МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу

С. І. Гургула, Я. І. Савчук

ЗБІРНИК ЗАДАЧ СТУДЕНТСЬКИХ МАТЕМАТИЧНИХ ОЛІМПІАД

Івано-Франківськ
2014

УДК 51
ББК 22.1
Г 95

Рецензент:
Собкович Р. І. – кандидат фізико-математичних наук;
доцент Прикарпатського національного
університету ім. В. Стефаника

Рекомендовано методичною радою університету
(протокол № від 2014)

Гургула С. І., Савчук Я. І.
Г 95 Збірник задач студентських математичних олімпіад. – Івано-Франківськ: ІФНТУНГ, 2014. – с.

МВ 027070855 – – 2014

Подаються умови, відповіді, вказівки і розв’язки більш ніж 600 задач, які пропонувались на олімпіадах з математики різних рівнів серед студентів технічних ВНЗ. До збірника включено також ряд оригінальних задач, які не пропонувались на олімпіадах.

Книгу адресовано студентам, які готуються до участі в математичних олімпіадах. Її можна використовувати в роботі студентських гуртків, вона буде корисною всім, хто цікавиться математикою і любить нестандартні задачі.

УДК 51
ББК 22.1

МВ 02070855 – – 2014

ЗМІСТ

УМОВИ

1 Вектори

1.1 Є три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, жодні два з яких неколінеарні. Відомо, що вектор $\vec{a}+\vec{b}$ колінеарний вектору $\vec{c}$, а вектор $\vec{b}+\vec{c}$ колінеарний вектору $\vec{a}$. Знайти довжину вектора $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

1.2 Нехай A, B, C – довільні точки простору. Довести, що існує єдина точка O така, що $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

1.3 Нехай $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – вершини правильного n-кутника, точка O – його центр. Знайти суму векторів $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}$.

1.4 Нехай $ABCD$ – прямокутник і M – довільна точка простору. Довести: а) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}$;

б) $\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MC}^2=\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MD}^2$.

1.5 Нехай AA_1, BB_1, CC_1 – бісектриси трикутника ABC. Довести, що якщо $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}$, то трикутник правильний.

1.6 Довести, що для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ справедлива рівність:

$$3\left(\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2\right)=\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)^2+\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2+\left(\vec{b}-\vec{c}\right)^2+\left(\vec{c}-\vec{a}\right)^2.$$

1.7 Довести, що вектори $\left(\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{b}\right)\times\vec{b}$ та $\vec{a}\times\vec{b}$ колінеарні.

1.8 На площині розміщені два кола радіусів r_1 і r_2 з центрами O_1 і O_2 відповідно. На першому колі взято точку A_1, а на другому – A_2 так, що вектори $\overrightarrow{O_1A_1}$ і $\overrightarrow{O_2A_2}$ колінеарні і протилежно напрямлені. Яку лінію опише середина відрізка A_1A_2, якщо точка A_1 пробіжить перше коло?

1.9 Нехай $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – неколінеарні вектори, S – площа паралелограма, побудованого на них. Довести, що $S = \sqrt{\vec{c} \cdot \vec{b}}$, де $\vec{c} = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{a}$.

1.10 Знайти кут між мимобіжними медіанами граней правильного тетраедра.

1.11 Три різних одиничних компланарних вектори мають спільний початок в точці, що лежить на прямій L. Довести, що якщо кінці всіх векторів знаходяться по один бік від L, то модуль їх суми більший від одиниці.

1.12 Довести, що сума косинусів двогранних кутів при всіх ребрах довільної трикутної піраміди не перевищує числа 2.

1.13 Точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ розбивають коло радіуса R на n рівних дуг; B − довільна точка цього ж кола. Знайти модуль суми векторів $\overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{BA_2} + \ldots + \overrightarrow{BA_n}$.

1.14 Три вектори $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ задовольняють умові

$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OA} = \vec{0}.$$

Довести: а) Вектори $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ – компланарні;

б) Точки A, B, C лежать на одній прямій.

1.15 Із однієї точки проведені три некомпланарні вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Довести, що площина, яка проходить через кінці цих векторів, перпендикулярна до вектора $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}$.

1.16 На всіх сторонах опуклого n-кутника $A_1 A_2 \ldots A_n$ зовні побудовано правильні трикутники $A_1 A_2 B_n$, $A_2 A_3 B_1$, $A_3 A_4 B_2, \ldots, A_n A_1 B_{n-1}$. Довести, що

$$\overrightarrow{A_1 B_1} + \overrightarrow{A_2 B_2} + \ldots + \overrightarrow{A_n B_n} = \vec{0}.$$

1.17 Об'єм тетраедра $DABC$ дорівнює V. Точки K, L, M, N такі, що $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CL} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{CD}$. Знайти об'єм тетраедра $LKNM$.

1.18 Довжина вектора, який дорівнює сумі даних десяти векторів, більша ніж довжина суми будь-яких дев'яти з них. Довести, що існує така вісь, що проекція кожного з даних десяти векторів на цю вісь додатна.

1.19 Вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ некомпланарні. Довести, що вектори $\vec{b}_i = \sum_{j=1}^{3} (\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j)\vec{a}_j$, $i = 1, 2, 3,$ також некомпланарні.

1.20 Точки K, L, M, N не лежать в одній площині. З'ясувати, при яких дійсних значеннях параметра α існує точка O така, що

$$2\overrightarrow{OK} + 3\overrightarrow{OL} + 5\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{ON}.$$

1.21 Задано трикутник ABC. Вектор $\overrightarrow{CA}$ повернутий навколо точки C на кут $+90^\circ$, а вектор $\overrightarrow{CB}$ – на кут -90°. Отримані вектори позначені через $\overrightarrow{CA_1}$ і $\overrightarrow{CB_1}$. Довести, що медіана трикутника CA_1B_1, проведена із вершини C, перпендикулярна до прямої AB.

1.22 Нехай $ABCD$ – будь-який чотирикутник, O – точка перетину відрізків, які з'єднують середини протилежних сторін цього чотирикутника. Довести, що

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}.$$

1.23 Довести, що для того, щоб діагоналі чотирикутника були взаємно перпендикулярними необхідно і достатньо, щоб суми квадратів протилежних сторін були рівними.

1.24 Довести, що коли сума квадратів сторін чотирикутника дорівнює сумі квадратів його діагоналей, то цей чотирикутник є паралелограмом.

1.25 Для довільних дійсних чисел x_i, $i = 1,2,3,4,5,6$, порівняти числа

$$A = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_4 & x_5 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ x_5 & x_6 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ x_4 & x_6 \end{vmatrix}^2$$

та $B = \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)\left(x_4^2 + x_5^2 + x_6^2\right)$

і виявити, коли $A = B$.

1.26 Для довільних дійсних чисел x_i, $i = 1,2,3,4,5,6$, порівняти числа $A = \left(x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6\right)^2$ та $B = \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)\left(x_4^2 + x_5^2 + x_6^2\right)$ і вияснити, коли $A = B$.

1.27 Нехай $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ – одиничні вектори зовнішніх нормалей до граней опуклого многогранника, площі яких відповідно рівні $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Довести, що

$$S_1\vec{e}_1 + S_2\vec{e}_2 + \ldots + S_n\vec{e}_n = \vec{0}.$$

1.28 Нехай $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ – одиничні вектори зовнішніх нормалей до сторін опуклого многокутника, довжини яких відповідно рівні $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Довести, що

$$a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \ldots + a_n\vec{e}_n = \vec{0}.$$

1.29 Нехай O – центр кола, вписаного в многокутник $A_1A_2\ldots A_n$. Довести, що

$$\overrightarrow{OA_1} \cdot \sin A_1 + \overrightarrow{OA_2} \cdot \sin A_2 + \ldots + \overrightarrow{OA_n} \cdot \sin A_n = \vec{0}.$$

1.30 Нехай довжини сторін трикутника ABC – BC, AC, AB відповідно рівні a, b, c. Довести, що центр вписаного в трикутник кола O єдина точка, для якої виконана рівність

$$a \cdot \overrightarrow{OA} + b \cdot \overrightarrow{OB} + c \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}.$$

1.31 Нехай O – довільна точка всередині трикутника ABC. Позначимо площі трикутників OBC, OAC, OAB через S_1, S_2, S_3 відповідно. Довести, що

$$S_1 \cdot \overrightarrow{OA} + S_2 \cdot \overrightarrow{OB} + S_3 \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}.$$

1.32 Довести, що для довільних невід'ємних чисел $a,\ b,\ c$, таких, що $a+b+c=3$ виконується нерівність

$$\left(a^2+b+c\right)\left(1+b+c\right)\geq 9.$$

1.33 Довести, що для довільних $a\neq 0,\ b\neq 0,\ c\neq 0$ виконується нерівність

$$\left(a^{2014}+b^{2014}+c^{2014}\right)\left(\frac{1}{a^{2012}}+\frac{1}{b^{2012}}+\frac{1}{c^{2012}}\right)\geq\left(a+b+c\right)^2.$$

1.34 Довести, що нерівність

$$\sqrt{a+1}+\sqrt{2a-3}+\sqrt{50-3a}<12$$

виконується при всіх значеннях a, при яких визначена її ліва частина.

1.35 Довести нерівність

$$abc^2+cab^2+bca^2\leq a^4+b^4+c^4.$$

2 Визначники, матриці

2.1 Дев'ять додатних цифр можна розташувати у виді визначника 9! способами. Знайти суму всіх таких визначників.

2.2 Чи можуть усі шість членів у розкладі визначника третього порядку бути одночасно додатними?

2.3 Обчислити визначник $\Delta=\left|a_{ij}\right|$, де $a_{ij}=\left|i-j\right|$, $i=1,2,\ldots,n$, $j=1,2,\ldots,n$.

2.4 Обчислити визначник матриці $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$, де $a_{ij}=\min(i,j)$.

2.5 Обчислити визначник

$$\Delta=\begin{vmatrix} C_n^0 & C_n^1 & \ldots & C_n^k \\ C_{n+1}^0 & C_{n+1}^1 & \ldots & C_{n+1}^k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_{n+k}^0 & C_{n+k}^1 & \ldots & C_{n+k}^k \end{vmatrix}.$$

2.6 Нехай α, β, γ – корені рівняння $x^3 + px + q = 0$. Обчислити

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix}.$$

2.7 Обчислити визначник $\Delta_n = |a_{ij}|$, де $a_{ij} = 0$ при $j = i$; $a_{ij} = i$ при $j \neq i$; $1 \le i \le n, 1 \le j \le n$.

2.8 Обчислити визначник $\Delta_n = |a_{ij}|$, де $a_{ij} = 0$ при $j = i$; $a_{ij} = a$ при $j < i$; $a_{ij} = b$ при $j > i$; $1 \le i \le n, 1 \le j \le n$.

2.9 Нехай

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}.$$

Довести, що при $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ справедлива нерівність $|\Delta| \le 1$.

2.10 Обчислити визначник n-го порядку

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

2.11 Числа Фібоначчі визначаються умовами $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ при $n \ge 3$. Довести, що $a_n = \Delta_n$, де Δ_n – визначник n-го порядку

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

2.12 Знайти суму всіх визначників порядку n, в кожному із яких в кожному рядку і в кожному стовпчику один елемент дорівнює 1, а всі інші елементи дорівнюють нулю. Скільки всього таких визначників?

2.13 Задана квадратна матриця 10-го порядку

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 10^{-10} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайти $\det(A - \lambda E)$.

2.14 В квадратній матриці A порядку $2n$ на головній діагоналі стоять нулі, а всі інші елементи дорівнюють ± 1. Довести, що $\det A \neq 0$.

2.15 Елементи квадратної матриці порядку 10 – цілі числа, причому принаймні 92 з них – непарні. Довести, що визначник цієї матриці – парне число.

2.16 Всі елементи квадратної матриці порядку 45 – цілі числа. Відомо, у 1982 з них остача від ділення на 9 дорівнює 1. Довести, що визначник цієї матриці ділиться на 9.

2.17 В дійсній квадратній матриці задані всі елементи, крім тих, що лежать на головній діагоналі. Довести, що на порожніх місцях можна розставити нулі і одиниці так, щоб одержана матриця виявилась невиродженою.

2.18 Матриця $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ така, що
$a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \ldots + a_{ni}a_{nj} = 0$ при $j \neq i$; $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n$.
Довести, що

$$\left|\det A\right| = \sqrt{\left(a_{11}^2 + a_{21}^2 + \ldots + a_{n1}^2\right)\left(a_{12}^2 + a_{22}^2 + \ldots + a_{n2}^2\right)\ldots\left(a_{1n}^2 + a_{2n}^2 + \ldots a_{nn}^2\right)}.$$

2.19 В квадратній матриці A порядку n кожен елемент замінили його алгебраїчним доповненням. Довести, що визначник матриці, що отримали, дорівнює $\left(\det A\right)^{\alpha}$ та знайти α.

2.20 Квадратні матриці A і B при деякому натуральному m задовольняють рівність $\left(AB\right)^m = E$. Чи вірно, що $\left(BA\right)^m = E$ (E – одинична матриця)?

2.21 Чи існують квадратні матриці A і B такі, що $AB - BA = E$ (E – одинична матриця)?

2.22 Обчислити

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{2011}.$$

2.23 Знайти A^{100}, де

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.24 Знайти суму елементів першого рядка матриці

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{10}.$$

2.25 Нехай A – квадратна матриця і $A^k = 0$. Довести, що $\left(E - A\right)^{-1} = E + A + A^2 + \ldots + A^{k-1}$.

2.26 Нехай A – квадратна матриця п’ятого порядку:

$$A=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

де $\lambda \neq 0$. Знайти A^{-1}.

2.27 Обчислити

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n.$$

2.28 Нехай A – квадратна матриця другого порядку, $k > 2$ – натуральне число. Довести, що якщо $A^k = 0$, то і $A^2 = 0$.

2.29 Знайти матрицю X із рівняння $AX = B$, де

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

2.30 Нехай A, B – матриці розміру $n \times n$, E – одинична матриця розміру $n \times n$ і матриця $E - AB$ невироджена. Довести, що матриця $E - BA$ теж невироджена.

2.31 Нехай A – квадратна матриця розміру $n \times n$, E – одинична матриця розміру $n \times n$ і $(E + A)^m = 0$. Довести, що тоді A – невироджена матриця.

2.32 Нехай A – матриця розміру $m \times n$, яка має ранг 1. Довести, що знайдуться матриці B і C розмірів $m \times 1$ і $1 \times n$ відповідно такі, що $A = BC$.

2.33 Знайти матрицю X, яка задовольняє рівнянню

$$\left(2X^2\right)^{-1} = 2X^{-1}.$$

2.34 Спростити матричний вираз

$$(2E - A)^{-1} + (E + A)^{-1} - 3\left(2E + A - A^2\right)^{-1},$$

де A – квадратна матриця порядку n, E – одинична матриця того ж порядку; A^{-1} – матриця, обернена до матриці A.

2.35 Спростити матричний вираз

$$(3E - A)^{-1} + (2E + A)^{-1} - 5\left(6E + A - A^2\right)^{-1},$$

де A – квадратна матриця порядку n, E – одинична матриця того ж порядку; A^{-1} – матриця, обернена до матриці A.

2.36 Довести, що

$$\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & x_3 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & x_n \end{vmatrix} = (x_1 - 1)\dots(x_n - 1)\left(1 + \frac{1}{x_1 - 1} + \dots + \frac{1}{x_n - 1}\right).$$

2.37 Нехай $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Довести, що не існує квадратної матриці третього порядку такої, що $B^2 = A$.

2.38 Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2n+1 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 2n+2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 4n-1 & 0 & \dots & 2n-1 & 0 \\ 4n & 0 & 0 & \dots & 0 & 2n \end{vmatrix}.$$

2.39 Квадратні матриці A і B задовольняють умовам: $A^2 = A$, $B^2 = B$, $AB = BA$. Довести, що $\det(A - B)$ може приймати тільки три значення: -1, 0, 1.

2.40 Довести, що не існує дійсної матриці A розміру 3×3 такої, що

$$3A^2 + 2A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

2.41 Знайти границю $\lim\limits_{n \to \infty} A^n$, де $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1 \\ 0 & 1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$.

3 Многочлени

3.1 Невідомий многочлен $P(x)$ дає при діленні на $x-1$ остачу 2, а при діленні на $x-2$ – остачу 1. Яку остачу дає цей многочлен при діленні на $(x-1)(x-2)$?

3.2 Знайти остачу від ділення многочлена

$$x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243} \quad \text{на} \quad x^2 - 1.$$

3.3 Довести, що якщо многочлен з цілими коефіцієнтами $P(x)$ приймає при чотирьох цілих значеннях x значення 7, то він не може прийняти значення 14 ні при якому цілому значенні x.

3.4 Многочлен з цілими коефіцієнтами $P(x)$ дорівнює 5 при $x = 1$, $x = 2$ і $x = 3$. Чи існує ціле число x, при якому цей многочлен дорівнює 6?

3.5 Довести, що якщо многочлен з цілими коефіцієнтами $P(x)$ приймає при $x = 0$ і $x = 1$ непарні значення, то рівняння $P(x) = 0$ не має цілих коренів.

3.6 Довести, що ні для одного многочлена $P(x)$ з цілими коефіцієнтами не можуть виконуватись рівності $P(7)=5$, $P(15)=9$.

3.7 Чи існує многочлен з цілими коефіцієнтами $P(x)$ такий, що $P(20)=P(12)=2012$, а $P(2012)$ дорівнює 20 або 12?

3.8 Довести, що многочлен $P(x)$ з натуральними коефіцієнтами не може при всіх натуральних значеннях x приймати значення, рівні степеням двійки з натуральним показником, якщо тільки $P(x) \neq const$.

3.9 Нехай $P(x)$ – многочлен з цілими коефіцієнтами, який приймає значення 5 при п'яти цілих значеннях x. Довести, що $P(x)$ не має цілих коренів.

3.10 Нехай $P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ – многочлен з цілими коефіцієнтами. Відомо, що $P(0)$ і $P(5)$ – непарні числа. Довести, що $P(x)$ не може мати раціональних коренів.

3.11 Многочлен з цілими коефіцієнтами $P(x)$ приймає значення 2 при чотирьох різних цілих значеннях x. Довести, що ні при яких цілих значеннях x цей многочлен не приймає значень 1, 3, 5, 7 і 9.

3.12 Довести, що якщо многочлен сьомого степеня з цілими коефіцієнтами $P(x)$ при 7 цілих значеннях x приймає значення +1 і -1, то його неможливо представити у виді добутку двох многочленів з цілими коефіцієнтами.

3.13 Довести, що не існує такого многочлена з цілими коефіцієнтами $P(x)$, відмінного від константи, що всі числа $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, ... є простими.

3.14 Знайти всі многочлени $P(x)$, які задовольняють умову $P(0)=0$ і тотожність

$$P(x) \equiv \frac{1}{2}\left(P(x+1)+P(x-1)\right).$$

3.15 Знайти всі многочлени $P(x)$, які задовольняють тотожність $xP(x-1) \equiv (x-2)P(x)$.

3.16 Знайти всі многочлени $P(x)$, які задовольняють тотожність $(x-1)P(x+1)-(x+2)P(x) \equiv 0$.

3.17 Знайти всі многочлени $P(x)$, для яких виконується тотожність $(x-2012)P(x) \equiv xP(x-1)$.

3.18 Знайти всі ненульові многочлени $P(x)$, які задовольняють тотожність $P(x^2) \equiv (P(x))^2$.

3.19 Знайти всі ненульові многочлени $P(x)$, які задовольняють тотожність $P(x^2-2x) \equiv (P(x-2))^2$.

3.20 Нехай два многочлени $P(x)$ і $Q(x)$ з дійсними коефіцієнтами приймають цілочисельні значення в одних і тих же точках. Довести, що або $P(x)-Q(x)$, або $P(x)+Q(x)$ є константа.

3.21 Нехай многочлен $P_n(x)$ степеня n з дійсними коефіцієнтами при всіх дійсних значеннях x набуває лише додатних значень. Довести, що многочлен $P_n(x)$ можна подати у вигляді суми квадратів двох многочленів з дійсними коефіцієнтами.

3.22 Многочлен $P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+1$ з невід'ємними коефіцієнтами $a_1,\ldots,a_{n-1}$ має n дійсних коренів. Довести, що $P(2) \geq 3^n$.

3.23 Довести, що для будь-якого цілого невід'ємного n многочлен $(x+1)^{2n+1}+x^{n+2}$ ділиться на многочлен x^2+x+1.

3.24 Знайти остачу від ділення $f(x^5)$ на $f(x)$, якщо

$$f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1.$$

3.25 Довести, що многочлен четвертого степеня x^4+2x^2+2x+2 неможливо розкласти в добуток двох квадратних тричленів $x^2 + ax + b$ і $x^2 + cx + d$ з цілими коефіцієнтами a, b, c, d.

3.26 Скільки дійсних коренів має многочлен

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n}?$$

3.27 Довести, що для будь-якого натурального n многочлен

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

не може мати більше одного дійсного кореня.

3.28 Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – додатні числа. Довести, що многочлен $x^n - a_1x^{n-1} - a_2x^{n-2} - \ldots - a_n$ має рівно один додатний корінь.

3.29 Відомо, що $c_0 + \frac{c_1}{2} + \ldots + \frac{c_n}{n+1} = 0$ ($c_0, c_1, \ldots, c_n$ – дійсні). Довести, що многочлен $c_0 + c_1x + \ldots + c_nx^n$ має хоча б один дійсний корінь.

3.30 Нехай $P(x)$ – многочлен степеня n і

$$P(a) \geq 0,\ P'(a) \geq 0,\ P''(a) \geq 0, \ldots, P^{(n-1)}(a) \geq 0,\ P^{(n)}(a) > 0.$$

Довести, що дійсні корені рівняння $P(x) = 0$ не перевищують a.

3.31 Довести, що всякий многочлен $P(x)$ можна представити у виді різниці двох многочленів, що монотонно зростають.

3.32 Довести, що многочлен $x^n + 4$ розкладається в добуток двох многочленів меншого степеня з цілими коефіцієнтами тоді і тільки тоді, коли n ділиться на 4.

3.33 Нехай P_1, P_2 – многочлени від x_1, x_2, x_3 з дійсними коефіцієнтами. Чи можлива рівність

$$P_1^2 + P_2^2 \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2?$$

3.34 Довести, що в добутку

$$\left(1-x+x^2-x^3+\ldots-x^{99}+x^{100}\right)\left(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{99}+x^{100}\right)$$

після розкриття дужок і зведення подібних членів не залишиться членів, які містять x в непарному степені.

3.35 Довести, що всі раціональні корені многочлена

$$P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

з цілими коефіцієнтами і з коефіцієнтом при старшому степені x, рівним 1, є цілими.

3.36 Многочлен

$$ax^n-ax^{n-1}+c_2x^{n-2}+\ldots+c_{n-2}x^2-n^2bx+b$$

має рівно n додатних коренів. Довести, що всі ці корені рівні між собою.

3.37 Довести, що для будь-якого многочлена $P(x)$ степеня $n>1$, який має n різних дійсних коренів $x_1,x_2,\ldots,x_n$, справедлива рівність

$$\frac{1}{P'(x_1)}+\frac{1}{P'(x_2)}+\ldots+\frac{1}{P'(x_n)}=0\,.$$

3.38 Довести, що при будь-яких $n\in N$ і $\alpha\in R$, які задовольняють умовам $n\neq1$ і $\sin\alpha\neq0$ многочлен

$$P(x)=x^n\sin\alpha-x\sin n\alpha+\sin(n-1)\alpha$$

ділиться на многочлен $Q(x)=x^2-2x\cos\alpha+1$.

3.39 При яких обмеженнях на цілі числа p і q:

а) многочлен $P(x)=x^2+px+q$ приймає при всіх цілих значення x парні (непарні) значення;

б) многочлен $Q(x)=x^3+px+q$ приймає при всіх цілих значення x значення, які діляться на 3?

3.40 Многочлен $P(x)$ степеня n задовольняє рівностям $P(k)=\dfrac{k}{k+1}$ при $k=0,1,\ldots,n$. Знайти $P(n+1)$.

3.41 Нехай $P(x)$ – многочлен з дійсними коефіцієнтами степеня n, що має n різних дійсних коренів. Складемо різниці між кожним з коренів рівняння $P(x)=0$ і кожним з коренів рівняння $P'(x)=0$. Обчислити суму величин, обернених до отриманих різниць.

3.42 Довести, що всякий многочлен $P(x)$ степеня n, який приймає при $n+1$ послідовних цілих значеннях x цілі значення, приймає ціле значення при всякому цілому x.

3.43 Відомо, що $\sin 2012x = P(\cos x)\cdot\sin 4x$, де $P(x)$ – деякий многочлен. Знайти суму коефіцієнтів цього многочлена.

4 Деякі суми

4.1 Знайти суми:

а) $\cos\varphi+\cos 2\varphi+\cos 3\varphi+\ldots+\cos n\varphi$;

б) $\sin\varphi+\sin 2\varphi+\sin 3\varphi+\ldots+\sin n\varphi$.

4.2 Знайти суми:

а) $\cos\alpha+\cos(\alpha+\varphi)+\cos(\alpha+2\varphi)+\ldots+\cos(\alpha+n\varphi)$;

б) $\sin\alpha+\sin(\alpha+\varphi)+\sin(\alpha+2\varphi)+\ldots+\sin(\alpha+n\varphi)$.

4.3 Знайти суми:

а) $\cos\varphi+\cos 3\varphi+\cos 5\varphi+\ldots+\cos(2n-1)\varphi$;

б) $\sin\varphi+\sin 3\varphi+\sin 5\varphi+\ldots+\sin(2n-1)\varphi$.

4.4 Знайти суми:

а) $\cos\dfrac{2\pi}{2n+1}+\cos\dfrac{4\pi}{2n+1}+\cos\dfrac{6\pi}{2n+1}+\ldots+\cos\dfrac{2n\pi}{2n+1}$;

б) $\sin\dfrac{2\pi}{2n+1}+\sin\dfrac{4\pi}{2n+1}+\sin\dfrac{6\pi}{2n+1}+\ldots+\sin\dfrac{2n\pi}{2n+1}$.

4.5 Довести тотожності ($n>1$):

а) $1+\cos\dfrac{2\pi}{n}+\cos\dfrac{4\pi}{n}+\ldots+\cos\dfrac{2(n-1)\pi}{n}=0$;

б) $\sin\dfrac{2\pi}{n}+\sin\dfrac{4\pi}{n}+\sin\dfrac{6\pi}{n}+\ldots+\sin\dfrac{2(n-1)\pi}{n}=0$.

4.6 Довести тотожності ($n>2$):

а) $1+\cos\frac{4\pi}{n}+\cos\frac{8\pi}{n}+\ldots+\cos\frac{4(n-1)\pi}{n}=0$;

б) $\sin\frac{4\pi}{n}+\sin\frac{8\pi}{n}+\sin\frac{12\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{4(n-1)\pi}{n}=0$.

4.7 Знайти суми:

а) $\cos^2\varphi+\cos^2 2\varphi+\cos^2 3\varphi+\ldots+\cos^2 n\varphi$;

б) $\sin^2\varphi+\sin^2 2\varphi+\sin^2 3\varphi+\ldots+\sin^2 n\varphi$.

4.8 Довести, що величина виразів ($n>1$):

а) $\cos\alpha+\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{n}\right)+\cos\left(\alpha+\frac{4\pi}{n}\right)+\ldots+\cos\left(\alpha+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)$;

б) $\sin\alpha+\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{n}\right)+\sin\left(\alpha+\frac{4\pi}{n}\right)+\ldots+\sin\left(\alpha+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)$;

не залежить від α.

4.9 Знайти суми ($n>1$):

а) $\cos^2\alpha+\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{n}\right)+\cos^2\left(\alpha+\frac{2\pi}{n}\right)+\ldots+\cos^2\left(\alpha+\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$;

б) $\sin^2\alpha+\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{n}\right)+\sin^2\left(\alpha+\frac{2\pi}{n}\right)+\ldots+\sin^2\left(\alpha+\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$.

4.10 Знайти суми ($n>1$):

а) $\cos^2\alpha+\cos^2\left(\alpha+\frac{2\pi}{n}\right)+\cos^2\left(\alpha+\frac{4\pi}{n}\right)+\ldots+\cos^2\left(\alpha+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)$;

б) $\sin^2\alpha+\sin^2\left(\alpha+\frac{2\pi}{n}\right)+\sin^2\left(\alpha+\frac{4\pi}{n}\right)+\ldots+\sin^2\left(\alpha+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)$.

4.11 Знайти суму

$$\frac{\sin 1}{\cos 0\cos 1}+\frac{\sin 1}{\cos 1\cos 2}+\frac{\sin 1}{\cos 2\cos 3}+\ldots+\frac{\sin 1}{\cos(n-1)\cos n}.$$

4.12 Знайти суму $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n!$.

4.13 Знайти суму $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!}$.

4.14 Знайти суму $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ \ldots+\frac{n}{2^n}$.

4.15 Довести, що
$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

4.16 Обчислити суму $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{99}$, де
$$a_n=\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}.$$

4.17 Знайти суми:

а) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$; б) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$;

в) $1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4$; г) $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3$.

4.18 Знайти суму
$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\ldots+\frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)n}.$$

4.19 Довести, що
$$1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot p+2\cdot 3\cdot\ldots\cdot p(p+1)+\ldots+n(n+1)\ldots(n+p-1)=$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}{p+1}.$$

4.20 Довести, що суми

а) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}$;

б) $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+m}$;

в) $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n+1}$

(n, m – натуральні) не можуть виражатись цілими числами.

4.21 Знайти суму $C_{n+1}^1+C_{n+2}^2+C_{n+3}^3+\ldots+C_{n+k}^k$.

4.22 Знайти суму $\left(C_n^0\right)^2+\left(C_n^1\right)^2+\left(C_n^2\right)^2+\ldots+\left(C_n^n\right)^2$.

4.23 Знайти суму $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\ldots+nC_n^n$.

5 Геометрія

5.1 Нехай M – точка на колі, описаному навколо правильного n-кутника $A_1A_2\ldots A_n$. Довести, що величина $MA_1^2+MA_2^2+\ldots+MA_n^2$ не залежить від положення точки M.

5.2 Нехай M – точка на колі, вписаному в правильний n-кутник $A_1A_2\ldots A_n$. Довести, що величина $MA_1^2+MA_2^2+\ldots+MA_n^2$ не залежить від положення точки M.

5.3 Нехай $A_1A_2\ldots A_n$ – правильний n-кутник, вписаний в коло радіуса R. Знайти суму $A_1A_2^2+A_1A_3^2+\ldots+A_1A_n^2$.

5.4 Точки $A_1(x_1,y_1),\ A_2(x_2,y_2),\ \ldots,\ A_n(x_n,y_n)$ – вершини правильного n-кутника, вписаного в коло $x^2+y^2=R^2$. Знайти суми $x_1+x_2+\ldots+x_n$ і $y_1+y_2+\ldots+y_n$.

5.5 Довести, що сума квадратів віддалей від усіх вершин правильного многокутника до будь-якої прямої, що проходить через його центр, є величина постійна.

5.6 Точки $A_1(x_1,y_1),\ A_2(x_2,\ y_2),\ \ldots,\ A_n(x_n,\ y_n)$ – вершини правильного n-кутника, вписаного в коло $x^2+y^2=R^2$. Довести, що $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2$.

5.7 Довести, що сума квадратів віддалей від будь-якої точки одного з концентричних кіл до всіх вершин правильного многокутника, вписаного в інше коло, є величина постійна.

5.8 Знайти добуток довжин всіх діагоналей і сторін, які виходять з однієї вершини правильного n-кутника, якщо радіус описаного кола дорівнює R. Використовуючи одержаний результат, зайти добуток

$$\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\cdot\ldots\cdot\sin\frac{(n-1)\pi}{n}.$$

5.9 Знайти суму квадратів всіх сторін і всіх діагоналей правильного n-кутника, вписаного в коло радіуса R.

5.10 Площа трапеції дорівнює 2, а сума діагоналей дорівнює 4. Знайти висоту трапеції.

5.11 Визначити координати точки A, яка належить еліпсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, якщо відомо, що площа трикутника ABC, де точки B і C – сусідні вершини еліпса, є найбільшою із всіх можливих.

5.12 Із центра еліпса з півосями a і b проведені два промені, які утворюють кут 90° і перетинають еліпс в точках A і B. Чому дорівнює найменша і найбільша довжина відрізка AB?

5.13 На еліпсі $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ знайти таку точку $\left(x_0, y_0\right)$, щоб площа трикутника, обмеженого дотичною до еліпса в цій точці і осями координат, була найменшою.

5.14 Навколо еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ описані два різних прямокутники. Довести, що їх діагоналі рівні.

5.15 Кінці відрізка довжини a ковзають по двох взаємно перпендикулярних прямих, які лежать в одній площині. Точка M ділить цей відрізок у заданому відношенні λ. Яку лінію описує точка M?

5.16 Дві вершини трикутника зафіксовані, а третя рухається так, що один із кутів при основі трикутника залишається вдвічі більшим за іншого. Яку лінію описує третя вершина?

5.17 Знайти геометричне місце центрів кіл, які проходять через задану точку і дотикаються заданого кола якщо точка знаходиться: а) всередині; б) зовні заданого кола.

5.18 На площині розташовані дві параболи так, що їх осі взаємно перпендикулярні, а самі параболи перетинаються в чотирьох точках. Довести, що ці чотири точки лежать на одному колі.

5.19 Із довільної точки гіперболи $x^2 - y^2 = 1$, відмінної від $(1, 0)$ і $(-1, 0)$, проведено дві дотичні до кола $x^2 + y^2 = 1$. Довести, що пряма, проведена через точки дотику, дотикається до гіперболи.

5.20 Дотичні до параболи $y^2 = 2px$ в точках A, B і C утворюють трикутник KLM. Довести, що $S_{KLM} = \frac{1}{2} S_{ABC}$.

5.21 Точка A знаходиться всередині кола радіуса R на віддалі a від центра. Обчислити площу обмежену геометричним місцем основ перпендикулярів, опущених із точки A на дотичні до цього кола.

5.22 Знайти параболу, яка дотикається до еліпса $4x^2 + y^2 = 5$ в точках $(-1, -1)$ і $(1, -1)$.

5.23 Нехай O – вершина параболи, F – її фокус, O' – точка перетину осі параболи з її директрисою, A – довільна точка параболи, A' – проекція точки A на директрису. Знайти площу сектора FOA, якщо площа криволінійної трапеції $OAA'O'$ дорівнює S.

5.24 Нехай A, B – довільні точки деякої параболи, A', B' – їх проекції на директрису, F – фокус параболи. Відомо, що площа криволінійної трапеції $ABB'A'$ дорівнює S. Знайти площу сектора FBA.

5.25 Гіпотенуза прямокутного трикутника ковзає по сторонах прямого кута. Яку криву описує при цьому вершина прямого кута трикутника?

5.26 Знайти множину точок площини, із яких дану параболу видно під прямим кутом.

5.27 Кожна сторона опуклого чотирикутника менша 20. Довести, що для будь-якої точки O всередині чотирикутника знайдеться вершина A чотирикутника така, що $OA < 15$.

5.28 В трикутнику ABC на стороні AB взято точку P, а на стороні BC – точку R. Нехай Q – точка на відрізку PR. Довести нерівність $\sqrt[3]{S_{\Delta ABC}} \geq \sqrt[3]{S_{\Delta APQ}} + \sqrt[3]{S_{\Delta QRC}}$.

5.29 Нехай p – периметр трикутника з цілочисельними координатами вершин на площині Oxy, R – радіус описаного навколо трикутника кола. Довести нерівність $p^3 \geq 54R$.

5.30 Дано параболи $y = x^2$ і $y = x^2 + m$ $(m > 0)$. Довести, що хорда першої параболи, що дотикається до другої параболи, ділиться точкою дотику навпіл.

5.31 Довести, що відрізок будь-якої дотичної до рівнобічної гіперболи, який лежить між її асимптотами, ділиться точкою дотику навпіл.

5.32 Пряма перетинає рівнобічну гіперболу в точках A і B, а її асимптоти – в точках C і D. Довести, що $AC = BD$.

5.33 Довести, що середини паралельних хорд параболи лежать на одній прямій, яка паралельна осі параболи.

5.34 Довести, що середини паралельних хорд еліпса лежать на одній прямій, яка проходить через центр еліпса.

5.35 Довести, що середини паралельних хорд гіперболи лежать на одній прямій, яка проходить через центр гіперболи.

5.36 Задано квадрат $ABCD$. Вказати всі точки M площини, які задовольняють умові $MA + MC = MB + MD$.

5.37 Чи існує на координатній площині рівносторонній трикутник з цілочисельними координатами вершин?

5.38 На кривій $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$ (астроїда) знайти точку (x_0, y_0) таку, щоб площа трикутника, обмеженого дотичною до астроїди в цій точці та осями координат була найбільшою.

5.39 Довести, що в еліпс неможливо вписати рівносторонній трикутник так, щоб центр трикутника збігався з центром еліпса.

5.40 Знайти множину точок площини, рівновіддалених від даного кола і даної точки, яка не належить колу.

5.41 Знайти перетин внутрішностей всіх ромбів, вписаних в даний еліпс.

5.42 Із довільної точки параболи $y = ax^2$ проведені дві дотичні до іншої параболи $y = ax^2 + m$ ($a > 0$, $m > 0$). Довести, що площа криволінійного трикутника, утвореного дотичними і дугою верхньої параболи, не залежить від вибору точки на нижній параболі.

5.43 Побудувати геометричне місце точок площини, із яких квадрат $\{|x| \le 1, |y| \le 1\}$ видно під кутом 45^0.

5.44 Довести, що із двох правильних многокутників з однаковим периметром більша площа буде у многокутника з більшою кількістю сторін.

5.45 Кінці відрізка змінної довжини ковзають по осях координат так, що сума довжин відрізків, які відтинаються на координатних осях, залишається постійною. Знайти рівняння кривої, яку описує середина цього відрізка.

5.46 На площині розташовані два кола різних радіусів, що перетинаються. Знайти множину точок, рівновіддалених від цих кіл.

5.47 В еліпс вписати трикутник найбільшої площі. Скільки розв'язків має задача?

5.48 Розглянемо трикутники найбільшої площі, вписані в даний еліпс. Довести, що сума квадратів сторін у кожного з таких трикутників одна і та ж.

5.49 Через дві дані точки A і B параболи проведені два кола, які перетинають параболу в точках M і N та P і Q відповідно. Довести, що хорди MN і PQ паралельні.

5.50 Довести, що якщо для точки O, яка лежить всередині чотирикутника $ABCD$ площі S виконана рівність
$$2S = OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2,$$
то чотирикутник $ABCD$ – квадрат, а точка O – його центр.

5.51 Посередині кожного ребра трикутної піраміди взято по точці. Знайти відношення об'єму многогранника з вершинами в цих точках до об'єму піраміди.

5.52 Кінці відрізка, що має постійну довжину a, ковзають вздовж двох мимобіжних взаємно перпендикулярних прямих, відстань між якими дорівнює l, $l < a$. Знайти геометричне місце середин цього відрізка.

5.53 Дано трикутну піраміду $SABC$ із прямими плоскими кутами при вершині S. Знайти множину точок M, для яких виконується умова $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MS^2$.

5.54 У тетраедрі $SABC$ всі плоскі кути при вершині S прямі, а $SA = SB + SC$. Довести, що сума плоских кутів при вершині A дорівнює 90°.

5.55 Чому дорівнює найбільша площа проекції на площину прямокутного паралелепіпеда з ребрами a, b, c?

5.56 Знайти найменший об'єм піраміди, яка відтинається від координатного кута дотичною площиною до еліпсоїда
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

5.57 Із точки поза еліпсоїдом проводяться до нього всі можливі дотичні. Довести, що всі точки дотику лежать в одній площині.

5.58 Дана довільна трикутна призма $ABCA_1B_1C_1$. Точка E ділить ребро AB навпіл, а точка F – ребро AC у відношенні 3:1. В якому відношенні площина B_1EF ділить об'єм цієї призми?

5.59 Вздовж діаметра кулі просвердлений циліндричний отвір, висота циліндра 6 см. Який об’єм частини кулі, що залишилась?

5.60 Знайти об’єм тора – тіла, одержаного обертанням круга радіуса R навколо осі, яка лежить в площині круга на віддалі d від його центра ($d > R$).

6 Рівняння, системи

6.1 Довести, що рівняння $x^2 - 3y^2 = 17$ не має розв’язків в цілих числах.

6.2 Чи може $\sqrt[3]{2}$ бути коренем квадратного рівняння з раціональними коефіцієнтами?

6.3 Довести, що якщо всі коефіцієнти квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ – цілі непарні числа, то корені рівняння не можуть бути раціональними.

6.4 Нехай p і q – цілі непарні числа. Довести, що рівняння $x^2 + 2px + 2q = 0$ не може мати раціональних коренів.

6.5 Знайти алгебраїчне рівняння з цілими коефіцієнтами, коренем якого є число $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

6.6 Довести, що для кожного натурального n рівняння $x^2 + y^2 = n$ і $x^2 + y^2 = 2n$ мають однакову кількість розв’язків в цілих числах.

6.7 Довести, що рівняння $x^5 + ax^4 + bx^3 + c = 0$, де a, b, c – дійсні числа і $c \neq 0$, має принаймні два комплексних, не дійсних корені.

6.8 При якому найменшому значенні суми $A^2 + B^2$ рівняння $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Ax + 1 = 0$ має дійсні корені?

6.9 При якому найменшому значенні суми $A^2 + B^2$ рівняння $1006x^4 - Ax^3 - Bx^2 - Ax + 1006 = 0$ має дійсні корені?

6.10 Розв’язати рівняння $2^{-|x|} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(|x+1| + |x-1|\right)$.

6.11 Розв'язати рівняння $2\sqrt{x+1} = x^2 + x - 1$.

6.12 Розв'язати рівняння $x^4 + 4x - 1 = 0$.

6.13 Скільки дійсних коренів має рівняння $e^x = ax^2$ в залежності від параметра a?

6.14 Скільки дійсних коренів має рівняння $x^5 - 5x + a = 0$ в залежності від параметра a?

6.15 Довести, що $tg^2 20^0$ є коренем рівняння

$$x(3-x)^2 = 3(1-3x)^2.$$

6.16 Розв'язати рівняння $\cos\frac{\pi x}{9} \cdot \cos\frac{2\pi x}{9} \cdot \cos\frac{4\pi x}{9} = \frac{1}{8}$.

6.17 Довести, що рівняння $x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 16 = 0$ має рівно два дійсні розв'язки.

6.18 Довести, що для будь-яких дійсних a, b, c рівняння $(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) = 0$ має хоча б один дійсний розв'язок.

6.19 Скільки дійсних коренів має рівняння

$$xe^{-x} + e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 - 1 = 0?$$

6.20 Визначити кількість дійсних нулів функції

$$f(x) = 2e^{2-x^2}\left(x^6 - 3x^4 + 5x^2 - 1\right) - 2e - 5.$$

6.21 Довести, що рівняння $\sum\limits_{k=0}^{2n} \frac{x^k}{k!} = 0$ не має дійсних коренів.

6.22 Знайти множину точок площини, координати яких задовольняють рівнянню $2\left(x^4 - 2x^2 + 3\right)\left(y^4 - 3y^2 + 4\right) = 7$.

6.23 Скільки коренів на $(0, +\infty)$ має рівняння $x^{n+1} - P(x) = 0$, де $P(x)$ – многочлен степеня n, всі коефіцієнти якого невід'ємні і не всі рівні нулю.

6.24 Розв'язати систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n = a_1 \ , \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + \ldots + nx_1 = a_2 \ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n + 2x_1 + 3x_2 + \ldots + nx_{n-1} = a_n \ . \end{cases}$$

6.25 Розв'язати систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1, \\ x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \dfrac{1}{n} \ . \end{cases}$$

6.26 Розв'язати систему

$$\begin{cases} 1 - x_1^2 = x_2 \, , \\ 1 - x_2^2 = x_3 \, , \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1 - x_{2n-2}^2 = x_{2n-1} \, , \\ 1 - x_{2n-1}^2 = x_1 . \end{cases}$$

6.27 Довести, що якщо

$$\begin{cases} a_1 - 2a_2 + a_3 \ \geq \ 0 \, , \\ a_2 - 2a_3 + a_4 \ \geq \ 0 \, , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-2} - 2a_{n-1} + a_n \geq 0 \, , \\ a_{n-1} - 2a_n + a_1 \ \geq \ 0 \, , \\ a_n \ - 2a_1 + a_2 \ \geq \ 0 \, , \end{cases}$$

то $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

6.28 Розв'язати систему

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{1/x_n + 1/x_2}\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_k = \dfrac{2}{1/x_{k-1} + 1/x_{k+1}}\,, \qquad\qquad k = 2,\,3,\,\dots,\,n-1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \dfrac{2}{1/x_{n-1} + 1/x_1}\,. \end{cases}$$

6.29 Довести, що система рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n\,, \\ \dfrac{1}{2}x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{1}{2}x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n\,, \end{cases}$$

де a_{ij} – цілі числа для всіх $i,\,j$, має єдиний розв'язок $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

6.30 Яким умовам мають задовольняти дійсні числа $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c$, щоб система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} -a_3x_2 + a_2x_3 = b_1\,, \\ a_3x_1 - a_1x_3 = b_2\,, \\ -a_2x_1 + a_1x_2 = b_3\,, \\ a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = c \end{cases}$$

була: а) несумісною; б) мала єдиний розв'язок; в) мала безліч розв'язків?

6.31 Для всіх дійсних значень параметрів a і b розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = 1\ , \\ x_1 + ax_2 + x_3 + \ldots + x_n = 1\ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 + x_2 + \ldots + ax_{n-1} + x_n = 1\ , \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + ax_n = b\ , \end{cases}$$

де $n \in N$, $n \geq 2$.

6.32 При яких натуральних n система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_{n-1} + x_n = 1\ , \\ -x_1 + x_3 + x_4 + \ldots + x_{n-1} + x_n = 1\ , \\ -x_1 - x_2 + x_4 + \ldots + x_{n-1} + x_n = 1\ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - \ldots - x_{n-1} = 1\ , \end{cases}$$

сумісна?

6.33 Дослідити сумісність і розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases} (3-2\lambda)x_1 + (2-\lambda)x_2 + x_3 = \lambda\ , \\ (2-\lambda)x_1 + (2-\lambda)x_2 + x_3 = 1\ , \\ x_1 + x_2 + (2-\lambda)x_3 = 1\ . \end{cases}$$

7 Нерівності

7.1 Довести, що при $p > 0$, $q > 0$, $r > 0$, $s > 0$

$$\frac{(p^2 + p + 1)(q^2 + q + 1)(r^2 + r + 1)(s^2 + s + 1)}{pqrs} \geq 81\ .$$

7.2 Довести, що при будь-якому натуральному $n > 1$

$$n^n > 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)\ .$$

7.3 Довести, що $\left(1 + \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{8}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) < 2$.

7.4 Довести, що для будь-якого натурального n

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

7.5 Довести, що для будь-яких додатних чисел a і b, таких, що $a+b=1$, має місце нерівність

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

7.6 Довести, що якщо α – гострий кут, то

$$\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right) > 5.$$

7.7 Довести, що для будь-яких дійсних x, y

$$\left|\frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}\right| \leq \frac{1}{2}.$$

7.8 Довести, що для будь-якого натурального $n>1$ виконана нерівність

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{n^2-1}+\frac{1}{n^2}>1.$$

7.9 Довести нерівність $\frac{m-n}{m}<\ln\frac{m}{n}<\frac{m-n}{n}$, де $0<n<m$.

7.10 Довести, що послідовності $\{x_n\}$, де $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, і $\{y_n\}$, де $y_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ зростаючі, а послідовність $\{z_n\}$, де $z_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ спадна.

7.11 Довести нерівності ($n \in N$) $\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$.

7.12 Довести, що при будь-якому цілому $n>6$, справедливі нерівності

$$n! < n\left(\frac{n}{e}\right)^n < \left(\frac{n}{2}\right)^n .$$

7.13 Довести: $e^{px_1+qx_2} \le pe^{x_1} + qe^{x_2}$ для будь-яких x_1, x_2 і таких $p \ge 0, q \ge 0$, що $p+q=1$.

7.14 Довести, що для будь-яких додатних дійсних чисел a, b, c справедлива нерівність $a^a b^b c^c \ge (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$.

7.15 Довести нерівність $e^x \ge 1 + \ln(1+x)$.

7.16 Довести нерівність $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 \ge \cos x$ при $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$.

7.17 Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – додатні числа і виконана нерівність $a_1 + a_2 + \ldots + a_n < 1$. Довести, що

$$\frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_n)}{a_1 a_2 \cdot\cdot\, a_n (1 - a_1 - a_2 - \ldots - a_n)} \ge n^{n+1} .$$

7.18 Нехай додатні числа x_1, x_2, y_1, y_2 задовольняють умовам $x_1 + x_2 = y_1 + y_2 = 1$, $x_1^2 + x_2^2 < y_1^2 + y_2^2$. Довести, що

$$x_1 \ln x_1 + x_2 \ln x_2 < y_1 \ln y_1 + y_2 \ln y_2 .$$

7.19 Довести, що для всіх $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ $\frac{tg\, x}{x} > 1 + \frac{x^2}{3}$.

7.20 а) Довести, що для будь-яких дійсних y і y_0

$$e^y \ge e^{y_0}(1 + y - y_0).$$

б) Нехай $f(x)$ – неперервна на $[0, 1]$ функція. Використовуючи попередню нерівність, довести, що

$$\int_0^1 e^{f(x)} dx \ge e^{\int_0^1 f(x)dx} .$$

7.21 Довести, що для будь-якого натурального n виконана нерівність

$$\frac{1}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots + \frac{2n-1}{(n+2)!} < \frac{1}{2} .$$

7.22 Довести, що для всіх $x \ge 0$, $y \ge 0$ виконується нерівність $5\sqrt[5]{xy} \le 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{y}$.

7.23 Довести, що $\forall x > 0$ виконується нерівність $x^e \le e^x$, причому рівність має місце тільки при $x = e$.

7.24 Довести, що для будь-яких натуральних m і n

$$\min\left\{\sqrt[n]{m}, \sqrt[m]{n}\right\} \le \sqrt[3]{3}.$$

7.25 Довести, що при $x > 0$, $y > 0$ і $0 \le \lambda \le 1$ виконана нерівність $\lambda x + (1-\lambda)y \ge x^{\lambda} y^{1-\lambda}$.

7.26 Довести, що при будь-якому натуральному n

а) $\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\left(1+\dfrac{1}{8}\right)\left(1+\dfrac{1}{15}\right)\ldots\left(1+\dfrac{1}{n^2+2n}\right) < 2$;

б) $\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{5}\right)\left(1+\dfrac{1}{9}\right)\ldots\left(1+\dfrac{2}{n^2+3n}\right) < 3$.

7.27 Довести, що для $\forall x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ виконується нерівність $\dfrac{2\cos x}{1+\cos x} < \dfrac{\sin x}{x}$.

7.28 Довести, якщо a, b, c – додатні, то

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}.$$

7.29 Що більше $\sqrt[n]{n!}$ чи $\sqrt[n+1]{(n+1)!}$?

7.30 Порівняти числа $\log_{n-1} n$ і $\log_n (n+1)$ ($n > 2$).

7.31 Розташувати в порядку зростання числа

$$2013^{2013},\ 2012^{2014},\ 2014^{2012}.$$

7.32 Для довільного натурального n порівняти числа $n+1$ та e^m, де $m = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

7.33 Нехай n і $k \ge 2$ – натуральні числа. Яке з чисел більше: $\sqrt[k]{n-1} + \sqrt[k]{n+1}$ чи $2\sqrt[k]{n}$?

7.34 Що більше: $(2013!)^2$ чи 2013^{2013}?

7.35 Порівняти числа

$$2014^{2013}\cdot 2012^{2012} \quad \text{і} \quad 2013^{2013}\cdot 2013^{2012}.$$

7.36 Що більше: 100^{300} чи $300!$?

7.37 Що більше:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{36}} \text{ чи } 1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{27}}\,?$$

7.38 Знайти цілу частину числа $1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{125}}$.

7.39 Знайти цілу частину числа

$$x=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1000000}}.$$

7.40 Знайти послідовні цілі числа, між якими міститься значення виразу $6\left(1-1{,}001^{-1000}\right)$.

7.41 Знайти суму довжин проміжків, об'єднання яких є областю розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} \frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}+...+\frac{1}{x-n}<0, \\ x>1. \end{cases}$$

7.42 Знайти найменше значення функції

$$f(x)=\frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n}-\left(x^{2n}+\frac{1}{x^{2n}}\right)-2}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n}+\left(x^{n}+\frac{1}{x^{n}}\right)}, \quad x>0, \quad n\in N.$$

7.43 Що більше: $\sin^{99}3^0-\sin^{99}1^0$ чи $\sin^{99}4^0-\sin^{99}2^0$?

7.44 Довести нерівність

$$\underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}}_{2013\ \textit{радикалів}}+\underbrace{\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6}}}}}_{2013\ \textit{радикалів}}<5.$$

7.45 Довести нерівність $x^{10}+x^2+1\geq 3x^4$.

7.46 Знайти найменше значення функції
$$f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4).$$

7.47 Довести, що для всіх дійсних значень x виконана нерівність
$$(x-6)(x-9)(x^2-5x+4)+x^2+73\ge 10x.$$

7.48 Довести нерівність
$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2013^2}\right)>\frac{1}{2}.$$

7.49 Довести, що $a=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}<\frac{1}{10}$.

7.50 Довести, що $2^{m+n-2}\ge mn$ для всіх натуральних чисел m та n.

7.51 Сума двох додатних чисел a і b дорівнює 2013. Довести, що ці числа задовольняють нерівність $a^5+b^5\ge 2013a^2b^2$.

7.52 Довести, що $2^n>1+n\sqrt{2^{n-1}}$ для всіх натуральних $n\ge 2$.

7.53 Знайти найбільше і найменше значення функції
$$\arcsin^3 x+\arccos^3 x.$$

8 Послідовності, границі послідовностей

8.1 Довести, що серед членів арифметичних прогресій:

а) 3, 7, 11, 15, 19, 23, ... ;

б) 5, 11, 17, 23, 29, 35, …

є нескінченно багато простих чисел.

8.2 Довести, що всі члени арифметичної прогресії, яка складається із натуральних чисел, не можуть бути простими числами (за винятком виродженого випадку – арифметичної прогресії з нульовою різницею, всі члени якої дорівнюють одному і тому ж простому числу).

8.3 Чи існує $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$? $\lim\limits_{n\to\infty}\cos n$?

8.4 Довести, що послідовність $\{n \sin n\}$ необмежена.

8.5 Послідовність додатних чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$ задовольняє умові $a_n^2 \le a_n - a_{n+1}$ при $n \in N$. Довести, що для всякого $n \in N$ має місце оцінка $a_n < \dfrac{1}{n}$.

8.6 Знайти формулу загального члена послідовності $\{x_n\}$, яка визначена рекурентно:

$$x_n = (n-1)(x_{n-1} + x_{n-2}), \quad n \ge 4, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2.$$

8.7 Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + 2^2 + 3^3 + \ldots + n^n}{n^n}$.

8.8 Нехай $a_0 > 0$, $a > 0$. Послідовність $\{x_n\}$ будується так:

$$x_0 = a_0, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \quad n \ge 0.$$

Довести, що послідовність збіжна та знайти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

8.9 Знайти границю послідовності $\{x_n\}$, яка визначається умовами:

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{a}{x_n^2}\right), \quad n \ge 1, \quad x_1 > 0, \quad a > 0.$$

8.10 Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n!)}{n \ln n} = 1$.

8.11 Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{2013} - (n-1)^{2013}}{n^{2012}}$.

8.12 Знайти границі: а) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{k^2 + 3k + 1}{(k+2)!}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k^3 + 6k^2 + 11k + 5}{(k+3)!}$.

8.13 Знайти x, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x \ldots \sqrt{x}}}}}_{n \text{ радикалів}} = \sqrt{2013}$.

8.14 Послідовність $\{a_n\}$ задана умовами:

$$a_1 > 0,\ a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n^2 + 1},\ n \ge 1 .$$

Довести, що ця послідовність збіжна і знайти її границю.

8.15 Знайти границі:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7 + 77 + 777 + \ldots + \overbrace{77\ldots7}^{n-1}}{\underbrace{777\ldots7}_{n}}$, б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3 + 33 + 333 + \ldots + \overbrace{33\ldots3}^{n-1}}{\underbrace{888\ldots8}_{n}}$.

8.16 Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}\right)$.

8.17 Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{6} + \ldots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\right)$.

8.18 Нехай $a_n = \dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n}$, $n \in N$. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

8.19 Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\dfrac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ \ldots\ \cdot\dfrac{n^3-1}{n^3+1}\right)$.

8.20 Довести, що послідовність $2,\ 2 + \dfrac{1}{2},\ 2 + \dfrac{1}{2 + \frac{1}{2}}, \ldots$

має границю і знайти цю границю.

8.21 Довести, що послідовність $\{a_n\}$, яка задана умовами: $a_0 = 0$, $a_n = \dfrac{a_{n-1} + 3}{4}$, має границю і знайти її.

8.22 Знайти границі: а) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k+n^2}}$.

8.23 Довести, що послідовність $x_n = \underbrace{\sqrt{c + \sqrt{c + \sqrt{c + \ldots + \sqrt{c + \sqrt{c}}}}}}_{n\ \text{коренів}}$

збіжна і знайти її границю.

8.24 Числова послідовність $\{x_n\}$ визначена так: $x_0 > 0$ – довільне, $x_{n+1} = \dfrac{x_n\left(x_n^2 + 3a\right)}{3x_n^2 + a}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, де a – дане додатне число. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$.

8.25 Нехай $a_1 \in (1, 2)$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{3 - a_n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Довести, що послідовність $\{a_n\}$ збіжна та знайти її границю.

8.26 Нехай $x_n = \underbrace{\sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \ \ldots\ + \sqrt[3]{6}}}}_{n\ радикалів}$. Знайти границю

$$\lim_{n\to\infty} 6^n \left(2 - x_n\right).$$

8.27 Нехай a і b – цифри, $a \neq 0$, $b \neq 0$. Знайти границю

$$\lim_{n\to\infty} 10^{-2n}\left(\overline{ab} + \overline{abab} + \ldots + \underbrace{\overline{abab\ \ldots\ ab}}_{2n\ цифр}\right).$$

8.28 Послідовність $\{x_n\}$ задана умовами:

$$x_1 = 2013, \quad x_{n+1} = \frac{1}{4 - 3x_n} \quad (n \geq 1).$$

Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

8.29 Знайти границю послідовності $\{x_n\}$, яка задається умовами:

$$x_1 = 2,\ x_2 = 2 + \frac{1}{3},\ x_{n+1} = 2 + \frac{1}{3 + 1/x_{n-1}},\ n \geq 2.$$

8.30 Послідовність $\{a_n\}$ задана початковими умовами $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ та рекурентним співвідношенням $a_{n+2} = \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}$, $n \geq 0$. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

8.31 Знайти границю

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right).$$

8.32 Знайти границю

$$\lim_{n\to\infty}\underbrace{\ln(1+\ln(1+\ln(1+\ldots+\ln x)))}_{n\ \text{разів}},\ x>1\ .$$

8.33 Послідовність $\{x_n\}$ задана умовами: $x_1=2013$, $x_{n+1}=\frac{2}{2^{x_n}}$, $n\ge 1$. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

8.34 Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2^n}\right)$.

8.35 Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b}{n}\left(\sin\frac{b}{n}+\sin\frac{2b}{n}+\ldots+\sin\frac{nb}{n}\right)$.

8.36 Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$.

8.37 Нехай S – площа круга, обмеженого колом Q, σ_n – площа правильного n-кутника, вписаного в Q, S_n – площа правильного n-кутника, описаного навколо Q. Знайти

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S-\sigma_n}{S_n-S}\ .$$

8.38 а) Послідовність $\{a_n\}, n\in N$, задано за допомогою рекурентної формули: $a_n=5a_{n-1}-4a_{n-2}$, $n\ge 3$, $a_1=a$, $a_2=b$. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{4^n}$.

б) Послідовність $\{a_n\}$, $n\in N$, задано за допомогою рекурентної формули: $a_n=4a_{n-1}-3a_{n-2}$, $n\ge 3$, $a_1=a$, $a_2=b$. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{3^n}$.

в) Послідовність $\{a_n\}$, $n \in N$, задано за допомогою рекурентної формули: $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$, $n \ge 3$, $a_1 = a$, $a_2 = b$. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{2^n}$.

8.39 Послідовність $\{a_n\}$ задана наступним чином: $a_1 = 1$, $a_2 = 6$, $a_n = 13a_{n-1} - 30a_{n-2}$, $n \ge 3$. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{10^n}$.

8.40 Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

8.41 Послідовність $\{a_n\}$ задана наступними умовами: $a_0 = 1$, $a_n = na_{n-1} + 1$, $n \ge 1$. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n!}$.

8.42 Знайти границі а) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^2\left(\pi\sqrt{n^2 + n}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos^2\left(\pi\sqrt{n^2 + 2n}\right)$.

8.43 Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty} \cos^2\left(\pi\sqrt[3]{n^3 + 2n^2 + \pi n}\right)$.

8.44 Нехай функція $f(x)$ має в точці a похідну $f'(a)$ і $f(a) \ne 0$. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{f\left(a + \dfrac{2}{n}\right)}{f(a)}\right)^n$.

8.45 Послідовність $\{y_n\}$ задана рекурентним співвідношенням: $y_0 = 1$, $y_1 = 2{,}5$, $y_n = 1{,}5y_{n-1} - 0{,}5y_{n-2}$, $n \ge 2$. Знайти явний вираз для y_n та обчислити границю $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

8.46 Послідовність $\{x_n\}$ визначена умовами: $x_0 = a$, $x_1 = b$, $x_{n+1} = \dfrac{x_{n-1} + (2n-1)x_n}{2n}$, $n \ge 1$. Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

9 Функції однієї змінної: границя, похідна, властивості, графіки

9.1 Довести, що $y_1 = \frac{\pi}{2} - arctg\, x$ і $y_2 = \frac{1}{x}$ є еквівалентними нескінченно малими при $x \to +\infty$.

9.2 Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[1-\cos x]{1 + x^2 e^x}$.

9.3 Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x^3]{1 - x + \sin x}$.

9.4 Визначити λ і μ таким чином, щоб мала місце рівність $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{1-x^3} - \lambda x - \mu\right) = 0$

9.5 Знайти границю $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}}{e^x}$.

9.6 Нехай $f(x)$ – диференційовна функція і $f'(0) = 1$. Знайти $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} \sum\limits_{k=0}^{2013} (-1)^k f\left(\frac{x}{2^k}\right)$.

9.7 Знайти границю $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(tg\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{1/x}$.

9.8 Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – додатні числа. Знайти границю

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{a_1^t + a_2^t + \ldots + a_n^t}{n}\right)^{1/t}.$$

9.9 Нехай функція $f(x)$ диференційовна на $[0, 1]$ і $f'(0) = 1$, $f'(1) = 0$. Довести, що $f'(c) = c$ в деякій точці $c \in (0, 1)$.

9.10 Нехай

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 - x & 5 - 3x^2 & 3x^3 - 1 \\ 2x^2 - 1 & 3x^5 - 1 & 7x^8 - 1 \end{vmatrix}.$$

Довести, що знайдеться $c \in (0, 1)$ таке, що $f'(c) = 0$.

9.11 Нехай функція $f(x)$ диференційовна на відрізку $[a, b]$, причому $ab > 0$. Довести, що існує $c \in [a, b]$ таке, що

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = f(c) - cf'(c).$$

9.12 Функція $f(x)$ неперервна на $[0, 1]$ і диференційовна на $(0, 1)$. Довести, що якщо $f(0) = f(1) = 0$, то $f'(x) = f(x)$ в деякій точці $x \in (0, 1)$.

9.13 Нехай $f(x)$ – функція, яка має неперервні похідні до $n+1$-го порядку включно і

$$\ln\left(\frac{f(b) + f'(b) + \ldots + f^{(n)}(b)}{f(a) + f'(a) + \ldots + f^{(n)}(a)}\right) = b - a,$$

де $a < b$. Довести, що знайдеться $c \in (a, b)$ таке, що

$$f^{(n+1)}(c) = f(c).$$

9.14 Функція $f(x)$ визначена і диференційовна на відрізку $[0, a]$, причому $f(0) = 0$. Довести, що для будь-якого $b \in (0, +\infty)$ на відрізку $[0, a]$ знайдеться точка x_0 така, що $bf(x_0) = (a - x_0)f'(x_0)$.

9.15 Відомо, що $x + e^x = y + e^y$. Чи випливає звідси, що $\sin x = \sin y$?

9.16 Чи існує нелінійна функція, визначена на всій дійсній осі і яка має похідні всіх порядків, так, що при будь-якому k її k-та похідна всюди за абсолютною величиною не перевищує $1/2^k$?

9.17 Функція $f(x)$ визначена на всій дійсній осі. Відомо, що для всякого x і для всякого $h > 0$ $|f(x+h) - f(x-h)| < h^2$. Довести, що $f(x) \equiv const$.

9.18 Нехай $f(x)$ – двічі диференційовна на $(0,+\infty)$ функція і нехай для всіх $x>0$ виконуються нерівності $|f(x)|\le A$, $|f''(x)|\le B$. Довести, що $|f'(x)|\le 2\sqrt{AB}$ на $(0,+\infty)$.

9.19 Знайти всі визначені на дійсній осі двічі диференційовні функції $f(x)$ такі, що $f'(x)f''(x)=0$ для кожного x.

9.20 Функція $f(x)$неперервна на $[a,b]$, двічі неперервно диференційовна на(a,b), задовольняє рівнянню $f''(x)=e^x\cdot f(x)$ і умовам $f(a)=f(b)=0$. Знайти $f(x)$.

9.21 Нехай $f(x)$ – неперервна на всій числовій осі функція. Чи завжди існують неперервні функції $g(x)$ і $h(x)$ такі, що для всіх $x\in R$

$$f(x)=g(x)\sin x+h(x)\cos x\,?$$

9.22 Чи існує така неперервна на всій дійсній прямій функція $f(x)$, що $f(f(x))=e^{-x}$ для всіх x?

9.23 Функція $f(x)$ визначена для всіх дійсних значень аргументу і приймає дійсні значення, причому

$$f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-(f(x))^2}\,,$$

де $a>0$. Довести, що функція $f(x)$ періодична. (Навести приклад такої функції, відмінної від тотожної константи, при $a=1$).

9.24 Чи існує функція, визначена на $[0,1]$ і необмежена в околі будь-якої точки цього відрізка?

9.25 Графік неперервної функції $y=f(x)$ вгнутий і $f(0)=0$. Довести, що $\dfrac{f(x)}{x}$ зростає при $x>0$.

9.26 Чи існує неперервна функція $f:R\to R$ така, що при раціональному x $f(x)$ ірраціональне, а при ірраціональному x $f(x)$ раціональне?

9.27 Нехай $f(x)$ і $g(x)$ – визначені на всій числовій прямій періодичні функції. Відомо, що $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-g(x)\right)=0$. Довести, що $f(x)\equiv g(x)$.

9.28 Чи може графік неперервної функції $f: R\to R$ перетинати кожну невертикальну пряму нескінченне число раз?

9.29 Довести рівність $\dfrac{d^n\left(x^{n-1}e^{1/x}\right)}{dx^n}=(-1)^n\dfrac{e^{1/x}}{x^{n+1}}$.

9.30 Довести, що не існує многочлена $F(x)$, який задовольняє при всіх дійсних x нерівності $F'(x)\cdot F''(x)>F(x)\cdot F'''(x)$. Навести приклад функції $F(x)$ з такою властивістю.

9.31 Чи може періодична функція $f(x)$ для всіх $x\in R$ задовольняти умові $f''(x)\cdot f(x)>0$?

9.32 Нехай функція $f(x)$ двічі неперервно диференційовна на $[0,1]$ і задовольняє умовам: 1) $f(0)=f'(0)=1$; 2) $f''(x)\ge 0$ для будь- якого $x\in(0,1)$; 3) $\int\limits_0^1 f(x)dx=\dfrac{3}{2}$.

Визначити функцію $f(x)$.

9.33 Чи існує функція на $[0,2]$, яка задовольняє наступним умовам: $f(x)$ неперервно диференційовна на $[0,2]$; $f(0)=f(2)=1$; $|f'(x)|\le 1$; $\left|\int\limits_0^2 f(x)dx\right|\le 1$?

9.34 Нехай $f: R\to R$ – диференційовна функція. Довести, що знайдеться точка $t\in[0,1]$ така, що

$$f(1)-f(0)=\frac{\pi}{2}\sqrt{1-t^2}\cdot f'(t).$$

Побудувати графіки функцій (9.35-9.43).

9.35 $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^{2n}x$. **9.36** $y=\lim\limits_{n\to\infty}(x-1)\,arctg\,x^n$.

9.37 $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n}$. **9.38** $y=\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\dfrac{x}{1+x^2-e^{\alpha x}}$.

9.39 $y=\cos(2\arccos x)$. **9.40** $y=tg(3arctg\,x)$.

9.41 $y=e^{\log_{\sqrt{e}}(\sin x+\cos x)}$. **9.42** $y=arctg\dfrac{1+x}{1-x}$.

9.43 $f(x)=\begin{cases}|x|^{1/|x|} & при\ x\neq 0,\\ 1 & при\ x=0.\end{cases}$

10 Інтеграли

10.1 Знайти первісну для функції $f(x)=\dfrac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}$.

10.2 Знайти невизначений інтеграл $\int\dfrac{dx}{\cos^3 x+\sin^3 x}$.

10.3 Знайти $\int\dfrac{x^2}{\left[(1+x^2)arctg\,x-x\right]^2}dx$.

10.4 Знайти $\int\left(1+x-\dfrac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$.

10.5 Знайти $\int\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\,dx$.

10.6 Знайти $\int\dfrac{x\sin x+\cos x}{x^2+\cos^2 x}dx$.

10.7 При яких a "береться" інтеграл $\int\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{a}{x^2}\right)e^x dx$?

10.8 При якій умові інтеграл $\int\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^4-2x^2+1}dx$ є раціональною функцією?

10.9 Обчислити $\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{\cos^2 x}{(1+\sin x)(1+x^2)}dx$.

10.10 Обчислити $\int\limits_{-1}^{1} \frac{xe^{x/2} + x^2 + 1}{e^x + 1} dx$.

10.11 Обчислити $\int\limits_{-2}^{2} \frac{x^5 + 3\sqrt[3]{x} - 2\sin x + 1}{x^2 + 4} dx$.

10.12 Обчислити $\int\limits_{-1}^{1} x^{2013} \ln\left(1 + e^x\right) dx$.

10.13 Обчислити $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\left(e^x + 1\right)\sqrt{x^2 + 1}}$.

10.14 Обчислити $\int\limits_{\lg 0,5}^{\lg 2} \frac{dx}{\left(10^x + 1\right)\sqrt{x^2 + 1}}$.

10.15 Обчислити $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{dx}{\left(e^x + 1\right)\cos x}$.

10.16 Обчислити $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{3 + 2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2 - \pi x + \pi^2} dx$.

10.17 Обчислити $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{1 + 4\cos^2 \frac{x}{2}}{x^2 - \pi x - 2\pi^2} dx$.

10.18 Обчислити $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{4\sin^2 x - 3}{2x^2 - \pi x - \pi^2} dx$.

10.19 Обчислити $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{3 + 4\cos^2 x}{4x^2 - 2\pi x + \pi^2} dx$.

10.20 Обчислити $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{3 + 4\sin^2 \frac{x}{2}}{\sqrt{x^2 - \pi x + 9}} dx$.

10.21 Обчислити $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{\sqrt{2\pi^2 - x^2 + \pi x}} dx$.

10.22 Обчислити $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{2-\cos^2 x}{\sqrt{2x^2 - \pi x + 2\pi^2}} dx$.

10.23 Обчислити $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{5+2\sin^2 x}{\sqrt{3\pi^2 - 2x^2 + \pi x}} dx$.

10.24 Обчислити $\int\limits_0^{\pi} \frac{1+2\cos^3 x}{\sqrt{x^2 - \pi x + 4}} dx$.

10.25 Обчислити $\int\limits_0^{2\pi} \frac{4+3\sin^5 x}{\sqrt{3\pi^2 - x^2 + 2\pi x}} dx$.

10.26 Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{2} \frac{\sqrt{\sin(3-x)}\,dx}{\sqrt{\sin(3-x)} + \sqrt{\sin(x+1)}}$.

10.27 Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{1} \frac{(x-1)e^x dx}{(x+1)^3}$.

10.28 Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{1} \frac{xe^x dx}{(x+1)^2}$.

10.29 Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+ctg^{2013} x}$.

10.30 Обчислити $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \ln(ctg\, x + 1) dx$.

10.31 Обчислити $\int\limits_0^{1} \frac{\ln(x+1)}{1+x^2} dx$.

10.32 Обчислити $\int\limits_0^{\pi} \frac{x\sin x}{ch^2\left(\frac{\cos x}{2}\right)} dx$.

10.33 Нехай $f(x)$ – неперервна функція. Обчислити

$$\int\limits_a^b \frac{f(x-a)}{f(x-a)+f(b-x)} dx.$$

10.34 Обчислити $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{e^x + \cos x - \sin x} dx$.

10.35 Довести, що для всякої непарної функції $f(x)$ при будь-якому $a > 0$ має місце рівність

$$\int\limits_{-a}^{a} \frac{dx}{1 + f(x) + \sqrt{1 + f^2(x)}} = a.$$

10.36 Обчислити $\int\limits_a^b \frac{dx}{\cos(x-a) \cdot \cos(b-x)}$.

10.37 Обчислити $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + (tg\, x)^{\sqrt{2}}}$.

10.38 Нехай $f(x)$ – неперервна, диференційовна і монотонно зростаюча функція на $[a, b]$, $g(x)$ – функція обернена до $f(x)$. Довести, що

$$\int\limits_a^b f(x) dx + \int\limits_{f(a)}^{f(b)} g(x) dx = bf(b) - af(a).$$

10.39 Довести, що $\forall a > 0$ і $\forall n \in \mathrm{N}$

$$\int\limits_0^1 (2x-1)^{2n+1} a^{x^2 - x} dx = 0.$$

10.40 Нехай лінія $y = f(x)$ симетрична відносно точки $C(a, b)$ і неперервна. Довести, що $\int\limits_0^{2a} f(x) dx = 2ab$.

10.41 Обчислити $\int\limits_0^{\pi} arcctg(\cos x) dx$.

10.42 Обчислити $\int\limits_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx$.

10.43 Обчислити $\int\limits_0^1 \frac{x \ln(x^2 + x) + \ln(x+1)}{x(x+1)} dx$.

10.44 Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{\pi} \frac{x^2}{1-\cos x}dx$.

10.45 Обчислити $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\ln(\cos x)}{2^x+1}dx$.

10.46 Функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[0, 1]$. Довести, що $\int\limits_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} f(\sin x)dx$.

10.47 Парна функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[-1, 1]$. Довести, що $\int\limits_0^{\pi} xf(\cos x)dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} f(\cos x)dx$.

10.48 Довести, що для будь-якого цілого n справедлива рівність $\int\limits_0^{2\pi} \sin(\sin x + nx)dx = 0$.

10.49 Обчислити $\int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}\right)^2 d\varphi$, $n \in N$.

10.50 Обчислити $\int\limits_0^{2013\pi} \frac{\sin 2013x}{\sin x}dx$.

10.51 Обчислити $\int\limits_0^{1} \frac{x^b - x^a}{\ln x}dx$ ($a > 0$, $b > 0$) .

10.52 Довести, що при $a > 1$ справедлива рівність

$$\int\limits_0^{\pi/2} \cos ax \cdot (\cos x)^{a-2}\, dx = 0 .$$

10.53 Знаючи, що $\int\limits_0^{1} \frac{\ln(1+x)}{x}dx = \frac{\pi^2}{12}$, обчислити

$$\int\limits_0^{1} \frac{\ln(1-x^3)}{x}dx .$$

10.54 Обчислити $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x(b + c\ln x)}{x^4 + a^4} dx \quad (a > 0)$.

10.55 Обчислити $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^m arctg\, x}{x^{2(m+1)} + 1} dx \quad (m > 0)$.

10.56 Обчислити $\int\limits_0^{+\infty} \frac{arctg\, x^2}{x^2 + 1} dx$.

10.57 Обчислити $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{2013}\, dx}{(1 + x^2)(1 + x^{2013})}$.

10.58 Довести, що $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)(1 + x^{\alpha})}$ не залежить від величини α.

10.59 Обчислити $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{(1 + x^4)(1 + x^{2014})} dx$.

10.60 Довести, що $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)(1 + a^x)}$ не залежить від величини a.

10.61 Довести, що невласний інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx$ ($a > 0$), збіжний і знайти його значення.

10.62 Обчислити $\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1 + x^{\alpha}} - \frac{1}{1 + x^{\beta}} \right) \frac{1}{x} dx$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

10.63 Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} \left(1 - \frac{1}{x} arctgx \right) dx$.

10.64 Знайти границі: а) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n^4 \int\limits_n^{n+1} \frac{x\, dx}{1 + x^5} \right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n^3 \int\limits_n^{2n} \frac{x\, dx}{1 + x^5} \right)$.

10.65 Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^{2n}}$.

10.66 Нехай $f(x)$ – неперервна на $[0,1]$ функція і для будь-яких x, $y\in[0,1]$ виконана нерівність $xf(y)+yf(x)\le 1$. Довести, що $\int\limits_0^1 f(x)dx\le\frac{\pi}{4}$.

10.67 Нехай функція $f(x)$ неперервна на півосі $(0,+\infty)$ разом з похідними $f'(x)$, $f''(x)$, причому $f(x)\ge\alpha>0$ і інтеграл $\int\limits_0^{+\infty}|f''(x)|dx$ збігається. Довести збіжність інтеграла

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{(f'(x))^2}{(f(x))^{2013}}dx.$$

11 Ряди

11.1 Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10^{\ln n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{10^{\ln n}}$; в) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n10^{\ln(\ln n)}}$.

11.2 Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{10}}{2^{\sqrt[3]{n}}}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(n!)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\ln n}$.

11.3 Чи збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n}}$?

11.4 Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ ($(2n-1)!!$ означає добуток всіх непарних натуральних чисел від 1 до $2n-1$ включно, а $(2n)!!$ – добуток всіх парних натуральних чисел від 2 до $2n$ включно).

11.5 Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n^2}$, де x_n – додатні корені рівняння $x = tg\, x$, занумеровані в порядку зростання.

11.6 Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, де $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \cos a_n$.

11.7 Дано ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(a_n > 0\right)$. Нехай існує $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1/a_n\right)}{\ln n} = q$. Довести, що при $q > 1$ ряд збіжний, а при $q < 1$ розбіжний.

11.8 Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n > 0$) збіжний. Довести, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ теж збіжний.

11.9 Чи збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{-1}$, де $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_n = u_{n-2} + u_{n-1}$ при $n \geq 3$?

11.10 Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos^2\left(\pi\sqrt{n^2 + n}\right).$$

11.11 Навести приклад такого збіжного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ln n$ розбіжний.

11.12 Дослідити на абсолютну та умовну збіжність числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n}\right)$.

11.13 Дослідити на абсолютну та умовну збіжність числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n}\right)$.

11.14 Для всіх дійсних значень x дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)^{x}$.

11.15 Для всіх дійсних значень x дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\sin\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\right)^{x}$.

11.16 Знайти суму ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$.

11.17 Знайти суму рядів: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)\sqrt{n(n+1)}}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+2}+(n+2)\sqrt{n+1}}$.

11.18 Знайти суму рядів: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} arctg\frac{2}{n^2}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} arctg\frac{1}{2n^2}$.

11.19 Знайти суму рядів: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-1}}{n(n+1)}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n(n+1)}}$.

11.20 Знайти суму рядів: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arccos\frac{1+\sqrt{n(n-1)}}{\sqrt{n(n+1)}}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arccos\frac{1+\sqrt{(n-1)n(n+1)(n+2)}}{n(n+1)}$.

11.21 Знайти суму ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$.

11.22 Знайти суму ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$.

11.23 Відомо, що $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. Знайти:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

11.24 Довести збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4n-1}{n^2(2n-1)^2}$ і виразити його суму через суму ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=S$.

11.25 Нехай $\{u_n\}$ – послідовність Фібоначчі ($u_1=u_2=1$, $u_n=u_{n-2}+u_{n-1}$, $n\ge 3$). Довести, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{-n}u_n$ збіжний і знайти його суму.

11.26 Знайти суму ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)2^n}$.

11.27 Знайти $\dfrac{1+\dfrac{\pi^4}{5!}+\dfrac{\pi^8}{9!}+\dfrac{\pi^{12}}{13!}+\ldots}{\dfrac{1}{3!}+\dfrac{\pi^4}{7!}+\dfrac{\pi^8}{11!}+\dfrac{\pi^{12}}{15!}+\ldots}$.

11.28 Знайти $\dfrac{1+\dfrac{\pi^4}{2^4\cdot 4!}+\dfrac{\pi^8}{2^8\cdot 8!}+\dfrac{\pi^{12}}{2^{12}\cdot 12!}+\ldots}{\dfrac{1}{2!}+\dfrac{\pi^4}{2^4\cdot 6!}+\dfrac{\pi^8}{2^8\cdot 10!}+\dfrac{\pi^{12}}{2^{12}\cdot 14!}+\ldots}$.

