Визначаємо стаціонарні точки із системи рівнянь

$\begin{cases} -3x^2 + 6xy = 0, \\ 3x^2 - 4y^3 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2xy = 0, \\ 3x^2 - 4y^3 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} x_2 = 6, \\ y_2 = 3. \end{cases}$

Як бачимо, функція z має дві стаціонарні точки $M_1(0;0)$ і $M_2(6;3)$. Знайдемо другі частинні похідні функції:

$$f''_{xx} = -6x + 6y, \quad f''_{xy} = 6x, \quad f''_{yy} = -12y^2.$$

Складемо детермінант Δ для кожної стаціонарної точки. Для точки M_1: $A = f''_{xx}(M_1) = 0; B = f''_{xy}(M_1) = 0; C = f''_{yy}(M_1) = 0;$ $\Delta = 0$. Точка M_1 вимагає додаткового дослідження. Значення функції $z(x;y)$ в цій точці дорівнює нулю, тобто $z(0;0) = 0$. При $x < 0; y = 0$ маємо $z(x;y) = -x^3 > 0$, а при $x = 0; y \neq 0$ – $z(x;y) = -y^4 < 0$. Тому в будь-якому околі точки $M_1(0;0)$ функція $z(x;y)$ набуває значень, як більших від $z(0;0)$, так і менших від $z(0;0)$, а значить в точці M_1 функція $z(x;y)$ локального екстремуму не має.

Для точки M_2: $A = f''_{xx}(M_2) = -18; B = f''_{xy}(M_2) = 36;$ $C = f''_{yy}(M_2) = -108; \Delta = 648 > 0.$ Оскільки $\Delta > 0,\ A < 0$, то в точці M_2 функція має локальний максимум; $z_{\max} = 27.$ ◄

37. Дослідити на екстремум функцію трьох змінних $u = x^2 + y^2 + z^2 + xy - x + y - 2z.$

► Маємо функцію трьох незалежних змінних. Знаходимо частинні похідні першого порядку:

$f'_x = 2x + y - 1,\ f'_y = 2y + x + 1,\ f'_z = 2z - 2.$

Згідно з необхідними умовами екстремуму визначимо стаціонарні точки із системи рівнянь $\begin{cases} 2x + y - 1 = 0, \\ 2y + x + 1 = 0, \\ 2z - 2 = 0. \end{cases}$

Звідси маємо $x = 1,\ y = -1,\ z = 1$.

Точка $M(1;\ -1;\ 1)$ є стаціонарною точкою. Щоб встановити чи має функція в цій точці екстремум, дослідимо диференціал другого порядку цієї функції, який визначається за формулою $d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dz^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy +$ $+2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}dxdz + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}dydz.$

Оскільки $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2,\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0,$ $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0$, то $d^2u = 2dx^2 + 2dy^2 + 2dz^2 + 2dxdy = (dx + dy)^2 +$ $dx^2 + dy^2 + 2dz^2 > 0$ при будь-яких dx, dy і dz, які одночасно не рівні нулю.

Цим саме ми довели, що в точці $M(1;-1;1)$ функція u має мінімум; $u_{\min} = -2$. ◄

Завдання для самостійного розв'язання

35. Дослідити на екстремум такі функції двох змінних:

а) $z = x^3 - 3x^2 - 3y^2 - 4y$;

б) $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$;

в) $z = x^3 + y^3 - x^2 - 2xy - y^2$;

г) $z = e^{x+2y}(y^2 - x^2)$;

д) $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

36. Дослідити на екстремум такі функції трьох змінних:

а) $u = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$;

б) $u = x^2 + 2y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 1$.

3.5 Найбільше і найменше значення функції

Якщо функція $u = f(M)$ неперервна в обмеженій замкненій області D, то за теоремою Вейєрштрасса вона досягає своїх *найбільшого* та *найменшого* значень, або в стаціонарній точці усередині області, або в межовій точці. Щоб знайти найбільше та найменше значення функції потрібно:

1) знайти стаціонарні точки, що належать області D, і обчислити значення функції в цих точках;

2) знайти найбільше та найменше значення функції на лініях, які утворюють межу області;

3) серед усіх знайдених значень вибрати найбільше та найменше; вони й будуть найбільшим та найменшим значеннями функції в усій області D.

У деяких випадках при знаходженні найбільших та найменших значень функції в обмеженій замкненій області межу цієї області зручно розбити на частини, кожна з яких задається своїм рівнянням. Найбільше та найменше значення функції називають *глобальними екстремумами*.

Приклади розв'язання задач

38. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 + 3y^2 + x - y$ в квадраті, обмеженому прямими $x = 0,\ x = -1,\ y = 0,\ y = 1$.

► Очевидно, задана функція задовольняє умовам теореми Вейєрштрасса в заданому квадраті, який позначимо *ABCO* (рис.13).

1) Визначимо стаціонарні точки функції f, які містяться всередині заданої області. Знаходимо частинні похідні першого порядку $z'_x = 2x + 1;\ z'_y = 6y - 1$.

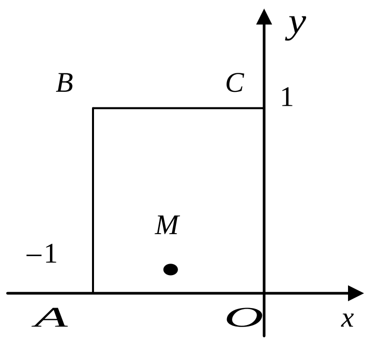


Рисунок 13

Координати стаціонарних точок шукаємо як розв`язки системи рівнянь $\begin{cases} 2x + 1 = 0, \\ 6y - 1 = 0, \end{cases}$ з якої маємо $x = -\dfrac{1}{2},\ y = \dfrac{1}{6}$.

Точка $M\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{6}\right)$ – стаціонарна точка всередині області. Значення функції в цій точці $z(M) = -1/3$.

2) Визначимо найбільше і найменше значення заданої функції на межі області.

На відрізку OC маємо $x=0$, тому функція запишеться у вигляді $z(0;y)=\varphi(y)=3y^2-y,\ \ 0\le y\le 1$. Таким чином, треба дослідити на екстремум функцію однієї змінної. Знаходимо $\varphi'(y)=6y-1,\ 6y-1=0,\ \ y=\frac{1}{6},\ \ \varphi\left(\frac{1}{6}\right)=z\left(0;\frac{1}{6}\right)=-\frac{1}{12}$. Крім того, на кінцях проміжку $z(0;\ 0)=0,\ \ z(C)=z(0;1)=2$.

На відрізку BC маємо $y=1$ і $z(x;1)=\psi(x)=x^2+x+2$, $-1\le x\le 0$. Таким чином, $\psi'(x)=2x+1$, $2x+1=0,\ \ x=-\frac{1}{2}$, $\psi\left(-\frac{1}{2}\right)=z\left(-\frac{1}{2};1\right)=\frac{7}{4},\ \ z(B)=z(-1,1)=2$.

На відрізку AB: $x=-1,\ z(-1;y)=\chi(y)=3y^2-y$, $0\le y\le 1$. На AB маємо стаціонарну точку $y=\frac{1}{6},\ \ \chi\left(\frac{1}{6}\right)=z\left(-1;\frac{1}{6}\right)=-\frac{1}{12},\ \ z(A)=z(-1;\ 0)=0$.

На відрізку OA: $y=0,\quad z(x;0)=g(x)=x^2+x,\ \ -1\le x\le 0$. Тоді $g'(x)=2x+1$, $2x+1=0, x=-\frac{1}{2},\ g\left(-\frac{1}{2}\right)=z\left(-\frac{1}{2};\ 0\right)=-\frac{1}{4}$.

3) Порівнюючи значення $z(M)=z\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{6}\right)=-\frac{1}{3}$,

$$z\left(-1;\,\frac{1}{6}\right)=z\left(0;\,\frac{1}{6}\right)=-\frac{1}{12},\quad z(0;0)=z(A)=0,\quad z(C)=z(B)=2,$$

приходимо до висновку, що найбільшого значення функція набуває на межі області в точках B і C, тобто $z_{найб}=2;$ а найменшого – всередині області в точці M, тобто $z_{найм}=-\frac{1}{3}$. ◄

39. Знайти найбільше та найменше значення функції $z=x^2-xy+2y^2+3x+2y+1$ в замкненому трикутнику, який обмежений осями координат і прямою $x+y+5=0$.

► Областю є трикутник AOB (рис.14).

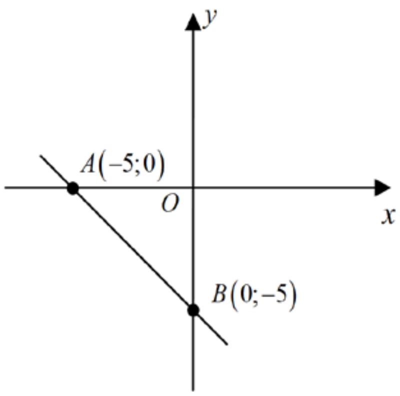


Рисунок 14

1) Визначаємо стаціонарні точки функції. Для цього знайдемо частинні похідні $z'_x=2x-y+3$, $z'_y=4y-x+2$ і розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases}2x-y=-3,\\ x-4y=2,\end{cases}$ з якої знаходимо $x=-2;\quad y=-1$.

Отже, маємо одну стаціонарну точку $M(-2;-1)$, яка є внутрішньою точкою області. Значення функції в цій точці $z(M)=-3$.

2) Дослідимо функцію на межі області (на сторонах трикутника).

На осі Ox маємо: $y=0$ і $z=x^2+3x+1=\varphi\left(x\right)$, $-5\le x\le 0$. На відрізку $[-5;0]$ функція $\varphi\left(x\right)$ неперервна, тому вона досягає на ньому своїх найбільшого та найменшого значень в точках стаціонарності (там, де $\varphi'\left(x\right)=0$), або на кінцях цього відрізка.

Визначимо точку стаціонарності $\varphi'\left(x\right)=2x+3=0,\ x=-\dfrac{3}{2}$. Знайдемо значення функції при $x=-\dfrac{3}{2}$ і на кінцях відрізка $[-5;0]$: $z\left(-\dfrac{3}{2};\,0\right)=-\dfrac{5}{4}$, $z(-5;0)=11$, $z(0;0)=1$. Порівняння одержаних значень дає $(z_{\max})_{OA}=11,\ (z_{\min})_{OA}=-\dfrac{5}{4}.$

На осі Oy: $x=0$, $z=2y^2+2y+1=\psi\left(y\right)$, $-5\le y\le 0$. Функція $\psi(y)$ неперервна на відрізку $[-5;0]$. Визначимо її найбільше та найменше значення на цьому відрізку. Знайдемо стаціонарну точку: $\psi'\left(y\right)=(2y^2+2y+1)'=4y+2,\ \ 4y+2=0,$ $y=-\dfrac{1}{2}$. Бачимо, що вона належить відрізку $[-5;0]$. Визначимо значення функції при $y=-\dfrac{1}{2}$ і на кінцях відрізка:

$$\psi\left(-\frac{1}{2}\right)=z\left(0;-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2},\ \psi\left(-5\right)=z(0;-5)=41,\ \psi\left(0\right)=z(0;0)=1.$$

Отже, $(z_{найб})_{OB} = 41,\ (z_{найм})_{OB} = \frac{1}{2}.$

На відрізку AB: $y = -x - 5,$ $z\left(x;\ -x-5\right) = = 4x^2 + 26x + 41 = \chi\left(x\right)$, $-5 \le x \le 0$. Знайдемо стаціонарну точку функції: $\chi'\left(x\right) = (4x^2 + 26x + 41)' = 8x + 26 = 0;\ x = -\frac{13}{4}.$

Тоді відповідне для $x = -\frac{13}{4} \in [-5; 0]$ значення $y = -(-\frac{13}{4}) - 5 = -\frac{7}{4}.$ Отже, треба розглянути точку $(-\frac{13}{4}; -\frac{7}{4})$, яка є внутрішньою точкою відрізка *AB*.

Маємо $z(-\frac{13}{4}, -\frac{7}{4}) = -\frac{5}{4},\ z(-5; 0) = 11,\ z(0; -5) = 41.$

$(z_{найб})_{AB} = 41;\ (z_{найм})_{AB} = -\frac{5}{4}.$

3) Серед усіх обчислених значень заданої функції в стаціонарній точці, найбільших і найменших значень на відрізках OA, OB і AB вибираємо глобальні екстремуми

$$z_{найб} = z(0;-5) = 41,\quad z_{найм} = z(-2;-1) = -3.$$

Таким чином, найменшого свого значення функція набула у стаціонарній точці області (–2; –1), а найбільшого – на межі області, в точці (0; –5). ◄

40. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 - y^2$ у крузі $x^2 + y^2 \le 4$

► Функція *z* неперервна в замкненому крузі $x^2 + y^2 \le 4$, тому за теоремою Вейєрштрасса в цій області вона досягає своїх найбільшого та найменшого значень.

1) Знаходимо стаціонарні точки: оскільки $z'_x = (x^2 - y^2)'_x = 2x$ і $z'_y = (x^2 - y^2)'_y = -2y$, то із системи рівнянь $\begin{cases} 2x = 0, \\ -2y = 0, \end{cases}$ одержуємо одну стаціонарну точку $M_0(0;0)$, в якій значення функції $z(0;0) = 0$.

2) Знайдемо найбільше і найменше значення функції на межі області, тобто на колі $x^2 + y^2 = 4.$ Для точок цього кола функцію $z = x^2 - y^2$ можна записати як функцію однієї змінної *x*, тобто $z = x^2 - (4 - x^2) = 2x^2 - 4, -2 \le x \le 2.$ Таким чином, знаходження найбільшого і найменшого значень функції двох змінних на колі $x^2 + y^2 = 4$ ми звели до знаходження найбільшого і найменшого значень функції однієї змінної $\chi(x) = 2x^2 - 4$ на відрізку [–2;2].

Знайдемо стаціонарні точки функції на інтервалі (–2,2) і обчислимо значення функції в цих точках та на кінцях інтервалу. Маємо $\chi'(x) = 4x,\ 4x = 0,$ звідки знаходимо стаціонарну точку $x = 0$, в якій $\chi(0) = z(0; \pm 2) = -4$. Далі знаходимо $\chi(-2) = z(-2;\ 0) = 4,\ \ \chi(2) = z(2;\ 0) = 4$.

Вибираючи серед усіх обчислених значень найменше та найбільше, бачимо, що найбільшого значення в крузі $x^2 + y^2 \le 4$ функція $z = x^2 - y^2$ набуває в точках $M_1(-2;\,0)$ та $M_2(2;\,0)$ кола $x^2 + y^2 = 4$, а найменшого – в точках $M_3(0;\,2)$ і $M_4(0:-2)$ того ж кола:

$$z_{найб} = z(-2;\,0) = z(2;\,0) = 4, \quad z_{найм} = z(0;-2) = z(0;2) = -4\,.$$

Зауважимо, що найбільше і найменше значення функції на колі $x^2 + y^2 = 4$ можна знайти іншим чином.

Подамо рівняння кола в параметричному вигляді: $x = 2\cos t,\quad y = 2\sin t\ \ (0 \le t \le 2\pi)$. Значення функцій $x(t), y(t)$ при $t = 0$ та $t = 2\pi$ повинні бути однаковими. Тоді $z = x^2 - y^2 = 4\cos^2 t - 4\sin^2 t = 4\cos 2t$. Знайдемо найбільше і найменше значення цієї функції на відрізку $(0 \le t \le 2\pi)$. Продиференціювавши функцію $z = 4\cos 2t$, одержимо $z' = -8\sin 2t.$ З рівняння $-8\sin 2t = 0$ знаходимо три стаціонарні точки: $t_1 = \pi/2, t_2 = \pi, t_3 = 3\pi/2$, які лежать всередині цього відрізка. Обчисливши значення функції $z = 4\cos 2t$ в цих точках, а також при $t = 0$ (значення $z(0)$ співпадає з $z(2\pi)$), одержуємо лише два різних між собою значення функції: $z_1 = -4$ (найменше значення) і $z_2 = 4$ (найбільше значення). ◄

41. Додатне число a розкласти на три додатні доданки так, щоб їх добуток був найбільшим.

► Позначимо два доданки відповідно x і y. Тоді третій доданок буде $a-x-y$, а їх добуток $z=xy(a-x-y)$. За умовою $x>0, y>0, a-x-y>0$, тобто $x+y<a, z>0$. Отже, x і y можуть набувати значень з області, обмеженої прямими $x=0$, $y=0$, $x+y=a$ (рис.15).

Знайдемо стаціонарні точки функції z. Частинні похідні дорівнюють $z'_x=y(a-2x-y)$, $z'_y=x(a-2y-x)$. Запишемо системи рівнянь $\begin{cases} y(a-2x-y)=0, \\ x(a-2y-x)=0, \end{cases}$ з якої знаходимо:

$$x_1=0,\ y_1=0,\ M_1(0;0);\ x_2=0,\ y_2=a,\ M_2(0;a);$$

$$x_3=a,\ y_3=0,\ M_3(a;0);\ x_4=\frac{a}{3},\ y_4=\frac{a}{3},\ M_4(\frac{a}{3};\frac{a}{3}).$$

Бачимо, що перші три точки лежать на межі області D, а точка M_4 – всередині області. На межі області функція $z=0$, а всередині області функція додатна, тому в точці M_4 вона має максимум (оскільки це єдина екстремальна точка всередині трикутника). Найбільше значення добутку $z_{найб}=\frac{a}{3}\cdot\frac{a}{3}(a-\frac{a}{3}-\frac{a}{3})=\frac{a^3}{27}$.

Переконатись в цьому можна скориставшись достатніми умовами існування екстремуму.

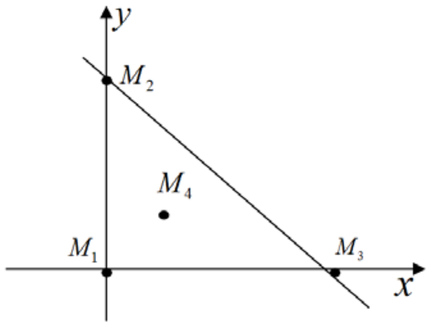


Рисунок 15

Знайдемо частинні похідні другого порядку :

$z''_{xx} = (y(a-2x-y))'_x = -2y,\ z''_{xy} = (y(a-2x-y))'_y = a-2x-2y,$

$z''_{yy} = (x(a-2y-x))'_y = -2x.$

В точці $M_4(\frac{a}{3};\frac{a}{3})$ маємо $A = -\frac{2a}{3}$, $B = -\frac{a}{3}$, $C = -\frac{2a}{3}$.

Оскільки $\Delta = AC - B^2 = \frac{4a^2}{9} - \frac{a^2}{9} = \frac{a^2}{3} > 0$, $A < 0$, то в розглядуваній точці функція має максимум.

Отже, кожний доданок рівний $\frac{a}{3}$. Одержаний результат має просте геометричне пояснення: з усіх прямокутних паралелепіпедів, у яких сума трьох вимірів є величиною сталою, рівною *a*, найбільший об'єм має куб з ребром $\frac{a}{3}$. ◄

42. Визначити при яких розмірах відкрита прямокутна ванна заданої місткості *V* має найменшу поверхню.

► Позначимо через x і y розміри основи ванни, а через z її висоту. Площа поверхні ванни складе $S = xy + 2xz + 2yz$.

Враховуючи, що об'єм ванни $V = xyz$, виразимо змінну z через відому величину V та змінні x і y, тобто запишемо $z = \dfrac{V}{xy}$. Таким чином, $S = xy + 2x\dfrac{V}{xy} + 2y\dfrac{V}{xy} = xy + \dfrac{2V}{y} + \dfrac{2V}{x}$.

Тепер потрібно знайти найменше значення цієї функції в області, що визначається умовами $x > 0$ і $y > 0$. Знайдемо стаціонарні точки функції S:

$$S'_x = y - \frac{2V}{x^2}, \qquad \begin{cases} y - \dfrac{2V}{x^2} = 0, \\ x - \dfrac{2V}{y^2} = 0, \end{cases} \qquad x = y = \sqrt[3]{2V}.$$
$$S'_y = x - \frac{2V}{y^2},$$

Маємо одну стаціонарну точку $M\left(\sqrt[3]{2V}; \sqrt[3]{2V}\right)$, яка є внутрішньою точкою області визначення функції.

Перевіримо виконання достатніх умов мінімуму. Оскільки $S''_{xx}(x, y) = \dfrac{4V}{x^3}$, $S''_{xy}(x.y) = 1$, $S''_{yy}(x, y) = \dfrac{4V}{y^3}$, то

$$A = S''_{xx}(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}) = 2, \quad B = S''_{xy}(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}) = 1,$$

$$C = S''_{yy}(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}) = 2, \; \Delta = AC - B^2 = 4 - 1 > 0, \; A > 0.$$

Таким чином, функція $S(x, y)$ має мінімум при $x = y = \sqrt[3]{2V}$ $\; S_{\min} = 2V\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2V}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{2V}}\right) + \sqrt[3]{4V^2} = 3\sqrt[3]{4V^2}$.

Отже, в основі ванна має квадрат зі стороною $\sqrt[3]{2V}$, а її висота складає $z = \dfrac{V}{\sqrt[3]{4V^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{2V}}{2}$, тобто дорівнює половині ребра основи. ◄

Завдання для самостійного розв'язання

37. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2$ у прямокутнику з вершинами

$A(1;-3),\ B(1;2),\ C(4;2),\ D(4;-3)\ \ (1 \le x \le 4,\ -3 \le y \le 2)$.

38. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2y + xy^2 + xy$ в замкненій області, яка обмежена лініями $y = \dfrac{1}{x},\ x = 1,\ x = 2,\ y = -\dfrac{3}{2}.$

39. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = xy$ в замкненій трикутній області D з вершинами в точках O(0;0), A(1;0), B(0;2).

40. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = xy^2$ в крузі $x^2 + y^2 \le 1$.

41. З картону заданої площі s потрібно виготовити закриту коробку (прямокутний паралелепіпед) найбільшої місткості. Якими повинні бути її розміри?

3.6 Умовний екстремум

Умовним екстремумом функції $z = f(x, y)$ називають локальний екстремум цієї функції, який досягається за умови, що змінні x та y задовольняють умову зв'язку $\varphi(x, y) = 0$ (рівняння в'язі).

Розв'язання такої задачі зводиться до дослідження на звичайний екстремум функції Лагранжа

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y), \tag{30}$$

де λ – множник Лагранжа.

Необхідні умови екстремуму функції Лагранжа виражаються системою рівнянь

$$\begin{cases} F'_x(x,y,\lambda)=f'_x(x,y)+\lambda\phi'_x(x,y)=0, \\ F'_y(x,y,\lambda)=f'_y(x,y)+\lambda\phi'_y(x,y)=0, \\ \varphi(x,y)=0. \end{cases} \tag{31}$$

З цієї системи визначаються невідомі $x_0,\ y_0,\ \lambda_0$, де $x_0,\ y_0$ – координати точки, в якій можливий умовний екстремум.

Достатні умови умовного екстремуму пов'язані з вивченням знаку другого диференціала функції Лагранжа в точці можливого екстремуму

$$d^2F(x_0,y_0,\lambda_0)=F''_{xx}(x_0,y_0,\lambda_0)dx^2+2F''_{xy}(x_0,y_0,\lambda_0)dxdy+F''_{yy}(x_0,y_0,\lambda_0)dy^2. \tag{32}$$

Якщо $d^2F(x_0,y_0,\lambda_0)>0,$ то $M_0(x_0,y_0)$ – точка умовного мінімуму.

Якщо $d^2F(x_0,y_0,\lambda_0)<0,$ то $M_0(x_0,y_0)$ – точка умовного максимуму.

При дослідженні знаку d^2F треба зважити на те, що диференціали змінних dx, dy в $d^2F(x_0,y_0,\lambda_0)$ залежні і ця залежність диктується рівнянням в'язі.

Аналогічно знаходяться умовні екстремуми для функцій трьох і більшої кількості змінних.

Приклади розв'язання задач

43. Знайти умовний екстремум функції $z=xy$ за умови $3x+2y=1.$

► Очевидно, що $\varphi(x,y)=3x+2y-1=0$ – рівняння в'язі, тому функція Лагранжа матиме вигляд

$$F(x,y,\lambda)=xy+\lambda(3x+2y-1).$$

Оскільки

$$F'_x(x,y,\lambda) = (xy + \lambda(3x + 2y - 1)'_x = y + 3\lambda,$$
$$F'_y(x,y,\lambda) = (xy + \lambda(3x + 2y - 1)'_y = x + 2\lambda,$$
$$F'_\lambda(x,y,\lambda) = (xy + \lambda(3x + 2y - 1)'_\lambda = 3x + 2y - 1,$$

то система (31) набуде вигляду $\begin{cases} x + 2\lambda = 0, \\ y + 3\lambda = 0, \\ 3x + 2y - 1 = 0. \end{cases}$

Вона має один розв'язок $x = \frac{1}{6}$, $y = \frac{1}{4}$, $\lambda = -\frac{1}{12}$.

Отже, точкою умовного екстремуму може бути точка $M\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{4}\right)$. Перевіримо, чи це так. Знайдемо d^2F для цієї точки. Так як $F''_{xx}(x,y,\lambda) = (y + 3\lambda)'_x = 0, F''_{xy}(x,y,\lambda) = (x + 3\lambda)'_y = 1,$ $F''_{yy}(x,y,\lambda) = (x + 2\lambda)'_x = 0,$ то $d^2F(x,y,\lambda) = 2dxdy.$

З рівняння в'язі маємо $3dx + 2dy = 0,$ тобто $dy = -\frac{3}{2}dx.$

Тоді за формулою (32) $d^2F(x,y,\lambda) = 2dx(-\frac{3}{2}dx) = -3(dx)^2 < 0.$

Тому функція має умовний максимум в точці $M\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{4}\right)$ і

$z_{\max} = f\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}.$ ◄

44. Знайти екстремум функції $u = xyz$ за умови, що змінні x, y і z зв'язані рівнянням $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

► Очевидно, рівняння в'язі матиме вигляд $\varphi(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-3=0$, а функція Лагранжа буде такою

$$F(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda(x^2+y^2+z^2-3).$$

Знайдемо частинні похідні:

$$F'_x=yz+2\lambda x,\quad F'_y=xz+2\lambda y,\quad F'_z=xy+2\lambda z.$$

Запишемо систему рівнянь, з якої визначимо множник Лагранжа λ і координати точок можливого екстремуму функції. Маємо $\begin{cases} yz+2\lambda x=0, \\ xz+2\lambda y=0, \\ xy+2\lambda z=0, \\ x^2+y^2+z^2-3=0. \end{cases}$

З цієї системи знаходимо вісім стаціонарних точок – точок можливого умовного екстремуму:

$M_1(1;1;1;),\ M_2(1;-1;-1),\ M_3(-1;1;-1)\ i\ M_4(-1;-1;1)$ для $\lambda_1=-1/2$;

$M_5(-1;-1;-1;),\ M_6(-1;1;1),\ M_7(1;-1;1),\ M_8(1;1;-1)$ для $\lambda_2=1/2$.

Знайдемо другий диференціал функції Лагранжа

$$d^2F=2\lambda(dx^2+dy^2+dz^2)+2zdxdy+2ydxdz+2xdydz. \qquad (33)$$

Для $\lambda=-\dfrac{1}{2}$ і точки M_1 маємо:

$$\begin{aligned} &d^2F(M_1,\lambda_1)=-dx^2-dy^2-dz^2+2dxdy+2dxdz+2dydz= \\ &=-(dx-dy)^2-dz^2+2(dx+dy)dz. \end{aligned} \qquad (34)$$

З рівняння в'язі в точці M_1 знаходимо $dz=-(dx+dy)$. Підставляючи цей вираз у (34), одержимо

$$d^2F(M_1,\lambda_1) = -(dx-dy)^2 - dz^2 - 2(dx+dy^2) < 0,$$

а значить в точці M_1 функція u має умовний максимум і $u_{\max} = 1\cdot 1\cdot 1 = 1$.

Для $\lambda_1 = -\dfrac{1}{2}$ і точки M_2 із (33) і рівняння в'язі одержуємо $d^2F(M_2,\lambda_1) = -dx^2 - dy^2 - dz^2 - 2dxdy - 2dxdz + 2dydz,$ де $dx = dy + dz$. Оскільки

$$d^2F(M_2,\lambda_1) = -(dx-dy)^2 - dz^2 - 2(dy+dz)^2 < 0,$$

то в точці M_2 функція u має умовний максимум і $u_{\max} = 1\cdot(-1)\cdot(-1) = 1.$

Аналогічно встановлюємо, що функція u має умовний максимум в точках M_3 та M_4. У цих точках $u_{\max} = 1.$

Для $\lambda_2 = \dfrac{1}{2}$ і точки M_5 із (33) і рівняння в'язі одержуємо

$d^2F(M_5,\lambda_2) = dx^2 + dy^2 + dz^2 - 2dxdy - 2dxdz - 2dydz,$
де $dx + dy + dz = 0$

Оскільки $d^2F(M_5,\lambda_2) = (dx-dy)^2 + dz^2 + 2(dx+dy)^2 > 0$, то в точці M_5 задана функція u має умовний мінімум $u_{\min} = (-1)(-1)(-1) = -1.$ Легко переконатися, що в точках M_6, M_7, M_8 функція u також має умовний мінімум і $u_{\min} = -1$ (перевірте!). ◄

Завдання для самостійного розв’язання

42. Знайти умовні екстремуми функцій:

а) $z = xy$ за умови $2x+3y-5=0$;

б) $z = x^2 + 2y$ за умови $x^2 + y^2 = 5$;

в) $z = x^2 + y^2 + xy - 5x - 4y + 10$ за умови $x + y - 4 = 0$;

г) $u = 2x + y - 2z$ за умови $x^2 + y^2 + z^2 = 36$**;**

д) $z = xy^2z^3$ за умови $x + 2y + 3z = 12$

$(x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$.

Відповіді до завдань для самостійного розв'язування

1. а) Функція z визначена на всій площині xOy, тобто для будь-яких значень x і y;

б) круг $x^2 + y^2 < R^2$;

в) частина площини xOy, обмежена двома спряженими гіперболами $y = \frac{1}{3x}$ та $y = -\frac{1}{3x}$;

г) $x > 0,\ y > 0,\ xy > 1$, тобто сукупність точок першого квадранта, що лежать над гіперболою $y = \frac{1}{x}$ та на самій гіперболі;

д) $D: x^2 + y^2 + z^2 < a^2$ – внутрішні точки простору, обмежені сферою $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

е) функція u визначена у всіх точках простору, крім точок площини $x+y=0$, оскільки в точках цієї площини знаменник дробу перетворюється в нуль;

є) частина простору поза конусом $x^2+y^2-z^2=0$;

ж) частина простору над площиною $x+y+z=0$ разом з цією площиною.

2. а) сім'я паралельних прямих $x+2y=C$;

б) еліпси з півосями $2\sqrt{C}$ і $3\,(C\geq 0)$.

3. а) сім'я паралельних площин $2x+y+z=C$;

б) сім'я концентричних сфер $x^2+y^2+z^2=R^2-c^2$, c – стала ($c^2\leq R^2$) з центром в початку координат.

4. а) Границя функції в точці (0;0) не існує;

б) границя функції в точці (0;0) не існує.

5. а) a; **б)** 2; **в)** 0; **г)** 0; **д)** 4; **е)** 0.

6. а) $x^2+y^2=4$ – лінія розриву функції;

б) $x=0, y=0$ – лінії розриву функції;

в) $x^2+y^2-z^2=0$ – поверхня розриву(конус);

г) $x=0,\quad y=0,\quad z=0$ – поверхні розриву (координатні площини).

7. а) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=6x+y^3,\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=3xy^2+2y;$

б) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{y}-y\sin xy-\dfrac{2x}{x^2+y^2},\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{x}{y^2}-x\sin xy-\dfrac{2y}{x^2+y^2};$

в) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{y}-\dfrac{y}{x^2}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{1}{x};$

г) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=nx^{n-1}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=ny^{n-1};$

д) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-a\sin(ax+by), \quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=-b\sin(ax+by);$

е) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=a, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=b, \quad \dfrac{\partial u}{\partial z}=c$ (диференціюючи по змінній x, дві інші змінні y і z вважаємо сталими, а тому похідні по x від by *і* cz рівні нулю);

є) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y\cos x, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=\sin x+\cos y;$

ж) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=x^{\sin y-1}\sin y, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=x^{\sin y}\cos y\ln x$

(тут, диференціюючи по x, задану функцію вважають степеневою: основа степеня x – величина змінна, а показник степеня $\sin y$ – величина стала; аналогічно, диференціюючи по y, величину x вважають сталою, а $\sin y$ – змінною, тому функцію $x^{\sin y}$ – показниковою);

з) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=yz^{xy}\ln z, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=xz^{xy}\ln z, \quad \dfrac{\partial u}{\partial z}=xyz^{xy-1};$

и) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{y}{\sqrt{x}}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=2\sqrt{x}+6y\sqrt[3]{z^2}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{2y^2}{\sqrt[3]{z}}.$

9. а) $\Delta z=-2{,}4442;$ $dz=-2{,}8;$

б) $\Delta z = -0{,}2762$; $dz = -0{,}2800$.

10. а) $dz = \dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$;

б) $dz = (\sin y + y\cos x)dx + (\sin x + x\cos y)dy$;

в) $dz = \dfrac{(1+x^2)dy - 2x(1+y^2)arctgydx}{(1+x^2)^2(1+y^2)}$;

г) $dz = \dfrac{2ydx - 2xdy}{y^2 \sin\frac{2x}{y}}$;

д) $dz = \dfrac{xy\sqrt{2}(ydx - xdy)}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2y^2 - y^4}}$;

е) $du = \dfrac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}dx - (e^{\frac{x}{y}}\dfrac{x}{y^2} + e^{\frac{z}{y}}\dfrac{z}{y^2})dy + \dfrac{1}{y}e^{\frac{z}{y}}dz.$

11. а) $du(2;2;2) = \dfrac{1}{3}(dx + dy + dz)$;

б) $du(0;2;3) = \dfrac{3}{2}dx.$

12. а) 0,94; **б)** 1,006; **в)** 10,05. (вказівка: у випадку 12.в розглянути функцію $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$).

13. а) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{2(y^2 - x^2)}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\dfrac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2+y^2)^2};$$

б) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 e^{xy}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{xy}(xy+1)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 e^{xy}$;

в) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)}$.

15. а) $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = ae^y(e^y \sin(ax+e^y) - \cos(ax+e^y))$,

$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = a^2 e^y \sin(ax+e^y)$;

б) $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -2x \sin xy - x^2 y \cos xy$,

$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = -2y \sin xy - xy^2 \cos xy$;

16. а) $d^2 u = \dfrac{y^2 dx^2 - 2xydxdy + x^2 dy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$;

б) $d^2 u = -\dfrac{1}{x} dx^2 + \dfrac{2}{y} dxdy - \dfrac{x}{y^2} dy^2 = -\dfrac{(ydx - xdy)^2}{xy^2}$;

в) $d^2 u = e^{x-2y+z}(dx^2 - 4dxdy + 2dxdz + 4dy^2 - 4dydz + dz^2)$.

17.а) $d^2 z = e^y(-\cos xdx^3 - 3\sin xdx^2 dy + 3\cos xdxdy^2 + \sin xdy^3)$;

б) $d^2 z = y \sin xdx^3 - 3\cos xdx^2 dy - 3\sin ydxdy^2 - x\cos ydy^3$.

18. а) $d^2 z = e^{xy}(y^2 dx^2 + 2(xy+1)dxdy + x^2 dy^2)$;

б) $d^3 z = 12(2xydx^3 + 3x^2 dx^2 dy - 3y^2 dxdy^2 - 2xydy^3)$.

19. а) $\dfrac{\partial z}{\partial u} = 2uv^2 - \dfrac{2u}{(v+1)^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v} = 2u^2 v + \dfrac{2u^2}{(v+1)^3}$;

б) $\dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{y-x}{x^2+y^2}$, $\quad\dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$.

20. а) $\dfrac{dz}{dt}=(t-2)\dfrac{e^t}{t^3}\cos\dfrac{e^t}{t^2}$;

б) $\dfrac{dz}{dt}=(2ae^{x^2+y^2}(y\cos t-x\sin t))=0$.

21. а) $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{x+\sin^2 x\sin 2x}{\sqrt{x^2+\sin^4 x}}$; $\qquad$ **б)** $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{2(x-ye^x)}{x^2-y^2}$.

22. а) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1+y^2}{y^2}$, $\quad\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{2(1+y^2)}{y^5}$;

б) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y}{x-y}$, $\quad\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$.

23. а) $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_M=-4$, $\quad\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_M=20$;

б) $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_M=0$, $\quad\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_M=-1$.

24. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2-x}{1+z}$, $\quad\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2y}{1+z}$, $\quad\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{2y(x-2)}{(1+z)^3}$.

25. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\dfrac{x+y+z}{(x+y+z-1)^3}$.

26. а) $2x-z-2=0$, $\quad\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z}{1}$;

б) $x-y+2z-\dfrac{\pi}{2}=0$, $\quad\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-\dfrac{\pi}{4}}{2}$;

в) $4x+2y-z-3=0,\quad \dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-3}{-1}$.

27. а) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}=1,\quad \dfrac{x-a}{\frac{2}{a}}=\dfrac{y-b}{\frac{2}{b}}=\dfrac{z-c}{-\frac{2}{c}}$;

б) $x+y-4z=0,\quad \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{-4}$;

в) $3x+4y+4z-18=0,\quad \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-2}{4}$.

28. $\left.\dfrac{\partial z}{\partial l}\right|_M=2\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=1-\sqrt{3}\approx-0,7.$

29. $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_{P_1}=22\dfrac{2}{3}.$

30. $\overrightarrow{grad}\,u(P)=\vec{i}+\dfrac{3}{8}\vec{j},\qquad \left|\overrightarrow{grad}\,u(P)\right|=\sqrt{73}/8$,

$\cos\alpha=\dfrac{8}{\sqrt{73}},\quad \cos\beta=\dfrac{3}{\sqrt{73}},\quad \cos\gamma=0$.

31. $\overrightarrow{grad}\,u(M)=12\vec{i}-8\vec{j}-6\vec{k},\qquad \left|\overrightarrow{grad}\,u(M)\right|=2\sqrt{61}$.

32. $f(x,y)=12+15(x-2)+6(x-2)^2+3(x-2)(y-1)-6(y-1)^2+$

$+(x-2)^3-2(y-1)^3.$

33. $y^x=1+(y-1)+(x-1)(y-1)+o(\rho^2)$, де

$\rho=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$.

34. $f(x,y)=1+y+\dfrac{1}{2!}(y^2-x^2)+\dfrac{1}{3!}(y^3-3x^2y)+o(\rho^3)$, де

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

35. а) $M_1\left(0;-\frac{2}{3}\right)$, $M_2\left(2;-\frac{2}{3}\right)$ − стаціонарні точки;

$z_{\max} = f(M_1) = \frac{4}{3}$, в точці M_2 екстремуму немає;

б) мінімум в точці $M_2(5;6)$, $z_{\min} = -86$; в іншій стаціонарній точці $M_2(1;-6)$ екстремуму немає;

в) $z_{\min} = f\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right) = -\frac{64}{27}$;

г) $z_{\max} = f\left(\frac{2}{3};-\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}e^{-2}$;

д) $z_{\min} = f\left(2;1\right) = -28$, $z_{\max} = f\left(-2;-1\right) = 28$.

36. а) $u_{\min} = u\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3};1\right) = -\frac{4}{3}$;

б) $u_{\min} = u(1;-1;3) = -11$.

37. $z_{найб} = 9$ в точці (1;2); $z_{найм} = -11$ в точці (3;-2).

38. $z_{найб} = 3{,}5$ в точці $\left(2;\frac{1}{2}\right)$; $z_{найм} = -4{,}5$ в точці $\left(2;-\frac{3}{2}\right)$.

39. $z_{найб} = z\left(\frac{1}{2};\,1\right) = \frac{1}{2}$, $z_{найм} = z\left(0;\,0\right) = 0$.

40. $z_{найб} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ при $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$;

$z_{найм} = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$ при $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$.

41. Куб з ребром $\frac{\sqrt{6s}}{6}$.

42. а) $z_{\max} = f(M_0) = \frac{25}{24}$, $M_0\left(\frac{5}{4};\frac{5}{6}\right)$ – точка умовного максимуму;

б) $z_{\max} = f(M_1) = f(M_2) = 6$, $M_1(-2;1)$ та $M_2(2;1)$ – точки умовного максимуму; $z_{\min} = f(M_3) = -2\sqrt{5}$, $M_3\left(-\sqrt{5};0\right)$ – точка умовного мінімуму.

в) $z_{\min} = f(M_0) = \frac{15}{4}$, $M_0\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$ – точка умовного мінімуму.

г) $u_{\max} = u(M_1) = 18$, $M_1(4;2;-4)$ – точка умовного максимуму; $u_{\min} = u(M_2) = -18$, $M_2(-4;-2;4)$ – точка умовного мінімуму.

д) $u_{\max} = u(M_0) = 64$, $M_0(2;2;2)$ – точка умовного максимуму.

8 Звичайні диференціальні рівняння

§ 1. Диференціальні рівняння першого порядку

1.1 Загальні поняття та означення

Звичайним диференціальним рівнянням називається співвідношення, яке зв'язує незалежну змінну x, функцію $y = y(x)$ та її похідні по цій змінній. Найвищий з порядків похідних, які присутні в цьому співвідношенні, називається *порядком диференціального рівняння*. Отже, диференціальне рівняння n-го порядку можна подати у вигляді

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0\,, \tag{1}$$

де F – функція $(n+2)$ змінних, x – незалежна змінна (аргумент), $y = y(x)$ – невідома функція цього аргумента, $y', y'', ..., y^{(n)}$ – її похідні по вказаному аргументу. Відзначимо, що (1) обов'язково повинно містити $y^{(n)}$.

У цьому розділі ми розглянемо диференціальні рівняння першого порядку, загальний вид яких, відповідно до (1), можна записати у вигляді

$$F(x, y, y') = 0\,. \tag{2}$$

Рівняння (2) може не містити у явному виді x або y, але обов'язково воно має містити похідну y' (інакше вираз перестає бути диференціальним рівнянням). Якщо рівняння (2) удається розв'язати відносно похідної y', то одержимо більш зручний вигляд

$$y' = f(x, y)\,, \tag{3}$$

який ми і будемо переважно далі розглядати. Зокрема, рівняння (3) можна переписати у вигляді $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, або $dy = f(x, y)dx.$ Домноживши останню рівність на деяку функцію $Q(x, y) \neq 0$, можна записати диференціальне рівняння першого порядку у вигляді

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \tag{4}$$

яке має ту перевагу, що змінні x та y тут стають рівноправними, тобто кожну з них можна розглядати як функцію іншої.

Знаходження невідомої функції, що входить у диференціальне рівняння, називається його розв'язуванням або інтегруванням. *Розв'язком* рівняння (3) на деякому інтервалі $(a;\ b)$ називається диференційовна на цьому інтервалі функція $y = \varphi(x)$, яка при підставлянні у рівняння (3) перетворює його в тотожність при всіх $x \in (a, b)$, тобто

$$\forall x \in (a, b): \quad \varphi'(x) = f\left(x, \varphi(x)\right).$$

Крива, що визначається рівнянням $y = \varphi(x)$, називається *інтегральною кривою* диференціальною рівняння.

Розв'язок диференціального рівняння може бути одержаним як у явній формі $y = \varphi(x)$, так і в неявному вигляді $\Phi(x, y) = 0$. У другому випадку кажуть, що одержали *інтеграл* диференціального рівняння. Можливо також отримати розв'язок диференціального рівняння у параметричній формі $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$. Диференціальне рівняння, взагалі кажучи, вважається розв'язаним і в тому випадку, коли воно зведене до квадратур, тобто операцій знаходження невизначених інтегралів, навіть якщо ті інтеграли не можуть бути виражені через елементарні функції.

Отже, в результаті інтегрування диференціального рівняння першого порядку одержимо функцію, що залежить ще і від довільної сталої C,

$$y = \varphi(x, C), \tag{5}$$

тобто фактично одержуємо сім'ю розв'язків. Таку сім'ю розв'язків називають *загальним розв'язком*, а якщо прийшли до виразу $\Phi(x, y, C) = 0$, то вживають термін *загальний інтеграл*. Якщо в загальному розв'язку замість C підставити якесь конкретне значення, то отримаємо розв'язок, який називається *частинним розв'язком* рівняння (3).

Часто при розв'язуванні теоретичних або практичних задач потрібно знайти не всі розв'язки даного рівняння, а лише розв'язок, що задовольняє деякі додаткові умови. Однією з задач такого типу є дуже важлива в теорії диференціальних рівнянь задача – так звана *задача Коші*:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{6}$$

Суть задачі Коші полягає в тому, що з усіх розв'язків рівняння (3) потрібно знайти такий розв'язок $y = y(x)$, який при заданому значенні незалежної змінної $x = x_0$ набуває заданого значення $y = y_0$, де x_0 і y_0 – задані числа, котрі називаються *початковими значеннями*, а умова $y(x_0) = y_0$ називається *початковою умовою*.

Умови існування і єдиності частинного розв'язку диференціального рівняння $y' = f(x, y)$, що задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$, сформульовані у наступній теоремі існування та єдності розв'язку.

Теорема Коші. Якщо функція $f(x, y)$ та її частинна похідна $f'_y(x, y)$ неперервні в плоскій області D, що містить точку $M_0(x_0, y_0)$, то існує єдиний розв'язок $y(x)$ диференціального рівняння $y' = f(x, y)$, який задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$.

При цьому, як вказувалося раніше, розрізняють: *загальний розв'язок* $y = \varphi(x, C)$, що перетворює рівняння (3) в тотожність при будь-якому значенні довільної сталої C, серед яких міститься значення C_0, що задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$, і *частинний розв'язок* $y_{част} = \varphi(x, C_0)$, який одержуємо із загального при $C = C_0$.

При розв'язуванні диференціальних рівнянь символом невизначеного інтеграла, як правило, позначають не множину всіх первісних підінтегральної функції, а яку-небудь одну первісну; довільну сталу інтегрування додають окремо.

1.2 Рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними і звідні до них

Рівняння виду

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0 \tag{7}$$

називається *рівнянням з відокремленими змінними.* Воно має загальний інтеграл

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C\,, \tag{8}$$

де C – довільна стала.

Рівняння виду

$$P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0\,, \tag{9}$$

або

$$y' = f_1(x)\,f_2(y) \tag{10}$$

називаються *рівняннями з відокремлюваними змінними*.

Розв'язування таких рівнянь полягає у зведенні їх до виду (7) діями, які будуть ілюструвати подальші приклади. Наприклад, поділивши обидві частини рівняння (9) на функцію $P_2(x)Q_1(y)\neq 0$, приходимо до рівняння з відокремленими змінними у вигляді

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx+\frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy=0\,, \tag{11}$$

або

$$\frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy=-\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx\,, \tag{12}$$

яке має загальний інтеграл

$$\int\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx+\int\frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy=C\,, \tag{13}$$

або

$$\int\frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy=-\int\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx+C\,. \tag{14}$$

Зауважимо, що ділення на $P_2(x)Q_1(y)$ може спричинити до втрати розв'язків диференціального рівняння, що є розв'язками рівнянь $P_2(x)=0,\quad Q_1(y)=0.$ Ці випадки слід перевіряти додатково.

Тепер розглянемо конкретні приклади.

Приклади розв'язання задач

1. Знайти загальний розв'язок рівняння:

а) $e^y\left(1+x^2\right)dy-2x\left(1+e^y\right)dx=0$;

б) $xy^2dx-ydy=yx^2dy-xdx$.

►а) Для відокремлення змінних поділимо обидві частини рівняння на вираз $\left(1+x^2\right)\left(1+e^y\right)$, одержимо

$\frac{e^y dy}{1+e^y} - \frac{2xdx}{1+x^2} = 0$. Зінтегрувавши одержаний вираз $\int \frac{e^y dy}{1+e^y} - \int \frac{2xdx}{1+x^2} = C$, запишемо загальний інтеграл $\ln\left(1+e^y\right) - \ln\left(1+x^2\right) = \ln C$, звідки маємо $1+e^y = C\left(1+x^2\right)$. Це більш зручний вигляд загального інтеграла, з якого можна одержати загальний розв'язок $y = \ln\left(C\left(1+x^2\right)-1\right)$.