11.29 Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}+\ldots}{\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^6}{6}+\ldots}$.

11.30 Довести ірраціональність числа $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n!)^2}$.

11.31 Довести рівність $\int\limits_0^1 x^{-x}dx=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-n}$.

11.32 Довести рівність $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!}=e^{\frac{x^2}{2}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$.

11.33 Розкласти в ряд за степенями x функцію $f(x)=\int_0^x \frac{\sin^2 t}{t}dt$ і вказати інтервал збіжності цього ряду.

11.34 При яких дійсних x збігаються ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(nx)$? б) $\sum_{n=1}^{\infty}\cos(nx)$?

11.35 Нехай $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(n+x)}$. Знайти $f(5)$.

11.36 Обчислити інтеграл $\int_0^{\infty}\frac{x\,dx}{e^x+1}$, якщо відомо, що

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

11.37 Знаючи, що $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$, обчислити

$$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}dx.$$

11.38 Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n\, n!}x^n$.

11.39 Знайти суму ряду $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}\cos^3\left(3^n x\right)$.

11.40 Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}3^n\sin^3\frac{x}{3^n}$.

11.41 Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}tg\frac{x}{2^n}$, $0\le x\le\frac{\pi}{4}$.

11.42 Знайти суму ряду $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$.

11.43 Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ln\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$.

11.44 Нехай $f(x)=\dfrac{1+x}{1+x+x^2}$. Знайти $f^{(n)}(0)$.

11.45 Нехай $f(x)=\dfrac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$. Знайти $f^{(n)}(0)$.

11.46 Нехай $f(x)=x^2\cos 2x$. Знайти $f^{(10)}(0)$.

11.47 Нехай $f(x)=\dfrac{x^5}{2012+x^2}$. Знайти $f^{(2013)}(0)$.

12 Диференціальні рівняння

12.1 Розв'язати диференціальне рівняння $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2x-y^2}$.

12.2 Розв'язати задачу Коші $xy'+y+2xy-1=0$, $y(1)=1$.

12.3 Розв'язати диференціальне рівняння

$$y'+e^y p(x)=q(x).$$

12.4 Розв'язати диференціальне рівняння

$$y'\cos y=x-\sin y.$$

12.5 Розв'язати диференціальне рівняння $y'=\left(\dfrac{3x+y^3-1}{y}\right)^2$.

12.6 Розв'язати диференціальне рівняння $y'=x+\dfrac{x^3}{y}$.

12.7 Розв'язати диференціальне рівняння

$$\left(y^4-3x^2\right)dy+xydx=0.$$

12.8 Розв'язати диференціальне рівняння

$$\frac{2}{3}xyy'=\sqrt{x^6-y^4}+y^2.$$

12.9 Знайти інтегральну криву рівняння

$$\left(2x^3y^2-y\right)dx+\left(2x^2y^3-x\right)dy=0,$$

що проходить через точку $(1,\,1)$.

12.10 Знайти інтегральні криві рівняння $xdy - y(2+3xy)dx = 0$, які перетинають пряму $x = 1$ під прямим кутом.

12.11 Знайти інтегральні криві рівняння $xdy - y(2+3xy)dx = 0$, дотичні до яких в точці з абсцисою $x = 1$ утворюють з додатним напрямом осі Ox кут 45^0.

12.12 Знайти розв'язок диференціального рівняння $y' + y'' + y''' + \ldots = x + x^2$, який задовольняє умову $y = 0$ при $x = 0$.

12.13 Розв'язати задачу Коші:

$$\left(2x^3 + xy\right)dy + \left(y^2 - yx^2\right)dx = 0, \; y = 1 \text{ при } x = 1.$$

12.14 Два тіла нагріли до $100^0 C$, а потім помістили в середовище, температура якого підтримується постійною і дорівнює $0^0 C$. Через 10 хвилин після початку охолодження тіл температура першого знизилася до $80^0 C$, а температура другого – до $64^0 C$. Через скільки хвилин від початку охолодження тіл температура одного з них буде на $25^0 C$ більше, ніж температура іншого, якщо швидкість зміни температури тіла пропорційна різниці температур тіла і навколишнього середовища?

12.15 Знайти найбільше значення функції $f(x) = \dfrac{4x}{1-y}$, де $y = y(x)$ – розв'язок задачі Коші $\left(x^2+1\right)(1-y)y' = 2xy\left(x^2+2\right)$, $y(1) = -2$.

12.16 Знайти найбільше значення функції $f(x) = \dfrac{4x}{1-y}$, де $y = y(x)$ – розв'язок задачі Коші $\left(x^2+3\right)(1-y)y' = 2xy\left(x^2+4\right)$, $y(1) = -4$.

12.17 Розв'язати диференціальне рівняння

$$((y-x)\sin y + 1)y' = 3x^2 y - 3x^3 + 1.$$

12.18 Розв'язати задачу Коші

$$\left(y+2\frac{x}{y}\ln y\right)dx+\left(2x+\left(\frac{x}{y}\right)^2\right)dy=0,\ y(2)=1.$$

12.19 Довести, що всякий розв'язок диференціального рівняння $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2+x^4+\cos x}$ обмежений.

12.20 Довести, що всі розв'язки диференціального рівняння $y'=\frac{1}{1+x^2+y^2}$ обмежені на всій осі Ox.

12.21 Довести, що рівняння $y'+ay=q(x)$, де a – постійна, відмінна від нуля, а $q(x)$ періодична з періодом T функція, має один періодичний розв'язок (з тим же періодом T).

12.22 Задано рівняння $y'=\frac{y}{x}+\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$. Якою повинна бути функція $\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$, щоб загальним розв'язком даного рівняння було $y=\frac{x}{\ln|Cx|}$?

12.23 Відомо, що $f'\left(\sin^2 x\right)=\cos 2x+tg^2 x$. Знайти $f(x)$ при $0<x<1$.

12.24 Нехай в диференціальному рівнянні $y'+a(x)y=f(x)$ функції $a(x)$ і $f(x)$ неперервні на $[0,+\infty)$, причому $a(x)\ge c>0\ \ \forall x\in[0,+\infty)$. Довести, що з обмеженості на $[0,+\infty)$ функції $f(x)$ випливає обмеженість на тому ж проміжку будь-якого розв'язку рівняння. А якщо $f(x)\to 0$ при $x\to+\infty$, то кожний розв'язок цього рівняння прямує до нуля при $x\to+\infty$.

12.25 Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y=xy'+x^2y''.$$

12.26 Функція $f(x)$ неперервна на $[a, b]$, двічі неперервно диференційовна на (a, b), задовольняє рівнянню $f'' = e^x f$ і умовам $f(a) = f(b) = 0$. Знайти $f(x)$.

12.27 Чи може функція $x^2 \sin x$ бути розв'язком на інтервалі $(-a, a)$ $(a > 0)$ рівняння $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ з коефіцієнтами, неперервними на цьому інтервалі ?

12.28 Чи може функція $y = 1 - \cos x$ бути розв'язком на інтервалі $(-a, a)$ $(a > 0)$ рівняння $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, де коефіцієнти $p(x), q(x)$ є функціями, неперервними на цьому інтервалі ?

12.29 Виразити через елементарні функції і інтеграли від них загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' - xy' - y = 0$.

12.30 Точка рухається по прямій так, що середня швидкість за будь-який проміжок часу дорівнює середньому арифметичному швидкостей на кінцях проміжку. Довести, що точка рухається з постійним прискоренням.

12.31 Знайти всі парні та непарні функції, які є розв'язками диференціального рівняння $y'' + \sin y' + y = 0$.

12.32 Знайти всі двічі диференційовні на $[0, 1]$ функції $y(x)$ такі, що $y(0) = y(1) = 0$ і які задовольняють диференціальне рівняння $y'' = (x^2 + 1)ye^{y \cdot \sqrt[2013]{x}}$.

12.33 Нехай $y(x)$ – розв'язок задачі Коші

$$y'' = x^2 y, \quad y(0) = 1, \ y'(0) = 0.$$

Показати, що $y(x) > 0$ при всіх x.

12.34 Розв'язати диференціальне рівняння

$$y' + 2yy'' = (y')^2 + xy'' + 2013.$$

12.35 Довести, що два розв'язки диференціального рівняння

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

з неперервними коефіцієнтами, які мають максимум в одній і тій же точці, лінійно залежні.

12.36 Знайти загальний розв'язок рівняння
$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{dy}{dx}+y=0.$$

12.37 Розв'язати систему
$$\begin{cases} y''+\dfrac{(y')^2}{y}=x'+\dfrac{xy'}{y}, \\ x'y+xy'=1, \end{cases}$$
де x, y – функції t.

13 Функційні рівняння

13.1 Розв'язати функційне рівняння в класі неперервних на R функцій:
$$f(x+y)=f(x)+f(y), \quad \forall x\in R, \ \forall y\in R.$$

13.2 Знайти усі неперервні на R функції, для яких
$$f\left(\sqrt{x^2+y^2+1}\right)=f(x)+f(y), \quad \forall x\in R, \ \forall y\in R.$$

13.3 Розв'язати функційне рівняння в класі неперервних на $R_+=[0,+\infty)$ функцій:
$$f(x+y)-f(x-y)=4\sqrt{f(x)\cdot f(y)}, \quad \forall x\ge y\ge 0.$$

13.4 Знайти усі неперервні на R функції, для яких
$$f(x+y)=f(x)\cdot f(y), \quad \forall x\in R, \ \forall y\in R.$$

13.5 Розв'язати функційне рівняння в класі неперервних на $(0,+\infty)$ функцій:
$$f(x\cdot y)=f(x)+f(y), \quad \forall x>0, \ \forall y>0.$$

13.6 Знайти усі неперервні на R функції, для яких
$$xf(y)+yf(x)=(x+y)f(x)\cdot f(y), \quad \forall x\in R, \ \forall y\in R.$$

13.7 Розв'язати функційне рівняння в класі неперервних на $(0,+\infty)$ функцій:
$$f(x\cdot y)=y^\alpha f(x)+x^\alpha f(y), \quad \forall x>0, \ \forall y>0.$$

13.8 Розв’язати в класі всіх многочленів функційне рівняння

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy(x+y),\quad \forall x\in R,\ \forall y\in R.$$

13.9 Розв’язати функційне рівняння $f(x+y)=\dfrac{f(x)\cdot f(y)}{f(x)+f(y)}$ в класі неперервних на деякому інтервалі функцій.

13.10 Розв’язати функційне рівняння $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)\cdot f(y)}$ в класі неперервних і строго монотонних на деякому інтервалі функцій.

13.11 Розв’язати функційне рівняння

$$f(x)+xf\left(\frac{x+1}{3x-1}\right),\quad \forall x\in R\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}.$$

13.12 Розв’язати функційне рівняння

$$3f(y)-2f(x-y)+f(x+y)=12y-2x+2,\ \forall x\in R,\ \forall y\in R.$$

13.13 Розв’язати функційне рівняння

$$f\left(x^2-y^2\right)=\left(f(x+y)\right)^3,\quad \forall x\in R,\ \forall y\in R.$$

13.14 У класі неперервних у точці 0 функцій розв’язати функційне рівняння

$$f(3x)=f(x),\quad \forall x\in R.$$

13.15 У класі обмежених в околі точки 0 функцій розв’язати функційне рівняння

$$f(x)=2f(2x)+x,\quad \forall x\in R.$$

13.16 Розв’язати функційне рівняння

$$f(3x+1)=9f(x),\quad \forall x\in R$$

у класі функцій, що мають неперервні другі похідні.

13.17 Розв’язати функційне рівняння

$$f(x+y)=f(x)+x^2yf(x),\quad \forall x\in R,\ \forall y\in R.$$

13.18 У класі неперервних функцій розв’язати функційне рівняння

$$f\left(x^3-y^3\right)=f^3(x)-f^3(y),\quad \forall x\in R,\ \forall y\in R.$$

13.19 Нехай функція $f: R \to R$ задовольняє співвідношенню

$$f(x+a)+f(x-a)=\sqrt{2}f(x), \quad \forall x \in R,$$

де $a \neq 0$ – фіксоване дійсне число. Довести, що $f(x)$ – періодична.

13.20 Обчислити $f(2014)$, якщо функція $f: R \to R$ задовольняє умову $f(1)=2$ і тотожність

$$f(x) \equiv f(x+1) \cdot f(x-1).$$

13.21 Розв'язати функційне рівняння

$$\log_{f(x)}(f(x)+1)=\log_{x^2+2x+3}(x^2+2x+4), \quad \forall x \in R.$$

13.22 У класі функцій $f:[0, 1] \to R$ розв'язати функційне рівняння

$$f(x+f(x))=f(x), \quad \forall x \in [0, 1].$$

13.23 У класі функцій $f: Q \to Q$, для яких $f(1)=3$, розв'язати функційне рівняння

$$2f(xy)=f(x) \cdot f(y)-f(x+y)+2, \quad \forall x \in Q, \ \forall y \in Q.$$

13.24 Знайти таку функцію $f: R \to R$, що

$$f(x^2+y)=f(x)+f(y^2), \quad \forall x \in R, \ \forall y \in R.$$

13.25 Знайти функцію $f: R \to R$, не рівну тотожно нулеві, для якої

$$f(x)f(y)=f(x-y), \quad \forall x \in R, \ \forall y \in R.$$

13.26 Для кожного $a \in R$ розв'язати функційне рівняння

$$x^2 f(y)+yf(x^2)=f(xy)+a, \quad \forall x \in R, \ \forall y \in R.$$

13.27 Відшукати усі функції $f: R \to R$, що задовольняють функційне рівняння

$$x(f(x)+f(-x)+2)+2f(-x)=0, \quad \forall x \in R.$$

13.28 Знайти таку функцію $f: R \to R$, що задовольняє функційне рівняння

$$f(x-f(y))=1-x-y, \quad \forall x \in R, \ \forall y \in R.$$

13.29 Відшукати усі функції, визначені на $[0, +\infty)$, що задовольняють функційне рівняння

$$f\left((x-y)^2\right) = f\left(x^2\right) + f\left(y^2\right) - 2xy, \quad \forall x \in R, \ \forall y \in R.$$

13.30 Функція $f : R \to R$ неперервна і задовольняє функційне рівняння

$$f^2(x) + f(x)f(y) = x^2 + xy, \quad \forall x \in R, \ \forall y \in R.$$

Знайти усі розв'язки цього рівняння.

13.31 Функція $f : R \to R$ при $x + y \neq 0$ задовольняє тотожність

$$f(xy) \equiv \frac{f(x) + f(y)}{x + y}.$$

Чи існує таке значення $x \in R$, для якого $f(x) \neq 0$?

13.32 Знайти усі функції $f : R \to R$, що задовольняють умову

$$f\left(x^3 - y^3\right) = f^3(x + y), \quad \forall x \in R, \ \forall y \in R.$$

13.33 Знайти усі функції $f : R \to R$, що задовольняють умову

$$f(x - y) = f\left(x^3 - y^3\right), \quad \forall x \in R, \forall y \in R.$$

13.34 Знайти усі функції $f : R \to R$, що задовольняють умови:

а) $f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall x \in R, \ \forall y \in R;$

б) $f(x) = x^2 f\left(\dfrac{1}{x}\right), \quad \forall x \in R \setminus \{0\}.$

13.35 Знайти усі функції $f : Q_+ \to Q_+$, що задовольняють умови:

а) $f(x + 1) = f(x) + 1, \quad \forall x \in Q_+;$

б) $f\left(x^3\right) = f^3(x), \quad \forall x \in Q_+.$

13.36 Знайти всі функції $f : R \to R$, для яких при будь-яких $x, y \in R$ виконується рівність

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)\cos y.$$

13.37 Знайти всі функції $f : R \to R$, які при будь-яких дійсних x, y задовольняють рівняння

$$f(x) \cdot f(y) - f(xy) = xy + x + y - 1 .$$

13.38 Для заданого значення $n \in N$ знайти всі функції $f : N \to R$, які задовольняють тотожність

$$f(m + k) = f(mk - n), \quad \forall m, k \in N; \; mk > n .$$

13.39 Нехай $S = \{x \in R : x > -1\}$. Знайти усі функції $f : S \to S$, що задовольняють умови:

а) $f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x), \quad \forall x \in S, \; \forall y \in S$;

б) $\dfrac{f(x)}{x}$ строго зростає на кожному з інтервалів $(-1, 0)$ та $(0, +\infty)$.

13.40 Знайти усі функції $f : R_+ \to R_+$, для яких виконуються такі умови:

а) $f(xf(y)) = yf(x), \quad \forall x \in R_+, \; \forall y \in R_+$;

б) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

13.41 Знайти усі функції $f : [0,1] \to R$, що задовольняють умові

$$2f(\sin x) + 3f(\cos x) = \sin x, \quad \forall x \in [0, \pi/2].$$

13.42 Нехай a, b, c, d – дійсні числа, причому $b \neq 0$. Знайти усі функції $f : R \to R$, для яких

$$f(x + df(y)) = ax + by + c, \quad \forall x \in R, \; \forall y \in R .$$

13.43 Чи існує неперервна на всій числовій осі функція $f(x)$, для якої

$$f(f(x)) = 1 - 2x, \quad \forall x \in R \, ?$$

13.44 Знайти усі многочлени $f(x)$ з дійсними коефіцієнтами, для яких

$$f(x^2) = f(x) f(x - 1), \quad \forall x \in R .$$

13.45 Знайти всі функції $f: Z \to Z$, для яких при будь-якому $x \in Z$ виконується співвідношення

$$3f(x) - 2f(f(x)) = x.$$

13.46 Нехай функція $f: Z_+ \to Z_+$ задовольняє співвідношення

$$f(f(n)) + f(n) = 2n + 3, \quad \forall n \in Z_+.$$

Знайти $f(2014)$.

13.47 Нехай функція $f: N \to N$ задовольняє співвідношення

$$f(n) + f(n+2) \leq 2f(n+1), \quad \forall n \in N.$$

Довести, що на площині існує така пряма, яка містить нескінченну кількість точок з координатами $(n, f(n))$.

13.48 Нехай $f: N \to N$. Чи правильно, що із справедливості рівності

$$f(x+y) = f(f(x) + f(y)), \quad \forall x \in N, \ \forall y \in N,$$

випливає, що $f(x+y) = f(x + f(y))$, $\forall x \in N$, $\forall y \in N$?

14 Різні задачі

14.1 Чому дорівнює сума всіх чотиризначних чисел, в десятковому запису яких беруть участь тільки цифри 1, 2, 3, 4, 5, якщо:

а) числа повинні складатись із різних цифр;

б) цифри в числах можуть повторюватись.

14.2 Знайти суму всіх п’ятицифрових чисел, складених із цифр 2, 3, 4, 5 і 6, якщо:

а) числа складаються із різних цифр;

б) цифри в числах можуть повторюватись.

14.3 Знайти всі натуральні числа, які закінчуються на 2013 і які після закреслення останніх чотирьох цифр зменшуються в ціле число раз.

14.4 Довести, що ні при якому натуральному n число $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$ не може бути точним квадратом.

14.5 Довести, що сума квадратів п'яти послідовних цілих чисел не може бути точним квадратом цілого числа.

14.6 Довести, що добуток чотирьох послідовних натуральних чисел не може бути точним квадратом цілого числа.

14.7 Довести, що $\sqrt{\underbrace{111\ldots1}_{2n\,цифр}-\underbrace{22\ldots2}_{n\,цифр}}=\underbrace{33\ldots3}_{n\,цифр}$.

14.8 Обчислити $\sqrt{\underbrace{44\ldots4}_{2n\,цифр}-11\cdot\underbrace{44\ldots4}_{n\,цифр}+9}$.

14.9 Нехай $A=\underbrace{33\ldots3}_{n\ цифр}$, $B=\underbrace{66\ldots6}_{n\ цифр}$. Із яких цифр складається добуток $A\cdot B$?

14.10 Довести, що для будь-якого натурального n число $\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n+\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n$ є цілим і непарним.

14.11 Довести, що $\frac{(n+1)(n+2)\ldots(2n-1)\cdot 2n}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}=2^n$.

14.12 Спростити вираз $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$.

14.13 Спростити вираз $\frac{\left(4+\sqrt{15}\right)^{3/2}+\left(4-\sqrt{15}\right)^{3/2}}{\left(6+\sqrt{35}\right)^{3/2}-\left(6-\sqrt{35}\right)^{3/2}}$.

14.14 Довести, що якщо n – довільне натуральне число, то дробова частина десяткового розкладу числа $\left(5+\sqrt{26}\right)^n$ починається з n однакових цифр.

14.15 Числа a, b, c, d такі, що $a^2+b^2=c^2+d^2=|ac+bd|$. Чому дорівнює $|ad-bc|$?

14.16 Обчислити, чому дорівнює $ab+cd$, якщо

$$a^2+b^2=1,\quad c^2+d^2=1,\quad ac+bd=0.$$

14.17 Спростити $\underbrace{\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}}}}_{n\ радикалів}$.

14.18 Довести, що якщо відрізки a, b, c утворюють трикутник, то відрізки $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ теж утворюють деякий трикутник.

14.19 Дано 2013 множин, кожна з яких містить по 45 елементів. Відомо, що будь-які дві з цих множин мають рівно один спільний елемент. Довести, що існує елемент, який належить всім 2013 множинам.

14.20 При виготовленні з листового металу закритого бака, що має об'єм 0,25 м^3 та форму прямокутного паралелепіпеда, здійснюється зварювання швів, що проходять по ребрах обох основ і одному бічному ребру, а по інших ребрах здійснюється вигин листового металу. Вартість одного метра звареного шва – 13 грн, а вартість 1 м^2 листового металу – 26 грн. Визначити розміри бака так, щоб його вартість була найменшою.

14.21 Треба перевезти залізницею 20 великих і 250 малих контейнерів. Один вагон вміщує 30 малих контейнерів, вага кожного з яких дорівнює 2 тонни. Великий контейнер займає місце 9 малих і важить 30 тонн. Вантажопідйомність одного вагона – 80 тонн. Знайти мінімальне число вагонів, яке потрібне для перевезення всіх контейнерів.

14.22 Двоє робітників виготовили більше як 29 однакових деталей. Кількість деталей, виготовлених першим робітником, зменшена на 2, буде більше ніж в 3 рази перевищувати кількість деталей, виготовлених другим робітником. Потроєна кількість деталей, виготовлених першим робітником, перевищує подвоєну кількість деталей, виготовлених другим робітником, але менше, ніж на 60. Скільки деталей виготовив кожен робітник?

14.23 Вантаж спочатку розмістили у вагони вантажопідйомністю 80 тонн, але один вагон залишився завантаженим не повністю. Тоді весь вантаж переклали у вагони вантажопідйомністю 60 тонн: знадобилося на 8 вагонів більше і при цьому один вагон також залишився завантаженим не повністю. Нарешті, вантаж переклали у вагони вантажопідйомністю 50 тонн: знадобилося ще на 5 вагонів більше, але при цьому всі вагони виявилися завантаженими повністю. Скільки тонн вантажу було?

14.24 Із заводу на будівельний майданчик потрібно вивезти 1590 блоків. Для перевезення можна використовувати машини трьох типів: вантажопідйомністю 1,5 т, 3 т і 5т. За один рейс на машинах першого типу можна перевезти 26 блоків, другого типу – 45 блоків і третього типу – 75 блоків. Вартість одного рейсу для кожного типу машин відповідно дорівнює 90, 150 і 240 грн. Скільки рейсів на машинах кожного типу потрібно зробити, щоб загальна вартість перевезення усіх блоків була найменшою? (Кожна машина має бути завантажена повністю).

14.25 Числа x, y, z такі, що $x^2+3y^2+z^2=2$. Знайти найбільше та найменше значення виразу $2x+y-z$.

РОЗВ'ЯЗКИ, ВКАЗІВКИ, ВІДПОВІДІ

1.1 Оскільки вектор $\vec{a}+\vec{b}$ колінеарний вектору $\vec{c}$, то існує число λ таке, що $\vec{a}+\vec{b}=\lambda\vec{c}$, отже $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(1+\lambda)\vec{c}$. З тих же міркувань знайдеться число μ таке, що $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(1+\mu)\vec{a}$. Таким чином, вектор $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ колінеарний як вектору $\vec{a}$, так і вектору $\vec{c}$. Але, оскільки вектори $\vec{a}$ і $\vec{c}$ між собою неколінеарні, то $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$; отже $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|=0$.

1.2 Введемо в просторі декартову систему координат і нехай в цій системі координати точок будуть: $A(x_1,\, y_1,\, z_1)$, $B(x_2,\, y_2,\, z_2)$, $C(x_3,\, y_3,\, z_3)$ і $O(x,\, y,\, z)$. Тоді $\overrightarrow{OA}=\{x_1-x,\, y_1-y,\, z_1-z\}$, $\overrightarrow{OB}=\{x_2-x,\, y_2-y,\, z_2-z\}$, $\overrightarrow{OC}=\{x_3-x,\, y_3-y,\, z_3-z\}$. Із рівності $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ одержуємо: $x_1+x_2+x_3-3x=0$, $y_1+y_2+y_3-3y=0$, $z_1+z_2+z_3-3z=0$, що приводить до рівностей $x=\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)$, $y=\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)$, $z=\frac{1}{3}(z_1+z_2+z_3)$. Точка O з такими координатами задовольняє умову задачі, єдиність такої точки очевидна.

1.3 Припустимо, що $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}=\vec{a}\neq\vec{0}$. Повернемо всі вектори навколо точки O в одному напрямі на кут $\varphi=\dfrac{2\pi}{n}$. З одного боку, сума вказаних векторів не зміниться і ми одержимо той же вектор $\vec{a}$, з другого боку, вектор $\vec{a}$ теж повинен повернутись на кут φ; звідси випливає, що $\vec{a}=\vec{0}$. Отже $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}=\vec{0}$.

1.4 Введемо прямокутну декартову систему координат в просторі, помістивши початок координат у вершині A

прямокутника і напрямивши осі так, щоб сторона AB лежала на осі OX, сторона AD – на осі OY (див. рисунок 1.1). Якщо сторони прямокутника рівні a і b, то координати вершин прямокутника у цій системі координат будуть: $A(0,\,0,\,0)$, $B(a,\,0,\,0)$, $C(a,\,b,\,0)$, $D(0,\,b,\,0)$. Нехай $M(x,\,y,\,z)$ – довільна точка простору, тоді $\overrightarrow{MA}=\{-x,-y,-z\}$, $\overrightarrow{MB}=\{a-x,-y,-z\}$, $\overrightarrow{MC}=\{a-x,b-y,-z\}$, $\overrightarrow{MD}=\{-x,\,b-y,\,-z\}$. Шукані рівності легко одержуються безпосереднім обчисленням.

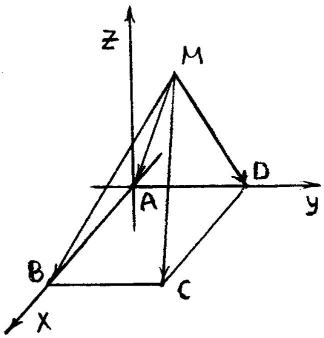

Рисунок 1.1

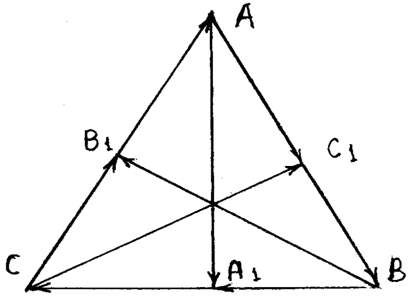

Рисунок 1.2

1.5 Нехай $\left|\overrightarrow{BC}\right|=a$, $\left|\overrightarrow{CA}\right|=b$, $\left|\overrightarrow{AB}\right|=c$ (див. рисунок 1.2). Тоді $\overrightarrow{BA_1}=\dfrac{c}{b+c}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB_1}=\dfrac{a}{a+c}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AC_1}=\dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$. Враховуючи, що $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC_1}$, $\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC_1}$ і те, що $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$, маємо: $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{c}{b+c}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}+\dfrac{a}{a+c}\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}+\dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}=$
$=\dfrac{c}{b+c}\overrightarrow{BC}+\dfrac{a}{a+c}\overrightarrow{CA}+\dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}=\vec{0}$. Але $\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$, тому $\dfrac{c}{b+c}\overrightarrow{BC}+\dfrac{a}{a+c}\overrightarrow{CA}+\dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}=\dfrac{c}{b+c}\overrightarrow{BC}-\dfrac{a}{a+c}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)+$

$+\dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$. Або, $\left(\dfrac{b}{a+b}-\dfrac{a}{a+c}\right)\overrightarrow{AB}+\left(\dfrac{c}{b+c}-\dfrac{a}{a+c}\right)\overrightarrow{BC}=\vec{0}$.

Оскільки вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$ неколінеарні, то це означає, що $\dfrac{b}{a+b}-\dfrac{a}{a+c}=0$ і $\dfrac{c}{b+c}-\dfrac{a}{a+c}=0$. Звідси одержуємо:

$$\begin{cases} bc-a^2=0, \\ c^2-ab=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} bc=a^2, \\ c^2=ab, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c^3=a^3, \\ c^2=ab, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=a, \\ c^2=ab, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=a, \\ a=b. \end{cases}$$

Тобто $a=b=c$, що і потрібно було довести.

1.6 $\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)^2+\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2+\left(\vec{b}-\vec{c}\right)^2+\left(\vec{c}-\vec{a}\right)^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+$ $+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2+\vec{b}^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}^2+\vec{c}^2-$ $-2\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{a}^2=3\left(\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2\right)$, що і треба було довести.

1.7 Якщо один з векторів нульовий, чи вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, доводити нічого. В загальному випадку неважко бачити, що вектор $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{b}$ компланарний з векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, як такий, що перпендикулярний до вектора $\vec{a}\times\vec{b}$. Тоді вектор $\left(\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{b}\right)\times\vec{b}$ перпендикулярний до площини, в якій лежать вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Але вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ теж перпендикулярний до цієї площини, тому він колінеарний вектору $\left(\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{b}\right)\times\vec{b}$, що і треба було довести.

1.8 Введемо прямокутну декартову систему координат, як показано на рисунку 1.3, помістивши початок координат в точку O, що є серединою відрізка O_1O_2. Точки O_1 і O_2 в цій системі матимуть координати: $O_1(-x_0,\,0)$, $O_2(x_0,\,0)$. Нехай $A_1(x,\,y)$ – точка на колі радіуса r_1. Зауважимо, що тоді $(x+x_0)^2+y^2=r_1^2$. Із подібності трикутників O_1A_1B і O_2A_2B випливає, що $\overrightarrow{O_2A_2}=-\dfrac{r_2}{r_1}\overrightarrow{O_1A_1}$.

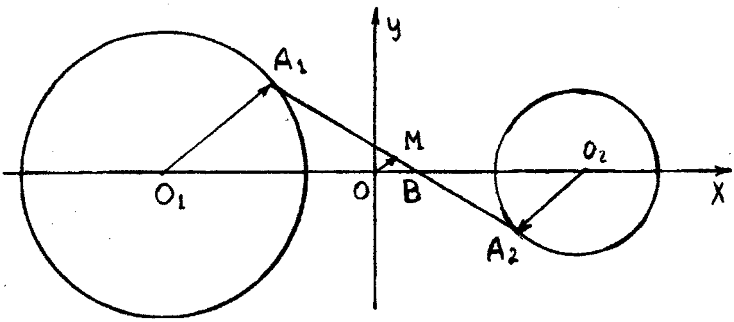

Рисунок 1.3

Оскільки $\overrightarrow{O_1A_1} = \{x + x_0,\ y\}$, то $\overrightarrow{O_2A_2} = \left\{-\frac{r_2(x+x_0)}{r_1}, -\frac{r_2 y}{r_1}\right\}$,

тоді точка A_2 має координати $A_2\left(x_0 - \frac{r_2(x+x_0)}{r_1},\ -\frac{r_2 y}{r_1}\right)$.

Якщо точка M – середина відрізка A_1A_2, то

$$M\left(\frac{1}{2}\left(x + x_0 - \frac{r_2}{r_1}(x+x_0)\right), \frac{1}{2}\left(y - \frac{r_2}{r_1}y\right)\right),$$

або $M\left(\frac{(r_1-r_2)(x+x_0)}{2r_1}, \frac{(r_1-r_2)y}{2r_1}\right)$. Тоді

$$\overrightarrow{OM}^2 = \left(\frac{(r_1-r_2)(x+x_0)}{2r_1}\right)^2 + \left(\frac{(r_1-r_2)y}{2r_1}\right)^2 = \left(\frac{r_1-r_2}{2r_1}\right)^2\left((x+x_0)^2 + y^2\right) =$$

$= \left(\frac{r_1-r_2}{2r_1}\right)^2 \cdot r_1^2 = \left(\frac{r_1-r_2}{2}\right)^2$. Отже, шукана лінія – коло радіуса $\frac{|r_1-r_2|}{2}$ з центром в точці O.

1.9 Очевидно: $\sqrt{\vec{c}\cdot\vec{b}} = \sqrt{\left(\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{a}\right)\cdot\vec{b}} = \sqrt{\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)} =$
$= \left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = S$. Тут використано властивість мішаного добутку векторів: $\left(\vec{p}\times\vec{q}\right)\cdot\vec{r} = \vec{p}\cdot\left(\vec{q}\times\vec{r}\right)$.

1.10 Нехай $ABCD$ – правильний тетраедр, можна вважати, що його ребро рівне 1, AM і CN – мимобіжні медіани граней (див. рисунок 1.4). Позначимо $\overrightarrow{DA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{DB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{DC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{m_1}$, $\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{m_2}$, шуканий кут позначимо через α. Очевидно $\overrightarrow{m_1}=-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{m_2}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{c}$. Тоді $\overrightarrow{m_1}\cdot\overrightarrow{m_2}=\frac{1}{2}\vec{a}^2-\vec{a}\cdot\vec{c}-\frac{1}{4}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{c}$. Враховуючи, що $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}^2=1$, маємо $\overrightarrow{m_1}\cdot\overrightarrow{m_2}=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\vec{a}\cdot\vec{b}$. Але $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, тому $\overrightarrow{m_1}\cdot\overrightarrow{m_2}=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$. Приймаючи до уваги, що $\left|\overrightarrow{m_1}\right|=\left|\overrightarrow{m_2}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}$, одержуємо: $\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{m_1}\cdot\overrightarrow{m_2}}{\left|\overrightarrow{m_1}\right|\left|\overrightarrow{m_2}\right|}=\frac{1/8}{3/4}=\frac{1}{6}$. Отже, $\alpha=\arccos\frac{1}{6}$.

1.11 Побудуємо на даній площині одиничне коло з центром в точці O, з якої виходять всі три вектори (див. рисунок 1.5). Коло перетинається з прямою L в точках A та B. Занумеруємо кінці даних векторів послідовно по дузі півкола від A до B як M_1, M_2, M_3.

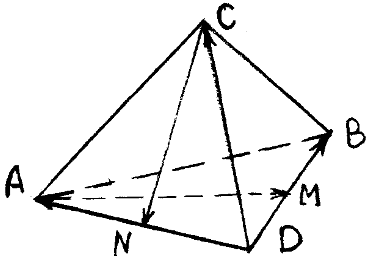

Рисунок 1.4

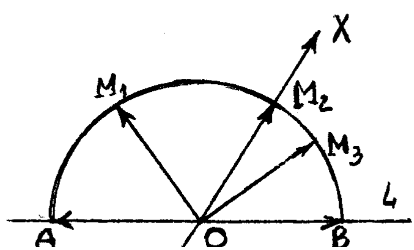

Рисунок 1.5

Введемо на площині прямокутну декартову систему координат з початком в точці O і базисним вектором осі абсцис $\vec{i} = \overrightarrow{OM_2}$. Очевидно $\text{пр}_{\bar{i}}\overrightarrow{OM_1} > \text{пр}_{\bar{i}}\overrightarrow{OA}$, $\text{пр}_{\bar{i}}\overrightarrow{OM_3} > \text{пр}_{\bar{i}}\overrightarrow{OB}$, тоді $\text{ïð}_{\bar{i}}\left(\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_3}\right) > \text{ïð}_{\bar{i}}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) = 0$. Нехай $\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3} = \vec{a} = \{x, y\}$. Але $x = 1 + \text{пр}_{\bar{i}}\left(\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_3}\right) > 1$, тому $|\vec{a}| > 1$, що і треба було довести (зауважимо, що дане твердження легко узагальнюється на випадок будь-якого непарного числа векторів).

1.12 Нехай S_1, S_2, S_3, S_4 – грані піраміди, $\vec{n}_i$ – одиничний вектор нормалі до S_i, напрямлений всередину піраміди, α_{ij} – внутрішній двогранний кут, утворений гранями S_i і S_j. Позначимо через β_{ij} кут між векторами $\vec{n}_i$ і $\vec{n}_j$; очевидно, що $\alpha_{ij} + \beta_{ij} = \pi$, тому $\vec{n}_i \cdot \vec{n}_j = \cos\beta_{ij} = -\cos\alpha_{ij}$. Враховуючи, що $\left(\sum_{i=1}^{4}\vec{n}_i\right)^2 \geq 0$, маємо: $\left(\sum_{i=1}^{4}\vec{n}_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{4}\vec{n}_i^2 + {}$ $+ \sum_{1\leq i<j\leq 4} 2\vec{n}_i \cdot \vec{n}_j = 4 - 2\sum_{1\leq i<j\leq 4}\cos\alpha_{ij} \geq 0$. Звідки $\sum_{1\leq i<j\leq 4}\cos\alpha_{ij} \leq 2$, що і потрібно було довести.

1.13 Нехай O – центр даного кола. Тоді $\overrightarrow{BA_1} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{BA_2} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA_2}, \ldots, \overrightarrow{BA_n} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA_n}$. Тому $\overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{BA_2} + \ldots + \overrightarrow{BA_n} = n\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n}$. Але $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$ (див. задачу 1.3), отже, $\overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{BA_2} + \ldots + \overrightarrow{BA_n} = n\overrightarrow{BO}$ і $\left|\overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{BA_2} + \ldots + \overrightarrow{BA_n}\right| = n\left|\overrightarrow{BO}\right| = nR$.

1.14 Домножимо задану рівність скалярно на $\overrightarrow{OA}$: $\overrightarrow{OA} \cdot \left(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OA}\right) = 0$. Або, після розкриття дужок, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$.

Оскільки $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=0$, то $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=0$, що означає компланарність векторів $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$.

Для доведення другого твердження розглянемо добуток $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}$: $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)\times\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\right)=\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}-$ $-\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}+$ $+\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\vec{0}$ (за умовою). Отже $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}=\vec{0}$, тобто вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$ колінеарні, що означає, що точки A, B, C лежать на одній прямій .

1.15 Два неколінеарних вектори $\vec{b}-\vec{a}$ і $\vec{c}-\vec{b}$, очевидно, лежать в площині, яка проходить через кінці векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Але ці два вектори перпендикулярні до вектора $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}$. Справді: $\left(\vec{b}-\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}\right)=\vec{b}\cdot\vec{c}\cdot\vec{a}-$ $-\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=0$, аналогічно, $\left(\vec{c}-\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}\right)=0$. Таким чином, вектор $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}$ перпендикулярний до двох неколінеарних векторів, які лежать у вказаній площині, тому він перпендикулярний і до самої площини.

1.16 Подамо вектори $\overrightarrow{A_1B_1},\overrightarrow{A_2B_2},\ldots,\overrightarrow{A_nB_n}$ у вигляді суми двох векторів: $\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2B_1}$, $\overrightarrow{A_2B_2}=\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_3B_2}$,…, $\overrightarrow{A_nB_n}=\overrightarrow{A_nA_1}+\overrightarrow{A_1B_n}$ (див. рисунок1.6). Тоді
$\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_2B_2}+\ldots+\overrightarrow{A_nB_n}=\left(\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\ldots+\overrightarrow{A_nA_1}\right)+$ $+\left(\overrightarrow{A_1B_n}+\overrightarrow{A_2B_1}+\ldots+\overrightarrow{A_nB_{n-1}}\right)=\overrightarrow{A_1B_n}+\overrightarrow{A_2B_1}+\ldots+\overrightarrow{A_nB_{n-1}}$. Якщо кожен з векторів $\overrightarrow{A_1B_n},\overrightarrow{A_2B_1},\ldots,\overrightarrow{A_nB_{n-1}}$ повернути на 60^0 навколо його початку за годинниковою стрілкою, то вони співпадуть відповідно з векторами $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_2A_3}$,…, $\overrightarrow{A_nA_1}$, сума яких дорівнює $\vec{0}$. При цьому вектор, який дорівнює сумі векторів $\overrightarrow{A_1B_n},\overrightarrow{A_2B_1},\ldots,\overrightarrow{A_nB_{n-1}}$ також повернеться на 60^O, а його модуль не зміниться. Тому і

$\overrightarrow{A_1B_n}+\overrightarrow{A_2B_1}+\ldots+\overrightarrow{A_nB_{n-1}}=\vec{0}$, а це означає, що і $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_2B_2}+\ldots+\overrightarrow{A_nB_n}=\vec{0}$, що й треба було довести.

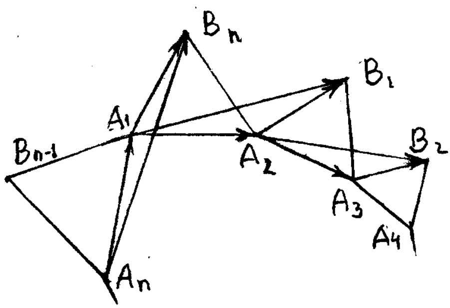

Рисунок 1.6

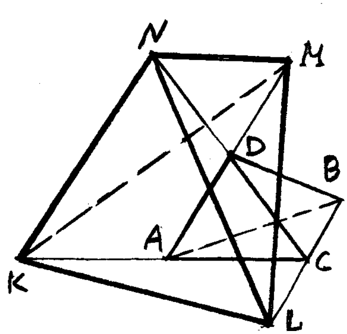

Рисунок 1.7

1.17 Шуканий об'єм дорівнює $\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{KN}\cdot\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{KL}\right|$ (див. рисунок 1.7). Очевидно $\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{CL}=2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AC}+$ $+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{KM}=\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{KN}=2\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{CD}=$ $=2\overrightarrow{AC}+2\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right)=2\overrightarrow{AD}$. Знайдемо векторний добуток векторів $\overrightarrow{KM}$ і $\overrightarrow{KN}$: $\overrightarrow{KM}\times\overrightarrow{KN}==\left(\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AD}\right)\times2\overrightarrow{AD}=$ $=2\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}$. Обчислимо мішаний добуток трьох векторів $\overrightarrow{KM}$, $\overrightarrow{KN}$, $\overrightarrow{KL}$: $\left(\overrightarrow{KM}\times\overrightarrow{KN}\right)\cdot\overrightarrow{KL}=2\left(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(3\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=$ $=2\left(3\left(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AC}-\left(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AB}\right)=-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}$. Враховуючи, що $\left|\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}\right|=6V$, маємо $V_{LKNM}=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{KN}\cdot\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{KL}\right|=$ $=\frac{1}{6}\left|-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}\right|=\frac{1}{3}\left|\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}\right|=\frac{1}{3}\cdot6V=2V$.

1.18 Нехай $\vec{b}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+\ldots+\vec{a}_{10}$, де $\vec{a}_i$, $i=1,2,\ldots,0$ – дані 10 векторів. За умовою $\left|\vec{b}\right|>\left|\vec{b}-\vec{a}_i\right|$, $i=1,2,\ldots,10$. Звідси $\vec{b}^2>\left(\vec{b}-\vec{a}\right)^2$, або $\vec{b}^2>\vec{b}^2-2\vec{b}\cdot\vec{a}_i+\vec{a}^2$, тобто $\vec{b}\cdot\vec{a}_i>\frac{1}{2}\vec{a}^2>0$.

Це й означає, що $np_{\vec{b}}\vec{a} > 0$, $i = 1,2,\ldots,10$. Отже, шукана вісь – це вісь вектора $\vec{b}$.

1.19 Припустимо, що вектори $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$ компланарні, а тому лінійно залежні. Тоді знайдуться дійсні числа α_1, α_2, α_3, хоча б одне з яких відмінне від нуля і такі, що $\alpha_1\vec{b}_1 + \alpha_2\vec{b}_2 + \alpha_3\vec{b}_3 = \vec{0}$. Звідси

$$\alpha_1\sum_{j=1}^{3}\left(\vec{a}_1\cdot\vec{a}_j\right)\vec{a}_j + \alpha_2\sum_{j=1}^{3}\left(\vec{a}_2\cdot\vec{a}_j\right)\vec{a}_j + \alpha_3\sum_{j=1}^{3}\left(\vec{a}_3\cdot\vec{a}_j\right)\vec{a}_j = \vec{0} \text{ , або}$$

$$\left(\vec{c}\cdot\vec{a}_1\right)\vec{a}_1 + \left(\vec{c}\cdot\vec{a}_2\right)\vec{a}_2 + \left(\vec{c}\cdot\vec{a}_3\right)\vec{a}_3 = \vec{0} \text{ ,} \qquad (1.1)$$

де $\vec{c} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3$. Оскільки вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ лінійно незалежні, то $\vec{c} \neq \vec{0}$. Крім того, з (1.1) внаслідок лінійної незалежності $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ випливає, що $\vec{c}\cdot\vec{a}_1 = 0$, $\vec{c}\cdot a_2 = 0$, $\vec{c}\cdot a_3 = 0$. Звідси $\vec{c}^2 = \vec{c}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\left(\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3\right) = \alpha_1\left(\vec{c}\cdot\vec{a}_1\right) + {}$ ${}+ \alpha_2\left(\vec{c}\cdot\vec{a}_2\right) + \alpha_3\left(\vec{c}\cdot\vec{a}_3\right) = 0$. А це означає, що $\vec{c} = \vec{0}$. Прийшли до суперечності. Отже, вектори $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ лінійно незалежні, а тому й некомпланарні, що й потрібно було довести.

1.20 Оскільки для довільної точки O маємо $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NK}$, $\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NK}$, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM}$, то задану рівність можна перетворити до вигляду:

$$2\overrightarrow{NK} + 3\overrightarrow{NL} + 5\overrightarrow{NM} = (\alpha - 10)\overrightarrow{ON}.$$

Якщо $\alpha = 10$, то остання рівність є невірною для будь-якої точки O, внаслідок того, що вектори $\overrightarrow{NK}$, $\overrightarrow{NL}$ і $\overrightarrow{NM}$ некомпланарні. Якщо $\alpha \neq 10$, то цю рівність можна записати у вигляді

$$\overrightarrow{NO} = \frac{2}{10-\alpha}\overrightarrow{NK} + \frac{3}{10-\alpha}\overrightarrow{NL} + \frac{5}{10-\alpha}\overrightarrow{NM}.$$

А це означає, що при $\alpha \neq 10$ існує точка O така, що $2\overrightarrow{OK} + 3\overrightarrow{OL} + 5\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{ON}$.

1.21 Нехай CM – медіана трикутника CA_1B_1 (див. рисунок 1.8). Як відомо, $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA_1}+\overrightarrow{CB_1}\right)$; крім того, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$. Тоді $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA_1}\cdot\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA_1}\cdot\overrightarrow{CA}+\right.$ $\left.+\overrightarrow{CB_1}\cdot\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CB_1}\cdot\overrightarrow{CA}\right)$. Приймаючи до уваги, що $\overrightarrow{CA_1}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB_1}\cdot\overrightarrow{CB}=0$, маємо $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA_1}\cdot\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CB_1}\cdot\overrightarrow{CA}\right)$. Але $\overrightarrow{CA_1}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CB_1}\cdot\overrightarrow{CA}$, бо $\left|\overrightarrow{CA_1}\right|=\left|\overrightarrow{CA}\right|$, $\left|\overrightarrow{CB_1}\right|=\left|\overrightarrow{CB}\right|$, а кут між векторами $\overrightarrow{CA_1}$ і $\overrightarrow{CB}$ такий же, як і між векторами $\overrightarrow{CB_1}$ і $\overrightarrow{CA}$. Тому $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$, що означає перпендикулярність AM і AB.

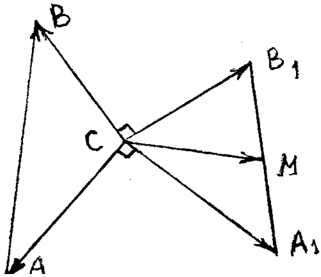

Рисунок 1.8

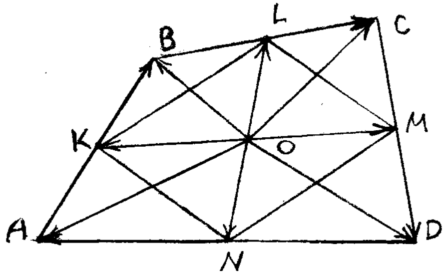

Рисунок 1.9

1.22 Нехай K, L, M, N – середини сторін чотирикутника $ABCD$ (див. рисунок 1.9). Легко бачити, що чотирикутник $KLMN$ є паралелограмом і O – точка перетину діагоналей цього паралелограма. Очевидно $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NA}=\overrightarrow{ON}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$; аналогічно $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OK}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OL}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OM}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$. Додаючи ці рівності, одержуємо: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+$

$+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}\right)$. Але $\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\vec{0}$ і $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$. Тому $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$, що і треба було довести.

1.23 Нехай $ABCD$ – даний чотирикутник, O – точка перетину його діагоналей (див. рисунок 1.10). Необхідність умови очевидна, досить розглянути прямокутні трикутники OAB, OBC, OCD і ODA. Доведемо достатність. Для цього введемо в розгляд вектори $\vec{a}_1=\overrightarrow{OA},\ \vec{a}_2=\overrightarrow{OB},\ \vec{a}_3=\overrightarrow{OC},\ \vec{a}_4=\overrightarrow{OD}$. Тоді $\overrightarrow{AB}=\vec{a}_2-\vec{a}_1$, $\overrightarrow{BC}=\vec{a}_3-\vec{a}_2$, $\overrightarrow{CD}=\vec{a}_4-\vec{a}_3$, $\overrightarrow{DA}=\vec{a}_1-\vec{a}_4$. За умовою $\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CD}^2=\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{DA}^2$. Отже $\vec{a}_2^2-2\vec{a}_1\vec{a}_2+\vec{a}_1^2+\vec{a}_4^2-2\vec{a}_3\vec{a}_4+$ $+\vec{a}_3^2=\vec{a}_3^2-2\vec{a}_2\vec{a}_3+\vec{a}_2^2+\vec{a}_1^2-2\vec{a}_1\vec{a}_4+\vec{a}_4^2$. Звідси $2\vec{a}_2\left(\vec{a}_3-\vec{a}_1\right)-$ $-2\vec{a}_4\left(\vec{a}_3-\vec{a}_1\right)=0$, або $\left(\vec{a}_3-\vec{a}_1\right)\left(\vec{a}_2-\vec{a}_4\right)=0$. Але вектор $\vec{a}_3-\vec{a}_1$ колінеарний вектору $\overrightarrow{AC}$, тому $\vec{a}_3-\vec{a}_1=m\overrightarrow{AC}$, причому $m\neq 0$; аналогічно: $\vec{a}_2-\vec{a}_4=k\overrightarrow{BD},\ k\neq 0$. Враховуючи це, із останньої рівності дістаємо: $mk\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$, або $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$, що означає перпендикулярність діагоналей AC і BD.

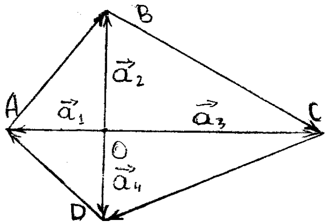

Рисунок 1.10

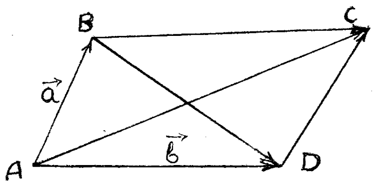

Рисунок 1.11

1.24 Нехай в чотирикутнику $ABCD$ (див. рисунок 1.11) виконана рівність $AB^2+BC^2+CD^2+AD^2=AC^2+BD^2$. Доведемо, що цей чотирикутник є паралелограмом. Вве-

демо в розгляд вектори $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ і $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$, які, очевидно, не є колінеарними. За цими векторами можна розкласти вектори $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BD}$: $\overrightarrow{AC}=x\vec{a}+y\vec{b}$, $\overrightarrow{BD}=\vec{b}-\vec{a}$. Тоді $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\vec{a}=(x-1)\vec{a}+y\vec{b}$, $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}-\vec{b}=x\vec{a}+(y-1)\vec{b}$.
Приходимо до рівності:
$\left(x\vec{a}+y\vec{b}\right)^2+\left(\vec{b}-\vec{a}\right)^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+\left((x-1)\vec{a}+y\vec{b}\right)^2+\left(x\vec{a}+(y-1)\vec{b}\right)^2$,
із якої одержуємо:
$2xy\vec{a}\vec{b}-2\vec{a}\vec{b}=2(x-1)y\vec{a}\vec{b}+2x(y-1)\vec{a}\vec{b}+(x-1)^2\vec{a}^2+(y-1)^2\vec{b}^2$,
або $(x-1)^2\vec{a}^2+2((x-1)y+x(y-1)-xy+1)\vec{a}\vec{b}+(y-1)^2\vec{b}^2=0$.
Остання рівність легко зводиться до виду: $\left((x-1)\vec{a}+(y-1)\vec{b}\right)^2=0$, що означає, що $(x-1)\vec{a}+(y-1)\vec{b}=\vec{0}$. Враховуючи лінійну незалежність векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, одержуємо: $x=1$, $y=1$. А це означає, що $\overrightarrow{BC}=\vec{b}=\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DC}=\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, тобто $ABCD$ – паралелограм, що і треба було довести.

1.25 Введемо в розгляд вектори, які задані своїми координатами в ортонормованому базисі: $\vec{a}=\{x_1,x_2,x_3\}$ та $\vec{b}=\{x_4,x_5,x_6\}$. Тоді $A=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2=|\vec{a}|^2\left|\vec{b}\right|^2\sin^2\varphi$, де φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, $B=|\vec{a}|^2\left|\vec{b}\right|^2$. Зрозуміло, що $A\le B$. Рівність досягається тоді, коли вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні, тобто коли $x_1x_4+x_2x_5+x_3x_6=0$.

1.26 Введемо в розгляд вектори, які задані своїми координатами в ортонормованому базисі: $\vec{a}=\{x_1,x_2,x_3\}$ та $\vec{b}=\{x_4,x_5,x_6\}$. Тоді $A=\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2=|\vec{a}|^2\left|\vec{b}\right|^2\cos^2\varphi$, де φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, $B=|\vec{a}|^2\left|\vec{b}\right|^2$. Зрозуміло, що $A\le B$.

Рівність досягається тоді, коли вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, тобто коли $\dfrac{x_1}{x_4} = \dfrac{x_2}{x_5} = \dfrac{x_3}{x_6}$.

1.27 Розглянемо спочатку випадок, коли многогранник є трикутна піраміда $ABCD$ (див. рисунок 1.12). Нехай площі граней ABD, ACD, BCD і ABC відповідно рівні S_1, S_2, S_3, S_4 і $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, $\vec{e}_4$ – одиничні вектори зовнішніх нормалей до цих граней. Введемо в розгляд вектори $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a}$. Тоді

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{b} \times \vec{a}}{\left|\vec{b} \times \vec{a}\right|},\ \vec{e}_2 = \frac{\vec{a} \times \vec{c}}{\left|\vec{a} \times \vec{c}\right|},\ \vec{e}_3 = \frac{\vec{c} \times \vec{b}}{\left|\vec{c} \times \vec{b}\right|},\ \vec{e}_4 = \frac{\left(\vec{b} - \vec{a}\right) \times \left(\vec{c} - \vec{a}\right)}{\left|\left(\vec{b} - \vec{a}\right) \times \left(\vec{c} - \vec{a}\right)\right|}.$$

Враховуючи, що

$$S_1 = \frac{1}{2}\left|\vec{b} \times \vec{a}\right|,\ S_2 = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{c}\right|,\ S_3 = \frac{1}{2}\left|\vec{c} \times \vec{b}\right|,\ S_4 = \frac{1}{2}\left|\left(\vec{b} - \vec{a}\right) \times \left(\vec{c} - \vec{a}\right)\right|,$$

одержуємо:

$$S_1\vec{e}_1 + S_2\vec{e}_2 + S_3\vec{e}_3 + S_4\vec{e}_4 = \frac{1}{2}\left(\vec{b} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{b} + \left(\vec{b} - \vec{a}\right) \times \left(\vec{c} - \vec{a}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\vec{b} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} - \vec{b} \times \vec{a} - \vec{a} \times \vec{c} + \vec{a} \times \vec{a}\right) = \vec{0}.$$

Методом математичної індукції вказану рівність неважко довести для довільної піраміди. Справді, для трикутної піраміди твердження доведено. Припустимо, що воно справедливе для пірамід, кількість бічних граней яких не перевищує $n-1$. Розглянемо n- кутну піраміду $OA_1A_2\ldots A_{n-1}A_n$ (див. рисунок 1.13). Позначимо площі основи $A_1A_2\ldots A_{n-1}A_n$ і бічних граней $OA_1A_2, OA_2A_3, \ldots, OA_{n-2}A_{n-1}, OA_{n-1}A_n$, OA_nA_1 і одиничні вектори зовнішніх нормалей до них через $S_0, S_2, S_2, \ldots, S_{n-2}, S_{n-1}, S_n$ та $\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{n-2}, \vec{e}_{n-1}, \vec{e}_n$ відповідно. Площина OA_1A_{n-1} ділить піраміду на дві – $n-1$-кутну $OA_1A_2\ldots A_{n-1}$ і трикутну $OA_1A_{n-1}A_n$. Позначимо площу грані OA_1A_{n-1} через S_{n+1} і одиничний вектор зовнішньої відносно першої піраміди нормалі до неї через $\vec{e}_{n+1}$; площу многокутника $A_1A_2\ldots A_{n-1}$ позначимо через S_0'. Згідно з принципом математичної індукції можна записати:

$$S_0'\vec{e}_0 + S_1\vec{e}_1 + S_2\vec{e}_2 + \ldots + S_{n-2}\vec{e}_{n-2} + S_{n+1}\vec{e}_{n+1} = \vec{0},$$

$$(S_0 - S_0')\vec{e}_0 + S_{n-1}\vec{e}_{n-1} + S_n\vec{e}_n + S_{n+1}(-\vec{e}_{n+1}) = \vec{0}.$$

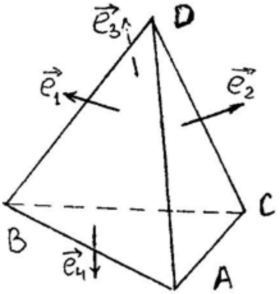

Рисунок 1.12

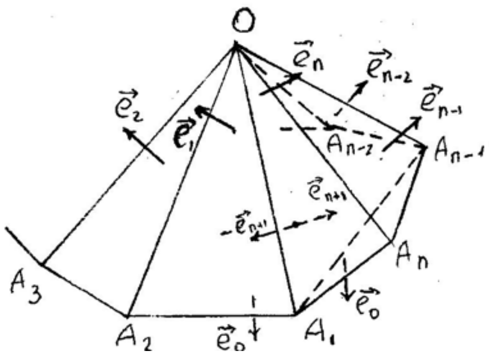

Рисунок 1.13

Додавши почленно ці рівності, одержуємо

$$S_0\vec{e}_0 + S_1\vec{e}_1 + S_2\vec{e}_2 + \ldots + S_{n-2}\vec{e}_{n-2} + S_{n-1}\vec{e}_{n-1} + S_n\vec{e}_n = \vec{0}, \quad (1.2)$$

що і треба було довести.

Тепер розглянемо довільний опуклий многогранник. Виберемо всередині нього довільну точку O і з'єднаємо з нею всі вершини многогранника. Цим самим ми розіб'ємо многогранник на піраміди, основами яких будуть грані многогранника. Для кожної з цих пірамід запишемо рівність (1.2), а потім всі їх почленно додамо. В результаті одержимо

$$S_1\vec{e}_1 + S_2\vec{e}_2 + \ldots + S_n\vec{e}_n = \vec{0},$$

де $S_1, S_2, \ldots, S_n$ – площі граней многогранника, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ – відповідно одиничні вектори зовнішніх нормалей до цих граней. Всі інші доданки в цій сумі, як неважко бачити, взаємно знищаться. Твердження доведено.

1.28 Очевидно вектор $a_1\vec{e}_1$ одержується із вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$ поворотом на 90° за годинниковою стрілкою (див. рисунок 1.14), аналогічно вектор $a_2\vec{e}_2$ одержується із вектора $\overrightarrow{A_2A_3}$ і т.д., вектор $a_n\vec{e}_n$ точно так же одержується із вектора $\overrightarrow{A_nA_1}$. При цьому сума векторів $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_2A_3}$ і т. д., теж повернеться на 90°. Але $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\ldots+\overrightarrow{A_nA_1}=\vec{0}$, тому $a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+\ldots+a_n\vec{e}_n=\vec{0}$, що і потрібно було довести.

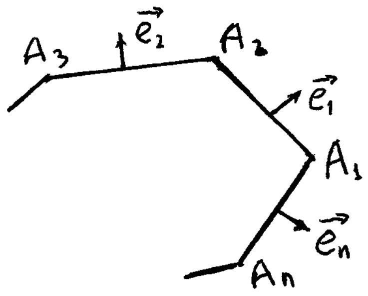

Рисунок 1.14

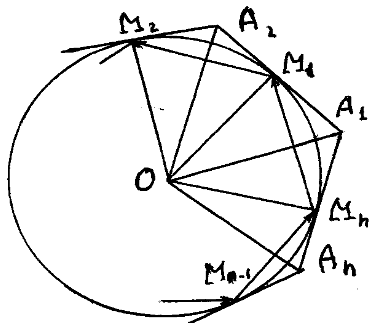

Рисунок 1.15

1.29 Нехай $M_1, M_2, \ldots, M_n$ – точки дотику кола до сторін многокутника. З'єднаємо їх послідовно і одержимо многокутник, вписаний в коло (див. рисунок 1.15). Розглянемо чотирикутник $OM_1A_1M_n$, оскільки кути M_1 і M_n в ньому прямі, то навколо нього можна описати коло, причому OA_1 буде діаметром цього кола. Застосувавши теорему синусів до трикутника $M_1M_nA_1$, маємо $\dfrac{M_nM_1}{\sin A_1}=OA_1$, або $M_nM_1=OA_1\cdot\sin A_1$. Враховуючи, що M_nM_1 і OA_1 взаємно перпендикулярні, робимо висновок, що вектор $\overrightarrow{OA_1}\cdot\sin A_1$ одержується із вектора $\overrightarrow{M_nM_1}$ поворотом на 90° за годинниковою стрілкою. Таким же чином вектор $\overrightarrow{OA_2} \cdot \sin A_2$ одержується із вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ і т.д., вектор $\overrightarrow{OA_n} \cdot \sin A_n$ одержується із вектора $\overrightarrow{M_{n-1}M_n}$. Оскільки $\overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_2M_3} + \ldots + \overrightarrow{M_nM_1} = \vec{0}$ то і (див. попередню задачу) $\overrightarrow{OA_1} \cdot \sin A_1 + \overrightarrow{OA_2} \cdot \sin A_2 + \ldots + \overrightarrow{OA_n} \cdot \sin A_n = \vec{0}$.

1.30 За теоремою синусів $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$, де R – радіус описаного кола. Нехай O – центр вписаного в трикутник кола, Тоді

$$a \cdot \overrightarrow{OA} + b \cdot \overrightarrow{OB} + c \cdot \overrightarrow{OC} = 2R\left(\overrightarrow{OA} \cdot \sin A + \overrightarrow{OB} \cdot \sin B + \overrightarrow{OC} \cdot \sin C\right) = \vec{0}$$

згідно з доведеним в попередній задачі.

Якщо припустити, що всередині трикутника знайдеться ще одна точка O_1, для якої буде виконуватись рівність

$$a \cdot \overrightarrow{O_1A} + b \cdot \overrightarrow{O_1B} + c \cdot \overrightarrow{O_1C} = \vec{0},$$

то віднявши почленно від доведеної рівності дану, отримаємо:

$$a\left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{O_1A}\right) + b\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{O_1B}\right) + c\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{O_1C}\right) = (a + b + c)\overrightarrow{OO_1} = \vec{0},$$

тобто $\overrightarrow{OO_1} = \vec{0}$, що означає,що точки O і O_1 співпадають.

1.31 Введемо на площині прямокутну декартову систему координат, помістивши початок координат в точку O. Нехай вершини трикутника будуть: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, причому можна вважати, що ці точки ідуть саме в такому порядку, якщо контур трикутника обходити проти годинникової стрілки. Тоді

$$S_1 = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}\right| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix},\ S_2 = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OA}\right| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix},$$

$$S_3 = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\right| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Нехай $S_1 \cdot \overrightarrow{OA} + S_2 \cdot \overrightarrow{OB} + S_3 \cdot \overrightarrow{OC} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Але, як неважко бачити,

$$x = \frac{1}{2}\left(x_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_1 & y_1 \\ x_2 & x_2 & y_2 \\ x_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Аналогічно доводиться, що $y = 0$.

1.32 Введемо в розгляд вектори $\vec{u} = \{a, \sqrt{b}, \sqrt{c}\}$, $\vec{v} = \{1, \sqrt{b}, \sqrt{c}\}$. Оскільки $|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b + c}$, $|\vec{v}| = \sqrt{1 + b + c}$ і $\vec{u} \cdot \vec{v} = a + b + c$, то, використовуючи нерівність $\vec{u}^2 \cdot \vec{v}^2 \geq (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$, отримуємо

$$(a^2 + b + c)(1 + b + c) \geq (a + b + c)^2 = 3^2 = 9.$$

Рівність буде виконуватися при умові, коли $\frac{a}{1} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c}}$, тобто при $a = 1$ та довільних невід'ємних b, c таких, що $b + c = 2$.

1.33 Введемо в розгляд вектори $\vec{u} = \{a^{1007}, b^{1007}, c^{1007}\}$ та $\vec{v} = \left\{\frac{1}{a^{1006}}, \frac{1}{b^{1006}}, \frac{1}{c^{1006}}\right\}$. Використовуючи нерівність для скалярного добутку у виді $\vec{u}^2 \cdot \vec{v}^2 \geq (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$, як і в попередній задачі, отримуємо потрібне співвідношення.

1.34 Розглянемо вектори $\vec{x} = \{1, 1, 1\}$ та $\vec{y} = \{\sqrt{a+1}, \sqrt{2a-3}, \sqrt{50-3a}\}$. Очевидно, що ліва частина нерівності являє собою скалярний добуток цих векторів і не перевищує добутку їх довжин, тобто виконується співвідношення

$$\sqrt{a+1} + \sqrt{2a-3} + \sqrt{50-3a} \leq \sqrt{1+1+1} \cdot \sqrt{a+1+2a-3+50-3a} =$$
$$= \sqrt{3} \cdot \sqrt{48} = 12.$$

Знак рівності можливий тільки у випадку пропорційності координат векторів, тобто тільки тоді, коли $\sqrt{a+1} = \sqrt{2a-3} = \sqrt{50-3a}$. Оскільки система даних рівнянь несумісна, то нерівність строга.

1.35 Розглянемо вектори $\vec{x} = \{ac, cb, ab\}$ та $\vec{y} = \{bc, ab, ac\}$. Тоді

$$abc^2 + cab^2 + bca^2 = \vec{x} \cdot \vec{y} \le |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| = a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 .$$

Тепер введемо в розгляд нові вектори $\vec{m} = \{c^2, b^2, a^2\}$ та $\vec{n} = \{a^2, c^2, b^2\}$. Дістаємо

$$a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 = \vec{m} \cdot \vec{n} \le |\vec{m}| \cdot |\vec{n}| = a^4 + b^4 + c^4 ,$$

що завершує доведення. Рівність виконується тільки при умові $a = b = c$.

2.1 Якщо ми поміняємо місцями два сусідні рядки визначника, то він змінить знак. Якщо ми переставимо всіма можливими способами рядки деякого визначника третього порядку, то одержимо три додатних і три від'ємних визначники, рівних між собою за абсолютною величиною. Таким чином, 9! визначників розпадаються на $9!/6$ груп, причому сума визначників всередині кожної такої групи дорівнює нулю, тому і сума всіх визначників дорівнює нулю.

2.2 Розглянемо розклад довільного визначника третього порядку:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} .$$

Зрозуміло, що всі елементи визначника повинні бути відмінні від нуля. Тоді з очевидної рівності

$$(a_{11}a_{22}a_{33}) \cdot (a_{12}a_{23}a_{31}) \cdot (a_{13}a_{21}a_{32}) =$$

$$= -(-a_{13}a_{22}a_{31}) \cdot (-a_{12}a_{21}a_{33}) \cdot (-a_{11}a_{23}a_{32})$$

випливає, що в розкладі визначника є як додатні, так і від'ємні члени. В зв'язку з цим постає питання про найменшу кількість від'ємних членів у розкладі визначника третього порядку з ненульовими елементами. Неважко навести приклад визначника, в розкладі якого є лише один від'ємний член:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1-1+1+1+1+1.$$

2.3 Зробимо послідовно наступні перетворення:
1) віднімемо від кожного стовпчика, починаючи з останнього, попередній стовпчик;
2) додамо до кожного рядка, починаючи з останнього, перший рядок;
3) розкладемо визначник за елементами останнього рядка;
4) обчислимо визначник трикутної матриці.
Тоді матимемо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \ldots & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & \ldots & n-4 & n-3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & \ldots & n-5 & n-4 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n-2 & n-3 & n-4 & n-5 & \ldots & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -1 & \ldots & 1 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n-2 & -1 & -1 & -1 & \ldots & -1 & 1 \\ n-1 & -1 & -1 & -1 & \ldots & -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$
=\begin{vmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\
1 & 0 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\
2 & 0 & 0 & 2 & \dots & 2 & 2 \\
3 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
n-2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 \\
n-1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0
\end{vmatrix}=
$$

$$
=(-1)^{n+1}(n-1)\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\
0 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\
0 & 0 & 2 & \dots & 2 & 2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 2 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2
\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}(n-1)\cdot 2^{n-2}.
$$

2.4 Неважко бачити, що

$$
A=\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\
1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\
1 & 2 & 3 & 3 & \dots & 3 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n
\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1
\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix}.
$$

Оскільки визначник кожної з двох матриць, що стоять справа, дорівнює одиниці, то і $\det A = 1$.

2.5 **С**користаємось рівністю $C_{m+1}^{i+1} - C_m^{i+1} = C_m^i$. Віднімаючи від останнього рядка передостанній, від передостаннього перед- передостанній і т. д., від другого перший, одержуємо:

$$
\Delta=\begin{vmatrix}
1 & C_n^1 & \dots\dots & C_n^k \\
0 & C_n^0 & \dots\dots & C_n^{k-1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & C_{n+k-1}^0 & \dots & C_{n+k-1}^{k-1}
\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}
C_n^0 & \tilde{N}_n^1 & \dots\dots & C_n^{k-1} \\
C_{n+1}^0 & C_{n+1}^1 & \dots\dots & C_{n+1}^{k-1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
C_{n+k-1}^0 & C_{n+k-1}^1 & \dots & C_{n+k-1}^{k-1}
\end{vmatrix}.
$$

Тут останній визначник одержано з попереднього розкладом за елементами першого стовпчика. Одержано такий же визначник, порядок якого на одиницю менший. Проробивши вказане перетворення k раз, прийдемо до визначника першого порядку, отже $\Delta = \left|C_n^0\right| = 1$.

2.6 Очевидно

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma .$$

За теоремою Вієта $\alpha + \beta + \gamma = 0$, $\alpha\beta\gamma = -q$, крім того, $\alpha^3 = -p\alpha - q$, $\beta^3 = -p\beta - q$, $\gamma^3 = -p\gamma - q$. Враховуючи це, маємо:

$$\Delta = -p\alpha - q - p\beta - q - p\gamma - q + 3q = -p(\alpha + \beta + \gamma) = 0 .$$

2.7 Даний визначник має вигляд:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & \dots & 3 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-1 & n-1 & n-1 & \dots & 0 & n-1 \\ n & n & n & \dots & n & 0 \end{vmatrix} \text{ або } \Delta_n = n! \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Віднявши від першого рядка другий, від другого рядка – третій, …, від передостаннього рядка – останній, матимемо

$$\Delta_n = n! \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Додамо до другого стовпчика перший стовпчик, після чого до третього стовпчика додамо другий і т.д. В результаті дістанемо:

$$\Delta_n = n!\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n-1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1)\cdot n!.$$

Остаточно маємо: $\Delta_n = (-1)^{n-1}(n-1)\cdot n!.$

2.8 Даний визначник має вигляд:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & b & b & \dots & b & b \\ a & 0 & b & \dots & b & b \\ a & a & 0 & \dots & b & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & 0 & b \\ a & a & a & \dots & a & 0 \end{vmatrix}.$$

Віднімемо від першого рядка другий, від другого рядка – третій, …, від передостаннього рядка – останній. В результаті матимемо:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} -a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -a & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a & b \\ a & a & a & \dots & a & 0 \end{vmatrix}.$$

Розкладаючи визначник Δ_n за елементами першого стовпчика, дістанемо рекурентну формулу

$$\Delta_n = -a\cdot\Delta_{n-1} + (-1)^{n+1} ab^{n-1}.$$

Застосовуючи цю формулу $(n-2)$ рази, виразимо визначник Δ_n через визначник Δ_2:

$$\Delta_n = -a\cdot\Delta_{n-1} + (-1)^{n+1} ab^{n-1} = -a\left(-a\cdot\Delta_{n-2} + (-1)^n ab^{n-2}\right) +$$

$$+\left(-1\right)^{n+1}ab^{n-1}=a^2\Delta_{n-2}+\left(-1\right)^{n+1}a^2b^{n-2}+\left(-1\right)^{n+1}ab^{n-1}=$$

$$=a^2\left(-a\cdot\Delta_{n-3}+\left(-1\right)^{n-1}ab^{n-3}\right)+\left(-1\right)^{n+1}a^2b^{n-2}+\left(-1\right)^{n+1}ab^{n-1}=$$

$$=-a^3\cdot\Delta_{n-3}+\left(-1\right)^{n-1}a^3b^{n-3}+\left(-1\right)^{n+1}a^2b^{n-2}+\left(-1\right)^{n+1}ab^{n-1}=\ldots=$$

$$=\left(-1\right)^{n-2}a^{n-2}\Delta_2+\left(-1\right)^{n+1}\left(a^{n-2}b^2+a^{n-3}b^3+a^{n-4}b^4+\ldots+ab^{n-1}\right).$$

Оскільки $\Delta_2=\begin{vmatrix}-a & b\\ a & 0\end{vmatrix}=-ab$, то

$$\Delta_n=\left(-1\right)^{n+1}\left(a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+a^{n-3}b^3+a^{n-4}b^4+\ldots+ab^{n-1}\right)$$

або,

$$\Delta_n=\left(-1\right)^{n+1}ab\left(a^{n-2}+a^{n-3}b^1+a^{n-4}b^2+a^{n-5}b^3+\ldots+b^{n-2}\right).$$

Якщо $a\neq b$, то $\Delta_n=\left(-1\right)^{n+1}ab\dfrac{a^{n-1}-b^{n-1}}{a-b}$.

Якщо $a=b$, то $\Delta_n=\left(-1\right)^{n+1}\left(n-1\right)a^n$.

2.9 Обчислимо даний визначник:

$$\varDelta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x & y & z\\ x^2 & y^2 & z^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ x & y-x & z-x\\ x^2 & y^2-x^2 & z^2-x^2\end{vmatrix}=$$

$$=(y-x)(z-x)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ x & 1 & 1\\ x^2 & y+x & z+x\end{vmatrix}=(y-x)(z-x)\begin{vmatrix}1 & 1\\ y+x & z+x\end{vmatrix}=$$

$$=(y-x)(z-x)(z-y).$$

Тоді

$$\Delta^2=\left(y-x\right)^2\left(z-x\right)^2\left(z-y\right)^2\leq\left(\frac{\left(y-x\right)^2+\left(z-x\right)^2+\left(z-y\right)^2}{3}\right)^3.$$

Із очевидної нерівності $\left(x+y+z\right)^2\geq 0$ легко одержати $x^2+y^2+z^2\geq -2xy-2zx-2zy$. Враховуючи це, маємо:

$$\Delta^2 \le \left(\frac{2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2zx-2zy}{3} \right)^3 \le \left(\frac{3\left(x^2+y^2+z^2\right)}{3} \right)^3 = 1.$$

Тобто $|\Delta| \le 1$, що і потрібно було довести.

2.10 Легко бачити, що $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 3$, $\Delta_3 = 4$. Методом математичної індукції доведемо, що $\Delta_n = n+1$. Справді, розклавши визначник Δ_n за елементами першого стовпчика, маємо

$$\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}.$$

Останній визначник розкладемо за елементами першого рядка і одержимо $\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$. Оскільки за припущенням індукції $\Delta_{n-1} = n$, $\Delta_{n-2} = n-1$, то $\Delta_n = 2n - (n-1) = n+1$, що і потрібно було довести.

2.11 Застосуємо метод математичної індукції. При $n = 3, 4$ твердження легко перевірити. При $n > 4$ розкладаючи визначник Δ_n за елементами першого стовпчика, отримаємо

$$\Delta_n = \Delta_{n-1} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Якщо тепер останній визначник розкласти за елементами першого рядка, одержимо $\Delta_n = \Delta_{n-1} + \Delta_{n-2} = a_{n-1} + a_{n-2} = a_n$, що і вимагалось

2.12 Таких визначників є, очевидно, $n!$ штук і кожен з них дорівнює 1 або -1. Зрозуміло, що всі визначники можна розбити на пари, в яких один з визначників одержується з іншого, якщо в ньому поміняти місцями два рядки. Оскільки ці визначники відрізняються знаком, то ясно, що сума всіх таких визначників дорівнює нулю.

2.13. Розкладаючи визначник за елементами першого стовпчика, одержимо:

$$\det(A - \lambda E) = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda \end{vmatrix} - 10^{-10} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda(-\lambda)^9 - 10^{-10} = \lambda^{10} - 10^{-10}.$$

2.14 Зауважимо, що парність суми k доданків, кожен з яких є 1, або -1, співпадає з парністю числа k. Справді, якщо всі доданки є 1, то твердження очевидне. Якщо ж в сумі є доданки, рівні -1, то замінивши кожен з них на 1, ми одержимо в сумі k, але при цьому початкова сума збільшилась на парне число, тому парність її не змінилась.

Тепер розглянемо матрицю $B = A^2$. В цій матриці елементи b_{ii} – непарні числа (сума 0 і непарної кількості ± 1), а b_{ij}, $i \neq j$ – парні числа (сума двох нулів і парного числа ± 1). Неважко бачити, що тоді $\det A^2 = (\det A)^2$ – непарне число. А, значить, і $\det A$ – непарне число, а тому не може бути нулем.

2.15 В даній матриці знайдуться хоча б два рядки, всі елементи яких – непарні числа. Віднявши від одного з таких рядків інший, ми одержимо рядок, який складатиметься тільки із парних чисел. Легко бачити, що такий визначник дорівнює парному числу.

2.16 Див. розв'язок попередньої задачі.

2.17 Доведення проведемо індукцією по n, де n – порядок матриці. При $n=1$ твердження очевидне. Покажемо, як зробити індуктивний перехід від $n-1$ до n. Поставимо на перетині першого рядка і першого стовпчика даної матриці A число x. Мінор A_{11} елемента x задовольняє припущенню індукції, так що, розставивши на головній діагоналі A_{11} нулі і одиниці, можна добитися того, що $A_{11} \neq 0$. Розкладаючи визначник матриці A за елементами першого рядка, маємо: $\det A = xA_{11} + M$, де через M позначено суму членів, які не залежать від x. Оскільки $A_{11} \neq 0$, то $\det A \neq 0$ при $x=0$, якщо $M \neq 0$, або при $x=1$ якщо $M=0$.

2.18 Розглянемо матрицю $B = A^T A$. Неважко бачити, що це діагональна матриця, причому $b_{ii} = a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + \ldots + a_{ni}^2$, $1 \le i \le n$. Тому

$$\det B = \left(a_{11}^2 + a_{21}^2 + \ldots + a_{n1}^2\right)\left(a_{12}^2 + a_{22}^2 + \ldots + a_{n2}^2\right)\ldots\left(a_{1n}^2 + a_{2n}^2 + \ldots + a_{nn}^2\right).$$

Але $\det B = \det\left(A^T A\right) = \det A^T \cdot \det A = (\det A)^2$, звідки очевидним чином випливає рівність, що доводиться.

2.19 Позначимо одержану матрицю через B. Нехай матриця A невироджена; тоді, як відомо, $\dfrac{1}{\det A} B^T = A^{-1}$.

Отже $\dfrac{1}{\det A} B^T \cdot A = E$, або $B^T A = (\det A)E$. Звідси $\det\left(B^T A\right) = \det\left((\det A)E\right)$, або, враховуючи, що визначник добутку матриць дорівнює добутку їх визначників і рівність $\det B^T = \det B$, одержуємо $\det B \cdot \det A = (\det A)^n$, звідки маємо $\det B = (\det A)^{n-1}$.