Зауважимо, що довільна стала була записана у логарифмічному виді як $\ln C$, до цього будемо вдаватися і далі з метою спрощення кінцевого результату. Крім того відмітимо, що жодні розв'язки не були втрачені, оскільки $\left(1+x^2\right)\left(1+e^y\right) \neq 0$ при $x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}$. Таким чином, шуканий загальний розв'язок $y = \ln\left(C\left(1+x^2\right)-1\right)$. ◄

► б) Згрупувавши доданки з однаковими диференціалами, одержимо

$$xy^2dx + xdx = yx^2dy + ydy \quad \Rightarrow \quad x(y^2+1)dx = y(x^2+1)dy,$$

$$\frac{xdx}{x^2+1} = \frac{ydy}{y^2+1} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{xdx}{x^2+1} = \int \frac{ydy}{y^2+1},$$

$$\ln\left|x^2+1\right| + \ln\left|C\right| = \ln\left|y^2+1\right| \quad \Rightarrow \quad y^2+1 = C\left(x^2+1\right). \text{ ◄}$$

2. Знайти розв'язок задачі Коші $x^3y' + y = 7, \quad y(1) = 5.$

► Перепишемо рівняння у вигляді $x^3y' = 7 - y,$ а потім $y' = \frac{7-y}{x^3}$, що відповідає вигляду (10). Щоб відокремити змінні, у цьому випадку потрібно записати похідну в диференціалах $y' = \frac{dy}{dx}$. Маємо $\frac{dy}{dx} = \frac{7-y}{x^3}$, звідки $\frac{dy}{y-7} = -\frac{dx}{x^3}$.

Одержали рівняння з відокремленими змінними, яке зінтегруємо $\int \frac{dy}{y-7} = -\int \frac{dx}{x^3}$ і запишемо загальний інтеграл $\ln|y-7| = \frac{1}{2x^2} + \ln|C|$, звідки $y = 7 + Ce^{\frac{1}{2x^2}}$. Знайдемо тепер частинний розв'язок, що задовольняє початкову умову $y(1) = 5$: $5 = 7 + Ce^{\frac{1}{2\cdot 1^2}} \Rightarrow C = -2e^{-\frac{1}{2}}$.

Отже, розв'язком задачі Коші буде $y = 7 - 2e^{\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2}}$. ◄

3. Швидкість охолодження тіла в повітрі пропорційна різниці між температурою тіла і температурою повітря. Температура повітря дорівнює 20^0 С. Відомо, що протягом 20 хвилин тіло охолоджується від 100^0 до 60^0. Встановити закон зміни температури тіла в залежності від часу.

► Якщо позначити час через t, а температуру тіла через U, то швидкість охолодження тіла, або іншими словами, швидкість зміни його температури буде похідною $\frac{dU}{dt}$. За умовою задачі маємо $\frac{dU}{dt} = k(U - 20)$, де k – коефіцієнт пропорційності. Відокремлюючи змінні, маємо $\frac{dU}{U-20}=kdt$.

Інтегруючи ліву і праву частини, одержимо

$$\int\frac{dU}{U-20}=k\int dt+\ln|C|.$$

(оскільки в подальшому ми будемо потенціювати, то тут зручно писати $\ln|C|$ замість С), або $U=20+Ce^{kt}$.

Для визначення сталих C і k використаємо умови задачі: $U=100^{\circ}$ при $t=0$, $U=60^{\circ}$ при $t=20$. Першу з цих умов прийнято називати „початковою”, з її допомогою знаходимо C. Друга умова допомагає знайти коефіцієнт пропорційності k. Таким чином

$$\begin{cases}100=20+C,\\ 60=20+Ce^{20k}.\end{cases}$$

З цієї системи рівнянь знаходимо спочатку $C=80$, а потім

$$e^{20k}=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ e^{k}=\left(\frac{1}{2}\right)^{1/20}.$$

Отже, закон зміни температури в залежності від часу має вигляд $U=20+80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$.

В розглянутому прикладі при складанні диференціального рівняння ми мали справу безпосередньо з похідною шуканої функції. Наведемо тепер приклад, де міркування зручніше проводити, оперуючи з диференціалами шуканих величин. ◄

4. В резервуар, що містить 10 кг солі на 100 л суміші, кожну хвилину вливається 30 л води і витікає 20 л суміші (рис. 1).

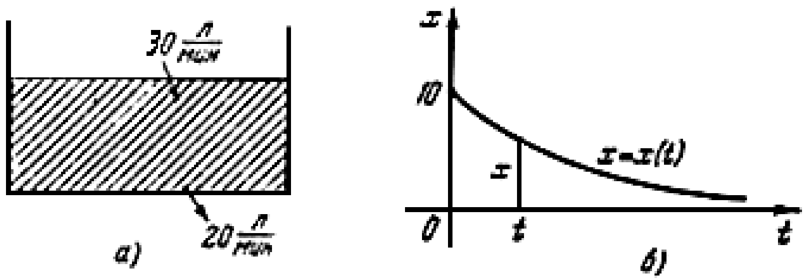


Рисунок 1

Визначити кількість солі, що залишиться в резервуарі через t хв., вважаючи, що суміш миттєво перемішується.

► Нехай x – кількість солі в резервуарі в момент часу t; $x+dx$ – кількість солі в момент часу $t+dt$. Так як суміш витікає, то її кількість зменшується з часом і тому dx<0 при dt>0. Об'єм суміші в резервуарі в момент часу t, очевидно, дорівнює $V=100+30t-20t=100+10t$, а тому концентрація солі (тобто кількість солі, що міститься в одиниці об'єму суміші) буде дорівнювати

$$\frac{x}{100+10t}. \qquad (15)$$

Зміну кількості солі $(-dx)$ за нескінченно малий проміжок часу $[t, t+dt]$ ми одержимо, якщо об'єм суміші, яка витекла за цей час $20\,dx$, помножимо на концентрацію солі (15).

Одержимо диференціальне рівняння

$$-dx = \frac{x}{100+10t} \cdot 20dt\,. \qquad (16)$$

Крім того, з умови задачі випливає початкова умова

$$x\big|_{t=0} = 10\,. \qquad (17)$$

Відокремлюючи змінні в рівнянні (16) та інтегруючи, послідовно одержуємо:

$$\frac{dx}{x} = -\frac{2}{10+t}dt\,, \quad \int \frac{dx}{x} = -2\int \frac{dt}{10+t}\,,$$

$$\ln|x| = -2\ln|10+t| + \ln|C|, \quad x = \frac{C}{(10+t)^2}\,.$$

Поклавши $t=0$, з початкової умови (17) знаходимо $10 = \frac{C}{100}$, тобто $C = 1000$. Тому закон зміни кількості солі x в кілограмах, що знаходиться в резервуарі, в залежності від пройденого часу в хвилинах (рис. 1б) задається формулою

$$x = \frac{1000}{(10+t)^2}\,. \qquad (18)$$

Зауважимо, що з формули (18), знаючи кількість солі, що залишилась в резервуарі (останнє легко встановити, вимірявши об'єм резервуару і концентрацію солі в ньому), можна визначити кількість часу, яка пройшла від початку процесу. На цій ідеї грунтується обчислення віку морів і океанів. ◄

До рівнянь з відокремлюваними змінними зводяться рівняння виду

$$y' = f\left(ax + by + c\right), \tag{19}$$

де f – неперервна функція і виконуються умови $a \neq 0$; $b \neq 0$. Дійсно, після заміни $ax + by + c = t$, $t' = a + by'$, $y' = \dfrac{t' - a}{b}$ рівняння (19) набуває виду $t' = a + f\left(t\right)$, тобто одержуємо рівняння з відокремлюваними змінними.

5. Знайти загальний розв'язок рівняння $y' = \sin(x + y)$.

► Зробимо заміну $x + y = t$, тоді $1 + \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dt}{dx}$, а дане рівняння запишеться у вигляді $\dfrac{dt}{dx} = \sin t + 1$.

Розглянемо два випадки.

1) Нехай $\sin t + 1 \neq 0$. Тоді відокремлюємо змінні $dx - \dfrac{dt}{\sin t + 1} = 0$ і інтегруємо $\int dx - \int \dfrac{dt}{\sin t + 1} = C.$

Складніший інтеграл знайдемо окремо за допомогою універсальної тригонометричної підстановки

$$\int \frac{dt}{\sin t + 1} = \left| \begin{matrix} z = tg\dfrac{t}{2}, & \sin t = \dfrac{2zdz}{1 + z^2}, \\ dt = \dfrac{2dz}{1 + z^2}, & t = 2arctg\, z \end{matrix} \right| = \int \frac{2dz}{\left(1 + z^2\right)\left(\dfrac{2z}{1 + z^2} + 1\right)} =$$

$$= 2\int \frac{dz}{z^2 + 2z + 1} = 2\int \frac{dz}{(z+1)^2} = -\frac{2}{z+1} + C_2 = -\frac{2}{tg\frac{t}{2} + 1} + C_2.$$

Загальний інтеграл, враховуючи, що $x + y = t$, запишемо у вигляді $x + \dfrac{2}{tg\dfrac{x+y}{2} + 1} = C$.

2) Нехай $\sin t + 1 = 0$. Тоді $\sin t = -1$, $t = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$ Враховуючи, що $x + y = t$, одержуємо розв'язки даного рівняння $x + y = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$ ◄

Завдання для самостійного розв'язання

1. Розв'язати рівняння:

а) $e^y(1 + x^2)dy - 2x(1 + e^y)dx = 0$;

б) $2xy^2dx - ydy = yx^2dy - 6xdx$;

в) $x \cdot y' \ln y - y = 0$;

г) $tgx \sin^2 ydx + \cos^2 xctgydy = 0$;

д) $6xdx - 2x^2ydy = 6ydy - 3xy^2dx$.

2. Швидкість розпаду радію пропорційна його кількості. Протягом року з кожного грама радію розпадається 0,44 мг. Через скільки років розпадеться половина наявної кількості радію?

3. Температура вийнятої з печі хлібини протягом 20 хвилин зменшується від 200 до 150^{o}C. Температура повітря є сталою і дорівнює 25^{o}C. Через скільки часу від початку охолодження температура хлібини понизиться до 30^{o}C?

4. Скласти рівняння кривої, що проходить через точку М(2; – 3) та має дотичну з кутовим коефіцієнтом $k = 4x - 3$.

5. Швидкість здешевлення обладнання внаслідок його зношування пропорційна в кожний момент часу його фактичній вартості. Початкова вартість обладнання A_0 млн. грн. Якою буде вартість обладнання через *t* років?

6. Знайти частинний розв'язок рівняння:

а) $(2xy + y)y' = 3 - y^2, \quad y(0) = 2$;

б) $y' = (2y - 3)tgx, \quad y(2\pi) = 6$;

в) $y' + e^x = yy', \quad y(0) = 2$;

г) $y'ctgx + y = 2, \quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2$.

1.3 Рівняння у повних диференціалах

Рівняння

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \tag{20}$$

називається *рівнянням у повних диференціалах*, якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$, тобто, якщо

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = du\,. \tag{21}$$

Необхідною і достатньою умовою існування такої функції $u(x,y)$ є виконання рівності

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} . \tag{22}$$

Якщо умова (22) має місце, то рівняння (20) набуває вигляду $du = 0$, а його загальним інтегралом буде $u(x,y) = C$. Отже, основна задача полягає у знаходженні функції $u(x,y)$. Це будемо робити у такій послідовності. З (21) записуємо рівності

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = P(x,y) , \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y) . \end{cases} \tag{23}$$

Розв'язуючи перше з цих рівнянь інтегруванням по змінній x, одержимо

$$u = \int_{x_0}^{x} P(x,y)\, dx + \varphi(y). \tag{24}$$

В даному випадку змінна y є зафіксованою і тому довільна стала інтегрування має вигляд довільної функції від y. Виберемо $\varphi(y)$ таким чином, щоб виконувалась друга з рівностей (23). Для цього продиференціюємо (24) по y і прирівняємо до $Q(x,y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial y} dx + \varphi'(y) = Q(x,y).$$

Оскільки з умови (1.22) $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, то можна записати $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \varphi'(y) = Q(x,y)$, звідки, враховуючи межі інтегрування, одержимо $Q(x,y) - Q(x_0,y) + \varphi'(y) = Q(x,y)$. Отже,

$$\varphi'(y) = Q(x_0, y), \tag{25}$$

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy. \tag{26}$$

Таке інтегрування є можливим тільки за умови, що рівність (26) не містить явно змінну x, в протилежному випадку треба шукати помилку: або рівняння не було у повних диференціалах, або ж обчислення були хибні.

Підставляючи результат (26) в (24), одержимо

$$u = \int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy. \tag{27}$$

Точки $M_0(x_0, y_0)$ і $M(x, y)$ слід вибирати так, щоб вони належали області, в якій функції $P(x, y)$, $Q(x, y)$, а також їх частинні похідні $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ неперервні. Таким чином, вираз

$$\int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy = C \tag{28}$$

є формулою загального інтеграла рівняння у повних диференціалах.

Якби такі ж перетворення виконувались в іншій послідовності, починаючи з інтегрування по змінній y другої рівності системи (23), то прийшли до дещо іншої формули загального інтеграла

$$\int_{x_0}^{x} P(x, y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)\,dy = C. \tag{29}$$

Розглянемо тепер м*етод інтегрувального множника*.

Якщо рівняння виду $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ не є рівнянням у повних диференціалах, то можна спробувати підібрати так званий інтегрувальний множник $\mu = \mu(x, y)$, тобто функцію, в результаті множення на яку обох частин рівняння одержимо у лівій частині повний диференціал деякої функції $u(x,y)$, тобто $\mu(P\,dx+Q\,dy)=du$ і виконується умова

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}. \qquad (30)$$

Інтегрувальний множник μ легко знайти у таких двох випадках:

1) $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=F(x)$, тоді існує інтегрувальний множник $\mu=\mu(x)$, який залежить тільки від змінної x і може бути знайдений з диференціального рівняння

$$\frac{d\ln\mu}{dx}=\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}. \qquad (31)$$

2) $\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=F_1(y)$, тоді існує інтегрувальний множник $\mu=\mu(y)$, який залежить тільки від змінної y і може бути знайдений з диференціального рівняння

$$\frac{d\ln\mu}{dy}=\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{P}. \qquad (32)$$

Приклади розв’язання задач

6. Знайти загальний інтеграл рівняння:

$$\left(3x^2y+\ln y\right)dx+\left(x^3+\frac{x}{y}+\cos y\right)dy=0.$$

► Маємо $P(x,y)=3x^2y+\ln y,\quad Q(x,y)=x^3+\dfrac{x}{y}+\cos y$. Перевіримо, чи виконується умова (22). Для цього знаходимо частинні похідні: $\dfrac{\partial P}{\partial y}=3x^2+\dfrac{1}{y};\quad \dfrac{\partial Q}{\partial x}=3x^2+\dfrac{1}{y}$. Оскільки $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, то робимо висновок, що ліва частина даного рівняння є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$, яку знайдемо за формулою (27). При цьому можна покласти $x_0=0,\quad y_0=1$. Отже,

$$u=\int_0^x\left(3x^2y+\ln y\right)dx+\int_1^y\left(0^3+\frac{0}{y}+\cos y\right)dy=x^3y+x\ln y\Big|_0^x+$$
$$+\sin y\Big|_1^y=x^3y+x\ln y+\sin y-\sin 1.$$

Запишемо загальний інтеграл у вигляді (29), сталу величину $\sin 1$ перенесемо зразу ж у праву частину і приєднаємо до довільної сталої $x^3y+x\ln y+\sin y=C.$

На практиці можна прийти до відповіді ще швидше, штучним шляхом. Досить розкрити дужки, потім об'єднати члени рівняння так, щоб у кожній групі можна було побачити повний диференціал деякої відомої функції і, нарешті, всі групи об'єднати під загальний інтеграл. В розглянутому вже прикладі це відбувається так:

$$\left(3x^2ydx+x^3dy\right)+\left(\ln ydx+\frac{x}{y}dy\right)dy+\cos ydy=0,$$

$$d\left(x^3y\right)+d\left(x\ln y\right)+d\left(\sin y\right)=0, d(x^3y+x\ln y+\sin y)=0.$$

Отже, загальний інтеграл $x^3y+x\ln y+\sin y=C$. ◄

7. Знайти загальний інтеграл рівняння:

а) $\left(2y+xy^3\right)dx+\left(x+x^2y^2\right)dy=0$;

б) $\left(xy^2+y\right)dx-xdy=0$.

►а) Маємо $P(x,y)=2y+xy^3$; $Q(x,y)=x+x^2y^2$. Знайдемо частинні похідні: $\dfrac{\partial P}{\partial y}=2+3xy^2$; $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=1+2xy^2$. Оскільки $\dfrac{\partial P}{\partial y}\neq\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, дане рівняння не є рівнянням у повних диференціалах.

Розглянемо вираз

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\frac{2+3xy^2-1-2xy^2}{x+x^2y^2}=\frac{1+xy^2}{x\left(1+xy^2\right)}=\frac{1}{x}.$$

Бачимо, що має місце перший випадок і інтегрувальний множник, який залежить тільки від змінної x, можна знайти з рівняння виду (30). В даному випадку це буде $\dfrac{d\ln\mu}{dx}=\dfrac{1}{x}$, звідки послідовно знаходимо

$$d\ln\mu=\frac{dx}{x},\quad \int d\ln\mu=\int\frac{dx}{x},\quad \ln\mu=\ln x,\quad \mu=x.$$

Домножимо дане рівняння на знайдений інтегрувальний множник $\left(2xy+x^2y^3\right)dx+\left(x^2+x^3y^2\right)dy=0$.

Переконаємося, що умова повного диференціала виконується. Дійсно, $\dfrac{\partial\left(2xy + x^2y^3\right)}{\partial y} = \dfrac{\partial\left(x^2 + x^3y^2\right)}{\partial x} = 2x + 3x^2y^2$.

Знаходимо функцію $u(x, y)$ за формулою (23), вважаючи $x_0 = 0, \quad y_0 = 0$,

$$u = \int_0^x \left(2xy + x^2y^3\right)dx + \int_0^y \left(0^2 + 0^3 \cdot y^2\right)dy = x^2y + \frac{1}{3}x^3y^3\Big|_0^x = x^2y + \frac{x^3y^3}{3}.$$

Запишемо загальний інтеграл у вигляді (27), домноживши вираз на число 3 для одержання більш зручної форми,

$$3x^2y + x^3y^3 = C. \blacktriangleleft$$

►б) Маємо $P(x, y) = xy^2 + y; \quad Q(x, y) = -x$. Знайдемо частинні похідні: $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2xy + 1; \quad \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -1$. Оскільки $\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, то дане рівняння не є рівнянням у повних диференціалах. Розглянемо вираз

$$\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \frac{-1 - 2xy - 1}{xy^2 + y} = \frac{-2(xy + 1)}{y(xy + 1)} = -\frac{2}{y}.$$

Бачимо, що має місце другий випадок і інтегрувальний множник, який залежить тільки від змінної y, можна знайти з рівняння виду (32). В даному випадку це буде $\dfrac{d\ln\mu}{dy} = -\dfrac{2}{y}$, звідки послідовно знаходимо

$$d\ln\mu = \frac{-2dy}{y}, \quad \int d\ln\mu = -2\int\frac{dy}{y}, \quad \ln\mu = -2\ln y, \quad \mu = \frac{1}{y^2}.$$

Домножимо дане рівняння на знайдений інтегрувальний множник $\left(x+\frac{1}{y}\right)dx-\frac{x}{y^2}dy=0$.

Переконаємося, що умова повного диференціала тепер виконується. Дійсно,

$$\frac{\partial\left(x+\frac{1}{y}\right)}{\partial y}=\frac{\partial\left(-\frac{x}{y^2}\right)}{\partial x}=-\frac{1}{y^2}.$$

Знаходимо функцію $u(x,y)$ за формулою (27), вважаючи $x_0=0,\quad y_0=1,\ u=\int\limits_0^x\left(x+\frac{1}{y}\right)dx-\int\limits_1^y\frac{0}{y^2}dy=\left.\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{y}\right)\right|_0^x=\frac{x^2}{2}+\frac{x}{y}.$

Запишемо загальний інтеграл у вигляді (29), домноживши вираз на $2y$ для одержання більш зручної форми,

$$x^2y+2x=Cy.$$

Тут, як і у попередньому прикладі, дещо відкоректований запис довільної сталої C. Прослідкувати за цим пропонується самостійно. ◄

Завдання для самостійного розв'язання

7. Розв'язати диференціальне рівняння:

а) $3x^2e^ydx+(x^3e^y-1)dy=0$;

б) $e^ydx+(\cos y+xe^y)dy=0$;

в) $(\sin 2x-2\cos(x+y))dx-2\cos(x+y)dy=0$;

г) $(y^3+\cos x)dx+(3xy^2+e^y)dy=0$;

д) $xy^2dx+(x^2y-x)dy=0$;

е) $(6y+x+\frac{3}{x})dy+(\frac{3y^2}{x}+2y+2)dx=0$.

1.4 Однорідні рівняння та звідні до них

Спочатку введемо поняття *однорідної функції*.

Означення 1. Функція $f(x,y)$ називається *однорідною функцією* k *-го степеня* (k *-го виміру*) відносно змінних x і y, якщо при будь-якому $\lambda\neq 0$ має місце співвідношення

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^k f(x,y) \tag{33}$$

Зокрема, якщо $k=0$, то маємо однорідну функцію *нульового* виміру. Наприклад, такою є функція $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{2xy}$ (перевірити це самостійно!), а функція $f(x,y)=x^2+xy$ – є однорідною функцією 2-го виміру.

Зауважимо, що у випадку, коли дві функції $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ є однорідними однакового виміру, їх відношення $f(x,y)=\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ є однорідною функцією нульового виміру. Однорідну функцію нульового виміру можна завжди зобразити як функцію відношення змінних $\dfrac{y}{x}$ або $\dfrac{x}{y}$.

Означення 2. Однорідним відносно змінних x і y називається диференціальне рівняння першого порядку виду

$$y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right), \tag{34}$$

або виду

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0,$$

де функції $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ є однорідними однакового степеня. Цей випадок зводиться до попереднього (30) після перетворення $\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, або розв'язується безпосередньо за допомогою заміни $u = \frac{y}{x}$, про яку докладніше буде йти мова нижче.

Метод розв'язування однорідного рівняння (34) полягає у зведенні його до рівняння з відокремлюваними змінними після заміни $u = \frac{y}{x}$, тобто $y = ux$, $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u$. Дійсно, після такої заміни одержимо рівняння $\frac{du}{dx}x + u = \varphi(u)$, змінні в якому легко відокремити. Таким чином, $x\frac{du}{dx} = \varphi(u) - u$; $\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}$. Після цього здійснюємо інтегрування

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \ln|x| + C. \qquad (35)$$

Зауважимо, що $\varphi(u) - u \neq 0$, бо в іншому випадку ми б мали рівняння $y' = \frac{y}{x}$, в якому змінні відокремлюються безпосередньо.

Приклади розв'язання задач

8. Розв'язати диференціальне рівняння:

а) $x^2 y' + y^2 + xy + x^2 = 0$;

б) $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$.