Нехай тепер $\det A = 0$. Доведемо, що тоді і $\det B = 0$. Якщо матриця A нульова, то доводити нічого, в противному випадку в матриці A знайдеться стовпчик, не всі елементи якого нулі. Нехай це буде k-тий стовпчик, позначимо його через X, тобто $X = \left(a_{1k}\ a_{2k}\ \ldots\ a_{nk}\right)^T$. Розглянемо добуток $B^T X$. В цьому стовпчику всі елементи, крім k-того, є сума добутків елементів k-того стовпчика матриці A на алгебраїчні доповнення відповідних елементів інших стовпчиків цієї матриці, а тому дорівнюють нулю. k-тий елемент стовпчика рівний $a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \ldots + a_{nk}A_{nk} = \det A = 0$. Отже $B^T X = 0$, причому $X \neq 0$. Остання рівність можлива тільки в тому випадку, коли матриця B^T, а з нею і матриця B, – вироджена; отже $\det B = 0$.

Таким чином, можна записати, що $\det B = \left(\det A\right)^{\alpha}$, де $\alpha = n-1$, якщо $\det A \neq 0$ і $\alpha > 0$ – довільне, якщо $\det A = 0$.

2.20 Із рівності $\left(AB\right)^m = E$ випливає, що матриці A і B невироджені. Цю рівність, враховуючи асоціативність множення матриць, можна подати у вигляді: $A \cdot \underbrace{(BA)\cdot(BA)\cdot\ldots\cdot(BA)}_{m-1} B = E$. Домножуючи зліва на A^{-1}, маємо $\underbrace{(BA)\cdot(BA)\cdot\ldots\cdot(BA)}_{m-1} B = A^{-1}$, що при домноженні тепер справа на A приводить до рівності $\underbrace{(BA)\cdot(BA)\cdot\ldots\cdot(BA)}_{m-1}(BA) = E$, тобто $(BA)^m = E$.

2.21 Нехай $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$, $B = \left(b_{ij}\right)_{n\times n}$, $AB - BA = C = \left(c_{ij}\right)_{n\times n}$. Знайдемо слід матриці C, тобто суму елементів головної діагоналі:

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\left(a_{i1}b_{1i} + a_{i2}b_{2i} + \ldots + a_{in}b_{ni}\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(b_{i1}a_{1i} + b_{i2}a_{2i} + \ldots + b_{in}a_{ni}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(b_{ji} - b_{ji}\right) = 0.$$

Оскільки слід одиничної матриці n-го порядку дорівнює n, то рівність $AB - BA = E$ неможлива. Отже, таких матриць не існує.

2.22 Позначимо $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Неважко перевірити,що

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E .$$

Тому $A^{2011} = A^{2008} \cdot A^3 = \left(A^4\right)^{502} \cdot A^3 = E^{502} \cdot A^3 = E \cdot A^3 = A^3$.

Отже, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{2011} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2.23 а) Маємо $A = E + B$, де E – одинична матриця, а

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко перевірити, що

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O .$$

Оскільки матриці E і B комутують, то можна скористатись формулою бінома Ньютона:

$$A^{100} = (E + B)^{100} = E + 100B + \frac{100 \cdot 99}{2} B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} +$$

$$+100 \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 4950 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -200 & 100 \\ -100 & 9901 & -4950 \\ -200 & 19800 & -9899 \end{pmatrix}.$$

б) Легко встановити, що

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}, \ A^3 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = a \cdot E,$$

де E – одинична матриця третього порядку. Тоді $A^{100} = A^{99} \cdot A = \left(A^3\right)^{33} \cdot A = (a \cdot E)^{33} \cdot A = a^{33} \cdot E \cdot A = a^{33} \cdot A$. Таким чином,

$$A^{100} = a^{33} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a^{33} & 0 \\ 0 & 0 & a^{33} \\ a^{34} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.24 Позначимо дану матрицю через A. Очевидно, справедлива рівність $A = 2E + 3B$, де E – одична матриця, а

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Неважко перевірити, що

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^4 = O.$$

Як і в попередній задачі, скористаємось формулою бінома Ньютона:

$$A^{10} = (2E + 3B)^{10} = 2^{10}E + 10 \cdot 2^9 \cdot 3B + 45 \cdot 2^8 \cdot 3^2 B^2 + 120 \cdot 2^7 \cdot 3^3 B^3.$$

Таким чином, сума елементів першого рядка матриці A^{10} дорівнює

$$2^{10} + 10 \cdot 2^9 \cdot 3 + 45 \cdot 2^8 \cdot 3^2 + 120 \cdot 2^7 \cdot 3^3 = 534784.$$

2.25 Справді, $(E - A)\left(E + A + A^2 + \ldots + A^{k-1}\right) =$

$$= E + A + A^2 + \ldots + A^{k-1} - A - A^2 - A^3 - \ldots - A^k = E - A^k = E.$$

2.26 Матрицю A можна представити у виді $A=\lambda E-B$, де E – одинична матриця , а

$$B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко перевірити, що

$$B^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad B^3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B^4=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad B^5=O.$$

Розглянемо добуток

$$(\lambda E-B)\left(\frac{1}{\lambda}E+\frac{1}{\lambda^2}B+\frac{1}{\lambda^3}B^2+\frac{1}{\lambda^4}B^3+\frac{1}{\lambda^5}B^4\right)=E+\frac{1}{\lambda}B+\frac{1}{\lambda^2}B^2+$$

$$+\frac{1}{\lambda^2}B^2+\frac{1}{\lambda^3}B^3+\frac{1}{\lambda^4}B^4-\frac{1}{\lambda}B-\frac{1}{\lambda^2}B^2-\frac{1}{\lambda^3}B^3-\frac{1}{\lambda^4}B^4-\frac{1}{\lambda^5}B^5=$$

$$=E-\frac{1}{\lambda^5}B^5==E.$$

Таким чином, $A^{-1}=\frac{1}{\lambda}E+\frac{1}{\lambda^2}B+\frac{1}{\lambda^3}B^2+\frac{1}{\lambda^4}B^3+\frac{1}{\lambda^5}B^4=$

$=\frac{1}{\lambda^5}\left(\lambda^4E+\lambda^3B+\lambda^2B^2+\lambda B^3+B^4\right)$. Враховуючи це, маємо

$$A^{-1}=\frac{1}{\lambda^5}\begin{pmatrix}\lambda^4 & -\lambda^3 & \lambda^2 & -\lambda & 1\\ 0 & \lambda^4 & -\lambda^3 & \lambda^2 & -\lambda\\ 0 & 0 & \lambda^4 & -\lambda^3 & \lambda^2\\ 0 & 0 & 0 & \lambda^4 & -\lambda^3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^4\end{pmatrix}.$$

Цей результат легко узагальнюється на випадок матриці будь-якого порядку.

2.27 Методом математично індукції легко довести, що

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\cos n\varphi & -\sin n\varphi\\ \sin n\varphi & \cos n\varphi\end{pmatrix}.$$

2.28 Зрозуміло, що $\det A=0$, отже можна вважати, що рядки матриці A пропорціональні. Якщо серед елементів матриці A немає нулів, то таку матрицю можна представити у виді $A=m\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $m\neq 0$. Для будь-якого натурального k маємо $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}2^{k-1} & 2^{k-1}\\ 2^{k-1} & 2^{k-1}\end{pmatrix}\neq 0$. Отже, серед елементів матриці повинні бути нульові, причому ясно, що їх повинно бути не менше двох. Легко впевнитись, що матриці виду $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, а також $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ при піднесенні до степеня не змінюються. Із сказаного вище випливає, що умову $A^k=0$ можуть задовольнити тільки матриці виду

$$\begin{pmatrix}0 & a\\ 0 & 0\end{pmatrix} \text{ або } \begin{pmatrix}0 & 0\\ a & 0\end{pmatrix}.$$

Але кожна з них задовольняє також умову $A^2=0$.

2.29 Легко перевірити, що $A^2=B$. Тому

$$X = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

2.30 Від супротивного. Нехай $E - BA$ – вироджена матриця. Тоді існує ненульовий вектор X такий, що $(E - BA)X = 0$, звідки випливає, що $X = BAX$. Позначимо $Y = AX$. Оскільки $X = BY$, то $Y \neq 0$. Маємо $(E - AB)Y = Y - ABY = Y - AB(AX) = Y - A(BAX) = Y - AX =$ $= Y - Y = 0$, що означає, що $E - AB$ вироджена; суперечність.

2.31 Маємо $(E + A)^m = \sum\limits_{i=0}^{m} C_m^i A^i = E + \sum\limits_{i=1}^{m} C_m^i A^i = 0$, тобто $E = -\sum\limits_{i=1}^{m} C_m^i A^i$ і $E = A\left(-\sum\limits_{i=1}^{m} C_m^i A^{i-1}\right)$, звідки $A^{-1} = -\sum\limits_{i=1}^{m} C_m^i A^{i-1}$, тобто A – невироджена матриця.

2.32 Оскільки ранг матриці A дорівнює 1, то всі її рядки пропорціональні одному. Цей рядок і приймемо за матрицю C. Нехай i-тий рядок матриці A дорівнює $b_i C$. Тоді за матрицю B візьмемо стовпчик (b_i). За означенням добутку матриць маємо $A = BC$.

2.33 З умови задачі випливає, що $\left(2X^{-1}\right)\left(2X^{2}\right) = E$, де E – одинична матриця того ж порядку, що й матриця X. Звідси

$$4\left(X^{-1}X^{2}\right) = E \Leftrightarrow 4\left(X^{-1}X\right)X = E \Leftrightarrow 4X = E.$$

Отже, $X = \dfrac{1}{4}E$.

2.34 Оскільки $2E + A - A^2 = (2E - A)(E + A) = (E + A)(2E - A)$, то $\left(2E + A - A^2\right)^{-1} = (E + A)^{-1}(2E - A)^{-1} = (2E - A)^{-1}(E + A)^{-1}$.

Отже,

$$(2E-A)^{-1}+(E+A)^{-1}-3\left(2E+A-A^2\right)^{-1}=(E+A)(E+A)^{-1}(2E-A)^{-1}+$$

$$+(2E-A)(2E-A)^{-1}(E+A)^{-1}-3(E+A)^{-1}(2E-A)^{-1}=$$

$$=(E+A+2E-A-3E)(E+A)^{-1}(2E-A)^{-1}=O(E+A)^{-1}(2E-A)^{-1}=O,$$

де O – нуль-матриця порядку n.

2.35 Див. розв’язок попередньої задачі. Відповідь: нуль-матриця.

2.36 Застосуємо метод математичної індукції. При $n=2$ маємо:

$$\begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix}=x_1x_2-1=(x_1-1)(x_2-1)+x_1+x_2-2=(x_1-1)(x_2-1)+$$

$$+x_2-1+x_1-1=(x_1-1)(x_2-1)\left(1+\frac{1}{x_2-1}+\frac{1}{x_2-1}\right).$$

Нехай тепер $n>2$ і для визначників, порядок яких менший n, твердження доведено. У заданому визначнику віднімемо від останнього рядка передостанній і розкладемо його за елементами останнього рядка:

$$\Delta=\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & x_2 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x_3 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & x_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1-x_{n-1} & x_n-1 \end{vmatrix}=$$

$$=(x_n-1)\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & x_3 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & x_{n-1} \end{vmatrix}+(x_{n-1}-1)\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & x_3 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Перший з двох одержаних визначників згідно з припущенням індукції дорівнює

$$\Delta_1 = (x_1 - 1)\ldots(x_{n-1} - 1)\left(1 + \frac{1}{x_1 - 1} + \ldots + \frac{1}{x_{n-1} - 1}\right) = .$$

$$= (x_1 - 1)\ldots(x_{n-1} - 1) + (x_2 - 1)\ldots(x_{n-1} - 1) + \ldots +$$

$$+ (x_1 - 1)\ldots(x_{n-2} - 1).$$

Другий визначник одержується з першого при $x_{n-1} = 1$, отже

$$\Delta_2 = (x_1 - 1)(x_2 - 1)\ldots(x_{n-2} - 1).$$

Тоді заданий визначник дорівнює

$$\Delta = (x_n - 1)\Delta_1 + (x_{n-1} - 1)\Delta_2 = (x_1 - 1)\ldots(x_{n-1} - 1)(x_n - 1)\times$$

$$\times\left(1 + \frac{1}{x_1 - 1} + \ldots + \frac{1}{x_{n-1} - 1}\right) + (x_1 - 1)\ldots(x_{n-2} - 1)(x_{n-1} - 1) =$$

$$= (x_1 - 1)\ldots(x_{n-1} - 1)(x_n - 1)\left(1 + \frac{1}{x_1 - 1} + \ldots + \frac{1}{x_{n-1} - 1} + \frac{1}{x_n - 1}\right),$$

що і треба було довести.

2.37 Припустимо, що така матриця існує. Тоді, домноживши рівність $B^2 = A$ на матрицю B справа, а потім зліва, одержуємо $B^3 = AB = BA$, тобто $AB = BA$. Нехай

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \text{ тоді } AB = \begin{pmatrix} b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; BA = \begin{pmatrix} 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{21} & b_{22} \\ 0 & b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

і ми одержуємо рівності: $b_{21} = b_{31} = b_{32} = 0$, $b_{11} = b_{22} = b_{33}$, $b_{12} = b_{23}$. Отже, всяка матриця, яка комутує з матрицею A, має вид $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. Але матриця B з необхідністю повинна бути виродженою, бо такою є матриця A, а тому $a = 0$. Отже,

$$B=\begin{pmatrix}0&b&c\\0&0&b\\0&0&0\end{pmatrix},\text{ але тоді } B^2=\begin{pmatrix}0&0&b^2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\text{ і ніяк не може}$$

дорівнювати матриці A.

2.38 Зробимо наступні перетворення:
1) у визначнику Δ віднімемо від останнього стовпчика перший, від передостаннього – другий і т. д., від $n+1$ стовпчика віднімемо n-й ;
2) в одержаному визначнику до останнього рядка додамо перший, до передостаннього – другий і т.д., до n-го рядка додамо $n+1$-й.
Одержимо:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&0&\dots&0&0&\dots&0&2n+1\\0&2&\dots&0&0&\dots&2n+2&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&n&3n&\dots&0&0\\0&0&\dots&3n+1&n+1&\dots&0&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&4n-1&\dots&0&0&\dots&2n-1&0\\4n&0&\dots&0&0&\dots&0&2n\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}1&0&\dots&0&0&\dots&0&2n\\0&2&\dots&0&0&\dots&2n&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&n&2n&\dots&0&0\\0&0&\dots&3n+1&-2n&\dots&0&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&4n-1&\dots&0&0&\dots&-2n&0\\4n&0&\dots&0&0&\dots&0&-2n\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 4n+1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 4n+1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 4n+1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 3n+1 & -2n & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 4n-1 & \dots & 0 & 0 & \dots & -2n & 0 \\ 4n & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & -2n \end{vmatrix}.$$

Оскільки в одержаному визначнику всі елементи над головною діагоналлю – нулі, то він дорівнює добутку діагональних елементів. Отже

$$\Delta = (4n+1)^n(-2n)^n = (-1)^n(2n(4n+1))^n.$$

2.39 Домножимо рівність $A^2 = A$ на A, одержимо: $A^3 = A^2 = A$, тобто $A^3 = A$; аналогічно $B^3 = B$. Тоді $(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 = A - 3AB + 3AB - B = A - B$. Отже, $\det(A-B)^3 = \det(A-B)$, але $\det(A-B)^3 = (\det(A-B))^3$ і ми приходимо до рівності $(\det(A-B))^3 = \det(A-B)$, що можливо тільки у трьох випадках: коли $\det(A-B)$ дорівнює -1, 0, або 1.

2.40 Якщо б така матриця існувала, то домноживши дану рівність на 3 і додавши до обидвох частин одиничну матрицю, ми б одержали:

$$(3A+E)^2 = \begin{pmatrix} -2 & 15 & 9 \\ -6 & 4 & 6 \\ 0 & -12 & -8 \end{pmatrix}.$$

Визначник матриці, що стоїть справа, дорівнює -152. Враховуючи це, маємо: $\det(3A+E)^2 = (\det(3A+E))^2 = -152$, що неможливо.

2.41 Неважко здогадатись, що степені матриці A мають вид:

$$A^n = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & a_n & b_n \\ 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^n & c_n \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{5}\right)^n \end{pmatrix}, \quad \text{де} \quad a_1 = b_1 = c_1 = 1.$$

Розглянемо A^{n+1}. З одного боку

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} & \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}a_n & \left(\frac{1}{2}\right)^n + a_n + \frac{1}{5}b_n \\ 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} & \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{5}c_n \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} \end{pmatrix},$$

а з другого

$$A^{n+1} = A \cdot A^n = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} & \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2}a_n & \left(\frac{1}{5}\right)^n + c_n + \frac{1}{2}b_n \\ 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} & \left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{1}{3}c_n \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Таким чином, повинні виконуватись рівності:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2}a_n, \quad \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{5}c_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{1}{3}c_n,$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n + a_n + \frac{1}{5}b_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n + c_n + \frac{1}{2}b_n .$$

Отже,

$$a_n = 6\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right), \ \ c_n = \frac{15}{2}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right),$$

$$b_n = \frac{10}{3}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right) + \frac{10}{3}(a_n - c_n).$$

Звідси випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, а враховуючи, що діагональні елементи матриці A^n теж прямують до нуля при $n \to \infty$, одержуємо: $\lim\limits_{n\to\infty} A^n = O$, де O – нульова матриця третього порядку.

3.1 Із умови задачі випливає, що $P(1) = 2$, $P(2) = 1$. Нехай частка від ділення $P(x)$ на $(x-1)(x-2)$ є $Q(x)$ і остача $ax + b$, тобто

$$P(x) = (x-1)(x-2)Q(x) + ax + b.$$

Підставивши у цю рівність $x = 1$, а потім $x = 2$, одержуємо систему

$$\begin{cases} a + b = 2\ , \\ 2a + b = 1, \end{cases}$$

звідки $a = -1,\ b = 3$. Отже, шукана остача є $-x + 3$.

3.2 Нехай при такому діленні одержується частка $Q(x)$ і остача $ax + b$, тобто

$$x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243} = Q(x)(x^2 - 1) + ax + b.$$

Покладаючи в цій рівності $x = 1$ і $x = -1$, одержуємо: $6 = a + b$, $-6 = -a + b$, звідки $a = 6,\ b = 0$. Отже, шукана остача дорівнює $6x$.

3.3 Нехай многочлен $P(x)$ дорівнює 7 при $x = a$, $x = b$, $x = c$, $x = d$. Це означає, що рівняння $P(x) - 7 = 0$ має чотири різних цілих корені a, b, c, d, тобто

$$P(x) - 7 = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)Q(x),$$

де $Q(x)$ – теж многочлен з цілими коефіцієнтами. Який, зокрема, може дорівнювати 1. Припустимо, що многочлен $P(x)$ приймає при цілому значенні $x = m$ значення 14. Пі-

дставивши значення $x = m$ в останню рівність, одержимо: $7 = (m-a)(m-b)(m-c)(m-d)Q(m)$,
що неможливо, бо цілі числа $m-a$, $m-b$, $m-c$, $m-d$ всі різні, а 7 неможливо розкласти в добуток п'яти співмножників, із яких принаймні чотири різні.

3.4 Із умови випливає, що $x=1$, $x=2$ і $x=3$ є коренями многочлена $P(x)-5$, тому

$$P(x)-5=(x-1)(x-2)(x-3)Q(x),$$

де $Q(x)$ – многочлен з цілими коефіцієнтами. Якщо існує ціле число $x=c$ таке, що $P(c)=6$, то з останньої рівності одержуємо

$$1=(c-1)(c-2)(c-3)Q(c).$$

Але це неможливо, бо одиницю не можна подати у вигляді добутку чотирьох цілих співмножників, принаймні три з яких різні. Отже, не існує цілого значення x, про яке йдеться в умові задачі.

3.5 Нехай $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$. Якщо m і k – два цілих числа однакової парності, то різниця $P(m)-P(k)$ парна. Дійсно, вираз

$$P(m)-P(k)=a_0\left(m^n-k^n\right)+a_1\left(m^{n-1}-k^{n-1}\right)+\ldots+a_{n-1}(m-k)$$

ділиться на парне число $m-k$. Зокрема, при q парному різниця $P(q)-P(0)$ парна. Але за умовою $P(0)$ непарне; отже $P(q)$ теж непарне, а тому $P(q)\neq 0$. Аналогічно при q непарному різниця $P(q)-P(1)$ парна; оскільки за умовою $P(1)$ непарне, то звідси, як і вище, випливає, що $P(q)\neq 0$. Отже $P(x)$ не може обертатись в нуль ні при якому цілому x (як парному, так і непарному), тобто многочлен $P(x)$ не має цілих коренів.

3.6 Нехай такий многочлен $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ існує. Тоді $P(7)=a_0 7^n+a_1 7^{n-1}+\ldots+a_n=5$,

$$P(15) = a_0 15^n + a_1 15^{n-1} + \ldots + a_n = 9 .$$

Віднімаючи одну рівність від другої, одержимо рівність

$$a_0\left(15^n - 7^n\right) + a_1\left(15^{n-1} - 7^{n-1}\right) + \ldots + a_{n-1}(15-7) = 4 ,$$

де ліва частина ділиться на 15-7=8, а права частина не ділиться на 8 – суперечність.

3.7 Нехай такий многочлен існує. Якщо $P(2012) = 20$, то різниця $P(2012) - P(12) = -1992$. З другого, боку ця різниця повинна ділитись на 2012-12=2000, суперечність. Отже, $P(2012)$ не може дорівнювати 20. Аналогічно доводиться, що $P(2012)$ не може дорівнювати 12. Таким чином, такого многочлена не існує.

3.8 Припустимо супротивне: нехай деякий многочлен з натуральними коефіцієнтами $P(x)$ приймає при всіх натуральних значеннях x значення, рівні степеням двійки з натуральним показником, причому $P(x) \neq const$; тоді, очевидно, $P(x)$ буде строго зростаючою функцією при $x > 0$. Нехай m – деяке натуральне число і $P(m) = 2^k$. Візьмемо число $m_1 = m + 2^l$, де l натуральне, причому $l > k$; тоді $P(m_1) = 2^q$, де q натуральне і $q > k$. Розглянемо різницю $P(m_1) - P(m) = 2^q - 2^k = 2^k\left(2^{q-k} - 1\right)$. Але ця різниця повинна ділитись, як відомо, на різницю $m_1 - m = 2^l$. Враховуючи, що числа 2^l і $2^{q-k} - 1$ взаємно прості, приходимо до висновку, що 2^k повинно поділитись націло на 2^l, що неможливо, бо $l > k$. Одержана суперечність і доводить твердження задачі. Зауважимо, що твердження залишиться в силі, якщо замість двійки взяти будь-яке інше натуральне число, доведення аналогічне.

3.9 Маємо $P(x) - 5 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)Q(x)$, де x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 – цілі точки, в яких значення многочлена $P(x)$ дорівнює 5, $Q(x)$ – многочлен з цілими коефіцієнтами. Припустимо, що для деякого цілого x_0 $P(x_0)=0$; тоді $(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)(x_0-x_5)Q(x_0)=-5$. Отже, x_0-x_1, x_0-x_2, x_0-x_3, x_0-x_4, x_0-x_5 – різні цілі числа, які ділять -5. З другого боку, -5 має всього 4 різних цілих дільники 1, -1, 5 і -5 – суперечність.

3.10 Насамперед зауважимо, що a_n і $1+a_1+\ldots+a_{n-1}+a_n$ – непарні числа. Тепер припустимо, що $P(x)$ має раціональний корінь, позначимо його $\frac{p}{q}$. Як відомо, чисельник цього дробу повинен бути дільником вільного члена a_n; отже p – непарне число. Підставимо $x=\frac{p}{q}$ в $P(x)$ і домножимо одержану рівність на q^n. Отримаємо $p^n+a_1p^{n-1}q+\ldots+a_{n-1}pq^{n-1}+a_nq^n=0$. Неважко бачити, що ліва частина цієї рівності – непарне число як при парному, так і непарному q, що свідчить про те, що рівність виконуватись не може.

3.11 Розглянемо многочлен $Q(x)=P(x)-2$ і доведемо наступне твердження: якщо многочлен $Q(x)$ з цілими коефіцієнтами має чотири різні цілі корені, то при будь-якому цілому значенні x ціле число $|Q(x)|$ або дорівнює нулю, або є складеним (зокрема, воно не може дорівнювати 1). Нехай a, b, c, d – різні цілі корені многочлена $Q(x)$. Тоді справедливий розклад $Q(x)=S(x)R(x)$, де

$$S(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d),$$

а $R(x)$ – деякий многочлен з цілими коефіцієнтами. Нехай x_0 – ціле число, відмінне від a, b, c і d. Тоді $R(x_0)$ ціле, а $Q(x_0)$ ділиться на добуток $(x_0-a)(x_0-b)(x_0-c)(x_0-d)$ чотирьох різних цілих чисел, хоча б два з яких відмінні від 1 і -1. Тому або $Q(x_0)=0$, або число $|Q(x_0)|$ – складене. Зокрема, ні при якому цілому x число $Q(x)$ не дорівнює ні одному з чисел -1, 1, 3, 5 і 7, а значить, число $P(x)=Q(x)+2$ не дорівнює ні одному з чисел 1, 3, 5, 7 і 9.

3.12 Якщо многочлен сьомого степеня $P(x)$ розкладається в добуток двох многочленів $Q(x)$ і $R(x)$ з цілими коефіцієнтами, то степінь хоча б одного із співмножників не перевищує 3; нехай це буде $Q(x)$. Якщо $P(x)$ при семи цілих значеннях x приймає значення ± 1, то $Q(x)$ при тих же значеннях x теж приймає значення ± 1. Серед семи цілих значень x, при яких $Q(x)$ приймає значення ± 1, знайдуться чотири таких, при яких $Q(x)$ приймає значення 1, або чотири таких, при яких $Q(x)$ приймає значення -1. в першому випадку рівняння степеня не вище 3 $Q(x)-1=0$ має чотири корені, в другому випадку рівняння $Q(x)+1=0$ має чотири корені, що неможливо.

3.13 Якщо $P(x)$ – многочлен з цілими коефіцієнтами і m і l – цілі числа, то $P(m)-P(l)$ ділиться на $m-l$ (див., зокрема, розв'язок задачі 3.5). Нехай N – деяке ціле число і $P(N)=M\neq 0$. При будь-якому цілому k $P(N+kM)-P(N)$ ділиться на kM, а значить, і на M; тому при будь-якому цілому k $P(N+kM)$ ділиться на M. Але серед значень $P(N+kM)$, $k=0,1,2,\ldots$ зустрічаються числа, відмінні від $\pm M$, оскільки в противному випадку принаймні одне з рівнянь $P(x)-M=0$ або $P(x)+M=0$ мало б більше ніж n коренів, де n – степінь многочлена $P(x)$, що неможливо.

3.14 Всякий многочлен виду $P(x)=ax$, очевидно, задовольняє умовам задачі. Доведемо методом математичної індукції, що для будь-якого невід'ємного цілого n шуканий многочлен $P(x)$ задовольняє рівність $P(n)=nP(1)$.

При $n=0$ і $n=1$ рівність виконана. Нехай вона вже доведена для всіх чисел, менших n де $n \in N$. Тоді із рівності в умові задачі при $x=n-1$ маємо $2P(n-1)=P(n)+P(n-2)$, або $P(n)=2(n-1)P(1)-(n-2)P(1)=nP(1)$, отже рівність справедлива і для числа n (до речі, легко довести, що ця рівність має місце і для від'ємних n). Оскільки многочлен $P(x)-P(1)x$ має нескінченно багато коренів, то він тотожно дорівнює нулю. Поклавши $P(1)=a$, одержуємо, що шукані многочлени мають вид $P(x)=ax$.

3.15 Підставивши в дану тотожність $x=0$ і $x=2$, бачимо, що многочлен $P(x)$ має корені 0 і 1, а значить, ділиться на x^2-x. Тоді, підставляючи в тотожність вираз $P(x)=(x^2-x)Q(x)$, одержуємо

$$x((x-1)^2-(x-1))Q(x-1)\equiv(x-2)(x^2-x)Q(x),$$

або

$$x(x-1)(x-2)Q(x-1)\equiv(x-2)x(x-1)Q(x),$$

тобто $Q(x)\equiv Q(x-1)$. Звідси маємо $Q(0)=Q(-1)=Q(-2)=\dots$. Тому $Q(x)=a$ – константа, і шукані многочлени мають вид $P(x)=a(x^2-x)$ (безпосередньою перевіркою можна переконатись, що всі такі многочлени задовольняють вказану тотожність).

3.16 Підставляючи в дану тотожність послідовно значення $x=1$, $x=-2$, $x=0$, одержуємо, що шуканий многочлен $P(x)$ має корені 0, ±1, а тому ділиться на x^3-x. Вираз $P(x)=(x^3-x)Q(x)$ підставимо в тотожність:

$$(x-1)((x+1)^3-(x+1))Q(x+1)-(x+2)(x^3-x)Q(x)\equiv 0,$$

або $(x-1)(x+1)x(x+2)Q(x+1)-(x+2)x(x+1)(x-1)Q(x)\equiv 0$, що приводить до тотожності $Q(x+1)\equiv Q(x)$, звідки одержуємо $Q(0)=Q(1)=Q(2)=\dots$. Тому $Q(x)=a$ – константа, і шукані многочлени мають вид $P(x)=a(x^3-x)$.

3.17 Підставляючи в дану тотожність послідовно $x = 0,1,2,\ldots,2012$, неважко переконатись, що числа 0, 1, ... , 2011 є коренями даного многочлена, а тому

$$P(x) = x(x-1)(x-2)...(x-2011)Q(x),$$

де $Q(x)$ – деякий многочлен. Доведемо, що $Q(x)$ – многочлен нульового степеня, тобто $Q(x) = a$, де $a = const$. Підставивши $P(x)$ в задану тотожність, одержуємо $(x-2012)\times$ $\times x(x-1)\ldots(x-2011)Q(x) \equiv x(x-1)(x-2)\ldots(x-2012)Q(x-1)$, звідки випливає тотожність $Q(x) \equiv Q(x-1)$. Далі можна навести такі ж міркування, як і в розв'язках двох попередніх задач. Але можна завершити доведення по-іншому. Припустимо, що $Q(x)$ – многочлен степеня $k \geq 1$, тобто $Q(x) = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_k$, де $a_0 \neq 0$. Але тоді $Q(x-1) = a_0(x-1)^k + a_1(x-1)^{k-1} + \ldots + a_k$. Оскільки многочлени $Q(x)$ і $Q(x-1)$ тотожно рівні, то повинні співпадати їх коефіцієнти при однакових степенях x. Прирівнюючи коефіцієнти при x^{k-1}, маємо $a_1 = -ka_0 + a_1$, звідки $a_0 = 0$, прийшли до суперечності. Отже $Q(x) = a = const$ і $P(x) = ax(x-1)(x-2)...(x-2011)$. Легко перевірити, що будь-який многочлен такого виду задовольняє вказану тотожність.

3.18 Нехай шуканий многочлен має вид

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \text{ де } a_n \neq 0.$$

Припустимо, що хоча б один із коефіцієнтів $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ відмінний від нуля. Виберемо найбільше значення $k < n$, для якого $a_k \neq 0$. Тоді маємо $P(x^2) = a_n x^{2n} + a_k x^{2k} + \ldots + a_1 x^2 +$ $+ a_0 = (a_n x^n + a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0)^2 = (P(x))^2$. Порівнюючи коефіцієнти при x^{n+k}, одержуємо рівність $0 = 2a_n a_k$, яка суперечить умовам $a_n \neq 0$, $a_k \neq 0$. Отже,

$a_{n-1} = \ldots = a_1 = a_0 = 0$ і $P(x) = a_n x^n$. Нарешті, із умов $a_n x^{2n} \equiv P(x^2) \equiv (P(x))^2 \equiv a_n^2 x^{2n}$ маємо $a_n = 1$, тобто $P(x) = x^n$.

3.19 Позначимо $y = x - 1$, $Q(y) = P(y-1)$. Тоді маємо $(P(x-2))^2 = (P(y-1))^2 = (Q(y))^2$, $P(x^2 - 2x) = P(y^2 - 1) = Q(y^2)$, і початкова тотожність запишеться у виді $Q(y^2) = (Q(y))^2$, тобто з точністю до позначень співпадає з тотожністю попередньої задачі. Тому $Q(y) = y^n$ і, враховуючи, що $Q(y+1) = P(y)$, маємо $P(y) = (y+1)^n$. Таким чином, шуканий многочлен є $P(x) = (x+1)^n$.

3.20 Можна вважати, що старші коефіцієнти обох многочленів додатні, в противному випадку один з многочленів, чи навіть обидва, домножимо на -1. Розглянемо різницю $P(x) - Q(x)$. Зрозуміло, що можна вказати x_0 таке, що $P(x)$ і $Q(x)$ строго зростаючі при $x > x_0$. Нехай $x_1 > x_0$ таке, що $P(x_1) = m$, $Q(x_1) = n$, де m і n цілі. Очевидно, наступні цілі значення $m+1$ і $n+1$ многочлени приймуть в одній і тій же точці $x_2 > x_1$: $P(x_2) = m+1$, $Q(x_2) = n+1$. Ясно, що значення $m+2$ і $n+2$ теж приймаються в одній і тій же точці $x_3 > x_2$ і т. д. Ми одержуємо нескінченну послідовність $\{x_k\}$ таку, що $P(x_k) - Q(x_k) = \, = m - n = const$. Звідси очевидним чином випливає, що $P(x) - Q(x)$ є константа на всій числовій прямій.

3.21 З умови задачі випливає, що $P_n(x)$ – многочлен парного степеня ($n = 2k$), коефіцієнт при старшому степені додатний (можна вважати, що він дорівнює 1) і що множину коренів многочлена $P_n(x)$ можна розбити на пари комплексно спряжених: x_1 і $\overline{x}_1$, x_2 і $\overline{x}_2$, …, x_k і $\overline{x}_k$. Отже, многочлен $P_n(x)$ можна подати у вигляді:

$$P_n(x)=(x-x_1)(x-x_2)\,...\,(x-x_k)(x-\bar{x}_1)(x-\bar{x}_2)\,...\,(x-\bar{x}_k).$$

Добуток перших k множників є многочлен степеня k. Цей многочлен є комплексно спряженим до многочлена степеня k, що дорівнює добутку останніх k множників, тобто

$$P_n(x)=(Q(x)+iR(x))(Q(x)-iR(x)) \text{ або}$$

$$P_n(x)=Q^2(x)+R^2(x),$$

де $Q(x)$, $R(x)$ – многочлени з дійсними коефіцієнтами, що й треба було довести.

3.22 Оскільки всі коефіцієнти многочлена $P(x)$ невід'ємні, то ні один із його коренів $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ не може бути додатним. Отже, цей многочлен має вид $P(x)=(x+\beta_1)(x+\beta_2)\ldots(x+\beta_n)$, де $\beta_i=-\alpha_i>0$, $i=1,2,\ldots,n$. Використовуючи нерівність Коші, маємо $2+\beta_i=1+1+\beta_i\geq 3\sqrt[3]{1\cdot 1\cdot\beta_i}=3\sqrt[3]{\beta_i}$, $i=1,2,\ldots,n$. Враховуючи, що за теоремою Вієта $\beta_1\beta_2\ldots\beta_n=1$, одержуємо

$$P(2)=(2+\beta_1)(2+\beta_2)\ldots(2+\beta_n)\geq 3^n\sqrt[3]{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n}=3^n,$$

що і вимагалось.

3.23 Доведення проведемо індукцією по n. При $n=0$ твердження справедливе, оскільки в цьому випадку $(x+1)^{2n+1}+x^{n+2}\equiv x^2+x+1$. Припустимо, що твердження виконано для значення $n-1$, тобто многочлен $(x+1)^{2n-1}+x^{n+1}$ ділиться на многочлен x^2+x+1. Але тоді

$$(x+1)^{2n+1}+x^{n+2}\equiv(x+1)^2(x+1)^{2n-1}+x\cdot x^{n+1}\equiv$$

$$\equiv\left(x^2+2x+1\right)(x+1)^{2n-1}+x\cdot x^{n+1}\equiv$$

$$\equiv\left(x^2+x+1\right)(x+1)^{2n-1}+x\left((x+1)^{2n-1}+x^{n+1}\right)$$

теж ділиться на x^2+x+1, тобто твердження справедливе і для значення n.

3.24 Зауважимо, що $(x-1)f(x)=x^5-1$. Тоді $f\left(x^5\right)=x^{20}+$ $+x^{15}+x^{10}+x^5+1=\left(x^{20}-1\right)+\left(x^{15}-1\right)+\left(x^{10}-1\right)+\left(x^5-1\right)+5$.

Але $x^5 - 1$, а значить, і $f(x)$ є дільниками кожної із дужок. Звідси видно, що шукана остача дорівнює 5.

3.25 Добуток квадратних тричленів $x^2 + ax + b$ і $x^2 + cx + d$ представляється у виді

$$x^4 + (a + c)x^3 + (b + ac + d)x^2 + (bc + ad)x + bd .$$

Одержаний многочлен четвертого степеня тотожно дорівнює многочлену $x^4 + 2x^2 + 2x + 2$, якщо

$a + c = 0$, (3.1) $b + ac + d = 2$, (3.2)

$bc + ad = 2$, (3.3) $bd = 2$. (3.4)

Оскільки за умовою a, b, c, d – цілі числа, то (3.4) може виконуватись тільки в тому випадку, коли один із співмножників непарний (рівний 1 чи -1), а другий парний (рівний 2 чи -2). Нехай, наприклад, b непарне, а d парне. Тоді із (3.3) випливає, що добуток bc парний. Але b непарне, отже c повинно бути парним, що неможливо, бо при b непарному, а c і d парних ліва чистина співвідношення (3.2) непарна і не може дорівнювати 2.

3.26 Очевидно $f'(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$. Легко бачити, що якщо n парне, то $f'(x) < 0$ при $x \in (-\infty, -1)$ і $f'(x) > 0$ при $x \in (-1, +\infty)$. Отже, $f(x)$ досягає абсолютного мінімуму в точці $x = -1$, але $f(-1) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} - \ldots + \dfrac{1}{n} > 0$. Це означає, що $f(x) > 0$ для всіх x, тому при парному n многочлен коренів не має.

Якщо ж n непарне, то $f'(x) > 0$ для всіх x. Оскільки при цьому $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, то рівняння $f(x) = 0$ має єдиний дійсний корінь.

3.27 Нехай многочлен $P_n(x)$ має більше як один дійсний корінь, і нехай x_1 і x_2 ($x_1 < x_2$) – корені многочлена такі, що інтервал (x_1, x_2) не містить інших дійсних коренів заданого многочлена. Зауважимо, що $x_1 < 0$ і $x_2 < 0$, тому що многочлен $P_n(x)$ може мати лише від'ємні корені. Оскільки $P_n'(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$, то

$P_n(x) = P_n'(x) + \frac{x^n}{n!}$ і $P_n'(x_1) = -\frac{x_1^n}{n!}$, $P_n'(x_2) = -\frac{x_2^n}{n!}$. Звідси випливає, що в точках x_1 і x_2 похідна $P_n'(x)$ має однакові знаки. Тоді в деякому правому півоколі точки x_1 і в деякому лівому півоколі точки x_2 многочлен $P_n(x)$ буде мати різні знаки. Звідси випливає, що знайдеться точка $x_3 \in (x_1, x_2)$, для якої $P_n(x_3) = 0$. Дістали суперечність. Це означає, що многочлен $P_n(x)$ має не більше одного дійсного кореня, що й треба було довести.

3.28 Розглянемо функцію $f(x) = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}$. Неважко бачити, що при додатних x похідна цієї функції від'ємна, тому функція $f(x)$ на півосі $(0, +\infty)$ строго спадає від $+\infty$ до нуля. А тому існує єдине додатне x_0 таке, що $f(x_0) = 1$, тобто $\frac{a_1}{x_0} + \frac{a_2}{x_0^2} + \ldots + \frac{a_n}{x_0^n} = 1$. Звідси $x_0^n - a_1 x_0^{n-1} - a_2 x_0^{n-2} - \ldots - a_n = 0$, тобто x_0 є єдиним додатним коренем даного многочлена.

3.29 Розглянемо функцію $f(x) = c_0 x + \frac{c_1 x^2}{2} + \ldots + \frac{c_n x^{n+1}}{n+1}$. За умовою $f(1) = 0$; крім того, $f(0) = 0$. Тому існує $x_0 \in (0, 1)$ таке, що $f'(x_0) = 0$ (теорема Ролля). Але $f'(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$, отже, $c_0 + c_1 x_0 + \ldots + c_n x_0^n = 0$.

3.30 Користуючись формулою Тейлора при $x = a$, запишемо многочлен $P(x)$ у виді

$$P(x)=P(a)+\frac{P'(a)}{1!}(x-a)+\frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

(Залишковий член дорівнює нулю, оскільки $P^{(n+1)}(x)\equiv 0$). При $x>a$ написана рівність, очевидно, дає $P(x)>0$, що і означає відсутність коренів, які перевищують a.

3.31 Многочлени

$$Q(x)=P(0)+\frac{1}{2}\int_0^x\left((P'(y))^2+P'(y)+1\right)dy$$

та

$$R(x)=\frac{1}{2}\int_0^x\left((P'(y))^2-P'(y)+1\right)dy$$

монотонно зростають, оскільки

$$Q'(x)=(P'(x))^2+P'(x)+1>0 \quad \text{і}$$

$$R'(x)=(P'(x))^2-P'(x)+1>0.$$

При цьому $Q(x)-R(x)=P(0)+\int_0^x P'(y)dy=P(x)$.

3.32 Нехай $x^n+4=P(x)Q(x)$, де $P(x)$ і $Q(x)$ – многочлени з цілими коефіцієнтами степенів відповідно m і l ($m<n$, $l<n$). Тоді всі корені многочленів $P(x)$ і $Q(x)$, будучи коренями многочлена x^n+4, мають модуль $\sqrt[n]{4}$, а оскільки добуток коренів кожного із многочленів $P(x)$ і $Q(x)$ – число раціональне (за теоремою Вієта), то $4^{\frac{m}{n}}$ і $4^{\frac{l}{n}}$ – раціональні числа. Враховуючи, що $\frac{m}{n}<1$ і $\frac{l}{n}<1$, маємо $\frac{m}{n}=\frac{l}{n}=\frac{1}{2}$, отже $m=l=\frac{n}{2}$ і n – парне число. Якщо число $\frac{n}{2}$ непарне, то $P(x)$ і $Q(x)$ – многочлени непарного степеня. Значить, кожен з них має хоча б один дійсний корінь, але це неможливо, бо при парному n многочлен x^n+4

дійсних коренів не має. Таким чином, $\frac{n}{2}$ парне і n ділиться на 4.

Ми довели, що подільність n на 4 є необхідною умовою того, що многочлен $x^n + 4$ розкладається в добуток двох многочленів меншого степеня з цілими коефіцієнтами. Але ця умова є і достатньою, оскільки у випадку $n = 4k$, $k \in N$, маємо

$$x^n + 4 = \left(x^{2k} - 2x^k + 2\right)\left(x^{2k} + 2x^k + 2\right).$$

3.33 Очевидно, многочлени мають вид
$P_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$, $P_2 = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3$. Тоді

$$P_1^2 + P_2^2 = a_1^2x_1^2 + a_2^2x_2^2 + a_3^2x_3^2 + 2a_1a_2x_1x_2 + 2a_1a_3x_1x_3 + 2a_2a_3x_2x_3 +$$
$$+ b_1^2x_1^2 + b_2^2x_2^2 + b_3^2x_3^2 + 2b_1b_2x_1x_2 + 2b_1b_3x_1x_3 + 2b_2b_3x_2x_3 .$$

Повинні виконуватись рівності: $a_1^2 + b_1^2 = 1$, $a_2^2 + b_2^2 = 1$,
$a_3^2 + b_3^2 = 1$, $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$, $a_1a_3 + b_1b_3 = 0$, $a_2a_3 + b_2b_3 = 0$. Розглянемо вектори площини з координатами: $\vec{q}_1 = \{a_1 , b_1\}$, $\vec{q}_2 = \{a_2 , b_2\}$, $\vec{q}_3 = \{a_3 , b_3\}$, тоді одержані вище рівності можна записати у векторному виді $|\vec{q}_1| = |\vec{q}_2| = |\vec{q}_3| = 1$, $\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2 = \vec{q}_1 \cdot \vec{q}_3 = \vec{q}_2 \cdot \vec{q}_3 = 0$, що означає, що на площині є три попарно ортогональних ненульових вектори, що є неможливим. Отже, вказана рівність неможлива.

3.34 Твердження задачі безпосередньо випливає із наступних перетворень:

$$\left(1 - x + x^2 - x^3 + \ldots - x^{99} + x^{100}\right)\left(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{99} + x^{100}\right) =$$
$$= \left[\left(1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{100}\right) - x\left(1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{98}\right)\right] \times$$
$$\times \left[\left(1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{100}\right) + x\left(1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{98}\right)\right] =$$
$$= \left(1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{100}\right)^2 - x^2\left(1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{98}\right)^2 .$$

3.35 Доведемо, що при будь-якому раціональному, але не цілому значенні x значення многочлена $P(x)$ не може бути цілим числом, а значить, не може дорівнювати нулю, бо нуль – число ціле.

Нехай $x=\frac{p}{q}$, де p і q взаємно прості. Тоді

$$P(x)=\frac{p^n}{q^n}+a_1\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}}+a_2\frac{p^{n-2}}{q^{n-2}}+\ldots+a_{n-1}\frac{p}{q}+a_n=$$

$$=\frac{p^n+a_1p^{n-1}q+a_2p^{n-2}q^2+\ldots+a_{n-1}pq^{n-1}+a_nq^n}{q^n}=$$

$$=\frac{p^n+q\left(a_1p^{n-1}+a_2p^{n-2}q+\ldots+a_{n-1}pq^{n-2}+a_nq^{n-1}\right)}{q^n}.$$

p^n, як і p, взаємно просте з q; отже, $p^n+q\left(a_1p^{n-1}+\ldots+a_nq^{n-1}\right)$ також взаємно просте з q, а значить, і з q^n. Тому одержаний дріб є нескоротним і не може дорівнювати цілому числу.

3.36 Оскільки даний многочлен має n додатних коренів $x_1,x_2,\ldots,x_n$, то його степінь не менший n. Тому $a\neq 0$ і за теоремою Вієта маємо

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=1,$$

$$(-1)^n\sum_{i=1}^{n}x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_{i-1}x_{i+1}\cdot\ldots\cdot x_n=n^2\frac{b}{a},$$

$$(-1)^n x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n=\frac{b}{a},$$

звідки $b\neq 0$. Враховуючи нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним, одержуємо умову

$$n^2=1\cdot\frac{(-1)^n n^2\, b/a}{(-1)^n\, b/a}=\left(x_1+x_2+\ldots+x_n\right)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)\geq$$

$$\geq\left(n\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}\right)\left(n\sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\ldots\frac{1}{x_n}}\right)=n^2,$$

яка виконується тільки у випадку, коли $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{1}{n}$.

3.37 Розкладемо даний многочлен на множники

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n), \text{ де } a \neq 0.$$

Тоді $P'(x) = P_1(x) + P_2(x) + \ldots + P_n(x)$, де через $P_k(x)$ $(k = 1,2,\ldots,n)$ позначено многочлен степеня $n - 1 \geq 1$, який задовольняє тотожність $(x - x_k)P_k(x) = P(x)$. Зауважимо, що $P_k(x_i) = 0$ при $k \neq i$, отже, $P'(x_i) = P_i(x_i) \neq 0$. Розглянемо многочлен

$$F(x) = -1 + \frac{P_1(x)}{P'(x_1)} + \frac{P_2(x)}{P'(x_2)} + \ldots + \frac{P_n(x)}{P'(x_n)},$$

степінь якого не перевищує числа $n - 1$. Для кожного $i = 1,2,\ldots,n$ маємо рівності

$$F(x_i) = \sum_{j=1}^{n} \frac{P_j(x_i)}{P'(x_j)} - 1 = \frac{P_i(x_i)}{P'(x_i)} - 1 = 0,$$

що означає, що многочлен $F(x)$ має n різних коренів. А, значить, $F(x) \equiv 0$. Оскільки старший коефіцієнт кожного із многочленів $P_k(x)$ дорівнює a, то коефіцієнт многочлена $F(x)$ при x^{n-1} дорівнює

$$\frac{a}{P'(x_1)} + \frac{a}{P'(x_2)} + \ldots + \frac{a}{P'(x_n)},$$

але цей коефіцієнт дорівнює нулю. Звідси випливає твердження задачі.

3.38 Позначимо $x_0 = \cos\alpha + i\sin\alpha$, тоді $\bar{x}_0 = \cos\alpha - i\sin\alpha$ і многочлен $Q(x)$ представляється у виді $Q(x) = (x - \cos\alpha - i\sin\alpha)(x - \cos\alpha + i\sin\alpha) = (x - x_0)(x - \bar{x}_0)$.

За формулою Муавра маємо $x_0^n = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$, $\bar{x}_0^n = (\cos\alpha - i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha - i\sin n\alpha$, тому

$P(x_0)=(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)\sin\alpha-(\cos\alpha+i\sin\alpha)\sin n\alpha+$
$+\sin(n-1)\alpha=\cos n\alpha\sin\alpha-\cos\alpha\sin n\alpha+\sin(n-1)\alpha=$
$=\sin(1-n)\alpha+\sin(n-1)\alpha=0$.
Аналогічно можна довести, що $P(\bar{x}_0)=0$. Таким чином, за теоремою Безу многочлен $P(x)$ ділиться на кожний із двочленів $x-x_0$ та $x-\bar{x}_0$ (які не рівні один одному, бо $\sin\alpha\neq 0$), а значить і на їх добуток $Q(x)$.

3.39 а) Значення $P(x)$ при всіх цілих x мають однакову парність тоді і тільки тоді, коли кожне із чисел
$P(x+1)-P(x)=(x+1)^2+p(x+1)+q-(x^2+px+q)=2x+1+p$
ділиться на 2, тобто коли p непарне. При цьому парність всіх значень $P(x)$ однозначно визначається парністю числа $q=P(0)$. Отже, всі значення $P(x)$ парні (непарні) при непарному p і парному (непарному) q.

б) Число $Q(3x)=27x^3+3px+q$ при цілому x ділиться на 3 тоді і тільки тоді, коли число q ділиться на 3. Далі, кожне із значень
$Q(3x\pm1)=(3x\pm1)^3+p(3x\pm1)+q=27x^3\pm27x^2+9x+3px\pm1\pm p+q$
ділиться на 3 в тому і тільки в тому випадку (оскільки q кратне 3), коли на 3 ділиться число $\pm(1+p)$, або просто $1+p$. Таким чином, всі значення $Q(x)$ діляться на 3 при умовах $q\equiv 0(\mathrm{mod}3)$, $p\equiv 2(\mathrm{mod}3)$.

3.40 Зауважимо, що існує тільки один многочлен, який задовольняє умовам задачі, оскільки якщо б існував інший многочлен $Q(x)\neq P(x)$ з такими ж властивостями, то многочлен $P(x)-Q(x)$ степеня не більше n, мав би не менше ніж $n+1$ корінь. Оскільки для многочлена $R(x)=x+\dfrac{1}{(n+1)!}(0-x)(1-x)\ldots(n-x)$ виконана умова

$R(-1)=0$, то цей многочлен ділиться на $x+1$, тобто $R(x)=S(x)(x+1)$, де $S(x)$ – многочлен степеня n. Очевидно $R(k)=k$ і $S(k)=\dfrac{k}{k+1}$ при $k=0,1,\dots,n$, то $S(x)$ задовольняє умовам задачі, а значить, $P(x)\equiv S(x)$ і

$$P(n+1)=\frac{R(n+1)}{n+2}=\frac{n+1+(-1)^{n+1}}{n+2}.$$

3.41 Нехай $x_1,x_2,...,x_n$ – корені многочлена $P(x)$. Тоді

$$P(x)=A(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)\ \text{, де } A=\mathrm{const}.$$

Тому

$$P'(x)=A(x-x_2)(x-x_3)...(x-x_n)+A(x-x_1)(x-x_3)...(x-x_n)+$$
$$+\dots+A(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_{n-1}).$$

З умови задачі випливає, що многочлен $P'(x)$ має $n-1$ різних дійсних коренів $x_1^*,x_2^*,...,x_{n-1}^*$, що не збігаються з коренями рівняння $P(x)=0$ і задовольняють рівнянню:

$$A(x_i^*-x_2)(x_i^*-x_3)...(x_i^*-x_n)+A(x_i^*-x_1)(x_i^*-x_3)...(x_i^*-x_n)+$$
$$+\dots+A(x_i^*-x_1)(x_i^*-x_2)...(x_i^*-x_n)=0.$$

Оскільки $x_i^*\neq x_j,\ i=1,2,...,n,\ j=1,2,...,n$, то це рівняння можна переписати у вигляді:

$$P(x_i^*)\left(\frac{1}{x_i^*-x_1}+\frac{1}{x_i^*-x_2}+\dots+\frac{1}{x_i^*-x_n}\right)=0.$$

Враховуючи, що $P(x_i^*)\neq 0$, матимемо:

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{x_i^*-x_j}=0,\ i=1,2,...,n-1.$$

Звідси
$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{x_j-x_i^*}=0.$$

3.42 Доведення проведемо індукцією по n. Нехай многочлен першого степеня $P(x)=ax+b$ приймає цілі значення при $x = k$ і $x = k+1$, де k – ціле; тобто числа $ak+b$ і $a(k+1)+b$ цілі. Але тоді їх різниця $a(k+1)+b-(ak+b)=a$ теж ціле число. Тоді при $x = k+2$ маємо $P(k+2) = a(k+2)+b = a(k+1)+b+a$, тобто $P(k+2)$ – теж ціле. Аналогічно доводимо, що $P(k+3)$ ціле і т.д. Поклавши $x = k-1$, одержуємо, що $P(k-1) = a(k-1)+b = = ak+b-a$ є цілим числом. Аналогічно одержуємо, що $P(k-2)$, $P(k-3)$ і т.д. є цілими числами.

Нехай твердження справедливе для всіх многочленів степеня меншого, ніж n і нехай $P(x)$ – многочлен степеня n, який приймає цілі значення при $x = k, k+1, k+2, \ldots, k+n$, де k – ціле. Тоді многочлен $P(x)-P(x-1)$, степінь якого не вище $n-1$ приймає цілі значення при n послідовних цілих значеннях x: $k+1, k+2, \ldots, k+n$. За припущенням індукції він приймає ціле значення при будь-якому цілому x. При $x = k+n+1$ одержуємо, що $P(k+n+1)-P(k+n)$ є цілим числом, що з урахуванням того, що $P(k+n)$ є цілим, приводить до висновку, що $P(k+n+1)$ теж є цілим. Аналогічно доводиться, що числа $P(k+n+2)$, $P(k+n+3)$ і т.д. є цілими. При $x = k$ маємо: $P(k)-P(k-1)$ – ціле; звідси зразу випливає (враховуючи, що $P(k)$ ціле), що $P(k-1)$ є ціле. Точно так же доводимо, що $P(k-2)$, $P(k-3)$ і т.д. є цілими числами.

3.43 Зауважимо, що сума коефіцієнтів многочлена $P(x)$ дорівнює $P(1)$. Тому в рівності $P(\cos x) = \dfrac{\sin 2012x}{\sin 4x}$ перейдемо до границі при $x \to 0$. Одержимо:

$$P(1) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2012x}{\sin 4x} = \frac{2012}{4} = 503.$$

4.1 *1-й спосіб*. За формулою суми n членів геометричної прогресії маємо $S=e^{\varphi i}+e^{2\varphi i}+e^{3\varphi i}+\ldots+e^{n\varphi i}=\dfrac{e^{\varphi i}\left(1-e^{n\varphi i}\right)}{1-e^{\varphi i}}$.

За формулами Ейлера одержуємо

$$S=\frac{e^{\varphi i}-e^{(n+1)\varphi i}}{1-e^{\varphi i}}=\frac{\cos\varphi+i\sin\varphi-\cos(n+1)\varphi-i\sin(n+1)\varphi}{1-\cos\varphi-i\sin\varphi}=$$

$$=\frac{\cos\varphi-\cos(n+1)\varphi+i(\sin\varphi-\sin(n+1)\varphi)}{1-\cos\varphi-i\sin\varphi}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{(n+2)\varphi}{2}\sin\frac{n\varphi}{2}-2i\sin\frac{n\varphi}{2}\cos\frac{(n+2)\varphi}{2}}{1-\cos\varphi-i\sin\varphi}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{n\varphi}{2}\left(\sin\frac{(n+2)\varphi}{2}-i\cos\frac{(n+2)\varphi}{2}\right)(1-\cos\varphi+i\sin\varphi)}{(1-\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{n\varphi}{2}\left(\sin\frac{(n+2)\varphi}{2}-i\cos\frac{(n+2)\varphi}{2}-\sin\frac{n\varphi}{2}+i\cos\frac{n\varphi}{2}\right)}{1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{n\varphi}{2}\left(\sin\frac{(n+2)\varphi}{2}-\sin\frac{n\varphi}{2}+i\left(\cos\frac{n\varphi}{2}-\cos\frac{(n+2)\varphi}{2}\right)\right)}{2(1-\cos\varphi)}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{n\varphi}{2}\left(2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{(n+1)\varphi}{2}+2i\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{(n+1)\varphi}{2}\right)}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{n\varphi}{2}\left(\cos\frac{(n+1)\varphi}{2}+i\sin\frac{(n+1)\varphi}{2}\right)}{\sin\frac{\varphi}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{n\varphi}{2}\cos\frac{(n+1)\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}+i\frac{\sin\frac{n\varphi}{2}\sin\frac{(n+1)\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Але, з другого боку,

$$S=\cos\varphi+i\sin\varphi+\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi+\ \dots\ +\cos n\varphi+i\sin n\varphi=$$

$$=\cos\varphi+\cos 2\varphi+\ \dots\ +\cos n\varphi+i(\sin\varphi+\sin 2\varphi+\ \dots\ +\sin n\varphi).$$

Прирівнюючи дійсні і уявні частини двох виразів для S, одержуємо:

а) $$\cos\varphi+\cos 2\varphi+\cos 3\varphi+\ldots+\cos n\varphi=\frac{\sin\frac{n\varphi}{2}\cos\frac{(n+1)\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}};$$

б) $$\sin\varphi+\sin 2\varphi+\sin 3\varphi+\ldots+\sin n\varphi=\frac{\sin\frac{n\varphi}{2}\sin\frac{(n+1)\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

2-й спосіб. $\cos\varphi+\cos 2\varphi+\cos 3\varphi+\ldots+\cos n\varphi=$

$$=\frac{1}{2\sin\varphi}(2\sin\varphi\cos\varphi+2\sin\varphi\cos 2\varphi+\ldots+2\sin\varphi\cos n\varphi)=$$

$$=\frac{1}{2\sin\varphi}(\sin 2\varphi-\sin 0+\sin 3\varphi-\sin\varphi+\ldots+\sin(n+1)\varphi-$$

$$-\sin(n-1)\varphi)=\frac{1}{2\sin\varphi}(-\sin 0-\sin\varphi+\sin n\varphi+\sin(n+1)\varphi)=$$

$$=\frac{1}{2\sin\varphi}\left(2\sin\frac{n\varphi}{2}\cos\frac{(n+2)\varphi}{2}+2\sin\frac{n\varphi}{2}\cos\frac{n\varphi}{2}\right)=$$

$$=\frac{\sin\frac{n\varphi}{2}\cdot 2\cos\frac{(n+1)\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}=\frac{\sin\frac{n\varphi}{2}\cos\frac{(n+1)\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Аналогічно може бути знайдена і друга сума.

4.2 Розглянемо суму

$$\cos\alpha+i\sin\alpha+\cos(\alpha+\varphi)+i\sin(\alpha+\varphi)+\cos(\alpha+2\varphi)+i\sin(\alpha+2\varphi)+$$
$$+\cos(\alpha+n\varphi)+i\sin(\alpha+n\varphi)=e^{\alpha i}+e^{(\alpha+\varphi)i}+e^{(\alpha+2\varphi)i}+\ldots+e^{(\alpha+n\varphi)i},$$
або
$$\cos\alpha+\cos(\alpha+\varphi)+\cos(\alpha+2\varphi)+\ldots+\cos(\alpha+n\varphi)+$$
$$+i(\sin\alpha+\sin(\alpha+\varphi)+\sin(\alpha+2\varphi)+\ldots+\sin(\alpha+n\varphi))=$$
$$=e^{\alpha i}\left(1+e^{\varphi i}+e^{2\varphi i}+\ldots+e^{n\phi i}\right).$$
Використовуючи формулу Ейлера і результат задачі 4.1, праву частину одержаної рівності можна записати у виді:
$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)\left(1+\frac{\sin\frac{n\varphi}{2}\cos\frac{(n+1)\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}+i\frac{\sin\frac{n\varphi}{2}\sin\frac{(n+1)\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right).$$
Дійсна частина даного виразу дорівнює
$$\cos\alpha+\frac{\cos\alpha\sin\frac{n\varphi}{2}\cos\frac{(n+1)\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}-\frac{\sin\alpha\sin\frac{n\varphi}{2}\sin\frac{(n+1)\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}=$$
$$=\cos\alpha+\frac{\sin\frac{n\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\left(\cos\alpha\cos\frac{(n+1)\varphi}{2}-\sin\alpha\sin\frac{(n+1)\varphi}{2}\right)=$$
$$=\cos\alpha+\frac{\sin\frac{n\varphi}{2}\cos\left(\alpha+\frac{(n+1)\varphi}{2}\right)}{\sin\frac{\varphi}{2}}=$$
$$=\frac{\cos\alpha\sin\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{n\varphi}{2}\cos\left(\alpha+\frac{(n+1)\varphi}{2}\right)}{\sin\frac{\varphi}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\varphi}{2}\right)-\sin\left(\alpha-\frac{\varphi}{2}\right)+\sin\left(\alpha+\frac{(2n+1)\varphi}{2}\right)-\sin\left(\alpha+\frac{\varphi}{2}\right)}{2\sin\frac{\varphi}{2}}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{(n+1)\varphi}{2}\cos\left(\alpha+\frac{n\varphi}{2}\right)}{2\sin\frac{\varphi}{2}}=\frac{\sin\frac{(n+1)\varphi}{2}\cos\left(\alpha+\frac{n\varphi}{2}\right)}{\sin\frac{\varphi}{2}}\ .$$

Таким чином,

а) $$\cos\alpha+\cos(\alpha+\varphi)+\ldots+\cos(\alpha+n\varphi)=\frac{\sin\frac{(n+1)\varphi}{2}\cos\left(\alpha+\frac{n\varphi}{2}\right)}{\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Аналогічно, виділивши в одержаному виразі уявну частину, дістаємо:

б) $$\sin\alpha+\sin(\alpha+\varphi)+\ldots+\sin(\alpha+n\varphi)=\frac{\sin\frac{(n+1)\varphi}{2}\sin\left(\alpha+\frac{n\varphi}{2}\right)}{\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

4.3 Одним із двох способів, які застосовувались при розв'язуванні задачі 4.1, легко одержати:

а) $$\cos\varphi+\cos3\varphi+\cos5\varphi+\ldots+\cos(2n-1)\varphi=\frac{\sin n\varphi\cos n\varphi}{\sin\varphi}=\frac{\sin2n\varphi}{2\sin\varphi};$$

б) $$\sin\varphi+\sin3\varphi+\sin5\varphi+\ \ldots\ +\sin(2n-1)\varphi=\frac{\sin^2 n\varphi}{\sin\varphi}.$$

4.4 Поклавши в задачі 4.1 $\varphi=\frac{2\pi}{2n+1}$, неважко одержати:

а) $$\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{4\pi}{2n+1}+\cos\frac{6\pi}{2n+1}+\ldots+\cos\frac{2n\pi}{2n+1}=-\frac{1}{2};$$

б) $$\sin\frac{2\pi}{2n+1}+\sin\frac{4\pi}{2n+1}+\sin\frac{6\pi}{2n+1}+\ldots+\sin\frac{2n\pi}{2n+1}=\frac{1}{2}ctg\frac{\pi}{2(2n+1)}.$$

4.5 Скористаємось результатами задачі 4.1, поклавши $\varphi = \dfrac{2\pi}{n}$ і врахувавши, що доданків є не n, а $n-1$:

а) $1+\cos\dfrac{2\pi}{n}+\cos\dfrac{4\pi}{n}+\ldots+\cos\dfrac{2(n-1)\pi}{n}=$

$$=1+\frac{\sin\left(\frac{n-1}{2}\cdot\frac{2\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{n}{2}\cdot\frac{2\pi}{n}\right)}{\sin\frac{\pi}{n}}=1+\frac{\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\cos\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}=$$

$$=1-\frac{\sin\left(\pi-\frac{\pi}{n}\right)}{\sin\frac{\pi}{n}}=1-\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}=0.$$

б) $\sin\dfrac{2\pi}{n}+\sin\dfrac{4\pi}{n}+\sin\dfrac{6\pi}{n}+\ldots+\sin\dfrac{2(n-1)\pi}{n}=$

$$=\frac{\sin\left(\frac{n-1}{2}\cdot\frac{2\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{n}{2}\cdot\frac{2\pi}{n}\right)}{\sin\frac{\pi}{n}}=\frac{\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\sin\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}=0.$$

4.6 Доведення таке ж, як і в задачі 4.5. Потрібно покласти $\varphi = \dfrac{4\pi}{n}$ і врахувати, що доданків є не n, а $n-1$.

4.7 Розглянемо

$$S=\cos^2\varphi+\cos^2 2\varphi+\cos^2 3\varphi+\ldots+\cos^2 n\varphi=$$
$$=\frac{1}{2}(1+\cos2\varphi+1+\cos4\varphi+\ldots+1+\cos2n\varphi)=$$
$$=\frac{1}{2}(n+\cos2\varphi+\cos4\varphi+\ldots+\cos2n\varphi).$$

Далі застосуємо результат задачі 4.1 а) замінивши φ на 2φ:

$$S=\frac{1}{2}\left(n+\frac{\sin n\varphi\cos(n+1)\varphi}{\sin\varphi}\right)=\frac{1}{2}\left(n+\frac{\sin(2n+1)\varphi-\sin\varphi}{2\sin\varphi}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(n+\frac{\sin(2n+1)\varphi}{2\sin\varphi}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2n-1}{2}+\frac{\sin(2n+1)\varphi}{2\sin\varphi}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(2n-1+\frac{\sin(2n+1)\varphi}{\sin\varphi}\right).$$

Аналогічно знаходиться друга сума, отже:

а) $\cos^2\varphi+\cos^2 2\varphi+\cos^2 3\varphi+\ldots+\cos^2 n\varphi=\frac{1}{4}\left(2n-1+\frac{\sin(2n+1)\varphi}{\sin\varphi}\right)$;

б) $\sin^2\varphi+\sin^2 2\varphi+\sin^2 3\varphi+\ldots+\sin^2 n\varphi=\frac{1}{4}\left(2n+1-\frac{\sin(2n+1)\varphi}{\sin\varphi}\right)$.

4.8 Перетворимо першу суму:

$$S=\cos\alpha+\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{n}\right)+\cos\left(\alpha+\frac{4\pi}{n}\right)+\ldots+\cos\left(\alpha+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)=$$

$$=\cos\alpha+\cos\alpha\cos\frac{2\pi}{n}-\sin\alpha\sin\frac{2\pi}{n}+\cos\alpha\cos\frac{4\pi}{n}-\sin\alpha\sin\frac{4\pi}{n}+$$

$$+\ldots+\cos\alpha\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}-\sin\alpha\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}=$$

$$=\cos\alpha\left(1+\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{4\pi}{n}+\ldots+\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)-$$

$$-\sin\alpha\left(\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{4\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}\right).$$

Далі скористаємось тотожностями, доведеними в задачі 4.5:

$$S=\cos\alpha\cdot 0-\sin\alpha\cdot 0=0.$$

Аналогічно доводиться, що друга сума теж дорівнює нулю, отже не залежить від α. Таким чином:

а) $\cos\alpha+\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{n}\right)+\cos\left(\alpha+\frac{4\pi}{n}\right)+\ldots+\cos\left(\alpha+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)=0$;

б) $\sin\alpha+\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{n}\right)+\sin\left(\alpha+\frac{4\pi}{n}\right)+\ldots+\sin\left(\alpha+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)=0$.

До речі, тут можна було б скористатись результатами, одержаними в задачі 4.2.

4.9 Для суми пункту а) одержуємо:

$$S=\cos^2\alpha+\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{n}\right)+\cos^2\left(\alpha+\frac{2\pi}{n}\right)+\ldots+\cos^2\left(\alpha+\frac{(n-1)\pi}{n}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\cos2\alpha+1+\cos\left(2\alpha+\frac{2\pi}{n}\right)+\ldots+1+\cos\left(2\alpha+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(n+\cos2\alpha+\cos\left(2\alpha+\frac{2\pi}{n}\right)+\ldots+\cos\left(2\alpha+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right).$$

Але в силу рівності, одержаної в задачі 4.8 а)

$$\cos2\alpha+\cos\left(2\alpha+\frac{2\pi}{n}\right)+\cos\left(2\alpha+\frac{4\pi}{n}\right)+\ldots+\cos\left(2\alpha+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)=0.$$

Тому $S=\frac{n}{2}$. Аналогічно можна довести, що сума пункту б) теж дорівнює $\frac{n}{2}$. Таким чином, одержано рівності:

а) $\cos^2\alpha+\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{n}\right)+\cos^2\left(\alpha+\frac{2\pi}{n}\right)+\ldots+\cos^2\left(\alpha+\frac{(n-1)\pi}{n}\right)=\frac{n}{2}$;

б) $\sin^2\alpha+\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{n}\right)+\sin^2\left(\alpha+\frac{2\pi}{n}\right)+\ldots+\sin^2\left(\alpha+\frac{(n-1)\pi}{n}\right)=\frac{n}{2}$.

4.10 Розглянемо другу суму:

$$S=\sin^2\alpha+\sin^2\left(\alpha+\frac{2\pi}{n}\right)+\sin^2\left(\alpha+\frac{4\pi}{n}\right)+\ldots+\sin^2\left(\alpha+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\cos2\alpha+1-\cos\left(2\alpha+\frac{4\pi}{n}\right)+\ldots+1-\cos\left(2\alpha+\frac{4(n-1)\pi}{n}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(n-\cos2\alpha-\cos2\alpha\cos\frac{4\pi}{n}+\sin2\alpha\sin\frac{4\pi}{n}-\ldots-\right.$$

$$\left.-\cos2\alpha\cos\frac{4(n-1)\pi}{n}+\sin2\alpha\sin\frac{4(n-1)\pi}{n}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(n-\cos2\alpha\left(1+\cos\frac{4\pi}{n}+\ldots+\cos\frac{4(n-1)\pi}{n}\right)+\right.$$

$$+\sin 2\alpha\left(\sin\frac{4\pi}{n}+\sin\frac{8\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{4(n-1)\pi}{n}\right)\Bigg).$$

Далі скористаємось тотожностями задачі 4.6:

$$S=\frac{1}{2}(n-\cos 2\alpha\cdot 0+\sin 2\alpha\cdot 0)=\frac{n}{2}.$$

Перша сума знаходиться аналогічно. Таким чином, одержано:

а) $\cos^2\alpha+\cos^2\left(\alpha+\frac{2\pi}{n}\right)+\cos^2\left(\alpha+\frac{4\pi}{n}\right)+\ldots+\cos^2\left(\alpha+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)=\frac{n}{2}$;

б) $\sin^2\alpha+\sin^2\left(\alpha+\frac{2\pi}{n}\right)+\sin^2\left(\alpha+\frac{4\pi}{n}\right)+\ldots+\sin^2\left(\alpha+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)=\frac{n}{2}$.

4.11 $\frac{\sin 1}{\cos 0\cos 1}+\frac{\sin 1}{\cos 1\cos 2}+\frac{\sin 1}{\cos 2\cos 3}+\ldots+\frac{\sin 1}{\cos(n-1)\cos n}=$

$$=\frac{\sin(1-0)}{\cos 0\cos 1}+\frac{\sin(2-1)}{\cos 1\cos 2}+\frac{\sin(3-2)}{\cos 2\cos 3}+\ldots+\frac{\sin(n-(n-1))}{\cos(n-1)\cos n}=$$

$$=\frac{\sin 1\cos 0-\cos 1\sin 0}{\cos 0\cos 1}+\frac{\sin 2\cos 1-\cos 2\sin 1}{\cos 1\cos 2}+$$

$$+\frac{\sin 3\cos 2-\cos 3\sin 2}{\cos 2\cos 3}+\ldots+\frac{\sin n\cos(n-1)-\cos n\sin(n-1)}{\cos(n-1)\cos n}=$$

$$=tg1-tg0+tg2-tg1+tg3-tg2+\ldots+tgn-tg(n-1)=tgn.$$

4.12 Маємо $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n!=(2-1)1!+(3-1)2!+$
$+(4-1)3!+\ldots+(n+1-1)n!=2\cdot 1!-1!+3\cdot 2!-2!+4\cdot 3!-3!+\ldots+$
$+(n+1)n!-n!=2!+3!+4!+\ldots+(n+1)!-(1!+2!+3!+\ldots+n!)=$
$=(n+1)!-1$.

4.13 $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!}=\frac{2-1}{2!}+\frac{3-1}{3!}+\frac{4-1}{4!}+\ldots+$

$$+\frac{n+1-1}{(n+1)!}=\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\ldots+\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}=$$

$$=1-\frac{1}{(n+1)!}.$$

4.14 *1-й спосіб.*

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}\right)+\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}\right)+\ldots+$$

$$+\left(\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}\right)+\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{2^2}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{2^3}\left(1-\frac{1}{2^{n-2}}\right)}{1-\frac{1}{2}}+$$

$$+\ldots+\frac{\frac{1}{2^{n-1}}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^n}+\ldots+\frac{1}{2^{n-2}}-$$

$$-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ .\ .\ .+\frac{1}{2^{n-2}}-(n-2)\frac{1}{2^n}=\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n-2}{2^n}=$$

$$\frac{n-2}{2^n}==2-\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{n-2}{2^n}=\frac{2^{n+1}-n-2}{2^n}.$$

2-й спосіб. Розглянемо функцію $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+x^2+x^3+\ldots+x^n\right).$ Зрозуміло, що $f(x)=\frac{1}{2}\frac{x\left(1-x^n\right)}{1-x}=\frac{1}{2}\frac{x-x^{n+1}}{1-x}$. Знайдемо похідну цієї функції: з одного боку $f'(x)=\frac{1}{2}\left(1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}\right)$, а з другого $f'(x)=\frac{(1-x)\left(1-(n+1)x^n\right)+x-x^{n+1}}{2(1-x)^2}=\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{2(1-x)^2}$.

Одержано рівність

$\frac{1}{2}\left(1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}\right)=\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{2(1-x)^2}$, із якої при $x=\frac{1}{2}$ маємо: $\frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\ldots+\frac{n}{2^{n-1}}\right)=\frac{1-\frac{n+1}{2^n}+\frac{n}{2^{n+1}}}{2\cdot\frac{1}{2^2}}$, або

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}=\frac{2^{n+1}-n-2}{2^n}.$$

4.15 Застосуємо метод математичної індукції. Введемо позначення $S(n)=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)2n}$, $T(n)=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}$. При $n=1$ маємо $S(1)=\frac{1}{2}=T(1)$. Припустимо, що твердження справедливе при $n=k$, тобто $S(k)=T(k)$. Тоді при $n=k+1$ одержимо

$$S(k+1)=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(2k-1)2k}+\frac{1}{(2k+1)2(k+1)}=$$

$$=S(k)+\frac{1}{(2k+1)2(k+1)},$$

$$T(k+1)=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\ldots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+1)}=$$

$$=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\ldots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+1)}-\frac{1}{k+1}=$$

$$=T(k)+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2(k+1)}=T(k)+\frac{1}{(2k+1)2(k+1)}.$$

Як бачимо, $S(k+1)=T(k+1)$; твердження доведене.

4.16 Зауваживши, що при кожному n

$$a_n=\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2n-n^2(n+1)}=$$

$$=\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{(n+1)n}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

для шуканої суми одержуємо

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{99}=\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+$$

$$+\ldots+\left(\frac{1}{\sqrt{99}}-\frac{1}{\sqrt{100}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{100}}=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}.$$

4.17 а) Використовуючи тотожність $(\kappa+1)^3=\kappa^3+3\kappa^2+3\kappa+1$, запишемо ряд рівностей

$$2^3=1^3+3\cdot1^2+3\cdot1+1,$$
$$3^3=2^3+3\cdot2^2+3\cdot2+1,$$
$$4^3=3^3+3\cdot3^2+3\cdot3+1,$$
$$5^3=4^3+3\cdot4^2+3\cdot4+1,$$
$$.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$
$$(n+1)^3=n^3+3n^2+3n+1.$$

Додаючи всі ці рівності і відкидаючи в сумі однакові члени, які стоять зліва і справа, одержимо:

$$(n+1)^3=1^3+3\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\right)+3(1+2+3+\ldots+n)+n.$$

Звідси, враховуючи, що $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$, маємо:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{1}{3}\left((n+1)^3-(n+1)-\frac{3n(n+1)}{2}\right)=$$

$$=\frac{n+1}{3}\left((n+1)^2-1-\frac{3n}{2}\right)=\frac{n+1}{3}\frac{2n^2+4n+2-2-3n}{2}=$$

$$=\frac{(n+1)\left(2n^2+n\right)}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

б) Як і при знаходженні суми в пункті а) із рівностей

$$2^4=1^4+4\cdot1^3+6\cdot1^2+4\cdot1+1,$$
$$3^4=2^4+4\cdot2^3+6\cdot2^2+4\cdot2+1,$$
$$4^4=3^4+4\cdot3^3+6\cdot3^2+4\cdot3+1,$$

. . . .

$$(n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1,$$

одержуємо:

$$(n+1)^4 = 1^4 + 4\left(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3\right) + 6\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2\right) +$$
$$+ 4(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + n .$$

Звідси, використовуючи результат задачі а), маємо:

$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 =$

$$= \frac{1}{4}\left((n+1)^4 - (n+1) - 6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\frac{n(n+1)}{2} \right),$$

що після нескладних перетворень приводить до рівності

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

в) Використовуючи формулу

$$(k+1)^5 = k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1$$

і враховуючи рівності, одержані в задачах а) і б), аналогічно як і в цих задачах одержуємо

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)\left(3n^2 + 3n - 1\right)}{30}.$$

г) Позначимо $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Тоді

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-3)^3 + (2n-1)^3 = \left[1^3 + 2^3 + \ldots + (2n)^3\right] -$$
$$- 2^3\left[1^3 + 2^3 + \ldots + n^3\right] = S_{2n} - 8S_n = \frac{(2n)^2(2n+1)^2}{4} - 8\frac{n^2(n+1)^2}{4} =$$
$$= n^2(2n+1)^2 - 2n^2(n+1)^2 = n^2\left[(2n+1)^2 - 2(n+1)^2\right] =$$
$$= n^2\left(4n^2 + 4n + 1 - 2n^2 - 4n - 2\right) = n^2\left(2n^2 - 1\right).$$

4.18 Скористаємось рівністю

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{k(k+1)(k+2)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} \right).$$

Тоді

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}\right),$$

$$\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}-\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}\right),$$

. . . .

$$\frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)n}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)}-\frac{1}{(n-2)(n-1)n}\right).$$

Додаючи всі ці рівності почленно, одержуємо:

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\ldots+\frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)n}=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{(n-2)(n-1)n}\right).$$

4.19 Застосуємо метод математичної індукції. При $n=1$ рівність очевидна:

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot p=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot p(p+1)}{p+1}\ .$$

Припустимо, що вона справедлива при $n=k$:

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot p+2\cdot 3\cdot\ldots\cdot p(p+1)+\ldots+k(k+1)\ldots(k+p-1)=$$

$$=\frac{k(k+1)(k+2)\ldots(k+p)}{p+1}.$$

В такому випадку при $n=k+1$ маємо:

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot p+2\cdot 3\cdot\ldots\cdot p(p+1)+\ldots+k(k+1)\ldots(k+p-1)+$$

$$+(k+1)(k+2)\ldots(k+p)=\frac{k(k+1)\ldots(k+p)}{p+1}+(k+1)(k+2)\ldots(k+p)=$$

$$=\frac{k(k+1)\ldots(k+p)+(p+1)(k+1)(k+2)\ldots(k+p)}{p+1}=$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)\ldots(k+p)(k+p+1)}{p+1}.$$

Згідно з принципом математичної індукції звідси випливає, що наша рівність справедлива при будь-якому натуральному n.

4.20 а), б). Із усіх дробів цих сум виділимо той, в знаменнику якого стоїть найвищий степінь двійки. Такий дріб може бути тільки один. Справді, якщо припустити, що таких дробів два, то їх знаменники мають вид $2^k \cdot p$ і $2^k \cdot q$, де p і q – непарні числа. Якщо p менше з них, то $p+2 \le q$ і $2^k \cdot (p+2) \le 2^k \cdot q$. Отже, в розглядуваній сумі є дріб із знаменником $2^k \cdot (p+2)$. Але тоді там буде також дріб, знаменник якого є середнім арифметичним знаменників $2^k \cdot p$ і $2^k \cdot (p+2)$. Це середнє арифметичне дорівнює

$$\frac{2^k \cdot p + 2^k \cdot (p+2)}{2} = \frac{2^k (2p+2)}{2} = 2^k \cdot (p+1).$$

Враховуючи, що p непарне, ми одержали число, яке ділиться на 2^{k+1}, суперечність.

Зведемо тепер всі доданки в цих сумах до спільного знаменника. У всі дроби, крім виділеного, число 2 ввійде додатковим множником, в той же час у виділеному дробі додатковим множником буде число непарне. Таким чином, у одержаному дробі знаменник є, очевидно, числом парним, а чисельник, який складається із суми деякої кількості парних чисел і одного непарного, є числом непарним. А тому весь дріб не може бути цілим числом.

в) Виберемо число k так щоб виконувалась умова $3^k \le 2n+1 < 3^{k+1}$. Дріб із знаменником 3^k буде єдиним дробом в даній сумі, який містить в знаменнику трійку в найвищому степені. Тому при зведенні суми до спільного знаменника додаткові множники всіх дробів крім розглянутого будуть ділитись на три, а додатковий множник цього дробу не буде ділитись на три. Отже, в сумі одержимо дріб, знаменник якого ділиться на три, а чисельник не ділиться.

4.21 Скористаємось рівністю $C_m^l + C_m^{l+1} = C_{m+1}^{l+1}$. Враховуючи, що $C_{n+1}^0 = 1$, маємо:

$$C_{n+1}^1 + C_{n+2}^2 + C_{n+3}^3 + \ldots + C_{n+k}^k = \left(C_{n+1}^0 + C_{n+1}^1\right) + C_{n+2}^2 + \ldots + C_{n+k}^k - 1 =$$
$$= \left(C_{n+2}^1 + C_{n+2}^2\right) + C_{n+3}^3 + \ldots + C_{n+k}^k - 1 = \left(C_{n+3}^2 + C_{n+3}^3\right) + \ldots + C_{n+k}^k - 1 =$$
$$= C_{n+4}^3 + \ldots + C_{n+k}^k - 1 = \ldots = C_{n+k+1}^k - 1 \ .$$

4.22 Нехай у нас є $2n$ кульок, із яких n білих і n чорних. Якщо із цієї сукупності кульок довільним чином вибрати n кульок, то число можливих комбінацій з одного боку дорівнює C_{2n}^n, а з другого –

$$C_n^0 \cdot C_n^n + C_n^1 \cdot C_n^{n-1} + C_n^2 \cdot C_n^{n-2} + \ldots + C_n^{n-1} \cdot C_n^1 + C_n^n \cdot C_n^0 .$$

Але $C_n^k = C_n^{n-k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, тому

$$\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + \ldots + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n .$$

4.23 Для $1 \le k \le n$ маємо:

$$kC_n^k = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = nC_{n-1}^{k-1} .$$

Таким чином,

$$C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n = nC_{n-1}^0 + nC_{n-1}^1 + nC_{n-1}^2 + \ldots + nC_{n-1}^{n-1} =$$
$$= n\left(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + \ldots + C_{n-1}^{n-1}\right) = n \cdot 2^{n-1} .$$

5.1 Нехай радіус кола дорівнює R, $A_1 A_2 \ldots A_n$ – правильний n-кутник, вписаний в це коло і M – довільна точка на колі, можна вважати, що вона знаходиться між точками A_1 і A_n (див. рисунок 5.1).

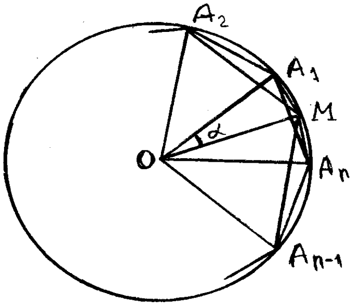

Рисунок 5.1

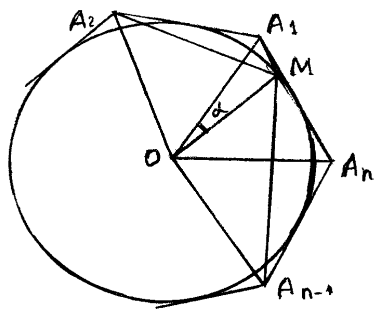

Рисунок 5.2

Позначимо через α кут MOA_1, де O – центр кола. Враховуючи, що центральний кут, який спирається на сторону правильного n-кутника дорівнює $\frac{2\pi}{n}$, за теоремою косинусів можемо записати:

$$MA_1^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cos\alpha,$$

$$MA_2^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right),$$

. . . .

$$MA_{n-1}^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cos\left(\alpha + \frac{2(n-2)\pi}{n}\right),$$

$$MA_n^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cos\left(\alpha + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right).$$

Додавши почленно ці рівності, одержуємо:

$$MA_1^2 + MA_2^2 + \ldots + MA_n^2 =$$

$$= 2nR^2 - 2R^2\left(\cos\alpha + \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right) + \ldots + \cos\left(\alpha + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right).$$

Але, як встановлено в задачі 4.8,

$$\cos\alpha + \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right) + \ldots + \cos\left(\alpha + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) = 0.$$

Тому $MA_1^2 + MA_2^2 + \ldots + MA_n^2 = 2nR^2 = const$.

5.2 Нехай $A_1A_2 \ldots A_n$ правильний n-кутник; позначимо через r і R радіуси вписаного і описаного кіл відповідно і нехай M – довільна точка на вписаному колі (вважаємо, що вона знаходиться між вершинами A_1 і A_n, див. рисунок 5.2). Як і в попередній задачі, застосуємо теорему косинусів:

$$MA_1^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\alpha,$$

$$MA_2^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right),$$

. . . .

$$MA_{n-1}^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\left(\alpha + \frac{2(n-2)\pi}{n}\right),$$

$$MA_n^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\left(\alpha + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right).$$

Тоді

$$MA_1^2 + MA_2^2 + \ldots + MA_n^2 =$$

$$= n\left(R^2 + r^2\right) - 2Rr\left(\cos\alpha + \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right) + \ldots + \cos\left(\alpha + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right)$$

що, з урахуванням результату задачі 4.8, приводить до рівності

$$MA_1^2 + MA_2^2 + \ldots + MA_n^2 = n\left(R^2 + r^2\right) = const\,.$$

5.3 Дана задача є частинним випадком задачі 5.1, якщо точка M співпаде з точкою A_1, тому

$$A_1A_2^2 + A_1A_3^2 + \ldots + A_1A_n^2 = 2nR^2\,.$$

5.4 Нехай n-кутник розташований так, як показано на рисунку 5.3, тобто вісь OX проходить між вершинами A_1 і A_n, в противному випадку можна перенумерувати вершини многокутника. Позначимо кут між радіусом OA_1 і віссю OX через α. Тоді

$x_1 = R\cos\alpha$, $x_2 = R\cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right)$,…, $x_{n-1} = R\cos\left(\alpha + \frac{2(n-2)\pi}{n}\right)$,

$x_n = R\cos\left(\alpha + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right)$. Додавши ці рівності, одержимо:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = R\left(\cos\alpha + \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right) + \ldots + \cos\left(\alpha + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right).$$

Але, згідно з результатом задачі 4.8 а), сума косинусів в дужках дорівнює нулю, отже

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0\,.$$

Аналогічно, використавши результат задачі 4.8 б), одержуємо

$$y_1+y_2+\ldots+y_n=R\left(\sin\alpha+\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{n}\right)+\ldots+\sin\left(\alpha+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right)=0.$$

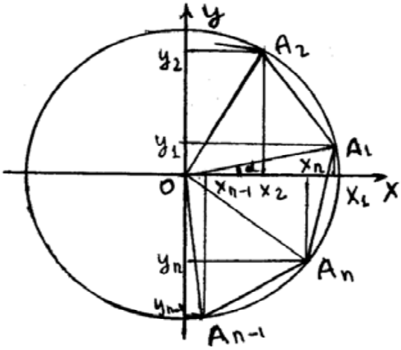

Рисунок 5.3

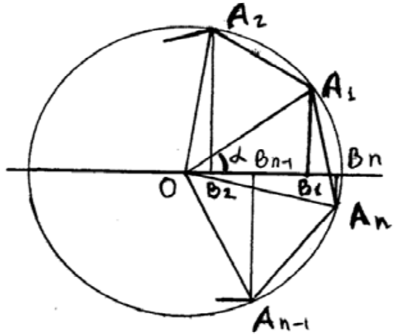

Рисунок 5.4

5.5 Нехай радіус кола, описаного навколо правильного n-кутника $A_1A_2\ldots A_{n-1}A_n$ дорівнює R. Проведемо через центр кола O довільну пряму (можна вважати, що вона пройде між вершинами A_1 і A_n многокутника, див. рисунок 5.4). Кут між радіусом OA_1 і прямою позначимо через α і спроектуємо на пряму всі вершини многокутника, нехай проекцією вершини A_i є точка B_i де $i=1,2,\ldots,n$. Тоді

$$A_1B_1^2=R^2\sin^2\alpha,$$

$$A_2B_2^2=R^2\sin^2\left(\alpha+\frac{2\pi}{n}\right),$$

$$A_3B_3^2=R^2\sin^2\left(\alpha+\frac{4\pi}{n}\right),$$

. . . .

$$A_{n-1}B_{n-1}^2=R^2\sin^2\left(\alpha+\frac{2(n-2)\pi}{n}\right),$$

$$A_nB_n^2=R^2\sin^2\left(\alpha+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right).$$

Таким чином,

$$A_1B_1^2+A_2B_2^2+A_3B_3^2+\ldots+A_nB_n^2=R^2\left(\sin^2\alpha+\sin^2\left(\alpha+\frac{2\pi}{n}\right)+\right.$$

$$\left.+\sin^2\left(\alpha+\frac{4\pi}{n}\right)+\ldots+\sin^2\left(\alpha+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right).$$

Але,

$$\sin^2\alpha+\sin^2\left(\alpha+\frac{2\pi}{n}\right)+\sin^2\left(\alpha+\frac{4\pi}{n}\right)+\ldots+\sin^2\left(\alpha+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)=\frac{n}{2}$$

(див. задачу 4.10,б), отже

$$A_1B_1^2+A_2B_2^2+A_3B_3^2+\ldots+A_nB_n^2=\frac{nR^2}{2}=const.$$

5.6 Оскільки $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2$ – сума квадратів віддалей від вершин многокутника до осі OY, а $y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2$ – сума квадратів віддалей від вершин многокутника до осі OX, то твердження задачі є елементарним наслідком результату, одержаного в задачі 5.5.

5.7 Аналогічно, як і при розв'язуванні задачі 5.2, одержуємо, що в кожному з двох випадків шукана сума дорівнює $n(R^2+r^2)$, де R і r – радіуси кіл, n – кількість сторін многокутника.

5.8 Розглянемо многочлен z^n-R^n. Позначимо його корені через $z_0=R, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$; як відомо, ці корені, будучи зображені на комплексній площині, утворюють вершини правильного n-кутника, вписаного в коло радіуса R з центром в точці $z=0$. Нехай вершина A_1 співпадає з точкою z_0, вершина A_2 – з точкою z_1, і т.д., вершина A_n – з точкою z_{n-1}. Тоді

$$A_1A_2\cdot A_1A_3\cdot\ldots\cdot A_1A_n=\left|(R-z_1)(R-z_2)\ldots(R-z_{n-1})\right|.$$

Але $(z-R)(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_{n-1})=z^n-R^n$, тому

$$(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_{n-1})=\frac{z^n-R^n}{z-R}=z^{n-1}+Rz^{n-2}+\ldots+R^{n-1}$$

при $z \neq R$, причому, в силу неперервності, ця рівність справедлива і при $z = R$, отже $\left|(R - z_1)(R - z_2)\ldots(R - z_{n-1})\right| = nR^{n-1}$, тобто

$$A_1A_2 \cdot A_1A_3 \cdot \ldots \cdot A_1A_n = nR^{n-1}.$$

Вказаний добуток можна було б підрахувати і по-іншому: очевидно

$$A_1A_2 = 2R\sin\frac{\pi}{n},\ A_1A_3 = 2R\sin\frac{2\pi}{n},\ldots,\ A_1A_n = 2R\sin\frac{(n-1)\pi}{n},$$

тому

$$A_1A_2 \cdot A_1A_3 \cdot \ldots \cdot A_1A_n = 2^{n-1}R^{n-1}\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\cdot\ldots\cdot\sin\frac{(n-1)\pi}{n}.$$

Прирівнявши два вирази для добутку $A_1A_2 \cdot A_1A_3 \cdot \ldots \cdot A_1A_n$ і скоротивши на R^{n-1}, одержуємо

$$\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\cdot\ldots\cdot\sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

5.9 Використавши результат задачі 5.3, неважко вивести, що шукана сума дорівнює n^2R^2.

5.10 Якщо d_1 і d_2 – довжини діагоналей трапеції, α – кут між ними, то площа трапеції $S = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha$. Але

$$\frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha \le \frac{1}{2}\left(\frac{d_1 + d_2}{2}\right)^2\sin\alpha \le \frac{(d_1 + d_2)^2}{8} = 2.$$

Оскільки площа в точності дорівнює 2, то в наведеній нерівності має місце рівність, звідки знаходимо $d_1 = d_2 = 2$, $\sin\alpha = 1$, $\alpha = 90^\circ$. Висота трапеції, як неважко бачити, є одночасно висотою в трикутнику, дві сторони якого рівні d_1 і d_2, а кут між ними рівний α. Маючи d_1, d_2 і α, легко знаходимо, що висота дорівнює $\sqrt{2}$.

5.11 Нехай $B(-a,\ 0)$, $C(0,\ -b)$ (див. рисунок 5.5). Очевидно, в шуканій точці A дотична до еліпса паралельна хорді BC. Запишемо рівняння BC: $y = -\dfrac{b}{a}x - b$, тоді рівняння дотичної можна записати у виді: $y = -\dfrac{b}{a}x + m$, де m ще потрібно знайти. Для цього y із рівняння дотичної підставимо у рівняння еліпса:

$b^2x^2 + a^2\left(-\dfrac{b}{a}x + m\right)^2 = a^2b^2$, звідки легко одержати:

$$2b^2x^2 - 2abmx + a^2\left(m^2 - b^2\right) = 0. \qquad (5.1)$$

Оскільки одержане рівняння повинно мати один корінь, то дискримінант D дорівнює нулю. Але

$$\frac{D}{4} = a^2b^2m^2 - 2b^2a^2\left(m^2 - b^2\right) = a^2b^2\left(2b^2 - m^2\right).$$

Звідси $2b^2 - m^2 = 0$, тобто $m = \sqrt{2}\,b$. Підставивши знайдене значення m в рівняння (5.1), знаходимо x:

$2b^2x^2 - 2\sqrt{2}ab + a^2b^2 = 0$, або $b^2\left(\sqrt{2}\,x - a\right)^2 = 0$, звідки $x = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$. Тоді із рівняння дотичної (враховуючи, що $m = \sqrt{2}\,b$) одержуємо $y = -\dfrac{b}{a}\dfrac{a}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\,b = \dfrac{b}{\sqrt{2}}$. Таким чином, $A\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}, \dfrac{b}{\sqrt{2}}\right)$.

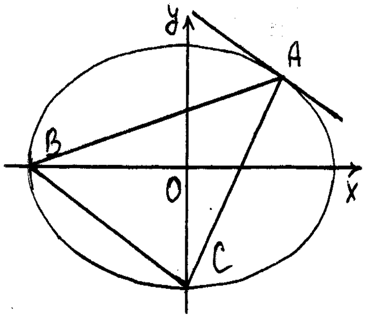

Рисунок 5.5

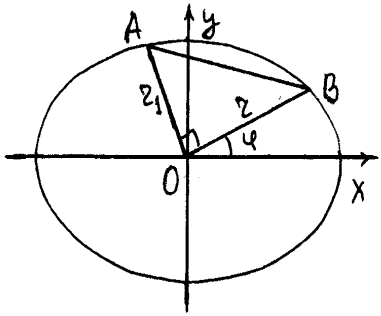

Рисунок 5.6

5.12 Введемо на площині декартову систему координат таким чином, щоб рівняння еліпса набуло канонічного виду:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Крім того, вважатимемо, що $a>b$ (див. рисунок. 5.6).

В рівнянні еліпса перейдемо до полярних координат r, φ; тоді $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ і рівняння еліпса набуває виду

$$\frac{r^2\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{r^2\sin^2\varphi}{b^2}=1, \quad \text{звідки} \quad r^2=\frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\varphi+a^2\sin^2\varphi}.$$

Якщо сюди підставити $\varphi_1=\varphi+\dfrac{\pi}{2}$, одержимо

$r_1^2=\dfrac{a^2b^2}{b^2\sin^2\varphi+a^2\cos^2\varphi}$ і за теоремою Піфагора маємо:

$$AB^2=r^2+r_1^2=a^2b^2\left(\frac{1}{b^2\cos^2\varphi+a^2\sin^2\varphi}+\frac{1}{b^2\sin^2\varphi+a^2\cos^2\varphi}\right)=$$

$$=\frac{a^2b^2\left(a^2+b^2\right)}{\left(a^4+b^4\right)\sin^2\varphi\cos^2\varphi+a^2b^2\left(\sin^4\varphi+\cos^4\varphi\right)}=$$

$$=\frac{a^2b^2\left(a^2+b^2\right)}{\left(a^4-2a^2b^2+b^4\right)\sin^2\varphi\cos^2\varphi+a^2b^2\left(\sin^4\varphi+2\sin^2\varphi\cos^2\varphi+\cos^4\varphi\right)}=$$

$$=\frac{a^2b^2\left(a^2+b^2\right)}{\left(a^2-b^2\right)^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi+a^2b^2\left(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\right)^2}=$$

$$=\frac{4a^2b^2\left(a^2+b^2\right)}{\left(a^2-b^2\right)^2\sin^2 2\varphi+4a^2b^2}.$$

Цей вираз приймає своє найменше значення коли $\sin^2 2\varphi=1$ і тоді

$$AB_{\min} = \sqrt{\frac{4a^2b^2\left(a^2+b^2\right)}{\left(a^2-b^2\right)^2+4a^2b^2}} = \sqrt{\frac{4a^2b^2\left(a^2+b^2\right)}{\left(a^2+b^2\right)^2}} = \frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Найбільше значення виразу досягається при $\sin 2\varphi = 0$, отже

$$AB_{\max} = \sqrt{a^2+b^2}.$$

5.13 Виведемо спочатку рівняння дотичної до еліпса в заданій точці (x_0, y_0). Із рівняння еліпса, вважаючи, що $y \geq 0$, одержуємо $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. Тоді $y' = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}$ і кутовий коефіцієнт дотичної до еліпса в точці з абсцисою x_0 дорівнює $y'(x_0) = -\frac{bx_0}{a\sqrt{a^2-x_0^2}}$. Або, враховуючи, що із рівняння еліпса $\sqrt{a^2-x_0^2} = \frac{a}{b}y_0$, $y'(x_0) = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$. Тоді рівняння дотичної $y - y_0 = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0)$, звідки, з урахуванням рівності $b^2x_0^2 + a^2y_0^2 = a^2b^2$, легко одержуємо $b^2x_0x + a^2y_0y = a^2b^2$ і остаточно $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$. Дане рівняння одержане в припущенні, що точка дотику розташована над віссю абсцис, але неважко перевірити, що і для точок, розташованих під віссю абсцис, рівняння дотичної має такий же вид.

Із одержаного рівняння знаходимо, що відрізки, які відтинаються на координатних осях дотичною рівні $\frac{a^2}{x_0}$ і $\frac{b^2}{y_0}$.

Тоді площа трикутника $S = \frac{1}{2}\left|\frac{a^2}{x_0}\cdot\frac{b^2}{y_0}\right| = \frac{ab}{2}\left|\frac{a}{x_0}\cdot\frac{b}{y_0}\right|$. Оскільки $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$, то $\left|\frac{x_0}{a}\right|\left|\frac{y_0}{b}\right|\le\frac{1}{2}\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}\right)=\frac{1}{2}$, тоді $S\ge\frac{ab}{2}\cdot 2=ab$, причому в цих двох нерівностях рівність досягається при $\left|\frac{x_0}{a}\right|=\left|\frac{y_0}{b}\right|$. Таким чином, шукані точки мають координати $\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}},\pm\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$.

5.14 Доведемо, що точки площини, із яких еліпс видно під прямим кутом, належать деякому колу, центр якого співпадає з центром еліпса. Звідси випливає, що всі прямокутники, описані навколо еліпса, будуть вписані в це коло, а, отже їх діагоналі будуть рівними.

Спочатку виведемо умову, при якій пряма $Ax+By+C=0$ дотикається до еліпса. Підставивши із рівняння прямої $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$ в рівняння еліпса, маємо $b^2x^2+a^2\left(-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}\right)^2=$ $=a^2b^2$, звідси $\left(a^2A^2+b^2B^2\right)x^2+2a^2ACx+a^2C^2-a^2b^2B^2=0$. Оскільки це рівняння повинно мати рівно один корінь, то його дискримінант D має дорівнювати нулю. Але $\frac{D}{4}=a^4A^2C^2-\left(a^2A^2+b^2B^2\right)\left(a^2C^2-a^2b^2B^2\right)$, або

$\frac{D}{4}=a^2b^2B^2\left(a^2A^2+b^2B^2-C^2\right)$. Звідси $a^2A^2+b^2B^2=C^2$ – шукана умова (зауважимо, що вона виконується і для вертикальних дотичних до еліпса, тобто для прямих, у рівнянні яких $B=0$).

Якщо дві дотичні до еліпса взаємно перпендикулярні, то їх рівняння можна записати у виді: $Ax+By+C=0$ і $-Bx+Ay+C_1=0$, причому

$$a^2A^2+b^2B^2=C^2,\ a^2B^2+b^2A^2=C_1^2 \qquad (5.2)$$

Знайдемо точку перетину цих дотичних:

$$\begin{cases} Ax + By = -C, \\ -Bx + Ay = -C_1, \end{cases} \Rightarrow \; x = \frac{AC - BC_1}{A^2 + B^2}, \; y = -\frac{BC + AC_1}{A^2 + B^2}.$$

Тоді

$$x^2 + y^2 = \frac{A^2C^2 - 2ACBC_1 + B^2C_1^2 + B^2C^2 + 2BCAC_1 + A^2C_1^2}{\left(A^2 + B^2\right)^2} =$$

$$= \frac{C^2\left(A^2 + B^2\right) + C_1^2\left(A^2 + B^2\right)}{\left(A^2 + B^2\right)^2} = \frac{C^2 + C_1^2}{A^2 + B^2},$$

що, з урахуванням (5.2), приводить до рівності

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2A^2 + b^2B^2 + a^2B^2 + b^2A^2}{A^2 + B^2} = a^2 + b^2 = const,$$

що і треба було довести.

5.15 Нехай точка M має координати $(x,\ y)$; опустимо із неї перпендикуляри MK і ML на осі координат (див. рисунок 5.7). Оскільки $\frac{AK}{OK} = \lambda$, то $AK = \lambda OK = \lambda y$ і, враховуючи, що $KM = x$ а $AM = \frac{\lambda}{1+\lambda}a$, за теоремою Піфагора маємо: $x^2 + (\lambda y)^2 = \left(\frac{\lambda}{1+\lambda}a\right)^2$. Тобто

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\lambda a}{1+\lambda}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{a}{1+\lambda}\right)^2} = 1.$$

Отже, лінія, яку описує точка M – еліпс.

5.16 Позначимо довжину сторони, яка містить зафіксовані вершини через a, третю вершину позначимо через M і введемо прямокутну систему координат як показано на рисунку 5.8. Як видно із цього рисунка: $y = xtg\alpha$; $y = (a - x)tg2\alpha$. Звідси

$$xtg\alpha = \frac{2(a-x)tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$$ або $x - xtg^2\alpha = 2a - 2x$; $xtg^2\alpha = 3x - 2a$,

тоді $y^2 = x^2tg^2\alpha = (3x-2a)x$, тобто $y^2 = 3x^2 - 2ax$,

$$y^2 = 3\left(x - \frac{a}{3}\right)^2 - \frac{a^2}{3}.$$

Остаточно: $$\frac{\left(x-\frac{a}{3}\right)^2}{\left(\frac{a}{3}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1$$ – гіпербола.

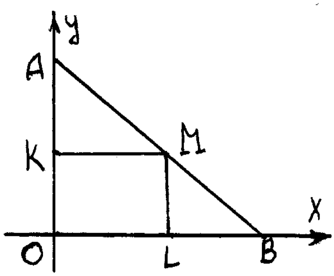

Рисунок 5.7

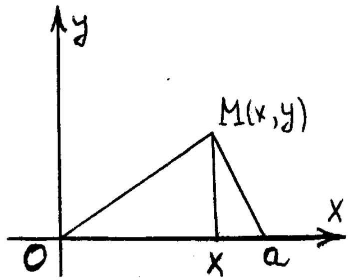

Рисунок 5.8

5.17 Нехай радіус заданого кола дорівнює R, O – його центр, A – задана точка, O_1 – центр кола, що проходить через точку A і дотикається до заданого кола в точці M.

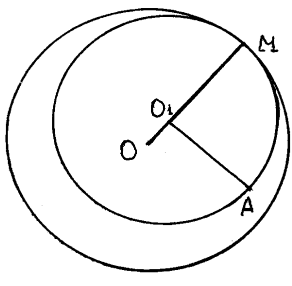

Рисунок 5.9

а) Якщо точка A знаходиться всередині заданого кола, то (див. рисунок 5.9)

$$OO_1 + O_1A = OO_1 + O_1M = R = const .$$

Отже, шукане геометричне місце – еліпс з фокусами в точках O і A і великою віссю, рівною R.

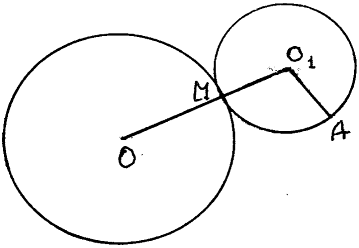

Рисунок 5.10а

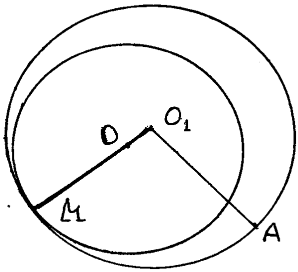

Рисунок 5.10б

б) Якщо ж точка A розташовано зовні заданого кола, то можливі два випадки, зображені на рисунках 5.10,а і 5.10,б. В першому випадку

$$OO_1 - O_1A = OO_1 - O_1M = R = const .$$

В другому випадку

$$O_1A - OO_1 = O_1M - OO_1 = R = const .$$

Як бачимо, шукане геометричне місце – гіпербола з фокусами в точках O і A і дійсною віссю, рівною R.

5.18 Виберемо прямокутну декартову систему координат Oxy так, щоб осі Ox і Oy співпали з осями парабол, а вітки парабол були спрямовані в додатних напрямках координатних осей (рисунок 5.11). Тоді рівняння парабол матимуть вигляд: $y = a_1x^2 - c_1$ і $x = a_2y^2 - c_2$, де $a_1 > 0,\ a_2 > 0$. Оскільки за умовою параболи перетинаються в чотирьох точках, то $c_1 > 0,\ c_2 > 0$.

Нехай $M_0\left(x_0, y_0\right)$ – будь-яка з чотирьох точок перетину парабол. Тоді координати цієї точки задовольняють системі рівнянь:

$$\begin{cases} y_0 = a_1 x_0^2 - c_1, \\ x_0 = a_2 y_0^2 - c_2 \end{cases}.$$

Поділимо обидві частини першого рівняння системи на $a_1 \neq 0$, а обидві частини другого рівняння на $a_2 \neq 0$, після чого додамо перше рівняння до другого:

$$x_0^2 + y_0^2 - \frac{y_0}{a_1} - \frac{x_0}{a_2} - \frac{c_1}{a_1} - \frac{c_2}{a_2} = 0.$$

Виділяючи повні квадрати, дістаємо

$$\left(x_0 - \frac{1}{2a_2}\right)^2 + \left(y_0 - \frac{1}{2a_1}\right)^2 = \frac{c_1}{a_1} + \frac{c_2}{a_2} + \frac{1}{(2a_2)^2} + \frac{1}{(2a_1)^2}.$$

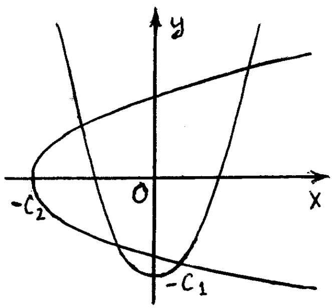

Рисунок 5.11

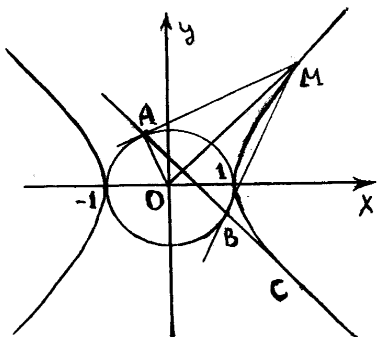

Рисунок 5.12

Таким чином, точка M_0 лежить на колі з центром у точці $O\left(\frac{1}{2a_2}, \frac{1}{2a_1}\right)$ і радіусом $R = \sqrt{\frac{c_1}{a_1} + \frac{c_2}{a_2} + \frac{1}{4a_2^2} + \frac{1}{4a_1^2}}$, що й треба було довести.

5.19 Нехай $M(x_0, y_0)$ – довільна точка гіперболи, відмінна від $(1, 0)$ і $(-1, 0)$, і нехай одна із дотичних, проведених із точки M до кола, дотикається до нього в точці $A(x_1, y_1)$, а друга – в точці B (див. рисунок 5.12). Оскільки вектори $\overrightarrow{AM} = \{x_0 - x_1, y_0 - y_1\}$ і $\overrightarrow{OA} = \{x_1, y_1\}$ ортогональні, то

$x_0x_1 - x_1^2 + y_0y_1 - y_1^2 = 0$, що з урахуванням того, що $x_1^2 + y_1^2 = 1$ приводить до рівності $x_0x_1 + y_0y_1 = 1$. Пряма AB проходить через точку A перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{OM} = \{x_0, y_0\}$, отже її рівняння можна записати у виді $x_0(x - x_1) + y_0(y - y_1) = 0$. Після розкриття дужок і врахування рівності, одержаної вище, маємо: $x_0x + y_0y - 1 = 0$. Знайдемо спільну точку цієї прямої з гіперболою; для цього розв'яжемо систему: $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1, \\ x_0x + y_0y - 1 = 0. \end{cases}$ Із другого рівняння $y = \dfrac{1 - x_0x}{y_0}$ підставимо в перше: $x^2 - \dfrac{1 - 2x_0x + x_0^2x^2}{y_0^2} = 1$, або $y_0^2x^2 - 1 + 2x_0x - x_0^2x^2 = y_0^2$, звідки $(y_0^2 - x_0^2)x^2 + 2x_0x - (1 + y_0^2) = 0$. Враховуючи, що $y_0^2 - x_0^2 = -1 \;\; 1 + y_0^2 = x_0^2$, маємо $-(x - x_0)^2 = 0$, тобто рівняння має єдиний корінь $x = x_0$. Тоді $y = \dfrac{1 - x_0^2}{y_0} = -\dfrac{y_0^2}{y_0} = -y_0$. Таким чином, $C(x_0, -y_0)$ – єдина спільна точка прямої і гіперболи.

Щоб переконатись, що це саме точка дотику, а не перетину, візьмемо на прямій довільну іншу точку $D(\tilde{x}, \tilde{y})$ ($x_0\tilde{x} + y_0\tilde{y} = 1$) і розглянемо

$$\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 = \tilde{x}^2 - \frac{1 - 2x_0\tilde{x} + x_0^2\tilde{x}^2}{y_0^2} = \frac{1}{y_0^2}\left(y_0^2x^2 - 1 + 2x_0\tilde{x} - x_0^2\tilde{x}^2\right) =$$

$$= \frac{1}{y_0^2}\left(y_0^2\tilde{x}^2 - x_0^2 + y_0^2 + 2x_0\tilde{x} - x_0^2\tilde{x}^2\right) = \frac{1}{y_0^2}\left((y_0^2 - x_0^2)\tilde{x}^2 + 2x_0\tilde{x} - x_0^2 + y_0^2\right) =$$

$$= \frac{1}{y_0^2}\left(-\tilde{x}^2 + 2x_0\tilde{x} - x_0^2 + y_0^2\right) = \frac{1}{y_0^2}\left(y_0^2 - (\tilde{x} - x_0)^2\right) < \frac{1}{y_0^2}y_0^2 = 1.$$

Отже, $\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 < 1$ для будь-якої точки прямої, відмінної від точки D. Це свідчить про те, що всі точки прямої (крім точки C) знаходяться строго між вітками гіперболи, що означає, що пряма саме дотикається до гіперболи в точці C. Твердження доведене.

5.20 Виведемо спочатку рівняння дотичної до параболи $y^2 = 2px$ в точці $\left(\frac{y_0^2}{2p}, y_0\right)$. Шукатимемо це рівняння у виді $y = kx + b$ і при знаходженні спільної точки параболи і прямої приходимо до рівняння $(kx+b)^2 = 2px$, або $k^2x^2 + 2(kb-p)x + b^2 = 0$. Прирівнявши дискримінант цього рівняння до нуля, маємо $(kb-p)^2 - k^2b^2 = 0$, звідки легко одержати $p - 2kb = 0$, тобто $k = \frac{p}{2b}$. Таким чином, рівняння дотичної набуває виду: $y = \frac{p}{2b}x + b$. Оскільки ця пряма повинна прохолодити через задану точку параболи, то $y_0 = \frac{p}{2b}\frac{y_0^2}{2p} + b$, звідки $4by_0 = y_0^2 + 4b^2$, або $(2b - y_0)^2 = 0$, тобто $b = \frac{y_0}{2}$. Підставивши знайдене значення b в рівняння дотичної, одержуємо $y = \frac{p}{y_0}x + \frac{y_0}{2}$ і остаточно $yy_0 = px + \frac{y_0^2}{2}$.

Нехай точки на параболі мають координати $A\left(\frac{y_1^2}{2p}, y_1\right)$, $B\left(\frac{y_2^2}{2p}, y_2\right)$, $C\left(\frac{y_3^2}{2p}, y_3\right)$ (див. рисунок 5.13). Зауважимо, що площа трикутника з вершинами в точках (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) дорівнює:

$$S=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}\right|.\ \text{Тоді}\ S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \frac{y_2^2-y_1^2}{2p} & y_2-y_1 \\ \frac{y_3^2-y_1^2}{2p} & y_3-y_1 \end{vmatrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{4p}\left|(y_2-y_1)(y_3-y_1)\begin{vmatrix} y_2+y_1 & 1 \\ y_3+y_1 & 1 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{4p}\left|(y_2-y_1)(y_3-y_1)(y_2-y_3)\right|.$$

Знайдемо точки перетину дотичних до параболи в точках A, B і C.

Розв'язуючи систему $\begin{cases} yy_i=px+\dfrac{y_i^2}{2}, \\ yy_j=px+\dfrac{y_j^2}{2}, \end{cases}$ одержуємо: $\begin{array}{l} y=\dfrac{y_i+y_j}{2}, \\ x=\dfrac{y_iy_j}{2p}. \end{array}$

Отже, точки перетину дотичних є: $K\left(\dfrac{y_1y_2}{2p},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$, $L\left(\dfrac{y_2y_3}{2p},\dfrac{y_2+y_3}{2}\right)$, $M\left(\dfrac{y_1y_3}{2p},\dfrac{y_1+y_3}{2}\right)$; таким чином,

$$S_{KLM}=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \frac{y_2y_3-y_1y_2}{2p} & \frac{y_3-y_1}{2} \\ \frac{y_1y_3-y_1y_2}{2p} & \frac{y_3-y_2}{2} \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{8p}\left|(y_3-y_1)(y_3-y_2)\begin{vmatrix} y_2 & 1 \\ y_1 & 1 \end{vmatrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{8p}\left|(y_3-y_1)(y_3-y_2)(y_2-y_1)\right|.$$

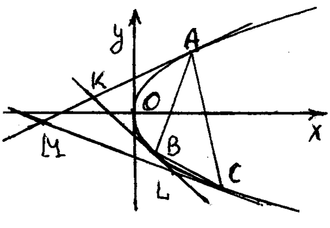

Рисунок 5.13

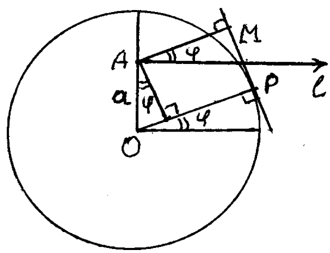

Рисунок 5.14

Порівнюючи одержані вирази, бачимо, що $S_{KLM} = \frac{1}{2} S_{ABC}$, що і треба було довести.

5.21 Введемо полярну систему координат, помістивши полюс в точку A і напрямивши полярну вісь так, як показано на рисунку 5.14. Якщо точка $M(r, \varphi)$ належить вказаному геометричному місцю, то, як видно з рисунка $r = R - a\sin\varphi$. Тоді, в силу симетрії фігури відносно прямої OA, маємо:

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (R - a\sin\varphi)^2 d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(R^2 - 2aR\sin\varphi +$$

$$+ a^2 \sin^2 \varphi\Big) d\varphi = \pi R^2 + 2aR\cos\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{a^2}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi =$$

$$= \pi R^2 + \frac{\pi a^2}{2} = \frac{\pi\left(2R^2 + a^2\right)}{2}.$$

5.22 Шукане рівняння параболи, очевидно, може бути записане у виді $y = ax^2 + b$. Підставляючи звідси $x^2 = \frac{y - b}{a}$ у рівняння еліпса, маємо $ay^2 + 4y - (5a + 4b) = 0$. Оскільки це рівняння повинно мати лише один корінь, то його дискримінант повинен дорівнювати нулю, отже $4 + a(5a + 4b) = 0$, або $5a^2 + 4ab + 4 = 0$. Враховуючи, що парабола повинна пройти через задані точки, одержуємо $-1 = a + b$, тобто $b = -a - 1$. Тоді для a маємо рівняння $5a^2 + 4a(-a - 1) + 4 = 0$, або $a^2 - 4a + 4 = 0$, звідки $a = 2$, тоді $b = -3$. Таким чином, шукана парабола $y = 2x^2 - 3$.

5.23 Введемо прямокутну декартову систему координат, в якій рівняння параболи матиме вид $x^2 = 2py$ (див. рисунок 5.15). Тоді $F\left(0,\ \frac{p}{2}\right)$, рівняння директриси $y=-\frac{p}{2}$ і нехай $A\left(x_0,\ \frac{x_0^2}{2p}\right)$. Отже $S=\int\limits_0^{x_0}\left(\frac{x^2}{2p}+\frac{p}{2}\right)dx=\frac{x_0^3}{6p}+\frac{px_0}{2}$.

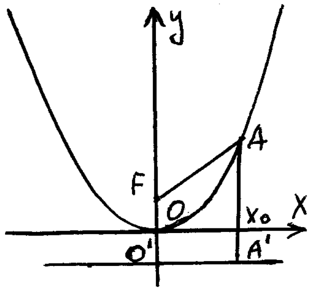

Рисунок 5.15

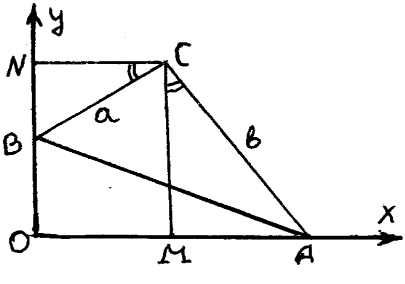

Рисунок 5.16

Площу сектора FOA знайдемо як різницю площ трапеції $FAA'O'$ і криволінійної трапеції $OAA'O'$:

$$S_{FOA}=\frac{1}{2}\left(p+\frac{x_0^2}{2p}+\frac{p}{2}\right)x_0-S=\frac{x_0^3}{4p}+\frac{3px_0}{4}-\frac{x_0^3}{6p}-\frac{px_0}{2}=$$

$$=\frac{x_0^3}{12p}+\frac{px_0}{4}=\frac{S}{2}.$$

5.24 Використавши результат задачі 5.23, легко одержати, що шукана площа дорівнює $S/2$.

5.25 Нехай C – вершина прямого кута трикутника, а довжини катетів BC і AC відповідно рівні a і b. Введемо прямокутну декартову систему координат, прийнявши за координатні осі сторони прямого кута, вздовж яких ковзає гіпотенуза трикутника ABC (див. рисунок 5.16). Опустимо із точки $C(x,\ y)$ перпендикуляри CM і CN на осі координат. Трикутники CMA і CNA подібні (обидва прямокутні і $\angle MCA=\angle NCB$ як кути з попарно перпендикулярними сторонами), тому $\frac{MC}{NC}=\frac{AC}{BC}$, або $\frac{y}{x}=\frac{b}{a}$. Звідси $y=\frac{b}{a}x$, тобто вершина прямого кута рухається вздовж прямої.

5.26 Введемо на площині прямокутну декартову систему координат так, щоб рівняння параболи набуло виду $y^2=2px$. Як відомо, пряма $y=kx+b$ дотикається до параболи, якщо $2kb-p=0$ (див. розв'язок задачі 5.20). Враховуючи це, одержуємо: рівняння всякої прямої, яка дотикається до параболи має вид $y=kx+\frac{p}{2k}$, а рівняння дотичної, перпендикулярної до неї є $y=-\frac{1}{k}x-\frac{kp}{2}$. Знайдемо точку перетину таких дотичних: $kx+\frac{p}{2k}=-\frac{1}{k}x-\frac{kp}{2}$; $\left(k+\frac{1}{k}\right)x=-\frac{p}{2}\left(k+\frac{1}{k}\right)$, тобто $x=-\frac{p}{2}=const$. Отже, вершина прямого кута описує пряму лінію і це є директриса параболи.

5.27 Нехай вершини чотирикутника є A, B, C, D і нехай всі відрізки OA, OB, OC, OD не менші 15. Знайдеться сторона чотирикутника, яку видно із точки O під кутом не меншим 90°, нехай це сторона AB. Тоді $AB^2\ge OA^2+OB^2\ge 2\cdot 15^2>20^2$, що суперечить умові $AB\le 20$.

5.28 Маємо очевидні співвідношення:

$$\frac{S_{\Delta APQ}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{S_{\Delta APQ}}{S_{\Delta APR}}\cdot\frac{S_{\Delta APR}}{S_{\Delta ABR}}\cdot\frac{S_{\Delta ABR}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{PQ}{PR}\cdot\frac{AP}{AB}\cdot\frac{BR}{BC}.$$

Застосувавши нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним, одержимо

$$\sqrt[3]{\frac{S_{\Delta APQ}}{S_{\Delta ABC}}}\le\frac{1}{3}\left(\frac{PQ}{PR}+\frac{AP}{AB}+\frac{BR}{BC}\right).$$

Аналогічно

$$\sqrt[3]{\frac{S_{\Delta QRC}}{S_{\Delta ABC}}} \le \frac{1}{3}\left(\frac{QR}{PR}+\frac{RC}{BC}+\frac{BP}{AB}\right).$$

Додаючи ці нерівності і враховуючи, що $AP+BP=AB$, $BR+RC=BC$, $PQ+QR=PR$, одержуємо

$$\sqrt[3]{\frac{S_{\Delta APQ}}{S_{\Delta ABC}}}+\sqrt[3]{\frac{S_{\Delta QRC}}{S_{\Delta ABC}}} \le 1,$$

звідки і випливає потрібне твердження.

5.29 Зауважимо, що площа S трикутника з цілочисельними координатами вершин не менше 0,5. Нехай a, b, c – сторони трикутника, тоді

$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \ge abc = 4SR \ge 2R$, або $\frac{p^3}{27} \ge 2R$, тобто $p^3 \ge 54R$.

5.30 Виведемо рівняння дотичної до другої параболи в точці $(x_0\,,\,y_0)$, де $y_0 = ax_0^2+m$. Якщо рівняння цієї дотичної є $y=kx+b$, то $ax^2+m=kx+b$, або $ax^2-kx+m-b=0$. Дискримінант цього квадратного рівняння повинен дорівнювати нулю: $k^2-4a(m-b)=0$, звідки $b=m-\frac{k^2}{4a}$. Отже, рівняння дотичної $y=kx+m-\frac{k^2}{4a}$. Оскільки дотична повинна проходити через задану точку, то $ax_0^2+m=kx_0+m-\frac{k^2}{4a}$, звідки $4a^2x_0^2-4akx_0+k^2=0$, або $(2ax_0-k)^2=0$, тобто $k=2ax_0$. Підставивши значення k в рівняння дотичної, одержуємо $y=2ax_0x+m-ax_0^2$. Координати точок перетину дотичної з першою параболою (тобто кінців хорди) знаходяться із системи рівнянь:

$$\begin{cases} y=2ax_0x+m-ax_0^2\,, \\ y=ax^2\,. \end{cases}$$

Із рівності $ax^2 = 2ax_0x + m - ax_0^2$ легко одержуємо $a(x - x_0)^2 = m$. Корені цього рівняння: $x_1 = x_0 - \sqrt{\frac{m}{a}}$, $x_2 = x_0 + \sqrt{\frac{m}{a}}$. Безпосередньо видно, що $\frac{x_1 + x_2}{2} = x_0$, а це і означає, що точка з абсцисою x_0 є серединою відрізка, кінці якого мають абсциси x_1 і x_2.

5.31 Виберемо прямокутну декартову систему координат Oxy так, щоб осі Ox і Oy були асимптотами рівнобічної гіперболи, а вітки гіперболи розташовувалися в першій і третій чвертях. Тоді рівняння гіперболи матиме вид $y = \frac{a}{x}$ ($a > 0$). Виведемо рівняння дотичної до гіперболи в точці $\left(x_0, \frac{a}{x_0}\right)$. Якщо рівняння дотичної є $y = kx + b$, то при відшуканні спільної точки цієї прямої і гіперболи приходимо до рівняння: $kx^2 + bx - a = 0$, дискримінант якого повинен дорівнювати нулю: $b^2 + 4ak = 0$, тобто $k = -\frac{b^2}{4a}$.

Отже, рівняння дотичної має вид $y = -\frac{b^2}{4a}x + b$. Враховуючи, що ця дотична проходить через задану точку, маємо $\frac{a}{x_0} = -\frac{b^2}{4a}x_0 + b$, тобто $4a^2 - 4abx_0 + b^2x_0^2 = 0$, звідки знаходимо $b = \frac{2a}{x_0}$. Таким чином, рівняння дотичної $y = -\frac{a}{x_0^2}x + \frac{2a}{x_0}$. Нехай x_1 і x_2 – абсциси точок перетину дотичної з асимптотами гіперболи (осями координат). Тоді $x_1 = 0$ і із рівняння дотичної при $y = 0$ неважко одержати

$x_2 = 2x_0$. Тобто $x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, а це означає, що точка дотику – середина відрізка дотичної, що лежить між асимптотами гіперболи, що й треба було довести.

5.32 Виберемо прямокутну декартову систему координат Oxy так, щоб осі Ox і Oy були асимптотами гіперболи. Тоді рівняння гіперболи матиме вигляд $y = \dfrac{a}{x}$. Нехай точки A і B мають координати $A\left(x_1, \dfrac{a}{x_1}\right)$, $B\left(x_2, \dfrac{a}{x_2}\right)$. Складемо рівняння прямої AB:

$$\frac{x - x_1}{x - x_2} = \frac{y - \dfrac{a}{x_1}}{\dfrac{a}{x_2} - \dfrac{a}{x_1}}, \text{ або } x - x_1 = -\frac{x_2(x_1 y - a)}{a}.$$

Поклавши в цій рівності $y = 0$, одержуємо $x = x_1 + x_2$, тобто вісь Ox пряма AB перетинає в точці $C(x_1 + x_2, 0)$. А поклавши $x = 0$, маємо $y = \dfrac{a(x_1 + x_2)}{x_1 x_2}$, отже вісь Oy ця пряма перетинає в точці $D\left(0, \dfrac{a(x_1 + x_2)}{x_1 x_2}\right)$. Тоді

$$\overrightarrow{AC} = \left\{x_1 + x_2 - x_1, 0 - \frac{a}{x_1}\right\} = \left\{x_2, -\frac{a}{x_1}\right\},$$

$$\overrightarrow{BD} = \left\{0 - x_2, \frac{a(x_1 + x_2)}{x_1 x_2} - \frac{a}{x_2}\right\} = \left\{-x_2, \frac{a}{x_1}\right\}.$$

Звідси видно, що $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{BD}$, а це означає, що $AC = BD$.

5.33 Нехай пряма $y = kx + b$ перетинає параболу $y = ax^2$ в двох точках: A і B. Тоді координати цих точок задовольняють системі рівнянь: $\begin{cases} y = ax^2, \\ y = kx + b. \end{cases}$ Виключаючи з цієї системі y, дістаємо квадратне рівняння $ax^2 - kx - b = 0$. Корені цього рівняння x_1 і x_2 є абсцисами точок A і B. Тому абсциса x_C середини C хорди AB дорівнює $\frac{x_1 + x_2}{2}$ і, згідно з теоремою Вієта, може бути обчислена за формулою $x_C = \frac{k}{2a}$. Оскільки x_C не залежить від b, то середини всіх паралельних хорд параболи, тобто хорд, що мають той же самий кутовий коефіцієнт k, лежать на прямий $x = \frac{k}{2a}$, тобто на прямий, яка паралельна осі параболи.

5.34 Нехай пряма $y = kx + d$ перетинає еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в двох точках A і B. Тоді координати цих точок задовольняють системі рівнянь: $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ y = kx + d. \end{cases}$ Виключаючи з цієї системі y, дістаємо квадратне рівняння $\left(b^2 + a^2k^2\right)x^2 + 2a^2kdx - a^2b^2 + a^2d^2 = 0$. Корені цього рівняння x_1 і x_2 є абсцисами точок A і B. Тому абсциса x_C середини C хорди AB дорівнює $\frac{x_1 + x_2}{2}$ і, згідно з теоремою Вієта, може бути обчислена за формулою $x_C = -\frac{a^2kd}{b^2 + a^2k^2}$. Тоді ордината y_C цієї ж точки дорівнює $y_C = kx_C + d$, або $y_C = \frac{db^2}{b^2 + a^2k^2}$.

Нехай A_1B_1 − хорда еліпса, яка розташована на прямій $y = kx + d_1$, а A_2B_2 − будь-яка інша хорда цього ж еліпса, яка паралельна хорді A_1B_1, тобто має той же самий кутовий коефіцієнт k, а, значить, розташована на прямій $y = kx + d_2$. Нехай C_1 и C_2 – середини хорд A_1B_1 і A_2B_2 відповідно. Тоді $x_{C_1} = -\dfrac{a^2kd_1}{b^2 + a^2k^2}$, $y_{C_1} = \dfrac{d_1b^2}{b^2 + a^2k^2}$; $x_{C_2} = -\dfrac{a^2kd_2}{b^2 + a^2k^2}$, $y_{C_2} = \dfrac{d_2b^2}{b^2 + a^2k^2}$.

Складемо рівняння прямої C_1C_2: $\dfrac{x - x_{C_1}}{x_{C_2} - x_{C_1}} = \dfrac{y - y_{C_1}}{y_{C_2} - y_{C_1}}$, або

$$\frac{x + \dfrac{a^2kd_1}{b^2 + a^2k^2}}{-\dfrac{a^2kd_2}{b^2 + a^2k^2} + \dfrac{a^2kd_1}{b^2 + a^2k^2}} = \frac{y - \dfrac{d_1b^2}{b^2 + a^2k^2}}{\dfrac{d_2b^2}{b^2 + a^2k^2} - \dfrac{d_1b^2}{b^2 + a^2k^2}}.$$

Або, після спрощення,

$$a^2ky + b^2x = 0.$$

Очевидно, що координати точки $O(0,\, 0)$, тобто координати центра еліпса, задовольняють цьому рівнянню. Оскільки коефіцієнти останнього рівняння не залежать від d_1 і d_2, то середини паралельних хорд еліпса лежать на одній прямій, яка проходить через центр еліпса, що й потрібно було довести.

5.35 Нехай пряма $y = kx + d$ перетинає гіперболу $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ в двох точках: A і B. Тоді координати цих точок задовольняють системі рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ y = kx + d. \end{cases}$ Виключаючи з цієї системі y, дістаємо квадратне рівняння $\left(b^2-a^2k^2\right)x^2-2a^2kdx-a^2b^2-a^2d^2=0$. Корені цього рівняння x_1 і x_2 є абсцисами точок A і B. Тому абсциса x_C середини C хорди AB дорівнює $\frac{x_1+x_2}{2}$ і, згідно з теоремою Вієта, може бути обчислена за формулою $x_C=\frac{a^2kd}{b^2-a^2k^2}$. Тоді ордината y_C цієї ж точки дорівнює $y_C=kx_C+d$, або $y_C=\frac{db^2}{b^2-a^2k^2}$.

Нехай A_1B_1 − хорда гіперболи, яка розташована на прямій $y=kx+d_1$, а A_2B_2 − будь-яка інша хорда цієї ж гіперболи, яка паралельна хорді A_1B_1, тобто має той же самий кутовий коефіцієнт k, а значить, розташована на прямій $y=kx+d_2$. Нехай C_1 і C_2 – середини хорд A_1B_1 і A_2B_2 відповідно. Тоді

$$x_{C_1}=\frac{a^2kd_1}{b^2-a^2k^2},\quad y_{C_1}=\frac{d_1b^2}{b^2-a^2k^2};\quad x_{C_2}=\frac{a^2kd_2}{b^2-a^2k^2},$$
$$y_{C_2}=\frac{d_2b^2}{b^2-a^2k^2}.$$

Рівняння прямої C_1C_2 має вигляд: $\frac{x-x_{C_1}}{x_{C_2}-x_{C_1}}=\frac{y-y_{C_1}}{y_{C_2}-y_{C_1}}$.

Підставивши сюди вирази для x_{C_1}, x_{C_2}, y_{C_1}, y_{C_2} і спростивши одержане рівняння, одержуємо:

$$a^2ky-b^2x=0.$$

Очевидно, що координати точки $O(0,\,0)$, тобто координати центра гіперболи, задовольняють цьому рівнянню. Оскільки коефіцієнти останнього рівняння не залежать від d_1 і d_2, то середини паралельних хорд гіперболи лежать на одній прямій, яка проходить через центр гіперболи, що й потрібно було довести.

5.36 Введемо на площині прямокутну декартову систему координат так, щоб вершини квадрата мали координати $A(0,\,0)$, $B(a,\,0)$, $C(a,\,a)$ і $D(0,\,a)$. Нехай $M(x,\,y)$ – довільна точка площини. Вона належатиме вказаному геометричному місцю, якщо

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2}=\sqrt{(x-a)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-a)^2}\,.$$

Після піднесення до квадрата, одержуємо

$$\sqrt{\left(x^2+y^2\right)\left((x-a)^2+(y-a)^2\right)}=\sqrt{\left((x-a)^2+y^2\right)\left(x^2+(y-a)^2\right)}.$$

Піднісши до квадрата ще раз, маємо

$$x^2(y-a)^2+y^2(x-a)^2=x^2y^2+(x-a)^2(y-a)^2,$$

що після спрощення приводить до рівності $(2x-a)(2y-a)=0$. Звідси видно, що шуканим геометричним місцем є дві прямі $x=\dfrac{a}{2}$ і $y=\dfrac{a}{2}$.

5.37 Припустимо, що такий трикутник існує, причому можна вважати, що одна з вершин цього трикутника співпадає з початком координат. Отже, нехай вершинами трикутника є точки $O(0,\,0)$, $A(x_1\,,\,y_1)$ і $B(x_2\,,\,y_2)$, де x_1, y_1, x_2, y_2 – цілі числа. Площа такого трикутника $S=\dfrac{1}{2}\left|x_1y_2-y_1x_2\right|$ виражається раціональним числом. З другого боку, враховуючи, що $OA=OB$, маємо $S=OA\cdot OB\sin 60^0=OA^2\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\left(x_1^2+y_1^2\right)\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ – число ірраціональне. Суперечність, яка доводить, що такого трикутника не існує.

5.38 Дана крива може бути задана параметричними рівняннями: $x=a\cos^3 t$, $y=b\sin^3 t$ (астроїда). Враховуючи, що $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3b\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t} = -\frac{b}{a}tgt$, рівняння дотичної до кривої в точці, що відповідає значенню t параметра, може бути записане у виді:

$$y - b\sin^3 t = -\frac{b}{a}tgt\left(x - a\cos^3 t\right).$$

Знайдемо точки перетину цієї дотичної з осями координат; при $x = 0$ одержуємо $y = b\sin^3 t + btgt\cos^3 t = b\sin t$, а при $y = 0$ маємо $x = a\sin^2 t\cos t + a\cos^3 t = a\cos t$.

Площа трикутника, обмеженого дотичною та осями координат дорівнює

$$S = \frac{1}{2}|xy| = \frac{1}{2}|a\cos t\, b\sin t| = \frac{1}{4}ab|\sin 2t|.$$

Ця площа буде найбільшою при $|\sin 2t| = 1$. У відповідності до цього, одержуємо чотири точки на кривій:

$$M_1\left(\frac{a}{2\sqrt{2}}, \frac{b}{2\sqrt{2}}\right),\ M_2\left(-\frac{a}{2\sqrt{2}}, \frac{b}{2\sqrt{2}}\right),\ M_3\left(-\frac{a}{2\sqrt{2}}, -\frac{b}{2\sqrt{2}}\right),$$

$$M_4\left(\frac{a}{2\sqrt{2}}, -\frac{b}{2\sqrt{2}}\right).$$

5.39 Припустимо, що в еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b$) вписано рівносторонній трикутник, центр якого співпадає з центром еліпса. Опишемо навколо цього трикутника коло; очевидно вершини трикутника будуть точками перетину цього кола з еліпсом. Зрозуміло також, що радіус r кола задовольняє умову $b < r < a$. Але, як неважко переконатись, коло $x^2 + y^2 = r^2$ перетинається з еліпсом в чотирьох точках, які є вершинами прямокутника і ніякі три з них не можуть бути вершинами правильного трикутника.

5.40 Нехай C – центр кола, r – його радіус, A – дана точка. Введемо прямокутну декартову систему координат, провівши вісь Ox через точки C і A і вибравши початок координат посередині між ними. Тоді координати цих точок будуть: $C(-x_0\,,0)$, $A(x_0\,,0)$, вважаємо $x_0>0$. Можливі варіанти:

а) Точка A розташована зовні кола, тоді $r<2x_0$. Нехай $M(x,\,y)$ – довільна точка площини; вона належить вказаному геометричному місцю, якщо $MB=MA$ (див. рисунок 5.17а). Але $MB=MC-CB$ і ми приходимо до рівності: $\sqrt{(x+x_0)^2+y^2}-r=\sqrt{(x-x_0)^2+y^2}$. Піднісши до квадрата, одержуємо: $4x_0x+r^2=2r\sqrt{(x+x_0)^2+y^2}$. Після повторного піднесення до квадрата маємо:

$4\left(4x_0^2-r^2\right)x^2-4r^2y^2=r^2\left(4x_0^2-r^2\right)$, або

$$\frac{x^2}{\left(\frac{r}{2}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{4x_0^2-r^2}}{2}\right)^2}=1.$$

Таким чином, шукане геометричне місце – гіпербола (точніше – її права вітка).

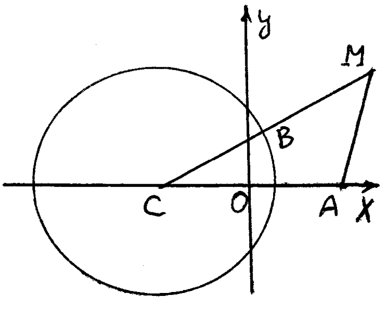

Рисунок 5.17а

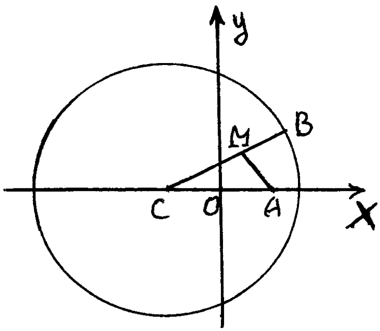

Рисунок 5.17б

б) Точка A розташована всередині кола, тоді $r>2x_0$. Тепер уже $MB=CB-MC$ (див. рисунок 5.17б) і ми приходимо до рівності: $r-\sqrt{(x+x_0)^2+y^2}=\sqrt{(x-x_0)^2+y^2}$. Аналогічно, як і у випадку а), одержуємо: $4\left(r^2-4x_0^2\right)x^2+4r^2y^2=r^2\left(r^2-4x_0^2\right)$, або

$$\frac{x^2}{\left(\frac{r}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{r^2-4x_0^2}}{2}\right)^2}=1.$$

Отже, в цьому випадку шуканим геометричним місцем буде еліпс.

5.41 Перш за все доведемо, що центр вписаного в еліпс ромба співпадає з центром еліпса. Нехай еліпс задано рівнянням $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>b$) і в нього вписано деякий ромб. Рівномірно розтягнемо всю картину в напрямі осі Oy в $\frac{a}{b}$ раз. При цьому еліпс перетвориться в коло, а ромб – у вписаний в це коло прямокутник (це випливає з того, що при рівномірному розтягу паралелограм перетворюється в паралелограм, а паралелограмом, вписаним в коло, може бути тільки прямокутник). Оскільки центри кола і вписаного в нього прямокутника співпадають, це означає, що до розтягу центри еліпса і вписаного в нього ромба теж співпадали.

Доведемо, що шуканим перетином буде деякий круг, центр якого співпадає з центром еліпса. Для доведення цього твердження, враховуючи, що діагоналі ромба взаємно перпендикулярні і в точці перетину діляться пополам, досить показати, що всі хорди еліпса, які видно з його центра під кутом 90°, знаходяться на одній і тій же віддалі від центра. Скористаємось результатом, одержаним при розв'язуванні задачі 5.12 (див. рисунок 5.6). Знаходимо

$$AB^2=r^2+r_1^2=a^2b^2\left(\frac{1}{b^2\cos^2\varphi+a^2\sin^2\varphi}+\frac{1}{b^2\sin^2\varphi+a^2\cos^2\varphi}\right)=$$

$$=\frac{a^2b^2\left(a^2+b^2\right)}{\left(b^2\cos^2\varphi+a^2\sin^2\varphi\right)\left(b^2\sin^2\varphi+a^2\cos^2\varphi\right)}.$$

Віддаль від точки O до хорди AB дорівнює $d=\dfrac{r\cdot r_1}{AB}$.

$$d^2=\frac{r^2r_1^2}{AB^2}=\frac{\dfrac{a^2b^2}{b^2\cos^2\varphi+a^2\sin^2\varphi}\cdot\dfrac{a^2b^2}{b^2\sin^2\varphi+a^2\cos^2\varphi}}{\dfrac{a^2b^2\left(a^2+b^2\right)}{\left(b^2\cos^2\varphi+a^2\sin^2\varphi\right)\left(b^2\sin^2\varphi+a^2\cos^2\varphi\right)}}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

Таким чином, $d=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=const$, що і потрібно було довести.

5.42 Нехай $C\left(x_0\,,\,ax_0^2\right)$ – точка на нижній параболі, із якої проведені дві дотичні до верхньої параболи, $A\left(x_1\,,\,y_1\right)$, $B\left(x_2\,,\,y_2\right)$ – точки дотику (див. рисунок 5.18). Якщо пряма $y=kx+b$ має одну спільну точку з параболою $y=ax^2+m$, то рівняння $ax^2+m=kx+b$, або $ax^2-kx+m-b=0$ має один корінь, тобто його дискримінант дорівнює нулю: $k^2-4a(m-b)=0$, звідки $b=m-\dfrac{k^2}{4a}$.

Отже, рівняння дотичної $y=kx+m-\dfrac{k^2}{4a}$ і абсциса точки дотику $x=\dfrac{k}{2a}$. Врахуємо, що дотична проходить через точку C: $ax_0^2=kx_0+m-\dfrac{k^2}{4a}$, звідси

$$k^2-4akx_0+4a^2x_0^2=4am,\ \left(k-2ax_0\right)^2=4am,$$

тобто $k=2ax_0\pm2\sqrt{am}$. Для абсцис точок дотику A і B маємо:

$$x_1=\frac{2ax_0-2\sqrt{am}}{2a}=x_0-\sqrt{\frac{m}{a}},\quad x_2=\frac{2ax_0+2\sqrt{am}}{2a}=x_0+\sqrt{\frac{m}{a}}.$$

Знайдемо площу сегмента ABG як різницю площ трапеції $ABNM$ і криволінійної трапеції $AGBNM$:

$$S_{сегм.} = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_2 - x_1) - \int_{x_1}^{x_2}(ax^2 + m)dx =$$

$$= \frac{ax_1^2 + m + ax_2^2 + m}{2}(x_2 - x_1) - \left(\frac{a}{3}(x_2^3 - x_1^3) + m(x_2 - x_1)\right) =$$

$$= \frac{a(x_1^2 + x_2^2)}{2}(x_2 - x_1) + m(x_2 - x_1) - \frac{a}{3}(x_2^3 - x_1^3) - m(x_2 - x_1) =$$

$$= \frac{a}{6}(x_2 - x_1)\left(3(x_1^2 + x_2^2) - 2(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2)\right) = \frac{a}{6}(x_2 - x_1)^3 = \frac{a}{6}\left(2\sqrt{\frac{m}{a}}\right)^3.$$

Остаточно $S_{сегм.} = \dfrac{4m\sqrt{m}}{3\sqrt{a}}$.

Знайдемо, далі, площу трикутника ABC:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|(x_1 - x_0)(y_2 - ax_0^2) - (x_2 - x_0)(y_1 - ax_0^2)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|-\sqrt{\frac{m}{a}}(ax_2^2 + m - ax_0^2) - \sqrt{\frac{m}{a}}(ax_1^2 + m - ax_0^2)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{a}}\left|ax_2^2 + m - ax_0^2 + ax_1^2 + m - ax_0^2\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{a}}\left|a(x_2 - x_0)(x_2 + x_0) + a(x_1 - x_0)(x_1 + x_0) + 2m\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{a}}\left|a\sqrt{\frac{m}{a}}\left(2x_0 + \sqrt{\frac{m}{a}}\right) - a\sqrt{\frac{m}{a}}\left(2x_0 - \sqrt{\frac{m}{a}}\right) + 2m\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{a}}\left(a\sqrt{\frac{m}{a}} \cdot 2\sqrt{\frac{m}{a}} + 2m\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{a}} \cdot 4m = \frac{2m\sqrt{m}}{\sqrt{a}}.$$

Тоді шукана площа криволінійного трикутника $CAGB$ дорівнює:

$$S = S_{ABC} - S_{сегм.} = \frac{2m\sqrt{m}}{\sqrt{a}} - \frac{4m\sqrt{m}}{3\sqrt{a}} = \frac{2m\sqrt{m}}{3\sqrt{a}} = const\,.$$

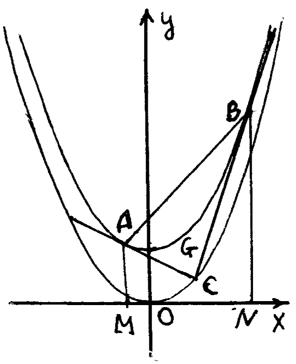

Рисунок 5.18

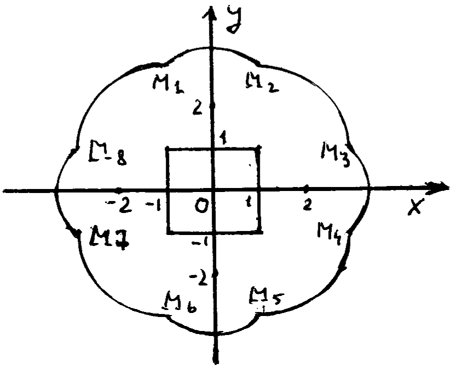

Рисунок 5.19

5.43 Див. рисунок 5.19. Тут M_1M_2, M_3M_4, M_5M_6, M_7M_8 – дуги кіл радіуса $\sqrt{2}$ з центрами в точках $(0,\,2), (2,\,0), (0,\,-2), (-2,\,0)$ відповідно; M_2M_3, M_4M_5, M_6M_7, M_8M_1 – дуги кіл радіуса 2 з центрами в точках $(1,\,1), (1,\,-1), (-1,\,-1), (-1,\,1)$ відповідно.

5.44 Нехай дано два правильних многокутники з числом сторін m і n $(m < n)$ і периметр кожного з них дорівнює P. Тоді радіуси кіл, вписаних в ці многокутники, будуть рівні $r_1 = \dfrac{P}{2m\,tg\dfrac{\pi}{m}}$, $r_2 = \dfrac{P}{2n\,tg\dfrac{\pi}{n}}$ і площі $S_1 = \dfrac{1}{2}P\cdot r_1 = \dfrac{P^2}{4m\,tg\dfrac{\pi}{m}}$,

$$S_2 = \frac{1}{2}P\cdot r_2 = \frac{P^2}{4n\,tg\dfrac{\pi}{n}}.$$

Легко довести, що функція $f(x) = \dfrac{tg\,x}{x}$ є строго зростаючою на проміжку $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, а тому із нерівності $\dfrac{\pi}{n} < \dfrac{\pi}{m}$ випливає, що $\dfrac{tg\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} < \dfrac{tg\frac{\pi}{m}}{\frac{\pi}{m}}$, або $n\,tg\dfrac{\pi}{n} < m\,tg\dfrac{\pi}{m}$, що зразу ж приводить до нерівності $S_1 < S_2$, що і потрібно було довести.

5.45 Нехай AB вказаний відрізок, $OA + OB = 2a = const$, $M(x,\ y)$ – середина AB, вважаємо, що $x \ge 0$, $y \ge 0$ (див. рисунок 5.20). Оскільки MD і MC – середні лінії трикутника OAB, то $MD = \dfrac{1}{2}OA$, $MC = \dfrac{1}{2}OB$. Тоді $MD + MC = \dfrac{1}{2}(OA + OB) = a = const$, або $x + y = a$ – рівняння частини лінії, що знаходиться в першій чверті. Враховуючи симетрію, легко записати рівняння всієї лінії:

$$|x| + |y| = a\,.$$

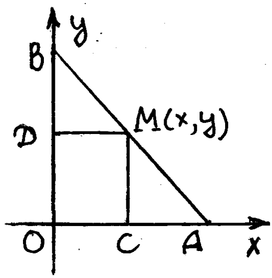

Рисунок 5.20

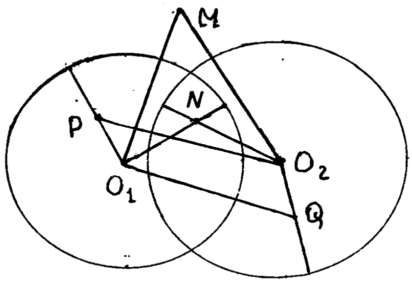

Рисунок 5.21

5.46 Нехай O_1, O_2 – центри відповідно меншого і більшого кіл, r, R, $r < R$, – їхні радіуси (див. рисунок 5.21). Якщо точка M знаходиться зовні обидвох кіл, то повинна виконуватись рівність $O_1M - r = O_2M - R$, звідки $O_2M - O_1M = R - r = const$. Якщо точка N розташована всередині обидвох кіл, то $r - O_1N = R - O_2N$, тобто знову $O_2N - O_1N = R - r = const$. Отже, в цих двох випадках шуканим геометричним місцем буде одна із віток гіперболи з фокусами в точках O_1 і O_2 з дійсною віссю, рівною $R-r$.

Розглянемо випадок, коли точка знаходиться всередині одного з кіл, але зовні другого. Для точки P маємо $r-O_1P=O_2P-R$, звідки $O_1P+O_2P=R+r=const$, а для точки Q маємо $O_1Q-r=R-O_2Q$, тобто $O_1Q+O_2Q=R+r=$ $=const$. Таким чином, в цих випадках одержується еліпс з фокусами в точках O_1 і O_2 та великою віссю, рівною $R+r$.

Зрозуміло,що шукане геометричне місце одержується як об'єднання двох описаних вище множин точок.

5.47 Введемо на площині прямокутну декартову систему координат Oxy, в якій еліпс матиме канонічне рівняння. Нехай $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$, $C(x_2, y_2)$ – вершини трикутника найбільшої площі, вписаного в цей еліпс. Перейдемо до іншої системи координат $Ox'y'$, де $x'=x$, $y'=\frac{a}{b}y$, тобто розтягнемо попередню систему в напрямі осі Oy в $\frac{a}{b}$ раз. При цьому еліпс перейде в коло радіуса a з центром в початку координат, а трикутник ABC перейде в трикутник найбільшої площі, вписаний в це коло. Як відомо, серед трикутників, вписаних в дане коло, найбільшу площу має рівносторонній трикутник. Позначимо $A'(x_0', y_0')$, $B'(x_1', y_1')$, $C'(x_2', y_2')$ вершини трикутника, в який перейшов трикутник ABC; очевидно $x_i=x_i'$, $y_i=\frac{b}{a}y_i'$, $i=0,1,2$.

Скористаємось параметричними рівняннями кола: $x=a\cos t$, $y=a\sin t$. Нехай координати вершини A' одержуються при $t=\alpha$: $x_0'=a\cos\alpha$, $y_0'=a\sin\alpha$. Враховуючи, що трикутник $A'B'C'$ рівносторонній, для координат вершин B' і C' маємо:

$$x_1' = a\cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right), \quad x_2' = a\cos\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right),$$

$$y_1' = a\sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right), \quad y_2' = a\sin\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right).$$

Тоді вершини трикутника ABC матимуть координати:

$$x_0 = x_0' = a\cos\alpha,\ x_1 = x_1' = a\cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right),\ x_2 = x_2' = a\cos\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right),$$

$$y_0 = \frac{b}{a} y_0' = b\sin\alpha,\ y_1 = b\sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right),\ y_2 = b\sin\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right).$$

Площа трикутника ABC дорівнює

$$S_{\max} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix}\right|.$$

або

$$S_{\max} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} a\left(\cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) - \cos\alpha\right) & b\left(\sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) - \sin\alpha\right) \\ a\left(\cos\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) - \cos\alpha\right) & b\left(\sin\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) - \sin\alpha\right) \end{vmatrix}\right| =$$

$$= \frac{ab}{2}\left|\begin{vmatrix} -2\sin\frac{\pi}{3}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) & 2\sin\frac{\pi}{3}\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) \\ 2\sin\frac{\pi}{3}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) & -2\sin\frac{\pi}{3}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) \end{vmatrix}\right| =$$

$$= \frac{4ab}{2}\sin^2\frac{\pi}{3}\left|\begin{vmatrix} -\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) & -\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) \end{vmatrix}\right| =$$

$$= 2ab\cdot\frac{3}{4}\left|\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)\right| =$$

$$= \frac{3ab}{2}\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{4}ab.$$

Оскільки найбільша площа не залежить від α, це означає, що задача має нескінченно багато розв'язків.

Враховуючи, що площа рівностороннього трикутника, вписаного в коло радіуса a, дорівнює $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$, вираз для $S_{\max}$ можна одержати і так: $S_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot \frac{b}{a} = \frac{3\sqrt{3}}{4}ab$.

5.48 Скористаємось результатами попередньої задачі. Сума квадратів сторін трикутника найбільшої площі, вписаного в еліпс є:

$$AB^2 + AC^2 + BC^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 +$$

$$+ (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = a^2\left(\cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) - \cos\alpha\right)^2 +$$

$$+ b^2\left(\sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) - \sin\alpha\right)^2 + a^2\left(\cos\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) - \cos\alpha\right)^2 +$$

$$+ b^2\left(\sin\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) - \sin\alpha\right)^2 + a^2\left(\cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right)\right)^2 +$$

$$+ b^2\left(\sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) - \sin\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right)\right)^2 = 4a^2\sin^2\frac{\pi}{3}\sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) +$$

$$+ 4b^2\sin^2\frac{\pi}{3}\cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) + 4a^2\sin^2\frac{\pi}{3}\sin^2\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) +$$

$$+ 4b^2\sin^2\frac{\pi}{3}\cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) + 4a^2\sin^2\frac{2\pi}{3}\sin^2\alpha + 4b^2\sin^2\frac{2\pi}{3}\cos^2\alpha =$$

$$= 3a^2\left(\sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) + \sin^2\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) + \sin^2\alpha\right) +$$

$$+ 3b^2\left(\cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\alpha\right) =$$

$$=\frac{3}{2}a^2\left(3-\left(\cos\left(2\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(2\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)+\cos 2\alpha\right)\right)+$$

$$+\frac{3}{2}b^2\left(3-\left(\cos\left(2\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(2\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)+\cos 2\alpha\right)\right).$$

Але

$$\cos\left(2\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(2\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)+\cos 2\alpha=2\cos 2\alpha\cos\frac{2\pi}{3}+$$

$$+\cos 2\alpha=2\cos 2\alpha\left(-\frac{1}{2}\right)+\cos 2\alpha=-\cos 2\alpha+\cos 2\alpha=0,$$

тому

$$AB^2+AC^2+BC^2=\frac{3}{2}\cdot 3a^2+\frac{3}{2}\cdot 3b^2=\frac{9}{2}\left(a^2+b^2\right)=const,$$

що і треба було довести.

5.49 Введемо на площині прямокутну декартову систему координат, в якій рівняння параболи набуде виду $y=ax^2$. Нехай коло з центром в точці (x_0, y_0) радіуса R перетинає параболу в чотирьох точках. Рівняння цього кола можна записати у виді $x^2-2x_0x+y^2-2y_0y+m=0$, де $m=x_0^2+y_0^2-R^2$. Для знаходження точок перетину кола з параболою потрібно розв'язати систему:

$$\begin{cases} x^2-2x_0x+y^2-2y_0y+m=0, \\ y=ax^2\ . \end{cases}$$

Виключаючи із цієї системи y, приходимо до рівняння:

$$a^2x^4+(1-2ay_0)x^2-2x_0x+m=0.$$

За умовою це рівняння має чотири різних корені x_1, x_2, x_3, x_4, причому за теоремою Вієта $x_1+x_2+x_3+x_4=0$.

Нехай тепер $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $M(x_3, y_3)$, $N(x_4, y_4)$ – точки перетину кола з параболою. Знайдемо кутовий коефіцієнт k прямої, що проходить через точки M і N:

$k = \dfrac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} = \dfrac{a\left(x_4^2 - x_3^2\right)}{x_4 - x_3} = a\left(x_4 + x_3\right)$. Але $x_4 + x_3 = -\left(x_1 + x_2\right)$, отже $k = -a\left(x_1 + x_2\right)$ і ніяк не залежить від радіуса кола і від координат його центра. Звідси очевидним чином випливає твердження задачі.

5.50 Очевидно

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 = \frac{1}{2}\left(OA^2 + OB^2\right) + \frac{1}{2}\left(OB^2 + OC^2\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(OC^2 + OD^2\right) + \frac{1}{2}\left(OD^2 + OA^2\right) \geq$$

$$\geq OA \cdot OB + OB \cdot OC + OC \cdot OD + OD \cdot OA \geq$$

$$\geq 2S_{AOB} + 2S_{BOC} + 2S_{COD} + 2S_{DOA} = 2S,$$

причому рівності досягаються тільки при $OA = OB = OC = OD$ і $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOA$, що означає, що діагоналі AC і BD чотирикутника $ABCD$ рівні, перпендикулярні і діляться в точці їх перетину O навпіл, тобто $ABCD$ – квадрат з центром O.

5.51 Нехай $ABCD$ – трикутна піраміда, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 – середини ребер AB, AC, AD, BC, BD, CD відповідно. Якщо об’єм піраміди $ABCD$ дорівнює V, то об’єм кожної з пірамід $AM_1M_2M_3$, $BM_1M_4M_5$, $CM_2M_4M_6$, $DM_3M_5M_6$ в силу подібності дорівнює $\frac{1}{8}V$. Тому об’єм многогранника $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$ дорівнює $V - 4 \cdot \frac{1}{8}V = \frac{1}{2}V$, отже, відношення об’ємів многогранника і піраміди дорівнює $\frac{1}{2}$.

5.52 Введемо прямокутну декартову систему координат так, щоб одна з мимобіжних прямих сумістилася з віссю Ox, а інша – із прямою $z = l$, розташованою в площині

Oyz. Нехай один з кінців даного відрізка AB, що має довжину a, ковзає вздовж осі Ox, а іншій – вздовж прямої $z = l$ в площині Oyz: $A(x_A, 0, 0)$, $B(0, y_B, l)$. Оскільки довжина відрізка AB залишається сталою і рівною a, то

$$x_A^2 + y_B^2 + l^2 = a^2 \tag{5.3}$$

Нехай $M(x, y, z)$ середина відрізка AB. Тоді $x = \dfrac{x_A}{2}$, $y = \dfrac{y_B}{2}$, $z = \dfrac{l}{2}$. Підставляючи $x_A = 2x$ і $y_B = 2y$ в рівняння (5.3), дістаємо

$$4x^2 + 4y^2 + l^2 = a^2 .$$

Отже, координати середини відрізка AB задовольняють системі:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{a^2 - l^2}{4}, \\ z = \dfrac{l}{2} . \end{cases} \tag{5.4}$$

Навпаки, якщо координати точки задовольняють системі рівнянь (5.4), то вона є серединою відрізка AB.

Таким чином, шукане геометричне місце визначається системою рівнянь (5.4) і являє собою коло радіуса $\dfrac{\sqrt{a^2 - l^2}}{2}$, розташоване в площині, яка паралельна до даних мимобіжних прямих. Центр кола збігається з серединою спільного перпендикуляра до цих прямих.