►а) Запишемо рівняння у вигляді $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y^2 + xy + x^2}{x^2}$ або $\dfrac{dy}{dx} = -\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 - \dfrac{y}{x} - 1$. Бачимо, що це однорідне рівняння виду (34). Зробимо заміну $u = \dfrac{y}{x}$, звідки $y = ux$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{du}{dx}x + u$, і одержимо рівняння з відокремлюваними змінними $\dfrac{du}{dx}x + u = -u^2 - u - 1$. Відокремимо змінні та зінтегруємо одержане рівняння

$$-\frac{du}{(u+1)^2} = \frac{dx}{x}, \quad -\int \frac{du}{(u+1)^2} = \int \frac{dx}{x}, \quad \frac{1}{(u+1)} = \ln|x| + \ln|C|.$$

Тепер підставимо $u = \dfrac{y}{x}$ і запишемо загальний інтеграл $\dfrac{x}{x+y} = \ln Cx$. Якщо цю рівність розв'язати відносно y, то одержимо загальний розв'язок $y = \dfrac{x}{\ln Cx} - x.$ ◄

►б) Запишемо рівняння у вигляді $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + \dfrac{\sqrt{y^2 - x^2}}{x}$, або $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + \sqrt{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 - 1}.$ Бачимо, що це однорідне рівняння виду (1.34). Зробимо заміну $u = \dfrac{y}{x}$, звідки $y = ux$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{du}{dx}x + u$, і одержимо рівняння з відокремлюваними змінними

$\frac{du}{dx}x + u = u + \sqrt{u^2 - 1}.$ Відокремимо змінні та зінтегруємо одержане рівняння $\frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \quad \int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln\left|u + \sqrt{u^2-1}\right| = \ln|x| + \ln|C|$, $u + \sqrt{u^2-1} = Cx$. Тепер підставимо у знайдений вираз $u = \frac{y}{x}$ і запишемо загальний інтеграл $\frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} - 1} = Cx$ або $y + \sqrt{y^2 - x^2} = Cx^2$. ◄

Зауваження. Крім цього методу, можна застосувати також метод інтегрувального множника. Такий множник для однорідного рівняння виду $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, де функції $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ є однорідними однакового виміру, визначається формулою

$$\mu = \frac{1}{Px + Qy}. \tag{36}$$

Цю формулу легко запам'ятати. Знаменник її одержуємо як результат інтегрування самого рівняння, якщо функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ вважати сталими.

9. Розв'язати диференціальне рівняння $y^2dx + \left(x^2 - xy\right)dy = 0$.

► Тут $P(x,y) = y^2$; $Q(x,y) = x^2 - xy$. За формулою (36) знаходимо $\mu = \frac{1}{xy^2 + y\left(x^2 - xy\right)} = \frac{1}{x^2y}$. Домножимо дане рівняння на $\mu = \dfrac{1}{x^2 y}$, потім згрупуємо доданки одержаного рівняння у повних диференціалах

$$\frac{y}{x^2}dx + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)dy = 0,\ \frac{ydx - xdy}{x^2} + \frac{dy}{y} = 0,\ -d\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{dy}{y} = 0.$$

Маємо загальний інтеграл $\ln y - \dfrac{y}{x} = \ln C$, $\ln y = \dfrac{y}{x} + \ln C$, звідки $y = Ce^{\frac{y}{x}}$. ◄

Зауваження. Якщо рівняння виду $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ є одночасно і однорідним і у повних диференціалах, то загальний інтеграл можна знайти і без квадратур за формулою

$$Px + Qy = C. \qquad (37)$$

10. Розв'язати диференціальне рівняння

$$\left(x^2 + y^2\right)dx + \left(2xy + y^2\right)dy = 0.$$

► Тут $P(x, y) = x^2 + y^2;\ Q(x, y) = 2xy + y^2$. Переконаємось, що виконується умова повного диференціала. Дійсно,

$$\frac{\partial\left(x^2 + y^2\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(2xy + y^2\right)}{\partial x} = 2y.$$

В той же час функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ є однорідними 2-го степеня, тобто дане рівняння є однорідним. За формулою (37) записуємо загальний інтеграл

$$\left(x^2 + y^2\right)x + \left(2xy + y^2\right)y = C. ◄$$

Завдання для самостійного розв’язання

8. Розв’язати рівняння:

а) $(xy' - y)ctg\dfrac{y}{x} = x$; б) $x^2y' = y^2 + 6xy + 6x^2$;

в) $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$; г) $xy' = y\cos\ln\dfrac{y}{x}$;

д) $xy' - y = xtg\dfrac{y}{x}$.

9. Знайти частинний розв’язок рівняння:

а) $(x - y)ydx - x^2dy = 0, \quad y(1) = 1$;

б) $(x + 2y)dx - xdy = 0, \quad y(1) = 2$.

в) $y' + \dfrac{y}{x}(\ln\left(\dfrac{y}{x}\right) - 1) = 0, \quad y(1) = 2$.

До однорідного зводяться рівняння виду

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \tag{38}$$

$$\text{де} \quad \delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0, \tag{39}$$

f – довільна неперервна в розглядуваній області функція і хоча б одне з чисел c_1, c_2 відмінне від нуля, оскільки при $c_1 = c_2 = 0$ рівняння (38) було б уже однорідним.

Процес зведення до однорідного рівняння починається із розв’язання системи рівнянь

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0, \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0. \end{cases} \tag{40}$$

Умова (39) гарантує існування єдиного розв'язку системи (40). Після цього робимо заміну

$$\begin{cases} x = u + \alpha, & dx = du, \\ y = v + \beta, & dy = dv. \end{cases} \qquad (41)$$

Одержане однорідне рівняння

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1 u + b_1 v}{a_2 u + b_2 v}\right) \qquad (42)$$

інтегруємо розглянутим вище методом, а саме заміною $t = \dfrac{v}{u}$, потім повертаємося до старих змінних x і y.

Приклади розв'язання задач

11. Розв'язати диференціальне рівняння $(3x - 7y - 3)y' - 3y + 7x - 7 = 0.$

► Запишемо рівняння у вигляді $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-7x + 3y + 7}{3x - 7y - 3}$. Умова (39) очевидно виконується. Розв'язуючи систему рівнянь $\begin{cases} -7\alpha + 3\beta + 7 = 0, \\ 3\alpha - 7\beta - 3 = 0, \end{cases}$ одержимо $\alpha = 1, \quad \beta = 0$. Зробимо заміну $\begin{cases} x = u + 1, & dx = du, \\ y = v, & dy = dv. \end{cases}$ Одержимо однорідне рівняння $\dfrac{dv}{du} = \dfrac{-7u + 3v}{3u - 7v}$. Зробимо заміну $t = \dfrac{v}{u}$, звідки $v = tu,$ $\dfrac{dv}{du} = \dfrac{dt}{du}u + t$. Одержимо рівняння з відокремлюваними змінними $\frac{dt}{du}u + t = \frac{-7+3t}{3-7t}$. Відокремимо змінні та зінтегруємо одержане рівняння

$$\frac{3-7t}{7\left(t^2-1\right)}dt = \frac{du}{u}, \qquad \int \frac{3-7t}{7\left(t^2-1\right)}dt = \int \frac{du}{u},$$

$$\frac{3}{14}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|t^2-1\right| = \ln|u| + \ln|C|.$$

Потенціюючи і підставляючи $t = \frac{v}{u}$, одержимо $\left(\frac{v-u}{v+u}\right)^{\frac{3}{7}} = C\left(v^2-u^2\right)$. Тепер підкладемо $u = x-1, v = y$ і запишемо шуканий загальний інтеграл

$$\left(\frac{y-x+1}{y+x-1}\right)^{\frac{3}{7}} = C\left(y^2-(x-1)^2\right). \blacktriangleleft$$

Розглянемо випадок рівняння виду $y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$, де

$$\delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \tag{43}$$

тобто $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k$. У цьому випадку рівняння (38) можна записати як $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{k\left(a_1x+b_1y\right)+c_2}\right) = f_1\left(a_1x+b_1y+c\right)$. Таке рівняння зводиться не до однорідного, а зразу до рівняння з відокремлюваними змінними заміною $t = a_1x+b_1y$, як це було розглянуто раніше.

12. Знайти загальний розв'язок рівняння $(x+y+1)dx+(2x+2y-1)dy=0.$

► Запишемо рівняння у вигляді $\frac{dy}{dx}=-\frac{x+y+1}{2(x+y)-1}$. Зробимо заміну $x+y=t$, тоді $1+\frac{dy}{dx}=\frac{dt}{dx}$, а дане рівняння запишеться у вигляді $\frac{dt}{dx}=-\frac{t+1}{2t-1}-1.$

Відокремлюємо змінні $-\frac{2t-1}{3t}dt=dx$ та зінтегруємо одержане рівняння $\int dx=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{t}-2\right)dt$. Маємо

$$x=\frac{\ln|t|}{3}-\frac{2t}{3}+\frac{C}{3}.$$

Загальний інтеграл, враховуючи, що $x+y=t$, одержимо у вигляді $3x=\ln|x+y|-2(x+y)+C$, або $5x+2y-\ln|x+y|=C$.◄

Завдання для самостійного розв'язання

10. Розв'язати рівняння:

а) $(12x-5y-3)dx-(2x-y-1)dy=0$;

б) $(-12x+11y+10)dx+(-10x+y-8)dy=0$;

в) $(3x-7y+1)dx+(3x+y-7)dy=0$;

г) $(3x-y+1)dx+(5x+y-9)dy=0$.

1.5 Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

Диференціальне рівняння першого порядку називається *лінійним*, якщо воно є рівнянням першого степеня відносно невідомої функції та її похідної (y і y' входять лінійно):

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{44}$$

де $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ – задані функції.

Будемо вважати, що функції $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ неперервні на деякому проміжку (a,b), тоді для рівняння (44) виконуються умови теореми Коші про існування і єдиність розв'язку.

Якщо права частина рівняння (44) $Q(x) \equiv 0$, то маємо *лінійне однорідне* диференціальне рівняння (ЛОДР) виду

$$y' + P(x)y = 0, \tag{45}$$

яке є одночасно рівнянням з відокремлюваними змінними. Отже, в цьому випадку метод розв'язування відомий. Легко переконатися, що загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння має вигляд

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}, \tag{46}$$

де C – довільна стала.

У загальному випадку, коли $Q(x) \neq 0$, маємо *лінійне неоднорідне* диференціальне рівняння (ЛНДР). Розглянемо методи його розв'язування.

1. Метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа)

Лагранж запропонував шукати роз'язок ЛНДР у вигляді

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx}, \tag{47}$$

тобто замість довільної сталої C у формулі (46) фігурує деяка функція $C(x)$.

Знайдемо похідну

$$y' = C'(x)e^{-\int P(x)dx} + C(x)e^{-\int P(x)dx} \cdot (-P(x)),$$

підставимо y та y' у рівняння (44), в результаті одержимо

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} - P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x).$$

Відносно невідомої функції $C(x)$ одержуємо рівняння з відокремлюваними змінними, яке можна записати у вигляді

$$C'(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx},$$

звідки

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + \tilde{C}, \tag{48}$$

де через $\tilde{C}$ позначено довільну сталу інтегрування.

Підставляючи вираз у правій частині формули (48) у формулу (47) замість $C(x)$, одержимо формулу загального розв'язку ЛНДР (для зручності запису сталу інтегрування позначаємо знову через *C*)

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right). \tag{49}$$

Запишемо формулу (49) у вигляді

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx. \tag{50}$$

З'ясуємо зміст кожного доданка у правій частині цієї рівності:

$y_0 = Ce^{-\int P(x)dx}$ – це загальний розв'язок відповідного ЛОДР,

$y^* = e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$ – деякий частинний розв'язок даного ЛНДР, що випливає з формул (47) і (48).

Сформулюємо висновок про *структуру* загального розв'язку ЛНДР: загальний розв'язок ЛНДР є сумою загального розв'язку відповідного ЛОДР і якогось частинного розв'язку самого ЛНДР, тобто $y = y_0 + y^*$.

Зауважимо, що формули (49) або (50) не обов'язково запам'ятовувати, як правило, простіше проробити весь процес методу Лагранжа безпосередньо. Проте, структуру загального розв'язку ЛНДР варто добре пам'ятати.

Приклади розв'язання задач

13. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$(1+x)y' + y = \cos x.$$

► Запишемо рівняння у вигляді $y' + \dfrac{y}{1+x} = \dfrac{\cos x}{1+x}$. Застосуємо метод варіації довільної сталої. Розв'яжемо спочатку відповідне ЛОДР $y' + \dfrac{y}{1+x} = 0$, яке є одночасно рівнянням з відокремлюваними змінними. Відокремимо змінні та зінтегруємо одержане рівняння

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x+1} \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x+1} \Rightarrow \quad \ln|y| = -\ln|x+1| + \ln|C| \Rightarrow \quad y = \frac{C}{x+1}.$$

Маємо загальний розв'язок ЛОДР.

Загальний розв'язок ЛНДР будемо шукати у вигляді $y = \dfrac{C(x)}{x+1}$, де $C(x)$ – деяка функція. Знайдемо похідну

$$y' = \frac{C'(x)}{x+1} - \frac{C(x)}{(x+1)^2}$$

і підставимо y та y' у ЛНДР

$$\frac{C'(x)}{x+1} - \frac{C(x)}{(x+1)^2} + \frac{C(x)}{(x+1)^2} = \frac{\cos x}{x+1}.$$

Одержуємо рівняння з відокремлюваними змінними, яке після очевидних спрощень набуває вигляду $C'(x)=\cos x$, звідки $C(x)=\sin x+\tilde{C}$, де через $\tilde{C}$ позначено сталу інтегрування.

Загальний розв'язок даного рівняння має вигляд

$y=\dfrac{\sin x+C}{x+1}$. ◀

2. Метод штучної заміни (метод Ейлера-Бернуллі)

Бернуллі запропонував шукати розв'язок ЛНДР (44)

$$y'+P(x)y=Q(x),$$

у вигляді добутку двох функцій

$$y=u(x)v(x). \tag{51}$$

Тоді $y'=u'v+uv'$ і підстановка y та y' у ЛНДР приводить до рівняння

$$u'v+uv'+P(x)u\,v=Q(x).$$

Перепишемо останню рівність у вигляді

$$u'v+u\big(v'+P(x)v\big)=Q(x). \tag{52}$$

Оскільки для визначення двох поки що невідомих функцій $u(x)$ і $v(x)$ маємо тільки одне співвідношення (51), то одну з цих функцій ми можемо вибрати на свій розсуд, а саме виберемо $v(x)\neq 0$ так, щоб

$$v'+P(x)v=0.$$

Тоді, як було показано вище, $v(x)$ є розв'язком відповідного ЛОДР і може бути записане за формулою (46), в якій покладемо $C=1$, тобто

$$v=e^{-\int P(x)dx}. \tag{53}$$

Підставимо $v(x)$ у (52) і для визначення другої невідомої функції $u(x)$ одержимо рівняння з відокремлюваними змінними

$$u'e^{-\int P(x)dx} = Q(x), \text{ або } du = e^{\int P(x)dx} Q(x)dx.$$

В результаті інтегрування одержуємо функцію

$$u = \int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C. \tag{54}$$

Відповідно до (50) записуємо загальний розв'язок ЛНДР у вигляді

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C \right).$$

Це та ж формула (49), до якої прийшли раніше методом Лагранжа.

Приклади розв'язання задач

14. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$xy' - 3y = x^2.$$

► Запишемо рівняння у вигляді $y' - \frac{3}{x} y = x.$ Введемо заміну $y = uv,\ y' = u'v + uv'$ і підставимо y та y' у дане ЛНДР

$$u'v + uv' - \frac{3uv}{x} = x, \quad u'v + u\left(v' - \frac{3v}{x}\right) = x.$$

Далі розв'яжемо ЛОДР $v' - \frac{3v}{x} = 0,$ одержимо $v = x^3$ і, повертаючись до ЛНДР з функціями $u(x)$ та $v(x)$, будемо мати $u'x^3 = x$, або $du = \frac{dx}{x^2},$ звідки $u = -\frac{1}{x} + C$. Тепер запишемо загальний розв’язок даного рівняння $y = x^3\left(-\frac{1}{x} + C\right)$ або $y = Cx^3 - x^2$. ◄

15. Знайти загальний розв’язок рівняння

$$\left(2xy + y^3\right)dy - dx = 0.$$

► Запишемо рівняння у вигляді $y' = \frac{1}{2xy + y^3}$.

Це рівняння не є лінійним, але, якщо змінити ролі шуканої функції та аргументу, то одержимо рівняння, що буде лінійним відносно невідомої функції $x(y)$ та її похідної,

$$x' - 2yx = y^3.$$

Розв’яжемо його методом Бернуллі. Покладемо $x = uv,\quad x' = u'v + uv'$. Тут ми вважаємо, що $u = u(y)$, $v = v(y)$. Тоді $u'v + uv' - 2uvy = y^3,\quad u'v + u\left(v' - 2vy\right) = y^3.$

Маємо $\begin{cases} v' - 2vy = 0, \\ u'v = y^3. \end{cases}$

Розв’язуємо перше рівняння системи

$$\frac{dv}{v} = 2ydy \Rightarrow \ln|v| = y^2 + \ln|C| \Rightarrow v = Ce^{y^2}.$$

Підставимо одержану функцію $v = v(y)$ у друге рівняння

$$\frac{du}{dy}e^{y^2} = y^3 \Rightarrow du = y^3e^{-y^2}dy \Rightarrow u = \int y^3e^{-y^2}dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int y^2e^{-y^2}d\left(y^2\right) = -\frac{1}{2}e^{-y^2}\left(1 + y^2\right) + C.$$

Останній результат отримали інтегруванням частинами.

Отже, маємо $x = uv = \left(-\frac{1}{2} e^{-y^2} \left(1 + y^2\right) + C \right) e^{y^2}$, або $x = Ce^{y^2} - \frac{1}{2} - \frac{y^2}{2}$. ◄

Зауваження. Якщо відомі два частинні розв’язки y_1 і y_2 ЛНДР першого порядку, то його загальний розв’язок записується без квадратур у вигляді

$$y = C\left(y_1 - y_2\right) + y_1.$$

Завдання для самостійного розв’язання

11. Розв’язати рівняння:

а) $y' + \frac{y}{x} = 3x$; б) $y' + ytgx = \cos^2 x$;

в) $y' - \frac{y}{x} = x^2$; г) $y' + \frac{y}{x} = 2\ln x + 1$;

д) $y' - \frac{2xy}{1 + x^2} = 1 + x^2$.

12. Знайти частинний розв’язок рівняння:

а) $y' - \frac{y}{x+1} = e^x (x+1), \quad y(0) = 1$;

б) $y' + \frac{y}{x} = 2\ln x + 1, \quad y(1) = 3$;

в) $y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}, \quad y(1) = 4$;

г) $y' - 4xy = -4x^3, \quad y(0) = \frac{1}{2}$;

д) $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3, \quad y(0) = \frac{1}{2}$.

1.6 Рівняння Бернуллі

Рівнянням Бернуллі називається рівняння виду

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n, \ \ n \neq 0, \ \ n \neq 1. \qquad (55)$$

Якщо $n = 0$, то будемо мати уже розглянуте лінійне рівняння, а якщо $n = 1$, то отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними.

Неважко показати, що заміна $z = y^{1-n}$ дозволяє звести рівняння (55) до лінійного, проте доцільніше буде одразу робити заміну Бернуллі $y = uv$, $y' = u'v + uv'$ аналогічно до того, як це робимо у лінійному рівнянні.

Приклади розв'язання задач

16. Розв'язати рівняння

$$xy' - 4y = x^2\sqrt{y}.$$

► Тут $n = \frac{1}{2}$. Після заміни $y = uv, \quad y' = u'v + uv'$ одержимо $x\left(u'v + uv'\right) - 4uv = x^2\sqrt{uv} \Rightarrow u'v + uv' - \frac{4uv}{x} = x\sqrt{uv}$,

$u'v + u\left(v' - \frac{4v}{x}\right) = x\sqrt{uv}$. Приходимо до системи $\begin{cases} v' - \frac{4v}{x} = 0, \\ u'v = x\sqrt{uv}. \end{cases}$

Перше рівняння має розв'язок $v = x^4$, а друге набуває вигляду $u'x^4 = x^3\sqrt{u}$, або при $x \neq 0$

$$\frac{du}{\sqrt{u}}=\frac{dx}{x}\Rightarrow\int\frac{du}{\sqrt{u}}=\int\frac{dx}{x}\Rightarrow 2\sqrt{u}=\ln|x|+\ln|C|\Rightarrow u=\frac{1}{4}\ln^2|Cx|.$$

Тоді загальний розв'язок даного рівняння буде наступним $y=\dfrac{x^4}{4}\ln^2|Cx|$. ◄

Завдання для самостійного розв'язання

13. Розв'язати рівняння:

а) $y'+yx=x^3y^3$; б) $y'-xy=3xy^2$; в) $y'+\dfrac{2y}{x}=y^2\dfrac{\ln x}{x}$.

14. Знайти розв'язок задачі Коші:

а) $y'+\dfrac{3x^2y}{x^3+1}=y^2(x^3+1)\cdot\sin x,\ \ y(0)=1$;

б) $xdy=(x^5y^2-2y)dx,\ \ y(1)=1$.

§ 2. Диференціальні рівняння вищих порядків

2.1 Загальні поняття та означення

Рівняння

$$F(x,y,y',...,y^{(n)})=0, \tag{56}$$

де x – незалежна змінна, y – шукана функція, а функція F визначена і неперервна в деякій області $G\subset\mathbb{R}^{n+2}$ ($n\geq 1$) та обов'язково залежить від $y^{(n)}$, називається *звичайним диференціальним рівнянням n-го порядку*.

Диференціальне рівняння n-го порядку, розв'язане відносно старшої похідної, має вигляд

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}), \tag{57}$$

де функцію f також вважають неперервною в деякій області $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ зміни своїх аргументів.

Розв'язком рівняння (57) на інтервалі (a, b) називається функція $y(x)$, яка задовольняє умови:

1) $y(x)$ неперервно диференційовна на (a, b) до n-го порядку включно;
2) $(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n-1)}(x)) \in D \quad \forall x \in (a, b)$;
3) $y(x)$ перетворює рівняння (2) у тотожність, тобто

$$y^{(n)}(x) \equiv f(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n-1)}(x)) \quad \forall x \in (a, b).$$

Аналогічно визначається розв'язок рівняння (56).

Задачею Коші для рівняння (56) або (57) називається задача знаходження розв'язку $y(x)$ рівняння (56) або (57), що задовольняє початкові умови:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \ \dots, \ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \tag{58}$$

де $x_0 \in (a, b)$, $y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$ – задані числа.

Має місце теорема існування і єдиності розв'язку задачі Коші (57)-(58).

Теорема Коші. Якщо функція $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ як функція n+1 змінної є неперервною і має неперервні частинні похідні по аргументах $y, y', ..., y^{(n-1)}$ в деякій області $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, що містить точку $M_0(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)})$, то існує єдиний розв'язок рівняння (57), що задовольняє початкові умови (58).

Загальним розв'язком диференціального рівняння (57) називається функція

$$y = \varphi\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_n\right), \tag{59}$$

яка залежить від *n* довільних сталих $C_1, C_2, \ldots, C_n$, така, що:

1) при довільному конкретному наборі сталих $C_1, C_2, \ldots, C_n$ вона є розв'язком диференціального рівняння (57);

2) для будь-якої точки $M_0(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)})$ з області *D*, вказаної у теоремі Коші, сталі $C_1, C_2, \ldots, C_n$ можна підібрати такими, що функція (59) буде задовольняти початкові умови (58).

Кожна функція, яка одержується із загального розв'язку при конкретних значеннях сталих $C_1, C_2, \ldots, C_n$, називається частинним розв'язком диференціального рівняння (57).

Зауважимо, що не завжди загальний розв'язок диференціального рівняння *n*-го порядку вдається отримати у вигляді (59). Здебільшого у процесі розв'язування одержуємо співвідношення виду

$$\Phi\left(x, \mathrm{y}, C_1, C_2, \ldots, C_n\right) = 0,$$

яке визначає загальний розв'язок у неявному вигляді. Таке співвідношення називається *загальним інтегралом диференціального рівняння n-го порядку*, а співвідношення, яке одержується із загального інтеграла при конкретних значеннях сталих $C_1, C_2, \ldots, C_n$, називається *частинним інтегралом*.

2.2 Диференціальні рівняння вищих порядків, які допускають пониження порядку

Розглянемо деякі типи рівнянь вищих порядків, які допускають зниження порядку:

Перший тип. Загальний розв'язок рівняння виду

$$y^{(n)} = f\left(x\right) \tag{60}$$

знаходимо методом *n*-кратного інтегрування.

Другий тип. Нехай диференціальне рівняння n-го порядку не містить у явному виді шуканої функції та її похідних до $(k-1)$-го порядку включно $(1 \le k \le n)$

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}\right) = 0 . \tag{61}$$

Тоді вводимо нову невідому функцію $z(x) = y^{(k)}(x)$ і, враховуючи, що $y^{(k+1)} = z',\ y^{(k+2)} = z'',\ ...,\ y^{(n)} = z^{(n-k)}$, приходимо до рівняння $(n-k)$-го порядку відносно невідомої функції $z(x)$

$$F\left(x, z, z', z'', ..., z^{(n-k)}\right) = 0 , \tag{62}$$

тобто понижуємо порядок рівняння на k одиниць. Якщо вдається знайти загальний розв'язок цього рівняння у вигляді $z = \varphi\,(x, c_1, c_2, ..., c_{n-k})$, то одержимо диференціальне рівняння попереднього виду

$$z = y^{(k)} = \varphi\,(x, c_1, c_2, ..., c_{n-k}), \tag{63}$$

розв'язок якого знаходять k- кратним інтегруванням.

Третій тип. Розглянемо диференціальне рівняння n-го порядку, яке не містить явно незалежної змінної x,

$$F(y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 . \tag{64}$$

В цьому випадку порядок рівняння завжди можна понизити на одиницю, ввівши нову невідому функцію $p(y) = y'$, де y приймаємо за аргумент. Похідні $y'', y''', ..., y^{(n)}$ треба виразити через похідні цієї нової функції по аргументу y, враховуючи правило диференціювання складеної функції:

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}\,p , \tag{65}$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dy}\,p\right) = \frac{d^2 p}{dy^2}\,pp + \frac{dp}{dy}\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{d^2 p}{dy^2}\,p^2 + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 p \quad \text{і т.д.}$$

Приклади розв'язання задач

17. Знайти загальний розв'язок рівняння:

а) $y^{IY} = \dfrac{8}{(x-3)^5}$; б) $y''' ctg\, x + y'' = 2$; в) $1 + y'^2 = yy''$.

►а) Зінтегрувавши задане рівняння, маємо

$$y''' = \int y^{IY} dx = \int \frac{8dx}{(x-3)^5} = -\frac{2}{(x-3)^4} + \tilde{C}_1.$$

Далі знаходимо

$$y'' == \int y''' dx = \int (-\frac{2}{(x-3)^4} + \tilde{C}_1) dx = \frac{2}{3(x-3)^3} + \tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2.$$

Зінтегрувавши останню рівність ще двічі, одержимо загальний розв'язок даного диференціального рівняння

$$y' = \int y'' dx = \int (\frac{2}{3(x-3)^3} + \tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2) dx = -\frac{1}{3(x-3)^2} + \frac{\tilde{C}_1 x^2}{2} + \tilde{C}_2 x + \tilde{C}_3,$$

$$y = \int y' dx = \int \left(-\frac{1}{3(x-3)^2} + \frac{\tilde{C}_1 x^2}{2} + \tilde{C}_2 x + \tilde{C}_3 \right) dx =$$

$$= \frac{1}{3(x-3)} + \frac{\tilde{C}_1 x^3}{6} + \frac{\tilde{C}_2 x^2}{2} + \tilde{C}_3 x + \tilde{C}_4.$$

Довільні сталі можна перепозначити для більш компактного запису. Тоді шуканий загальний розв'язок набуде вигляду

$$y = \frac{1}{3(x-3)} + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4. \blacktriangleleft$$

►б) Дане рівняння не містить явно шуканої функції y, а також її похідної y'. Вводимо нову невідому функцію $z = y''$ і одержуємо лінійне рівняння першого порядку $z'ctg\,x + z = 2$, яке записуємо у вигляді

$$z' + ztg\,x = 2tg\,x.$$

Його загальний розв'язок

$$z = e^{-\int tgxdx}\left(\int 2tgxe^{\int tgxdx}dx + c_1\right) = e^{\ln|\cos x|}(2\int tgx\,e^{-\ln|\cos x|}dx + C_1) =$$

$$= |\cos x|\left(2\int \frac{tgx}{|\cos x|}dx + C_1\right) = 2\cos x\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x} + C_1\cos x =$$

$$= -2\cos x\int \frac{d\left(\cos x\right)}{\cos^2 x} + C_1\cos x = 2\cos x\frac{1}{\cos x} + C_1\cos x = 2 + C_1\cos x\,.$$

Оскільки $z = y''$, то приходимо до диференціального рівняння *першого типу*, яке легко розв'язується двократним інтегруванням:

$$y'' = 2 + C_1\cos x, \quad y' = \int (2 + C_1\cos x)dx = 2x + C_1\sin x + C_2,$$

$$y = \int (2x + c_1\sin x + c_2)dx = x^2 - C_1\cos x + C_2x + C_3\,.$$

Таким чином, шуканий загальний розв'язок даного рівняння третього порядку має вигляд

$$y = x^2 - C_1\cos x + C_2x + C_3\,. \blacktriangleleft$$

►в) Дане рівняння не містить явно аргумент *x*. Покладемо $y' = p(y)$, $y'' = \dfrac{dp}{dy}p$. Рівняння набере вигляду $1 + p^2 = yp\dfrac{dp}{dy}$. Це рівняння першого порядку відносно $p(y)$ з відокремлюваними змінними. Відокремлюємо змінні та зінтегруємо одержаний вираз

$$\frac{pdp}{p^2+1}=\frac{dy}{y}, \quad \frac{1}{2}\int\frac{d(p^2+1)}{p^2+1}=\int\frac{dy}{y}, \quad \ln(p^2+1)=2\ln|y|+2\ln|C_1|;$$

$$p^2+1=C_1^2y^2, \quad p=\pm\sqrt{C_1^2y^2-1}.$$

Повертаючись до невідомої функції y, одержимо

$$y'=\pm\sqrt{C_1^2y^2-1}, \quad \frac{dy}{\sqrt{C_1^2y^2-1}}=\pm dx, \quad \frac{1}{C_1}\int\frac{d(C_1y)}{\sqrt{(C_1y)^2-1}}=\pm\int dx.$$

Отже, загальний інтеграл даного рівняння має вигляд

$$\frac{1}{C_1}\ln\left|C_1y+\sqrt{C_1^2y^2-1}\right|=x+C_2. \blacktriangleleft$$

18. Знайти розв’язок задачі Коші для рівняння:

а) $y''=\dfrac{1}{\cos^2 x}, \quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\ln 2}{2}, \quad y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1;$

б) $xy''=y'\ln\dfrac{y'}{x}, \quad y(1)=e, \quad y'(1)=e^2;$

в) $y^3y'y''+1=0, \quad y(1)=1, \quad y'(1)=\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}.$

►а) Інтегруючи, одержуємо спочатку $y'=tgx+C_1$. Повторне інтегрування дає $y=-\ln|\cos x|+C_1x+C_2$ – це загальний розв’язок даного диференціального рівняння. Далі розв’язуємо систему рівнянь відносно сталих інтегрування C_1 і C_2:

$$\begin{cases} -\ln\cos\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}C_1+C_2=\dfrac{\ln 2}{2}, \\ tg\,\dfrac{\pi}{4}+C_1=1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\ln\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{\pi}{4}C_1+C_2=\dfrac{\ln 2}{2}, \\ 1+C_1=1, \end{cases} \begin{cases} C_1=0, \\ C_2=0. \end{cases}$$

Отже, шуканий частинний розв’язок $y=-\ln|\cos x|$. ◄

►б) Маємо рівняння, що не містить явно y. Понизимо порядок цього рівняння на 1, поклавши $z=y'$. Тоді $y''=z'$, і дане рівняння перетворюється на однорідне диференціальне рівняння першого порядку відносно невідомої функції z

$$xz'=z\ln\frac{z}{x}, \quad \text{або} \quad z'=\frac{z}{x}\ln\frac{z}{x}.$$

Розв’язуємо його за допомогою підстановки $u=z/x$, $z=ux.$ Тоді $z'=u'x+u$, і дане рівняння набуває вигляду

$$u'x+u=u\ln u.$$

Відокремлюючи змінні та інтегруючи, послідовно знаходимо

$$\frac{du}{u(\ln u-1)}=\frac{dx}{x}, \quad \int\frac{d(\ln u-1)}{\ln u-1}=\int\frac{dx}{x}, \quad \ln|\ln u-1|=\ln|x|+\ln|C_1|,$$

$$\ln u-1=C_1x, \quad \ln u=C_1x+1, \quad u=e^{C_1x+1}, \quad z=xe^{C_1x+1}.$$

Оскільки $z=y'$, то останнє рівняння є рівнянням першого порядку відносно невідомої функції $y(x)$, яке розв’язується інтегруванням,

$$y'=xe^{C_1x+1}, \quad y=\int xe^{C_1x+1}dx=\frac{1}{C_1}\int xd\left(e^{C_1x+1}\right)=\frac{1}{c_1}\left(xe^{C_1x+1}-\int e^{C_1x+1}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{C_1}(xe^{C_1x+1}-\frac{1}{C_1}e^{C_1x+1})+C_2=\frac{C_1x-1}{C_1^2}e^{C_1x+1}+C_2.$$

Отже, одержали загальний розв'язок $y = \dfrac{C_1 x - 1}{C_1^2} e^{C_1 x + 1} + C_2$.

Знаходимо сталі C_1 і C_2 з початкових умов $y(1) = e,\ y'(1) = e^2$.
Одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} e = \dfrac{C_1 - 1}{C_1^2} e^{C_1 + 1} + C_2, \\ e^2 = e^{C_1 + 1}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e = \dfrac{C_1 - 1}{C_1^2} e^{C_1 + 1} + C_2, \\ 1 + C_1 = 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = e. \end{cases}$$

Тому шуканий частинний розв'язок даного рівняння визначається формулою $y = (x-1)e^{x+1} + e.$ ◀

▶в) Як і в прикладі №17 в), покладемо $y' = p(y),\quad y'' = \dfrac{dp}{dy} p.$ Одержимо рівняння першого порядку відносно $p(y)$ з відокремлюваними змінними $y^3 p^2 \dfrac{dp}{dy} + 1 = 0.$

Відокремлюємо змінні та інтегруємо

$$p^2 dp = -y^{-3} dy, \quad \int p^2 dp = -\int y^{-3} dy,$$

$$\frac{p^3}{3} = \frac{1}{2y^2} + C_1, \quad p = \sqrt[3]{\frac{3}{2y^2} + 3C_1}.$$

Враховуючи, що $p = y' = \dfrac{dy}{dx}$, останнє рівняння перепишемо у вигляді $y' = \sqrt[3]{\dfrac{3}{2y^2} + 3C_1}$. Попередньо знайдемо значення довільної сталої C_1, підставивши з початкових умов

$y=1,\quad y'=\sqrt[3]{\frac{3}{2}}.$ Одержимо рівняння відносно C_1 $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}=\sqrt[3]{\frac{3}{2}+3C_1}$, звідки $C_1=0$. Таким чином, приходимо до рівняння $y'=\left(\frac{3}{2y^2}\right)^{\frac{1}{3}}$, яке легко розв'язується шляхом відокремлення змінних і подальшого інтегрування

$$dy=\left(\frac{3}{2y^2}\right)^{\frac{1}{3}}dx,\qquad y^{\frac{2}{3}}dy=\sqrt[3]{\frac{3}{2}}dx,\qquad \int y^{\frac{2}{3}}dy=\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\int dx,$$

$$\frac{3}{5}y^{\frac{5}{3}}=\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\left(x+C_2\right),\qquad y=\sqrt[5]{\frac{125(x+C_2)^3}{18}}\,.$$

З початкової умови $y(1)=1$ знайдемо C_2. Маємо $1=\sqrt[5]{\frac{125(1+C_2)^3}{18}},\quad C_2=\frac{\sqrt[3]{18}}{5}-1.$

Отже, шуканий частинний розв'язок визначається формулою $y=\sqrt[5]{\frac{\left(5x+\sqrt[3]{18}-5\right)^3}{18}}$. ◄

Завдання для самостійного розв'язання

15. Розв'язати рівняння:

а) $y''=x\sin x$; б) $y''x\ln x=y'$;

в) $y''+2y(y')^3=0$; г) $y''+\frac{1}{x}y'=0$;

д) $xy'' + y' = \ln x$.

16. Знайти частинний розв'язок рівняння:

а) $y'' = 128y^3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 8$;

б) $y'' + \dfrac{y'}{x} = x, \quad y(1) = y'(1) = 1$;

в) $xy'' + y' - x^2 = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 1$;

г) $y'' = e^{2y}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$;

д) $y'' - \dfrac{y'}{x} = x, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 0$.

2.3 Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків

Серед диференціальних рівнянь вищих порядків важливе місце посідають рівняння виду

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \tag{65}$$

де $f(x)$, $a_i(x)$ – неперервні на деякому інтервалі функції, зокрема, вони можуть бути і сталими. Таке рівняння називається лінійним диференціальним рівнянням *n*-го порядку

Більш загальний вигляд цього рівняння

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \tag{66}$$

де $a_0(x) \neq 0$, зводиться до виду (65) діленням обох частин на $a_0(x)$.

Якщо права частина рівняння (65) тотожно дорівнює нулю, тобто $f(x) \equiv 0$, то рівняння називається *лінійним однорідним диференціальним рівнянням (ЛОДР)*

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0.$$

Якщо ж $f(x) \not\equiv 0$, то маємо *лінійне неоднорідне диференціальне рівняння (ЛНДР)*.

Спочатку розглянемо ЛОДР вищих порядків.

2.4. Лінійні однорідні диференціальні рівняння (ЛОДР)

Отже, розглядаємо рівняння виду

$$y^{(n)} + a_1\left(x\right)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}\left(x\right)y' + a_n\left(x\right)y = 0 . \tag{67}$$

Фундаментальною системою розв'язків ЛОДР (67) називається будь-яка система з n лінійно незалежних частинних розв'язків $y_1(x),\ y_2(x),\ ...,\ y_n(x)$ цього рівняння.

Визначником Вронського (вронскіаном) системи функцій $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ називається визначник

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & ... & y_n'(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} . \tag{68}$$

Якщо система функцій $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ *лінійно залежна* на інтервалі (a,b), то $W(x) = 0$ для всіх $x \in (a,b)$. Якщо ж хоча б в одній точці $x_0 \in (a,b)$ маємо $W(x_0) \neq 0$, то система функцій $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ *лінійно незалежна* на (a,b).

Загальний розв'язок ЛОДР (3) має вигляд

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i \ , \tag{69}$$

де $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ – фундаментальна система розв'язків цього рівняння; C_i – довільні сталі; $i = 1, 2, ..., n$.

Приклади розв'язання задач

19. Показати, що система функцій e^x, e^{-x}, e^{2x} є фундаментальною для ЛОДР $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0,$ і записати його загальний розв'язок.

► Підставляння функцій $y_1 = e^x,\ y_2 = e^{-x}, y_3 = e^{2x}$ в дане ЛОДР показує, що кожна з них є його розв'язком. Вронскіаном даної системи функцій є визначник

$$W = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & e^{2x} \\ e^x & -e^{-x} & 2e^{2x} \\ e^x & e^{-x} & 4e^{2x} \end{vmatrix} = e^x e^{-x} e^{2x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -6e^{2x} \neq 0.$$

Отже, функції e^x, e^{-x}, e^{2x} лінійно незалежні і утворюють фундаментальну систему розв'язків для даного ЛОДР. Загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}. \blacktriangleleft$$

20. Функції $y_1 = 1,\ y_2 = e^x,\ y_3 = e^{2x}$ є розв'язками деякого диференціального рівнянню третього порядку. Переконатися, що вони утворюють лінійно незалежну систему, і скласти це рівняння.

► Складемо визначник Вронського

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} 1 & e^x & e^{2x} \\ 0 & e^x & 2e^{2x} \\ 0 & e^x & 4e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{3x} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Бачимо, що функції $y_1 = 1; y_2 = e^x; y_3 = e^{2x}$ лінійно незалежні. Загальний розв'язок шуканого рівняння має вигляд $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{2x}$. Тепер зрозуміло, що чотири функції $y, 1, e^x, e^{2x}$ вже утворюють лінійно залежну систему (функція y лінійно виражається через решту функцій), тому визначник Вронського дорівнює нулю, тобто

$$W(y,1,e^x,e^{2x}) = \begin{vmatrix} y & 1 & e^x & e^{2x} \\ y' & 0 & e^x & 2e^{2x} \\ y'' & 0 & e^x & 4e^{2x} \\ y''' & 0 & e^x & 8e^{2x} \end{vmatrix} = -e^{3x} \begin{vmatrix} y & 1 & 2 \\ y' & 1 & 4 \\ y'' & 1 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= -e^{3x}(y''' - 3y'' + 2y') = 0.$$

Звідси одержимо шукане диференціальне рівняння $y''' - 3y'' + 2y' = 0$. ◄

Зауваження. Загального методу знаходження фундаментальної системи розв'язків для ЛОДР не існує. Проте, якщо відомий який-небудь частинний розв'язок $y_1(x)$ рівняння (2), то підстановка $y(x) = y_1(x) \cdot z(x)$ приводить це рівняння до лінійного рівняння відносно функції $z(x)$, яке не містить явно саму функцію $z(x)$. Тому, покладаючи $z'(x) = u(x)$, отримаємо лінійне однорідне рівняння $(n-1)$-го порядку відносно функції $u(x)$, тобто вдається понизити порядок ЛОДР на одну одиницю. Проілюструємо це прикладом.

21. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$(1 + x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

► Легко перевірити, що функція $y_1 = x$ є частинним розв'язком даного ЛОДР. Дійсно, підставляння у ліву частину рівняння виразів $y = x,\ y' = 1,\ y'' = 0$ перетворює рівняння у тотожність $0 \equiv 0$. Отже, нам відомий один з частинних розв'язків даного рівняння. Покладемо тепер $y(x) = x \cdot z(x)$, $y' = z + xz',\ y'' = xz'' + 2z'.$ Одержимо

$$(1+x^2)xz'' + 2(1+x^2)z' - 2xz - 2x^2z' + 2xz = 0,$$

або (після зведення подібних і скорочення на вираз $1+x^2$) $(1+x^2)xz'' + 2z' = 0.$ Ввівши заміну $z' = u,\ z'' = u'$, понизимо порядок рівняння. Маємо $(1+x^2)xu' + 2u = 0$ – диференціальне рівняння 1-го порядку з відокремлюваними змінними. Звідси

$$\frac{du}{u} = -\frac{2dx}{x(1+x^2)}, \quad \int \frac{du}{u} = -\int \frac{2dx}{x(1+x^2)}.$$

Для знаходження інтеграла від правильного раціонального дробу у лівій частині застосуємо метод невизначених коефіцієнтів:

$$\frac{-2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}; \quad A(x^2+1) + (Bx+C)x = -2;$$

$$A + B = 0,\ C = 0,\ A = -2,\ B = 2; \quad \frac{-2}{x(x^2+1)} = \frac{-2}{x} + \frac{2x}{x^2+1}.$$

Інтегруємо тепер обидві частини

$$\ln|u| = -2\ln|x| + \ln(x^2+1) + \ln|\mathrm{C}_1|, \quad \text{або} \quad \ln|u| = \ln\left|\frac{C_1(x^2+1)}{x^2}\right|,$$

звідки $u = C_1\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$

Отже, $z' = C_1\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$, $z = C_1\left(x - \frac{1}{x}\right) + C_2$.

Тепер можна записати загальний розв'язок даного ЛОДР у вигляді $y = xz$, тобто $y = C_1(x^2 - 1) + C_2 x$. ◄

Завдання для самостійного розв'язання

17. Функції $y_1 = \cos^2 x$ та $y_2 = \sin^2 x$ задовольняють деякому однорідному рівнянню 2-го порядку. Переконатись, що вони складають фундаментальну систему розв'язків. Скласти рівняння.

18. Рівняння $(2x - x^2)y'' + (x^2 - 2)y' + 2(1 - x)y = 0$ має розв'язок $y = e^x$. Знайти розв'язок рівняння, що задовольняє початковим умовам $y(1) = 0, y'(1) = 1$.

2.5 Лінійні однорідні диференціальні рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

Розглянемо ЛОДР n-го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0\,, \tag{70}$$

де a_i – дійсні числа, $i = 1, 2, \ldots, n.$

Метод побудови фундаментальної системи розв'язків цього рівняння (*метод Ейлера*) полягає в тому, що частинні розв'язки рівняння (70) шукають у вигляді

$$y = e^{\lambda x}, \tag{71}$$

де λ – стала, що підлягає визначенню.

Підставляння функції (71) та її похідних у диференціальне рівняння (70) приводить до алгебраїчного рівняння

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, \tag{72}$$

яке називається *характеристичним* для рівняння (70).

Рівняння (72) отримується з (70) формально заміною похідних $y^{(i)}$ степенями λ^i, $i = 0, 1, \ldots, n$ $(y^{(0)} = y)$.

Кожному дійсному кореню λ рівняння (72) кратності r відповідає r лінійно незалежних розв’язків рівняння (71)

$$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \ldots, x^{r-1}e^{\lambda x}. \tag{73}$$

Кожній парі комплексно-спряжених коренів $\alpha \pm i\beta$ кратності s відповідає s пар лінійно незалежних розв’язків

$$\begin{aligned} &e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots, x^{s-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, \\ &e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, x^{s-1}e^{\alpha x}\sin\beta x. \end{aligned} \tag{74}$$

Нехай характеристичне рівняння (72) має p дійсних коренів $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ кратностей $r_1, r_2, \ldots, r_p$ і q пар комплексно-спряжених коренів $\alpha_1 \pm i\beta_1$, $\alpha_2 \pm i\beta_2$, ..., $\alpha_q \pm i\beta_q$ кратностей $s_1, s_2, \ldots, s_q$ $(r_1 + r_2 + \ldots + r_p + 2s_1 + 2s_2 + \ldots + 2s_q = n)$. Їм відповідає n лінійно незалежних розв’язків, що утворюють фундаментальну систему розв’язків.

Загальний розв’язок рівняння (70) запишеться у вигляді

$$\begin{aligned} y(x) = P_1(x)e^{\lambda_1 x} + \ldots + P_p(x)e^{\lambda_p x} + \left(Q_1(x)\cos\beta_1 x + R_1(x)\sin\beta_1\right)xe^{\alpha_1 x} + \ldots + \\ + \left(Q_q(x)\cos\beta_q x + R_q(x)\sin\beta_q x\right)e^{\alpha_q x}, \end{aligned} \tag{75}$$

де $P_\nu(x)$ – довільний многочлен степеня $r_\nu - 1$, $\nu = 1, 2, \ldots, p$, а $Q_\mu(x)$ і $R_\mu(x)$ – довільні многочлени степеня $s_\mu - 1$, $\mu = 1, 2, \ldots, q$.

Приклади розв'язання задач

22. Знайти частинний розв'язок рівняння $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0,$ що задовольняє початкові умови $y(0) = 1,\ \ y'(0) = 2,\ \ y''(0) = 3$.

► Маємо ЛОДР третього порядку зі сталими коефіцієнтами. Характеристичне рівняння $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$, тобто $(\lambda - 1)^3 = 0$ має корені $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, тому фундаментальна система розв'язків $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$, $y_3 = x^2e^x$. Отже, загальний розв'язок $y = e^x(C_1 + C_2x + C_3x^2)$.

Для визначення сталих C_1, C_2, C_3 знайдемо похідні

$$y' = e^x\left(C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_2 + 2C_3x\right),$$

$$y'' = e^x\left(C_1 + C_2x + C_3x^2 + 2C_2 + 4C_3x + 2C_3\right)$$

і врахуємо початкові умови. Одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1 = 1, \\ C_1 + C_2 = 2, \\ C_1 + 2C_2 + 2C_3 = 3, \end{cases} \quad \text{звідки} \quad \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = 1, \\ C_3 = 0. \end{cases}$$

Отже, шуканий частинний розв'язок має вигляд $y = e^x(1 + x)$. ◄

Завдання для самостійного розв'язання

19. Розв'язати рівняння:

а) $y''' - 4y'' + 3y' = 0$; б) $y''' - 3y' + 2y = 0$;

в) $y^{IV} - 49y'' = 0$; г) $y''' + 5y'' + 6y' = 0$;

д) $y^{IV} - 16y = 0$.

2.6 Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Особливо простий випадок маємо при $n = 2$, тобто для ЛОДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами виду

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad (76)$$

де p, q – задані числа.