5.53 Виберемо прямокутну декартову систему координат $Oxyz$ так, щоб вершина S піраміди сумістилася з початком координат, а точки A, B, C опинилися на осях Ox, Oy, Oz відповідно: $S(0,0,0)$, $A(x_A, 0, 0)$, $B(0, y_B, 0)$, $C(0, 0, z_C)$.

Нехай $M(x, y, z)$ – довільна точка, що задовольняє умову:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MS^2 . \tag{5.5}$$

Тоді

$$(x-x_A)^2+y^2+z^2+x^2+(y-y_B)^2+z^2+x^2+y^2+(z-z_C)^2=$$
$$=3x^2+3y^2+3z^2,$$

або після перетворення

$$x_A\left(x-\frac{x_A}{2}\right)+y_B\left(y-\frac{y_B}{2}\right)+z_C\left(z-\frac{z_C}{2}\right)=0. \qquad (5.6)$$

Отже, координати точки $M(x, y, z)$ задовольняють рівнянню площини (5.6). Навпаки, довільна точка площини (5.6) задовольняє співвідношенню (5.5). Таким чином, шукана множина є площина з нормальним вектором $\vec{n}=\{x_A, y_B, z_C\}$, що проходить через точку $\left(\frac{x_A}{2}, \frac{y_B}{2}, \frac{z_C}{2}\right)$ (ця площина проходить через середину діагоналі прямокутного паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$, перпендикулярно до цієї діагоналі).

5.54 Позначимо $SA=a$, $SB=b$, $SC=c$, $\angle SAB=\alpha$, $\angle SAC=\beta$, $\angle BAC=\gamma$. Таким чином, $b+c=a$, $AB=\sqrt{a^2+b^2}$, $AC=\sqrt{a^2+c^2}$, $BC=\sqrt{b^2+c^2}$. Тоді $\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\beta=\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}$, $\cos\beta=\frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}$. Оскільки обидва кути α і β менші 45°, то $\alpha+\beta$ гострий кут і

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+c^2}}+$$
$$+\frac{ac}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+c^2}}=\frac{ab+ac}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+c^2}}=\frac{a(b+c)}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+c^2}}.$$

Або

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+c^2}}.$$

За теоремою косинусів:
$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AB \cdot AC\cos\gamma$, звідки

$$\cos\gamma = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2\,AB \cdot AC} = \frac{a^2 + b^2 + a^2 + c^2 - \left(b^2 + c^2\right)}{2\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a^2 + c^2}},$$

тобто

$$\cos\gamma = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a^2 + c^2}}.$$

Як бачимо, $\sin(\alpha + \beta) = \cos\gamma$; звідси зразу випливає, що $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$, що і потрібно було довести.

5.55 Очевидно, площа проекції складається з площ проекцій трьох непаралельних граней. Нехай ребра паралелепіпеда утворюють з нормаллю до площини проекції кути α, β, γ; такі ж кути складають грані паралелепіпеда з площиною проекції. $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ можна вважати напрямними косинусами вектора нормалі до площини проекції в базисі, складеному з векторів, що співпадають з ребрами паралелепіпеда, які виходять з однієї вершини, тому

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

а площа проекції дорівнює $ab\cos\gamma + bc\cos\alpha + ac\cos\beta$. Використавши нерівність Коші-Буняковського, маємо

$$ab\cos\gamma + bc\cos\alpha + ac\cos\beta \le$$

$$\le \sqrt{\left((ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2\right)\left(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma\right)} =$$

$$= \sqrt{(ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2}.$$

Причому рівність досягається, якщо $\dfrac{ab}{\cos\gamma} = \dfrac{bc}{\cos\alpha} = \dfrac{ac}{\cos\beta}$, або $c\cos\gamma = a\cos\alpha = b\cos\beta$. Остаточно: площа проекції найбільша і дорівнює $\sqrt{(ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2}$, якщо $\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = 1/a : 1/b : 1/c$.

5.56 Спочатку виведемо рівняння площини, яка дотикається до даного еліпсоїда в точці (x_0, y_0, z_0). Еліпсоїд задається рівнянням $F(x, y, z)=0$, де $F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$.

Оскільки $F'_x=\frac{2x}{a^2}$, $F'_y=\frac{2y}{b^2}$, $F'_z=\frac{2z}{c^2}$, то рівняння дотичної площини запишеться у виді:

$$\frac{2x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{2y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{2z_0}{c^2}(z-z_0)=0,$$

або $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1$. Ця площина перетинає координатні осі в точках $\left(\frac{a^2}{x_0}, 0, 0\right)$, $\left(0, \frac{b^2}{y_0}, 0\right)$, $\left(0, 0, \frac{c^2}{z_0}\right)$. Вважаючи, що точка дотику лежить в першому октанті, знаходимо об'єм піраміди, яка відтинається дотичною площиною від координатного кута:

$$V=\frac{1}{6}\frac{a^2b^2c^2}{x_0y_0z_0}, \text{тоді } V^2=\frac{1}{36}a^2b^2c^2\frac{a^2}{x_0^2}\frac{b^2}{y_0^2}\frac{c^2}{z_0^2}.$$

В силу нерівності Коші

$$\frac{x_0^2}{a^2}\frac{y_0^2}{b^2}\frac{z_0^2}{c^2}\le\left(\frac{1}{3}\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}\right)\right)^3=\frac{1}{27}.$$

Тоді

$$V^2\ge\frac{1}{36}a^2b^2c^2\cdot 27=\frac{3}{4}a^2b^2c^2,$$

причому рівність досягається, якщо $\frac{x_0}{a}=\frac{y_0}{b}=\frac{z_0}{c}$, тобто коли $x_0=\frac{a}{\sqrt{3}}$, $y_0=\frac{b}{\sqrt{3}}$, $z_0=\frac{c}{\sqrt{3}}$. Отже $V_{\min}=\frac{\sqrt{3}}{2}abc$.

5.57 Введемо прямокутну декартову систему координат, в якій еліпсоїд матиме канонічне рівняння

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

і нехай $M(x_0, y_0, z_0)$ – деяка точка поза еліпсоїдом. Розглянемо одну з дотичних, проведених із точки M до еліпсоїда; нехай $N(X, Y, Z)$ – точка дотику. Зрозуміло, що ця дотична лежить в площині, яка дотикається до еліпсоїда в точці N і проходить через току M. Але рівняння площини, дотичної до еліпсоїда в точці N має вид (див. розв'язок попередньої задачі):

$$\frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} + \frac{Zz}{c^2} = 1.$$

Враховуючи, що ця площина проходить через точку M, приходимо до рівності

$$\frac{x_0 X}{a^2} + \frac{y_0 Y}{b^2} + \frac{z_0 Z}{c^2} = 1,$$

якій, очевидно, будуть задовольняти координати X, Y, Z будь-якої точки дотику, якщо тільки дотична проведена із точки M. Але дане рівняння відносно X, Y, Z є рівнянням площини.

5.58 Позначимо через S площу трикутника ABC і через H висоту призми, тоді її об'єм $V = SH$. Площина B_1EF перетнеться з площиною грані ABB_1A_1 по прямій B_1E, а з площиною грані ACC_1A_1 – по прямій LF, які перетнуться з продовженням ребра AA_1 в деякій точці K, а з площиною грані BB_1C_1C вона перетнеться по прямій BL, з площиною грані ABC – по прямій EF, які перетнуться з продовженням ребра BC в деякій точці M (див. рисунок 5.22а). Очевидно $AK = AA_1$, а в силу подібності трикутників AFK і FLC $LC = \frac{1}{3}AA_1$; тому висота піраміди $LCFM$ дорівнює $\frac{1}{3}H$.

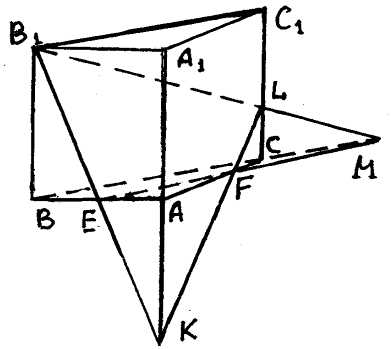

Рисунок 5.22а

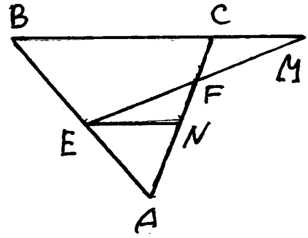

Рисунок 5.22б

Проведемо в трикутнику ABC середню лінію EN (див. рисунок 5.22б) . Площа трикутника EFN дорівнює $\frac{1}{8}S$, оскільки його основа EN становить половину BC, а висота – четверту частину висоти трикутника ABC, проведеної до сторони BC. Трикутники FCM і EFN, очевидно, рівні, тому площа трикутника FCM теж рівна $\frac{1}{8}S$. Тоді площа трикутника BEM дорівнює площі трапеції $BCNE$, яка становить $\frac{3}{4}S$. Таким чином, об'єм піраміди B_1BEM дорівнює $\frac{1}{3}H\cdot\frac{3}{4}S=\frac{1}{4}V$. Віднімемо від цього об'єму об'єм піраміди $LCFM$, який дорівнює $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}H\cdot\frac{1}{8}S=\frac{1}{72}V$, і одержимо об'єм многогранника B_1BEFL: $\frac{1}{4}V-\frac{1}{72}V=\frac{17}{72}V$. Отже, площина B_1EF ділить об'єм призми у відношенні: $\dfrac{V-\frac{17}{72}V}{\frac{17}{72}V}=\dfrac{55}{17}$.

5.59 Нехай радіус кулі дорівнює R см, а радіус циліндра – r см. Розглянемо переріз утвореного тіла площиною, що проходить через вісь циліндра і введемо на цій площині прямокутну декартову систему координат, прийнявши вісь циліндра за вісь Ox і вибравши початок координат в центрі циліндра. Об'єм V частини кулі, що залишилась дорівнює:

$$V = 2\pi\int_0^3 \left(R^2 - x^2\right)dx - 6\pi r^2 = 2\pi\left(3R^2 - 9\right) - 6\pi r^2 = 6\pi\left(R^2 - r^2 - 3\right).$$

Врахуємо, що $R^2 - r^2 = 9$, тоді $V = 36\pi$ см^3.

5.60 Нехай тор одержується обертанням кола $x^2 + (y-d)^2 = R^2$ навколо осі OX ($d > R$); тоді його об'єм дорівнює

$$v = \pi\int_{-R}^{R}\left(d + \sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 dx - \pi\int_{-R}^{R}\left(d - \sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 dx =$$

$$= \pi\int_{-R}^{R}\left[\left(d + \sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 - \left(d - \sqrt{R^2 - x^2}\right)^2\right]dx = 4\pi d\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2 - x^2}\,dx =$$

$$= \left|\begin{matrix} \text{заміна} \\ x = R\sin t \end{matrix}\right| = 4\pi d R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\,dt = 2\pi^2 d R^2 .$$

6.1 Зауважимо, що x не може бути кратним трьом, оскільки тоді права частина рівності ділилась би на 3, а права – ні. Отже $x = 3k \pm 1$, тоді $x^2 - 3y^2 = (3k \pm 1)^2 - 3y^2 = 9k^2 \pm 6k + {}$ ${}+1 - 3y^2$ і ми приходимо до рівності $9k^2 \pm 6k - 3y^2 = 16$, яка не виконується ні при яких цілих k і y.

6.2 Припустимо, що при деяких раціональних a, b, c виконана рівність

$$a\left(\sqrt[3]{2}\right)^2 + b\sqrt[3]{2} + c = 0. \tag{6.1}$$

Домноживши цю рівність на $\sqrt[3]{2}$, одержуємо

$$2a + b\sqrt[3]{4} + c\sqrt[3]{2} = 0.$$

Підставимо сюди $\sqrt[3]{4}=-\dfrac{b\sqrt[3]{2}+c}{a}$ (що випливає із (6.1)):

$2a-\dfrac{b\left(b\sqrt[3]{2}+c\right)}{a}+c\sqrt[3]{2}=0$, або $2a^2-b^2\sqrt[3]{2}-bc+ac\sqrt[3]{2}=0$.

Звідси $\sqrt[3]{2}=\dfrac{bc-2a^2}{ac-b^2}$, що неможливо, оскільки $\sqrt[3]{2}$ – ірраціональне число, а в правій частині рівності стоїть число раціональне. Таким чином, $\sqrt[3]{2}$ не може бути коренем квадратного рівняння з раціональними коефіцієнтами.

6.3 Очевидно, потрібно довести, що дискримінант не може бути точним квадратом. Нехай $a=2m+1$, $b=2n+1$, $c=2k+1$. Тоді

$$D=b^2-4ac=(2n+1)^2-4(2m+1)(2k+1)=$$
$$=4n^2+4n+1-4(4mk+2m+2k+1)=$$
$$=4n^2+4n+1-16mk-8m-8k-4=4\left(n^2+n-4mk-2m-2k\right)-3.$$

Врахуємо, що n^2+n – число парне, нехай $n^2+n=2l$. Таким чином,

$$D=4(2l-4mk-2m-2k)-3=8(l-2mk-m-k)-3=8p-3.$$

Одержане число – непарне, воно може бути квадратом тільки непарного числа. Нехай $D=(2q+1)^2=4q^2+4q+1$, отже $8p-3=4q^2+4q+1$, або $8p-4\left(q^2+q\right)=4$. Остаточно $2p-\left(q^2+q\right)=1$. Враховуючи, що q^2+q – число парне, бачимо, що дана рівність неможлива, що і доводить твердження.

6.4 Коренем рівняння не може бути ціле непарне число, оскільки при непарному x квадратний тричлен $x^2+2px+2q$ приймає непарне значення і тому не може обертатись в нуль.

Коренем даного рівняння не може бути і ціле парне число. Дійсно, якщо x парне, то x^2+2px ділиться на 4, а $2q$ при діленні на 4 дає остачу 2. Отже $x^2+2px+2q$ при діленні на 4 теж дає остачу 2 і тому не може дорівнювати нулю.

Коренем цього рівняння не може бути дробове раціональне число. Дійсно, рівняння можна записати у виді $(x+p)^2 = p^2 - 2q$. Якщо x – дробове раціональне число, то $x+p$ теж дробове раціональне число і його квадрат не може дорівнювати цілому числу $p^2 - 2q$.

6.5 Позначимо $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, тоді $x^2 = 5 + 2\sqrt{6}$. Звідси $x^2 - 5 = 2\sqrt{6}$ і, піднісши до квадрата, отримуємо $x^4 - 10x^2 + 25 = 24$. Остаточно

$$x^4 - 10x^2 + 1 = 0,$$

це і є шукане рівняння.

6.6 Якщо (x_0, y_0) – розв'язок першого рівняння, тобто $x_0^2 + y_0^2 = n$, то (x_1, y_1), де $x_1 = x_0 + y_0$, $y_1 = x_0 - y_0$, буде розв'язком другого рівняння:

$$x_1^2 + y_1^2 = (x_0 + y_0)^2 + (x_0 - y_0)^2 = 2\left(x_0^2 + y_0^2\right) = 2n.$$

І навпаки, якщо (x_1, y_1) – розв'язок другого рівняння, то із рівності $x_1^2 + y_1^2 = 2n$ випливає, що числа x_1 і y_1 мають однакову парність. Тоді (x_0, y_0), де $x_0 = \dfrac{x_1 + y_1}{2}$, $y_0 = \dfrac{x_1 - y_1}{2}$ (зауважимо, що це цілі числа), буде розв'язком першого рівняння: $x_0^2 + y_0^2 = \left(\dfrac{x_1 + y_1}{2}\right)^2 +$

$$+\left(\frac{x_1 - y_1}{2}\right)^2 = \frac{x_1^2 + y_1^2}{2} = n.$$

Побудована таким чином відповідність між роз'язками двох рівнянь є взаємно однозначною, оскільки очевидно, що різним розв'язкам одного з рівнянь відповідають різні розв'язки іншого. Отже ці рівняння мають однакову кількість розв'язків в цілих числах.

6.7 Нехай всі корені рівняння дійсні; позначимо їх $a_1, \ldots, a_s$ ($a_1 < \ldots < a_s$), а їх кратності $k_1, \ldots, k_s$ ($k_1 + \ldots + k_s = 5$). Нехай $f(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + c$. Якщо $k_i > 1$, то a_i – корінь $f'(x)$ кратності $k_i - 1$, так що сума кратностей коренів $f'(x)$, які містяться серед $a_1, \ldots, a_s$ дорівнює $5 - s$. Крім того, $f'(x)$ має корінь b_i, який знаходиться між a_i і a_{i+1} (всього не менше, ніж $s - 1$ таких коренів), і якщо хоча б один корінь b_i кратний, то сума кратностей коренів $f'(x)$ буде не менше, ніж $(5 - s) + s = 5$, що неможливо оскільки $f'(x)$ многочлен четвертого степеня. Отже, всі кратні корені $f'(x)$ містяться серед $a_1, \ldots, a_s$. З другого боку, 0 – корінь $f'(x)$ кратності 2 і не корінь $f(x)$ – суперечність. Таким чином, рівняння має хоча б один комплексний корінь $a + bi$, де $b \neq 0$. Але тоді і $a - bi$ – теж корінь цього рівняння.

6.8 Якщо $A = B = 0$, тобто $A^2 + B^2 = 0$, то рівняння $x^4 + 1 = 0$ не має дійсних коренів. Якщо ж $A = 1, B = 0$, тобто $A^2 + B^2 = 1$, рівняння $x^4 + x^3 + x + 1 = 0$ має очевидний дійсний корінь $x = -1$. Отже, існує $S_0 \in (0, 1]$ таке, що при $A^2 + B^2 < S_0$ рівняння не має дійсних коренів, а при $A^2 + B^2 = S_0$ вони з'являються. Зауважимо, що дане рівняння може мати тільки парну кількість дійсних коренів, оскільки в силу симетричності разом з коренем x_0 воно має також корінь $\dfrac{1}{x_0}$. З другого боку, в силу неперервної незалежності коренів рівняння від його коефіцієнтів, при $A^2 + B^2 = S_0$ у рівняння не можуть з'явитися зразу два різних дійсних корені. Це приводить до висновку, що при

$A^2+B^2=S_0$ рівняння матиме один кратний дійсний корінь x_0, тобто $x_0=\dfrac{1}{x_0}$, звідси $x_0=1$, або $x_0=-1$.

Якщо $x_0=1$ є коренем рівняння, то із рівності $1+A+B+A+1=0$ маємо $B=-2A-2$ і тоді

$$A^2+B^2=A^2+(-2A-2)^2=5A^2+8A+4=5\left(A+\frac{4}{5}\right)^2+\frac{4}{5}.$$

Як видно, в цьому випадку найменше значення суми A^2+B^2 досягається при $A=-\dfrac{4}{5}$, тоді $B=-\dfrac{2}{5}$, і дорівнює $\dfrac{4}{5}$.

Якщо ж $x_0=-1$ є коренем рівняння, то аналогічно одержуємо, що найменше значення суми A^2+B^2 досягається при $A=\dfrac{4}{5}$, $B=-\dfrac{2}{5}$ і теж дорівнює $\dfrac{4}{5}$.

Таким чином, найменше значення суми A^2+B^2, при якому рівняння $x^4+Ax^3+Bx^2+Ax+1=0$ має дійсні корені, дорівнює $\dfrac{4}{5}$.

6.9 Як і в попередній задачі одержуємо, що найменше значення суми A^2+B^2, при якому рівняння $1006x^4-Ax^3-Bx^2-Ax+1006=0$ має дійсні корені, дорівнює $\dfrac{2012^2}{5}$.

6.10 При $x<-1$ маємо: $2^x=-\dfrac{x}{\sqrt{2}}$, або $2^{x+\frac{1}{2}}=-x$, що неможливо, оскільки $2^{x+\frac{1}{2}}<2^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}<1$, а $-x>1$. При $x>1$ одержуємо: $2^{-x}=\dfrac{x}{\sqrt{2}}$, або $2^{\frac{1}{2}-x}=x$. Але при $x>1$

$2^{\frac{1}{2}-x} < 2^{-\frac{1}{2}} < 1$, рівність теж неможлива.

Якщо $-1 \le x \le 1$, то одержуємо рівняння $2^{-|x|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, звідки $|x| = \frac{1}{2}$ і $x = \pm\frac{1}{2}$ – шукані корені рівняння.

6.11 Зробимо наступні перетворення:

$$(x+1) + 2\sqrt{x+1} + 1 = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}+1\right)^2 = (x+1)^2 \Leftrightarrow \sqrt{x+1}+1 = \pm(x+1).$$

З рівняння $\sqrt{x+1} = x$ отримаємо $\begin{cases} x^2 - x - 1 = 0, \\ x \ge 0 \end{cases}$, звідки $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Друге рівняння $\sqrt{x+1} = -x-2$ розв'язків не має, оскільки не має розв'язків система $\begin{cases} x+1 \ge 0, \\ -x-2 \ge 0 \end{cases}$.

6.12 Запишемо рівняння у виді $x^4 + 2x^2 + 1 = 2x^2 - 4x + 2$, або $\left(x^2+1\right)^2 = 2(x-1)^2$. Звідси отримуємо два квадратні рівняння $x^2 + 1 = \pm\sqrt{2}(x-1)$. Одне з них, а саме $x^2 - \sqrt{2}x + 1 + \sqrt{2} = 0$, не має коренів, а друге $x^2 + \sqrt{2}x + 1 - \sqrt{2} = 0$ має два корені

$$x_{1,2} = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}.$$

6.13 При $a \le 0$ розв'язків, очевидно, немає. При $a > 0$ перепишемо рівняння у виді $\frac{e^x}{x^2} = a$ і дослідимо функцію $f(x) = e^x x^{-2}$. Маємо $f'(x) = e^x(x-2)x^{-3}$, звідки видно, що $f(x)$ зростає від 0 до $+\infty$ на проміжку $(-\infty, 0)$, спадає від $+\infty$ до $\frac{e^2}{4}$ на проміжку $(0, 2]$ і зростає від $\frac{e^2}{4}$ до $+\infty$

на $\left[2,+\infty\right)$. Таким чином, при $0<a<\frac{e^2}{4}$ рівняння має один корінь, при $a=\frac{e^2}{4}$ – два корені і при $a>\frac{e^2}{4}$ – три корені.

6.14 Запишемо рівняння у виді $x^5-5x=-a$ і розглянемо функцію $f(x)=x^5-5x$.

$f'(x)=5x^4-5=5(x+1)(x-1)(x^2+1)$; звідси видно, що $f(x)$ зростає від $-\infty$ до 4 на проміжку $(-\infty,-1]$, спадає від 4 до -4 на проміжку $[-1,1]$ і знову зростає від -4 до $+\infty$ на $[1,+\infty)$. Отже, при $|a|>4$ рівняння має один корінь, при $|a|=4$ – два корені і при $|a|<4$ – три дійсних корені.

6.15 Застосуємо формулу, яку легко вивести:

$$tg3\alpha=\frac{tg\alpha\left(3-tg^2\alpha\right)}{1-3tg^2\alpha}.$$

Отже, $tg60^0=\frac{tg20^0\left(3-tg^2 20^0\right)}{1-3tg^2 20^0}$, або $\frac{tg20^0\left(3-tg^2 20^0\right)}{1-3tg^2 20^0}=\sqrt{3}$, що після піднесення до квадрата і домноження на знаменник лівої частини, приводить до рівності:

$tg^2 20^0\left(3-tg^2 20^0\right)^2=3\left(1-3tg^2 20^0\right)^2$, що і треба було довести.

6.16 Легко впевнитись, що значення x, при яких $\sin\frac{\pi x}{9}=0$ не задовольняють рівнянню, тому вважаємо, що $\sin\frac{\pi x}{9}\neq 0$ і домножимо обидві частини рівняння на $2\sin\frac{\pi x}{9}$.

Одержимо:

$$\sin\frac{2\pi x}{9}\cdot\cos\frac{2\pi x}{9}\cdot\cos\frac{4\pi x}{9}=\frac{1}{4}\sin\frac{\pi x}{9}\Leftrightarrow\sin\frac{4\pi x}{9}\cdot\cos\frac{4\pi x}{9}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi x}{9}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sin\frac{8\pi x}{9}=\sin\frac{\pi x}{9}\Leftrightarrow\sin\frac{8\pi x}{9}-\sin\frac{\pi x}{9}=0\Leftrightarrow 2\sin\frac{7\pi x}{18}\cdot\cos\frac{\pi x}{2}=0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \sin\frac{7\pi x}{18}=0$ або $\cos\frac{\pi x}{2}=0 \Leftrightarrow \frac{7\pi x}{18}=\pi n$, $n\in N$, або $\frac{\pi x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in N \Leftrightarrow x=\frac{18n}{7}$, або $x=1+2k$, $n, k\in N$.

6.17 Доведемо, що функція $f(x)=x^4+5x^3+6x^2-4x-16$ приймає значення 0 рівно в двох точках. Для цього дослідимо похідну функції

$$f'(x)=4x^3+15x^2+12x-4=(x+2)^2(4x-1).$$

При $x\in(-\infty, -2)\cup\left(-2, \frac{1}{4}\right)$ $f'(x)<0$, а при $x\in\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$ $f'(x)>0$. Тому функція $f(x)$ спадає на інтервалі $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$ і зростає на інтервалі $\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$. Оскільки $f(-10)>0$, $f(10)>0$ і $f\left(\frac{1}{4}\right)<f(0)<0$, то на кожному із двох вказаних інтервалів функція $f(x)$ один раз приймає значення 0, а рівняння $f(x)=0$ має рівно два розв'язки.

6.18 Позначимо $f(x)=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$. Не обмежуючи загальності можна вважати, що $a\le b\le c$. Якщо $a=b$ чи $b=c$, то $f(b)=(b-a)(b-c)=0$. Якщо ж $a<b<c$, то $f(b)<0$ і $f(a)>0$. В силу неперервності функції $f(x)$ існує $x_0\in(a, b)$ таке, що $f(x_0)=0$.

6.19 Розглянемо функцію $f(x)=xe^{-x}+e^{-x}+\frac{1}{2}x^2-1$; зауважимо, що $f(0)=0$. $f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}-e^{-x}+x=x\left(1-e^{-x}\right)$; очевидно $f'(0)=0$ і $f'(x)>0$ при $x\ne 0$. Звідси випливає, що рівняння $f(x)=0$ має єдиний дійсний корінь $x=0$.

6.20 Позначимо $x^2=t$, тоді

$$f(x)=\varphi(t)=2e^{2-t}\left(t^3-3t^2+5t-1\right)-2e-5,\ \ t\geq 0;$$

$\varphi'(t)=-2e^{2-t}\left(t^3-6t^2+11t-6\right)=-2e^{2-t}(t-1)(t-2)(t-3)$. Таким чином, $\varphi'(t)>0$ при $t\in[0,\,1)\cup(1,\,2)$ і $\varphi'(t)<0$ при $t\in(1,\,2)\cup(3,\,+\infty)$. Точки $t=1$, $t=3$ – точки максимуму, $t=2$ – точка мінімуму, причому $\varphi(0)<0$, $\varphi(1)>0$, $\varphi(2)<0$, $\varphi(3)<0$. Тому $\varphi(t)$ при $t\geq 0$ обертається в нуль двічі – при $t\in(0,\,1)$ і при $t\in(1,\,2)$, а функція $f(x)$ відповідно має 4 нулі.

6.21 Нехай $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{2n}\dfrac{x^k}{k!}$. Зауважимо, що $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$, а також $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, звідси випливає, що існує точка x_0, в якій $f(x)$ досягає свого найменшого значення. Якщо припустити, що рівняння $f(x)=0$ має дійсні корені, то зрозуміло, що $f(x_0)\leq 0$. Враховуючи, що $f'(x)=\sum\limits_{k=0}^{2n-1}\dfrac{x^k}{k!}$ і $f'(x_0)=0$ (зауважимо, що $x_0\neq 0$), маємо

$$f(x_0)-f'(x_0)=\frac{x_0^{2n}}{(2n)!}\leq 0,$$

що неможливо при $x_0\neq 0$, чим твердження і доведено.

6.22 Очевидно $2\left(x^4-2x^2+3\right)\left(y^4-3y^2+4\right)=$

$$=2\left(\left(x^2-1\right)^2+2\right)\left(\left(y^2-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\right)\geq 2\cdot 2\cdot\frac{7}{4}=7.$$

Причому рівність досягається тільки при $x^2=1$ і $y^2=\dfrac{3}{2}$. Таким чином, на площині одержуємо чотири точки: $\left(1,\,\sqrt{3/2}\right)$, $\left(1,\,-\sqrt{3/2}\right)$, $\left(-1,\,\sqrt{3/2}\right)$, $\left(-1,\,-\sqrt{3/2}\right)$.

6.23 Нехай $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots a_{n-1}x+a_n$,

$a_k \geq 0$, $k = 0, ..., n$, $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k > 0$. Задане рівняння можна записати у виді

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n - x^{n+1} = 0 . \qquad (6.2)$$

Розглянемо функцію

$f(t) = a_0 t + a_1 t^2 + \ldots + a_{n-1} t^n + a_n t^{n+1} - 1$. Оскільки $f(0) = -1 < 0$, $f'(t) = a_0 + 2a_1 t + \ldots + (n+1) a_n t^n > 0$, $t > 0$ і $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$, то зрозуміло, що існує і притому єдине $t_0 > 0$ таке, що $f(t_0) = 0$, тобто

$$a_0 t_0 + a_1 t_0^2 + \ldots + a_{n-1} t_0^n + a_n t_0^{n+1} - 1 = 0 .$$

Поділимо цю рівність на $t_0^{n+1} \neq 0$:

$$a_0 \frac{1}{t_0^n} + a_1 \frac{1}{t_0^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{1}{t_0} + a_n - \frac{1}{t_0^{n+1}} = 0 .$$

Звідси видно, що $x_0 = \dfrac{1}{t_0} > 0$ – єдиний корінь рівняння (6.2). Отже, вказане рівняння має на проміжку $(0, +\infty)$ рівно один корінь.

6.24 Додавши всі рівняння системи, маємо

$$(1 + 2 + \ldots + n)(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = a_1 + a_2 + \ldots + a_n ,$$

тобто $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \dfrac{2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)}{n(n+1)}$. Віднімаючи від k-го рівняння $(k+1)$-е (при $k = n$ від n-го віднімаємо перше), одержимо

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n - n x_k = a_k - a_{k+1} .$$

Звідси $x_k = \dfrac{2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)}{n^2 (n+1)} - \dfrac{a_k - a_{k+1}}{n}$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$,

$$x_n = \frac{2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)}{n^2 (n+1)} - \frac{a_n - a_1}{n} .$$

6.25 Першу рівність піднесемо до квадрата: $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j = 1$ і віднімемо від другої, домноженої на $n: (n-1)\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j = 0$, або $\sum_{1\le i<j\le n} (x_i - x_j)^2 = 0$. Звідси $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \dfrac{1}{n}$.

6.26 Очевидно $x_i \le 1$, $i = 1,2,\ldots,2n-1$. Якщо припустити, що $x_1 = 1$, то $x_2 = 0$, $x_3 = 1,\ldots, x_{2n-1} = 1$, $x_1 = 0$ – суперечність, отже $x_1 \ne 1$. Аналогічно доводимо, що $x_1 \ne -1$ і $x_1 \ne 0$.

Нехай $0 < x_1 < 1$, тоді $0 < x_i < 1$, $i = 2,3,\ldots,2n-1$. Якщо припустити, що $x_1 < x_2$, то $1 - x_1^2 > 1 - x_2^2 \Rightarrow x_2 > x_3$; аналогічно $x_3 < x_4$, $x_4 > x_5$ і т.д. $x_{2n-2} > x_{2n-1}$, $x_{2n-1} < x_1 \Rightarrow x_1 > x_2$ – суперечність. Аналогічно доводиться, що нерівність $x_1 > x_2$ теж не може виконуватись. Таким чином, $x_1 = x_2 = \ldots = x_{2n-1}$. Розв’язавши рівняння $1 - x^2 = x$, одержуємо $x_i = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Припустивши, що $-1 < x_1 < 0$, одержуємо $0 < x_2 < 1$. Але тоді $0 < x_i < 1$, $i = 2,3,\ldots,2n-1$ і із останнього рівняння системи маємо $0 < x_1 < 1$, що неможливо.

Залишається можливість $x_1 < -1$. Якщо припустити, що x_1 таке, що при якомусь k виконається умова $-1 < x_k < 0$, то починаючи з цього номера нерівність $-1 < x_i < 0$ виконується для всіх i. Зокрема, з останнього рівняння системи одержимо $-1 < x_1 < 0$, що суперечить припущенню. Отже $x_i < -1$ при всіх i. Тоді, як і вище легко одержати, що x_i

всі рівні між собою. Із рівняння $1-x^2=x$ одержуємо, що $x_i=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Остаточно, розв'язками системи є:

$x_1=x_2=\ldots=x_{2n-1}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ та $x_1=x_2=\ldots=x_{2n-1}=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

6.27 Оскільки сума лівих частин нерівностей дорівнює нулю, то ми маємо справу з системою рівнянь:

$$\begin{cases} a_1-2a_2+a_3=0, \\ a_2-2a_3+a_4=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-2}-2a_{n-1}+a_n=0, \\ a_{n-1}-2a_n+a_1=0, \\ a_n-2a_1+a_2=0\,. \end{cases}$$

Із цієї системи одержуємо:

$$a_2-a_1=a_3-a_2=a_4-a_3=\ldots=a_n-a_{n-1}=a_1-a_n=a_2-a_1\,.$$

Таким чином, a_i утворюють арифметичну прогресію, в якій a_1 є першим і одночасно $n+1$-м членом. Це означає, що різниця такої прогресії дорівнює нулю, тому $a_1=a_2=\ldots=a_n$, що і вимагалось.

6.28 Зробимо заміну $\dfrac{1}{x_i}=y_i$, $i=1,2,\ldots,n$; одержимо систему:

$$\begin{cases} 2y_1=y_n+y_2, \\ 2y_2=y_1+y_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2y_{n-1}=y_{n-2}+y_n, \\ 2y_n=y_{n-1}+y_1. \end{cases}$$

Ця система еквівалентна системі, розглянутій при розв'язуванні задачі 6.25, отже $y_1 = y_2 = \ldots = y_n$. Тому розв'язки початкової системи мають вид: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = a$, де $a \neq 0$.

6.29 Визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} - \frac{1}{2} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \frac{1}{2} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \frac{1}{2} \end{vmatrix} = P\left(\frac{1}{2}\right),$$

де

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix},$$

або $P(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + b_1 \lambda^{n-1} + \ldots + b_n$, де b_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ – цілі. Якщо б $P\left(\frac{1}{2}\right)$ дорівнював нулю, тобто $(-1)^n \frac{1}{2^n} + b_1 \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots + b_n = 0$, то домноживши цю рівність на 2^n, одержали б

$$(-1)^n + 2b_1 + 2^2 b_2 + \ldots + 2^n b_n = (-1)^n + 2N = 0,$$

що неможливо, бо N – ціле. Тому $\Delta \neq 0$ і система має єдиний розв'язок $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

6.30 Нехай A і A^* – відповідно матриця і розширена матриця даної лінійної системи, тобто

$$A=\begin{pmatrix}0 & -a_3 & a_2\\ a_3 & 0 & -a_1\\ -a_2 & a_1 & 0\\ a_1 & a_2 & a_3\end{pmatrix},\qquad A^*=\begin{pmatrix}0 & -a_3 & a_2 & b_1\\ a_3 & 0 & -a_1 & b_2\\ -a_2 & a_1 & 0 & b_3\\ a_1 & a_2 & a_3 & c\end{pmatrix}.$$

Обчислимо всі мінори третього порядку матриці A:

$$\Delta_1^{(3)}=\begin{vmatrix}0 & -a_3 & a_2\\ a_3 & 0 & -a_1\\ -a_2 & a_1 & 0\end{vmatrix}=0,\ \Delta_2^{(3)}=\begin{vmatrix}0 & -a_3 & a_2\\ a_3 & 0 & -a_1\\ a_1 & a_2 & a_3\end{vmatrix}=a_3\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right),$$

$$\Delta_3^{(3)}=\begin{vmatrix}0 & -a_3 & a_2\\ -a_2 & a_1 & 0\\ a_1 & a_2 & a_3\end{vmatrix}=-a_2\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right),$$

$$\Delta_4^{(3)}=\begin{vmatrix}a_3 & 0 & -a_1\\ -a_2 & a_1 & 0\\ a_1 & a_2 & a_3\end{vmatrix}=a_1\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right).$$

Знайдемо також визначник розширеної матриці даної лінійної системи:

$$\overline{\Delta}=\begin{vmatrix}0 & -a_3 & a_2 & b_1\\ a_3 & 0 & -a_1 & b_2\\ -a_2 & a_1 & 0 & b_3\\ a_1 & a_2 & a_3 & c\end{vmatrix}=-b_1\Delta_4^{(3)}+b_2\Delta_3^{(3)}-b_3\Delta_2^{(3)}+c\Delta_1^{(3)}=$$

$$=-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)(a_1^2+a_2^2+a_3^2).$$

Розглянемо такі випадки:

1) Нехай $a_1=a_2=a_3=0$, тобто $a_1^2+a_2^2+a_3^2=0$. Тоді, якщо всі числа b_1,b_2,b_3,c дорівнюють нулю, то дана система є сумісною і невизначеною (тобто має безліч розв'язків).

Якщо ж хоча б одне із чисел b_1,b_2,b_3,c відмінне від нуля, тобто виконується умова $b_1^2+b_2^2+b_3^2+c^2\neq 0$, то система є несумісною.

2) Нехай $a_1^2+a_2^2+a_3^2\neq 0$, тобто хоча б одне із чисел a_1, a_2, a_3 відмінне від нуля. Тоді хоча б один з мінорів $\Delta_2^{(3)}, \Delta_3^{(3)}, \Delta_4^{(3)}$ відмінний від нуля. Це означає, що ранг матриці A дорівнює 3. Якщо при цьому виконується умова $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$, то ранг розширеної матриці A^* також дорівнює 3, а тому, згідно з теоремою Кронекера-Капеллі, дана система є сумісною. Оскільки число невідомих дорівнює рангу матриці A, то дана сумісна система є визначеною, тобто має єдиний розв'язок.

Якщо ж $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\neq 0$, то ранг розширеної матриці A^* дорівнює 4, тобто не дорівнює рангу матриці A, а це означає, що дана система є несумісною.

Таким чином: а) якщо $a_1^2+a_2^2+a_3^2=0$ і $b_1^2+b_2^2+b_3^2+c^2\neq 0$ або $a_1^2+a_2^2+a_3^2\neq 0$ і $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\neq 0$, то вихідна система лінійних рівнянь є несумісною;
б) якщо $a_1^2+a_2^2+a_3^2\neq 0$ і $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$, то система має єдиний розв'язок;
в) якщо $a_1=a_2=a_3=b_1=b_2=b_3=c=0$, то система має безліч розв'язків.

6.31 1) Якщо $a=1$, $b\neq 1$, то система несумісна.

2) Якщо $a=1$, $b=1$, то система має безліч розв'язків:

$$x_n=1-x_1-x_2-\ldots-x_{n-1}\ ; \quad x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\in R\ ;$$

Нехай $a\neq 1$. Тоді віднімаючи почленно від першого рівняння друге, дістаємо: $(a-1)x_1+(1-a)x_2=0$, звідки $x_2=x_1$. Аналогічно можна показати, що $x_3=x_1$, $x_4=x_1$, …, $x_{n-1}=x_1$. Тому дана система рівнянь при $a\neq 1$ рівносильна системі:

$$\begin{cases} x_i=x_1, \quad i=2,3,\ldots,n-1, \\ (a+n-2)x_1+x_n=1, \\ (n-1)x_1+ax_n=b. \end{cases} \tag{6.3}$$

Виключаючи x_n з двох останніх рівнянь системи (6.3), одержуємо рівняння

$$(a-1)(a-(1-n))x_1 = a-b. \qquad (6.4)$$

3) Якщо $a=1-n$, $b \neq 1-n$, то рівняння (6.4) розв'язків не має, а тому вихідна система несумісна.

4) Якщо $a=1-n$, $b=1-n$, то два останніх рівняння системи (6.3) рівносильні рівнянню $x_1 = x_n - 1$. Звідси випливає, що дана система має безліч розв'язків:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = x_n - 1, \quad x_n \in R.$$

5) Якщо $a \neq 1$, $a \neq 1-n$, $b \in R$, то з рівняння (6.4) випливає, що

$$x_1 = \frac{a-b}{(a-1)(a-(1-n))},$$

а з передостаннього рівняння системи (6.3) дістаємо

$$x_n = 1-(a+n-2)x_1.$$

Отже, дана система має єдиний розв'язок:

$$x_i = \frac{a-b}{(a-1)(a+n-1)}, \quad i = 1,2,\ldots,n-1,$$

$$x_n = \frac{b(a-1)+(b-1)(n-1)}{(a-1)(a+n-1)}.$$

Зауваження. Цей розв'язок можна знайти також, користуючись правилом Крамера:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},$$

$$\Delta = (a-1)^{n-1}(a+n-1),$$

$$\Delta_i = (a-1)^{n-2}(a-b), \quad i = 1,2,\ldots,n-1,$$

$$\Delta_n = (a-1)^{n-2}(b(a-1)+(b-1)(n-1)).$$

Остаточно:

якщо $a=1$, $b \neq 1$, то система не має розв'язків;

якщо $a=1$, $b=1$, то система має безліч розв'язків:

$$x_n = 1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_{n-1}; \quad x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \in R;$$

якщо $a = 1 - n$, $b \neq 1 - n$, то система не має розв'язків;
якщо $a = 1 - n$, $b = 1 - n$, то система має безліч розв'язків:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = x_n - 1 , \quad x_n \in R .$$

якщо $a \neq 1$, $a \neq 1 - n$, $b \in R$, то система має єдиний розв'язок:

$$x_i = \frac{a-b}{(a-1)(a+n-1)} , \quad i = 1, 2, \ldots, n-1 ,$$

$$x_n = \frac{b(a-1) + (b-1)(n-1)}{(a-1)(a+n-1)} .$$

6.32 Віднявши від першого рівняння друге, від другого третє і т.д. від передостаннього останнє, одержимо:

$$x_1 + x_2 = 0 , \; x_2 + x_3 = 0 , \; x_3 + x_4 = 0 , \ldots \; x_{n-1} + x_n = 0 .$$

Звідси $x_1 = -x_2 = x_3 = -x_4 = \ldots = (-1)^{n-1} x_n$. Якщо n непарне, то із першого рівняння системи випливає, що $0 = 1$, тобто в цьому випадку система несумісна. Якщо ж n парне, то розв'язок є

$$x_k = (-1)^k , \; k = 1, 2, \ldots, n .$$

6.33 Обчислимо визначник матриці системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3-2\lambda & 2-\lambda & 1 \\ 2-\lambda & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 (3-\lambda).$$

Звідси видно, що при $\lambda \neq 1$ і $\lambda \neq 3$ система сумісна і матиме єдиний розв'язок, який легко знайти за правилом Крамера:

$$x_1 = -1 , \quad x_2 = \frac{4-\lambda}{3-\lambda} , \quad x_3 = \frac{1}{3-\lambda} .$$

При $\lambda = 1$ одержується система, яка складається із трьох однакових рівнянь: $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Отже і в цьому випадку система сумісна і має нескінченно багато розв'язків: $x_1 = 1 - x_2 - x_3$, $x_2, x_3 \in R$.

При $\lambda = 3$ одержуємо систему

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 + x_3 = 3\ , \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 1\ , \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1\ . \end{cases}$$

Додавши в цій системі друге і третє рівняння, маємо $0 = 2$, що свідчить про те, що система несумісна.

7.1 Оскільки при $a > 0$ $\quad \dfrac{a^2 + a + 1}{a} = a + 1 + \dfrac{1}{a} \geq 3$, то

$$\frac{\left(p^2 + p + 1\right)\left(q^2 + q + 1\right)\left(r^2 + r + 1\right)\left(s^2 + s + 1\right)}{pqrs} =$$

$$= \left(p + 1 + \frac{1}{p}\right)\left(q + 1 + \frac{1}{q}\right)\left(r + 1 + \frac{1}{r}\right)\left(s + 1 + \frac{1}{s}\right) \geq 3^4 = 81\,.$$

7.2 За нерівністю Коші

$\sqrt[n]{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)} < \dfrac{1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1}{n}$, або

$\sqrt[n]{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)} < n$, тобто $n^n > 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$, що і треба було довести.

7.3 Як відомо, $\ln(1 + x) < x$ при $x > 0$, тому

$$\ln\left[\left(1 + \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{8}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)\right] = \ln\left(1 + \frac{1}{4}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{8}\right) + \ldots +$$

$$+ \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) < \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} < \frac{1/4}{1 - 1/2} = \frac{1}{2}\,.$$

Отже, $\left(1 + \dfrac{1}{4}\right)\left(1 + \dfrac{1}{8}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \dfrac{1}{2^n}\right) < e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} < 2$, що і вимагалось.

7.4 Скористаємось нерівністю: $\ln(1 + x) < x$ при $1 + x > 0$. $x \neq 0$:

$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}\,,$$

з другого боку,

$$\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)=\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)<-\frac{1}{n+1}, \text{ тобто } \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)>\frac{1}{n+1}.$$

Остаточно $\frac{1}{n+1}<\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)<\frac{1}{n}$, що і потрібно було довести.

7.5 Із очевидної нерівності $(x-y)^2\geq 0$ одержуємо:

$2x^2+2y^2\geq x^2+2xy+y^2$, або $\frac{x^2+y^2}{2}\geq\frac{x^2+2xy+y^2}{4}$,

тобто
$$\frac{x^2+y^2}{2}\geq\left(\frac{x+y}{2}\right)^2. \qquad (7.1)$$

Зауважимо також, що згідно з нерівністю Коші для a і b, які фігурують в умові задачі, маємо $ab\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$, тобто $\frac{1}{ab}\geq 4$, причому рівність досягається тільки при $a=b=\frac{1}{2}$.

Покладемо в нерівності (7.1) $x=a+\frac{1}{a}$, $y=b+\frac{1}{b}$, одержимо:

$$\frac{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2}{2}\geq\frac{1}{4}\left(a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}\right)^2=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2=$$
$$=\frac{1}{4}\left(1+\frac{a+b}{ab}\right)^2=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{ab}\right)^2\geq\frac{1}{4}(1+4)^2=\frac{25}{4}.$$

Звідси $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geq\frac{25}{2}$, що і вимагалось. Рівність маємо тільки при $a=b=0{,}5$.

7.6 Ліву частину нерівності можна представити у виді

$$1+\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{2}{\sin 2\alpha}. \qquad (7.2)$$

Оскільки α – гострий кут, то всі знаменники додатні, причому

$$\frac{1}{\sin\alpha}\geq 1, \quad \frac{1}{\cos\alpha}\geq 1, \quad \frac{2}{\cos 2\alpha}\geq 2.$$

Таким чином, вся сума (7.2) не менше 5. Але вона не може дорівнювати 5, оскільки $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ не можуть одночасно дорівнювати 1.

7.7 Зробимо заміну: $x=tg\alpha$, $y=tg\beta$, $\alpha,\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Тоді

$$\frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}=\frac{(tg\alpha+tg\beta)(1-tg\alpha\ tg\beta)}{(1+tg^2\alpha)(1+tg^2\beta)}=\frac{(tg\alpha+tg\beta)(1-tg\alpha\ tg\beta)}{\sec^2\alpha\ \sec^2\beta}=$$

$$=\cos^2\alpha\ \cos^2\beta(tg\alpha+tg\beta)(1-tg\alpha\ tg\beta)=$$

$$=(\cos\alpha\cos\beta tg\alpha+\cos\alpha\cos\beta tg\beta)(\cos\alpha\cos\beta-\cos\alpha\cos\beta tg\alpha tg\beta)=$$

$$=(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)=$$

$$=\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}\sin 2(\alpha+\beta).$$

Звідси очевидним чином випливає справедливість нерівності, що доводиться.

7.8 Всі доданки виразу $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{n^2-1}+\frac{1}{n^2}$, крім першого, тобто n^2-n членів, замінимо найменшим з них, одержимо

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{n^2-1}+\frac{1}{n^2}>\frac{1}{n}+\frac{n^2-n}{n^2}=\frac{1}{n}+\frac{n-1}{n}=1,$$

що і треба було довести.

7.9 Дана нерівність рівносильна нерівності

$$e^{\frac{m-n}{m}}<\frac{m}{n}<e^{\frac{m-n}{n}}.$$

Але при $x>0$ $e^x>1+x$, так що

$$e^{\frac{m-n}{n}} > 1 + \frac{m-n}{n} = \frac{m}{n}.$$

Позначимо, далі, $\frac{n}{m} = x < 1$, тоді друга нерівність запишеться у виді $e^{1-x} < \frac{1}{x}$, або $xe^{1-x} < 1$ $(0 < x < 1)$. Розглянемо функцію $f(x) = xe^{1-x}$. $f(1) = 1$; $f'(x) = (1-x)e^{1-x} > 0$ при $x < 1$, так що $f(x) < 1$ при $x < 1$, що і вимагалось.

7.10 Використовуючи нерівність Коші, маємо

$$\sqrt[n+1]{1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} < \frac{1 + n\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}.$$

Звідси $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$, тобто $x_n < x_{n+1}$.

Аналогічно

$$\sqrt[n+1]{1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} < \frac{1 + n\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{n+1} = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Тоді $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$, тобто $y_n < y_{n+1}$.

Нарешті,

$$z_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \frac{1}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} = \frac{1}{y_{n+1}}.$$

Оскільки $\{y_n\}$ зростаюча послідовність, то $\{z_n\}$ спадна.

Зауважимо, що оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = e$, то $x_n < e < z_n$, тобто, для будь-якого натурального n

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}. \qquad (7.3)$$

7.11 Застосуємо метод математичної індукції. Легко перевірити, що обидві нерівності виконуються при $n=1,\,2$. Припустимо, що ліва нерівність справедлива при $n=k$: $k!>\left(\frac{k}{e}\right)^k$, тоді

$$(k+1)\cdot k!=(k+1)!>\left(\frac{k}{e}\right)^k(k+1)=\left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1}e\left(\frac{k}{k+1}\right)^k=$$

$$=\left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1}e\frac{1}{\left(\frac{k+1}{k}\right)^k}=\left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1}\frac{e}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}.$$

Оскільки в силу (7.3) $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k<e$, то

$$(k+1)!>\left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1}\frac{e}{e}=\left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1}.$$

Нехай права нерівність справедлива при $n=k$: $k!<e\left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1}$, тоді

$$(k+1)\cdot k!=(k+1)!<e\left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1}(k+1)=e\left(\frac{k+2}{e}\right)^{k+2}e\left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{k+2}=$$

$$=e\left(\frac{k+2}{e}\right)^{k+2}e\frac{1}{\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+2}}=e\left(\frac{k+2}{e}\right)^{k+2}\frac{e}{\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+2}}.$$

Але, в силу (7.3) $\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+2}>e$, тому

$$(k+1)!<e\left(\frac{k+2}{e}\right)^{k+2}\frac{e}{e}=e\left(\frac{k+2}{e}\right)^{k+2},$$

що і потрібно було довести.

7.12 Доведення проведемо методом математичної індукції. Розглянемо ліву нерівність: $n! < n\left(\frac{n}{e}\right)^n$, легко переконатись, що при $n = 7$ вона виконується. Тоді, припустивши, що нерівність виконана при деякому n, маємо (зауважимо, що силу (7.3) $\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} < 1$):

$$(n+1)! = (n=1)n! < (n+1)n\left(\frac{n}{e}\right)^n = (n+1)\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \frac{n^{n+1}e}{(n+1)^{n+1}} =$$

$$= (n+1)\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} < (n+1)\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1},$$

тобто, нерівність справедлива і при $n+1$.

Праву нерівність $n\left(\frac{n}{e}\right)^n < \left(\frac{n}{2}\right)^n$ запишемо в еквівалентному виді: $n < \left(\frac{e}{2}\right)^n$. Легко перевірити, що вона виконується при $n = 6$. Зауваживши, що $\frac{n+1}{n} < \frac{e}{2}$ при $n \geq 3$, припустимо, що нерівність виконується при деякому n, тоді $n+1 = \frac{n+1}{n} n < \frac{e}{2}\left(\frac{e}{2}\right)^n = \left(\frac{e}{2}\right)^{n+1}$, що, в силу принципу математичної індукції, свідчить про те, що нерівність справедлива при будь-якому цілому $n \geq 6$.

7.13 Підставивши $q = 1 - p$, одержимо еквівалентну нерівність

$$e^{x_2} e^{p(x_1 - x_2)} \leq e^{x_2} + p\left(e^{x_1} - e^{x_2}\right);$$

поділивши на e^{x_2}, маємо

$$e^{p(x_1-x_2)} \le 1 + p\left(e^{x_1-x_2} - 1\right),$$

або, позначивши $x_1 - x_2 = y$,

$$e^{py} + p - 1 - pe^{y} = \varphi(y) \le 0 .$$

Маємо $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(y) = pe^{py} - pe^{y} = p\left(e^{py} - e^{y}\right)$; очевидно $\varphi'(y) > 0$ при $y < 0$ і $\varphi'(y) < 0$ при $y > 0$. Таким чином, $y = 0$ – точка максимуму і $\varphi(y) \le 0$ при будь-якому y, що і вимагалось.

7.14 В силу симетрії відносно a, b, c виразів, які входять в нерівність, можна вважати, що $a \ge b \ge c$. Розглянемо очевидну нерівність $a^{a-b}a^{a-c}b^{b-c} \ge b^{a-b}c^{a-c}c^{b-c}$, або $a^{2a-b-c}b^{b-c} \ge b^{a-b}c^{a+b-2c}$. Домножимо обидві частини нерівності на $a^{a+b+c}b^{2b+c}c^{3c}$: $a^{3a}b^{3b}c^{3c} \ge a^{a+b+c}b^{a+b+c}c^{a+b+c}$, тобто $a^a b^b c^c \ge (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$, що і треба було довести.

7.15 Розглянемо функцію $f(x) = e^x - 1 - \ln(1 + x)$; потрібно довести, що $f(x) \ge 0$. Зауважимо, що $f(0) = 0$. $f'(x) = e^x - \dfrac{1}{1+x}$ і, враховуючи, що $f'(0) = 0$, а також те, що $f'(x) > 0$ при $x > 0$ (бо $e^x > 1$, $\dfrac{1}{1+x} < 1$), $f'(x) < 0$ при $x < 0$ ($e^x < 1$, $\dfrac{1}{1+x} > 1$), бачимо, що в точці $x = 0$ $f(x)$ приймає своє найменше значення, яке дорівнює 0. Отже $f(x) \ge 0$, що і вимагалось.

7.16 Очевидно, досить показати, що $\sin^3 x \cos^{-1} x \ge x^3$ при $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. При $x = 0$ має місце рівність, так що досить показати, що $\left(\sin^3 x \cos^{-1} x\right)' \ge 3x^2$. Але $\left(\sin^3 x \cos^{-1} x\right)' =$
$= 3\sin^2 x + \sin^4 x \cos^{-2} x = 3\sin^2 x + \left(1 - \cos^2 x\right)^2 \cos^{-2} x =$
$= 3\sin^2 x + \cos^{-2} x - 2 + \cos^2 x = 2\sin^2 x + \cos^{-2} x - 1$, і при

$x=0$ знову маємо рівність. Диференціюючи далі аналогічним чином до тих пір, поки в правій частині не з'явиться 0, одержимо нерівність

$$-8\sin 2x - 8\sin x\cos^{-2} x + 24\sin x\cos^{-5} x \geq 0 .$$

Скорочуючи на $\sin x$, одержуємо

$24\cos^{-5} x - 8\cos^{-3} x - 16\cos x \geq 0$, що очевидно, вірно, оскільки $\cos^{-5} x > \cos^{-3} x > \cos x$ на розглядуваному проміжку.

7.17 Покладемо $a_{n+1} = 1 - a_1 - a_2 - \ldots - a_n$. Тоді $a_{n+1} > 0$ і нерівність, яку потрібно довести, приймає вид:

$$\frac{(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_n)(1-a_{n+1})}{a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1}} \geq n^{n+1} .$$

Застосовуючи нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним, одержимо для кожного $i = 1, 2, \ldots, n, n+1$:

$$1 - a_i = a_1 + \ldots + a_{i-1} + a_{i+1} + \ldots + a_{n+1} \geq n\sqrt[n]{a_1 \ldots a_{i-1} a_{i+1} \ldots a_{n+1}} .$$

Перемноживши ці нерівності, одержимо

$$(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_n)(1-a_{n+1}) \geq n^{n+1} a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1} ,$$

що еквівалентно тому, що доводиться.

7.18 Нехай $h(x) = x\ln x + (1-x)\ln(1-x)$,

$g(x) = x^2 + (1-x)^2$. $g'(x) = 2(2x-1)$. Якщо $0 \leq x,\ y \leq 1/2$, то із нерівності $g(x) < g(y)$ випливає, що $x > y$, звідки слідує $h(x) < h(y)$, оскільки $h'(x) = 1 + \ln x - 1 - \ln(1-x) = \ln\dfrac{x}{1-x} < 0$, бо $\dfrac{x}{1-x} < 1$ при $0 < x < \dfrac{1}{2}$.

7.19 Запишемо нерівність в еквівалентній формі: $tgx > x + \dfrac{x^3}{3}$ і розглянемо функцію $f(x) = tgx - x - \dfrac{x^3}{3}$; треба, очевидно, довести, що $f(x) > 0$, $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Маємо:

$f(0)=0$, $f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}-1-x^2$; видно, що $f'(0)=0$, отже досить показати, що $f'(x)>0$ при $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Як відомо, при $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ $tgx>x$. Звідси $tg^2 x>x^2$, або $\sin^2 x>x^2\cos^2 x$, $1-\cos^2 x>x^2\cos^2 x$ і, поділивши на $\cos^2 x$, отримуємо $\dfrac{1}{\cos^2 x}-1-x^2>0$, тобто $f'(x)>0$, що і вимагалось.

7.20 а) Запишемо нерівність в еквівалентній формі: $e^{y-y_0}\ge 1+y-y_0$ і розглянемо функцію $f(y)=e^{y-y_0}-1-y+y_0$ при фіксованому y_0. Доведемо, що $f(y)\ge 0$ для будь-якого y. Зауважимо, що $f(y_0)=0$; $f'(y)=e^{y-y_0}-1$ і $f'(y_0)=0$. Видно, що $f'(y)<0$ при $y<y_0$ і $f'(y)>0$ при $y>y_0$, отже, при $y=y_0$ функція $f(y)$ приймає своє найменше значення, яке рівне 0, тому $f(y)\ge 0$ при будь-якому y.

б) Покладемо в попередній нерівності $y=f(x)$, $y_0=\int\limits_0^1 f(x)dx$, одержимо: $e^{f(x)}\ge e^{\int_0^1 f(x)dx}\left(1+f(x)-\int\limits_0^1 f(x)dx\right)$.

Проінтегруємо цю нерівність в межах від 0 до 1 (врахуємо, що $\int\limits_0^1 f(x)dx=const$):

$$\int\limits_0^1 e^{f(x)}dx\ge e^{\int_0^1 f(x)dx}\left(\int\limits_0^1 dx+\int\limits_0^1 f(x)dx-\int\limits_0^1 f(x)dx\cdot\int\limits_0^1 dx\right),$$

або $\int\limits_0^1 e^{f(x)}dx\ge e^{\int_0^1 f(x)dx}$, що і потрібно було довести.

7.21 Маємо:

$$\frac{1}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{2n-1}{(n+2)!}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(n+2)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(n+2)-5}{(n+2)!}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{(n+1)!}-\frac{5}{(n+2)!}\right)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}-5\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)!}=$$

$$=2\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{(n+1)!}+\ldots\right)-5\left(\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots+\frac{1}{(n+2)!}+\ldots\right)=$$

$$=2(e-2)-5\left(e-\frac{5}{2}\right)=\frac{17}{2}-3e<8{,}5-3\cdot 2{,}7=0{,}4<\frac{1}{2},$$

що і вимагалось.

7.22 Згідно з нерівністю Коші

$$\frac{2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{y}}{5}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y}}{5}\geq\sqrt[5]{\left(\sqrt{x}\right)^2\left(\sqrt[3]{y}\right)^3}=\sqrt[5]{xy},$$

тобто, $2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{y}\geq 5\sqrt[5]{xy}$. Нерівність доведено.

7.23 Для доведення розглянемо функцію $f(x)=\dfrac{\ln x}{x},\ x>0$. $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$; рівняння $f'(x)=0$ має єдиний корінь $x=e$, причому $f'(x)>0$ при $x\in(0,\,e)$ і $f'(x)<0$ при $x\in(e,\,+\infty)$. Таким чином, при $x=e$ функція приймає своє найбільше значення, тобто $f(x)\leq f(e)$ при всіх $x>0$, причому рівність досягається тільки при $x=e$. Отже, $\dfrac{\ln x}{x}\leq\dfrac{\ln e}{e}\Leftrightarrow e\ln x\leq x\ln e\Leftrightarrow \ln x^e\leq\ln e^x\Leftrightarrow x^e\leq e^x$, що і вимагалось. До речі, розглянувши ту ж функцію, легко одержати, що при будь-якому натуральному $n\geq 3$ $\sqrt[n+1]{n+1}<\sqrt[n]{n}$.

7.24 Нехай спочатку $m=n$. Доведемо, що $\sqrt[n]{n}\leq\sqrt[3]{3}$ для будь-якого натурального n; при $n=1,\,2$ нерівність легко перевіряється. Як доведено в задачі 7.23, функція

$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ при $x>e$ спадає. Таким чином, якщо $n\ge 3$, то $\dfrac{\ln n}{n}\le\dfrac{\ln 3}{3}$, звідси $\ln n^{\frac{1}{n}}\le\ln 3^{\frac{1}{3}}$, тобто $\sqrt[n]{n}\le\sqrt[3]{3}$.

Якщо $m<n$, то розглянемо функцію $g(x)=x\ln x,\ x>0$. $g'(x)=1+\ln x$ і $g'(x)>0$ при $x>e^{-1}$. Отже, на цьому проміжку $g(x)$ зростає, тому $m\ln m<n\ln n$. Звідси $\dfrac{\ln m}{n}<\dfrac{\ln n}{m}$, тобто $\sqrt[n]{m}<\sqrt[m]{n}$, отже $\min\left\{\sqrt[n]{m},\ \sqrt[m]{n}\right\}=\sqrt[n]{m}$. Але $\sqrt[n]{m}<\sqrt[n]{n}$, а за доведеним вище $\sqrt[n]{n}\le\sqrt[3]{3}$, що і завершує доведення.

7.25 Нерівність очевидним чином виконується, якщо $x=y$, чи одне з чисел x або y дорівнює нулю, а також при $\lambda=0$ і $\lambda=1$. Поділивши нерівність на праву частину, запишемо її в еквівалентній формі:

$$\lambda\left(\frac{x}{y}\right)^{1-\lambda}+(1-\lambda)\left(\frac{y}{x}\right)^{\lambda}\ge 1.$$

Позначимо $\dfrac{x}{y}=a$ і розглянемо функцію

$$f(a)=\lambda a^{1-\lambda}+(1-\lambda)a^{-\lambda}.$$

Дослідимо цю функцію при $a>0$: $f'(a)=\lambda(1-\lambda)a^{-\lambda}-\lambda(1-\lambda)a^{-\lambda-1}$,

або $f'(a)=\lambda(1-\lambda)a^{-\lambda}\left(1-a^{-1}\right)$.

Рівняння $f'(a)=0$ має єдиний корінь $a=1$, причому $f'(a)<0$ при $a\in(0,1)$ і $f'(a)>0$ при $a\in(1,+\infty)$, отже, в точці $a=1$ функція приймає своє найменше значення, яке дорівнює: $f(1)=1$. Таким чином, $f(a)\ge 1$ при всякому $a>0$, що і потрібно було довести.

7.26 а) Перетворимо кожний множник добутку:

$$1+\frac{1}{k^2+2k}=\frac{k^2+2k+1}{k^2+2k}=\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}.$$

Тоді

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\left(1+\frac{1}{15}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)=\frac{2^2}{1\cdot 3}\frac{3^2}{2\cdot 4}\frac{4^2}{3\cdot 5}\ldots\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}=$$

$$=\frac{2(n+1)}{n+2}<\frac{2(n+2)}{n+2}=2\,.$$

б) Очевидно

$$1+\frac{2}{k^2+3k}=\frac{k^2+3k+2}{k^2+3k}=\frac{(k+1)(k+2)}{k(k+3)}\,.$$

Таким чином,

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{9}\right)\ldots\left(1+\frac{2}{n^2+3n}\right)=\frac{2\cdot 3}{1\cdot 4}\frac{3\cdot 4}{2\cdot 5}\frac{4\cdot 5}{3\cdot 6}\ldots\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}=$$

$$=\frac{3(n+1)}{n+3}<\frac{3(n+3)}{n+3}=3\,.$$

7.27 Задана нерівність $\forall x\in\left(0,\,\frac{\pi}{2}\right)$ рівносильна нерівності $2x\cos x<\sin x+\cos x\cdot\sin x$ або нерівності

$$tgx+\sin x-2x>0\,.$$

Нехай $f(x)=tgx+\sin x-2x$. Тоді

$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}+\cos x-2>\frac{1}{\cos^2 x}+\cos^2 x-2>0$, бо

$\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}>2$. Отже функція $f(x)=tgx+\sin x-2x$ визначена, неперервна і зростає на проміжку $\left[0,\,\frac{\pi}{2}\right)$. Звідси $f(x)>f(0)=0$, тобто $tgx+\sin x-2x>0$, або

$\frac{2\cos x}{1+\cos x}<\frac{\sin x}{x}\quad\forall x\in\left(0,\,\frac{\pi}{2}\right)$, що й треба було довести.

7.28 Нехай $\frac{b}{a}=x$, $\frac{c}{a}=y$, тоді $b=ax$, $c=ay$ і нерівність набуває виду

$$\frac{1}{x+y}+\frac{x}{1+y}+\frac{y}{1+x}\geq\frac{3}{2},$$

де $x>0$, $y>0$. Для доведення дослідимо на екстремум функцію

$$f(x,\ y)=\frac{1}{x+y}+\frac{x}{1+y}+\frac{y}{1+x}, \quad x>0,\ y>0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{1+y}-\frac{y}{(1+x)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{1}{(x+y)^2}-\frac{x}{(1+y)^2}+\frac{1}{1+x}$$

і для знаходження координат стаціонарної точки одержуємо систему:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{1+y}=\dfrac{1}{(x+y)^2}+\dfrac{y}{(1+x)^2},\\[2ex] \dfrac{1}{1+x}=\dfrac{1}{(x+y)^2}+\dfrac{x}{(1+y)^2}.\end{cases}$$

Почленно віднявши ці рівняння, приходимо до рівності

$$\frac{1}{1+y}+\frac{x}{(1+y)^2}=\frac{1}{1+x}+\frac{y}{(1+x)^2}, \text{ або } \frac{1+y+x}{(1+y)^2}=\frac{1+x+y}{(1+x)^2}.$$

Враховуючи, що $1+x+y\neq 0$, отримуємо $(1+y)^2=(1+x)^2$, тобто $y=x$ і відносно x маємо рівняння

$$\frac{1}{1+x}=\frac{1}{4x^2}+\frac{x}{(1+x)^2}, \quad \text{або} \quad \frac{1}{1+x}-\frac{x}{(1+x)^2}=\frac{1}{4x^2}, \quad \text{звідси}$$

$\dfrac{1}{(1+x)^2}=\dfrac{1}{4x^2}$, тобто $1+x=2x$. Таким чином, $x=1$, тоді $y=1$ і $M(1,\ 1)$ – єдина стаціонарна точка функції $f(x,\ y)$, причому $f(1,\ 1)=3/2$. Застосувавши достатні умови екстремуму, неважко переконатись, що M – точка мінімуму, а оскільки це єдина стаціонарна точка в розглядуваній області, то в ній функція приймає своє найменше значення. Отже, при $x>0$, $y>0$ $f(x,\ y)\geq f(1,\ 1)=3/2$, що і вимагалось.

7.29 Очевидно $n! < (n+1)^n$. Звідси $(n!)^n \cdot n! < (n!)^n (n+1)^n$, тобто $(n!)^{n+1} < ((n+1)!)^n$. Добувши корінь степеня $n(n+1)$ з обох частин цієї нерівності, одержуємо $\sqrt[n]{n!} < \sqrt[n+1]{(n+1)!}$.

7.30 Розглянемо функцію $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}$, $x > 1$.

$$f'(x) = \frac{\dfrac{\ln x}{x+1} - \dfrac{\ln(x+1)}{x}}{\ln^2 x} = \frac{x \ln x - (x+1)\ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2 x} < 0, \quad \forall x > 1 .$$

Отже, функція $f(x)$ спадає на проміжку $(1, +\infty)$, тому при $n > 2$ $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n} < \dfrac{\ln n}{\ln(n-1)}$, що можна записати і так:

$$\log_n (n+1) < \log_{n-1} n .$$

7.31 Легко довести, що функції $f(x) = \dfrac{\ln x}{x-1}$ і $g(x) = \dfrac{\ln x}{x+1}$ спадні при $x > e^2$. Тому при $n > e^2$ маємо

$$\frac{\ln n}{n-1} > \frac{\ln(n+1)}{n} \Rightarrow n^n > (n+1)^{n-1}, \quad \frac{\ln n}{n+1} < \frac{\ln(n-1)}{n} \Rightarrow n^n < (n-1)^{n+1} .$$

Отже, $(n+1)^{n-1} < n^n < (n-1)^{n+1}$, тобто,

$$2014^{2012} < 2013^{2013} < 2012^{2014} .$$

7.32 Використаємо очевидну нерівність $\ln\left(1 + \dfrac{1}{k}\right) < \dfrac{1}{k}$.

Тоді $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$; але

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln \frac{k+1}{k} = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln k) = \ln(n+1).$$

Отже, $\ln(n+1) < \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, або $\ln(n+1) < m$. Тобто, $n + 1 < e^m$.

7.33 Розглянемо функцію $f(x) = \sqrt[k]{x}$. При $x > 0$

$f''(x)=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)x^{\frac{1}{k}-2}<0$, що означає, що графік функції опуклий. Отже, для будь-яких додатних x_1, x_2 $\frac{1}{2}\left(f(x_1)+f(x_2)\right)<f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$. Підставивши сюди $x_1=n-1,\ x_2=n+1$, маємо $\sqrt[k]{n-1}+\sqrt[k]{n+1}<2\sqrt[k]{n}$.

7.34 Доведемо, що для будь-якого натурального $n>2$ справедлива нерівність $(n!)^2>n^n$. Дійсно, маємо

$n!\cdot n!=(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n)(n(n-1)\cdot\ldots\cdot 1)=(1\cdot n)(2(n-1))\cdot\ldots\cdot(n\cdot 1)>n^n$,

оскільки $1\cdot n=n\cdot 1=n$ і $k(n-k+1)=(n-k)(k-1)+n>n$ при $k=2,\ldots,n-1$. Отже, $(n!)^2>n^n$, тобто

$$(2013!)^2>2013^{2013}.$$

7.35 Поділимо кожне з даних чисел на число $2012^{2012}\cdot 2013^{2013}$ і порівняємо одержані числа $\left(\frac{2014}{2013}\right)^{2013}$ і $\left(\frac{2013}{2012}\right)^{2012}$. Подамо ці числа у виді: $\left(\frac{2014}{2013}\right)^{2013}=\left(1+\frac{1}{2013}\right)^{2013}$, $\left(\frac{2013}{2012}\right)^{2012}=\left(1+\frac{1}{2012}\right)^{2012}$. В задачі 7.10 доведено, що послідовність $\{x_n\}$ де $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ зростаюча, тому $\left(1+\frac{1}{2013}\right)^{2013}>\left(1+\frac{1}{2012}\right)^{2012}$, а це означає, що

$$2014^{2013}\cdot 2012^{2012}>2013^{2013}\cdot 2013^{2012}.$$

7.36 Методом математичної індукції доведемо, що $n^{3n}<(3n)!$. При $n=1,2,3$ нерівність має місце. Нехай $k^{3k}<(3k)!$, доведемо, що $(k+1)^{3(k+1)}<(3(k+1))!$. Ліву частину нерівності подамо у виді:

$$\frac{(k+1)^{3(k+1)}k^{3k}}{k^{3k}}=\frac{(k+1)^{3k}(k+1)^3k^{3k}}{k^{3k}}=\left(\frac{k+1}{k}\right)^{3k}(k+1)^3k^{3k}.$$

Оскільки $\left(\frac{k+1}{k}\right)^k=\left(1+\frac{1}{k}\right)^k<e$, то $\left(\frac{k+1}{k}\right)^{3k}<e^3<21$.

Тому, за принципом математичної індукції

$$(k+1)^{3(k+1)}<21(k+1)^3k^{3k}<21(k+1)^3(3k)!.$$

Але $21(k+1)^3<(3k+1)(3k+2)(3k+3)$ при $k>3$, що досить просто перевірити. Отже,

$(k+1)^{3(k+1)}<(3k+1)(3k+2)(3k+3)(3k)!=(3(k+1))!$, що і потрібно було довести. Таким чином, $100^{300}<300!$

7.37 Легко встановити, що $\sum\limits_{n=1}^{36}\frac{1}{\sqrt{n}}<1+\int\limits_1^{36}\frac{dx}{\sqrt{x}}=11$ і

$\sum\limits_{n=1}^{27}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}>\int\limits_1^{27}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{3}=12\frac{1}{3}$, тому $\sum\limits_{n=1}^{36}\frac{1}{\sqrt{n}}<\sum\limits_{n=1}^{27}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

7.38 Нехай $1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{125}}=A$. Неважко переконатись, що $A-1<\int\limits_1^{125}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}<A-\frac{1}{5}$. Але $\int\limits_1^{125}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=36$, отже, $A-1<36<A-\frac{1}{5}$, тобто $36\frac{1}{5}<A<37$, що означає, що $[A]=36$.

7.39 Як і в попередній задачі, легко одержати нерівність $x-1<\int\limits_1^{1000000}\frac{dx}{\sqrt{x}}<x-\frac{1}{1000}$. Звідси, враховуючи, що $\int\limits_1^{1000000}\frac{dx}{\sqrt{x}}=1998$, одержуємо $1998{,}001<x<1999$. Таким чином, $[x]=1998$.

7.40 Очевидно (див. задачу 7.10) $2 < \left(1 + \dfrac{1}{1000}\right)^{1000} < e$, звідси $\dfrac{1}{e} < \left(1 + \dfrac{1}{1000}\right)^{-1000} < \dfrac{1}{2}$, або $1 - \dfrac{1}{2} < 1 - 1{,}001^{-1000} < 1 - \dfrac{1}{e}$, тобто $3 < 6\left(1 - 1{,}001^{-1000}\right) < \dfrac{6(e-1)}{e}$. Легко встановити, що $\dfrac{6(e-1)}{e} < 4$; отже $3 < 6\left(1 - 1{,}001^{-1000}\right) < 4$.

7.41 Розглянемо рівняння: $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2} + \ldots + \dfrac{1}{x-n} = 0$; доведемо, що воно має рівно $n-1$ різних дійсних коренів і знайдемо суму цих коренів. Нехай $f(x) = (x-1)(x-2)\ldots(x-n)$, тоді рівняння може бути записане у виді: $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = 0$, або $f'(x) = 0$, де

$$f'(x) = (x-2)(x-3)\ldots(x-n) + (x-1)(x-3)\ldots(x-n) + \ldots + \\ + (x-1)(x-2)\ldots(x-n+1).$$

Оскільки $f(x)$ має n різних дійсних коренів: $1, 2, \ldots, n$, то за теоремою Ролля $f'(x)$ має $n-1$ різних дійсних коренів $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, причому $i < x_i < i+1$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Більше як $n-1$ коренів $f'(x)$ мати не може, бо це многочлен степеня $n-1$. Якщо у виразі для $f'(x)$ розкрити дужки і звести подібні, одержимо

$$f'(x) = nx^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Знайдемо коефіцієнт a_{n-2}:

$$a_{n-2} = -\left((2+3+\ldots+n) + (1+3+\ldots+n) + \ldots + (1+2+\ldots+(n-1))\right) =$$

$$= -\left(n(1+2+\ldots+n) - (1+2+\ldots+n)\right) = -(n-1)\frac{n(n+1)}{2} = -\frac{n(n^2-1)}{2}.$$

Тоді, за теоремою Вієта, сума коренів рівняння $f'(x) = 0$ дорівнює:

$$x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}=-\frac{a_{n-2}}{n}=\frac{n\left(n^2-1\right)}{2n}=\frac{n^2-1}{2}.$$

Застосувавши метод інтервалів, неважко показати, що областю розв'язків вихідної системи нерівностей є об'єднання інтервалів: $\left(x_1\,,\,2\right)\cup\left(x_2\,,\,3\right)\cup\ldots\cup\left(x_{n-1}\,,\,n\right)$. Сума довжин l цих інтервалів дорівнює:

$$l=\left(2-x_1\right)+\left(3-x_2\right)+\ldots+\left(n-x_{n-1}\right)=2+3+\ldots+n-\sum_{i=1}^{n-1}x_i=$$

$$=\frac{n\left(n+1\right)}{2}-1-\frac{n^2-1}{2}=\frac{n+1}{2}\left(n-\left(n-1\right)\right)-1=\frac{n+1}{2}-1=\frac{n-1}{2}.$$

7.42 Оскільки

$$\frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n}-\left(x^{2n}+\frac{1}{x^{2n}}\right)-2}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n}+\left(x^{n}+\frac{1}{x^{n}}\right)}=\frac{\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n}\right)^{2}-\left(x^{n}+\frac{1}{x^{n}}\right)^{2}}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n}+\left(x^{n}+\frac{1}{x^{n}}\right)}=$$

$$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n}-\left(x^{n}+\frac{1}{x^{n}}\right),$$

то $f\left(x\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n}-\left(x^{n}+\frac{1}{x^{n}}\right)$, $x>0$, або

$$f\left(x\right)=C_n^1x^{n-2}+C_n^2x^{n-4}+\ldots+C_n^{n-1}x^{2-n}.$$

Оскільки $C_n^k=C_n^{n-k}$, $n,k\in\mathrm{N}$, $0\le k\le n$, то

$$f\left(x\right)=C_n^1\left(x^{n-2}+\frac{1}{x^{n-2}}\right)+C_n^2\left(x^{n-4}+\frac{1}{x^{n-4}}\right)+\ldots+C_n^{\frac{n-1}{2}}\left(x+\frac{1}{x}\right),$$

якщо n – непарне, й

$$f\left(x\right)=C_n^1\left(x^{n-2}+\frac{1}{x^{n-2}}\right)+C_n^2\left(x^{n-4}+\frac{1}{x^{n-4}}\right)+\ldots+C_n^{\frac{n}{2}-1}\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+C_n^{\frac{n}{2}},$$

якщо n – парне.

Функція $g(x)=x^k+\frac{1}{x^k},\ x>0,\ \forall k\in\mathrm{N}$ набуває найменше значення 2 при $x=1$. Тому й функція $f(x)$ набуває найменше значення при $x=1$, яке дорівнює

$$f_{\min}=\left(1+\frac{1}{1}\right)^n-\left(1^n+\frac{1}{1^n}\right)=2^n-2.$$

7.43 Розглянемо функцію $f(x)=\sin^{99}x$, $f'(x)=99\sin^{98}x\cdot\cos x$,

$f''(x)=99\sin^{97}x\left(98\cos^2x-\sin^2x\right)=99\sin^{97}x\left(98-99\sin^2x\right)$.

Очевидно, на інтервалі $\left(0,\ \arcsin\left(\sqrt{98/99}\right)\right)$ $f'(x)>0$ і $f''(x)>0$, що означає, зокрема, що $f'(x)$ – строго зростаюча функція.

Застосувавши формулу скінченних приростів Лагранжа, одержуємо:

$\sin^{99}2^0-\sin^{99}1^0=f\left(\frac{\pi}{90}\right)-f\left(\frac{\pi}{180}\right)=f'\left(\frac{\pi}{180}+\theta_1\frac{\pi}{180}\right)\cdot\frac{\pi}{180}$,

$0<\theta_1<1$,

$\sin^{99}4^0-\sin^{99}3^0=f\left(\frac{\pi}{45}\right)-f\left(\frac{\pi}{60}\right)=f'\left(\frac{\pi}{60}+\theta_2\frac{\pi}{180}\right)\cdot\frac{\pi}{180}$,

$0<\theta_2<1$.

Оскільки $\frac{\pi}{180}+\theta_1\frac{\pi}{180}<\frac{\pi}{60}+\theta_2\frac{\pi}{180}$, то $\sin^{99}2^0-\sin^{99}1^0<$ $<\sin^{99}4^0-\sin^{99}3^0$. Звідси

$$\sin^{99}3^0-\sin^{99}1^0<\sin^{99}4^0-\sin^{99}2^0.$$

7.44 Очевидно

$$\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6}}}}<$$

$$<\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6+\sqrt{9}}}}+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{8}}}}=3+2=5.$$

7.45 Виконаємо наступні перетворення:

$$x^{10}+x^2+1-3x^4=\left(x^2-1\right)x^8+\left(x^2-1\right)x^6+\left(x^2-1\right)x^4-\left(x^2-1\right)\cdot 2x^2-$$
$$-\left(x^2-1\right)=\left(x^2-1\right)\left(x^8+x^6+x^4-2x^2-1\right)=$$
$$=\left(x^2-1\right)\left(\left(x^2-1\right)x^6+\left(x^2-1\right)\cdot 2x^4+\left(x^2-1\right)\cdot 3x^2+\left(x^2-1\right)\right)=$$
$$=\left(x^2-1\right)^2\left(x^6+2x^4+3x^2+1\right).$$

Одержаний вираз не може бути від'ємним, що доводить нерівність. Очевидно, що знак рівності буде тільки у випадку, коли $x=\pm 1$.

7.46 Перетворимо вираз:

$$f(x)=\left(x+1\right)\left(x+2\right)\left(x+3\right)\left(x+4\right)=$$
$$=\left(x+1\right)\left(x+4\right)\left(x+2\right)\left(x+3\right)=\left(x^2+5x+4\right)\left(x^2+5x+6\right)=$$
$$=\left(x^2+5x+5-1\right)\left(x^2+5x+5+1\right)=\left(x^2+5x+5\right)^2-1$$

Очевидно, що значення функції буде найменшим, коли найменшим буде перший доданок, тобто при тих значеннях x, які є коренями рівняння $x^2+5x+5=0$, тобто при $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$. Отже, $f_{\min}=f\left(\dfrac{-5\pm\sqrt{5}}{2}\right)=-1$.

7.47 Нехай

$f\left(x\right)=(x-6)(x-9)(x^2-5x+4)+x^2+73-10x$. Неважко бачити, що

$$f\left(x\right)=\left(x-6\right)\left(x-9\right)\left(x-1\right)\left(x-4\right)+x^2+73-10x=$$
$$=\left(x-9\right)\left(x-1\right)\left(x-6\right)\left(x-4\right)+x^2-10x+73=$$
$$=\left(x^2-10x+9\right)\left(x^2-10x+24\right)+x^2-10x+73.$$

Позначимо $t=x^2-10x+9$, тоді

$f\left(x\right)=t\left(t+15\right)+t+64=\left(t+8\right)^2\geq 0$, що і доводить задану нерівність.

7.48 Маємо

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2013^3}\right)=$$

$$=\frac{\left(2^2-1\right)\left(3^2-1\right)\left(4^2-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(2013^2-1\right)}{2^2\cdot 3^2\cdot 4^2\cdot\ldots\cdot 2013^2}=$$

$$=\frac{(2-1)(2+1)(3-1)(3+1)(4-1)(4+1)\cdot\ldots\cdot(2013-1)(2013+1)}{2^2\cdot 3^2\cdot 4^2\cdot\ldots\cdot 2013^2}=$$

$$=\frac{1\cdot 3\cdot 2\cdot 4\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot 2011\cdot 2013\cdot 2012\cdot 2014}{2^2\cdot 3^2\cdot 4^2\cdot\ldots\cdot 2012^2\cdot 2013^2}=$$

$$=\frac{1\cdot 2\cdot 3^2\cdot 4^2\cdot 5^2\cdot\ldots\cdot 2012^2\cdot 2013\cdot 2014}{2^2\cdot 3^2\cdot 4^2\cdot\ldots\cdot 2012^2\cdot 2013^2}=\frac{2014}{2\cdot 2013}>\frac{1}{2}.$$

7.49 Очевидно, що $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}<\frac{4}{5}$, … , $\frac{99}{100}<\frac{100}{101}$. Тому

$$a^2<\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{100}{101}\right)=\frac{1}{101}<\frac{1}{100}.$$

Тобто, $a<\frac{1}{10}$.

7.50 Доведемо, що для будь-якого натурального k $2^{k-1}\ge k$. Зауважимо, що при $k=1,\,2$ нерівність виконана. Розглянемо функцію $f(x)=\frac{2^{x-1}}{x}$,

$f'(x)=\frac{x\cdot 2^{x-1}\ln 2-2^{x-1}}{x^2}=\frac{2^{x-1}}{x^2}(x\ln 2-1)$. Звідси видно, що $f'(x)>0$ при $x>\frac{1}{\ln 2}\approx 1{,}44$, тобто в даній області функція $f(x)$ зростає. Таким чином, при $x\ge 2$ маємо $f(x)\ge f(2)=1$. Отже, при будь-якому натуральному k $\frac{2^{k-1}}{k}\ge 1$, тобто $2^{k-1}\ge k$. Тоді для натуральних m і n маємо: $2^{m-1}\ge m$, $2^{n-1}\ge n$. Перемноживши почленно ці нерівності, отримуємо $2^{m+n-2}\ge mn$, що і вимагалось.

7.51 Запишемо задане в умові співвідношення у еквівалентному виді $\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{a^2}\ge 2013$ та, використовуючи двічі нерівність $\frac{x^2}{y}\ge 2x-y$ (цю нерівність легко довести: при $x>0$, $y>0$ маємо: $(x-y)^2\ge 0 \Leftrightarrow x^2\ge 2xy-y^2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{x^2}{y}\ge 2x-y$), перетворимо його ліву частину. Маємо:

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{a^2}\ge \frac{a}{b}(2a-b)+\frac{b}{a}(2b-a)=2\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\right)-(a+b)\ge$$

$$\ge 2(2a-b+2b-a)-(a+b)=a+b=2013,$$

що і потрібно було довести.

7.52 При $n=2$ отримуємо вірну числову нерівність $4>1+2\sqrt{2}$. Застосуємо метод математичної індукції. Нехай виконується нерівність $2^k>1+k\sqrt{2^{k-1}}$. Покажемо, що звідси випливає вірність співвідношення $2^{k+1}>1+(k+1)\sqrt{2^k}$. Маємо: $2^{k+1}-1-(k+1)\sqrt{2^k}>$

$$>2\cdot\left(1+k\sqrt{2^{k-1}}\right)-1-(k+1)\sqrt{2^k}=1+\sqrt{2^k}\left(k(\sqrt{2}-1)-1\right).$$

Одержаний вираз додатний при $k\ge 3$. Таким чином, із припущення, що нерівність вірна при $n=k$ випливає, що вона вірна при $n=k+1$. Згідно з принципом математичної індукції нерівність виконується при довільному натуральному $n\ge 2$.

7.53 Нехай $\arcsin x=\alpha$, $\arccos x=\beta$. Оскільки $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$, то

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=\frac{\pi^3}{8}-\frac{3\pi}{2}\alpha\beta=y.$$

Значення функції буде найменшим, коли найбільшим буде значення добутку $\alpha\beta$. Оскільки $\beta\ge 0$, то найбільше значення $\alpha\beta$ потрібно шукати при $\alpha > 0$. Із нерівності Коші маємо $\alpha \cdot \beta \le \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$. Але $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{16}$, тому $\alpha \cdot \beta \le \frac{\pi^2}{16}$.

Найбільше значення $\alpha \cdot \beta$ прийматиме при $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$. Тоді: $\arcsin x = \frac{\pi}{4}$; $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ і найменше значення функції буде $y_{\min} = \frac{\pi^3}{8} - \frac{3\pi}{2}\alpha\beta = \frac{\pi^3}{8} - \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^3}{32}$.

Найменше значення $\alpha\beta$, очевидно, буде при $\alpha < 0$. При $x = -1$ маємо $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, $\beta = \pi$. Враховуючи ці значення, бачимо, що добуток буде мінімальним, оскільки α приймає мінімальне значення, а β – максимальне. Отже, при $x = -1$ функція приймає найбільше значення

$$y_{\max} = \frac{\pi^3}{8} - \frac{3\pi}{2} \cdot \pi \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{7\pi^3}{8}.$$

Таким чином, найбільшим значенням буде $\frac{7\pi^3}{8}$, а найменшим $\frac{\pi^3}{32}$.

8.1 а) Загальний член прогресії має вид $a_k = 4k - 1$. Припустимо, що серед членів прогресії є тільки скінченна кількість простих чисел: $3, 7, 11, 19, 23, \ldots, p_n$. Складемо число

$$N = 4(3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 23 \cdot \ldots \cdot p_n) - 1.$$

Воно є членом прогресії і більше всіх простих чисел, які їй належать, а тому повинно бути складеним. Серед простих дільників числа N не може бути чисел виду $4k - 1$, оскільки число $N + 1 = 4(3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot p_n)$ ділиться на всі прості числа виду $4k - 1$, а тому N взаємно просте з усіма цими числами. Оскільки N непарне, то воно повинно дорівнювати добутку простих чисел виду $4k+1$. Але це неможливо, тому, що добуток двох чисел виду $4k+1$ має той же вид:

$$(4k_1+1)(4k_2+1)=4(4k_1k_2+k_1+k_2)+1=4k_3+1,$$

а, значить, і добуток будь-якої кількості чисел такого виду теж має вид $4k+1$, в той же час число N має вид $4k-1$.

б) Аналогічно доводиться, що існує нескінченно багато простих чисел виду $6k-1$: припустимо, що таких чисел є скінченна кількість: $5, 11, 17, 23, 29, \ldots, p_n$. Розглянемо число

$$N=6(5\cdot 11\cdot 17\cdot 23\cdot 29\cdot\ldots\cdot p_n)-1.$$

Зрозуміло, що воно взаємно просте з усіма простими числами виду $6k-1$. Отже, в розкладі числа N на прості множники може зустрітись тільки 3 і прості числа виду $6k+1$. Але легко перевірити, що добуток будь-якої кількості чисел такого виду ніколи не дасть число виду $6k-1$.

8.2 Нехай a_n – загальний член прогресії, $d>0$ – її різниця. Як відомо, $a_{n+m}=a_n+md$. Зрозуміло, що знайдеться член прогресії $a_n>1$, тоді покладемо $m=a_n$ і одержимо $a_{n+m}=a_n+a_nd=a_n(1+d)$ – складене число, що і потрібно було довести.

8.3 Припустимо, що $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$ існує. Тоді $\sin(n+2)-\sin n\to 0$ при $n\to\infty$, але $\sin(n+2)-\sin n=2\sin 1\cos(n+1)$, звідки $\cos n\to 0$. Отже $\sin 2n=2\sin n\cos n\to 0$. Це означає, що $\sin n\to 0$ при $n\to\infty$. Таким чином, $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n=0$ і $\lim\limits_{n\to\infty}\cos n=0$, що неможливо, бо $\sin^2 n+\cos^2 n=1$.

Аналогічно доводиться, що не існує $\lim\limits_{n\to\infty}\cos n$.

8.4 Припустимо, що послідовність обмежена: існує $M=const$ таке, що $|n\sin n|\le M$, тоді $|\sin n|\le\dfrac{M}{n}$, що означає, що $\sin n \to 0$ при $n \to \infty$. Але тоді $|\cos n| \to 1$. Розглянемо

$$\sin n = \sin(n-1+1) = \sin(n-1)\cos 1 + \cos(n-1)\sin 1.$$

При $n \to \infty$ $\sin(n-1)\cos 1 \to 0$, а $|\cos(n-1)\sin 1| \to \sin 1$, тому $|\sin n| \to \sin 1$, що суперечить тому, що $\sin n \to 0$.

8.5 Доведемо твердження індукцією по n. При $n = 1$ маємо $a_1^2 \le a_1 - a_2 < a_1$, звідки $a_1 < 1$. Крім того,

$$a_2 \le a_1 - a_1^2 = \frac{1}{4} - \left(a_1 - \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4} < \frac{1}{2},$$

тобто $a_n < \dfrac{1}{n}$ при $n = 2$. Нехай твердження доведене для деякого n, доведемо його для числа $n+1$. Оскільки функція $f(x) = x - x^2$ зростає на відрізку $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ і $a_n < \dfrac{1}{n}$, то

$$a_{n+1} \le f(a_n) < f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n^2(n+1)} < \frac{1}{n+1},$$

що і потрібно було довести.

8.6 Покладемо $x_k = k!\,y_k$, тоді

$$k!\,y_k = (k-1)\big((k-1)!\,y_{k-1} + (k-2)!\,y_{k-2}\big),$$

звідки легко одержати

$$y_k - y_{k-1} = -\frac{1}{k}(y_{k-1} - y_{k-2}), \quad k \ge 4.$$

Використовуючи цю рівність при $k = 4, 5, \ldots, m$, одержуємо

$$y_m - y_{m-1} = \frac{(-1)^m}{m!}, \quad m \ge 4.$$

Сумуючи ці рівності при $m = 4, 5, \ldots, n$, приходимо до результату

$$x_n = n!\sum_{m=2}^{n} \frac{(-1)^m}{m!}.$$

Зауважимо, що остання рівність справедлива також і при $n = 2, 3$.

8.7 Очевидно

$$1 < \frac{1+2^2+3^3+\ldots+n^n}{n^n} < \frac{n+n^2+n^3+\ldots+n^n}{n^n} = \frac{\frac{n(n^n-1)}{n-1}}{n^n} =$$

$$= \frac{n^n-1}{n^n} \cdot \frac{n}{n-1} < \frac{n}{n-1}.$$

Тому $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2^2+3^3+\ldots+n^n}{n^n} = 1$.

8.8 Очевидно $x_n > 0$ при всіх n, тоді

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \geq \sqrt{x_n \cdot \frac{a}{x_n}} = \sqrt{a}.$$

Отже, $x_n \geq \sqrt{a}$, $n \geq 1$, тобто послідовність обмежена знизу. Далі,

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - x_n = \frac{x_n^2 + a - 2x_n^2}{2x_n} = \frac{a - x_n^2}{2x_n} \leq 0, \; n \geq 1,$$

що означає, що послідовність незростаюча, отже, існує $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$. Щоб знайти c, в рівності, що задає послідовність, перейдемо до границі, одержимо $c = \frac{1}{2}\left(c + \frac{a}{c}\right)$, звідки $c = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$.

8.9 Очевидно, $x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(x_n + x_n + \frac{a}{x_n^2}\right) \geq \sqrt[3]{x_n \cdot x_n \cdot \frac{a}{x_n^2}} = \sqrt[3]{a}$, отже $x_n \geq \sqrt[3]{a}$, $n \geq 2$. Крім того, $x_{n+1} = \frac{2x_n^3 + a}{3x_n^2} \leq \frac{2x_n^3 + x_n^3}{3x_n^3} = x_n$.

Таким чином, послідовність $\{x_n\}$ обмежена знизу і незростаюча, а тому збіжна. Перейшовши до границі в рівності, що визначає послідовність, одержуємо: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt[3]{a}$.

8.10 Зауважимо, що $\dfrac{\ln(n!)}{n\ln n} < 1$. Крім того, розглянувши графік функції $y = \ln x$ і виходячи із геометричного змісту визначеного інтеграла, неважко одержати:

$$\ln(n!) = \ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \ldots + \ln n > \int_1^n \ln x dx = n\ln n - (n-1).$$

Отже, $\dfrac{\ln(n!)}{n\ln n} > \dfrac{n\ln n - (n-1)}{n\ln n} = 1 - \dfrac{n-1}{n\ln n}$. Таким чином, $1 - \dfrac{n-1}{n\ln n} < \dfrac{\ln(n!)}{n\ln n} < 1$. Враховуючи, що $\dfrac{n-1}{n\ln n} \to 0$ при $n \to \infty$, одержуємо: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n!)}{n\ln n} = 1$.

8.11 Перейдемо до неперервної змінної x і застосуємо правило Лопіталя 2012 раз:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{2013} - (x-1)^{2013}}{x^{2012}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2013x^{2012} - 2013(x-1)^{2012}}{2012x^{2011}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2013\cdot 2012x^{2011} - 2013\cdot 2012(x-1)^{2011}}{2012\cdot 2011x^{2010}} = \ldots =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2013\cdot 2012\cdot \ldots \cdot 2(x-(x-1))}{2012!} = 2013.$$

8.12 а) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2 + 3k + 1}{(k+2)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(k+2)(k+1) - 1}{(k+2)!} =$

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+2)!}\right) = \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{3!}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+2)!}\right) =$$

$$= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} - \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!}.$$

Звідси випливає,що $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2 + 3k + 1}{(k+2)!} = 2$.

б) Аналогічно:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3+6k^2+11k+5}{(k+3)!}=\sum_{\text{ё}=1}^{\text{ò}}\frac{(k+1)(k+2)(k+3)-1}{(k+3)!}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+3)!}\right)=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}-\frac{1}{(n+3)!}.$$

Тобто $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^3+6k^2+11k+5}{(k+3)!}=\frac{5}{3}$.

8.13 Очевидно: $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots\sqrt{x}}}}}_{n\ \text{радикалів}}=\sqrt{x\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\sqrt{x\sqrt{x\ldots\sqrt{x}}}}_{n-1\ \text{радикал}}}$,

тобто $\sqrt{x\sqrt{2013}}=\sqrt{2013}$. Звідси легко одержуємо: $x=\sqrt{2013}$.

8.14 Запишемо a_{n+1} у виді $a_{n+1}=\frac{2}{a_n+1/a_n}$. Оскільки $a_n>0$ при всіх n, то $a_n+\frac{1}{a_n}\geq 2$, тому $a_n\leq 1$, $n\geq 2$. З другого боку,

$$a_{n+1}-a_n=\frac{2a_n}{a_n^2+1}-a_n=\frac{2a_n-a_n^3-a_n}{a_n^2+1}=\frac{a_n\left(1-a_n^2\right)}{a_n^2+1}\geq 0,$$

тобто $a_n\leq a_{n+1}$. Отже, послідовність $\{a_n\}$ неспадна і обмежена зверху, а тому збіжна. Для границі x цієї послідовності одержуємо рівняння $x=\frac{2x}{x^2+1}$, звідки $x=1$. Таким чином, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

8.15 а)

$$\frac{7+77+777+\ldots+\overbrace{77\ldots7}^{n-1}}{\underbrace{777\ldots7}_{n}}=\frac{\frac{7}{9}\cdot 9+\frac{7}{9}\cdot 99+\ldots+\frac{7}{9}\cdot\overbrace{99\ldots9}^{n-1}}{\frac{7}{9}\cdot\underbrace{99\ldots9}_{n}}=$$

$$=\frac{9+99+\ldots+\overbrace{99...9}^{n-1}}{\underbrace{99...9}_{n}}=\frac{10-1+10^2-1+\ldots+10^{n-1}-1}{10^n-1}=$$

$$=\frac{10+10^2+\ldots+10^{n-1}-(n-1)}{10^n-1}=\frac{\dfrac{10\left(10^{n-1}-1\right)}{10-1}-(n-1)}{10^n-1}=$$

$$=\frac{10\left(10^{n-1}-1\right)-9(n-1)}{9\left(10^n-1\right)}=\frac{10^n-9n-1}{9\cdot 10^n-9}.$$

Звідси видно, що $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7+77+777+\ldots+\overbrace{77\ldots7}^{n-1}}{\underbrace{777\ldots7}_{n}}=\dfrac{1}{9}$.

б) Аналогічно попередньому одержуємо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3+33+333+\ldots+\overbrace{33\ldots3}^{n-1}}{\underbrace{888\ldots8}_{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{10^n-9n-1}{24\left(10^n-1\right)}=\frac{1}{24}.$$

8.16 Скористаємось нерівністю $\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$, доведеною в задачі 7.4. Замінивши n на $n-1$ в лівій частині цієї нерівності одержимо $\dfrac{1}{n}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)=\ln\dfrac{n}{n-1}$, що разом з правою частиною початкової нерівності приводить до нерівності $\ln\dfrac{n+1}{n}<\dfrac{1}{n}<\ln\dfrac{n}{n-1}$. Отже, можна записати:

$$\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}<\ln\frac{n}{n-1},$$

$$\ln\frac{n+2}{n+1}<\frac{1}{n+1}<\ln\frac{n+1}{n},$$

$$\ln\frac{n+3}{n+2}<\frac{1}{n+2}<\ln\frac{n+2}{n+1},$$

. . . .

$$\ln\frac{2n+1}{2n}<\frac{1}{2n}<\ln\frac{2n}{2n-1}.$$

Додаючи ці нерівності, одержимо:

$$\ln\frac{(n+1)(n+2)\ldots(2n+1)}{n(n+1)\ldots 2n}<\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}<\ln\frac{n(n+1)\ldots 2n}{(n-1)n\ldots(2n-1)},$$

або,

$$\ln\frac{2n+1}{n}<\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}<\ln\frac{2n}{n-1}.$$

Враховуючи, що $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{2n+1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{2n}{n-1}=\ln 2$, одержуємо:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)=\ln 2.$$

8.17 Нехай $x_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}$, $y_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+$ $+\ldots+\frac{1}{2n}$. Тоді $x_{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\left(1+\frac{1}{2}+\right.$ $\left.+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)=\left(1+\frac{1}{2}+\right.$ $\left.+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$, тобто $x_{2n}=y_n-\frac{1}{n}$. В задачі 8.16 доведено, що $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\ln 2$. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(y_n-\frac{1}{n}\right)=\ln 2$. Враховуючи, що $x_{2n+1}=x_{2n}+\frac{1}{2n+1}$, маємо $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_{2n}+\frac{1}{2n+1}\right)=\ln 2$. Таким чином, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\ln 2$.

8.18 Оскільки

$$a_n^2 = \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot \ldots \cdot (2n-1)^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot \ldots \cdot (2n)^2} = \frac{1\cdot 3}{2^2} \cdot \frac{3\cdot 5}{4^2} \cdot \ldots \cdot \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2} \cdot \frac{1}{2n+1} <$$

$$< \frac{1}{2n+1},$$

то при будь-якому $n \in N$ $0 < a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ і $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

8.19 Маємо

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1} = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)} = \frac{1\cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1)}{3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n+1)} \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2+k+1}{k^2-k+1} =$$

$$= \frac{2}{n(n+1)} \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}.$$

Але $(k+1)^2 - (k+1) + 1 = k^2 + k + 1$, так що, скорочуючи однакові співмножники в чисельнику і знаменнику, останній вираз перетворимо до виду

$$\frac{2}{n(n+1)} \cdot \frac{n^2+n+1}{2^2-2+1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{n^2+n+1}{n^2+n},$$ отже,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^3-1}{2^3+1} \cdot \frac{3^3-1}{3^3+1} \cdot \ldots \cdot \frac{n^3-1}{n^3+1} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3} \cdot \frac{n^2+n+1}{n^2+n} = \frac{2}{3}.$$

8.20 Якщо границя A існує, то вона задовольняє співвідношенню $A = 2 + \frac{1}{A}$, звідки $A = 1 + \sqrt{2}$. Позначимо n-й член послідовності $1 + \sqrt{2} + \delta_n$. Тоді із рівності $1 + \sqrt{2} + \delta_{n+1} = 2 + \frac{1}{1 + \sqrt{2} + \delta_n}$ одержуємо $\delta_{n+1} = \frac{\delta_n \left(1 - \sqrt{2}\right)}{1 + \sqrt{2} + \delta_n}$ і при $|\delta_n| < 1$ маємо

$$|\delta_{n+1}| \le |\delta_n| \left| \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right| < \frac{1}{2} |\delta_n|.$$

Але $\delta_1 = 1 - \sqrt{2}$, тобто, $|\delta_1| < \frac{1}{2}$, так що, $|\delta_n| < \frac{1}{2^n}$ і $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$, звідки випливає, що границя A дійсно існує і рівна $1 + \sqrt{2}$.

8.21 Знайдемо кілька перших членів послідовності: $a_1 = \frac{3}{4}$, $a_2 = \frac{3/4 + 3}{4} = \frac{15}{16}$, $a_3 = \frac{15/16 + 3}{4} = \frac{63}{64}$. Доведемо методом математичної індукції, що загальний член послідовності задається формулою: $a_n = \frac{4^n - 1}{4^n}$. При $n = 0, 1, 2, 3$ формула справедлива, нехай вона справджується при $n = k$, тоді при $n = k + 1$ маємо:

$$a_{k+1} = \frac{a_k + 3}{4} = \frac{\frac{4^k - 1}{4^k} + 3}{4} = \frac{4^k - 1 + 3 \cdot 4^k}{4^{k+1}} = \frac{4^{k+1} - 1}{4^{k+1}},$$

що свідчить про те, що формула справедлива при будь-якому натуральному n. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4^n - 1}{4^n} = 1$.

8.22 а) Нехай $a_n = \sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}}$. Зауважимо, що в сумі

$$\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} + \frac{1}{n+1}$$

$(n+1)^2 - n^2 + 1 = 2n + 2$ доданків. Замінивши всі з них на найменший, одержимо $a_n > \frac{2n+2}{n+1} = 2$, а замінивши всі доданки на найбільший, матимемо $a_n < \frac{2n+2}{n} = 2 + \frac{2}{n}$.

Отже $2 < a_n < 2 + \frac{2}{n}$, звідки випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

б) Аналогічно попередньому одержуємо оцінку:

$$\frac{n}{\sqrt{n+n^2}}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+n^2}}<\frac{n}{\sqrt{1+n^2}}.$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n+n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{1+n^2}}=1$, то і

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+n^2}}=1.$$

8.23 Неважко бачити, що послідовність $\{x_n\}$ зростаюча; доведемо, що вона обмежена зверху. Покажемо індукцією по n, що $x_n<\sqrt{c}+1$ для будь-якого n. При $n=1$ нерівність очевидна. Якщо вона виконується при $n=k$, то при $n=k+1$ одержуємо:

$$x_{k+1}=\sqrt{c+x_k}<\sqrt{c+\sqrt{c}+1}<\sqrt{c+2\sqrt{c}+1}=\sqrt{\left(\sqrt{c}+1\right)^2}=\sqrt{c}+1.$$

Отже, послідовність збіжна, нехай її границя рівна a. Для знаходження a в рівності $x_{n+1}^2=c+x_n$ перейдемо до границі при $n\to\infty$ і одержимо $a^2=a+c$. Це рівняння має єдиний додатний корінь $a=\frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$. Таким чином,

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}.$$

8.24 Очевидно, всі члени послідовності додатні. Якщо $x_n=\sqrt{a}$, то $x_{n+1}=\frac{\sqrt{a}(a+3a)}{3a+a}=\sqrt{a}$, отже, якщо $x_1=\sqrt{a}$, то $x_n=\sqrt{a}$ для всіх n, і $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$.

Нехай тепер $x_1\neq\sqrt{a}$. Розглянемо різницю

$$x_{n+1}-\sqrt{a}=\frac{x_n\left(x_n^2+3a\right)}{3x_n^2+a}-\sqrt{a}=\frac{x_n^3+3x_na-3x_n^2\sqrt{a}-a\sqrt{a}}{3x_n^2+a}=$$

$$=\frac{\left(x_n-\sqrt{a}\right)^3}{3x_n^2+a}.$$

Як видно, знаки різниць $x_n - \sqrt{a}$ і $x_{n+1} - \sqrt{a}$ співпадають, це означає, що при $x_1 < \sqrt{a}$ всі $x_n < \sqrt{a}$, а при $x_1 > \sqrt{a}$ всі $x_n > \sqrt{a}$. Порівняємо x_{n+1} і x_n:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n\left(x_n^2 + 3a\right)}{3x_n^2 + a} - x_n = \frac{x_n^3 + 3ax_n - 3x_n^3 - ax_n}{3x_n^2 + a} = \frac{2x_n\left(a - x_n^2\right)}{3x_n^2 + a}.$$

Звідси випливає, що якщо $x_1 < \sqrt{a}$, то $x_{n+1} > x_n$, а якщо $x_1 > \sqrt{a}$, то $x_{n+1} < x_n$. В першому випадку послідовність зростаюча і обмежена зверху, а в другому – спадна і обмежена знизу, тобто в будь-якому випадку вона збіжна. Якщо в рівності, що визначає послідовність, перейти до границі при $n \to \infty$, то для границі c послідовності маємо:

$c = \dfrac{c\left(c^2 + 3a\right)}{3c^2 + a}$, звідки $3c^2 + a = c^2 + 3a$, тобто $c^2 = a$ і

$$c = \lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}.$$

8.25 Доведемо, що дана послідовність обмежена і монотонна. Очевидно, якщо $0 < a_n < 2$, то і $0 < a_{n+1} < 2$, отже, послідовність обмежена. Розглянемо різницю

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n}{3 - a_n} - a_n = \frac{a_n - 3a_n + a_n^2}{3 - a_n} = \frac{a_n\left(a_n - 2\right)}{3 - a_n} < 0,$$

тобто, послідовність спадна, тому збіжна. Перейшовши до границі при $n \to \infty$ в рівності, що задає послідовність, легко одержуємо: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

8.26 Маємо: $x_n \ge \sqrt[3]{6} > 1$ і $x_n < \sqrt[3]{6 + \ldots + \sqrt[3]{8}} = 2$ для всіх n. Крім того, послідовність $\{x_n\}$ строго монотонно зростає, тому збіжна. Якщо в рівності, що задає послідовність, перейти до границі при $n \to \infty$, то неважко одержати: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$. Тоді

$$0 < 2 - x_{n+1} = \frac{8 - x_{n+1}^3}{4 + 2x_{n+1} + x_{n+1}^2} = \frac{2 - x_n}{4 + 2x_{n+1} + x_{n+1}^2} < \frac{2 - x_n}{7}.$$

Оскільки $0<2-x_1<1$, то для будь-якого $n>1$ $0<2-x_n<\frac{1}{7^{n-1}}$, а тому $0<6^n\left(2-x_n\right)<\frac{6^n}{7^{n-1}}$. Звідси очевидним чином випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty}6^n\left(2-x_n\right)=0$.

8.27 Послідовно маємо:

$$10^{-2n}\left(\overline{ab}+\overline{abab}+\ldots+\underbrace{\overline{abab\ldots ab}}_{2n\ цифр}\right)=$$

$$=10^{-2n}\left(\overline{ab}+\overline{ab}\left(1+10^2\right)+\ldots+\overline{ab}\left(1+10^2+\ldots+10^{2n-2}\right)\right)=$$

$$=10^{-2n}\,\overline{ab}\left(n+(n-1)10^2+\ldots+1\cdot10^{2n-2}\right)=$$

$$=\overline{ab}\left(1\cdot10^{-2}+2\cdot10^{-4}+\ldots+n\cdot10^{-2n}\right)=$$

$$=\overline{ab}\cdot10^{-2}\left(1+2\cdot10^{-2\cdot1}+\ldots+n\cdot10^{-2(n-1)}\right).$$

$$\lim_{n\to\infty}10^{-2n}\left(\overline{ab}+\overline{abab}+\ldots+\underbrace{\overline{abab\ldots ab}}_{2n\ цифр}\right)=$$

$$=\overline{ab}\cdot10^{-2}\left(1+2\cdot x+\ldots+n\cdot x^{n-1}+\ldots\right)\Big|_{x=10^{-2}}=$$

$$=\overline{ab}\cdot10^{-2}\left(x+x^2+\ldots+x^n+\ldots\right)'\Big|_{x=10^{-2}}=\overline{ab}\cdot10^{-2}\left(\frac{x}{1-x}\right)'\Big|_{x=10^{-2}}=$$

$$=\overline{ab}\cdot10^{-2}\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)\Bigg|_{x=10^{-2}}=\overline{ab}\cdot10^{-2}\cdot\frac{100^2}{99^2}=\frac{100\cdot(10a+b)}{9801}.$$

8.28 Знайдемо кілька перших членів послідовності:

$$x_2=\frac{1}{4-3\cdot2013}=\frac{1}{1-3\cdot2012},$$

$$x_3=\frac{1}{4-\dfrac{3}{1-3\cdot2012}}=\frac{2013-4\cdot2012}{1-3\cdot4\cdot2012},$$

$$x_4=\frac{1}{4-3\cdot\dfrac{2013-4\cdot2012}{1-3\cdot4\cdot2012}}=\frac{2013-13\cdot2012}{1-3\cdot13\cdot2012}.$$

Доведемо методом математичної індукції, що

$$x_n = \frac{2013 - a_n \cdot 2012}{1 - 3a_n \cdot 2012}, \quad \text{де } a_n = \frac{3^{n-1} - 1}{2}.$$

Справді, при $n = 1, 2, 3, 4$ формула вірна; припустимо, що вона вірна при $n = k$, тоді

$$x_{k+1} = \frac{1}{4 - 3x_k} = \frac{1}{4 - 3 \cdot \dfrac{2013 - a_k \cdot 2012}{1 - 3a_k \cdot 2012}} = \frac{1 - 3a_k \cdot 2012}{1 - 3(3a_k + 1) \cdot 2012} =$$

$$= \frac{2013 - (3a_k + 1) \cdot 2012}{1 - 3(3a_k + 1) \cdot 2012} = \frac{2013 - a_{k+1} \cdot 2012}{1 - 3a_{k+1} \cdot 2012}.$$

Тому

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2013 - \dfrac{3^{n-1} - 1}{2} \cdot 2012}{1 - 3 \cdot \dfrac{3^{n-1} - 1}{2} \cdot 2012} = \lim_{n\to\infty} \frac{-3^{n-1} \cdot 2012 + 2014}{-3^n \cdot 2012 + 6038} = \frac{1}{3}.$$

8.29 Очевидно $x_n > 2$, $n \geq 2$, $x_{n+1} = 2 + \dfrac{x_{n-1}}{3x_{n-1} + 1} < 2 + \dfrac{1}{3}$,

отже, $2 < x_n < 2\dfrac{1}{3}$, $n \geq 3$. Розглянемо дві послідовності: $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$, де $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{3 + 1/a_n}$, $n \geq 1$, $b_1 = 2 + \dfrac{1}{3}$,

$b_1 = 2 + \dfrac{1}{3}$, $b_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{3 + 1/b_n}$, $n \geq 1$. Зрозуміло, що $\{a_n\}$ – підпослідовність послідовності $\{x_n\}$, яка складається із членів з непарними номерами, а $\{b_n\}$ – підпослідовність $\{x_n\}$, складена із членів з парними номерами.

Методом математичної індукції доведемо, що $\{a_n\}$ зростаюча, а $\{b_n\}$ спадна послідовності. Справді, $a_2 > a_1$, а припустивши, що $a_n > a_{n-1}$, маємо:

$$a_{n+1}-a_n=2+\frac{a_n}{3a_n+1}-\left(2+\frac{a_{n-1}}{3a_{n-1}+1}\right)=\frac{a_n-a_{n-1}}{(3a_n+1)(3a_{n-1}+1)}>0,$$

тобто $a_{n+1}>a_n$. Аналогічно доводиться, що послідовність $\{b_n\}$ спадна. Таким чином, в силу монотонності і обмеженості, послідовності $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ збіжні. Для границь цих послідовностей граничним переходом одержуємо одне і те ж рівняння: $x=2+\dfrac{1}{3+1/x}$, звідки $x=\dfrac{3+\sqrt{15}}{3}$. Таким чином, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{3+\sqrt{15}}{3}$.

8.30 Випишемо кілька перших членів послідовності: $a_0=0$, $a_1=1$, $a_2=\dfrac{0+1}{2}=\dfrac{1}{2}$, $a_3=\dfrac{1+1/2}{2}=\dfrac{3}{4}$, $a_4=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{5}{8}$. Доведемо методом математичної індукції, що загальний член послідовності задається рівністю $a_n=\dfrac{2^n+(-1)^{n-1}}{3\cdot 2^{n-1}}$, $n\ge 0$. При $n=0,1,2,3,4$ рівність виконана; припустимо, що вона виконується при $n\le k$. Тоді при $n=k+1$ маємо:

$$a_{k+1}=\frac{1}{2}(a_{k-1}+a_k)=\frac{1}{2}\left(\frac{2^{k-1}+(-1)^{k-2}}{3\cdot 2^{k-2}}+\frac{2^k+(-1)^{k-1}}{3\cdot 2^{k-1}}\right)=$$

$$=\frac{1}{6}\,\frac{2^k+2\cdot(-1)^{k-2}+2^k+(-1)^{k-1}}{2^{k-1}}=\frac{1}{6}\,\frac{2^{k+1}+(-1)^{k-2}(2-1)}{2^{k-1}}=$$

$$=\frac{2^{k+1}+(-1)^k}{3\cdot 2^k}.$$

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+(-1)^{n-1}}{3\cdot 2^{n-1}}=\dfrac{2}{3}$.

8.31 Перетворимо вираз загального члена послідовності:

$$a_n = \frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{n}} + \ldots + \sqrt{1+\frac{n}{n}}\right) = \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\ldots+\sqrt{n+n}}{n\sqrt{n}}.$$

Позначимо $S_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \ldots + \sqrt{n+n}$, отже, $a_n = \dfrac{S_n}{n\sqrt{n}}$. Розглянувши графік функції $y = \sqrt{x}$ і використовуючи геометричний зміст визначеного інтеграла, одержуємо:

$$\sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \ldots + \sqrt{2n-1} < \int_n^{2n} \sqrt{x}dx < \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \ldots + \sqrt{2n}.$$

Враховуючи, що $\displaystyle\int_n^{2n} \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_n^{2n} = \frac{2}{3}\left(2n\sqrt{2n} - n\sqrt{n}\right) = \frac{2}{3}n\sqrt{n}\left(2\sqrt{2}-1\right)$, маємо

$$S_n - \sqrt{2n} + \sqrt{n} < \frac{2}{3}n\sqrt{n}\left(2\sqrt{2}-1\right) < S_n, \text{ тобто}$$

$$\frac{2}{3}n\sqrt{n}\left(2\sqrt{2}-1\right) < S_n < \frac{2}{3}n\sqrt{n}\left(2\sqrt{2}-1\right) + \sqrt{2n} - \sqrt{n},$$

або, $\dfrac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right) < a_n < \dfrac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right) + \dfrac{\sqrt{2}-1}{n}$, а тому

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

8.32 Введемо позначення $a_n = \underbrace{\ln\left(1+\ln\left(1+\ \ldots\ +\ln x\right)\right)}_{n\ разів}$. Отже, $a_{n+1} = \ln\left(1+a_n\right)$. Очевидно, при $x > 1$ $a_2 = \ln\left(1+\ln x\right) > 0$. Але, якщо $a_n > 0$, то і $a_{n+1} = \ln\left(1+a_n\right) > 0$. З другого боку, $a_{n+1} = \ln\left(1+a_n\right) < a_n$.(див. розв'язок задачі 7.4). Таким чином, послідовність $\{a_n\}$ монотонна і обмежена, отже, існує $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. Для A граничним переходом одержуємо рівняння $A = \ln\left(1+A\right)$, яке має єдиний корінь $A = 0$.

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

8.33 Зауважимо, що якщо $x>1$, то $2^{1-x}<1$ і навпаки, якщо $x<1$, то $2^{1-x}>1$. Оскільки $x_1>1$, то $x_2<1$, тоді $x_3>1$ і т.д. Отже, $x_{2k-1}>1$, $x_{2k}<1$ $\forall k$. Доведемо, що $\{x_{2k-1}\}$ – спадна, $\{x_{2k}\}$ – зростаюча послідовності. Справді, $x_3 = 2^{1-x_2} = 2^{1-2^{-2012}} < x_1$, тоді $x_4 = 2^{1-x_3} > \ > 2^{1-x_1} = x_2$, звідси $x_5 = 2^{1-x_4} < 2^{1-x_2} = x_3$ і т.д.

Очевидно $0 < x_n < 2$, $n = 1, 2, \ldots$. Таким чином, послідовності $\{x_{2k}\}$ і $\{x_{2k-1}\}$ монотонні і обмежені, отже, збіжні. Якщо припустити, що $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1} = a > 1$, то тоді $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = b < 1$, причому $a = 2^{1-b}$, $b = 2^{1-a}$. Звідси одержуємо: $\frac{a}{b} = \frac{2^{1-b}}{2^{1-a}}$, або $\frac{a}{b} = \frac{2^a}{2^b}$, тобто $\frac{2^a}{a} = \frac{2^b}{b}$. Але, дослідивши функцію $f(x) = \frac{2^x}{x}$ за першою похідною, неважко одержати, що при $0 < b < 1 < a < 2$ $\frac{2^a}{a} < 2 < \frac{2^b}{b}$ – суперечність. Отже, $a = b = 1$. Таким чином, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

8.34 Очевидно

$$\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2^n} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2^n}}\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\ldots\cdot 2\cos\frac{x}{2^n}\times$$

$$\times\sin\frac{x}{2^n} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2^n}}\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cdot\sin\frac{x}{2^{n-1}} =$$

$$= \frac{1}{2^2\sin\frac{x}{2^n}}\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2^{n-2}}\sin\frac{x}{2^{n-2}} = \ldots = \frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}.$$

Тоді $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2^n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=$

$$=\frac{\sin x}{x}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}$$

8.35 Поклавши в умові задачі 4.1 $\varphi=\frac{b}{n}$, одержуємо:

$$\sin\frac{b}{n}+\sin\frac{2b}{n}+\ldots+\sin\frac{nb}{n}=\frac{\sin\frac{b}{2}\cdot\sin\frac{(n+1)b}{2n}}{\sin\frac{b}{2n}}.$$

Таким чином,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b}{n}\left(\sin\frac{b}{n}+\sin\frac{2b}{n}+\ldots+\sin\frac{nb}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{b}{n}\cdot\frac{\sin\frac{b}{2}\cdot\sin\frac{(n+1)b}{2n}}{\sin\frac{b}{2n}}=$$

$$=2\sin\frac{b}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\sin\frac{(n+1)b}{2n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{b}{2n}}{\sin\frac{b}{2n}}=2\sin\frac{b}{2}\cdot\sin\frac{b}{2}\cdot 1=2\sin^2\frac{b}{2}.$$

8.36 За означенням інтеграла:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}}\cdot\frac{1}{n}=$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^1=\ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

8.37 Нехай R – радіус кола Q. Тоді $S=\pi R^2$, $\sigma_n=\frac{1}{2}nR^2\sin\frac{2\pi}{n}$, $S_n=nR^2 tg\frac{\pi}{n}$. Таким чином,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S-\sigma_n}{S_n-S}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi R^2-\frac{1}{2}nR^2\sin\frac{2\pi}{n}}{nR^2 tg\frac{\pi}{n}-\pi R^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{n}-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{n}}{tg\frac{\pi}{n}-\frac{\pi}{n}}.$$

Позначивши $\frac{\pi}{n}=x$, перейдемо до неперервної змінної і застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S-\sigma_n}{S_n-S}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{2}\sin 2x}{tgx-x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\frac{1}{\cos^2 x}-1}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 2x)\cos^2 x}{1-\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^2 x}=2.$$

8.38 Всі три задачі розв’язуються аналогічно, тому наведемо один із можливих розв’зків першої з них.

Формулу $a_n=5a_{n-1}-4a_{n-2}$, тобто $a_n=(4+1)a_{n-1}-4a_{n-2}$, можна записати у виді $a_n-4a_{n-1}=a_{n-1}-4a_{n-2}$, або $a_n-a_{n-1}=4(a_{n-1}-a_{n-2})$. Звідси випливає, що

$$\begin{cases} a_n-4a_{n-1}=b-4a, \\ a_n-a_{n-1}=4^{n-2}(b-a). \end{cases}$$

Виключаючи із цієї системи a_{n-1}, дістаємо: $a_n=4^n\frac{b-a}{12}+\frac{4a-b}{3}$. Тому $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{4^n}=\frac{b-a}{12}$.

б) Відповідь: $\frac{b-a}{6}$; в) Відповідь: $\frac{b-a}{2}$.

8.39 Подамо рекурентну формулу так: $a_n-3a_{n-1}=10(a_{n-1}-3a_{n-2})$, тоді приходимо до рівності $a_n-3a_{n-1}=10^{n-2}(a_2-3a_1)=3\cdot 10^{n-2}$. А якщо цю формулу записати у виді $a_n-10a_{n-1}=3(a_{n-1}-10a_{n-2})$, то одержимо $a_n-10a_{n-1}=3^{n-2}(a_2-10a_1)=-4\cdot 3^{n-2}$. Отже, маємо систему

$$\begin{cases} a_n - 3a_{n-1} = 3\cdot 10^{n-2}, \\ a_n - 10a_{n-1} = -4\cdot 3^{n-2}. \end{cases}$$

Виключаючи із системи a_{n-1}, одержуємо $a_n = \frac{1}{7}\left(3\cdot 10^{n-1} + 4\cdot 3^{n-1}\right)$. Неважко бачити, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{10^n} = \frac{3}{70}$.

8.40 Нехай $a_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$, тоді $\ln a_n = \frac{\ln(n!)}{n} - \ln n$. Виходячи із геометричного змісту інтеграла, як і при розв'язуванні задачі 8.10, одержуємо $\int\limits_1^n \ln x dx < \ln(n!) < \int\limits_1^n \ln x dx + \ln n$, або

$$n\ln n - (n-1) < \ln(n!) < n\ln n - (n-1) + \ln n.$$

Тоді $\ln n - \frac{n-1}{n} < \frac{\ln(n!)}{n} < \ln n - \frac{n-1}{n} + \frac{\ln n}{n}$ і

$$-\frac{n-1}{n} < \frac{\ln(n!)}{n} - \ln n < -\frac{n-1}{n} + \frac{\ln n}{n}, \text{ або}$$

$$-\frac{n-1}{n} < \ln a_n < -\frac{n-1}{n} + \frac{\ln n}{n}.$$

Враховуючи, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} = 0$, маємо: $\lim\limits_{n\to\infty}\ln a_n = -1$, тоді

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

8.41 Маємо:

$$a_n = na_{n-1} + 1 = n((n-1)a_{n-2} + 1) + 1 = n(n-1)a_{n-2} + n + 1 =$$
$$= n(n-1)((n-2)a_{n-3} + 1) + n + 1 = n(n-1)(n-2)a_{n-3} + n(n-1) +$$
$$+ n + 1 = n(n-1)(n-2)((n-3)a_{n-4} + 1) + n(n-1) + n + 1 =$$
$$= n(n-1)(n-2)(n-3)a_{n-4} + n(n-1)(n-2) + n(n-1) + n + 1 = \ldots =$$
$$= n!\cdot a_0 + n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2 + n(n-1)\cdot\ldots\cdot 3 + \ldots + n(n-1) + n + 1.$$

Тоді $\frac{a_n}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} = \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ і

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=e\,.$$

8.42 а) Очевидно $\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}-\pi n\right)=$
$=\sin^2\left(\pi\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\right)=\sin^2\left(\frac{\pi n}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\frac{\pi n}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\right)=$$

$$=\sin^2\frac{\pi}{2}=1.$$

б) Аналогічно одержуємо

$$\lim_{n\to\infty}\cos^2\left(\pi\sqrt{n^2+2n}\right)=\cos^2\pi=1.$$

8.43

$$\lim_{n\to\infty}\cos^2\left(\pi\sqrt[3]{n^3+2n^2+\pi n}\right)=\lim_{n\to\infty}\cos^2\left(\pi\left(\sqrt[3]{n^3+2n^2+\pi n}-n\right)\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\cos^2\left(\pi\frac{n^3+2n^2+\pi n-n^3}{\sqrt[3]{\left(n^3+2n^2+\pi n\right)^2}+n\sqrt[3]{n^3+2n^2+\pi n}+n^2}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\cos^2\left(\pi\frac{2+\frac{\pi}{n}}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{n}+\frac{\pi}{n^2}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{2}{n}+\frac{\pi}{n^2}}+1}\right)=\cos^2\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{4}\,.$$

8.44 З умови задачі випливає, що

$$\lim_{n\to\infty}\left(f\left(a+\frac{2}{n}\right)-f(a)\right)\cdot n=2\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(a+\frac{2}{n}\right)-f(a)}{\frac{2}{n}}=2f'(a).$$

Тому

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f\left(a+\frac{2}{n}\right)}{f(a)}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{f\left(a+\frac{2}{n}\right)-f(a)}{f(a)}\right)^n=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{f\left(a+\frac{2}{n}\right)-f(a)}{f(a)}\right)n}=$$

$$=e^{2\frac{f'(a)}{f(a)}}.$$

8.45 Рекурентне співвідношення можна записати у виді: $y_k-y_{k-1}=0{,}5(y_{k-1}-y_{k-2})$, або $\frac{y_k-y_{k-1}}{y_{k-1}-y_{k-2}}=\frac{1}{2}$. Добуток цих рівностей по k від 2 до n дорівнює

$$\frac{y_n-y_{n-1}}{y_{n-1}-y_{n-2}}\cdot\frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{y_{n-2}-y_{n-3}}\cdot\ldots\cdot\frac{y_3-y_2}{y_2-y_1}\cdot\frac{y_2-y_1}{y_1-y_0}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Тобто $\frac{y_n-y_{n-1}}{y_1-y_0}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, або $y_n-y_{n-1}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. Одержані рівності: $y_k-y_{k-1}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ додамо по k від 1 до n і одержимо: $y_n-y_0=\frac{3}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$. За формулою суми n членів геометричної прогресії знаходимо: $\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=2-\frac{1}{2^{n-1}}$, тоді $y_n=1+\frac{3}{2}\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right)$.

Отже, $y_n=4-\frac{3}{2^n}$ і $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(4-\frac{3}{2^n}\right)=4$.

8.46 Рівність, що задає послідовність, запишемо у виді: $\frac{x_{k+1}-x_k}{x_k-x_{k-1}}=-\frac{1}{2k}$. Отже, $\frac{x_n-x_{n-1}}{x_{n-1}-x_{n-2}}=-\frac{1}{2(n-1)}$,

$\dfrac{x_{n-1}-x_{n-2}}{x_{n-2}-x_{n-3}}=-\dfrac{1}{2(n-2)}$ і т.д. $\dfrac{x_3-x_2}{x_2-x_1}=-\dfrac{1}{2\cdot 2}$, $\dfrac{x_2-x_1}{x_1-x_0}=-\dfrac{1}{2\cdot 1}$. Перемноживши ці рівності, одержуємо: $\dfrac{x_n-x_{n-1}}{x_1-x_0}=\dfrac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}(n-1)!}$, тобто $x_n-x_{n-1}=\dfrac{(-1)^{n-1}(b-a)}{2^{n-1}(n-1)!}$. Тоді $x_{n-1}-x_{n-2}=\dfrac{(-1)^{n-2}(b-a)}{2^{n-2}(n-2)!}$ і т. д. $x_2-x_1=\dfrac{(-1)(b-a)}{2\cdot 1!}$, $x_1-x_0=\dfrac{(-1)^0(b-a)}{2^0\cdot 0!}$. Додаючи одержані рівності, одержуємо:

$$x_n-x_0=(b-a)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{2^k\cdot k!}\text{, або, } x_n=a+(b-a)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^k}{k!}.$$

Таким чином,

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left(a+(b-a)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^k}{k!}\right)=a+(b-a)\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^k}{k!}=$$

$$=a+(b-a)e^{-\frac{1}{2}}=a+\frac{b-a}{\sqrt{e}}.$$

9.1 Знайдемо границю відношення цих нескінченно малих:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-arctg\,x}{\frac{1}{x}}=\left|\begin{matrix}заміна\\ x=tgt\end{matrix}\right|=\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\pi}{2}-t}{ctg\,t}=\left|\begin{matrix}заміна\\ \frac{\pi}{2}-t=z\end{matrix}\right|=\lim_{z\to 0}\frac{z}{tg\,z}=1.$$

Отже, нескінченно малі еквівалентні.

9.2 Маємо $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2e^x\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+x^2e^x\right)^{\frac{1}{x^2e^x}}\right]^{\frac{x^2e^x}{1-\cos x}}=$

$$=\left[\lim_{x\to 0}\left(1+x^2e^x\right)^{\frac{1}{x^2e^x}}\right]^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2e^x}{1-\cos x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}e^x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{2\sin^2\frac{x}{2}}\cdot 1}=e^{2\cdot 1}=e^2.$$

9.3 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-x+\sin x\right)^{\frac{1}{x^3}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\left(1+\left(\sin x-x\right)\right)^{\frac{1}{\sin x-x}}\right)^{\frac{\sin x-x}{x^3}}=$

$$=\left(\lim_{x\to 0}\left(1+\left(\sin x-x\right)\right)^{\frac{1}{\sin x-x}}\right)^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)-x}{x^3}}=e^{-\frac{1}{6}}=\frac{1}{\sqrt[6]{e}}.$$

9.4 Очевидно $\lambda=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x}=-1$, $\mu=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{1-x^3}-\lambda x\right)=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{1-x^3}+x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1-x^3+x^3}{\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)^2}-x\sqrt[3]{1-x^3}+x^2}=0.$$

9.5 Нехай $f(x)=\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}}{e^x}$, або $f(x)=\left(\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}}{e}\right)^{x}$, тоді

$\ln f(x)=x\left(x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-1\right)$. Далі знаходимо:

$$\lim_{x\to+\infty}\ln f(x)=\lim_{x\to+\infty}x\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right)=\left|\begin{array}{l}\text{заміна}\\ x=\dfrac{1}{t}\end{array}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\frac{1}{t}\ln\left(1+t\right)-1\right)=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{t-\frac{t^2}{2}+o\left(t^2\right)-t}{t^2}=-\frac{1}{2}.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}}{e^x}=e^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

9.6 Маємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\sum_{k=0}^{2013}(-1)^k f\left(\frac{x}{2^k}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\sum_{k=0}^{2013}(-1)^k\left(f\left(\frac{x}{2^k}\right)-f(0)\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\sum_{k=0}^{2013}(-1)^k\frac{1}{2^k}\frac{f\left(\frac{x}{2^k}\right)-f(0)}{\frac{x}{2^k}}=\sum_{k=0}^{2013}(-1)^k\frac{1}{2^k}f'(0)=\sum_{k=0}^{2013}\left(-\frac{1}{2}\right)^k=$$

$$=\frac{1\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{2014}\right)}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1-\frac{1}{2^{2014}}}{\frac{3}{2}}=\frac{2\left(2^{2014}-1\right)}{3\cdot 2^{2014}}.$$

9.7 Прологарифмуємо вираз і застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(tg\,\frac{\pi x}{2x+1}\right)}{x}=\left|\begin{matrix}\textit{заміна}\\ x=\frac{1}{t}\end{matrix}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{\ln\left(tg\,\frac{\pi}{t+2}\right)}{\frac{1}{t}}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{tg\frac{\pi}{t+2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{t+2}}\cdot\frac{-\pi}{(t+2)^2}}{-\frac{1}{t^2}}=\pi\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{(t+2)^2\cdot tg\frac{\pi}{t+2}\cdot\cos^2\frac{\pi}{t+2}}=$$

$$=2\pi\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{(t+2)^2\cdot\sin\frac{2\pi}{t+2}}=2\pi\lim_{t\to 0}\frac{1}{(t+2)^2}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{\sin\frac{2\pi}{t+2}}=$$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{4}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{2t}{\cos\frac{2\pi}{t+2}\cdot\frac{-2\pi}{(t+2)^2}}=0.$$

Тому $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(tg\,\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}=e^0=1$.

9.8 Нехай $f(t)=\left(\dfrac{a_1^t+a_2^t+\ldots+a_n^t}{n}\right)^{\frac{1}{t}}$, тоді $\ln f(t)=\dfrac{\ln\left(\dfrac{a_1^t+a_2^t+\ldots+a_n^t}{n}\right)}{t}$. При знаходженні границі $\lim\limits_{t\to 0}\ln f(t)$ застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln\left(\dfrac{a_1^t+a_2^t+\ldots+a_n^t}{n}\right)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{a_1^t\ln a_1+a_2^t\ln a_2+...+a_n^t\ln a_n}{a_1^t+a_2^t+\ldots+a_n^t}=$$

$$=\frac{\ln a_1+\ln a_2+...+\ln a_n}{n}=\frac{1}{n}\ln\left(a_1\cdot a_2\cdot...\cdot a_n\right).$$

Таким чином,

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{a_1^t+a_2^t+\ldots+a_n^t}{n}\right)^{\frac{1}{t}}=e^{\frac{1}{n}\ln\left(a_1\cdot a_2\cdot...\cdot a_n\right)}=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}\;.$$

9.9 Розглянемо функцію $g(x)=f(x)-x^2/2$. Вона диференційовна на $[0,1]$, причому $g'(x)=f'(x)-x$. Зокрема, $g'(0)=1$, $g'(1)=-1$. Звідси випливає, що функція $g(x)$ не може досягати максимуму на відрізку $[0,1]$ в його кінцях. Значить $g(x)$ досягає максимуму в деякій точці $c\in(0,1)$; при цьому $g'(c)=0$, тобто $f'(c)=c$.

9.10 Очевидно функція $f(x)$ неперервно диференційовна на всій числовій прямій. Неважко знайти:

$$f(0)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 5 & 3\\ -1 & -1 & -1\end{vmatrix}=0,\quad f(1)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 6\end{vmatrix}=0.$$

За теоремою Ролля знайдеться $c\in(0,1)$ таке, що $f'(c)=0$.

9.11 Для доведення застосуємо теорему Коші про середнє для функцій $u(x)=\frac{f(x)}{x}$ і $v(x)=\frac{1}{x}$ на відрізку $[a,b]$:

$$\frac{\frac{f(b)}{b}-\frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=\frac{\frac{cf'(c)-f(c)}{c^2}}{-\frac{1}{c^2}},\quad a<c<b.$$

Звідси $\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}=f(c)-cf'(c)$, або $\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b)\end{vmatrix}=f(c)-cf'(c)$, що і потрібно було довести.

9.12 Покладемо $g(x)=f(x)e^{-x}$. Оскільки $g(0)=g(1)=0$, то за теоремою Ролля $g'(x)=0$ в деякій точці $x\in(0,1)$. Але $g'(x)=(f'(x)-f(x))e^{-x}$. Значить $f'(x)=f(x)$.

9.13 Нехай $g(x)=f(x)+f'(x)+\ldots+f^{(n)}(x)$, тоді $\ln\frac{g(b)}{g(a)}=b-a$, звідки $g(b)=g(a)e^{b-a}$. Розглянемо функцію $h(x)=g(x)e^{-x}$; очевидно: $h(a)=g(a)e^{-a}$, $h(b)=g(b)e^{-b}=$ $=g(a)e^{b-a}e^{-b}=h(a)$. За теоремою Ролля знайдеться $c\in(a,b)$ таке, що $h'(c)=0$. Але $h'(x)=g'(x)e^{-x}-g(x)e^{-x}$, отже, $g'(c)e^{-c}-g(c)e^{-c}=0$, тобто $g'(c)=g(c)$. Звідси очевидним чином випливає, що $f^{(n+1)}(c)=f(c)$.

9.14 Розглянемо функцію $g(x)=(a-x)^b f(x)$. Очевидно, що $g(0)=g(a)=0$. Крім того, функція $g(x)$ диференційовна на проміжку $(0,a)$, причому $g'(x)=-b(a-x)^{b-1}f(x)+(a-x)^b f'(x)$. За теоремою Ролля існує точка $x_0\in(0,a)$ така, що $g'(x_0)=0$, тобто $-b(a-x_0)^{b-1}f(x_0)+(a-x_0)^b f(x_0)=0$, або
$bf(x_0)=(a-x_0)f'(x_0)$, що й треба було довести.

9.15 Маємо $y - x = e^x - e^y$, або, за формулою скінченних приростів Лагранжа $y - x = e^c(x - y)$, де c між x і y. Оскільки $e^c \neq -1$, то $x = y$, тобто $f(x) = f(y)$ для будь-якої функції.

9.16 Так, наприклад $f(x) = \sin\frac{x}{2}$.

9.17 Перепозначивши $x - h$ через x, маємо $\left|f(x+2h) - f(x)\right| \le h^2$. Доведемо, що функція $f(x)$ диференційовна і $f'(x) \equiv 0$. Дійсно, при $h > 0$ $\left|\frac{f(x+2h) - f(x)}{2h}\right| \le \frac{h^2}{2h} = \frac{h}{2} \to 0 \quad (h \to +0)$. Точно так же $\left|\frac{f(x-2h) - f(x)}{2h}\right| \le \frac{h}{2} \to 0 \quad (h \to +0)$. Тому

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 0 \quad \forall x \text{ і } f(x) \equiv const .$$

9.18 Візьмемо довільне $x_0 > 0$. Тоді для будь-якого $x > 0$, $x \neq x_0$ знайдеться c між x_0 і x таке, що

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2,$$

звідки

$$\frac{f''(c)}{2}(x - x_0)^2 + f'(x_0)(x - x_0) + \left(f(x_0) - f(x)\right) = 0 . \qquad (9.1)$$

Оскільки $\left|f(x)\right| \le A$, то $-2A \le f(x_0) - f(x) \le 2A$ і якщо $\left|f''(x)\right| \le B$, то $-\frac{B}{2} \le \frac{f''(c)}{2} \le \frac{B}{2}$. Таким чином, із (9.1) одержуємо:

$$\begin{cases} -\frac{B}{2}(x - x_0)^2 + f'(x_0)(x - x_0) - 2A \le 0, \\ \frac{B}{2}(x - x_0)^2 + f'(x_0)(x - x_0) + 2A \ge 0 , \end{cases}$$

або,
$$\begin{cases} \dfrac{B}{2}\left(-\left(x-x_0\right)\right)^2+f'\left(x_0\right)\left(-\left(x-x_0\right)\right)+2A\ge 0, \\ \dfrac{B}{2}\left(x-x_0\right)^2+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+2A\ge 0. \end{cases}$$
Якщо позначити $x-x_0=t$, то враховуючи обидві нерівності, маємо:
$$\frac{B}{2}t^2+f'\left(x_0\right)\cdot t+2A\ge 0 \qquad \forall t,$$
тому дискримінант квадратного тричлена повинен бути недодатним: $\left(f'\left(x_0\right)\right)^2-4\cdot\dfrac{B}{2}\cdot 2A\le 0$, або $\left(f'\left(x_0\right)\right)^2\le 4AB$, тобто $\left|f'\left(x_0\right)\right|\le 2\sqrt{AB}$.

9.19 Позначимо $g\left(x\right)=\left(f'\left(x\right)\right)^2$. Маємо $g'\left(x\right)=2f'\left(x\right)f''\left(x\right)=0$, тобто $g\left(x\right)\equiv const$ і $f'\left(x\right)\equiv const$, так що $f\left(x\right)=ax+b$.

9.20 Умовам задачі задовольняє, очевидно, функція $f\left(x\right)\equiv 0$; доведемо, що інших функцій з такими властивостями нема. Зауважимо, що якщо б така функція знайшлась, то $f\left(x\right)$ і $f''\left(x\right)$ мали б на $\left(a,b\right)$ однакові знаки. Припустимо, що $f\left(x\right)$ приймає на $\left(a,b\right)$ додатні значення, тоді в деякій точці $x_0\in\left(a,b\right)$ $f\left(x\right)$ досягає локального максимуму, причому $f\left(x_0\right)>0$. В той же час, в точці локального максимуму $f''\left(x_0\right)\le 0$, тобто $f\left(x_0\right)$ і $f''\left(x_0\right)$ мають різні знаки. Аналогічно розглядається випадок, коли $f\left(x\right)$ приймає на $\left(a,b\right)$ від'ємні значення.

9.21 Так, завжди, наприклад:
$$g\left(x\right)=f\left(x\right)\sin x,\ h\left(x\right)=f\left(x\right)\cos x.$$

9.22 Зауважимо, що функція $f\left(x\right)$ має бути строго монотонною, оскільки із рівності $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$, $x_1\ne x_2$, випливало б $e^{-x_1} = f(f(x_1)) = f(f(x_2)) = e^{-x_2}$, що неможливо. Якщо $f(x)$ зростаюча, то із нерівності $x_1 < x_2$ маємо: $f(x_1) < f(x_2)$ і $e^{-x_1} = f(f(x_1)) < f(f(x_2)) = e^{-x_2}$ – суперечність. А якщо $f(x)$ спадна, то із нерівності $x_1 < x_2$ одержуємо: $f(x_1) > f(x_2)$ і $e^{-x_1} = f(f(x_1)) < f(f(x_2)) = e^{-x_2}$ що теж неможливо. Отже, такої функції не існує.

9.23 Передусім зазначимо, що для будь-якого x $\frac{1}{2} \le f(x) \le 1$. Тоді

$$f(x+2a) = f(x+a+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x+a) - (f(x+a))^2} =$$

$$= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - (f(x))^2} - \left(\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - (f(x))^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - (f(x))^2} - \frac{1}{4} - \sqrt{f(x) - (f(x))^2} - f(x) + (f(x))^2} =$$

$$= \frac{1}{2} + \sqrt{(f(x))^2 - f(x) + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(f(x) - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} + f(x) - \frac{1}{2} = f(x).$$

Отже, функція періодична з періодом $2a$.

Приклад такої функції при $a = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in [2n,\ 2n+1), \\ 1, & x \in [2n+1,\ 2n+2), \end{cases} \qquad n \in \mathrm{Z}.$$

9.24 Так, наприклад

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \textit{якщо } x \textit{ ірраціональне}, \\ 10^{m+n}, & \textit{якщо } x = \frac{m}{n},\ \textit{де } m \textit{ і } n - \textit{натуральні}. \end{cases}$$

9.25 Нехай $0 < x_1 < x_2$. Оскільки графік функції $y = f(x)$ вгнутий, то частина графіка, яка відповідає проміжку $(0,\ x_2)$ лежить під хордою, що з'єднує точки

$O(0, 0)$ і $A(x_2, f(x_2))$ графіка. Рівняння хорди $y = \frac{f(x_2)}{x_2}x$. Очевидно, точка на графіку з абсцисою x_1 лежить нижче точки на хорді з такою ж абсцисою, тобто виконана нерівність $f(x_1) < \frac{f(x_2)}{x_2}x_1$. Звідси зразу випливає $\frac{f(x_1)}{x_1} < \frac{f(x_2)}{x_2}$, що і потрібно було довести.

9.26 Не існує. Припустимо супротивне, що існує неперервна функція $f(x)$: $R \to R$ така, що при раціональному x $f(x)$ ірраціональне, а при ірраціональному x $f(x)$ раціональне. Подивимось, яким може бути множина значень $f(x)$. Оскільки множина раціональних чисел зліченна, то образ множини раціональних чисел не більш ніж зліченний. Образ множини ірраціональних лежить в множині раціональних чисел, тобто знову ж таки не більш як зліченний. Отже, множина значень $f(x)$ не більш як зліченна. Але множина значень неперервної функції є проміжок, який складається із однієї точки або континууму точок. Таким чином, $f(x)$ може приймати тільки одне-єдине значення. Але це суперечить тому, що $f(x)$ приймає як раціональні, так і ірраціональні значення. Значить, такої функції не існує.

9.27 Доведемо, що функції f і g мають однакові періоди. Нехай період функції f дорівнює T. Маємо $f(x) - g(x) \to 0$ при $x \to +\infty$, $f(x+T) - g(x+T) \to 0$ при $x \to +\infty$. Віднімаючи від другого співвідношення перше і враховуючи, що $f(x+T) - f(x) = 0$, одержимо, що при $x \to +\infty$ $g(x+T) - g(x) \to 0$. Але функція $h(x) = g(x+T) - g(x)$ періодична, оскільки g є періодичною функцією. Очевидно, періодична функція може мати границю 0 на нескінченності, якщо тільки вона тотожно рівна нулю. Таким чином, $g(x+T) \equiv g(x)$, тобто функція g теж має період T. Покладемо тепер $\varphi(x) = f(x) - g(x)$. Ця функція періодична (з періодом T), прямує до нуля при $x \to +\infty$, отже $\varphi \equiv 0$, $f \equiv g$.

9.28 Так, може. Наприклад $f(x) = x^2 \sin x$.

9.29 Доведемо твердження індукцією по n. При $n = 1$, 2 його легко перевірити:

$$\left(e^{1/x}\right)' = -\frac{e^{1/x}}{x^2}, \quad \left(xe^{1/x}\right)'' = \left(e^{1/x} - \frac{e^{1/x}}{x}\right)' = -\frac{e^{1/x}}{x^2} - \frac{-x\dfrac{e^{1/x}}{x^2} - e^{1/x}}{x^2} = \frac{e^{1/x}}{x^3}.$$

Нехай рівність доведена для $n = k-1$, доведемо її для $n = k$:

$$\left(x^{k-1}e^{1/x}\right)^{(k)} = \left(x \cdot \left(x^{k-2}e^{1/x}\right)\right)^{(k)} = x \cdot \left(x^{k-2}e^{1/x}\right)^{(k)} + k\left(x^{k-2}e^{1/x}\right)^{(k-1)} =$$

$$= x\left(\left(x^{k-2}e^{1/x}\right)^{(k-1)}\right)' + k(-1)^{k-1}\frac{e^{1/x}}{x^k} = x\left((-1)^{k-1}\frac{e^{1/x}}{x^k}\right)' + (-1)^{k-1}k\frac{e^{1/x}}{x^k} =$$

$$= (-1)^{k-1}x\left(-kx^{-k-1}e^{1/x} - x^{-k}\frac{e^{1/x}}{x^2}\right) + (-1)^{k-1}k\frac{e^{1/x}}{x^k} =$$

$$= (-1)^k k\frac{e^{1/x}}{x^k} + (-1)^k\frac{e^{1/x}}{x^{k+1}} + (-1)^{k-1}k\frac{e^{1/x}}{x^k} = (-1)^k\frac{e^{1/x}}{x^{k+1}}.$$

Рівність доведено. При доведенні використана формула Лейбніца для похідних вищих порядків добутку двох функцій.

9.30 Зауважимо, що всякий многочлен непарного степеня має хоча б один дійсний корінь і приймає як додатні, так і від'ємні значення. Припустимо, що для многочлена $F(x)$ степеня n при будь-якому дійсному x виконується умова $F'(x)F''(x) > F(x)F'''(x)$. Тоді многочлен $Q(x) = F'(x)F''(x) - F(x)F'''(x)$ повинен мати парний степінь. Можна вважати, що коефіцієнт при старшому члені

x^n дорівнює 1, оскільки в противному випадку можна поділити на нього $F(x)$ – умова при цьому збережеться. Коефіцієнт при x^{2n-3} у многочлена Q дорівнює

$n^2(n-1)-n(n-1)(n-2)=(n^3-n^2)-(n^3-3n^2+2n)=2n^2-2n$. Тому степінь многочлена Q дорівнює $2n-3$ (тобто він непарний) при $n>1$. Легко перевірити, що для многочленів $F(x)$ нульового і першого степеня умова виконуватись не може. Отже, многочлена із вказаною властивістю не існує.

Неважко впевнитись, що функція $F(x)=e^{e^{-x}}$ вказаній нерівності задовольняє. Дійсно $F'(x)=-F(x)e^{-x}$, $F''(x)=F(x)\left(e^{-x}+e^{-2x}\right)$, $F'''(x)=-F(x)\left(3e^{-2x}+e^{-3x}+e^{-x}\right)$, звідки

$$F'(x)F''(x)=-F^2(x)\left(e^{-2x}+e^{-3x}\right)>-F^2(x)\left(3e^{-2x}+e^{-3x}+e^{-x}\right)=$$
$$=F(x)F'''(x).$$

9.31 Якщо $f(x)$ міняє знак, то вона в якійсь точці обертається в нуль, тому строга нерівність неможлива. Таким чином, $f(x)$ не міняє знак. Оскільки добуток $f''\cdot f$ не зміниться при заміні f на $-f$, можна вважати, що $f(x)>0$, $x\in R$. Тоді $f''(x)>0$, тобто графік функції вгнутий. Оскільки $f(x)$ періодична і неперервна (останнє випливає із диференційовності), то $f(x)$ має локальний максимум в деякій точці c. В цій точці $f''(c)\le 0$, що суперечить умові, тобто періодична функція не може задовольняти вказану умову.

9.32 Оскільки $f''(x)\ge 0$, то $f'(x)$ зростає на $[0,1]$, тобто $f'(x)\ge 1$. Інтегруючи цю нерівність в межах від 0 до x, одержуємо $f(x)-f(0)\ge x$, або $f(x)\ge 1+x$. Звідси $\int_0^1 f(x)dx\ge\int_0^1(1+x)dx=\frac{3}{2}$. Але оскільки $\int_0^1 f(x)dx=\frac{3}{2}$, то приходимо до рівності $f(x)=1+x$.

9.33 Нехай така функція існує. При $x \in (0, 1)$ $f(x) = 1 + f'(\theta_1)x$, $\theta_1 \in (0, x)$, а при $x \in (1, 2)$ $f(x) = 1 + f'(\theta_2)(2 - x)$, $\vartheta_2 \in (x, 2)$, звідки відповідно $f(x) \geq 1 - x$, $f(x) \geq x - 1$ і

$$\int_0^1 f(x)dx \geq \int_0^1 (1 - x)dx = \frac{1}{2}, \quad \int_1^2 f(x)dx \geq \int_1^2 (x - 1)dx = \frac{1}{2},$$

причому рівності не можуть виконуватись одночасно, бо тоді $f(x) \equiv 1 - x$ при $x \in [0, 1]$ і $f(x) \equiv x - 1$ при $x \in [1, 2]$ і порушується умова неперервної диференційовності $f(x)$. Тому

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

що суперечить останній умові. Отже, не існує функції $f(x)$, яка б задовольняла поставленим умовам.

9.34 Розглянемо функцію $g(x) = f(\sin x)$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. За теоремою Лагранжа знайдеться $x_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ таке, що $g\left(\frac{\pi}{2}\right) - g(0) = g'(x_0) \cdot \frac{\pi}{2}$. Але $g(0) = f(0)$, $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(1)$, $g'(x) = f'(\sin x) \cdot \cos x$. Тоді, якщо позначити $\sin x_0 = t$, одержимо $g'(x_0) = f'(\sin x_0) \cdot \cos x_0 = f'(t)\sqrt{1 - t^2}$. Враховуючи це, маємо $f(1) - f(0) = \frac{\pi}{2}\sqrt{1 - t^2} \cdot f'(t)$, де $t \in [0, 1]$.

9.35 При $0 \leq |\sin x| < 1$ $y(x) = 0$; при $|\sin x| = 1$ $y(x) = 1$, отже

$$y(x) = \begin{cases} 1 & \textit{при } x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \\ 0 & \textit{в противному випадку}. \end{cases}$$

Графік функції зображено на рисунку 9.1.

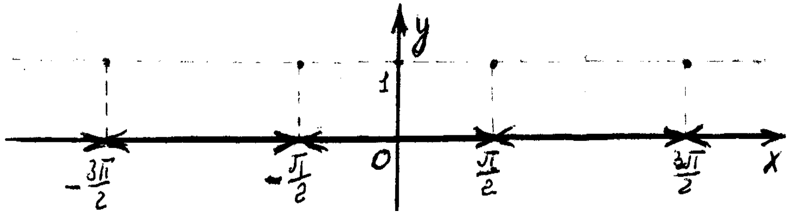

Рисунок 9.1

9.36 Очевидно

$$\lim_{n\to\infty}(x-1)\,arctg\,x^n \begin{cases} =\frac{\pi}{2}(x-1) & при\ x>1\,, \\ =0 & при\ x=1\,, \\ =0 & при\ |x|<1\,, \\ не\ існує & при\ x\le -1\,. \end{cases}$$

Графік зображено на рисунку 9.2.

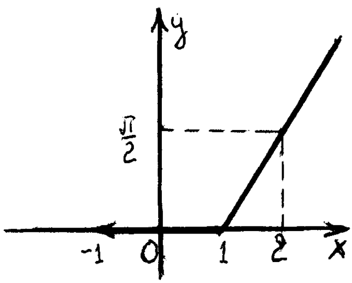

Рисунок 9.2

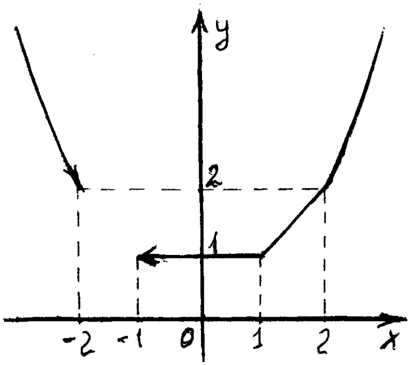

Рисунок 9.3

9.37 Розглянемо поведінку $y(x)$ на різних проміжках:

1) $0\le x<1$: $\quad y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}=1$.

2) $x=1$: $\quad y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}=1$.

3) $1 < x < 2$: $\quad y = \lim\limits_{n\to\infty} x\sqrt[n]{\dfrac{1}{x^n} + 1 + \left(\dfrac{x}{2}\right)^n} = x$.

4) $x = 2$: $\quad y = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + 2\cdot 2^n} = 2$.

5) $x > 2$: $\quad y = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^2}{2}\sqrt[n]{\left(\dfrac{2}{x^2}\right)^n + \left(\dfrac{2}{x}\right)^n + 1} = \dfrac{x^2}{2}$.

6) $-1 < x < 0$: $\ y = 1$.

7) $-2 \le x \le -1$: границя не існує.

8) $x < -2$: $\quad y = \dfrac{x^2}{2}$.

Графік зображено на рисунку 9.3.

9.38 Очевидно

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \frac{x}{1 + x^2 - e^{\alpha x}} \begin{cases} = 0 & при\ x > 0, \\ не\ існує & при\ x = 0, \\ = \dfrac{x}{1 + x^2} & при\ x < 0. \end{cases}$$

Графік зображений на рисунку 9.4.

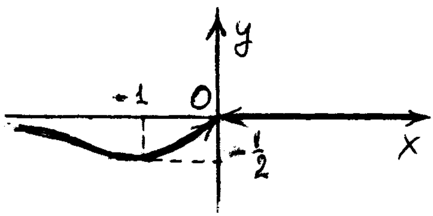

Рисунок 9.4

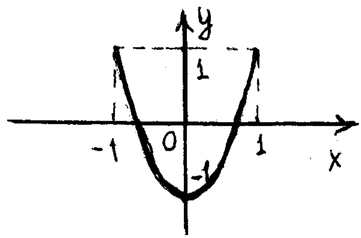

Рисунок 9.5

9.39 Функція визначена при $x \in [-1, 1]$. При всіх таких x

$$y = \cos(2\arccos x) = 2\cos^2(\arccos x) - 1 = 2x^2 - 1.$$

Графік подано на рисунку 9.5.

9.40 Враховуючи, що $tg3\alpha = \dfrac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha}$, маємо

$$y = \frac{3x - x^3}{1-3x^2}.$$

Легко встановити, що графік функції має дві вертикальні асимптоти $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, причому правосторонні границі в точках $\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ рівні $-\infty$, а лівосторонні – $+\infty$, також похилу асимптоту $y = \dfrac{1}{3}x$. Крім того, похідна функції всюди додатна, отже функція всюди зростаюча. Графік зображено на рисунку 9.6.

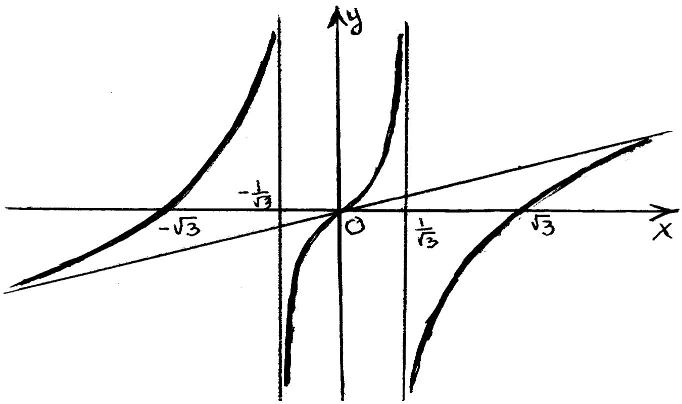

Рисунок 9.6

9.41 Знайдемо область визначення функції:

$$\sin x + \cos x > 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 0 \Leftrightarrow 2\pi n < x + \frac{\pi}{4} < \pi + 2\pi n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\pi n - \frac{\pi}{4} < x < 2\pi n + \frac{3}{4}\pi,\ n \in Z.$$

Для x із області визначення маємо:

$$y = e^{\log_{\sqrt{e}}(\sin x + \cos x)} = e^{\log g_{\sqrt{e}}\left(\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)} = e^{\ln\left(2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)} =$$

$$= 2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 1 + \sin 2x \,.$$

Графік зображений на рисунку 9.7.

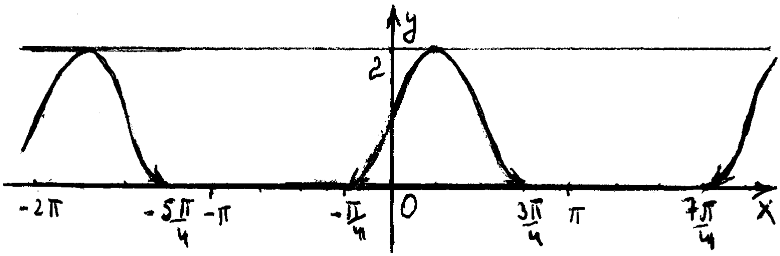

Рисунок 9.7

9.42 Функція терпить розрив в точці $x = 1$. Причому

$$\lim_{x\to 1-0} arctg\frac{1+x}{1-x} = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to 1+0} arctg\frac{1+x}{1-x} = -\frac{\pi}{2}\,.$$

Зауважимо також, що $\lim\limits_{x\to\infty} arctg\dfrac{1+x}{1-x} = -\dfrac{\pi}{4}$. Легко встановити також, що функція всюди зростаюча, точок перегину графік не має. Графік зображено на рисунку 9.8.