Характеристичне рівняння в цьому випадку буде квадратним рівнянням

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \qquad (77)$$

Корені характеристичного рівняння можуть бути такі:

1) дійсні та різні, тобто $\lambda_1 \neq \lambda_2$;
2) дійсні та рівні, тобто кратні $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$;
3) комплексно-спряжені, тобто $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$.

Відповідно до загальної теорії їм відповідають такі фундаментальні системи розв'язків y_1, y_2 та загальні розв'язки рівняння:

1) $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$; $\quad y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$;

2) $y_1 = e^{\lambda x}$, $y_2 = xe^{\lambda x}$; $\quad y = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda x}$;

3) $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$; $\quad y = (C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)e^{\alpha x}$.

Приклади розв'язання задач

23. Знайти загальні розв'язки лінійних однорідних рівнянь зі сталими коефіцієнтами:

а) $y'' - 15y' + 26y = 0$; *б*) $y'' + 6y' + 9y = 0$; *в*) $y'' - 2y' + 10y = 0.$

► Для кожного випадку складаємо характеристичне рівняння, знаходимо його корені, фундаментальну систему розв'язків і загальний розв'язок:

а) $\lambda^2 - 15\lambda + 26 = 0, \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 13; \quad y_1 = e^{2x},\ y_2 = e^{13x};$

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{13x};$$

б) $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -3; \quad y_1 = e^{-3x},\ y_2 = xe^{-3x};$

$$y = e^{-3x}(C_1 + C_2 x);$$

в) $\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0, \quad \lambda_{1,2} = 1 \pm 3i; \quad y_1 = e^x cos 3x,\ y_2 = e^x \sin 3x;$

$$y = e^x (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x). \ ◄$$

24. Два однакових вантажі підвішені до кінця пружини. Знайти рівняння руху, яке здійснюватиме один з цих вантажів, якщо інший відірветься.

► Нехай збільшення довжини пружини під дією одного вантажу у стані спокою дорівнює a і маса вантажу m. Позначимо через x координату вантажу, яка відраховується по вертикалі від положення рівноваги за наявності одного вантажу. Тоді за другим законом Ньютона маємо рівняння

$m\dfrac{d^2x}{dt^2} = mg - k(x + a)$, де $k = \dfrac{mg}{a}$. Отже, $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{g}{a}x = 0$.

Це ЛОДР 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Запишемо і розв'яжемо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + \frac{g}{a} = 0, \quad \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{g}{a}}i.$$

Фундаментальною системою розв'язків буде $x_1 = \cos\sqrt{\dfrac{g}{a}}t$, $x_2 = \sin\sqrt{\dfrac{g}{a}}t$, а загальний розв'язок матиме вигляд $x = C_1\cos\sqrt{\dfrac{g}{a}}t + C_2\sin\sqrt{\dfrac{g}{a}}t$.

Враховуючи початкові умови, покладемо $x = a,\ \dfrac{dx}{dt} = 0$ при $t = 0$, звідки $C_1 = a,\ C_2 = 0$. Отже, $x = a\cos\sqrt{\dfrac{g}{a}}t$. ◄

Завдання для самостійного розв'язання

20. Знайти частинний розв'язок рівняння:

а) $y'' - 22y' + 121y = 0,\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = 0$;

б) $y'' + y = 0,\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1,\quad y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$;

в) $y'' - 3y' + 2y = 0,\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = 3$;

г) $y'' - 2y' + 2y = 0,\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = 1$;

д) $y'' + 4y' = 0,\quad y(0) = 7,\quad y'(0) = 8$.

2.7 Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння

Розглянемо тепер рівняння виду

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \tag{78}$$

в якому $f(x) \not\equiv 0$. Як ми уже знаємо, це ЛНДР n-го порядку.

Структура загального розв'язку ЛНДР (1) визначається формулою

$$y = \tilde{y} + y^*, \tag{79}$$

де $\tilde{y}$ – загальний розв'язок відповідного йому ЛОДР

$$y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = 0\ ,$$

а y^* – який-небудь частинний розв'язок даного ЛНДР.

Метод варіації довільних сталих. Якщо відома фундаментальна система $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ розв'язків відповідного ЛОДР і, отже, загальний розв'язок ЛОДР

$$\tilde{y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + ... + C_n y_n(x)\ ,$$

то загальний розв'язок ЛНДР (79) можна знайти методом варіації довільних сталих (методом Лагранжа), згідно з яким

$$y = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) + ... + C_n(x) y_n(x)\ , \tag{80}$$

де $C_1(x), C_2(x), ..., C_n(x)$ – деякі функції, похідні яких $C_1'(x), C_2'(x), ..., C_n'(x)$ визначають з системи рівнянь

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 + \ldots + C_n' y_n = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' + \ldots + C_n' y_n' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x), \end{cases} \tag{81}$$

яка є системою n лінійних алгебраїчних рівнянь відносно n невідомих $C_1', C_2', \ldots, C_n'$ Визначником системи є вронскіан фундаментальної системи функцій $y_1, y_2, \ldots, y_n$, який не дорівнює нулю. Тому система має єдиний розв'язок $C_1' = \varphi_1(x)$, $C_2' = \varphi_2(x), \ldots, C_n' = \varphi_n(x)$. Інтегруючи останні рівності, які є диференціальними рівняннями першого порядку, знаходимо $C_i(x) = \int \varphi_i(x)dx + \tilde{C}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n,$ де $\tilde{C}_i$ – довільні сталі. Таким чином, загальний розв'язок ЛНДР методом варіації довільних сталих одержуємо у вигляді

$$y = \tilde{C}_1 y_1(x) + \tilde{C}_2 y_2(x) + ... + \tilde{C}_n y_n(x) + \sum_{i=1}^{n} y_i(x) \cdot \int \varphi_i(x)dx. \qquad (82)$$

Якщо покласти $\tilde{c}_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$ то одержуємо частинний розв’язок ЛНДР

$$y^* = \sum_{i=1}^{n} y_i(x) \cdot \int \varphi_i(x)dx .$$

Приклади розв’язання задач

25. Знайти загальний розв’язок рівняння

$$y''' - \frac{3}{x} y'' + \frac{6}{x^2} y' - \frac{6}{x^3} y = \sqrt{x},$$

застосовуючи метод варіації довільних сталих.

► Відповідне ЛОДР має вигляд

$$y''' - \frac{3}{x} y'' + \frac{6}{x^2} y' - \frac{6}{x^3} y = 0.$$

Як уже зауважили, загального методу знаходження фундаментальної системи розв’язків для ЛОДР не існує. Власне в цьому і полягає складність розв’язування ЛОДР з функціональними коефіцієнтами. Але в даному випадку можна здогадатися, що частинними розв’язками ЛОДР є деякі многочлени і безпосередньою перевіркою переконатися, що кожна з функцій $y_1 = x, \ y_2 = x^2, \ y_3 = x^3$ є частинним розв’язком цього ЛОДР. Функції x, x^2, x^3 лінійно незалежні, отже, вони утворюють фундаментальну систему розв’язків ЛОДР. Тому загальний розв’язок ЛОДР буде

$y = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3$, а загальний розв'язок даного ЛНДР будемо за методом Лагранжа шукати у вигляді

$$y = C_1(x)x + C_2(x)x^2 + C_3(x)x^3,$$

де похідні невідомих функцій визначаємо з системи рівнянь:

$$\begin{cases} C_1' \cdot x + C_2' \cdot x^2 + C_3' \cdot x^3 \quad = 0, \\ C_1' \cdot 1 + C_2' \cdot 2x + C_3' \cdot 3x^2 = 0, \\ C_1' \cdot 0 + C_2' \cdot 2 \quad + C_3' \cdot 6x \; = \sqrt{x}. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, одержимо

$$C_1'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^3},\; C_2'(x) = -\sqrt{x},\; C_3'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

звідки

$$C_1(x) = \frac{1}{5}\sqrt{x^5} + \tilde{C}_1, \quad C_2(x) = -\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \tilde{C}_2, \quad C_3(x) = \sqrt{x} + \tilde{C}_3,$$

де $\tilde{C}_i$ (i=1, 2, 3) – довільні сталі.

Отже, загальний розв'язок даного ЛНДР має вигляд

$$y = \tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2 x^2 + \tilde{C}_3 x^3 + \frac{1}{5}\sqrt{x^5} \cdot x - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} \cdot x^2 + \sqrt{x} \cdot x^3,$$

або $y = \tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2 x^2 + \tilde{C}_3 x^3 + \dfrac{8}{15}\sqrt{x^7}$, де $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \tilde{C}_3$ – довільні сталі. ◄

Зауваження. Якщо порядок диференціального рівняння $n = 2$, система (81) для визначення $C_1'(x), C_2'(x)$ набуває вигляду

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x). \end{cases} \tag{82}$$

Значно спрощується ситуація, коли маємо ЛНДР зі сталими коефіцієнтами, оскільки в цьому випадку є чітка процедура побудови загального розв’язку відповідного ЛОДР за допомогою характеристичного рівняння.

26. Знайти загальний розв’язок рівняння

$$y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}.$$

► Маємо ЛНДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Тому для знаходження загального розв’язку відповідного ЛОДР складаємо характеристичне рівняння $\lambda^2 + 4 = 0$, корені якого $\lambda_{1,2} = \pm 2i$. Загальним розв’язком ЛОДР буде $\tilde{y} = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$.

Загальний розв’язок ЛНДР будемо шукаємо у вигляді

$$y = C_1(x)\sin 2x + C_2(x)\cos 2x,$$

вважаючи C_1 та C_2 функціями від x. Для знаходження $C_1(x)$ та $C_2(x)$ складемо систему виду (82)

$$\begin{cases} C_1' \sin 2x + \ C_2' \cos 2x = 0, \\ 2C_1' \cos 2x - 2C_2' \sin 2x = \dfrac{1}{\cos 2x}. \end{cases}$$

Розв’язуючи цю систему відносно C_1' та C_2' знайдемо $C_1'(x) = \dfrac{1}{2}, C_2'(x) = -\dfrac{1}{2} tg 2x$. Інтегруючи, одержимо

$$C_1(x) = \frac{1}{2}\int dx = \frac{x}{2} + \tilde{C}_1, \quad C_2(x) = -\frac{1}{2}\int tg 2x dx = \frac{1}{4}\ln\left|\cos 2x\right| + \tilde{C}_2.$$

Отже, загальним розв’язком ЛНДР буде

$$y=\left(\frac{x}{2}+\tilde{C}_1\right)\sin 2x+\left(\frac{1}{4}\ln\left|\cos 2x\right|+\tilde{C}_2\right)\cos 2x \text{, або}$$

$$y=\frac{x}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x\ln\left|\cos 2x\right|+\tilde{C}_1\sin 2x+\tilde{C}_2\cos 2x\text{ . ◄}$$

27. Знайти частинний розв'язок рівняння

$$y''-y'=\frac{1}{e^x+1},\quad y(0)=1,\quad y'(0)=2.$$

► Маємо ЛНДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Розв'яжемо відповідне ЛОДР $y''-y'=0$.

Складаємо характеристичне рівняння $\lambda^2-\lambda=0$, корені якого $\lambda_1=0, \lambda_2=1.$ Отже, фундаментальна система розв'язків ЛОДР $y_1=1, \quad y_2=e^x$, а загальним розв'язком є $\tilde{y}=C_1+C_2e^x$.

Деякий частинний розв'язок даного ЛНДР будемо шукати у такому ж вигляді, вважаючи $C_i=C_i(x),\ i=1;2$, тобто $y^*=C_1(x)+C_2(x)e^x$.

Як ми знаємо, частинний розв'язок ЛНДР одержимо, якщо при інтегруванні функцій $C_1'(x)$ та $C_2'(x)$ покладемо сталі інтегрування рівними нулю.

Система для знаходження $C_1'(x)$ та $C_2'(x)$ має вигляд

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot 1+C'(x)_2e^x=0, \\ C_1'(x)\cdot 0+C_2'(x)e^x=\dfrac{1}{e^x+1}, \end{cases}$$

звідки знаходимо $C_1'(x)=-\dfrac{1}{e^x+1},\quad C_2'(x)=\dfrac{1}{e^x(e^x+1)}.$

Інтегруючи, отримаємо

$$C_1(x) = -\int \frac{dx}{e^x+1} = \left| \begin{array}{l} e^x+1=t,\, t>0, \\ e^x = t-1, t-1>0, \\ e^x dx = dt, \\ dx = \dfrac{dt}{t-1} \end{array} \right| = -\int \frac{dt}{t(t-1)} = \int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{t-1} =$$

$$= \ln t - \ln(t-1) = \ln\left(e^x+1\right) - \ln e^x = \ln(e^x+1) - x,$$

$$C_2(x) = \int \frac{dx}{e^x(e^x+1)} = \int \frac{e^{-2x}dx}{e^{-x}+1} = -\int \frac{(e^{-x}+1-1)de^{-x}}{e^{-x}+1} = -\int de^{-x} +$$

$$+\int \frac{d(e^{-x}+1)}{e^{-x}+1} = -e^{-x} + \ln(e^{-x}+1) = -e^{-x} + \ln\frac{e^x+1}{e^x} = -e^{-x} + \ln(e^x+1) - x.$$

Довільні сталі поклали рівними нулю. При інтегруванні були застосовані різні методи: метод заміни, тотожні перетворення підінтегральної функції, підведення функції під знак інтеграла тощо.

Таким чином, частинний розв'язок ЛНДР має вигляд

$$y^* = \ln(e^x+1) - x + e^x\left(-e^{-x} + \ln(e^x+1) - x\right) =$$
$$= \ln(e^x+1) - x - 1 - xe^x + e^x\ln(e^x+1).$$

Запишемо тепер загальний розв'язок ЛНДР

$$y = \tilde{y} + y^* = C_1 + C_2e^x - x + \ln(e^x+1) - 1 - xe^x + e^x\ln(e^x+1).$$

Визначимо сталі C_1 і C_2 з початкових умов. Для цього знайдемо похідну

$$y' = C_2e^x - 1 + \frac{e^x}{e^x+1} - e^x - xe^x + e^x\ln(e^x+1) + \frac{e^{2x}}{e^x+1}.$$

Покладемо в обох рівностях $x=0$ і одержимо систему рівнянь відносно C_1 і C_2

$$\begin{cases} C_1+C_2+2\ln 2-1=1, \\ C_2-1+\dfrac{1}{2}-1+\ln 2+\dfrac{1}{2}=2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1=-1-\ln 2, \\ C_2=3-\ln 2. \end{cases}$$

Тоді шуканий частинний розв'язок запишеться у вигляді

$$y=-1-\ln 2+e^x(3-\ln 2)-x+\ln(e^x+1)-1-xe^x+e^x\ln(e^x+1),$$

або $y=-x+e^x(3-\ln 2-x)+(e^x+1)\ln(e^x+1)-2-\ln 2.$ ◄

Завдання для самостійного розв'язання

21. Методом варіації сталих знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $y''+4y=8ctg 2x$; б) $y''+9y=\dfrac{9}{\sin 3x}$;

в) $y''+2y'+y=\dfrac{e^x}{x}$.

22. Знайти частинний розв'язок рівняння:

а) $y''+9y=\dfrac{9}{\cos 3x}$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$;

б) $y''+\dfrac{y}{4}=\dfrac{1}{4}ctg\dfrac{x}{2}$, $y(\pi)=2$, $y'(\pi)=\dfrac{1}{2}$;

в) $y''-3y'+2y=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$, $y(0)=1+2\ln 2$, $y'(0)=3\ln 2$.

2.8 Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду

Розглянемо ЛНДР n-го порядку зі сталими коефіцієнтами виду

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \tag{83}$$

де $a_i, (i = 1, 2, ..., n)$ – задані дійсні числа, $f(x) \not\equiv 0$ – задана функція.

Загальний розв’язок такого рівняння, як відомо, визначається формулою

$$y(x) = \tilde{y}(x) + y^*(x), \tag{84}$$

де $\tilde{y}(x)$ – загальний розв’язок відповідного ЛОДР, а $y^*(x)$ – який-небудь частинний розв’язок самого ЛНДР (83). Вище був докладно розглянутий алгоритм побудови загального розв’язку ЛОДР зі сталими коефіцієнтами.

У деяких випадках, коли функція $f(x)$ має спеціальний вигляд, використовують *метод підбору виду частинного розв’язку* ЛНДР за виглядом цієї функції – правої частини рівняння (83). При цьому для визначення самого частинного розв’язку використовують *метод невизначених коефіцієнтів*.

Розглянемо ці випадки:

1. Права частина ЛНДР (83) має вигляд

$$f(x) = Q_s(x)e^{\alpha x} = (A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + ... + A_s)e^{\alpha x} . \tag{85}$$

Якщо α не є коренем характеристичного рівняння відповідного ЛОДР, то частинний розв’язок y^* шукаємо у вигляді

$$y^* = P_s(x)e^{\alpha x} = (B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + ... + B_s)e^{\alpha x} . \tag{86}$$

Тут $P_s(x)$ – многочлен степеня s з невизначеними коефіцієнтами $B_0, B_1, ..., B_s$.

Якщо α є коренем кратності r характеристичного рівняння, то частинний розв'язок $y*$ шукаємо у вигляді

$$y* = x^r P_s(x)e^{\alpha x} = x^r(B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + ... + B_s)e^{\alpha x}. \qquad (87)$$

Невідомі числа $B_0, B_1, ..., B_s$ знаходимо методом невизначених коефіцієнтів, тобто підставивши $y*$ та $y*', ..., y*^{(n)}$ у ЛНДР (83), прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x. Розв'язки отриманої системи рівнянь – числа $B_0, B_1, ..., B_s$.

2. Права частина ЛНДР (83) має вигляд

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[Q_{s_1}(x)\cos\beta x + P_{s_2}(x)\sin\beta x\right], \qquad (88)$$

де $Q_{s_1}(x)$, $P_{s_2}(x)$ – многочлени степенів s_1, s_2 відповідно з заданими коефіцієнтами, $\max(s_1, s_2) = s$.

Якщо комплексного числа $\alpha \pm i\beta$ немає серед коренів характеристичного рівняння відповідного ЛОДР, то $y*$ шукаємо у вигляді

$$y* = e^{\alpha x}\left[u_s(x)\cos\beta x + v_s(x)\sin\beta x\right], \qquad (89)$$

де $u_s(x)$, $v_s(x)$ – многочлени степеня s з невизначеними коефіцієнтами.

Якщо число $\alpha \pm i\beta$ є коренем кратності r характеристичного рівняння, то $y*$ шукаємо у вигляді

$$y* = x^r e^{\alpha x}\left[u_s(x)\cos\beta x + v_s(x)\sin\beta x\right], \qquad (90)$$

де $u_s(x)$, $v_s(x)$ – многочлени степеня s з невизначеними коефіцієнтами.

Зауважимо, що вигляд розв'язку (89) або (90) зберігається і у випадку, коли у формулі (88) відсутній доданок, що містить $\cos\beta x$ або $\sin\beta x$.

Якщо функція $f(x)$ не підпадає під вигляд наведених функцій, то, якщо це можливо, перетворюють $f(x)$ таким чином, щоб вона була сумою доданків, кожен з яких має спеціальний вид. Далі використовується *принцип суперпозиції розв'язків*.

Розглянемо конкретні приклади, що ілюструють розглянутий метод підбору частинного розв'язку ЛНДР.

Приклади розв'язання задач

28. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y^{IV} - 3y'' = 9x^2 .$$

► Маємо ЛНДР четвертого порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду.

Складаємо характеристичне рівняння, знаходимо його корені, фундаментальну систему розв'язків і загальний розв'язок $\tilde{y}$ відповідного ЛОДР:

$$\lambda^4 - 3\lambda^2 = 0, \quad \lambda^2(\lambda^2 - 3) = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad \lambda_{3,4} = \pm\sqrt{3};$$
$$y_1 = e^{0x} = 1, \quad y_2 = xe^{0x} = x, \quad y_3 = e^{\sqrt{3}x}, \quad y_4 = e^{-\sqrt{3}x};$$
$$\tilde{y} = c_1 + c_2 x + c_3 e^{\sqrt{3}x} + c_4 e^{-\sqrt{3}x}.$$

Права частина даного ЛНДР є многочленом, тобто маємо частинний випадок функції спеціального вигляду. У цьому випадку потрібно перевірити, чи є число нуль коренем характеристичного рівняння. Дійсно, характеристичне рівняння має двократний нульовий корінь $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, тому частинний розв'язок y^* ЛНДР шукаємо у вигляді

$$y^* = x^2(Ax^2 + Bx + C),$$

оскільки права частина є многочленом саме другого степеня. Підставляючи $(y^*)'', (y^*)^{(4)}$ в дане ЛНДР, одержимо тотожність для знаходження невизначених коефіцієнтів. Тут і далі для зручності обчислень будемо виписувати вирази для функції y^* та її похідних в окремі рядки і ліворуч за вертикальною рискою записувати відповідні коефіцієнти, з якими вони входять до лівої частини даного ЛНДР. Виконавши множення виразів на ці коефіцієнти і подальше додавання, одержимо

$$\begin{array}{r|l} 0 & y^* = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2, \\ 0 & (y^*)' = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx, \\ -3 & (y^*)'' = 12Ax^2 + 6Bx + 2C, \\ 0 & (y^*)''' = 24Ax + 6B, \\ 1 & (y^*)^{(4)} = 24A, \end{array}$$

$$(y^*)^{(4)} - 3(y^*)'' = -36Ax^2 - 18Bx - 6C + 24A = 9x^2.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x у лівій і правій частинах останньої тотожності, отримаємо систему лінійних рівнянь для визначення A, B, C:

$$\begin{array}{r|l} x^2 & -36A=9, \\ x^1 & -18B=0, \\ x^0 & -6C+24A=0, \end{array}$$

звідки $A = -1/4,\ B = 0,\ C = -1$. Отже, $y^* = x^2(-\frac{1}{4}x^2 - 1)$ –

частинний розв'язок даного ЛНДР.

Загальним розв'язком рівняння є функція

$$y = \tilde{y} + y^* = C_1 + C_2 x + C_3 e^{\sqrt{3}x} + C_4 e^{-\sqrt{3}x} - \frac{1}{4}x^4 - x^2 . \blacktriangleleft$$

29. Знайти частинний розв'язок рівняння

$$y''' - 2y'' + y' = 4(\sin x + \cos x),$$

який задовольняє початкові умови

$$y(0) = 2,\ \ y'(0) = 2,\ \ y''(0) = -1.$$

► Маємо ЛНДР третього порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду.

Відповідне йому ЛОДР $y''' - 2y'' + y' = 0$. Складаємо характеристичне рівняння $\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = 0$, корені якого $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Загальний розв'язок ЛОДР $\tilde{y} = C_1 + (C_2 + C_3 x)e^x$.

Частинний розв'язок ЛНДР шукаємо у вигляді

$$y^* = A\cos x + B\sin x,$$

бо права частина заданого рівняння $f(x) = 4(\sin x + \cos x)$ відповідає спеціальному вигляду правої частини (89) $f(x) = e^{\alpha x}\left(P_{s_1}(x)\cos\beta x + Q_{s_2}(x)\sin\beta x\right)$, $\max(s_1, s_2) = s$ при $s = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$, причому число $\alpha + i\beta = i$ не є коренем характеристичного рівняння.

Знайдемо ($y^{*\prime}, y^{*\prime\prime}, y^{*\prime\prime\prime}$), підставимо в дане ЛНДР і, застосовуючи метод невизначених коефіцієнтів (див. приклад

№28), одержимо $A = B = 2$.

Таким чином, частинний розв'язок ЛНДР має вигляд $y^* = 2\cos x + 2\sin x$. Загальний розв'язок ЛНДР

$$y = \tilde{y} + y^* = C_1 + (C_2 + C_3 x)e^x + 2\cos x + 2\sin x.$$

Продиференціювавши його двічі, знайдемо

$$y' = (C_2 + C_3(1 + x))e^x + 2(-\sin x + \cos x),$$

$$y'' = (C_2 + C_3(2 + x))e^x - 2(\cos x + \sin x).$$

Скориставшись початковими умовами $y(0) = 2,\ y'(0) = 2,$ $y''(0) = -1$, одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + 2 = 2, \\ C_2 + C_3 + 2 = 2, \\ C_2 + 2C_3 - 2 = -1, \end{cases}$$

звідки $C_1 = 1, C_2 = -1, C_3 = 1$.

Отже, шуканий розв'язок має вигляд

$$y = 1 + (x - 1)e^x + 2\cos x + 2\sin x. \blacktriangleleft$$

2.9 Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

При $n = 2$ маємо ЛНДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

де p, q – задані числа, $f(x) \neq 0$ – задана функція.

Зрозуміло, що це частинний випадок розглянутого вище ЛНДР *n*-го порядку, який ще простіше проаналізувати. Аналогічно до попереднього розглядаються два спеціальні види функції $f(x)$.

I. $f(x) = Q_s(x)e^{\alpha x} = (A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + ... + A_s)e^{\alpha x}$,

де $Q_s(x)$ – многочлен степеня s з заданими коефіцієнтами.

1) Якщо α не є коренем характеристичного рівняння відповідного ЛОДР, то частинний розв'язок $y*$ шукаємо у вигляді

$$y* = P_s(x)e^{\alpha x} = (B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + ... + B_s)e^{\alpha x},$$

де $P_s(x)$ – многочлен степеня s з невизначеними коефіцієнтами;

2) Якщо α – однократний (простий) корінь характеристичного рівняння, то частинний розв'язок $y*$ шукаємо у вигляді

$$y* = xP_s(x)e^{\alpha x} = x(B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + ... + B_s)e^{\alpha x},$$

де $P_s(x)$ – многочлен степеня s з невизначеними коефіцієнтами;

3) Якщо α – двократний корінь характеристичного рівняння, то частинний розв'язок $y*$ шукаємо у вигляді

$$y* = x^2 P_s(x)e^{\alpha x} = x^2(B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + ... + B_s)e^{\alpha x},$$

де $P_s(x)$ – многочлен степеня s з невизначеними коефіцієнтами.

Зауважимо, що число α може бути і нулем, у цьому випадку права частина ЛНДР є многочленом. Всі висновки залишаються слушними.

II. $f(x) = e^{\alpha x}\left[Q_{s_1}(x)\cos\beta x + P_{s_2}(x)\sin\beta x\right]$,

де $Q_{s_1}(x), P_{s_2}(x)$ – многочлени степенів s_1, s_2 відповідно з заданими коефіцієнтами, $\max(s_1, s_2) = s$.

1) Якщо число $\alpha + i\beta$ не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок $y*$ шукаємо у вигляді

$$y* = e^{\alpha x}\left[u_s(x)\cos\beta x + v_s(x)\sin\beta x\right],$$

де $u_s(x), v_s(x)$ – многочлени степеня не вище s з невизначеними коефіцієнтами;

2) Якщо число $\alpha + i\beta$ є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок $y*$ шукаємо у вигляді

$$y* = xe^{\alpha x}\left[u_s(x)\cos\beta x + v_s(x)\sin\beta x\right],$$

де $u_s(x), v_s(x)$ – многочлени степеня не вище s з невизначеними коефіцієнтами;

При цьому всі висновки залишаються слушними і у випадках, коли $\alpha = 0$ або у правій частині відсутній доданок, що містить $\cos\beta x$ або $\sin\beta x$.

Приклади розв'язання задач

30. Знайти загальний розв'язок рівняння:

а) $y'' - 2y' + 2y = x^2$; б) $2y'' - y' - y = 4xe^{2x}$;

в) $y'' - 2y' + y = xe^x$; г) $y'' + 4y' + 4y = \cos 2x$.

►а) Маємо ЛНДР зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду. Відповідне йому ЛОДР $y'' - 2y' + 2y = 0$. Складаємо характеристичне рівняння $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$, корені якого $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$. Загальний розв'язок ЛОДР $\tilde{y} = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x)$.

Частинний розв'язок ЛНДР шукаємо у вигляді $y* = Ax^2 + Bx + C$, бо права частина $f(x) = x^2$ відповідає спеціальному виду правої частини $f(x) = Q_s(x)e^{\alpha x}$ при

$s=2,\ \alpha=0$, причому $\alpha=0$ не є коренем характеристичного рівняння.

Знайдемо $(y^*)', (y^*)''$ та підставимо $y^*, (y^*)', (y^*)''$ у дане ЛНДР. Як уже вказувалося, для зручності обчислень будемо виписувати вирази для функції y^* та її похідних в окремі рядки і ліворуч за вертикальною рискою записувати відповідні коефіцієнти, з якими вони входять до лівої частини даного ЛНДР. Виконавши множення виразів на ці коефіцієнти і подальше додавання, одержимо

$$\begin{array}{r|l} 2 & y^*=Ax^2+Bx+C, \\ -2 & (y^*)'=2Ax+B, \\ 1 & (y^*)''=2A, \end{array}$$

$$\overline{(y^*)''-2(y^*)'+2y^*=2Ax^2+x(2B-4A)+(2C-2B+2A)=x^2}.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 2A=1, \\ x^1 & 2B-4A=0, \\ x^0 & 2C-2B+2A=0, \end{array} \quad \text{звідки } A=\frac{1}{2},\ B=1,\ C=\frac{1}{2}.$$

Таким чином, частинний розв'язок ЛНДР має вигляд

$$y^*=\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(x+1)^2.$$

Загальним розв'язком даного ЛНДР буде

$$y=\tilde{y}+y^*=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)+\frac{1}{2}(x+1)^2. \blacktriangleleft$$

►б) Маємо ЛНДР зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального виду. Відповідне йому ЛОДР $2y'' - y' - y = 0$. Складаємо характеристичне рівняння $2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$, корені якого $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1/2$.

Загальний розв'язок ЛОДР $\tilde{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x/2}$.

Частинний розв'язок ЛНДР шукатимемо методом підбору за виглядом правої частини, тобто у вигляді

$$y^* = e^{2x}(Ax + B),$$

оскільки права частина даного ЛНДР $f(x) = 4xe^{2x}$ відповідає випадку $f(x) = Q_s(x)e^{\alpha x}$ при $s = 1,\ \alpha = 2$, причому $\alpha = 2$ не є коренем характеристичного рівняння.

Знаходимо $(y^*)',\ (y^*)''$ та підставляємо $y^*, (y^*)', (y^*)''$ у ЛНДР. В результаті отримаємо тотожність. Знову для зручності обчислень записуємо вирази для $y^*, (y^*)', (y^*)''$ в окремі рядки, а ліворуч за вертикальною рискою – коефіцієнти, з якими вони входять до лівої частини ЛНДР. Множимо $y^*, (y^*)', (y^*)''$ на відповідні коефіцієнти, додаємо, зводимо подібні члени і маємо тотожність, яка записується нижче горизонтальної риски. Таким чином,

$$\begin{array}{r|c} -1 & y^* = e^{2x}(Ax + B), \\ -1 & (y^*)' = 2e^{2x}(Ax + B) + e^{2x}A = e^{2x}(2Ax + 2B + A), \\ 2 & (y^*)'' = 2e^{2x}(2Ax + 2B + A) + e^{2x}2A = e^{2x}(4Ax + 4B + 4A), \\ \hline \end{array}$$

$$2(y^*)'' - (y^*)' - y^* = e^{2x}(5Ax + 5B + 7A) = 4xe^{2x}.$$

Скоротивши на e^{2x} та прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x, маємо

$$\begin{array}{c|c} x^1 & 5A = 4, \\ x^0 & 5B + 7A = 0, \end{array} \quad \text{звідки } A = \frac{4}{5}, B = -\frac{28}{25}.$$

Частинний розв'язок ЛНДР має вигляд $y^* = e^{2x}\left(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25}\right)$.

Загальний розв'язок ЛНДР буде наступним

$$y = \tilde{y} + y^* = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{x}{2}} + e^{2x}\left(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25}\right). \blacktriangleleft$$

►в) Маємо ЛНДР зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду. Відповідне йому ЛОДР $y'' - 2y' + y = 0$. Складаємо характеристичне рівняння $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, корені якого $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Загальний розв'язок ЛОДР $\tilde{y} = (C_1 + C_2 x)e^x$.

Частинний розв'язок ЛНДР шукаємо у вигляді

$$y^* = x^2 e^x (Ax + B),$$

бо права частина заданого рівняння $f(x) = xe^x$ має вигляд $f(x) = Q_s(x)e^{\alpha x}$ при $s = 1, \alpha = 1$, причому число $\alpha = 1$ є коренем характеристичного рівняння кратності $r = 2$. Останнє зумовлює присутність множника x^2.

Знайдемо $(y^*)', (y^*)''$ та підставимо $y^*, (y^*)', (y^*)''$ у ЛНДР:

$$\begin{array}{r|c} 1 & y^* = e^x(Ax^3 + Bx^2), \\ -2 & (y^*)' = e^x(3Ax^2 + 2Bx) + e^x(Ax^3 + Bx^2), \\ 1 & (y^*)'' = e^x(Ax^3 + x^2(3A+B) + 2Bx) + e^x(3Ax^2 + 2x(3A+B) + 2B). \end{array}$$

$$(y^*)'' - 2(y^*)' + y^* = e^x(x^3(A - 2A + A) + x^2(3A + B + 3A - 6A - 2B + B) +$$
$$+ x(2B + 6A + 2B - 4B) + 2B) = xe^x.$$

Скоротивши на e^x, після перетворень отримаємо $6Ax + 2B = x$. Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x, маємо $\begin{array}{c|l} x^1 & 6A = 1, \\ x^0 & 2B = 0, \end{array}$ звідки $A = \frac{1}{6}$, $B = 0$.

Частинний розв'язок ЛНДР має вигляд $y^* = \frac{1}{6}x^3e^x$.

Отже, загальним розв'язком ЛНДР буде

$$y = \tilde{y} + y^* = (C_1 + C_2x)e^x + \frac{1}{6}x^3e^x. \blacktriangleleft$$

►г) Маємо ЛНДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду. Відповідне йому ЛОДР $y'' + 4y' + 4y = 0$. Складаємо характеристичне рівняння $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$, або $(\lambda + 2)^2 = 0$. Корені характеристичного рівняння $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$, тобто $\lambda = -2$ – корінь кратності $r = 2$.

Загальний розв'язок ЛОДР $\tilde{y} = (C_1 + C_2x)e^{-2x}$.

Частинний розв'язок ЛНДР шукаємо у вигляді

$$y^* = A\cos 2x + B\sin 2x,$$

бо права частина заданого ЛНДР $f(x)=\cos 2x$ має вигляд $f(x)=e^{\alpha x}\left[P_{s_1}(x)\cos\beta x+Q_{s_2}(x)\sin\beta x\right]$, $\max(s_1,s_2)=s$ при $s=0$, $\alpha=0,\ \beta=2$, причому число $\alpha+i\beta=2i$ не є коренем характеристичного рівняння.

Знайдемо $(y^*)',(y^*)''$ та підставимо $y^*,(y^*)',(y^*)''$ у ЛНДР:

$$\begin{array}{r|l} 4 & y^*=A\cos 2x+B\sin 2x, \\ 4 & (y^*)'=-2A\sin 2x+2B\cos 2x, \\ 1 & (y^*)''=-4A\cos 2x-4B\sin 2x, \end{array}$$

$$\cos 2x(-4A+8B+4A)+\sin 2x(-4B-8A+4B)=\cos 2x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\cos 2x$ та $\sin 2x$, одержимо $\begin{array}{r|l} \cos 2x & 8B=1, \\ \sin 2x & -8A=0, \end{array}$ звідки $A=0,\ B=\dfrac{1}{8}$.

Частинний розв’язок ЛНДР має вигляд $y^*=\dfrac{1}{8}\sin 2x$.

Отже, загальний розв’язок ЛНДР

$$y=(C_1+C_2x)e^{-2x}+\frac{1}{8}\sin 2x. \blacktriangleleft$$

31. Знайти розв’язок задачі Коші:

а) $y''+6y'+10y=80e^x\cos x,\quad y(0)=4,\ y'(0)=10;$

б) $y''+y'-2y=\cos x-3\sin x,\quad y(0)=1,\ y'(0)=2.$

►а) Маємо ЛНДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду. Відповідне йому ЛОДР $y''+6y'+10y=0$. Складаємо характеристичне рівняння $\lambda^2+6\lambda+10=0$, корені якого $\lambda_{1,2}=-3\pm i$.

Загальний розв’язок ЛОДР $\tilde{y}=e^{-3x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$.

Частинний розв’язок ЛНДР шукаємо у вигляді

$$y^*=e^{x}(A\cos x+B\sin x),$$

бо права частина $f(x)=80e^{x}\cos x$ є частинним випадком виразу $f(x)=e^{\alpha x}\left[P_{s_1}(x)\cos\beta x+Q_{s_2}(x)\sin\beta x\right]$, $\max(s_1,s_2)=s$ при $s=1,\ \alpha=1,\ \beta=1$, причому число $\alpha+i\beta=1+i$ не є коренем характеристичного рівняння.

Знаходимо $(y^*)', (y^*)''$ та підставляємо $y^*, (y^*)', (y^*)''$ у ЛНДР:

$$\begin{array}{r|r}
10 & y^*=e^{x}(A\cos x+B\sin x),\\
6 & (y^*)'=e^{x}(A\cos x+B\sin x-A\sin x+B\cos x),\\
1 & (y^*)''=e^{x}(-2A\sin x+2B\cos x),
\end{array}$$

$$e^{x}\left[(16A+8B)\cos x+(16B-8A)\sin x\right]=80e^{x}\cos x.$$

Скорочуємо на e^{x} і прирівнюємо коефіцієнти при $\cos x, \sin x$: $\begin{array}{r|l}\cos x & 16A+8B=80,\\ \sin x & 16B-8A=0,\end{array}$ звідки $A=4,\ B=2$.

Таким чином, частинний розв’язок ЛНДР має вигляд

$$y^*=e^{x}(4\cos x+2\sin x).$$

Загальний розв’язок ЛНДР буде наступним:

$$y = e^{-3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 2e^x(2\cos x + \sin x).$$

Тепер з початкових умов $y(0) = 4,\ y'(0) = 10$, потрібно визначити сталі $C_1,\ C_2$. Знаходимо

$$y' = e^{-3x}(-3C_1 \cos x - 3C_2 \sin x - C_1 \sin x + C_2 \cos x) + 2e^x(3\cos x - \sin x).$$

Розв'язуємо систему рівнянь $\begin{cases} y(0) = C_1 + 4 = 4, \\ y'(0) = -3C_1 + C_2 + 6 = 10, \end{cases}$

звідки $C_1 = 0,\ C_2 = 4$.

Отже, шуканий частинний розв'язок ЛНДР, що задовольняє задані початкові умови, має вигляд

$$y = 4e^{-3x} \sin x + 2e^x(2\cos x + \sin x).\ ◄$$

►б) Маємо ЛНДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду. Складаємо характеристичне рівняння, знаходимо його корені, фундаментальну систему розв'язків і загальний розв'язок $\tilde{y}$ відповідного ЛОДР:

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0, \quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2;$$
$$y_1 = e^x, \quad y_2 = e^{-2x}; \quad \tilde{y} = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}.$$

Частинний розв'язок ЛНДР y^* шукаємо у вигляді $y^* = A\cos x + B\sin x$, оскільки аналіз показує, що права частина має вигляд

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[P_{s_1}(x)\cos\beta x + Q_{s_2}(x)\sin\beta x\right],\ \max(s_1, s_2) = s,$$

де $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\alpha + \beta i = i$, а характеристичне рівняння не має такого кореня, отже $r = 0$; окрім того $s_1 = s_2 = 0$, тому і $s = 0$. Таким чином,

$$\begin{array}{l|l} 1 & y^* = A\cos x + B\sin x, \\ 1 & (y^*)' = -A\sin x + B\cos x, \\ -2 & (y^*)'' = -A\cos x - B\sin x, \end{array}$$

$$(y^*)'' + (y^*)' - 2y^* = (B - 3A)\cos x + (-3B - A)\sin x = \cos x - 3\sin x\,.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\cos x$ і $\sin x$ у лівій і правій частинах останньої рівності, приходимо до системи лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення A, B

$$\begin{array}{r|l} \cos x & B - 3A = 1\,, \\ \sin x & -3B - A = -3\,, \end{array}$$

звідки $A = 0$, $B = 1$. Отже, $y^* = \sin x$ – частинний розв'язок даного ЛНДР.

Загальним розв'язком ЛНДР є функція

$$y = \tilde{y} + y^* = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + \sin x\,.$$

Для визначення сталих C_1 та C_2 знайдемо похідну $y' = C_1 e^x - 2C_2 e^{-2x} + \cos x$ і врахуємо початкові умови. Одержимо систему рівнянь $\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ C_1 - 2C_2 + 1 = 2, \end{cases}$ звідки $\begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = 0. \end{cases}$

Отже, шуканий частинний розв'язок $y = e^x + \sin x.$ ◄

Завдання для самостійного розв'язання

23. Розв'язати рівняння:

а) $y''-7y'+12y=3e^{4x}$; б) $y''-4y'=8-16x$;

в) $y''-2y'+y=4e^{x}$; г) $y''+y'-2y=9\cos x-7\sin x$;

д) $y''+2y'+y=(18x+8)e^{-x}$.

24. Знайти частинний розв'язок рівняння:

а) $y''-y'=2(1-x),\quad y(0)=1,\quad y'(0)=1$;

б) $y''+y+\sin 2x=0,\quad y(\pi)=1,\quad y'(\pi)=1$;

в) $y''+y'=x^2+2x,\quad y(0)=4,\quad y'(0)=-2$;

г) $y''+6y'+9y=72e^{3x},\quad y(0)=4,\quad y'(0)=2$;

д) $y''-8y'+16y=e^{4x},\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1$.

2.10 Принцип суперпозиції розв'язків

Якщо функції $\tilde{y}_i(x)$ – частинні розв'язки рівнянь

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f_i(x),\ i=\overline{1,k},$$

то функція $\tilde{y}(x)=\sum_{i=1}^{k}\tilde{y}_i(x)$ є частинним розв'язком рівняння

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=\sum_{i=1}^{k}f_i(x).$$

Приклади розв'язання задач

32. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''+y=xe^{x}+2e^{-x}.$$

► Маємо ЛНДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами, праву частину якого можна подати у вигляді суми двох функцій спеціального вигляду.

Відповідне ЛОДР $y'' + y = 0$. Складаємо характеристичне рівняння $\lambda^2 + 1 = 0$, корені якого $\lambda_{1,2} = \pm i$.

Загальний розв'язок однорідного рівняння

$$\tilde{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x .$$

За принципом суперпозиції розв'язків частинний розв'язок ЛНДР шукаємо у вигляді

$$y^* = y_1^* + y_2^* = (Ax + B)e^x + Ce^{-x} ,$$

бо для y_1^* маємо $f_1(x) = xe^x$, $s = 1, \alpha = 1$, число α не є коренем характеристичного рівняння; для y_2^* маємо $f_1(x) = 2e^{-x}$, $s = 1$, $\alpha = -1$, число α не є коренем характеристичного рівняння.

Знаходимо $(y^*)', (y^*)''$ та підставляємо $y^*, (y^*)''$ у задане диференціальне рівняння

$$\begin{array}{r|r} 1 & y^* = (Ax + B)e^x + Ce^{-x}, \\ 0 & (y^*)' = (Ax + B + A)e^x - Ce^{-x}, \\ 1 & (y^*)'' = (Ax + B + A + A)e^x + Ce^{-x}, \end{array}$$

$$\overline{e^x (2Ax + 2B + 2A) + 2Ce^{-x} = xe^x + 2e^{-x}.}$$

Після перетворень маємо

$$2Axe^x + 2(A + B)e^x + 2Ce^{-x} = xe^x + 2e^{-x} .$$

Прирівнюючи коефіцієнти при xe^x, e^x, e^{-x}, отримаємо

$$\begin{array}{r|c} xe^{x} & 2A=1, \\ e^{x} & 2(A+B)=0, \\ e^{-x} & 2C=2, \end{array} \quad \text{звідки} \quad A=\frac{1}{2}, B=-\frac{1}{2}, C=1.$$

Таким чином, частинний розв'язок ЛНДР має вигляд

$$y^{*}=\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)e^{x}+e^{-x}.$$

Загальний розв'язок ЛНДР

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}(x-1)e^{x}+e^{-x}. \blacktriangleleft$$

Завдання для самостійного розв'язання

25. Розв'язати рівняння:

а) $y''+9y=6\cos 3x+39e^{-2x}$;

б) $y''+4y'+4y=12x^2+16x+2+4e^{-2x}$.

§ 3. Системи диференціальних рівнянь

3.1 Нормальна система диференціальних рівнянь. Метод виключення

Система рівнянь виду
$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=f_1\left(t,x_1,x_2,...,x_n\right), \\ \dfrac{dx_2}{dt}=f_2\left(t,x_1,x_2,...,x_n\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \dfrac{dx_n}{dt}=f_n\left(t,x_1,x_2,...,x_n\right), \end{cases} \tag{91}$$

де $x_1, x_2, ..., x_n$ – невідомі функції незалежної змінної t, називається *нормальною системою*.

Якщо праві частини нормальної системи диференціальних рівнянь є лінійними функціями відносно $x_1, x_2, ..., x_n$, то система диференціальних рівнянь називається *лінійною*. Лінійна система у свою чергу може бути лінійною однорідною або лінійною неоднорідною в залежності від наявності чи відсутності ненульового вільного члена.

Нормальну систему диференціальних рівнянь можна звести до одного рівняння n-го порядку відносно однієї невідомої функції. Це досягається диференціюванням одного з рівнянь системи і вилученням всіх невідомих функцій за винятком однієї (так званий *метод виключення*).

Задача Коші для системи диференціальних рівнянь формулюється аналогічно до того, як це було у випадку одного диференціального рівняння. Розв’язання її полягає у виділенні з загального розв’язку частинного розв’язку, що відповідає заданим початковим умовам.

Приклади розв’язування задач

33. Розв’язати методом виключення систему диференціальних рівнянь:

$$\text{а)}\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 3y; \end{cases} \qquad \text{б)}\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y + \cos t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - y. \end{cases}.$$

►а) Маємо лінійну однорідну систему. Диференціюючи по t перше рівняння, одержимо $\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{dx}{dt} + 2\dfrac{dy}{dt}$. Підставимо в одержану рівність з другого рівняння системи

$\frac{dy}{dt} = 4x + 3y$, потім з першого рівняння $y = \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt} - x\right)$. Таким чином, ми вилучили з рівняння $\frac{dy}{dt}$ і y та одержали $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + 2\left(4x + \frac{3}{2}\left(\frac{dx}{dt} - x\right)\right)$. Після перетворень отримуємо ЛОДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами відносно невідомої функції $x(t)$ $x'' - 4x' - 5x = 0$. Розв'язуємо його стандартним методом. Характеристичне рівняння $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$ має різні дійсні корені $\lambda_1 = -1$ і $\lambda_2 = 5$, отже, загальним розв'язком буде $x = C_1e^{-t} + C_2e^{5t}$. Далі знаходимо $x' = -C_1e^{-t} + 5C_2e^{5t}$ для того, щоб підставити x і x' у вираз для визначення функції $y(t)$. Маємо

$y = \frac{1}{2}\left(-C_1e^{-t} + 5C_2e^{5t} - C_1e^{-t} - C_2e^{5t}\right)$, або $y = -C_1e^{-t} + 2C_2e^{5t}$.

Загальним розв'язком даної системи буде

$$\begin{cases} x = C_1e^{-t} + C_2e^{5t}; \\ y = -C_1e^{-t} + 2C_2e^{5t}. \end{cases} \blacktriangleleft$$

►б) Розв'яжемо цю лінійну неоднорідну систему методом виключення. Диференціюємо по t перше рівняння $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - \sin t$, підставимо в одержану рівність з другого рівняння системи

$$\frac{dy}{dt} = -2x - y = -2x - \left(\frac{dx}{dt} - x - \cos t\right) = -\frac{dx}{dt} - x + \cos t.$$

Одержали

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} - \frac{dx}{dt} - x + \cos t - \sin t, \quad \text{або} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + x = \cos t - \sin t,$$

тобто ЛНДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду. Характеристичне рівняння для відповідного ЛОДР $\lambda^2 + 1 = 0$ має комплексно спряжені корені $\lambda_{1,2} = \pm i$, отже, загальним розв'язком ЛОДР буде $\overline{x} = C_1 \cos t + C_2 \sin t$, а частинний розв'язок ЛНДР слід шукати у вигляді $x^* = t\left(A\cos t + B\sin t\right)$. Тоді

$$\frac{dx^*}{dt} = A\cos t + B\sin t + t\left(-A\sin t + B\cos t\right),$$

$$\frac{d^2x^*}{dt^2} = -A\sin t + B\cos t - A\sin t + B\cos t + t\left(-A\cos t - B\sin t\right).$$

Підстановка цих виразів у ліву частину ЛНДР приводить до рівності $-2A\cos t + 2B\sin t = \cos t - \sin t$, звідки $A = B = \frac{1}{2}$.