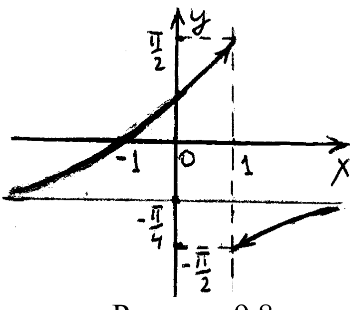

Рисунок 9.8

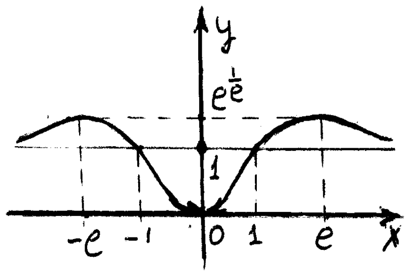

Рисунок 9.9

9.43 Функція, очевидно, парна. При $x > 0 \quad f(x) = x^{1/x}$,

$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}x^{1/x}$. При $x\to 0$ $\quad f(x)\to 0$; на $(0,\,e)$ $f(x)$ зростає до максимального значення $e^{1/e}$ і на $(e,\,+\infty)$ спадає, прямуючи до 1. Графік зображений на рисунку 9.9.

10.1 Зауважимо, що $(x\sin x+\cos x)'=x\cos x$. Тоді

$$\int\frac{x^2dx}{(x\sin x+\cos x)^2}=\int\frac{x}{\cos x}\cdot\frac{x\cos xdx}{(x\sin x+\cos x)^2}=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=\frac{x}{\cos x}, & du=\frac{\cos x+x\sin x}{\cos^2 x}dx \\ dv=\frac{x\cos xdx}{(x\sin x+\cos x)^2}, & v=-\frac{1}{x\sin x+\cos x}\end{matrix}\right|=$$

$$=-\frac{x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\frac{-x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+$$

$$+tgx+C=\frac{-x+(x\sin x+\cos x)\sin x}{(x\sin x+\cos x)\cos x}+C.$$

10.2 Перетворимо підінтегральну функцію

$$\frac{1}{\cos^3 x+\sin^3 x}=\frac{1}{(\cos x+\sin x)\cdot(1-\cos x\cdot\sin x)}=$$

$$=\frac{(\cos x+\sin x)^2-2\cos x\cdot\sin x}{(\cos x+\sin x)(1-\cos x\cdot\sin x)}=\frac{(\cos x+\sin x)^2-2\cos x\cdot\sin x+2}{3(\cos x+\sin x)(1-\cos x\cdot\sin x)}=$$

$$=\frac{(\cos x+\sin x)^2+2(1-\cos x\cdot\sin x)}{3(\cos x+\sin x)(1-\cos x\cdot\sin x)}=\frac{1}{3}\left(\frac{\cos x+\sin x}{1-\cos x\cdot\sin x}+\frac{2}{\cos x+\sin x}\right).$$

Тому $\int\frac{dx}{\cos^3 x+\sin^3 x}=\frac{1}{3}\int\frac{(\cos x+\sin x)dx}{1-\cos x\cdot\sin x}+$

$$\frac{2}{3}\int\frac{dx}{\cos x+\sin x}=\frac{2}{3}\int\frac{d(\sin x-\cos x)}{1+(\sin x-\cos x)^2}+\frac{2}{3\cdot\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=$$

$$=\frac{1}{3}\left(2arctg(\sin x-\cos x)+\sqrt{2}\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|\right)+C.$$

10.3 Скористаємось тим, що $\left(\left(1+x^2\right)arctg\,x-x\right)'=2x\,arctg\,x$. Отже,

$$\int\frac{x^2dx}{\left[\left(1+x^2\right)arctg\,x-x\right]^2}=\frac{1}{2}\int\frac{x}{arctg\,x}\cdot\frac{2x\,arctg\,x\,dx}{\left[\left(1+x^2\right)arctg\,x-x\right]^2}=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=\dfrac{x}{arctg\,x}, & du=\dfrac{\left(\left(1+x^2\right)arctg\,x-x\right)dx}{\left(1+x^2\right)\left(arctg\,x\right)^2} \\ dv=\dfrac{2x\,arctg\,x\,dx}{\left[\left(1+x^2\right)arctg\,x-x\right]^2}, & v=\dfrac{-1}{\left(1+x^2\right)arctg\,x-x}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{-x}{\left(\left(1+x^2\right)arctg\,x-x\right)arctg\,x}+\int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)\left(arctg\,x\right)^2}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{-x}{\left(\left(1+x^2\right)arctg\,x-x\right)arctg\,x}-\frac{1}{arctg\,x}\right]+C=\frac{-1-x^2}{2\left(\left(1+x^2\right)arctg\,x-x\right)}+C.$$

10.4 $I=\int\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx=\int e^{x+\frac{1}{x}}dx+\int x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$.

Розглянемо другий інтеграл:

$$\int x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx=\left|\begin{matrix} u=x, & du=dx \\ dv=e^{x+\frac{1}{x}}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)dx, & v=e^{x+\frac{1}{x}}\end{matrix}\right|=xe^{x+\frac{1}{x}}-\int e^{x+\frac{1}{x}}dx.$$

Тоді $I=\int e^{x+\frac{1}{x}}dx+xe^{x+\frac{1}{x}}-\int e^{x+\frac{1}{x}}dx=xe^{x+\frac{1}{x}}+C$.

10.5 Очевидно

$$\int\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\,dx=\int\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x}}-\int\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx.$$

Другий інтеграл:

$$\int\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx=\left|\begin{matrix} \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}=t, & x=\dfrac{t^2}{1+t^2} \\ dx=\dfrac{2t}{\left(1+t^2\right)^2}dt & \end{matrix}\right|=\int\frac{2t^2}{\left(1+t^2\right)^2}dt=$$

$$=\int t\cdot\frac{2tdt}{\left(1+t^2\right)^2}=\int t\cdot d\left(-\frac{1}{1+t^2}\right)=-\frac{t}{1+t^2}+\int\frac{dt}{1+t^2}=-\frac{t}{1+t^2}+$$

$$+arctg\,t=-\frac{\sqrt{\frac{x}{1-x}}}{1+\frac{x}{1-x}}+arctg\sqrt{\frac{x}{1-x}}=-\sqrt{x(1-x)}+arctg\sqrt{\frac{x}{1-x}}.$$

Таким чином,

$$\int\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\,dx=-2\sqrt{1-x}+\sqrt{x(1-x)}-arctg\sqrt{\frac{x}{1-x}}+C.$$

10.6 $\displaystyle\int\frac{x\sin x+\cos x}{x^2+\cos^2 x}dx=\int\frac{\frac{x\sin x+\cos x}{x^2}}{1+\left(\frac{\cos x}{x}\right)^2}dx=-\int\frac{\left(\frac{\cos x}{x}\right)'dx}{1+\left(\frac{\cos x}{x}\right)^2}=$

$$=-\int\frac{d\left(\frac{\cos x}{x}\right)}{1+\left(\frac{\cos x}{x}\right)^2}=-arctg\left(\frac{\cos x}{x}\right)+C.$$

10.7 При $a=-1$ інтеграл, очевидно, “береться”:

$$\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)e^x dx=\int\frac{1}{x}e^x dx-\int\frac{1}{x^2}e^x dx=\int\frac{1}{x}e^x dx+\int e^x d\left(\frac{1}{x}\right)=$$

$$=\int\frac{1}{x}e^x dx+\frac{1}{x}e^x-\int\frac{1}{x}e^x dx=\frac{1}{x}e^x+C.$$

Якщо ж $a\neq-1$, то аналогічно одержуємо:

$$\int\left(\frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}\right)e^x dx=-\frac{a}{x}e^x+(a+1)\int\frac{e^x}{x}dx.$$

Останній інтеграл заміною $x=\ln t$ зводиться до інтеграла $\displaystyle\int\frac{dt}{\ln t}$, який, як відомо, “не береться”.

10.8 Очевидно $\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^4-2x^2+1}=\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{(x-1)^2(x+1)^2}$.

Даний інтеграл буде раціональною функцією, якщо розклад на суму найпростіших дробів матиме вид:

$$\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{(x-1)^2(x+1)^2}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{(x+1)^2}.$$

Оскільки після зведення до спільного знаменника чисельник правої частини рівності не міститиме члена з x^3, то з необхідністю $a=0$. Враховуючи це, маємо рівність $bx^2+cx+d=A(x+1)^2+B(x-1)^2$. Звідси $A+B=b$, $2A-2B=c$, $A+B=d$, тобто повинна виконуватись умова $b=d$. Отже, інтеграл є раціональною функцією, якщо $a=0$, $b=d$.

10.9 При інтегруванні на проміжках, симетричних відносно нуля часто застосовують тотожність

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{0}^{a}\left(f(x)+f(-x)\right)dx. \qquad (10.1)$$

Таким чином,

$$\int_{-1}^{1}\frac{\cos^2 x\,dx}{(1+\sin x)(1+x^2)}=\int_{0}^{1}\left(\frac{\cos^2 x}{(1+\sin x)(1+x^2)}+\frac{\cos^2 x}{(1-\sin x)(1+x^2)}\right)dx=.$$

$$=\int_{0}^{1}\frac{\cos^2 x}{1+x^2}\left(\frac{1}{1+\sin x}+\frac{1}{1-\sin x}\right)dx=\int_{0}^{1}\frac{\cos^2 x}{1+x^2}\cdot\frac{2}{1-\sin^2 x}dx=$$

$$=2\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+x^2}=2arctg\,x\Big|_0^1=2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}.$$

10.10 $I=\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{xe^{x/2}+x^2+1}{e^x+1}dx=\int_{-1}^{1}\frac{xe^{x/2}}{e^x+1}dx+\int_{-1}^{1}\frac{x^2+1}{e^x+1}dx.$

Легко перевірити, що функція $f(x)=\dfrac{xe^{x/2}}{e^x+1}$ непарна, тому перший інтеграл дорівнює нулю. При обчисленні другого інтеграла скористаємось тотожністю (10.1):

$$I=\int_0^1\left(\frac{x^2+1}{e^x+1}+\frac{x^2+1}{e^{-x}+1}\right)dx=\int_0^1\left(x^2+1\right)\left(\frac{1}{e^x+1}+\frac{1}{e^{-x}+1}\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left(x^2+1\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Bigg|_0^1=\frac{4}{3}.$$

10.11 $\int_{-2}^{2}\frac{x^5+3\sqrt[3]{x}-2\sin x+1}{x^2+4}dx=\int_{-2}^{2}\frac{x^5+3\sqrt[3]{x}-2\sin x}{x^2+4}dx+\int_{-2}^{2}\frac{dx}{x^2+4}=$

$=\int_{-2}^{2}\frac{dx}{x^2+4}=\frac{1}{2}arctg\frac{x}{2}\Big|_{-2}^{2}=\frac{\pi}{4}$, оскільки перший інтеграл дорівнює нулю в силу непарності підінтегральної функції.

10.12 Застосуємо тотожність (10.1):

$$\int_{-1}^{1}x^{2013}\ln\left(1+e^x\right)dx=\int_0^1\left(x^{2013}\ln\left(1+e^x\right)-x^{2013}\ln\left(1+e^{-x}\right)\right)dx=$$

$$=\int_0^1 x^{2013}\ln\frac{1+e^x}{1+e^{-x}}dx=\int_0^1 x^{2013}\ln e^x dx=\int_0^1 x^{2014}dx=\frac{1}{2015}.$$

10.13 За тою ж тотожністю (10.1) маємо:

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\left(e^x+1\right)\sqrt{x^2+1}}=\int_0^1\left(\frac{1}{\left(e^x+1\right)\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{\left(e^{-x}+1\right)\sqrt{x^2+1}}\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{\left(e^x+1\right)\sqrt{x^2+1}}+\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)\sqrt{x^2+1}}\right)dx=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=$$

$$=\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|\Big|_0^1=\ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

10.14 Як і вище, одержуємо: $\int_{\lg 0,5}^{\lg 2}\frac{dx}{\left(10^x+1\right)\sqrt{x^2+1}}=$

$$=\int_{-\lg 2}^{\lg 2}\frac{dx}{\left(10^x+1\right)\sqrt{x^2+1}}=\int_0^{\lg 2}\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\ln\left(\lg 2+\sqrt{\lg^2 2+1}\right).$$

10.15 Як і в попередніх задачах, маємо:

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{dx}{\left(e^x+1\right)\cos x}=\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\cos x}=\ln\left|tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|\Bigg\|_0^{\pi/4}=\ln\left(tg\frac{3\pi}{8}\right)=\ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

($tg\frac{3\pi}{8}$ можна знайти як корінь рівняння $\frac{2x}{1-x^2}=-1$, яке одержується з формули для тангенса подвійного кута, враховуючи, що $tg\frac{3\pi}{4}=-1$).

10.16 $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{3+2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2-\pi x+\pi^2}dx=\int_0^{\pi/2}\frac{3+2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2-\pi x+\pi^2}dx+\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{3+2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2-\pi x+\pi^2}dx=$

$$=\left|\begin{matrix}\text{в другому}\\ \text{інтегралі}\\ x=\pi-t\end{matrix}\right|=\int_0^{\pi/2}\frac{3+2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2-\pi x+\pi^2}dx+\int_{\pi/2}^{0}\frac{3+2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}\right)}{(\pi-t)^2-\pi(\pi-t)+\pi^2}(-dt)=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{3+2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2-\pi x+\pi^2}dx+\int_0^{\pi/2}\frac{3+2\cos^2\frac{t}{2}}{t^2-\pi t+\pi^2}dt=\int_0^{\pi/2}\frac{6+2\left(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)}{x^2-\pi x+\pi^2}dx=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{8dx}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{3\pi^2}{4}}=8\cdot\frac{2}{\pi\sqrt{3}}arctg\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{16}{\pi\sqrt{3}}arctg\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{8}{3\sqrt{3}}.$$

10.17 Як і в попередній задачі, одержуємо:

$$\int_0^{\pi}\frac{1+4\cos^2\frac{x}{2}}{x^2-\pi x-2\pi^2}dx=\int_0^{\pi/2}\frac{6dx}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2-\frac{9\pi^2}{4}}=\frac{2}{\pi}\ln\left|\frac{x-2\pi}{x+\pi}\right|\Bigg\|_0^{\pi/2}=-\frac{2}{\pi}\ln 2.$$

10.18

$$\int_0^{\pi/2}\frac{4\sin^2 x-3}{2x^2-\pi x-\pi^2}dx=\int_0^{\pi/4}\frac{4\sin^2 x-3}{2x^2-\pi x-\pi^2}dx+\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{4\sin^2 x-3}{2x^2-\pi x-\pi^2}dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{в другому інтегралі}\\ \text{заміна } x=\dfrac{\pi}{2}-t\end{array}\right|=\int_0^{\pi/4}\frac{4\sin^2 x-3}{2x^2-\pi x-\pi^2}dx+\int_0^{\pi/4}\frac{4\cos^2 t-3}{2t^2-\pi t-\pi^2}dt=$$

$$=\int_0^{\pi/4}\frac{4\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)-6}{2x^2-\pi x-\pi^2}dx=-\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^2-\dfrac{9\pi^2}{16}}=$$

$$=-\frac{2}{3\pi}\ln\left|\frac{x-\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{3\pi}{4}}{x-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{3\pi}{4}}\right|\Bigg|_0^{\pi/4}=\frac{2}{3\pi}\ln 2.$$

10.19 Аналогічно, як і вище, маємо:

$$\int_0^{\pi/2}\frac{3+4\cos^2 x}{4x^2-2\pi x+\pi^2}dx=\int_0^{\pi/4}\frac{10dx}{4x^2-2\pi x+\pi^2}=$$

$$=\frac{5}{2}\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^2+\dfrac{3\pi^2}{16}}=\frac{10}{\pi\sqrt{3}}arctg\frac{x-\dfrac{\pi}{4}}{\dfrac{\pi\sqrt{3}}{4}}\Bigg|_0^{\pi/4}=\frac{5}{3\sqrt{3}}.$$

10.20 $I=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{3+4\sin^2\frac{x}{2}}{\sqrt{x^2-\pi x+9}}dx=\int_0^{\pi}\frac{5-2\cos x}{\sqrt{x^2-\pi x+9}}dx=\left|\begin{array}{c}\text{заміна}\\ x=t+\pi/2\end{array}\right|=$

$=\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{5+2\sin t}{\sqrt{t^2+9-\dfrac{\pi^2}{4}}}dt$. Далі застосуємо тотожність (10.1):

$$I=\int_0^{\pi/2}\left(\frac{5+2\sin t}{\sqrt{t^2+9-\dfrac{\pi^2}{4}}}+\frac{5-2\sin t}{\sqrt{t^2+9-\dfrac{\pi^2}{4}}}\right)dt=10\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{t^2+9-\dfrac{\pi^2}{4}}}=$$

$$=10\ln\left|t+\sqrt{t^2+9-\frac{\pi^2}{4}}\right|\Bigg|_0^{\pi/2}=10\left(\ln\left(\frac{\pi}{2}+3\right)-\ln\left(\sqrt{9-\frac{\pi^2}{4}}\right)\right)=$$

$$=10\ln\frac{3+\frac{\pi}{2}}{\sqrt{9-\frac{\pi^2}{4}}}=10\ln\sqrt{\frac{3+\frac{\pi}{2}}{3-\frac{\pi}{2}}}=5\ln\frac{6+\pi}{6-\pi}.$$

10.21 $I=\int\limits_0^{\pi}\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{\sqrt{2\pi^2-x^2+\pi x}}dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}\frac{1+\cos x}{\sqrt{2\pi^2-x^2+\pi x}}dx$. Далі заміною $x=t+\pi/2$ зводимо інтеграл до виду $I=\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1-\sin t}{\sqrt{\frac{9\pi^2}{4}-t^2}}dt$, а після застосування тотожності (10.1) одержуємо: $I=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{\frac{9\pi^2}{4}-t^2}}=\arcsin\frac{t}{\frac{3\pi}{2}}\Bigg|_0^{\pi/2}=\arcsin\frac{1}{3}$.

10.22

$$I=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{2-\cos^2 x}{\sqrt{2x^2-\pi x+2\pi^2}}dx=\left|\begin{array}{l}\textit{заміна}\\ x=\frac{\pi}{2}-t\end{array}\right|=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{2-\sin^2 t}{\sqrt{2t^2-\pi t+2\pi^2}}dt.$$

Тоді $I=\frac{1}{2}\left(\int\limits_0^{\pi/2}\frac{2-\cos^2 x}{\sqrt{2x^2-\pi x+2\pi 2}}dx+\int\limits_0^{\pi/2}\frac{2-\sin^2 x}{\sqrt{2x^2-\pi x+2\pi^2}}dx\right)=$

$$=\frac{3}{2\sqrt{2}}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{15\pi^2}{16}}}=\frac{3}{2\sqrt{2}}\ln\left|x-\frac{\pi}{4}+\sqrt{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{15\pi^2}{16}}\right|\Bigg|_0^{\pi/2}=$$

$$=\frac{3}{2\sqrt{2}}\left(\ln\frac{5\pi}{4}-\ln\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{3}{2\sqrt{2}}\ln\frac{5}{3}.$$

10.23. Як і в попередній задачі одержуємо:

$$\int_0^{\pi/2}\frac{5+2\sin^2 x}{\sqrt{3\pi^2-2x^2+\pi x}}dx=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi/2}\frac{5+2\sin^2 x}{\sqrt{3\pi^2-2x^2+\pi x}}dx+\right.$$

$$\left.+\int_0^{\pi/2}\frac{5+2\cos^2 x}{\sqrt{3\pi^2-2x^2+\pi x}}dx\right)=\frac{6}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{\frac{25\pi^2}{16}-\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}}=$$

$$=\frac{6}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x-\frac{\pi}{4}}{\frac{5\pi}{4}}\Bigg|_0^{\pi/2}=6\sqrt{2}\arcsin\frac{1}{5}.$$

10.24

$$\int_0^{\pi}\frac{1+2\cos^3 x}{\sqrt{x^2-\pi x+4}}dx=\int_0^{\pi/2}\frac{1+2\cos^3 x}{\sqrt{x^2-\pi x+4}}dx+\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{1+2\cos^3 x}{\sqrt{x^2-\pi x+4}}dx=$$

$$=\left|\begin{matrix}\textit{заміна в другому}\\ \textit{інтегралі } x=\pi-t\end{matrix}\right|=\int_0^{\pi/2}\frac{1+2\cos^3 x}{\sqrt{x^2-\pi x+4}}dx+\int_0^{\pi/2}\frac{1-2\cos^3 t}{\sqrt{t^2-\pi t+4}}dt=$$

$$=2\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+4-\frac{\pi^2}{4}}}=2\ln\left|x-\frac{\pi}{2}+\sqrt{x^2-\pi x+4}\right|\Bigg|_0^{\pi/2}=\ln\frac{4+\pi}{4-\pi}.$$

10.25 Зробимо заміну $x=\pi+t$ і застосуємо тотожність (10.1): $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{4+3\sin^5 x}{\sqrt{3\pi^2-x^2+2\pi x}}dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{4-3\sin^5 t}{\sqrt{4\pi^2-t^2}}dt=$

$$=\int_0^{\pi}\left(\frac{4-3\sin^5 t}{\sqrt{4\pi^2-t^2}}+\frac{4+3\sin^5 t}{\sqrt{4\pi^2-t^2}}\right)dt=8\int_0^{\pi}\frac{dt}{\sqrt{4\pi^2-t^2}}=8\arcsin\frac{t}{2\pi}\Bigg|_0^{\pi}=\frac{4\pi}{3}.$$

10.26 Зробимо підстановку $x=1-t$ і застосуємо рівність (10.1):

$$\int_0^{2}\frac{\sqrt{\sin(3-x)}\,dx}{\sqrt{\sin(3-x)}+\sqrt{\sin(x+1)}}=\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{\sin(2+t)}\,dt}{\sqrt{\sin(2+t)}+\sqrt{\sin(2-t)}}=$$

$$=\int_0^1\left(\frac{\sqrt{\sin(2+t)}}{\sqrt{\sin(2+t)}+\sqrt{\sin(2-t)}}+\frac{\sqrt{\sin(2-t)}}{\sqrt{\sin(2-t)}+\sqrt{\sin(2+t)}}\right)dt=\int_0^1 dt=1.$$

10.27 $\int_0^1\frac{(x-1)e^x dx}{(x+1)^3}=\int_0^1\frac{(x+1-2)e^x dx}{(x+1)^3}=\int_0^1\frac{e^x dx}{(x+1)^2}-2\int_0^1\frac{e^x dx}{(x+1)^3}=$

$$=\int_0^1\frac{e^x dx}{(x+1)^2}+\int_0^1 e^x d\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)=\int_0^1\frac{e^x dx}{(x+1)^2}+\left.\frac{e^x}{(x+1)^2}\right|_0^1-\int_0^1\frac{e^x dx}{(x+1)^2}=\frac{e}{4}-1.$$

10.28 $\int_0^1\frac{xe^x dx}{(x+1)^2}=\int_0^1\frac{(x+1-1)e^x dx}{(x+1)^2}=\int_0^1\frac{e^x dx}{x+1}-\int_0^1\frac{e^x dx}{(x+1)^2}=$

$$=\int_0^1\frac{e^x dx}{x+1}+\int_0^1 e^x d\left(\frac{1}{x+1}\right)=\int_0^1\frac{e^x dx}{x+1}+\left.\frac{e^x}{x+1}\right|_0^1-\int_0^1\frac{e^x dx}{x+1}=\frac{e}{2}-1.$$

10.29 $I=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+ctg^{2013}x}=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^{2013}x\,dx}{\sin^{2013}x+\cos^{2013}x}=$

$=\left|\begin{matrix}\textit{заміна}\\ x=\pi/2-t\end{matrix}\right|=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^{2013}x\,dx}{\cos^{2013}x+\sin^{2013}x}$. Тоді

$$I=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^{2013}x\,dx}{\sin^{2013}x+\cos^{2013}x}+\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^{2013}x\,dx}{\cos^{2013}x+\sin^{2013}x}\right)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}dx=\frac{\pi}{4}.$$

10.30

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2}\ln(ctg\,x+1)dx=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\ln\frac{\cos x+\sin x}{\sin x}dx=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\ln\frac{\sqrt{2}\cos(x-\pi/4)}{\sin x}dx=$$

$$=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\ln\sqrt{2}\,dx+\int_{\pi/4}^{\pi/2}\ln\cos(x-\pi/4)dx-\int_{\pi/4}^{\pi/2}\ln\sin x\,dx=\frac{\pi\ln 2}{8},$$

оскільки $\int_{\pi/4}^{\pi/2}\ln\cos(x-\pi/4)dx=\left|\;x=\frac{3\pi}{4}-t\right|=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\ln\sin t\,dt$.

10.31 $\int_0^1\frac{\ln(x+1)}{1+x^2}dx=\left|\begin{matrix}x=tg\,t,\ t=arctg\,x\\ dt=\frac{dx}{1+x^2}\end{matrix}\right|=$

$$=\int_0^{\pi/4}\ln(tg\,t+1)dt=\left|t=\frac{\pi}{2}-z\right|=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\ln(ctg\,z+1)dz=\frac{\pi\ln 2}{8}$$ (див. попередню задачу).

10.32

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{ch^2\left(\frac{\cos x}{2}\right)}dx=-2\int_0^{\pi}x\frac{-\frac{\sin x}{2}}{ch^2\left(\frac{\cos x}{2}\right)}dx=-2\int_0^{\pi}x\frac{d\left(\frac{\cos x}{2}\right)}{ch^2\left(\frac{\cos x}{2}\right)}=$$

$$-2\left(x\,th\left(\frac{\cos x}{2}\right)\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}th\left(\frac{\cos x}{2}\right)dx\right).$$ Очевидно $\int_0^{\pi}th\left(\frac{\cos x}{2}\right)dx=$

$=\left|x=\frac{\pi}{2}-t\right|=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}th\left(\frac{\sin t}{2}\right)dt=0$ в силу непарності підінтегральної функції. Отже, $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{ch^2\left(\frac{\cos x}{2}\right)}dx=-2x\,th\left(\frac{\cos x}{2}\right)\Big|_0^{\pi}=2\pi\,th\frac{1}{2}$.

10.33 $I=\int_a^b\frac{f(x-a)}{f(x-a)+f(b-x)}dx=\left|x=\frac{a+b}{2}+t\right|=$

$=\int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}}\frac{f\left(\frac{b-a}{2}+t\right)}{f\left(\frac{b-a}{2}+t\right)+f\left(\frac{b-a}{2}-t\right)}dt$. Далі застосуємо тотожність (10.1):

$$I=\int_0^{\frac{b-a}{2}}\left(\frac{f\left(\frac{b-a}{2}+t\right)}{f\left(\frac{b-a}{2}+t\right)+f\left(\frac{b-a}{2}-t\right)}+\frac{f\left(\frac{b-a}{2}-t\right)}{f\left(\frac{b-a}{2}-t\right)+f\left(\frac{b-a}{2}+t\right)}\right)dt=$$

$$=\int_0^{\frac{b-a}{2}}dt=\frac{b-a}{2}.$$

10.34 Зауважимо, що $\left(\dfrac{\cos x-\sin x}{e^x}\right)'=-\dfrac{2\cos x}{e^x}$. Тоді

$$\int_0^{\pi/4}\frac{\cos x}{e^x+\cos x-\sin x}dx=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\frac{\frac{-2\cos x}{e^x}dx}{1+\frac{\cos x-\sin x}{e^x}}=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\frac{d\left(\frac{\cos x-\sin x}{e^x}\right)}{1+\frac{\cos x-\sin x}{e^x}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|1+\frac{\cos x-\sin x}{e^x}\right|\Bigg|_0^{\pi/4}=-\frac{1}{2}(\ln 1-\ln 2)=\frac{\ln 2}{2}.$$

10.35 Скористаємось тотожністю (10.1):

$$\int_{-a}^{a}\frac{dx}{1+f(x)+\sqrt{1+f^2(x)}}=\int_0^a\left(\frac{1}{1+f(x)+\sqrt{1+f^2(x)}}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{1-f(x)+\sqrt{1+f^2(x)}}\right)dx=\int_0^a\frac{2+2\sqrt{1+f^2(x)}}{2+2\sqrt{1+f^2(x)}}dx=\int_0^a dx=a,$$ що

і потрібно було довести.

10.36 Вважаємо, що $a<b$, крім того, для існування інтеграла необхідно, щоб виконувалась умова $b-a<\pi/2$; отже $0<b-a<\pi/2$.

$$\int_a^b\frac{dx}{\cos(x-a)\cdot\cos(b-x)}=2\int_a^b\frac{dx}{\cos(b-a)+\cos(2x-(a+b))}=$$

$$=\left|2x-(a+b)=t\right|=\int_{a-b}^{b-a}\frac{dt}{\cos(b-a)+\cos t}=2\int_0^{b-a}\frac{dt}{\cos(b-a)+\cos t}=$$

$$=\left|z=tg\frac{t}{2}\right|=4\int_0^{tg\frac{b-a}{2}}\frac{dz}{(1+z^2)\cos(b-a)+1-z^2}=$$

$$=4\int_0^{tg\frac{b-a}{2}}\frac{dz}{1+\cos(b-a)-(1-\cos(b-a))z^2}=$$

$$=-\frac{4}{1-\cos(b-a)}\int_0^{tg\frac{b-a}{2}}\frac{dz}{z^2-\frac{1+\cos(b-a)}{1-\cos(b-a)}}=$$

$$=-\frac{4}{1-\cos(b-a)}\int_0^{tg\frac{b-a}{2}}\frac{dz}{z^2-ctg^2\frac{b-a}{2}}=$$

$$=-\frac{4}{1-\cos(b-a)}\cdot\frac{1}{2ctg\frac{b-a}{2}}\ln\left|\frac{z-ctg\frac{b-a}{2}}{z+ctg\frac{b-a}{2}}\right|\Bigg|_0^{tg\frac{b-a}{2}}=$$

$$-\frac{2}{(1-\cos(b-a))\sqrt{\frac{1+\cos(b-a)}{1-\cos(b-a)}}}\ln\left|\frac{tg\frac{b-a}{2}-ctg\frac{b-a}{2}}{tg\frac{b-a}{2}+ctg\frac{b-a}{2}}\right|=$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{1-\cos^2(b-a)}}\ln\left|-\cos(b-a)\right|=-\frac{2\ln(\cos(b-a))}{\sin(b-a)}.$$

10.37 Можна застосувати той же прийом, що застосовувався при обчисленні інтеграла в 10.29. Обчислимо інтеграл іншим способом: $I=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+(tg\,x)^{\sqrt{2}}}=\left|tg\,x=t\right|=$

$$=\int_0^{\infty}\frac{dt}{(1+t^2)(1+t^{\sqrt{2}})}=\left|t=\frac{1}{z}\right|=\int_0^{\infty}\frac{z^{\sqrt{2}}dz}{(1+z^2)(1+z^{\sqrt{2}})}=\int_0^{\infty}\frac{(z^{\sqrt{2}}+1-1)dz}{(1+z^2)(1+z^{\sqrt{2}})}=$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{dz}{1+z^2}-\int_0^{\infty}\frac{dz}{(1+z^2)(1+z^{\sqrt{2}})}=\frac{\pi}{2}-I\,.$$

Отже, $I=\frac{\pi}{2}-I$, звідки знаходимо $I=\pi/4$.

10.38 Нехай $I=\int\limits_a^b f(x)dx+\int\limits_{f(a)}^{f(b)} g(x)dx$. В другому інтегралі зробимо заміну $x=f(t)$, тоді $g(x)=t$, $x=f(a)\Rightarrow t=a$, $x=f(b)\Rightarrow t=b$, і $\int\limits_{f(a)}^{f(b)} g(x)dx=\int\limits_a^b t\cdot f'(t)dt=$

$$=\begin{vmatrix} u=t, & du=dt \\ dv=f'(t)dt, & v=f(t)\end{vmatrix}=t\cdot f(t)\Big|_a^b-\int\limits_a^b f(t)dt.$$

Таким чином,

$$\int\limits_a^b f(x)dx+\int\limits_{f(a)}^{f(b)} g(x)dx=\int\limits_a^b f(x)dx+t\cdot f(t)\Big|_a^b-\int\limits_a^b f(t)dt=$$

$=bf(b)-af(a)$, що і вимагалось.

10.39 $\int\limits_0^1 (2x-1)^{2n+1}a^{x^2-x}dx=\begin{vmatrix} заміна \\ 2x-1=t\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^1 t^{2n+1}a^{\frac{1}{4}(t^2-1)}dt=0$

в силу непарності підінтегральної функції.

10.40 Із умови задачі випливає, що функція $g(t)=f(t+a)-b$ буде непарною на $[-a,\,a]$. Отже, маємо

$$\int\limits_0^{2a} f(x)dx=\int\limits_0^{2a}(b+f(x)-b)dx=2ab+\int\limits_0^{2a}(f(x)-b)dx=|x=t+a|=$$

$$=2ab+\int\limits_{-a}^{a}(f(t+a)-b)dt=2ab,$$

оскільки останній інтеграл дорівнює нулю.

10.41 Скористаємось тотожністю $arcctga+arcctg(-a)=\pi$. Отже,

$$\int\limits_0^{\pi} arcctg(\cos x)dx=\int\limits_0^{\pi/2} arcctg(\cos x)dx+\int\limits_{\pi/2}^{\pi} arcctg(\cos x)dx=$$

$$=\begin{vmatrix} в\ другому \\ інтегралі \\ x=\pi-t\end{vmatrix}=\int\limits_0^{\pi/2} arcctg(\cos x)dx+\int\limits_0^{\pi/2} arcctg(-\cos t)dt=$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(arcctg(\cos x) + arcctg(-\cos x) \right) dx = \int_0^{\pi/2} \pi dx = \frac{\pi^2}{2}.$$

10.42 Зауважимо, що невласний інтеграл є збіжним, оскільки $\left|\ln(\sin x)\right| : \dfrac{1}{x^{\alpha}} \to 0$ при $x \to +0$ ($0 < \alpha < 1$). Очевидно $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx = \int_0^{\pi/4} \ln(\sin x) dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln(\sin x) dx$.

Але $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln(\sin x) dx = \left| x = \dfrac{\pi}{2} - t \right| = \int_0^{\pi/4} \ln(\cos t) dt$. Тоді

$$I = \int_0^{\pi/4} \ln(\sin x) dx + \int_0^{\pi/4} \ln(\cos x) dx = \int_0^{\pi/4} \ln(\sin x \cdot \cos x) dx =$$

$$= \int_0^{\pi/4} \ln\left(\frac{\sin 2x}{2} \right) dx = \int_0^{\pi/4} \ln(\sin 2x) dx - \int_0^{\pi/4} \ln 2\, dx = \int_0^{\pi/4} \ln(\sin 2x) dx -$$

$$- \frac{\pi \ln 2}{4} = \left| 2x = t \right| = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) \frac{dt}{2} - \frac{\pi \ln 2}{4} = \frac{1}{2} I - \frac{\pi \ln 2}{4}.$$

Одержано рівняння $I = \dfrac{1}{2} I - \dfrac{\pi \ln 2}{4}$, із якого знаходимо

$$I = -\frac{\pi \ln 2}{2}.$$

10.43 Очевидно

$$I = \int_0^1 \frac{x \ln(x^2 + x) + \ln(x+1)}{x(x+1)} dx = \int_0^1 \frac{x \ln x + x \ln(x+1) + \ln(x+1)}{x(x+1)} dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{\ln x}{x+1} dx + \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x} dx = I_2 + I_2,$$

причому I_2 не є невласним, оскільки $\ln(1+x) \sim x$ при $x \to 0$. I_1 обчислимо частинами: $I_1 = \ln x \cdot \ln(1+x)\Big|_0^1 - - \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x} dx = 0 - I_2 = -I_2$. Отже, $I = I_1 + I_2 = 0$.

10.44 $\int\limits_0^{\pi}\frac{x^2}{1-\cos x}dx=\int\limits_0^{\pi}\frac{x^2}{2\sin^2(x/2)}dx=-\int\limits_0^{\pi}x^2d\left(ctg(x/2)\right)=$

$$=-x^2ctg(x/2)\Big|_0^{\pi}+2\int\limits_0^{\pi}x\,ctg(x/2)dx=0+8\int\limits_0^{\pi}\frac{x}{2}ctg(x/2)d(x/2)=$$

$$=8\int\limits_0^{\pi/2}x\,ctgx\,dx=8\int\limits_0^{\pi/2}x\frac{\cos x\,dx}{\sin x}=8\int\limits_0^{\pi/2}x\,d\left(\ln(\sin x)\right)=8x\ln(\sin x)\Big|_0^{\pi/2}-$$

$$-8\int\limits_0^{\pi/2}\ln(\sin x)dx=0-8\left(-\frac{\pi\ln 2}{2}\right)=4\pi\ln 2\,.$$

Останній інтеграл обчислено в 10.42.

10.45 Скористаємось тотожністю (10.1), а також результатом, одержаним в 10.42:

$$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\ln(\cos x)}{2^x+1}dx=\int\limits_0^{\pi/2}\left(\frac{\ln(\cos x)}{2^x+1}+\frac{\ln(\cos x)}{2^{-x}+1}\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{2^x+1}+\frac{1}{2^{-x}+1}\right)\ln(\cos x)dx=\int\limits_0^{\pi/2}\ln(\cos x)dx=\left|x=\frac{\pi}{2}-t\right|=$$

$$=\int\limits_0^{\pi/2}\ln(\sin t)dt=-\frac{\pi\ln 2}{2}\,.$$

10.46 Розглянемо різницю $\int\limits_0^{\pi}xf(\sin x)dx-\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi}f(\sin x)dx=$

$=\int\limits_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(\sin x)dx=\left|x-\frac{\pi}{2}=t\right|=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}t\,f(\cos t)dt=0$ в силу непарності підінтегральної функції.

10.47 Як і в попередній задачі: $\int\limits_0^{\pi}xf(\cos x)dx-$

$$-\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi}f(\cos x)dx=\int\limits_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(\cos x)dx=\left|x-\frac{\pi}{2}=t\right|=$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} t\, f(-\sin t)dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} t\, f(\sin t)dt = 0,$$

оскільки підінтегральна функція непарна.

10.48 $\int_0^{2\pi} \sin(\sin x + nx)dx = |x - \pi = t| = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(-\sin t + nt + n\pi)dt =$

$= (-1)^n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(-\sin t + nt)dt = 0$, бо підінтегральна функція непарна.

10.49 Позначимо $I_n = \int_0^{\pi/2} \left(\dfrac{\sin n\varphi}{\sin\varphi} \right)^2 d\varphi$, зауважимо, що $I_1 = \dfrac{\pi}{2}$. Розглянемо $I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi/2} \dfrac{\sin^2(n+1)\varphi - \sin^2 n\varphi}{\sin^2\varphi} d\varphi =$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos(2n+2)\varphi - 1 + \cos 2n\varphi}{2\sin^2\varphi} d\varphi = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2n\varphi - \cos(2n+2)\varphi}{2\sin^2\varphi} d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin\varphi \cdot \sin(2n+1)\varphi}{2\sin^2\varphi} d\varphi = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)\varphi}{\sin\varphi} d\varphi.$$

Позначимо $J_n = \int_0^{\pi/2} \dfrac{\sin(2n+1)\varphi}{\sin\varphi} d\varphi$, очевидно $J_0 = \dfrac{\pi}{2}$. Крім того $J_n - J_{n-1} = \int_0^{\pi/2} \dfrac{\sin(2n+1)\varphi - \sin(2n-1)\varphi}{\sin\varphi} d\varphi =$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin\varphi \cdot \cos 2n\varphi}{\sin\varphi} d\varphi = 2\int_0^{\pi/2} \cos 2n\varphi\, d\varphi = \frac{1}{n} \sin 2n\varphi \Big|_0^{\pi/2} = 0.$$

Отже $J_n = \dfrac{\pi}{2}$ при будь-якому n. Тоді при будь-якому n $I_{n+1} - I_n = \dfrac{\pi}{2}$, а тому $I_n = \dfrac{n\pi}{2}$.

10.50 Очевидно

$$I=\int_0^{2013\pi}\frac{\sin 2013x}{\sin x}dx=\int_0^{\pi}\frac{\sin 2013x}{\sin x}dx+\sum_{k=1}^{1006}\int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi}\frac{\sin 2013x}{\sin x}dx.$$

Але

$$\int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi}\frac{\sin 2013x}{\sin x}dx=\left|x=2k\pi+t\right|=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin 2013t}{\sin t}dt=2\int_0^{\pi}\frac{\sin 2013t}{\sin t}dt.$$

Отже,

$$I=\int_0^{\pi}\frac{\sin 2013x}{\sin x}dx+\sum_{k=1}^{1006}2\int_0^{\pi}\frac{\sin 2013x}{\sin x}dx=2013\int_0^{\pi}\frac{\sin 2013x}{\sin x}dx.$$

Нехай $J_n=\int_0^{\pi}\frac{\sin(2n-1)x}{\sin x}dx$, зауважимо, що $J_1=\pi$; і

$$J_{n+1}-J_n=\int_0^{\pi}\frac{\sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x}{\sin x}dx=\int_0^{\pi}\frac{2\sin x\cdot\cos 2nx}{\sin x}dx=$$

$=2\int_0^{\pi}\cos 2nx\,dx=0$. Тому $\int_0^{\pi}\frac{\sin(2n-1)x}{\sin x}dx=\pi$ при будь-якому натуральному n, Зокрема і $\int_0^{\pi}\frac{\sin 2013x}{\sin x}dx=\pi$. Таким чином, $\int_0^{2013\pi}\frac{\sin 2013x}{\sin x}dx=2013\pi$.

10.51 Позначимо $\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx=F(b)$. Тоді $F'(b)=$

$=\int_0^1\frac{x^b\ln x}{\ln x}dx=\frac{1}{b+1}$, тобто $F(b)=\int_0^b\frac{dt}{t+1}+C=\ln(b+1)+C$.

Але $F(b)\big|_{b=a}=0$, звідки $C=-\ln(a+1)$ і $F(b)=\ln\frac{b+1}{a+1}$,

тобто $\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx=\ln\frac{b+1}{a+1}$.

10.52 Маємо $\int\limits_0^{\pi/2}\cos ax\cdot(\cos x)^{a-2}dx=\int\limits_0^{\pi/2}(\cos(a-1)x\cdot\cos x-$

$$-\sin(a-1)x\cdot\sin x)(\cos x)^{a-2}dx=\int\limits_0^{\pi/2}\cos(a-1)x\cdot(\cos x)^{a-1}dx-$$

$$-\int\limits_0^{\pi/2}\sin(a-1)x\cdot\sin x\cdot(\cos x)^{a-2}dx.$$

Розглянемо окремо другий інтеграл:

$$-\int\limits_0^{\pi/2}\sin(a-1)x\cdot\sin x\cdot(\cos x)^{a-2}dx=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin(a-1)x}{a-1}d\left((\cos x)^{a-1}\right)=$$

$$=\frac{\sin(a-1)x}{a-1}(\cos x)^{a-1}\Big|_0^{\pi/2}-\int\limits_0^{\pi/2}\cos(a-1)x\cdot(\cos x)^{a-1}dx.$$

Отже, $\int\limits_0^{\pi/2}\cos ax(\cos x)^{a-2}dx=\frac{\sin(a-1)x}{a-1}(\cos x)^{a-1}\Big|_0^{\pi/2}=0$.

10.53 Нехай $I_k=\int\limits_0^1\frac{\ln(1-x^k)}{x}dx$. Маємо $I_k=\left|x^k=t\right|=$ $=\frac{1}{k}\int\limits_0^1\frac{\ln(1-t)}{t}dt$, тобто $I_k=\frac{1}{k}I_1$. Тоді $I=\int\limits_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}dx=$ $=I_2-I_1=\frac{1}{2}I_1-I_1=-\frac{1}{2}I_1$ і $I_1=-2I_2=-\frac{\pi^2}{6}$. Таким чином,

$$\int\limits_0^1\frac{\ln(1-x^3)}{x}dx=I_3=\frac{1}{3}I_1=-\frac{\pi^2}{18}.$$

10.54 $I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x(b+c\ln x)}{x^4+a^4}dx=\int\limits_0^{a}\frac{x(b+c\ln x)}{x^4+a^4}dx+\int\limits_a^{+\infty}\frac{x(b+c\ln x)}{x^4+a^4}dx.$

Але $\int\limits_a^{+\infty}\frac{x(b+c\ln x)}{x^4+a^4}dx=\left|x=\frac{a^2}{t}\right|=\int\limits_0^{a}\frac{\frac{a^2}{t}\left(b+c\ln\frac{a^2}{t}\right)}{\frac{a^8}{t^4}+a^4}\frac{a^2}{t^2}dt=$

$$= \int_0^a \frac{t\left(b + c\ln\frac{a^2}{t}\right)}{a^4 + t^4}\, dt \; .$$

Тоді $I = \int_0^a \frac{x(b + c\ln x)}{x^4 + a^4}\, dx + \int_0^a \frac{x\left(b + c\ln\frac{a^2}{x}\right)}{x^4 + a^4}\, dx =$

$$= \int_0^a \frac{x\left(2b + c\left(\ln x + \ln\frac{a^2}{x}\right)\right)}{x^4 + a^4}\, dx = 2(b + c\ln a)\int_0^a \frac{x\, dx}{x^4 + a^4}\, dx =$$

$$= (b + c\ln a)\int_0^a \frac{d\left(x^2\right)}{a^4 + x^4} = \frac{b + c\ln a}{a^2}\, arctg\, \frac{x^2}{a^2}\Bigg|_0^a == \frac{\pi(b + c\ln a)}{4a^2}\, .$$

10.55

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^m arctg\, x}{x^{2(m+1)} + 1}\, dx = \int_0^1 \frac{x^m arctg\, x}{x^{2(m+1)} + 1}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^m arctg\, x}{x^{2(m+1)} + 1}\, dx = I_1 + I_2\, .$$

$$I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{x^{m+1} arctg\, x}{x^{2(m+1)} + 1}\, dx = \left| x = \frac{1}{t} \right| = \int_0^1 \frac{\frac{1}{t^m}\, arctg\frac{1}{t}}{\frac{1}{t^{2(m+1)}} + 1} \cdot \frac{dt}{t^2} = \int_0^1 \frac{t^m arctg\frac{1}{t}}{t^{2(m+1)} + 1}\, dt\, .$$

Далі скористаємось тотожністю $arctg\, x + arctg\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ при $x > 0$. отже,

$$I = \int_0^1 \frac{x^m arctg\, x}{x^{2(m+1)} + 1}\, dx + \int_0^1 \frac{x^m arctg\frac{1}{x}}{x^{2(m+1)} + 1}\, dx = \int_0^1 \frac{x^m\left(arctg\, x + arctg\frac{1}{x}\right)}{x^{2(m+1)} + 1}\, dx =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{x^m dx}{x^{2(m+1)} + 1} = \frac{\pi}{2(m+1)}\int_0^1 \frac{d\left(x^{m+1}\right)}{\left(x^{m+1}\right)^2 + 1}\, dx = \frac{\pi}{2(m+1)}\, arctg\, x\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{\pi^2}{8(m+1)}\, .$$

10.56 Застосуємо формулу інтегрування частинами:

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{arctgx^2}{x^2+1}dx=\begin{vmatrix} u=arctgx^2\,,\ du=\dfrac{2x\,dx}{x^4+1} \\ dv=\dfrac{dx}{x^2+1},\ \ v=arctgx \end{vmatrix}=arctgx\cdot arctgx^2\Big|_0^{+\infty}-$$

$-2\int_0^{+\infty}\frac{x\,arctg\,x}{x^4+1}dx$. Але $\int_0^{+\infty}\frac{x\,arctg\,x}{x^4+1}dx=\frac{\pi^2}{16}$ (див. 10.55 при $m=1$). Таким чином,

$$I=arctg\,x\cdot arctg\,x^2\Big|_0^{+\infty}-2\frac{\pi^2}{16}=\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi^2}{8}.$$

10.57

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{2013}\,dx}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^{2013}\right)}=\int_0^1\frac{x^{2013}dx}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^{2013}\right)}+\int_1^{+\infty}\frac{x^{2013}dx}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^{2013}\right)}.$$

Але $\int_1^{+\infty}\frac{x^{2013}\,dx}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^{2013}\right)}=\left|x=\frac{1}{t}\right|=\int_0^1\frac{dt}{t^{2013}\cdot t^2\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{t^{2013}}\right)}=$

$=\int_0^1\frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left(1+t^{2013}\right)}$. Тоді $\int_0^{+\infty}\frac{x^{2013}\,dx}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^{2013}\right)}=\int_0^1\frac{x^{2013}dx}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^{2013}\right)}+$

$$+\int_0^1\frac{dx}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^{2013}\right)}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=arctg\,x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

10.58

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^{\alpha}\right)}=\int_0^1\frac{dx}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^{\alpha}\right)}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^{\alpha}\right)}=I_1+I_2.$$

Але $I_2=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^{\alpha}\right)}=\left|x=\frac{1}{t}\right|=\int_0^1\frac{t^{\alpha}dt}{\left(1+t^2\right)\left(1+t^{\alpha}\right)}$. Тоді

$I_1+I_2=\int_0^1\left(\frac{1}{1+x^{\alpha}}+\frac{x^{\alpha}}{1+x^{\alpha}}\right)\frac{dx}{1+x^2}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$, що не залежить від α.

10.59

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{\left(1+x^4\right)\left(1+x^{2014}\right)}=\left|t=x^2\right|=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left(1+t^{1007}\right)}=\frac{1}{2}\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}$$

(див. попередню задачу).

10.60 Застосуємо тотожність (10.1): $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)\left(1+a^x\right)}=$

$$=\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\left(1+x^2\right)\left(1+a^x\right)}+\frac{1}{\left(1+x^2\right)\left(1+a^{-x}\right)}\right)dx=\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+a^x}+\frac{1}{1+a^{-x}}\right)\frac{dx}{1+x^2}=$$

$=\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+a^x}+\frac{a^x}{1+a^x}\right)\frac{dx}{1+x^2}=\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$, що дійсно не залежить від a.

10.61 Збіжність даного невласного інтеграла рівносильна збіжності інтегралів $I_1=\int\limits_0^1\frac{\ln x}{x^2+a^2}dx$ і $I_2=\int\limits_1^{\infty}\frac{\ln x}{x^2+a^2}dx$.

Нехай $0<\lambda<1$. Тоді $\frac{\ln x}{x^2+a^2}:\frac{1}{x^\lambda}=\frac{x^{\lambda}\cdot\ln x}{x^2+a^2}\to 0$ при $x\to 0$.

Якщо ж $1<\lambda<2$, то $\frac{\ln x}{x^2+a^2}:\frac{1}{x^\lambda}=\frac{x^{2}}{x^2+a^2}\cdot\frac{\ln x}{x^{2-\lambda}}\to 0$ при $x\to+\infty$.

Тому за ознакою порівняння інтеграли I_1 і I_2 збігаються, а це означає, що збігається і даний невласний інтеграл. Знайдемо його значення:

$$\int_0^{\infty}\frac{\ln x\,dx}{x^2+a^2}=\left|x=at\right|=\int_0^{\infty}\frac{\left(\ln t+\ln a\right)adt}{a^2\left(t^2+1\right)}=\frac{1}{a}\left(\int_0^{\infty}\frac{\ln tdt}{t^2+1}+\int_0^{\infty}\frac{\ln adt}{t^2+1}\right)=$$

$=\frac{1}{a}\left(\int\limits_0^1\frac{\ln tdt}{t^2+1}+\int\limits_1^{\infty}\frac{\ln tdt}{t^2+1}+\ln a\cdot arctgt\Big|_0^{+\infty}\right)=\frac{\pi\ln a}{2a}$, оскільки

$$\int_1^{\infty}\frac{\ln tdt}{t^2+1}=\left|t=\frac{1}{s}\right|=-\int_0^1\frac{\ln s\,ds}{s^2+1}.$$

10.62 $\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+x^{\alpha}}-\frac{1}{1+x^{\beta}}\right)\frac{1}{x}dx=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\left(x^{\beta}-x^{\alpha}\right)dx}{\left(1+x^{\alpha}\right)\left(1+x^{\beta}\right)x}=$

$$=\int\limits_0^{1}\frac{\left(x^{\beta}-x^{\alpha}\right)dx}{\left(1+x^{\alpha}\right)\left(1+x^{\beta}\right)x}+\int\limits_1^{+\infty}\frac{\left(x^{\beta}-x^{\alpha}\right)dx}{\left(1+x^{\alpha}\right)\left(1+x^{\beta}\right)x}.$$

Але $\int\limits_0^{1}\frac{\left(x^{\beta}-x^{\alpha}\right)dx}{\left(1+x^{\alpha}\right)\left(1+x^{\beta}\right)x}=\left|x=\frac{1}{t}\right|=\int\limits_1^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{t^{\beta}}-\frac{1}{t^{\alpha}}\right)\frac{1}{t^{2}}dt}{\left(1+\frac{1}{t^{\alpha}}\right)\left(1+\frac{1}{t^{\beta}}\right)\frac{1}{t}}=$

$$=\int\limits_1^{+\infty}\frac{\left(t^{\alpha}-t^{\beta}\right)dt}{\left(1+t^{\alpha}\right)\left(1+t^{\beta}\right)t}=-\int\limits_1^{+\infty}\frac{\left(t^{\beta}-t^{\alpha}\right)dt}{\left(1+t^{\alpha}\right)\left(1+t^{\beta}\right)t}.$$

Тому $\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+x^{\alpha}}-\frac{1}{1+x^{\beta}}\right)\frac{1}{x}dx=0$.

Зауважимо, що невласний інтеграл $I=\int\limits_0^{1}\frac{\left(x^{\beta}-x^{\alpha}\right)dx}{\left(1+x^{\alpha}\right)\left(1+x^{\beta}\right)x}$ є збіжним. Дійсно, якщо $\alpha=\beta$, то $I=0$. Якщо ж $\alpha\neq\beta$, то досить порівняти підінтегральну функцію з функцією $1/x^{1-\gamma}$, де $\gamma=\min\{\alpha,\beta\}$.

10.63 Для всіх $x>0$ маємо:

$$\int\frac{1}{x^{2}}\left(1-\frac{1}{x}arctgx\right)dx=\int\frac{1}{x^{2}}dx-\int\frac{1}{x^{3}}arctgxdx=$$

$$=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\int arctgxd\left(\frac{1}{x^{2}}\right)=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^{2}}arctgx-\int\frac{dx}{x^{2}\left(x^{2}+1\right)}\right)=$$

$$=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^{2}}arctgx-\int\left(\frac{1}{x^{2}}-\frac{1}{x^{2}+1}\right)dx\right)=$$

$$=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^{2}}arctgx+\frac{1}{x}+arctgx\right)+C=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^{2}}arctgx-\frac{1}{x}+arctgx\right)+C=\frac{1}{2}\left(\frac{arctgx-x}{x^{2}}+arctgx\right)+C.$$

Таким чином, одною з первісних для підінтегральної функції є функція $F(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{arctgx-x}{x^2}+arctgx\right)$, $x>0$. Оскільки

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{arctgx-x}{x^2}+arctgx\right)=\frac{1}{2}\left(0+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4},$$

$$\lim_{x\to+0}F(x)=\lim_{x\to+0}\frac{1}{2}\left(\frac{x+o(x^3)-x}{x^2}+arctgx\right)=0,$$

то $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{1}{x}arctg\,x\right)dx=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}$.

10.64 а) Очевидно $\dfrac{n}{1+(n+1)^5}\le\dfrac{x}{1+x^5}\le\dfrac{n+1}{1+n^5}$ при $n\le x\le n+1$. Тоді $\displaystyle\frac{n}{1+(n+1)^5}<\int_n^{n+1}\frac{x\,dx}{1+x^5}<\frac{n+1}{1+n^5}$ і

$$\frac{n^5}{1+(n+1)^5}<n^4\int_n^{n+1}\frac{x\,dx}{1+x^5}<\frac{n^4(n+1)}{1+n^5}.$$

Звідси випливає, що $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(n^4\int_n^{n+1}\frac{x\,dx}{1+x^5}\right)=1$.

б) При $x>1$ маємо $\dfrac{x}{1+x^5}=\dfrac{1}{\frac{1}{x}+x^4}>\dfrac{1}{1+x^4}>\dfrac{1}{(x+1)^4}$, крім того, $\dfrac{x}{1+x^5}<\dfrac{1}{x^4}$. Отже, $\dfrac{1}{(x+1)^4}<\dfrac{x}{1+x^5}<\dfrac{1}{x^4}$, $x>1$. Звідси

$$\int_n^{2n}\frac{dx}{(x+1)^4}<\int_n^{2n}\frac{x\,dx}{1+x^5}<\int_n^{2n}\frac{dx}{x^4},$$

або $\displaystyle\frac{1}{3}\left(\frac{1}{(n+1)^3}-\frac{1}{(2n+1)^3}\right)<\int_n^{2n}\frac{x\,dx}{1+x^5}<\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n^3}-\frac{1}{(2n)^3}\right)$, тобто

$$\frac{1}{3}\left(\frac{n^3}{(n+1)^3}-\frac{n^3}{(2n+1)^3}\right)<n^3\int\limits_n^{2n}\frac{x\,dx}{1+x^5}<\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{8}\right).$$

Звідси легко одержуємо $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^3\int\limits_n^{2n}\frac{x\,dx}{1+x^5}\right)=\frac{7}{24}$.

10.65

$$I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^{2n}}=\int\limits_0^1\frac{dx}{1+x^{2n}}+\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{1+x^{2n}}=\int\limits_0^1\frac{1+x^{2n}-x^{2n}}{1+x^{2n}}dx+$$

$$+\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x^{2n}}=\int\limits_0^1 dx-\int\limits_0^1\frac{x^{2n}dx}{1+x^{2n}}+\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x^{2n}}=1-\int\limits_0^1\frac{x^{2n}dx}{1+x^{2n}}+\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x^{2n}}.$$

Очевидно мають місце оцінки:

$$0<\int\limits_0^1\frac{x^{2n}dx}{1+x^{2n}}<\int\limits_0^1 x^{2n}dx=\frac{1}{2n+1}\ \text{ і }\ 0<\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x^{2n}}<\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{2n}}=\frac{1}{2n-1}.$$

Застосувавши їх, одержуємо $1-\frac{1}{2n+1}<I<1+\frac{1}{2n-1}$, звідки зразу випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^{2n}}=1$.

10.66 Зауважимо, що

$$I=\int\limits_0^1 f(x)dx=\int\limits_0^{\pi/2}f(\sin\varphi)\cos\varphi\,d\varphi=\int\limits_0^{\pi/2}f(\cos\varphi)\sin\varphi\,d\varphi.$$

Звідси маємо:

$$2I=\int\limits_0^{\pi/2}\big(f(\sin\varphi)\cos\varphi+f(\cos\varphi)\sin\varphi\big)d\varphi\le\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi=\frac{\pi}{2},$$

тобто $I\le\pi/4$, що і потрібно було довести.

10.67 За умовою $\int\limits_0^{+\infty}f''(x)dx$ збіжний абсолютно. Це означає, що $f'(x)$ має скінченну границю при $x\to+\infty$, а тому обмежена: $|f'(x)|\le M$, $x\in[0,+\infty)$. Тоді

$$\int_0^{+\infty}\frac{(f'(x))^2}{(f(x))^{2013}}dx=\int_0^{+\infty}f'(x)\frac{f'(x)}{(f(x))^{2013}}dx=$$

$$=\left|\begin{array}{ll} u=f'(x), & du=f''(x)dx \\ dv=\dfrac{f'(x)dx}{(f(x))^{2013}}, & v=-\dfrac{1}{2012(f(x))^{2012}}\end{array}\right|=$$

$$=-\left.\frac{f'(x)}{2012(f(x))^{2012}}\right|_0^{+\infty}+\frac{1}{2012}\int_0^{+\infty}\frac{f''(x)}{(f(x))^{2012}}dx.$$

Тут перший доданок обмежений:

$$\left|\frac{f'(x)}{2012(f(x))^{2012}}\right|\le\frac{M}{2012\alpha^{2012}},$$

а другий доданок є збіжний невласний інтеграл в силу оцінки

$$\left|\frac{1}{2012}\int_0^{+\infty}\frac{f''(x)}{(f(x))^{2012}}dx\right|\le\frac{1}{2012\alpha^{2012}}\int_0^{+\infty}|f''(x)|dx$$

і збіжності останнього інтеграла.

11.1 а), б) Очевидно $10^{\ln n}=e^{\ln 10^{\ln n}}=e^{\ln n\cdot\ln 10}=\left(e^{\ln n}\right)^{\ln 10}=n^{\ln 10}$.

Враховуючи, що $2<\ln 10<3$, маємо:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10^{\ln n}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^{\ln 10}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\ln 10-1}}$ – ряд збіжний, оскільки $\ln 10-1>1$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{10^{\ln n}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^{\ln 10}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\ln 10-2}}$ – ряд розбіжний, бо $\ln 10-2<1$.

в) Як відомо, ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$ збіжний при $p>1$ і розбіжний при $p\le 1$. Оскільки

$10^{\ln(\ln n)} = e^{\ln 10^{\ln(\ln n)}} = e^{\ln(\ln n)\cdot\ln 10} = \left(e^{\ln(\ln n)}\right)^{\ln 10} = (\ln n)^{\ln 10}$, то

$\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n10^{\ln(\ln n)}} = \sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{\ln 10}}$ – ряд збіжний, оскільки $\ln 10 > 1$.

11.2 а) Оскільки $\frac{\sqrt[3]{x}}{\ln x} \to +\infty$ при $x \to +\infty$ (що легко встановити за допомогою правила Лопіталя), то починаючи з деякого n буде виконана нерівність $\frac{\sqrt[3]{n}}{\ln n} > \frac{12}{\ln 2}$. Звідси $\sqrt[3]{n}\ln 2 > 12\ln n$, або $2^{\sqrt[3]{n}} > n^{12}$.

Тобто, починаючи з якогось номера, члени даного ряду задовольняють умову $0 < \frac{n^{10}}{2^{\sqrt[3]{n}}} < \frac{n^{10}}{n^{12}} = \frac{1}{n^2}$. Але ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ збіжний, тому і даний ряд збіжний.

б) Очевидно $\ln(n!) < \ln n^n = n\ln n$, тому $\frac{1}{\ln(n!)} > \frac{1}{n\ln n} > 0$. Оскільки ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ розбіжний, то і даний ряд розбіжний.

в) Спиратимемось на той факт, що $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$ (що легко довести, ввівши неперервну змінну і застосувавши правило Лопіталя). Порівняємо даний ряд з розбіжним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}}{1/n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$. Отже, даний ряд розбіжний.

г) Очевидно, для будь-якого натурального n $n > \ln n$, тому $0 < \frac{1}{n^2 - \ln n} < \frac{1}{n^2 - n} = \frac{1}{n(n-1)}$, $n \geq 2$. Оскільки ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}$ збіжний, то і даний ряд збіжний.

11.3 Використовуючи геометричний зміст визначеного інтеграла, легко встановити, що $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n} > \int\limits_0^n \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^n = \frac{2}{3}n\sqrt{n}$. Тому $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}} < \frac{3}{2n\sqrt{n}}$ і, оскільки ряд з загальним членом $a_n = \frac{3}{2n\sqrt{n}}$ збігається, то і даний ряд збігається.

11.4 Очевидно, $(2n-1)!!>(2n-2)!!!$, тоді

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} > \frac{(2n-2)!!}{(2n)!!} = \frac{1}{2n}.$$

Оскільки ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ розбіжний, то і даний ряд розбіжний.

11.5 Очевидно, $x_n \in \left(\frac{\pi}{2}+\pi(n-1), \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, звідки $x_n > \frac{\pi}{2}+\pi(n-1) > n$ і $\frac{1}{x_n^2} < \frac{1}{n^2}$. Тому розглядуваний ряд мажорується збіжним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ і, значить, збіжний.

11.6 Очевидно, $0 \le a_n \le 1$, $a_{n+1} = \cos a_n \ge \cos 1 > 0$ і $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \ne 0$, так що ряд розбігається.

11.7 Нехай $q>1$. Тоді при $q>\alpha>1$ можна вказати таке n_0, що $\ln(1/a_n) > \alpha \ln n$ при $n>n_0$, тобто $a_n < \frac{1}{n^\alpha}$, і ряд збіжний, бо мажорується збіжним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$.

При $q<1$ вибираємо довільне α $(q<\alpha<1)$; тоді, починаючи з деякого n_0 $\ln(1/a_n) < \alpha \ln n$, $a_n > \frac{1}{n^\alpha}$, і ряд розбіжний.

11.8 В силу нерівності Коші-Буняковського-Шварца

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{a_k}}{k}\right)^2=\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k}\cdot\frac{1}{k}\right)^2\le\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right),$$

тобто $\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{a_k}}{k}\le\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}}$. В останній нерівності перейдемо до границі при $n\to\infty$; оскільки границя правої частини існує і скінченна, а в лівій частині фігурує частинна сума ряду з додатними членами, то існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{a_k}}{k}$, що означає збіжність даного ряду.

11.9 Доведемо індукцією по n, що $\frac{3}{2}u_{n-1}\le u_n\le 2u_{n-1}$. При $n=2,3$ нерівність, очевидно, виконується; нехай вона виконана при $n\le k$, доведемо її для $n=k+1$. Справді, додаючи почленно нерівності

$$\frac{3}{2}u_{k-2}\le u_{k-1}\le 2u_{k-2}\ \text{і}\ \frac{3}{2}u_{k-1}\le u_k\le 2u_{k-1},$$

одержуємо:

$$\frac{3}{2}(u_{k-2}+u_{k-1})\le u_{k-1}+u_k\le 2(u_{k-2}+u_{k-1}),\ \text{або}$$

$$\frac{3}{2}u_k\le u_{k+1}\le 2u_k,$$

що і потрібно було довести. Звідси маємо:

$$u_n\ge\frac{3}{2}u_{n-1}\ge\left(\frac{3}{2}\right)^2u_{n-2}\ge\left(\frac{3}{2}\right)^3u_{n-3}\ge\ldots\ge\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}u_1=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

і $u_n^{-1}\le\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$. Тому ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^{-1}$ збігається, бо мажорується збіжним рядом $\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{m-1}$.

11.10 Маємо: $\cos^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=\cos^2\left(\pi\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\right)=$

$$=\cos^2\left(\frac{\pi n}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi n}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)=$$

$$=\sin^2\left(\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)\right)=\sin^2\left(\pi\frac{\sqrt{n^2+n}+n-2n}{2\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}\right)=$$

$$=\sin^2\left(\pi\frac{\sqrt{n^2+n}-n}{2\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}\right)=\sin^2\left(\frac{\pi n}{2\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)^2}\right).$$

Таким чином, $\sum_{n=1}^{\infty}\cos^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin^2\left(\frac{\pi n}{2\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)^2}\right)$, і, оскільки $\sin^2\left(\frac{\pi n}{2\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)^2}\right)\sim\frac{\pi^2}{64n^2}$ при $n\to\infty$, то ряд збіжний.

11.11 Наприклад: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$.

11.12 Перетворимо загальний член заданого ряду до вигляду:

$$a_n=\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=(-1)^n\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n}-\pi n\right)=$$

$$=(-1)^n\cos\left(\pi\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)=(-1)^n\cos\left(\pi\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)^{-1}\right).$$

Оскільки послідовність додатних чисел $\left\{\pi\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)^{-1}\right\}$ монотонно зростає і прямує до $\frac{\pi}{2}$, то послідовність додатних чисел $\left\{\cos\left(\pi\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)^{-1}\right)\right\}$ монотонно спадає і прямує до нуля. Отже, згідно з теоремою Лейбніца, даний ряд збігається.

Оскільки $\sqrt{1+\frac{1}{n}}=1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, то

$$|a_n|=\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n}-\pi n\right)=\cos\left(\pi n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)\right)=$$

$$=\cos\left(\pi n\left(1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)-1\right)\right)=\sin\left(\frac{\pi}{8n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\sim\frac{\pi}{8n}.$$

Тому ряд, утворений з абсолютних величин членів заданого ряду, є розбіжним. Отже, даний числовий ряд збігається умовно.

11.13 Загальний член даного ряду може бути перетворений до вигляду (див. розв'язок попередньої задачі):

$$a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\sin\left(\frac{\pi}{8n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Оскільки $|a_n|\sim\dfrac{\pi}{8n^{3/2}}$, то даний ряд є абсолютно збіжним.

11.14 $a_n=\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)^x=\dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{(n+1)n}+\sqrt[3]{n}\right)^x}=$

$$=\frac{1}{\left(\sqrt[3]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{\frac{n+1}{n}}+1\right)^x n^{\frac{2x}{3}}}.$$

Якщо $x\le 0$, то не виконується необхідна умова збіжності ряду.

Якщо $x>0$, то $a_n\sim\dfrac{1}{3^x n^{2x/3}}$. Отже, при $x>\dfrac{3}{2}$ ряд є збіжним; при $x\le\dfrac{3}{2}$ ряд є розбіжним.

11.15 $a_n=\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\sin\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\right)^x=$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\sin\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)^x=\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^x.$$

Якщо $x\le 0$, то не виконується необхідна умова збіжності ряду. Якщо $x>0$, то $a_n\sim\dfrac{1}{2^x n^{x/2}}$. Отже, при $x/2>1$, тобто $x>2$, ряд є збіжним; при $x/2\le 1$, тобто $x\le 2$, ряд є розбіжним.

11.16 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \right) =$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{3} - \sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{1} + \\ &+ \sqrt{4} - \sqrt{3} - \sqrt{3} + \sqrt{2} + \\ &+ \sqrt{5} - \sqrt{4} - \sqrt{4} + \sqrt{3} + \\ &. \; . \\ &+ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} - \sqrt{n} + \sqrt{n-1} + \\ &+ \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} - \sqrt{n+1} + \sqrt{n} = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}. \end{aligned}$$

Тоді $S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n = 1 - \sqrt{2} + \lim\limits_{n \to \infty} \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} \right) =$

$$= 1 - \sqrt{2} + \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} = 1 - \sqrt{2} + 0 = 1 - \sqrt{2}.$$

11.17 а) $\dfrac{1}{\left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1} \right) \sqrt{n(n+1)}} = \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$,

тому $S_n = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ і

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = 1.$$

б) $\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n+2} + (n+2)\sqrt{n+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)} \left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} \right)} =$

$= \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+2}}$. Тоді $S_n = \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+2}}$ і $S = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

11.18 Скористаємось тотожністю

$$arctg \frac{x-y}{1+xy} = arctg\, x - arctg\, y.$$

а) $arctg \dfrac{2}{n^2} = arctg \dfrac{(n+1)-(n-1)}{1+(n+1)(n-1)} = arctg(n+1) - arctg(n-1)$,

тоді

$$\begin{aligned} S_n &= arctg\, 2 - arctg\, 0 + \\ &+ arctg\, 3 - arctg\, 1 + \\ &+ arctg\, 4 - arctg\, 2 + \\ &+ arctg\, 5 - arctg\, 3 + \\ &. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ &+ arctg\, n - arctg(n-2) + \end{aligned}$$

$$+ arctg(n+1) - arctg(n-1) = arctg\, n + arctg(n+1) - arctg 1.$$

Отже,

$$S = \lim_{n\to\infty}(arctg\, n + arctg(n+1) - arctg 1) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

б)

$$arctg\frac{1}{2n^2} = arctg\frac{(2n+1)-(2n-1)}{1+(2n+1)(2n-1)} = arctg(2n+1) - arctg(2n-1)$$

.

Як і в п. а), одержуємо $S_n = arctg(2n+1) - arctg 1$, звідки, перейшовши до границі при $n\to\infty$, маємо $S = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$.

11.19 Скористаємось тотожністю

$$\arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right) = \arcsin x - \arcsin y, \quad x, y \in [0, 1]$$

.

а) $$\arcsin\frac{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-1}}{n(n+1)} = \arcsin\frac{\sqrt{(n+1)^2-1}-\sqrt{n^2-1}}{n(n+1)} =$$

$$= \arcsin\left(\frac{\sqrt{(n+1)^2-1}}{n(n+1)} - \frac{\sqrt{n^2-1}}{n(n+1)}\right) =$$

$$= \arcsin\left(\frac{1}{n}\sqrt{\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}} - \frac{1}{n+1}\sqrt{\frac{n^2-1}{n^2}}\right) =$$

$$= \arcsin\left(\frac{1}{n}\sqrt{1-\frac{1}{(n+1)^2}} - \frac{1}{n+1}\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right) = \arcsin\frac{1}{n} - \arcsin\frac{1}{n+1}$$

.

Тоді $S_n = \arcsin 1 - \arcsin\frac{1}{2} + \arcsin\frac{1}{2} - \arcsin\frac{1}{3} + \ldots +$

$$+ \arcsin\frac{1}{n} - \arcsin\frac{1}{n+1} = \arcsin 1 - \arcsin\frac{1}{n+1}$$ і

$$S = \lim_{n\to\infty}\left(\arcsin 1 - \arcsin\frac{1}{n+1}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

б) $\arcsin\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n(n+1)}}=\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{n}{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\sqrt{\frac{n-1}{n}}\right)=$

$$=\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{1-\frac{1}{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)=\arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}-\arcsin\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Як і п. а) $S_n=\arcsin 1-\arcsin\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ і $S=\frac{\pi}{2}$.

11.20 Використаємо тотожність

$$\arccos\left(xy+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)=\arccos x-\arccos y,\ \ 0\le x\le y\le 1.$$

а) $\arccos\frac{1+\sqrt{n(n-1)}}{\sqrt{n(n+1)}}=\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}+\sqrt{\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n+1}}\right)=$

$$=\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\sqrt{1-\frac{1}{n+1}}\right)=\arccos\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\arccos\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Як і в 11.19 одержуємо $S_n=\arccos\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\arccos 1$ і $S=\frac{\pi}{2}$.

б) Маємо

$$\frac{1+\sqrt{(n-1)n(n+1)(n+2)}}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}+\sqrt{\frac{(n^2-1)\left((n+1)^2-1\right)}{n^2(n+1)^2}}=$$

$$=\frac{1}{n}\frac{1}{n+1}+\sqrt{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)}.$$

Таким чином,

$$\arccos\frac{1+\sqrt{(n-1)n(n+1)(n+2)}}{n(n+1)}=\arccos\frac{1}{n+1}-\arccos\frac{1}{n},$$

тоді $S_n=\arccos\frac{1}{n+1}-\arccos 1$ і $S=\frac{\pi}{2}$.

11.21 Розглянемо $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2^n}$; ряд, який стоїть справа – геометрична прогресія з першим членом $\frac{x}{2}$ і знаменником $\dfrac{x^2}{2}$. Отже, при $|x| < \sqrt{2}$ $f(x) = \dfrac{x/2}{1 - x^2/2} = \dfrac{x}{2 - x^2}$. Даний ряд можна почленно диференціювати в інтервалі його збіжності:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)x^{2n-2}}{2^n} = \frac{2 + x^2}{(2 - x^2)^2} \text{ і } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} = f'(1) = 3.$$

11.22 Розглянемо

$$f(x) = \frac{1}{\ln^2 3} \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-nx} = \frac{1}{\ln^2 3} \cdot \frac{3^{-x}}{1 - 3^{-x}} = \frac{1}{\ln^2 3} \cdot \frac{1}{3^x - 1} \text{ при } x > 0.$$

Даний ряд можна двічі почленно продиференціювати на $(0, +\infty)$, так що

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^{nx}} = \frac{3^x(3^x + 1)}{(3^x - 1)^3} \text{ і } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} = f''(1) = \frac{3}{2}.$$

11.23 Очевидно $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n)^2} = \dfrac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{24}$. Тоді:

а) $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}$.

б) $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{12}$.

11.24 Збіжність ряду очевидна. Перетворимо загальний член ряду:

$$\frac{4n-1}{n^2(2n-1)^2} = \frac{4n^2 - (4n^2 - 4n + 1)}{n^2(2n-1)^2} = \frac{4n^2 - (2n-1)^2}{n^2(2n-1)^2} = \frac{4}{(2n-1)^2} - \frac{1}{n^2}.$$

Отже, $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-1}{n^2(2n-1)^2} = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Знайдемо суму першого ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = S - \frac{1}{4} S = \frac{3}{4} S.$$

Таким чином, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n-1}{n^2(2n-1)^2}=4\cdot\frac{3}{4}S-S=2S$.

11.25 Доведемо спочатку, що загальний член ряду прямує до нуля при $n\to\infty$. Для цього покажемо, що для всіх $n \quad u_n<1{,}7^n$. Застосуємо метод математичної індукції: при $n=1,\ 2,\ 3$ нерівність очевидна, нехай вона виконана для всіх номерів, менших n. Тоді для u_n маємо:

$$u_n=u_{n-2}+u_{n-1}<1{,}7^{n-2}+1{,}7^{n-1}=1{,}7^{n-2}(1+1{,}7)<1{,}7^{n-2}\cdot 1{,}7^2=1{,}7^n.$$

Тоді $\frac{u_n}{2^n}<\frac{1{,}7^n}{2^n}=\left(\frac{1{,}7}{2}\right)^n\to 0$ при $n\to\infty$.

Розглянемо частинну суму ряду: $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{u_k}{2^k}$, тоді $2S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{u_k}{2^{k-1}}$. Звідси $2S_n-S_n=u_1+\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{u_k-u_{k-1}}{2^{k-1}}-\frac{u_n}{2^n}=$

$$=u_1+\sum_{k=3}^{n}\frac{u_{k-2}}{2^{k-1}}-\frac{u_n}{2^n}, \text{ або } S_n=u_1+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{u_k}{2^k}-\frac{u_n}{2^n}=$$

$$=u_1+\frac{1}{2}\left(S_n-\frac{u_{n-1}}{2^{n-1}}-\frac{u_n}{2^n}\right)-\frac{u_n}{2^n}=u_1+\frac{1}{2}S_n-\frac{u_{n-1}}{2^n}-\frac{3u_n}{2^{n+1}}.$$

Тоді $\frac{1}{2}S_n=u_1-\frac{u_{n-1}}{2^n}-\frac{3u_n}{2^{n+1}}$, тобто $S_n=2u_1-\frac{u_{n-1}}{2^{n-1}}-\frac{3u_n}{2^n}$.

Перейшовши тут до границі при $n\to\infty$, одержуємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}u_n=\lim_{n\to\infty}S_n=2u_1=2.$$

11.26 Маємо $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$ ($|x|<1$). Двічі проінтегруємо цей ряд: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\int\limits_0^x\frac{dt}{1-t}=-\ln(1-t)\big|_0^x=-\ln(1-x)$,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}=\int_0^x(-\ln(1-t))dt=\left|\begin{matrix} u=-\ln(1-t), & du=\dfrac{dt}{1-t} \\ dv=dt, & v=t\end{matrix}\right|=$$

$$=-t\ln(1-t)\Big|_0^x-\int_0^x\frac{t\,dt}{1-t}=-x\ln(1-x)+\int_0^x\frac{1-t-1}{1-t}dt=-x\ln(1-x)+$$

$$+\int_0^x dt-\int_0^x\frac{dt}{1-t}=-x\ln(1-x)+x+\ln(1-x)=x+(1-x)\ln(1-x).$$

Звідси випливає, що

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}=1+\frac{1-x}{x}\ln(1-x)$$

.

Підставивши сюди $x=1/2$, одержуємо

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)2^n}=1-\ln 2.$$

11.27 Нехай p – чисельник даного дробу, q – його знаменник. Тоді $p\pi-q\pi^3=\sin\pi=0$, звідки $p/q=\pi^2$.

11.28 Якщо p – чисельник даного дробу, q – його знаменник, то $p-q\cdot\frac{\pi^2}{2^2}=\cos\frac{\pi}{2}=0$, тобто $\frac{p}{q}=\frac{\pi^2}{4}$.

11.29 Оскільки ряди, які стоять в чисельнику і знаменнику дробу при $x=1$ розбіжні, то при $x\to 1$ ми маємо невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$. Для її розкриття застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}+\ldots}{\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^6}{6}+\ldots}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}+\ldots\right)'}{\left(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^6}{6}+\ldots\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1+x^2+x^4+\ldots}{x+x^3+x^5+\ldots}=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{1}{1-x^2}}{\dfrac{x}{1-x^2}}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x}=1.$$

11.30 Припустимо, що дане число раціональне, тобто $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}=\frac{m}{k}$, де m і k – натуральні числа. Тоді $S(k!)^2=\frac{m}{k}(k!)^2$ – число ціле. Але $(k!)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}=(k!)^2+$

$$+(3\cdot 4\cdot\ldots\cdot k)^2+\ldots+k^2+1+\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{1}{((k+1)(k+2))^2}+\ldots\,.$$

Оскільки перші k доданків – цілі числа, то сума $\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{1}{((k+1)(k+2))^2}+\ldots$ теж повинна бути цілим числом. Але

$$\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{1}{((k+1)(k+2))^2}+\ldots<\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{1}{(k+1)^4}+\ldots=\frac{\dfrac{1}{(k+1)^2}}{1-\dfrac{1}{(k+1)^2}}=$$

$$=\frac{1}{(k=1)^2-1}=\frac{1}{k(k+2)}\le\frac{1}{3}.$$ Твердження доведено.

11.31 Маємо:

$$x^{-x}=e^{-x\ln x}=1-x\ln x+\frac{(x\ln x)^2}{2!}+\ldots+\frac{(-x\ln x)^k}{k!}+\ldots,$$

причому ряд рівномірно збігається на $[0,1]$. Тому

$$\int_0^1 x^{-x}dx=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1\frac{(-x\ln x)^k}{k!}dx=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\int_0^1 x^k\ln^k x\,dx .$$

Позначимо $J_{k,m}=\int_0^1 x^k\ln^m x\,dx$, тоді $J_{k,m}=\int_0^1 x^k\ln^m x\,dx=$

$$=\left|\begin{matrix} u=\ln^m x, & du=\dfrac{m\ln^{m-1}x}{x}dx \\ dv=x^k dx, & v=\dfrac{x^{k+1}}{k+1}\end{matrix}\right|=\left.\frac{x^{k+1}\ln^m x}{k+1}\right|_0^1-\frac{m}{k+1}\int_0^1 x^k\ln^{m-1}x\,dx.$$ Або, враховуючи, що

$\left.\dfrac{x^{k+1}\ln^m x}{k+1}\right|_0^1=0$, маємо $J_{k,m}=-\dfrac{m}{k+1}J_{k,m-1}$ при $m\geq 1$.