Враховуючи, що $x = \overline{x} + x^*$, записуємо

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \frac{t}{2}\left(\cos t + \sin t\right).$$

Пропонуємо читачам самостійно виконати викладки для одержання другої невідомої функції $y(t)$, а ми лише наведемо остаточний результат

$$y=\left(C_2-C_1-\frac{1}{2}\right)\cos t+\left(-C_1-C_2-t+\frac{1}{2}\right)\sin t.$$

Загальним розв'язком даної системи буде

$$\begin{cases} x=C_1\cos t+C_2\sin t+\dfrac{t}{2}\left(\cos t+\sin t\right), \\ y=\left(C_2-C_1-\dfrac{1}{2}\right)\cos t+\left(-C_1-C_2-t+\dfrac{1}{2}\right)\sin t. \end{cases}$$ ◄

Завдання для самостійного розв'язання

26. Розв'язати методом виключення систему диференціальних рівнянь:

а) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=3x-2y, \\ \dfrac{dy}{dt}=2x+8y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-x+8y, \\ \dfrac{dy}{dt}=x+y; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=4x-y-5t+1, \\ \dfrac{dy}{dt}=x+2y+t-1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y-\cos t, \\ \dfrac{dy}{dt}=-x+\sin t. \end{cases}$

3.2 Розв'язування лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами за допомогою матриць

Розглянемо систему n лінійних диференціальних рівнянь з n невідомими функціями виду

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n, \\ ...., \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n, \end{cases} \tag{92}$$

де коефіцієнти a_{ik} – сталі числа, $i = 1, 2, ..., n;\quad k = 1, 2, ..., n.$

Будемо шукати розв'язок системи у вигляді

$$x_1 = p_1 e^{\lambda t},\quad x_2 = p_2 e^{\lambda t}, ...,\quad x_n = p_n e^{\lambda t},$$

де $\lambda = const,\quad p_i = const\quad (i = 1, 2, ..., n).$ Підставимо $x_1,\ x_2, ...,\ x_n$ в систему диференціальних рівнянь і одержимо систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно $p_1,\quad p_2, ..., p_n$

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)p_1 + a_{12}p_2 + ... + a_{1n}p_n = 0, \\ a_{21}p_1 + (a_{22} - \lambda)p_2 + ... + a_{2n}p_n = 0, \\ ...., \\ a_{n1}p_1 + a_{n2}p_2 + ... + (a_{nn} - \lambda)p_n = 0, \end{cases}$$

матрицю якої позначимо через A.

Система повинна мати ненульовий розв'язок. Отже, її визначник дорівнює нулю, що приводить до рівняння n-го порядку для визначення λ

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & ... & a_{2n} \\ .... & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Останнє рівняння є характеристичним рівняння матриці A і його ж надалі ми будемо називати *характеристичним рівнянням системи диференціальних рівнянь*. Припустимо, що це характеристичне рівняння має n різних коренів $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n,$ які є власними числами матриці A. Із лінійної алгебри відомо, що кожному власному числу λ_k відповідає власний вектор $\vec{p}_k = \left(p_{1k}, p_{2k}, ..., p_{nk}\right)$, $k = 1, 2, ..., n$. Така система n власних векторів $\vec{p}_1, \vec{p}_2, ..., \vec{p}_n$ є лінійно незалежною і її можна прийняти за базис. Матрицю P переходу до нового базису одержимо, записуючи координати кожного власного вектора $\vec{p}_k = \left(p_{1k}, p_{2k}, ..., p_{nk}\right)$, $k = 1, 2, ..., n$ у відповідний стовпець, тобто $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$.

Враховуючи, що кожному значенню λ_k відповідає функція виду $\overline{x}_k = C_k e^{\lambda_k t}$, $k = 1, 2, ..., n$, де C_k – довільні сталі, одержимо фундаментальну систему розв'язків $e^{\lambda_k t}$, $k = 1, 2, ..., n$. Загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь легко записати у матричному вигляді $X = P\overline{X}$, де $\overline{X}$ – матриця-стовпець, елементами якої є функції $\overline{x}_k = C_k e^{\lambda_k t}$, тобто $\overline{X} = \begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ C_2 e^{\lambda_2 t} \\ \ldots \\ C_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$.

Отже, загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь у матричному записі буде наступним

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ C_2 e^{\lambda_2 t} \\ \ldots \\ C_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}, \text{ звідки}$$

$$\begin{cases} x_1 = C_1 p_{11} e^{\lambda_1 t} + C_2 p_{12} e^{\lambda_2 t} + \ldots + C_n p_{1n} e^{\lambda_n t}, \\ x_2 = C_1 p_{21} e^{\lambda_1 t} + C_2 p_{22} e^{\lambda_2 t} + \ldots + C_n p_{2n} e^{\lambda_n t}, \\ \dotfill, \\ x_n = C_1 p_{n1} e^{\lambda_1 t} + C_2 p_{n2} e^{\lambda_2 t} + \ldots + C_n p_{nn} e^{\lambda_n t}. \end{cases}$$

Приклади розв'язання задач

34. Знайти загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь:

а) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 7x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 6x + 4y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x - 12y - z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 3y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = -4x + 12y + 3z. \end{cases}$.

►а) Тут ми маємо лінійну однорідну систему зі сталими коефіцієнтами. Правій частині відповідає матриця $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$.

Знайдемо власні числа матриці A, розв'язавши характеристичне рівняння $\begin{vmatrix} 7-\lambda & 3 \\ 6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$, тобто $\lambda^2 - 11\lambda + 10 = 0$.

Знайдемо корені цього рівняння $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 10$ і запишемо матрицю $\overline{X} = \begin{pmatrix} C_1 e^t \\ C_2 e^{10t} \end{pmatrix}$, де C_1, C_2 – довільні сталі.

Знайдемо тепер власні вектори матриці A.

При $\lambda_1 = 1$ система рівнянь для визначення власного вектора має вигляд

$$\begin{cases} (7-1)p_1 + 3p_2 = 0, \\ 6p_1 + (4-1)p_2 = 0. \end{cases}$$

Ця система зводиться до одного рівняння $2p_{11} + p_{21} = 0$. Нам потрібно знайти який-небудь ненульовий розв'язок, наприклад, можемо покласти $p_{11} = 1$ і обчислити $p_{21} = -2p_{11} = -2$. Маємо перший власний вектор $\vec{p}_1 = (1; -2)$.

При $\lambda_2 = 10$ система рівнянь для визначення власного вектора має вигляд

$$\begin{cases} (7-10)p_{12} + 3p_{22} = 0, \\ 6p_{12} + (4-10)p_{22} = 0. \end{cases}$$

Ця система зводиться до одного рівняння $p_{12} - p_{22} = 0$ або $p_{12} = p_{22}$. Один з ненульових розв'язків $p_{12} = 1$, $p_{22} = 1$ визначає другий власний вектор $\vec{p}_2 = (1;\ 1)$

Запишемо координати власних векторів у відповідні стовпці матриці $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Ще раз зауважимо, що координати першого власного вектора записані у перший стовпець, а координати другого власного вектора – у другий стовпець.

Побудуємо тепер загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь у матричному записі: $X = P\overline{X}$, де матриця $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, а матриці P і $\overline{X}$ ми уже записали вище. Тоді $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 e^{t} \\ C_2 e^{10t} \end{pmatrix}$. Виконаємо множення матриць і одержимо шуканий загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{10t}, \\ y = -2C_1 e^t + C_2 e^{10t}. \end{cases} \blacktriangleleft$$

►б) Тут правій частині відповідає матриця

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -12 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ -4 & 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

Запишемо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -12 & -1 \\ 1 & -3-\lambda & -1 \\ -4 & 12 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{, звідки}$$

$$(\lambda - 6)(\lambda^2 - 9) - 48 - 12 + 12 + 4\lambda + 72 - 12\lambda + 36 - 12\lambda = 0,$$

або $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$. Оскільки сума всіх коефіцієнтів цього кубічного рівняння дорівнює нулю, робимо висновок, що один з коренів $\lambda_1 = 1$. Виконаємо ділення многочлена $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$ на $\lambda - 1$ (щоб знайти решту коренів характеристичного рівняння)

$$\begin{array}{l|l} \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 & \lambda - 1 \\ \hline \underline{\lambda^3 - \lambda^2} & \lambda^2 - 5\lambda + 6 \\ \quad -5\lambda^2 + 11\lambda & \\ \quad \underline{-5\lambda^2 + 5\lambda} & \\ \qquad\quad 6\lambda - 6 & \\ \qquad\quad \underline{6\lambda - 6} & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

Розв’язавши квадратне рівняння $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, знайдемо корені $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Власні числа матриці A «породжують» лінійно незалежну систему функцій e^t, e^{2t}, e^{3t}, тому можна записати матрицю $\overline{X} = \begin{pmatrix} C_1 e^t \\ C_2 e^{2t} \\ C_3 e^{3t} \end{pmatrix}$, де C_1, C_2, C_3 – довільні сталі.

Знайдемо тепер власні вектори матриці A.

При $\lambda_1 = 1$ система рівнянь для визначення власного вектора має вигляд

$$\begin{cases} 5p_{11} - 12p_{21} - p_{31} = 0, \\ p_{11} - 4p_{21} - p_{31} = 0, \\ -4p_{11} + 12p_{21} + 2p_{31} = 0. \end{cases}$$

Оскільки визначник цієї лінійної однорідної системи дорівнює нулю, досить розглянути які-небудь два лінійно незалежні рівняння, наприклад, два перші

$$\begin{cases} 5p_{11} - 12p_{21} - p_{31} = 0, \\ p_{11} - 4p_{21} - p_{31} = 0. \end{cases}$$

Нам потрібно знайти який-небудь ненульовий розв'язок, наприклад, можемо покласти $p_{21} = 1$ і розв'язати систему

$$\begin{cases} 5p_{11} - p_{31} = 12, \\ p_{11} - p_{31} = 4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_{11} = 2, \\ p_{31} = -2. \end{cases}$$

Маємо перший власний вектор $\vec{p}_1 = (2;\ 1; -2)$.

При $\lambda_2 = 2$ розв'язуємо систему $\begin{cases} 4p_{12} - 12p_{22} - p_{32} = 0, \\ p_{12} - 5p_{22} - p_{32} = 0, \\ -4p_{12} + 12p_{22} + p_{32} = 0. \end{cases}$

Тут знову досить розглянути два перші рівняння (третє є їх наслідком), де покласти, наприклад, $p_{22} = 1$. Тоді

$$\begin{cases} 4p_{12} - p_{32} = 12, \\ p_{12} - p_{32} = 5. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_{12} = 7/3, \\ p_{32} = -8/3. \end{cases}$$

Отримали власний вектор $\vec{p} = (7/3; \quad 1; -8/3)$. Для зручності домножимо цей вектор на 3 і одержимо $\vec{p}_2 = (7; \quad 3; -8)$.

Аналогічно при $\lambda_3 = 3$ розв'язуємо систему

$$\begin{cases} 3p_{13} - 12p_{23} - p_{33} = 0, \\ p_{13} - 6p_{23} - p_{33} = 0, \\ -4p_{13} + 12p_{23} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_{13} = 3, \\ p_{23} = 1, \\ p_{33} = -3. \end{cases}$$

Отже, $\vec{p}_3 = (3; \quad 1; -3)$.

Запишемо координати власних векторів у відповідні стовпці матриці $P = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -8 & -3 \end{pmatrix}$. Побудуємо тепер загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь у матричному записі $X = P\overline{X}$, де $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Тоді $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -8 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 e^t \\ C_2 e^{2t} \\ C_3 e^{3t} \end{pmatrix}$.

Отже, шуканий загальний розв'язок матиме вигляд

$$\begin{cases} x = 2C_1 e^t + 7C_2 e^{2t} + 3C_3 e^{3t}, \\ y = C_1 e^t + 3C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}, \\ z = -2C_1 e^t - 8C_2 e^{2t} - 3C_3 e^{3t}. \end{cases}$$

35. Знайти частинний розв'язок задачі Коші:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y, \quad x(0) = -1, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 3y, \ y(0) = 4. \end{cases}$$

► Правій частині системи відповідає матриця $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Характеристичне рівняння $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$, тобто $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$, має корені $\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 5$, тому матриця $\overline{X} = \begin{pmatrix} C_1 e^{-t} \\ C_2 e^{5t} \end{pmatrix}$, де C_1, C_2 – довільні сталі.

Знайдемо тепер власні вектори матриці A.

При $\lambda_1 = -1$ система рівнянь для визначення власного вектора має вигляд $\begin{cases} 2p_{11} + 2p_{21} = 0, \\ 4p_{11} + 4p_{21} = 0, \end{cases} \Rightarrow p_{21} = -p_{11}$. Перший власний вектор $\vec{p}_1 = (1; -1)$.

При $\lambda_2 = 5$ система рівнянь для визначення власного вектора має вигляд $\begin{cases} -4p_{12} + 2p_{22} = 0, \\ 4p_{12} - 2p_{22} = 0, \end{cases} \Rightarrow p_{22} = 2p_{12}$. Другий власний вектор $\vec{p}_2 = (1;\ 2)$.

Запишемо координати власних векторів у відповідні стовпці матриці $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Побудуємо тепер загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь у матричному записі $X = P\overline{X}$, тобто

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 e^{-t} \\ C_2 e^{5t} \end{pmatrix}.$$

Одержимо загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t}, \\ y = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{5t}. \end{cases}$$

З початкових умов визначаємо сталі C_1, C_2

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = -1, \\ -C_1 + 2C_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -2, \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Отже, шуканий частинний розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x = -2_1 e^{-t} + e^{5t}, \\ y = 2e^{-t} + 2e^{5t}. \end{cases} \blacktriangleleft$$

Завдання для самостійного розв’язання

27. Розв’язати за допомогою характеристичного рівняння систему диференціальних рівнянь:

а) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x + 4y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 6y; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 3y. \end{cases}$

28. Знайти частинний розв’язок системи диференціальних рівнянь:

а) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y,\ x(0) = 2, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y,\ y(0) = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y,\ x(0) = 5, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y,\ y(0) = -1. \end{cases}$

Відповіді до завдань для самостійного розв'язування

1. а) $C(1 + x^2) = 1 + e^y$; **б)** $C(x^2 + 1) = \sqrt{y^2 + 3}$;

в) $\ln^2 y = 2\ln|Cx|$; **г)** $y^2 + 2 = C\sqrt{(x^2 + 3)^3}$;

д) $tg^2 x - ctg^2 y = C.$

2. 1590 років. **3.** $-20\dfrac{\ln 35}{\ln \frac{5}{7}} \approx 211{,}33$.

4. $y = 2x^2 - 3x - 5$. **5.** $A_t = A_0 e^{-kt}$.

6. а) $(y^2 - 3)(2x + 1) = -1$; **б)** $\cos x \cdot \sqrt{2y - 3} = 3$;

в) $\frac{y^2}{2} - y = e^x - 1;$ **г)** $y = 2.$

7. а) $x^3 e^y - y = C;$ **б)** $xe^y + \sin y = C;$

в) $-\frac{1}{2}\cos 2x - 2\sin(x+y) = C;$ **г)** $xy^3 + \sin x + e^y = C;$

д) $yx - \ln y = C;$ **е)** $3yx^2 + \frac{x^3}{3} + 3x + xy^2 + 2xy = C.$

8. а) $\sin\frac{y}{x} = Cx;$ **б)** $\frac{y+2x}{y+3x} = Cx;$ **в)** $y^2 = 2x^2 \ln|Cx|;$

г) $\ln|Cx| = ctg\left(\frac{1}{2}\ln\frac{y}{x}\right);$ **д)** $\sin\frac{y}{x} = Cx.$

9. а) $y = \frac{x}{\ln(ex)};$ **б)** $y = 3x^2 - x;$ **в)** $\frac{\ln 2}{x} = \ln\frac{y}{x}.$

10. а) $\frac{y-3x}{(y-4x-1)^2} = C;$ **б)** $\frac{(y+4x+6)^2}{y-3x-1} = C;$

в) $\frac{y-x+1}{(y-3x+5)^2} = C;$ **г)** $\frac{y+3x-7}{(y+x-5)^2} = C.$

11. а) $y = x^2 + \frac{C}{x};$ **б)** $y = \sin x\cos x + C\cos x;$ **в)** $y = \frac{x^3}{2} + Cx;$

г) $y = x\ln x + \frac{C}{x};$ **д)** $y = (1+x^2)(x+C).$

12. а) $y = e^x(x+1);$ **б)** $y = x\ln x + \frac{3}{x};$ **в)** $y = \frac{4}{x^2};$

г) $y = x^2 + \frac{1}{2};$ **д)** $y = \frac{(x+1)^4}{2}.$

13. а) $\frac{1}{y^2}=x^2+1+Ce^{x^2}$; **б)** $\frac{1}{y}=Ce^{-\frac{x^2}{2}}-3$;

в) $\frac{1}{y}=\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{2}+Cx^2$.

14. а) $y=\frac{\sec x}{x^3+1}$; **б)** $\frac{1}{y}=\frac{4x^2-x^5}{3}$.

15. а) $y=-x\sin x-2\cos x+C_1x+C_2$;

б) $y=C_1x\ln x-C_1x+C_2$; **в)** $x=\frac{y^3}{3}-C_1y+C_2$;

г) $y=C_1\ln|x|+C_2$; **д)** $y=(x+C_1)\ln|x|-2x+C_2$.

16. а) $y=\frac{1}{1-8x}$; **б)** $y=\frac{1}{9}x^3+\frac{2}{3}\ln|x|+\frac{8}{9}$;

в) $y=\frac{1}{9}x^3+\frac{2}{3}\ln|x|+\frac{8}{9}$; **г)** $y=-\ln|1-x|$;

д) $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{13}{6}$.

17. $y''\cdot\sin 2x-2y'\cdot\cos 2x=0$.

18. $y=-x^2-e^{x-1}$.

19. а) $y=C_1+C_2e^{3x}+C_3e^{x}$;

б) $y=C_1e^{x}+C_2xe^{x}+C_3e^{-2x}$;

в) $y=C_1+C_2x+C_3e^{7x}+C_4e^{-7x}$;

г) $y=C_1+C_2e^{-2x}+C_3e^{-3x}$;

д) $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x$.

20. а) $y = e^{11x}(1-11x)$; **б)** $y = \sin x$; **в)** $y = -e^{x} + 2e^{2x}$;

г) $y = e^{x}\cos x$; **д)** $y = 9 - 2e^{-4x}$**.**

21. а) $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + 2\sin 2x\ln\left|tgx\right|$;

б) $y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x - 3x\cos 3x + \sin 3x\cdot\ln\left|\sin 3x\right|$;

в) $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + xe^{-x}(\ln x - 1)$.

22. а) $y = \cos 3x(1 - \ln\left|\cos 3x\right|) + 3x\sin 3x$;

б) $y = \sin\frac{x}{2}\left(2 + \ln\left|tg\,\frac{x}{4}\right|\right)$;

в) $y = e^{x}\ln\left|1 + e^{-x}\right| - xe^{2x} + e^{2x}\ln\left|1 + e^{x}\right|$.

23. а) $y = C_1e^{4x} + C_2e^{3x} + 3xe^{4x}$;

б) $y = C_1 + C_2e^{4x} + 2x^2 - x$;

в) $y = (C_1 + C_2x + 2x^2)e^{x}$;

г) $y = C_1e^{x} + C_2e^{-2x} - 2\cos x + 3\sin x$;

д) $y = (C_1 + C_2x + 3x^3 + 4x^2)e^{-x}$.

24. а) $y = e^{x} + x^2$; **б)** $y = \frac{1}{3}\sin 2x - \frac{1}{3}\sin x - \cos x$;

в) $y = 2 + 2e^{-x} + \frac{1}{3}x^3$; **г)** $y = (2x + 2)e^{-3x} + 2e^{3x}$;

д) $y = (\frac{1}{2}x^2 + x)e^{4x}$.

25. а) $y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + x\sin 3x + 3e^{-2x}$;

б) $y = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} + 2x^2e^{-2x} + 3x^2 - 2x + 1$.

26. а) $\begin{cases} x = 2C_1e^{4t} - C_2e^{7t}, \\ y = -C_1e^{4t} + 2C_2e^{7t}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x = 4C_1e^{-3t} + 2C_2e^{3t}, \\ y = -C_1e^{3t} + C_2e^{3t}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x = C_1e^{3t} + C_2te^{3t} + t, \\ y = C_1e^{3t} + C_2(t-3)e^{3t} - t; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x = C_1\cos t + C_2\sin t - t\cos t, \\ y = -C_1\sin t + C_2\cos t - t\sin t. \end{cases}$

27. а) $\begin{cases} x = C_1e^{-t} + 3C_2e^{7t}, \\ y = -C_1e^{-t} + 5C_2e^{7t}; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x = 2C_1 + C_2e^{7t}, \\ y = -C_1 + 3C_2e^{7t}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x = C_1e^{-t} + C_2e^{5t}, \\ y = -C_1e^{-t} + 2C_2e^{5t}. \end{cases}$

28. а) $\begin{cases} x = \dfrac{5}{2}e^{3t} - \dfrac{3}{2}e^{-t}, \\ y = \dfrac{5}{4}e^{3t} + \dfrac{3}{4}e^{-t}; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x = C_1e^{5t} - 2C_2e^{-t}, \\ y = C_1e^{5t} + C_2e^{-t}. \end{cases}$

Література

1. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз: Підручник: У двох частинах. Частина I. – К.: Либідь, 1993. – 320 с.
2. Ляшко І.І., Ємельянов В.Ф., Боярчук О.К. Математичний аналіз: Підручник: У двох частинах. Частина I. – К.: Вища школа, 1993. – 476 с. – Частина 2. –К.: Вища школа, 1993. –376 с.
3. Вступ до математичного аналізу: навчальний посібник / В. М. Мойсишин, Б. С. Сікора, Т. Г. Лавинюкова. – Івано-Франківськ: ІФНТУНГ, 2010. – 162 с.
4. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навчальний посібник. – Київ.: Видавництво А.С.К., 2004. – 648 с.
5. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г. Кривошеєва Г.М. та ін. Вища математика у прикладах та задачах. Ч.1. Алгебра і геометрія. Диференціальне числення функцій однієї змінної. – Харків: ХНУРЕ, 2002. – 498 с.
6. Тестові завдання з вищої математики: Навчальний посібник / С.І. Гургула, В.М. Мойсишин, В.О. Воробйова та ін.; За ред. С.І. Гургули, В.М. Мойсишина. – Івано-Франківськ: Факел, 2008. – 737 с.
7. Збірник завдань для розрахункових робіт з вищої математики / С.І. гургула, В.М. Мойсишин, С.С. Гулька та ін.; За ред. С.І. Гургули, В.М. Мойсишина. – Івано-Франківськ: ІФНТУНГ, 2009. – 451 с.

УДК 51(075.8)
П 69

Мойсишин Василь Михайлович, Савчук Ярослав Іванович, Бандура Андрій Іванович, Гресько Катерина Василівна, Гураль Інеса Михайлівна, Кулініч Галина Михайлівна, Лялюк Дмитро Федорович, Овчар Ігор Євгенійович, Ріпецький Роман Йосипович, Тимків Іван Романович, Тирлич Володимир Васильович, Шегда Любов Михайлівна

ПРАКТИКУМ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ
Частина 1

Навчальний посібник

За редакцією В.М.Мойсишина, Я.І.Савчука,

Відповідальний за випуск В.М. Мойсишин
Набір та макетування І.Ф. Демків
Комп'ютерна правка І.Ф. Демків

ISBN 978-966-694-410-1