Очевидно $J_{k,0}=\dfrac{1}{k+1}$, тоді $J_{k,k}=\dfrac{(-1)^k k!}{(k+1)^{k+1}}$ і

$$\int_0^1 x^{-x}dx=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\cdot\frac{(-1)^k k!}{(k+1)^{k+1}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^{k+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-n} .$$

11.32 Нехай $S(x)=x+\dfrac{x^3}{3!!}+\dfrac{x^5}{5!!}+\dfrac{x^7}{7!!}+\ldots+\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!}+\ldots$,

тоді

$$S'(x)=1+x^2+\frac{x^4}{3!!}+\frac{x^6}{5!!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n-1)!!}+\ldots=1+x\left(x+\frac{x^3}{3!!}+\right.$$

$$\left.+\frac{x^5}{5!!}+\ldots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!!}+\ldots\right),$$ або $S'(x)=1+xS(x)$.

Відносно $S(x)$ одержано лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Шукаючи його розв'язок у виді $S(x)=u(x)\cdot v(x)$, одержуємо $v(x)=e^{\frac{x^2}{2}}$, $u(x)=\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt+C$.

Оскільки $S(0)=0$, то $C=0$ і $S(x)=e^{\frac{x^2}{2}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, що і потрібно було довести.

11.33 Очевидно $\frac{\sin^2 t}{t}=\frac{1}{2t}(1-\cos 2t)=\frac{1}{2t}\left(1-\left(1-\frac{(2t)^2}{2!}+\right.\right.$

$\left.\left.+\frac{(2t)^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{(2t)^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right)\right)=\frac{1}{2t}\left(\frac{(2t)^2}{2!}-\frac{(2t)^4}{4!}+\ldots+\right.$

$$\left.+(-1)^{n-1}\frac{(2t)^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}t^{2n-1}}{(2n)!}.$$

Тоді

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}}{(2n)!}\int\limits_0^x t^{2n-1}dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{2n-2}}{n(2n)!}x^{2n}.$$

Застосувавши ознаку Даламбера до ряду, складеного з абсолютних величин членів даного ряду, маємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2^{2n}x^{2n+2}}{(n+1)(2n+2)!}}{\dfrac{2^{2n-2}x^{2n}}{n(2n)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^2nx^2}{(n+1)(2n+1)(2n+2)}=0 \quad \forall x.$$

Тобто ряд абсолютно збіжний на всій числовій прямій.

11.34 а) При $x=k\pi$ ряд, очевидно, збігається. Якщо б ряд збігався при $x\neq k\pi$, то це означало б, що $\sin nx\to 0$ при $n\to\infty$, а значить і $\sin(n+1)x-\sin(n-1)x=$ $=2\sin x\cos nx\to 0$ і $\cos nx\to 0$, що неможливо в силу $\sin^2 nx+\cos^2 nx=1$. Отже, ряд збіжний тільки при $x=k\pi$.

б) Якщо ряд збігається в точці x, то $\cos nx\to 0$ при $n\to\infty$, тобто $\frac{1-\cos 2nx}{2}\to\frac{1}{2}$ при $n\to\infty$, а, з другого боку $\frac{1-\cos 2nx}{2}=\sin^2 nx=1-\cos^2 nx\to 1$. Тому ряд ніде не збігається.

11.35 Зауважимо, що $f(1)=e-1$. Далі, $xf(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x+n-n}{n!(n+x)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!(n+x)}=e-f(x+1)$, звідси $f(x+1)=e-xf(x)$. Використовуючи цю рівність, знаходимо: $f(2)=e-f(1)=1$, $f(3)=e-2f(2)=e-2$, $f(4)=e-3f(3)=e-3(e-2)=6-2e$, $f(5)=e-4f(4)=e-$ $-4(6-2e)=9e-24$.

11.36 Маємо:

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{x}{e^x+1}dx=\int\limits_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}}dx=\int\limits_0^{+\infty}\left(xe^{-x}-xe^{-2x}+\ldots+(-1)^{n-1}xe^{-nx}+\ldots\right)dx.$$

Очевидно

$$\int\limits_0^{+\infty}xe^{-nx}dx=\left|\begin{array}{ll}u=x, & du=dx\\ dv=e^{-nx}dx, & v=-\frac{1}{n}e^{-nx}\end{array}\right|=-\frac{1}{n}xe^{-nx}\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{n}\int\limits_0^{+\infty}e^{-nx}dx=$$

$$=0-\frac{1}{n^2}e^{-nx}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{n^2}.$$

Отже,

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{e^x+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{12}.$$

11.37 Маємо:

$$\int\limits_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}dx=\int\limits_0^1\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n}+\ldots\right)dx=$$

$$=x\Big|_0^1-\frac{x^2}{4}\Big|_0^1+\frac{x^3}{9}\Big|_0^1-\frac{x^4}{16}\Big|_0^1+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n^2}\Big|_0^1+\ldots=$$

$$=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}.$$

11.38 Збіжність ряду при всіх x очевидна. Маємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n\,n!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n-1)+n+1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n(n-1)}{n!}+\frac{n}{n!}+\frac{1}{n!}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^n=$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x/2)^n}{(n-2)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x/2)^n}{(n-1)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x/2)^n}{n!}=\left(\frac{x}{2}\right)^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x/2)^k}{k!}+\frac{x}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(x/2)^m}{m!}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x/2)^n}{n!}=\left(\frac{x}{2}\right)^2e^{x/2}+\frac{x}{2}e^{x/2}+e^{x/2}-1=\frac{1}{4}\left(x^2+2x+4\right)e^{x/2}-1.$$

11.39 Збіжність ряду при всіх x очевидна. Із рівності $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$ маємо $\cos^3\alpha=\frac{1}{4}(\cos 3\alpha+3\cos\alpha)$, тобто $\cos^3\left(3^k x\right)=\frac{1}{4}\left(\cos\left(3^{k+1}x\right)+3\cos\left(3^k x\right)\right)$. Тоді

$$S_{2k-1}(x)=\sum_{n=0}^{2k-1}\frac{(-1)^n}{3^n}\cos^3\left(3^n x\right)=$$

$$
\begin{aligned}
=\frac{1}{4}(\quad & \cos 3x \quad + \quad 3\cos x \quad - \\
& -\frac{1}{3}\cos\left(3^2x\right) \quad - \quad \cos 3x \quad + \\
& +\frac{1}{3^2}\cos\left(3^3x\right) \quad + \quad \frac{1}{3}\cos\left(3^2x\right) \quad - \\
& -\frac{1}{3^3}\cos\left(3^4x\right) \quad - \quad \frac{1}{3^2}\cos\left(3^3x\right) \quad + \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

$$-\frac{1}{3^{2k-1}}\cos\left(3^{2k}x\right)-\frac{1}{3^{2k-2}}\cos\left(3^{2k-1}x\right)\Bigg) =\frac{1}{4}\left(3\cos x-\frac{1}{3^{2k-1}}\cos\left(3^{2k-1}x\right)\right)$$

.

Очевидно, що $\lim\limits_{k\to\infty} S_{2k-1}(x) =\frac{3}{4}\cos x$ і

$S_{2k}(x) =S_{2k-1}(x)+\frac{1}{3^{2k}}\cos^3\left(3^{2k}x\right)$. Оскільки

$\frac{1}{3^{2k}}\cos^3\left(3^{2k}x\right)\to 0$ при $k\to\infty$, то $S(x) =\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) =\frac{3}{4}\cos x$

.

11.40 Оскільки при $n\to\infty$ $3^n\sin^3\frac{x}{3^n}\sim\frac{x^3}{3^{2n}}$, то ряд збіжний на всій числовій прямій. Із тотожності $\sin 3\alpha =3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ одержуємо

$\sin^3\alpha =\frac{1}{4}(3\sin\alpha-\sin 3\alpha)$, тобто

$\sin^3\frac{x}{3^k} =\frac{1}{4}\left(3\sin\frac{x}{3^k}-\sin\frac{x}{3^{k-1}}\right)$. Тоді

$$S_n(x) =\sum_{k=1}^{n}3^k\sin^3\frac{x}{3^k} =$$

$$=\frac{1}{4}\Bigg(3^2\sin\frac{x}{3} - 3\sin x +$$

$$+3^3\sin\frac{x}{3^2} - 3^2\sin\frac{x}{3} +$$

$$+3^4\sin\frac{x}{3^3} - 3^3\sin\frac{x}{3^2} +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+3^{n+1}\sin\frac{x}{3^n}-3^n\sin\frac{x}{3^{n-1}}\Bigg) =\frac{1}{4}\left(-3\sin x+3^{n+1}\sin\frac{x}{3^n}\right).$$

Звідси

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=-\frac{3}{4}\sin x+\frac{3x}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{x}{3^n}}{\frac{x}{3^n}}=\frac{3}{4}(x-\sin x).$$

11.41 Збіжність ряду очевидна. Нехай $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}tg\frac{x}{2^n}$, тоді

$$\int_0^x S(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\int_0^x tg\frac{t}{2^n}dt=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\ln\left|\cos\frac{t}{2^n}\right|\right)\Bigg|_0^x=-\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\cos\frac{x}{2^n}\right)\equiv\sigma(x)$$

.

$$\sigma(x)=\lim_{n\to\infty}\sigma_n(x)=-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\cos\frac{x}{2^k}\right)=$$

$$=-\lim_{n\to\infty}\ln\left(\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2^n}\right).$$

Далі скористаємось результатом задачі 8.34:

$$\sigma(x)=-\ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2^n}\right)\right)=-\ln\frac{\sin x}{x}=\ln\frac{x}{\sin x}$$

.

Звідси $S(x)=\sigma'(x)=\left(\ln\frac{x}{\sin x}\right)'=\frac{\sin x-x\cos x}{x\sin x}=\frac{1}{x}-ctgx$.

11.42 Нехай $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$. Неважко переконатись, що

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!},\quad S''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!},\quad S'''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}=S(x)$$

.

Отже, $S(x)$ є розв'язком задачі Коші:

$$S'''(x)-S(x)=0,\quad S(0)=1,\ S'(0)=S''(0)=0.$$

Розв'язавши її, одержуємо $S(x)=\frac{1}{3}e^x+\frac{2}{3}e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$.

11.43 Збіжність ряду очевидна. Попередньо знайдемо деякі добутки. Розглянемо рівність

$$\sin \pi x = \pi x - \frac{(\pi x)^3}{3!} + \frac{(\pi x)^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(\pi x)^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots =$$

$$= \pi x\left(1 - \frac{(\pi x)^2}{3!} + \frac{(\pi x)^4}{5!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(\pi x)^{2n-2}}{(2n-1)!} + \ldots\right).$$

Враховуючи, що коренями многочлена в дужках є $\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$, маємо

$$\sin \pi x = \pi x\left(1 - x^2\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)\ldots,$$

звідки

$$\left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)\ldots = \frac{\sin \pi x}{\pi x\left(1 - x^2\right)}.$$

Перейшовши в цій рівності до границі при $x \to 1$, одержуємо

$$A = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\ldots = \frac{1}{2}.$$

Аналогічно одержуємо рівність

$$\frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{\frac{\pi x}{2}} = \left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{6^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{x^2}{(2n)^2}\right)\ldots,$$

із якої при $x \to 1$ одержуємо

$$B = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\left(1 - \frac{1}{6^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{(2n)^2}\right)\ldots = \frac{2}{\pi}.$$

Тоді $C = \left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{5^2}\right)\left(1 - \frac{1}{7^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{(2n+1)^2}\right)\ldots = \frac{A}{B} = \frac{\pi}{4}$.

Отже,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ln\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \ln\frac{\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{(2n)^2}\right)\ldots}{\left(\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{5^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{(2n+1)}\right)\ldots\right)^2} =$$

$$=\ln\frac{B}{C}=\ln\frac{2/\pi}{\pi/4}=\ln\frac{8}{\pi^2}.$$

11.44 Якщо функція $f(x)$ розкладається в ряд за степенями x: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$, то $c_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, звідси $f^{(n)}(0)=c_n\cdot n!$.

Очевидно

$$f(x)=\frac{(1+x)(1-x)}{(1+x+x^2)(1-x)}=\frac{1-x^2}{1-x^3}=\frac{1}{1-x^3}-\frac{x^2}{1-x^3}.$$

При $|x|<1$ маємо:

$$f(x)=1+x^3+x^6+\ldots+x^{3k}+\ldots-\left(x^2+x^5+x^8+\ldots+x^{3k+2}+\ldots\right).$$

Звідси видно, що

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases} n!, & \text{якщо } n=3k, \\ 0, & \text{якщо } n=3k+1, \\ -n!, & \text{якщо } n=3k+2. \end{cases}$$

11.45

$$f(x)=\frac{(1-x+x^2)(1-x)}{(1+x+x^2)(1-x)}=\frac{1-2x+2x^2-x^3}{1-x^3}=1-\frac{2x}{1-x^3}+\frac{2x^2}{1-x^3}.$$

Як і в попередній задачі при $|x|<1$ маємо:

$$f(x)=1-2x-2x^4-2x^7-\ldots-2x^{3k+1}-\ldots+2x^2+2x^5+2x^8+\ldots+2x^{3k+2}$$

.

Таким чином,

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases} 0, & \text{якщо } n=3k, \\ -2n!, & \text{якщо } n=3k+1, \\ 2n!, & \text{якщо } n=3k+2. \end{cases}$$

11.46 Розклавши $\cos 2x$ в ряд за степенями x, одержуємо

$$f(x)=x^2-\frac{2^2x^4}{2!}+\frac{2^4x^6}{4!}-\frac{2^6x^8}{6!}+\ldots+(-1)^k\frac{2^{2k}x^{2k+2}}{(2k)!}+\ldots.$$

Коефіцієнти цього розкладу: $c_{2k-1}=0$, $c_{2k}=\dfrac{(-1)^{k-1}2^{2k-2}}{(2k-2)!}$, $k=1,2,3,\ldots$.

Отже, $f^{(2k-1)}(0)=0$,

$$f^{(2k)}(0)=c_{2k}\cdot(2k)!=\frac{(-1)^{k-1}2^{2k-2}(2k)!}{(2k-2)!}=$$

$$=(-1)^{k-1}2^{2k-2}(2k-1)2k=(-1)^{k-1}2^{2k-1}k(2k-1),$$

$k=1,2,3,\ldots$.

Зокрема, при $k=5$ із другої рівності маємо

$$f^{(10)}(0)=2^9\cdot5\cdot9=23040.$$

11.47 При $|x|<1$ маємо:

$$f(x)=\frac{x^5}{2012+x^2}=\frac{x^5}{2012}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{2012}}=\frac{x^5}{2012}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{x^2}{2012}\right)^k=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2012^{k+1}}x^{2k+5}=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n,$$ де $c_n=\dfrac{(-1)^k}{2012^{k+1}}$, якщо $n=2k+5$ і $c_n=0$, якщо $n\neq2k+5$. Тоді

$$f^{(2013)}(0)=2013!\,c_{2013}=2013!\,c_{2\cdot1004+5}=2013!\frac{(-1)^{1004}}{2012^{1005}}=\frac{2013!}{2012^{1005}}.$$

12.1 Із цього рівняння знайдемо x як функцію y. Рівняння можна записати у виді $\dfrac{dx}{dy}-2x=-y^2$, тобто одержано лінійне рівняння. Розв'язуючи його, одержуємо

$$x=Ce^{2y}+\frac{y^2}{2}+\frac{y}{2}+\frac{1}{4}.$$

12.2 Зробимо заміну $xy=z$, де $z=z(x)$ – нова невідома функція. Оскільки $z'=xy'+y$, то рівняння зводиться до виду $z' + 2z = 1$, звідки $z = \frac{1}{2} + Ce^{-2x}$. Тоді $y = \frac{1}{2x} + \frac{C}{x}e^{-2x}$. Враховуючи початкову умову, одержуємо $Ce^{-2} + \frac{1}{2} = 1$, тобто $C = \frac{1}{2}e^{2}$. Остаточно знаходимо $y = \frac{1}{2x}\left(1 + e^{2(1-x)}\right)$.

12.3 Зробимо заміну $y = -\ln z$, де $z = z(x)$ – нова шукана функція. Одержимо $-\frac{z'}{z} + \frac{p(x)}{z} = q(x)$, або $z' + q(x)z = p(x)$ – маємо лінійне рівняння першого порядку. Розв'язавши його, отримаємо: $z = e^{-\int q(x)dx}\left(\int e^{\int q(x)dx} p(x)dx + C\right)$. Тоді

$$y = -\ln \frac{\int e^{\int q(x)dx} p(x)dx + C}{e^{\int q(x)dx}},$$ або остаточно

$$y = \ln \frac{e^{\int q(x)dx}}{\int e^{\int q(x)dx} p(x)dx + C}$$ – загальний розв'язок рівняння.

12.4 Дане рівняння можна записати у виді $(x - \sin y)dx - \cos y\, dy = 0$, тут $P(x, y) = x - \sin y$, $Q(x, y) = -\cos y$. Оскільки $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{-\cos y - 0}{-\cos y} = 1$, то рівняння допускає інтегрувальний множник μ, який залежить тільки від x. Для його знаходження одержуємо рівняння $\frac{d\ln \mu}{dx} = 1$, звідки $\mu = e^{x}$. Домноживши на μ початкове рівняння, одержуємо рівняння в повних диференціалах: $e^{x}(x - \sin y)dx - e^{x}\cos y\, dy = 0$, загальний інтеграл якого знаходиться просто: $e^{x}(x - 1 - \sin y) = C$.

12.5 Запишемо задане рівняння у вигляді $y^{2}dy = (3x + y^{3} - 1)^{2}dx$, або $\frac{1}{3}d(y^{3} - 1) = (3x + y^{3} - 1)dx$. Нехай $y^{3} - 1 = z$, де $z = z(x)$ – нова шукана функція. Тоді рівняння набуває вигляду: $\frac{1}{3}dz = (3x + z)^{2}dx$. Зробимо ще одну заміну змінної: $3x+z=t$ $(z=t-3x,\ dz=dt-3dx)$. Тоді $\frac{1}{3}(dt-3dx)=t^2dx$, $-dx+\frac{1}{3}dt=t^2dx$, $(1+t^2)dx=\frac{1}{3}dt$.

Відокремлюємо змінні і інтегруємо: $3dx=\frac{dt}{1+t^2}$,

$\int 3dx+C=\int\frac{dt}{1+t^2}$. Звідси $arctg\,t=3x+C$, або, оскільки $t=3x+z=y^3+3x-1$, то $arctg\left(y^3+3x-1\right)=3x+C$. Остаточно дістаємо загальний інтеграл даного рівняння у вигляді

$$y^3+3x-1=tg(3x+C).$$

12.6 Нехай $y=x^2u$, де $u=u(x)-$ нова шукана функція (оскільки $y\neq 0,$ то $x\neq 0$ і $u\neq 0$). Тоді рівняння приймає вигляд:

$$2xu+x^2u'=x+\frac{x^3}{x^2u} \quad \text{або} \quad 2u+x\frac{du}{dx}=1+\frac{1}{u}.$$

Відокремлюємо змінні та інтегруємо:

$$\frac{udu}{u+1-2u^2}=\frac{dx}{x};\quad \int\frac{udu}{u+1-2u^2}=\int\frac{dx}{x}+\ln C,\quad C>0;$$

$$-\frac{1}{3}\left(\ln|u-1|+\frac{1}{2}\ln|2u+1|\right)=\ln C|x|,$$

$$-\frac{1}{6}\ln\left((u-1)^2|2u+1|\right)=\ln C|x|,$$

$$(u-1)^2(2u+1)=\frac{1}{Cx^6},\quad C\neq 0,\qquad x^6(u-1)^2(2u+1)=\frac{1}{C}.$$

Перейдемо до старої змінної і замінимо $\frac{1}{C}$ на C:

$x^6\left(\frac{y}{x^2}-1\right)^2\left(\frac{2y}{x^2}+1\right)=C$. Отже, загальний інтеграл рівняння:

$$(y-x^2)^2(2y+x^2)=C.$$

При $C = 0$ маємо розв'язки $y = x^2$ і $y = -\dfrac{x^2}{2}$, що відповідають $u = 1$ і $u = -\dfrac{1}{2}$, тобто розв’язкам, які були втрачені внаслідок відокремлювання змінних.

12.7 Рівняння має розв’язок $y = 0$. Нехай $y > 0$. Зробимо заміну змінних: $y = \sqrt{z}$ $\left(z = y^2 \right)$, $z > 0$. Тоді рівняння перетвориться до вигляду $\left(z^2 - 3x^2 \right) \dfrac{dz}{2\sqrt{z}} + x\sqrt{z}dx = 0$ або $\left(z^2 - 3x^2 \right) dz + 2xzdx = 0$. Одержане рівняння є однорідним і за допомогою заміни $z = ux$ $\left(u \neq 0, x \neq 0 \right)$ може бути зведене до рівняння з відокремлюваними змінними $\dfrac{dx}{x} + \dfrac{u^2 - 3}{u^3 - u} du = 0$. Інтегруючи це рівняння, дістаємо $\ln \dfrac{\left| xu^3 \right|}{\left| u^2 - 1 \right|} = -\ln \left| C \right|$, або $Cxu^3 = u^2 - 1$ (при $C = 0$ маємо розв’язки $u = \pm 1$). Повертаючись до змінної y, одержане співвідношення можна записати у вигляді $y^4 - x^2 = Cy^6$. Знайдений розв’язок має місце і при $y < 0$.

12.8 Нехай $x > 0$. Введемо нову шукану функцію $u = u\left(x \right)$ за допомогою формули $y = ux^{\frac{3}{2}}$. Відносно нової шуканої функції $u = u\left(x \right)$ дане диференціальне рівняння приймає вигляд $\dfrac{2}{3} xu \dfrac{du}{dx} = \sqrt{1 - u^4}$. У цьому рівнянні змінні відокремлюються: $\dfrac{2udu}{\sqrt{1 - u^4}} = \dfrac{3dx}{x}$. Інтегруючи і повертаючись до старої шуканої функції, дістаємо $\arcsin \dfrac{y^2}{x^3} = \ln Cx^3$, де $C > 0$. При відокремлюванні змінних було загублено розв'язок $u^2=1$, якому відповідає розв'язок $y^2=x^3$ вихідного рівняння.

Оскільки при заміні x на $(-x)$ дане диференціальне рівняння не змінюється, то його загальний розв'язок має вигляд:

$$\arcsin\frac{y^2}{|x|^3}=\ln C|x|^3,\ y^2=|x|^3,\ \text{де}\ C>0.$$

12.9 Перепишемо дане рівняння у вигляді

$$2x^3y^2dx-ydx+2x^2y^3dy-xdy=0\ \text{або}$$

$$x^2y^2\left(dx^2+dy^2\right)-dxy=0.$$

Оскільки інтегральні криві даного рівняння $x=0$ і $y=0$ не проходять через точку $(1,\ 1)$, то рівняння можна перетворити до вигляду

$$d\left(x^2+y^2\right)=\frac{d(xy)}{x^2y^2}\quad \text{або}\quad d\left(x^2+y^2+\frac{1}{xy}\right)=0.$$

Звідси $x^2+y^2+\frac{1}{xy}=C$. З умови задачі випливає, що $y=1$ при $x=1$. Використовуючи цю початкову умову, знаходимо, що $C=3$. Таким чином, рівняння шуканої інтегральної кривої може бути записано у вигляді $x^2+y^2+\frac{1}{xy}=3$, або

$$xy\left(x^2+y^2-3\right)+1=0.$$

12.10 Перетворимо дане рівняння наступним чином: $xdy+ydx-3ydx-3xy^2dx=0$, або $d(xy)-3y(xy+1)dx=0$. Неважко перевірити, що $x=0$, $y=0$ і $y=-1/x$ – розв'язки даного рівняння. Нехай $x\neq 0$, $y\neq 0$ і $y\neq -1/x$. Тоді рівняння можна записати у вигляді $d(xy)-3xy(xy+1)\frac{dx}{x}=0$,

$\frac{d(xy)}{xy(xy+1)}-3\frac{dx}{x}=0$, $\left(\frac{1}{xy}-\frac{1}{xy+1}\right)d(xy)-3\frac{dx}{x}=0$. Інтегруючи, дістаємо $\ln|xy|-\ln|xy+1|-3\ln|x|=-\ln C,\ C>0$, або $x^2(xy+1)=Cy$, $C\in R$. Константі $C=0$ відповідають роз-в'язки $x=0$ і $y=-1/x$.

Оскільки $x=0$ не задовольняє умову задачі, то вихідне рівняння можна записати у вигляді $\frac{dy}{dx}-\frac{y(2+3xy)}{x}=0$. З умови задачі випливає, що $\frac{dy}{dx}=0$ при $x=1$. Таким чином, дістаємо рівняння: $y(2+3y)=0$, звідки виплаває, що $y=0$ або $y=-2/3$.

Через точку $(1,\ 0)$ проходить інтегральна крива $y=0$, яка перетинає пряму $x=1$ під прямим кутом. А через точку $(1,\ -2/3)$ проходить інтегральна крива $y=-2x^2/(2x^3+1)$, яка відповідає константі $C=-1/2$ і також перетинає пряму $x=1$ під прямим кутом.

12.11 Розв'язок даного рівняння має вигляд (див. розв'язок попередньої задачі): $x^2(xy+1)=Cy$, $C\in R$, $y=0$.Оскільки інтегральна крива $x=0$ не задовольняє умову задачі, то дане рівняння можна записати у вигляді: $\frac{dy}{dx}-\frac{y(2+3xy)}{x}=0$. З умови задачі випливає, що $\frac{dy}{dx}=1$ при $x=1$. Звідси одержуємо рівняння: $3y^2+2y-1=0$, звідки маємо, що $y=-1$ або $y=1/3$.

Якщо $x=1$, $y=-1$, то $C=0$, тобто $y=-1/x$. Якщо $x=1$, $y=1/3$, то $C=4$, тобто $y=x^2/(4-x^3)$.

12.12 Продиференціюємо обидві частини рівняння:

$$y''+y'''+y^{(4)}+\ldots=1+2x\,.$$

Почленно віднімемо одержану рівність від початкового рівняння: $y'=-1-x+x^2$. Інтегруючи одержане рівняння, дістаємо: $y=-x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+C$. Оскільки $y(0)=0$, то $C=0$, отже, $y=-x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$. Перевірка показує, що знайдена функція дійсно є розв'язком вихідної задачі.

12.13 Очевидно, що розв'язки $x=0$ і $y=0$ даного диференціального рівняння не задовольняють початкову умову.

Нехай $x \neq 0$ и $y \neq 0$. Тоді, виконуючи рівносильні перетворення даного рівняння, послідовно матимемо:

$$\left(2x^3dy - yx^2dx\right) + \left(xydy + y^2dx\right) = 0,$$

$$-x^2\left(ydx - 2xdy\right) + y\left(xdy + ydx\right) = 0,$$

$$-x^2\frac{ydx - 2xdy}{y} + d\left(xy\right) = 0,$$

$$-x^2\frac{y^2dx - 2xydy}{y^2} + d\left(xy\right) = 0,$$

$$-x^2y^2\frac{y^2dx - xdy^2}{y^4} + d\left(xy\right) = 0,$$

$$-x^2y^2d\left(\frac{x}{y^2}\right) + d\left(xy\right) = 0, \qquad -x^2y^2d\left(\frac{x}{y^2}\right) + d\left(xy\right) = 0,$$

$$-d\left(\frac{x}{y^2}\right) - d\left(\frac{1}{xy}\right) = 0, \qquad d\left(\frac{x}{y^2} + \frac{1}{xy}\right) = 0, \qquad \frac{x}{y^2} + \frac{1}{xy} = C.$$

Оскільки згідно з початковою умовою $y=1$ при $x=1$, то $C=2$ і останнє рівняння набуває вигляду: $\frac{x}{y^2} + \frac{1}{xy} = 2.$

Розв'язуючи його відносно y і враховуючи, що $y=1$ при $x=1$, остаточно дістаємо:

$$y = \frac{\sqrt{8x^3+1}+1}{4x}.$$

12.14 Нехай $T\left(t\right)\ {}^0C$ – температура тіла, що охолоджується, яка залежіть від часу t. Тоді згідно з умовою задачі функція $T\left(t\right)$ задовольняє диференціальне рівняння $T'\left(t\right) = -kT\left(t\right)$, де коефіцієнт пропорційності $k>0$. Інтегруючи це рівняння при початковій умові $T\left(0\right)=100$, дістаємо, що температура першого тіла змінюється за законом

$T_1(t) = 100e^{-k_1 t}$, а температура другого тіла за аналогічним законом $T_2(t) = 100e^{-k_2 t}$. При $t = 10$ відповідно маємо: $80 = 100e^{-10k_1}$ і $64 = 100e^{-10k_2}$, звідки $T_1(t) = 100(0,8)^{\frac{t}{10}}$ і $T_2(t) = 100(0,64)^{\frac{t}{10}}$. Тепер складаємо рівняння: $T_1(t) - T_2(t) = 25$, яке відносно $(0,8)^{\frac{t}{10}}$ зводиться до квадратного: $\left((0,8)^{\frac{t}{10}}\right)^2 - (0,8)^{\frac{t}{10}} + 0,25 = 0$. Розв'язуючи це рівняння, знаходимо $t = 10\dfrac{\ln(0,5)}{\ln(0,8)}$.

12.15 Відокремлюючи змінні в даному рівнянні, одержуємо: $\dfrac{1-y}{y}dy = \dfrac{2x(x^2+2)}{x^2+1}dx$. Враховуючи, що $\int\dfrac{1-y}{y}dy =$ $\int\dfrac{1-y}{y}dy = \ln|y| - y$, а $\int\dfrac{2x(x^2+2)}{x^2+1}dx = \int\dfrac{2x(x^2+1)+2x}{x^2+1}dx =$ $= \int\left(2x + \dfrac{2x}{x^2+1}\right)dx = x^2 + \ln(x^2+1)$, маємо загальний інтеграл рівняння: $x^2 + \ln(x^2+1) - \ln|y| + y = C$. Врахування початкової умови дає значення $C = -1$ і одержаний частинний інтеграл запишемо у виді $x^2 + 1 + \ln(x^2+1) = -y + \ln|-y|$.

Розглянемо функцію $\varphi(x) = x + \ln|x|$. Легко встановити, що вона неперервна і монотонно зростає на $(0, +\infty)$, причому $\varphi(x) \geq 1$ для всіх $x \geq 1$. До того ж $\varphi(x) \leq -1$ для всіх $x < 0$. Тому, якщо $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ і $x_1 \geq 1$ то $x_1 = x_2$.

Одержаний розв'язок задачі Коші можна подати у виді $\varphi(x^2+1) = \varphi(-y)$. Оскільки $x^2 + 1 \geq 1$, то $x^2 + 1 = -y$, або

$y = -x^2 - 1$ і тоді $f(x) = \dfrac{4x}{4+x^2}$. Неважко бачити, що $\dfrac{4x}{4+x^2} \le \dfrac{4|x|}{4+x^2} \le \dfrac{4+x^2}{4+x^2} = 1$, тобто $f(x) \le 1$ для всіх x, причому значення 1 досягається при $x = 2$. Таким чином,

$$\max_{x \in R} f(x) = f(2) = 1.$$

12.16 Як і в попередній задачі одержуємо:

$$\max_{x \in R} f(x) = f(2) = 1.$$

12.17 Зауважимо, що дане диференціальне рівняння має розв'язок $y = x$. Вважаючи далі, що $y \ne x$, запишемо рівняння у виді:

$\dfrac{1}{y-x}\left(3x^2(y-x) + 1 - ((y-x)\sin y + 1)\dfrac{dy}{dx}\right) = 0$, або

$$\left(3x^2 + \frac{1}{y-x}\right)dx + \left(\frac{1}{x-y} - \sin y\right)dy = 0.$$

Неважко перевірити, що одержано рівняння в повних диференціалах. Інтегруючи його, одержуємо $x^3 - \ln|x-y| + \cos y = -\ln|C|$, або остаточно $x - y = Ce^{x^3 + \cos y}$, де C – константа, відмінна від нуля. При $C = 0$ сюди входить також і розв'язок $y = x$.

12.18 Домножимо початкове рівняння на y:

$$\left(y^2 + 2x\ln y\right)dx + \left(2xy + \frac{x^2}{y}\right)dy = 0.$$

Оскільки $\dfrac{\partial\left(y^2 + 2x\ln y\right)}{\partial y} = \dfrac{\partial\left(2xy + \dfrac{x^2}{y}\right)}{\partial x} = 2y + \dfrac{2x}{y}$, то одержано рівняння в повних диференціалах. Неважко знайти загальний інтеграл цього рівняння: $xy^2 + x^2\ln y = C$. Враховуючи початкову умову, одержуємо $C = 2$. Таким чином, розв'язок поставленої задачі Коші можна записати у виді

$$x\left(y^2 + x\ln y\right) = 2.$$

12.19 Із даного рівняння випливає, що $|dy/dx| \le 1/(1+x^4)$. Із формули Ньютона-Лейбніца для будь-яких x_1 і x_2 одержуємо

$$|y(x_2)-y(x_1)| \le \left|\int_{x_1}^{x_2}\frac{dy}{dx}dx\right| \le \left|\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{1+x^4}\right| \le \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}.$$

Із збіжності останнього інтеграла випливає обмеженість $y(x)$.

12.20 Легко бачити, що кожний розв'язок $y(x)$ є неперервна, диференційовна і монотонно зростаюча функція. Маємо

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x}\frac{dt}{1+t^2+y^2}, \quad |y-y_0| \le \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2+y^2} \le \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \pi,$$

що означає обмеженість розв'язку на всій числовій осі.

12.21 Розв'язок даного рівняння, який задовольняє початкову умову $y(0) = y_0$, можна записати у виді $y = e^{-ax}\left(\int_0^x e^{at}q(t)dt + y_0\right)$.

Покладемо $y_0 = \dfrac{1}{1-e^{-aT}}\displaystyle\int_{-T}^{0}e^{at}q(t)dt$ і доведемо, що одержаний розв'язок $y(x) = e^{-ax}\displaystyle\int_0^x e^{at}q(t)dt + \dfrac{e^{-ax}}{1-e^{-aT}}\displaystyle\int_{-T}^{0}e^{at}q(t)dt$ періодичний з періодом T. Справді, $y(x+T)=e^{-a(x+T)}\int\limits_0^{x+T} e^{at}q(t)dt+$

$+\frac{e^{-a(x+T)}}{1-e^{-aT}}\int\limits_{-T}^{0} e^{at}q(t)dt$. Розглянемо $\int\limits_0^{x+T} e^{at}q(t)dt=\left|\begin{matrix}\text{заміна}\\ t=z+T\end{matrix}\right|=$

$$=\int\limits_{-T}^{x} e^{a(z+T)}q(z+T)dz=\int\limits_{-T}^{x} e^{a(z+T)}q(z)dz=e^{aT}\left(\int\limits_{-T}^{0} e^{az}q(z)dz+\int\limits_0^{x} e^{az}q(z)dz\right)$$

. Тоді для будь-якого x маємо

$$y(x+T)=e^{-ax}\left(\int\limits_{-T}^{0} e^{at}q(t)dt+\int\limits_0^{x} e^{at}q(t)dt\right)+\frac{e^{-a(x+T)}}{1-e^{-aT}}\int\limits_{-T}^{0} e^{at}q(t)dt=$$

$$=e^{-ax}\left(\int\limits_{-T}^{0} e^{at}q(t)dt+\int\limits_0^{x} e^{at}q(t)dt+\frac{e^{-aT}}{1-e^{-aT}}\int\limits_{-T}^{0} e^{at}q(t)dt\right)=$$

$$=e^{-ax}\left(\int\limits_0^{x} e^{at}q(t)dt+\left(1+\frac{e^{-aT}}{1-e^{-aT}}\right)\int\limits_{-T}^{0} e^{at}q(t)dt\right)=$$

$=e^{-ax}\left(\int\limits_0^{x} e^{at}q(t)dt+\frac{1}{1-e^{-aT}}\int\limits_{-T}^{0} e^{at}q(t)dt\right)=y(x)$, що і вимагалось.

12.22 Маємо $\varphi\left(\frac{x}{y}\right)=y'-\frac{y}{x}=-\frac{1}{\ln^2|Cx|}=-\left(\frac{y}{x}\right)^2$, тобто

$$\varphi(u)=-\frac{1}{u^2}.$$

12.23 Позначимо $\sin^2 x = y$, тоді $f'(y) = 1 - 2y + \frac{y}{1-y} =$

$= -2y + \frac{1}{1-y}$, $f(y) = \int\left(-2y + \frac{1}{1-y}\right)dy = -y^2 - \ln(1-y) + C$

. Таким чином, $f(x) = -\left(x^2 + \ln(1-x)\right) + C$ при $0 < x < 1$.

12.24 Розв'язок рівняння, який задовольняє початкову умову $y(0) = y_0$ можна записати у виді

$$y(x) = e^{-\int_0^x a(t)dt}\left(\int_0^x e^{\int_0^t a(\tau)d\tau} f(t)dt + y_0\right),$$ або

$$y(x) = \int_0^x e^{-\int_t^x a(\tau)d\tau} f(t)dt + y_0 e^{-\int_0^x a(t)dt}.$$ Другий доданок, очевидно, прямує до нуля при $x \to +\infty$:

$$\left|y_0 e^{\int_0^x a(t)dt}\right| = \frac{|y_0|}{e^{\int_0^x a(t)dt}} \le \frac{|y_0|}{e^{cx}} \to 0.$$

Розглянемо перший доданок. Якщо $f(x)$ обмежена: $|f(x)| \le M$, то

$$\left|\int_0^x e^{-\int_t^x a(\tau)d\tau} f(t)dt\right| \le M\int_0^x e^{-c(x-t)}dt = Me^{-cx}\int_0^x e^{ct}dt =$$

$= Me^{-cx}\frac{1}{c}\left(e^{cx} - 1\right) = \frac{M}{c}\left(1 - e^{-cx}\right) < \frac{M}{c}$, тобто, перший доданок обмежений, а тому і розв'язок обмежений.

Нехай тепер $f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$, тоді

$$\left|\int_0^x e^{-\int_t^x a(\tau)d\tau} f(t)dt\right| \le \int_0^x e^{-c(x-t)}|f(t)|dt = \int_0^{x/2} e^{-c(x-t)}|f(t)|dt + \int_{x/2}^x e^{-c(x-t)}|f(t)|d$$

.

Але

$$\int_0^{x/2} e^{-c(x-t)}|f(t)|dt \le e^{-cx}\max_{0\le t\le x/2}|f(t)|\int_0^{x/2} e^{ct}dt = e^{-cx}\max_{0\le t\le x/2}|f(t)|\cdot\frac{1}{c}e^{ct}\Big|_0^{x/2} =$$

$$=\frac{1}{c}\max_{0\le t\le x/2}|f(t)|e^{-cx}\left(e^{\frac{cx}{2}}-1\right)<\frac{1}{c}\max_{0\le t\le x/2}|f(t)|e^{-\frac{cx}{2}}\to 0$$ при $x\to+\infty$, оскільки $\max\limits_{0\le t\le x/2}|f(t)|\le K<\infty$, а $e^{-\frac{cx}{2}}\to 0$ при $x\to+\infty$.

$$\int_{x/2}^{x}e^{-c(x-t)}|f(t)|dt\le\max_{x/2\le t\le x}|f(t)|e^{-cx}\int_{x/2}^{x}e^{ct}dt=\max_{x/2\le t\le x}|f(t)|e^{-cx}\cdot\frac{1}{c}e^{ct}\Big|_{x/2}^{x}=$$

$$=\frac{1}{c}\max_{x/2\le t\le x}|f(t)|e^{-cx}\left(e^{cx}-e^{\frac{cx}{2}}\right)=\frac{1}{c}\max_{x/2\le t\le x}|f(t)|\left(1-e^{-\frac{cx}{2}}\right)<\frac{1}{c}\max_{x/2\le t\le x}|f(t)|\to 0$$

при $x\to+\infty$. Тобто $y(x)\to 0$ при $x\to+\infty$.

12.25 Запишемо рівняння у виді $y''=\frac{y-xy'}{x^2}$, або $y''=-\left(\frac{y}{x}\right)'$. Звідси $y'=-\frac{y}{x}+C_1$. Одержано лінійне рівняння першого порядку, розв'язуючи яке, одержуємо загальний розв'язок вихідного рівняння: $y=C_1x+C_2/x$.

12.26 Доведемо, що $f\equiv 0$. Припустимо, що рівняння $f''=e^x f$ з умовами $f(a)=f(b)=0$ має ненульовий розв'язок $f(x)$. Можна вважати, що в деяких точках $f(x)$ приймає додатні значення. Знайдемо точку x_0, в якій $f(x)$ приймає максимальне значення. Тоді $f(x_0)>0$.
Оскільки x_0 – внутрішня точка відрізка $[a,b]$ і є точкою максимуму, то $f''(x_0)\le 0$. Але нерівності $f(x_0)>0$ і $f''(x_0)\le 0$ не можуть виконуватись одночасно з рівністю $f''(x_0)=e^{x_0}f(x_0)$.

12.27 Підставивши $y=x^2\sin x$ в рівняння, одержимо
$$2\sin x+4x\cos x+(q(x)-1)x^2\sin x+2xp(x)\sin x+x^2p(x)\cos x=0$$
– тотожно на $(-a,a)$. Поділимо обидві частини на x, тоді при $x\ne 0$, $x\in(-a,a)$:

$2\frac{\sin x}{x}+4\cos x+(q(x)-1)x\sin x+\ +xp(x\cos x)=0$. Але при неперервних $p(x)$ і $q(x)$ ліва частина прямує до 6 при $x\to 0$ і в деякому околі нуля рівність порушується. Тому функція $y=x^2\sin x$ не може бути розв'язком даного рівняння при неперервних $p(x)$ і $q(x)$ на інтервалі $(-a, a)$.

12.28 Підставимо функцію $y=1-\cos x$ в рівняння:

$$\cos x+p(x)\sin x+q(x)(1-\cos x)=0.$$

Неважко бачити, що при $x=0$ рівність не виконується, отже, вказана функція не може бути розв'язком даного рівняння на $(-a, a)$.

12.29 Дане рівняння рівносильне рівнянню $(y'-xy)'=0$, тобто $y'-xy=C_1$, звідки

$$y=C_1e^{x^2/2}\left(\int_0^x e^{-t^2/2}dt+C_2\right).$$

12.30 Якщо $x(t)$ – переміщення за час t, то маємо рівняння

$$\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}=\frac{x'(t)+x'(t_0)}{2}\quad \forall t>t_0.$$

За умовою функція $x(t)$ диференційовна в кожній точці. Отже, в даній рівності ліва частина диференційовна по t (при фіксованому t_0), тому і права частина диференційовна по t. А, значить, $x(t)$ двічі диференційовна по t. Знову ж таки із наведеної вище рівності випливає, що і $x'(t)$ двічі диференційовна по t. Домноживши цю рівність на $t-t_0$ і продиференціювавши двічі по t, одержимо

$$x''(t)=x''(t)+\frac{t-t_0}{2}x'''(t),$$

звідки $x'''(t)\equiv 0$, $x''(t)=const$, що і означає рівноприскореність руху.

12.31 Парність або непарність функції f визначається тотожністю $f(-x) = af(x)$, де $a = 1$ для парної функції і $a = -1$ для непарної. Тоді, якщо f диференційовна, то

$$f'(-x) = \frac{df(-x)}{d(-x)} = \frac{d(af(x))}{-dx} = -af'(x).$$

Отже, похідна непарної функції – парна, а похідна парної функції – непарна. Тоді, якщо існує парна або непарна функція $y(x)$, яка задовольняє рівняння $y'' + \sin y' + y = 0$, то $y + y'' = -\sin y' \equiv \varphi(x)$ і функція $\varphi(x)$ є одночасно і парною, і непарною, а тому

$$\varphi(x) = \varphi(-x) \equiv -\varphi(x) \Rightarrow \varphi(x) \equiv 0.$$

Звідси $\sin y' \equiv 0 \Rightarrow y' \equiv const \Rightarrow y'' = 0$ і $\varphi(x) = y + y'' = y = 0 \ \forall x \in R$, тобто, єдиною парною і непарною функцією, яка є розв'язком даного диференціального рівняння, є функція $y \equiv 0$.

12.32 Нехай $y(x)$ – будь-який розв'язок даної крайової задачі. Оскільки функція $y(x)$ диференційовна, то вона неперервна, і отже, набуває на $[0, 1]$ свого найбільшого M і найменшого m значень. Якщо існує $x \in (0, 1)$ такий, що $y(x) > 0$, то $M = y(\xi) > 0$. Тоді ξ – точка локального максимуму. Але $y''(\xi) > 0$ згідно рівняння. Суперечність. Таким чином, $M \le 0$. Аналогічно доводиться, що $m \ge 0$. Звідси випливає, що $y \equiv 0$.

12.33 Припустимо, що $y(x)$ обертається в нуль при $x > 0$, нехай x_0 – найменше додатне значення x таке, що $y(x_0) = 0$. Отже, в силу рівняння на проміжку $(0, x_0)$ $y''(x) > 0$. Це означає, що на цьому проміжку $y'(x)$ зростає, а тому $y'(x) > 0, \ x \in (0, x_0)$. Звідси випливає, що $y(x)$ зростає на $(0, x_0)$, а тому $y(x_0) > y(0) = 1$, суперечність.

Якщо припустити, що $y(x)$ обертається в нуль при $x < 0$, то позначивши через x_0 найбільше від'ємне значення x

таке, що $y(x_0)=0$, одержуємо $y''(x)>0$ на $(x_0\,,\,0)$. Тобто на цьому проміжку $y'(x)$ зростає, що означає, що $y'(x)<0$, $x\in(x_0\,,\,0)$. Таким чином, $y(x)$ спадає на $(x_0,0)$, тобто $y(x_0)>y(0)=1$, знову суперечність.

12.34 Запишемо рівняння у виді $(2y-x)y''=(y')^2-y'+2013$. Якщо y є розв'язком даного рівняння, то $y''\neq 0$ і $2y-x\neq 0$, оскільки жодна лінійна функція $y=kx+b$ не може бути розв'язком такого рівняння. Припустивши противне, приходимо до рівності $k^2-k+2013=0$, яка не виконується ні при якому дійсному k. Продиференціюємо обидві частини рівняння: $(2y-x)y'''=0$. Звідси $y'''=0$, тобто $y''=C_1$, $C_1\neq 0$ і тоді $y'=C_1x+C_2$. Підставимо y' і y'' в рівняння: $(2y-x)\cdot C_1=(C_1x+C_2)^2-C_1x-C_2+2013$. Звідси одержуємо загальний розв'язок рівняння:

$$y=\frac{(C_1x+C_2)^2}{2C_1}-\frac{C_2}{2C_1}+\frac{2013}{2C_1},\ \ C_1\neq 0.$$

12.35 Нехай x_0 – спільна точка максимуму двох розв'язків лінійного однорідного рівняння $y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0$ $y_1(x)$ і $y_2(x)$, тоді $y_1'(x_0)=y_2'(x_0)=0$. Розглянемо визначник Вронського системи функцій $y_1(x)$, $y_2(x)$: $W(x)=y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)$. Очевидно $W(x_0)=y_1(x_0)y_2'(x_0)-y_2(x_0)y_1'(x_0)=0$, а це оз-начає, що розв'язки $y_1(x)$ і $y_2(x)$ є лінійно залежними.

12.36 Зробимо заміну $y=\dfrac{z}{x}$, де $z=z(x)$ – нова шукана функція. Тоді $y'=\dfrac{xz'-z}{x^2}$, $y''=\dfrac{x^2z''-2xz'+2z}{x^3}$ і рівняння відносно z набуває виду $\frac{z''}{x}+\frac{z}{x}=0$, або $z''+z=0$. Загальний розв'язок цього рівняння $z=C_1\cos x+C_2\sin x$. Отже , загальний розв'язок вихідного рівняння

$$y=\frac{C_1\cos x+C_2\sin x}{x}.$$

12.37 Домножимо перше рівняння на y: $yy''+(y')^2=x'y+xy'$, або $(yy')'=x'y+xy'$. Якщо скористатись другим рівнянням системи, то можна записати: $(yy')'=1$. Друге рівняння системи можна подати так: $(xy)'=1$. Приходимо до системи $\begin{cases}(yy')'=1,\\(xy)'=1.\end{cases}$ Із першого рівняння цієї системи послідовно одержуємо: $y'y=t+C_1$, або $(y^2)'=2t+2C_1$, $y^2=t^2+2C_1t+C_2$. Із другого рівняння знайдемо $xy=t+C_3$, $x=(t+C_3)/y$. Остаточно: $y=\pm\sqrt{t^2+2C_1t+C_2}$, $x=(t+C_3)/y$.

13.1 Дане рівняння $f(x+y)=f(x)+f(y)$ називається функційним рівнянням Коші, а довільна функція, яка є його розв'язком – адитивною. Методом математичної індукції легко переконуємось, що для довільного натурального n виконується рівність

$$f(x_1+x_2+\ldots+x_n)=f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n).$$

Поклавши у цьому співвідношенні $x_1=x_2=\ldots=x_n=y$, отримаємо

$$f(ny)=nf(y).$$

Для довільних натуральних m та n візьмемо в останній рівності $y=\frac{m}{n}x$. Матимемо:

$$mf(x)=f(mx)=f\left(\frac{m\cdot n}{n}x\right)=f\left(n\frac{m}{n}x\right)=nf\left(\frac{m}{n}x\right),$$

або $f\left(\frac{m}{n}x\right)=\frac{m}{n}f(x)$, тобто для всіх додатних раціональних α і для всіх дійсних x виконується рівність

$$f(\alpha x)=\alpha f(x). \qquad (13.1)$$

Підставивши в цій рівності $\alpha=0$, матимемо $f(0)=0$. Тоді, зробивши підстановку $y=-x$ у вихідному рівнянні, отримаємо

$$0=f(0)=f(x+(-x))=f(x)+f(-x),$$

або $f(-x)=-f(x)$, тобто адитивна функція є непарною. Тому для довільного від'ємного раціонального β, використовуючи рівність (13.1), дістанемо

$$f(\beta x)=-f(-\beta x)=-(-\beta)f(x)=\beta f(x).$$

Отже, рівність (13.1) виконана для всіх раціональних α і для всіх дійсних x, зокрема,

$$f(\alpha)=f(\alpha\cdot 1)=\alpha f(1). \qquad (13.2)$$

Нехай тепер t – довільне дійсне число. Для нього існує така послідовність раціональних чисел $\{\alpha_n\}$, що $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=t$. Скориставшись неперервністю шуканої функції, дістанемо

$$f(t)=f\left(\lim_{n\to\infty}\alpha_n\right)=\lim_{n\to\infty}f(\alpha_n)=\lim_{n\to\infty}(\alpha_n f(1))=\left(\lim_{n\to\infty}\alpha_n\right)f(1)=tf(1).$$

Таким чином, позначивши $f(1)=C$ ми отримали $f(x)=Cx$. Перевіркою переконуємось, що усі такі функції є розв'язками рівняння Коші. Отже, у класі неперервних функцій усі адитивні функції є лінійними.

13.2 Поклавши в даному функційному рівнянні $y=x$, отримаємо $f\left(\sqrt{2x^2+1}\right)=2f(x)$. Звідси легко бачити, що $f(-x)=f(x)$, тобто кожний шуканий розв'язок є парною функцією, тому обмежимось розв'язанням даного функційного рівняння при $x\geq 0$, $y\geq 0$. Позначивши $x=\sqrt{u-1}$, $y=\sqrt{v-1}$ наше функційне рівняння перепишемо у вигляді

$$f\left(\sqrt{u+v-1}\right)=f\left(\sqrt{u-1}\right)+f\left(\sqrt{v-1}\right),\quad \forall u\geq 1,\ \forall v\geq 1.$$

Отже, ми отримали рівняння Коші для функції $g(u) = f(\sqrt{u - 1})$:

$$g(u + v) = g(u) + g(v), \quad \forall u \geq 1, \quad \forall v \geq 1 .$$

Тому $g(u) = Cu$, звідки $f(x) = g(x^2 + 1) = C(x^2 + 1)$, $x \in R$. Перевіркою легко переконуємось, що кожна функція виду $f(x) = C(x^2 + 1)$ є розв'язком даного функційного рівняння при будь-якому $C \in R$.

13.3 Якщо підставити в даному рівнянні $y = x = 0$, то отримаємо $f(0) = 0$. Тоді при $y = x$ маємо $f(2x) = 4\sqrt{f^2(x)} = \; = 4|f(x)| \geq 0$, тобто кожний розв'язок є невід'ємною функцією при усіх $x \geq 0$; отже, $f(2x) = 4f(x)$. Далі, поклавши $x = (n - 1)y$, $n \in N$, отримуємо рекурентне співвідношення

$$f(ny) = f((n - 2)y) + 4\sqrt{f((n - 1)y) \cdot f(y)}$$

Тоді методом математичної індукції доводимо, що $f(ny) = n^2 f(y)$ при усіх $y \geq 0$, $n \in N$.
Міркуючи далі так як при розв'язуванні рівняння Коші, знаходимо, що розв'язком нашого рівняння є функція виду $f(x) = Cx^2$ при усіх $C \geq 0$.

13.4 Підставимо в заданому рівнянні $y = x = t/2$. Матимемо $f(t) = f^2(t/2) \geq 0$, тобто функція f невід'ємна. Нехай для деякої точки x_0 виконується $f(x_0 = 0)$. Тоді

$$f(x_0 + y) = f(x_0) \cdot f(y) = 0, \qquad \forall y \in R,$$

тобто $f(t) = 0$ для всіх $t = x_0 + y \in R$. Очевидно, що $f(x) \equiv 0$ справді є розв'язком нашого функційного рівняння. Для знаходження усіх інших розв'язків можемо вважати $f(x) > 0$. Розглянемо функцію $g(x) = \ln f(x)$. Для цієї функції дане рівняння перепишеться у вигляді рівняння Коші, розв'язаного в задачі 13.1, отже матимемо $g(x) = Cx$, звідки $f(x) = e^{Cx}$. Легко перевірити, що кожна така функція є розв'язком нашого рівняння.

13.5 Достатньо розглянути функцію $g(u)=f(e^u)$. Для неї дане функційне рівняння перетвориться в лінійне, отже $g(u)=Cu$, тобто $f(x)=g(\ln x)=C\ln x$.

13.6 Підставимо в наше рівняння $y=x$. Тоді $2xf(x)=2xf^2(x)$ для всіх $x\in R$. Тому $f(x)=0$, або $f(x)=1$ для всіх $x\neq 0$. За умовою шуканий розв'язок є неперервною функцією, отже, $f(x)\equiv 0$ або $f(x)\equiv 1$. Перевіркою переконуємось, що ці функції справді є розв'язками.

13.7 Поділивши обидві частини нашого рівняння на $x^{\alpha}y^{\alpha}$, отримаємо функційне рівняння, розглянуте в задачі 13.5, для функції $g(x)=x^{-\alpha}f(x)$, отже, $g(x)=C\ln x$, звідки $f(x)=x^{\alpha}g(x)=Cx^{\alpha}\ln x$.

13.8 Розглянемо функцію $g(x)=f(x)-x^3$. Для неї дане рівняння перетвориться в рівняння Коші. Оскільки кожний многочлен є неперервною на всій числовій осі функцією, то $g(x)=Cx$, тобто, $f(x)=x^3+Cx$. Перевірка підтверджує цей результат.

13.9 З рівняння бачимо, що якщо $f(x+y)\neq 0$, то $f(x)\neq 0$ та $f(y)\neq 0$. Для усіх таких x та y дане функційне рівняння можна переписати у такому вигляді:

$$\frac{1}{f(x+y)}=\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{f(y)}.$$

Записане рівняння є рівнянням Коші для функції $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$, отже, $g(x)=Cx$, тобто $f(x)=\dfrac{1}{Cx}$.

13.10 Якщо функція неперервна і строго монотонна на деякому інтервалі, то вона оборотна. Нехай $g(x)=arctg\, f(x)\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$. Тоді $f(x)=tg\, g(x)$ і наше рівняння перепишеться у вигляді

$$tg\, g(x+y)=tg(g(x)+g(y)),$$

звідки $g(x+y)=g(x)+g(y)+\pi n$, де $n\in Z$. Підставивши $y=0$, отримуємо $n=0$, бо $|g(x)|<\frac{\pi}{2}$. Отже, ми знову прийшли до функційного рівняння Коші для функції g. Тому $g(x)=Cx$ і $f(x)=tg\,Cx$, $C\in R\setminus\{0\}$.

13.11 Зробивши в даному рівнянні заміну $x=\frac{t+1}{3t-1}$, отримаємо $f\left(\frac{t+1}{3t-1}\right)+\frac{t+1}{3t-1}f(t)=1$.

Замінимо в отриманому рівнянні t на x і після цього домножимо обидві його частини на x. Матимемо:

$$xf\left(\frac{x+1}{3x-1}\right)+x\frac{x+1}{3x-1}f(x)=x.$$

Віднявши від заданого функційного рівняння останнє отримане, дістанемо

$$f(x)-\frac{x(x+1)}{3x-1}f(x)=1-x,$$

звідки $f(x)=\frac{(1-x)(3x-1)}{3x-1-x^2-x}=\frac{(x-1)(3x-1)}{(x-1)^2}=\frac{3x-1}{x-1}$,

$\forall x\in R\setminus\left\{\frac{1}{3},1\right\}$. Виконаємо перевірку:

$$\frac{3x-1}{x-1}+x\frac{3\frac{x+1}{3x-1}-1}{\frac{x+1}{3x-1}-1}=\frac{3x-1}{x-1}+x\frac{4}{-2x+2}=\frac{3x-1-2x}{x-1}=1.$$

Обчислимо значення функції ще в точці $x=1$. Підставивши це значення в дане рівняння, отримаємо $f(1)+f(1)=1$, звідки $f(1)=\frac{1}{2}$ Отже, шуканим розв'язком нашого рівняння буде функція

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x-1}{x-1}, & x\in R\setminus\left\{\dfrac{1}{3},1\right\},\\[2mm] \dfrac{1}{2}, & x=1.\end{cases}$$

13.12 Підставивши в дане рівняння $x=y=0$ отримаємо $f(0)=1$. А тепер – тільки $y=0$. Матимемо $3-f(x)=-2x+2$, звідки $f(x)=2x+1$. Легко перевірити, що ця функція дійсно буде розв'язком.

13.13 Підставивши в дане рівняння $x=y=0$, отримаємо $f(0)=f^3(0)$, звідки або $f(0)=0$, або $f(0)=1$, або $f(0)=-1$. Взявши тепер $y=x$, матимемо $f(0)=f^3(2x)$, або $f(2x)=\sqrt[3]{f(0)}$, тобто $f(x)\equiv const$. Враховуючи, якими можуть бути значення $f(0)$, робимо висновок, що розв'язками нашого функційного рівняння є функції $f(x)\equiv 0$, $f(x)\equiv 1$, та $f(x)\equiv -1$.

13.14 Підставимо у даному рівнянні $x=t/3$. Тоді $f(t)=f(t/3)$. Методом математичної індукції легко показати, що

$$f(t)=f\left(\frac{t}{3^n}\right),\quad \forall t\in R,\ \forall n\in N.$$

Отже, для кожного фіксованого $t\in R$ числова послідовність $\left(f\left(\frac{t}{3^n}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$ є сталою. Тому, оскільки $\frac{t}{3^n}\to 0$ при $n\to\infty$ і шуканий розв'язок є неперервною в точці 0 функцією, матимемо

$$f(t)=\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{t}{3^n}\right)=f\left(\lim_{n\to\infty}\frac{t}{3^n}\right)=f(0)$$

при всіх $t\in R$. Це означає, що всі розв'язки даного функційного рівняння виражаються формулою $f(x)\equiv a$, де $a\in R$.

13.15 Перетворивши дане рівняння до вигляду $f(2x)=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2}x$, зробимо заміну $t=2x$. Тоді

$$f(t)=\frac{1}{2}f\left(\frac{t}{2}\right)-\frac{1}{2}\frac{t}{2}. \qquad (13.3)$$

Доведемо методом математичної індукції, що при всіх $n\in N$

$$f(t)=\frac{1}{2^n}f\left(\frac{t}{2^n}\right)-t\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4^n}\right). \qquad (13.4)$$

Для $n=1$ рівність (13.4) очевидна. Припустимо, що вона є істинною для $n=k$. Нехай $n=k+1$. Тоді, з огляду на (13.3), матимемо

$$f(t)=\frac{1}{2^k}f\left(\frac{t}{2^k}\right)-t\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4^k}\right)=\frac{1}{2^k}\left(\frac{1}{2}f\left(\frac{t}{2^k}\right)-\frac{1}{2}\frac{t}{2^k}\right)-$$

$$-t\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4^k}\right)=\frac{1}{2^{k+1}}f\left(\frac{t}{2^{k+1}}\right)-t\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4^{k+1}}\right),$$

що й треба було довести.

Оскільки функція f обмежена в околі точки 0, а $\frac{1}{2^n}\to 0$ та $\frac{t}{2^n}\to 0$ при $n\to\infty$, то $\frac{1}{2^n}f\left(\frac{t}{2^n}\right)\to 0$ при $n\to\infty$. Тому, переходячи в рівності (13.4) до границі при $n\to\infty$, отримаємо

$$f(t)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n}f\left(\frac{t}{2^n}\right)-t\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4^n}\right)\right)=0-t\cdot\frac{1}{3}.$$

Перевіривши, бачимо, що $f(x)=-x/3$ для всіх $x\in R$ справді задовольняє дане функційне рівняння.

13.16 Продиференціюємо двічі обидві частини даного рівняння: $3f'(3x+1)=9f'(x)$, $3^2 f''(3x+1)=9f''(x)$, тобто $f''(3x+1)=f''(x)$. Тоді (див. задачу 13.14) $f''(x)\equiv const$. Тому $f'(x)=ax+b$, $f(x)=\frac{a}{2}x^2+bx+c$. Підставимо цей вираз для $f(x)$ в дане рівняння:

$$\frac{a}{2}(3x+1)^2+b(3x+1)+c=9\left(\frac{a}{2}x^2+bx+c\right).$$

Тоді

$$\begin{cases} 3a+3b=9b, \\ \frac{a}{2}+b+c=9c. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему стосовно b, матимемо $a=2b$, $c=\frac{b}{4}$. Отже, $f(x)=bx^2+bx+\frac{b}{4}=b\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$.

13.17 Подавши дане рівняння у вигляді $\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=x^2 f(x)$, бачимо, що існує $\lim\limits_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=x^2 f(x)$, тобто функція f диференційовна на R і

$$f'(x)=x^2 f(x). \qquad (13.5)$$

Нехай для деякої точки x_0 виконується $f(x_0)=0$, тоді

$$f(x_0+y)=f(x_0)+x_0^2 y f(x_0)=0, \quad \forall y\in R,$$

отже, $f(x)\equiv 0$. Якщо $f(x)\neq 0$, то поділивши обидві частини отриманого диференціального рівняння (13.5) на $f(x)$, матимемо

$$\left(\ln|f(x)|\right)'=x^2,$$

звідки $\ln|f(x)| = \frac{x^3}{3} + \ln|C|$, тобто $f(x) = Ce^{x^3/3}$, $C = const$, $C \neq 0$. Та пряма перевірка показує, що функція $f(x) = Ce^{x^3/3}$ при $C \neq 0$ не задовольняє даному рівнянню для усіх дійсних x та y.

Таким чином, $f(x) \equiv 0$ – єдиний розв'язок нашого функційного рівняння.

13.18 Покажемо, що дане рівняння методом підстановок можна звести до функційного рівняння Коші.

Підставивши в рівняння $x = y = 0$, отримаємо $f(0) = 0$. Якщо тепер тільки $y = 0$, то

$$f(x^3) = f^3(x), \qquad \forall x \in R. \tag{13.6}$$

А якщо підставити лише $x = 0$, то матимемо, враховуючи (13.6),

$$f(-y^3) = -f^3(y) = -f(y^3), \qquad \forall y \in R,$$

тобто функція f непарна. Використовуючи непарність, наше рівняння можемо переписати у вигляді $f(x^3 + y^3) = f^3(x) + f^3(y)$ або, з врахуванням (13.6), $f(x^3 + y^3) = f(x^3) + f(y^3)$. Зробивши заміни $x^3 = u$, $y^3 = v$, отримаємо функційне рівняння Коші $f(u+v) = f(u) + f(v)$ у класі неперервних на R функцій. Отже, з огляду на задачу 13.1, маємо $f(x) = ax$. Підставивши цю функцію в дане функційне рівняння, отримаємо $a = 0$ або $a = 1$, тобто лише функції $f(x) \equiv 0$ та $f(x) = x$ є його розв'язками.

13.19 Замінимо в даному співвідношенні x спочатку на $x + a$, а потім на $x - a$:

$$f(x+2a) + f(x) = \sqrt{2} f(x+a);$$
$$f(x) + f(x-2a) = \sqrt{2} f(x-a).$$

Додавши обидва отримані співвідношення, а також врахувавши дане співвідношення, матимемо

$$2f(x) + f(x+2a) + f(x-2a) = \sqrt{2}\left(f(x+a) + f(x-a)\right) = 2f(x),$$

звідки $f(x+2a) + f(x-2a) = 0$. Замінивши в цьому співвідношенні x на $x + a$, отримаємо $f(x+4a) = -f(x)$, тому

$$f(x+8a)=-f(x+4a)=f(x).$$

Отже, функція f періодична з періодом $T=8a$.

13.20 Знайдемо $f(x+1)$, $f(x+2)$, $f(x+3)$, $f(x+6)$ послідовно використовуючи дану тотожність:

$$f(x+1)=\frac{f(x)}{f(x-1)};$$

$$f(x+2)=\frac{f(x+1)}{f(x)}=\frac{f(x+1)}{f(x-1)\cdot f(x+1)}=\frac{1}{f(x-1)};$$

$$f(x+3)=\frac{1}{f(x)};$$

$$f(x+6)=f((x+3)+3)=\frac{1}{f(x+3)}=f(x).$$

Отже, функція $f(x)$ періодична з періодом 6. Тому

$$f(2014)=f(335\cdot 6+4)=f(4)=f(1+3)=\frac{1}{f(1)}=\frac{1}{2}.$$

13.21 Покажемо спочатку, що функція $g(x)=\log_x(x+1)$ строго монотонна на інтервалі $(1,+\infty)$. Оскільки для усіх x з цього інтервалу

$$g'(x)=\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)'=\frac{x\ln x-(x+1)\ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2 x}<0,$$

то $g(x)$ спадна на $(1,+\infty)$. Так як $x^2+2x+3\ge 2$ для всіх $x\in R$, то приходимо до висновку, що $f(x)=x^2+2x+3$ – єдиний розв'язок даного функційного рівняння.

13.22 Нехай $b=f(a)>0$ для деякого $a\in[0,1]$. Із даного рівняння видно, що f визначена в точках $a+f(a)$, $a+2f(a),\ldots,a+nf(a)$, тощо. Але тоді існує таке $n_0\in N$, що $a+bn_0>1$, що суперечить умові $D(f)=[0,1]$. Аналогічно доводиться, що для кожного $a\in[0,1]$ не виконується умова $f(a)<0$. Отже, залишається $f(x)\equiv 0$, яка справді є розв'язком цього функційного рівняння.

13.23 В даному рівнянні

$$2f(xy)=f(x)\cdot f(y)-f(x+y)+2 \qquad (13.7)$$

підставимо $y=1$. Тоді

$$2f(x)=f(x)\cdot f(1)-f(x+1)+2, \qquad \forall x\in Q$$

і, врахувавши умову $f(1)=3$, матимемо

$$f(x+1)=f(x)+2 \qquad \forall x\in Q.$$

З цієї рівності методом математичної індукції можна отримати

$$f(x+n)=f(x+2n) \qquad \forall x\in Q,\ \forall n\in Z. \tag{13.8}$$

Підставимо в рівняння (13.7) $x=1/n$, $y=n$, де $n\in N$. Тоді, враховуючи останню рівність,

$$6=2f(1)=f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f(n)-f\left(\frac{1}{n}+n\right)+2=$$

$$=f\left(\frac{1}{n}\right)(2n+1)-\left(f\left(\frac{1}{n}\right)+2n\right)+2=2nf\left(\frac{1}{n}\right)-2n+2,$$

звідки $f(1/n)=2/n+1$. Враховуючи це і підставляючи $x=p$, $y=1/q$, де $p\in Z$, $q\in N$, дістаємо, з огляду на (13.8)

$$2f\left(p\cdot\frac{1}{q}\right)=f(p)\cdot f\left(\frac{1}{q}\right)-f\left(p+\frac{1}{q}\right)+2=$$

$$=(2p+1)\left(\frac{2}{q}+1\right)-\left(\frac{2}{q}+2p\right)+2=2\left(\frac{2p}{q}+1\right),$$

звідки $f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{2p}{q}+1$.

Прямою перевіркою встановлюємо, що функція $f(x)=2x+1$ для всіх $x\in Q$ є шуканим розв'язком даного функційного рівняння.

13.24 В даному рівнянні

$$f\left(x^2+y\right)=f(x)+f\left(y^2\right), \quad \forall x\in R, \quad \forall y\in R \tag{13.9}$$

замінимо x на $-x$. Отримаємо

$$f\left(x^2+y\right)=f(-x)+f\left(y^2\right), \quad \forall x\in R, \quad \forall y\in R.$$

Прирівнявши праві частини отриманого співвідношення та (13.9), маємо $f(x)=f(-x)$, тобто шукана функція є парною.

За підстановки $x=0$, $y=0$ з рівності $f(0)=f(0)+f(0)$ випливає, що $f(0)=0$.

Замінивши у рівності (13.9) y на $-y$, отримаємо співвідношення $f(x^2-y)=f(x)+f(y^2)$, $\forall x\in R$, $\forall y\in R$, у якому права частина збігається з правою частиною (13.7). Тому

$$f(x^2+y)=f(x^2-y),\quad \forall x\in R,\ \forall y\in R.$$

Підставивши в останній рівності $y=x^2$, матимемо $f(2x^2)=f(0)=0$.

Оскільки f – парна, то $f(x)\equiv 0$ – єдиний розв'язок даного функційного рівняння.

13.25 Зробивши в даному співвідношенні підстановку $y=x/2$, одержимо $f(x)f\left(\frac{x}{2}\right)=f\left(\frac{x}{2}\right)$, або $f\left(\frac{x}{2}\right)(f(x)-1)=0$, $\forall x\in R$. Звідси $f\left(\frac{x}{2}\right)=0$, або $f(x)=1$.

Якщо $f(x_0)=0$ для деякої точки x_0, то $f(x_0)f(y)=f(x_0-y)$. Тоді $f(x_0-y)=0$ для всіх $y\in R$. Зробивши заміну $x_0-y=t$, отримаємо $f(t)\equiv 0$, що суперечить умові.

Отже, перевіривши, переконуємось, що функція $f(x)\equiv 1$ – єдиний розв'язок даного функційного рівняння.

13.26 Підставивши $x=1,\ y=0$ в дане функційне рівняння одержимо $f(0)+0\cdot f(1)=f(0)+a$, звідки $a=0$. Тоді рівняння набуде вигляду

$$x^2f(y)+y\,f(x^2)=f(xy),\qquad \forall x\in R,\ \forall y\in R.$$

(13.10)

Покладемо тепер в (13.10) $y=x$. Отримаємо

$$x^2f(x)+x\,f(x^2)=f(x^2),\quad \forall x\in R. \qquad (13.11)$$

Зробимо в цьому співвідношенні підстановку $x=1$, тоді $2f(1)=f(1)$, або $f(1)=0$. Якщо в (13.10) замінити x на $-x$, а x на y, то отримаємо

$$x^2f(x)+x\,f(x^2)=f(-x^2),\quad \forall x\in R.$$

З цієї рівності та (13.11) маємо, що $f(x)=f(-x)$, тобто f – парна. Взявши в (13.10) $y=-x$, отримаємо $x^2 f(-x)-x f(x^2)=f(-x^2)$, або

$$x^2 f(x)-x f(x^2)=f(x^2), \qquad \forall x\in R. \qquad (13.12)$$

Віднявши рівність (13.12) від (13.11), дістанемо $2x f(x^2)=0$, тобто $f(t)=0$ для всіх $t=x^2>0$. Оскільки для $x=0$ з (13.11) випливає, що $f(0)=0$, то, з огляду на парність функції f, для всіх $x\in R$ виконується $f(x)=0$. Отже, для $a=0$, як легко перевірити, єдиним розв'язком даного функційного рівняння є функція $f(x)\equiv 0$, а за умови $a\neq 0$ рівняння розв'язків не має.

13.27 Замінивши x на $-x$ в даному рівнянні

$$x(f(x)+f(-x)+2)+2f(-x)=0, \qquad \forall x\in R, \qquad (13.13)$$

отримаємо

$$-x(f(-x)+f(x)+2)+2f(x)=0, \qquad \forall x\in R.$$

Додавши отримане співвідношення до (13.13), матимемо $f(-x)=-f(x)$, тобто шукана функція є непарною. З врахуванням цього (13.13) перепишеться у вигляді

$$x(f(x)-f(x)+2)-2f(x)=0, \quad \forall x\in R,$$

звідки видно, що $f(x)=x$ для всіх $x\in R$, що й підтверджує перевірка.

13.28 Зробивши в рівнянні

$$f(x-f(y))=1-x-y, \quad \forall x\in R, \ \forall y\in R, \qquad (13.14)$$

Підстановку $y=1$, отримаємо $f(x-f(1))=-x$ або

$$f(z)=-z-f(1)=-z-C, \qquad \forall z\in R, \qquad (13.15)$$

де $z=x-C$, $C=f(1)$. Підставимо тепер (13.15) в рівняння (13.14): $-(x-f(y))+C=1-x-y$, звідки

$$f(y)=1-y-C, \qquad \forall y\in R.$$

Тоді, враховуючи (13.15), отримаємо $f(y)=1-y-C=-y+C$, звідки $C=\frac{1}{2}$, тобто $f(y)=\frac{1}{2}-y$.

Перевірка підтверджує, що функція $f(y)=\frac{1}{2}-y$ справді є розв'язком даного функційного рівняння.

13.29 Підставивши $x=y=0$ в рівнянні

$$f\left((x-y)^2\right)=f\left(x^2\right)+f\left(y^2\right)-2xy, \quad \forall x\in R, \quad \forall y\in R, \quad (13.16)$$

матимемо $f(0)=0$. Тепер замінимо в (13.16) y на $-y$:

$$f\left((x+y)^2\right)=f\left(x^2\right)+f\left(y^2\right)+2xy, \quad \forall x\in R, \quad \forall y\in R.$$

Віднявши від рівняння (13.16) отримане рівняння, маємо:

$$f\left((x+y)^2\right)-f\left((x-y)^2\right)=4xy, \quad \forall x\in R, \quad \forall y\in R.$$

Підставивши в останньому співвідношенні $y=x$, дістанемо $f\left(4x^2\right)-f(0)=4x^2$, тобто $f(t)=t$ для всіх $t\in[0, +\infty)$, що й підтверджує перевірка.

13.30 Покладемо в даному рівнянні $x=y=0$. Тоді $2f^2(0)=0$, звідки $f(0)=0$. Якщо $y=0$, то $f^2(x)=x^2$, тобто $|f(x)|=|x|$. Тому маємо чотири випадки:

1) $f(x)=x$; 2) $f(x)=-x$; 3) $f(x)=|x|$; 4) $f(x)=-|x|$.

Перевірка показує, що випадки 1) і 2) задовольняють умову задачі, а 3) і 4) – ні.

13.31 Взявши в даній тотожності $y=1$, отримаємо тотожність $f(x)\equiv\frac{f(x)+f(1)}{x+1}$, тобто $x f(x)=f(1)$ для всіх $x\in R\setminus\{1\}$. Підставивши $x=0$, одержимо $f(1)=0$, тому $f(x)\equiv 0$ для $x\neq 0$, $x\neq 1$. Далі, підставляючи в дану тотожність $y=0$, $x=2$, матимемо $f(0)=\frac{1}{2}(f(2)+f(0))$, звідки $f(0)=f(2)=0$. Тепер підставимо $y=0$, $x=-1$: $f(0)=-f(-1)-f(0)$, звідки $f(-1)=2f(0)=0$.

Отже, $f(x)\equiv 0$ для всіх $x\in R$. Перевірка підтверджує цей результат, тому відповідь на поставлене в умові запитання негативна.

13.32 Підставивши $x = y = 0$ в дане співвідношення, маємо $f(0) = f^3(0)$, звідки або $f(0) = -1$, або $f(0) = 0$, або $f(0) = 1$.

Нехай тепер $y = -x$. Тоді $f(2x^3) = f^3(0)$ для всіх $x \in R$, тобто $f(t) = f^3(0) = f(0)$ для всіх $t = 2x^3 \in R$.

Перевірка показує, що функції $f(x) \equiv -1$, $f(x) \equiv 0$, $f(x) \equiv 1$ є розв'язками даного функційного рівняння.

13.33 Нехай $x - y = a$, тобто $x = y + a$. Тоді $f(a) = f(3ay^2 + 3a^2 y + a^3)$. Зафіксуємо $a > 0$. Оскільки квадратична форма $z = z(y) = 3ay^2 + 3a^2 y + a^3$ досягає свого найменшого значення $a^3/4$ в точці $y = -a/2$, то її множина значень $E(z) = \lfloor a^3/4, +\infty)$. Оскільки $a > 0$ довільне і може бути як завгодно мале, то $f(z) = f(a)$ для всіх $z > 0$. Отже, функція f є сталою на $(0, +\infty)$. Зафіксувавши $a < 0$ аналогічно встановлюємо, що функція f є сталою на $(-\infty, 0)$. Перевіривши, переконуємося, що усі функції виду

$$f(x) = \begin{cases} C_1, \text{ якщо } x < 0; \\ C_2, \text{ якщо } x = 0; \\ C_3, \text{ якщо } x > 0, \end{cases}$$

де C_1, C_2, C_3 – довільні сталі, задовольняють умову задачі.

13.34 Легко переконатись, що $f(0) = 0$ і $f(-x) = -f(x)$, де $x \in R$. Оскільки $\frac{1}{x-1} = \frac{1}{x(x-1)} + \frac{1}{x}$, то, використовуючи умову а) та умову б) у вигляді $\frac{f(x)}{x^2} = f\left(\frac{1}{x}\right)$, маємо:

$$\frac{f(x-1)}{(x-1)^2} = f\left(\frac{1}{x-1}\right) = f\left(\frac{1}{x(x-1)} + \frac{1}{x}\right) =$$

$$=f\left(\frac{1}{x(x-1)}\right)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{f(x(x-1))}{(x(x-1))^2}+\frac{f(x)}{x^2}.$$

Враховуючи непарність f, матимемо

$$f\left(x^2\right)+x^2f(1)=2x\,f(x)\,,\quad \forall x\in R\,.$$

Замінивши в цій формулі x на $x+\frac{1}{x}$, отримаємо, двічі її використавши, $f(2)+2f(1)=2x\,f\left(\frac{1}{x}\right)+2\frac{1}{x}f(x)=4\frac{1}{x}f(x)$.

Якщо $x=2$, то $f(2)=2f(1)$. Тому $f(x)=Cx$, де $C=f(1)$.

Це співвідношення виконується також для $x=0$ та $x=1$. Отже, лише функції вигляду $f(x)=Cx$ для всіх $x\in R$ задовольняють умови задачі.

13.35 З умови а) за індукцією отримаємо $f(x+m)=f(x)+m$ для всіх $m\in N$ і для всіх $x\in Q_+$. Нехай $p\in N$, $q\in N$, тоді, відповідно до умови б), матимемо:

$$\left(f\left(\frac{p}{q}\right)+q^2\right)^3=\left(f\left(\frac{p}{q}+q^2\right)\right)^3=f\left(\left(\frac{p}{q}+q^2\right)^3\right)=$$

$$=f\left(\left(\frac{p}{q}\right)^3+3p^2+3pq^3+q^6\right)=f\left(\left(\frac{p}{q}\right)^3\right)+3p^2+3pq^3+q^6.$$

Отже, $\left(f\left(\frac{p}{q}\right)+q^2\right)^3=f^3\left(\frac{p}{q}\right)+3p^2+3pq^3+q^6$. Звідси

$$3q^2f^2\left(\frac{p}{q}\right)+3q^4f\left(\frac{p}{q}\right)=3p^2+3pq^3 \text{ і}$$

$$q^2\left(f\left(\frac{p}{q}\right)-\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{p}{q}\right)^2-f^2\left(\frac{p}{q}\right).$$

Якщо $f\left(\frac{p}{q}\right)\neq\frac{p}{q}$, то $f\left(\frac{p}{q}\right)+\frac{p}{q}=-q^2$, що неможливо. Отже, $f(x)=x$ для всіх $x\in Q_+$.

13.36 Виконаємо послідовно заміни:

$$x=0,\ y=t;\quad x=t+\frac{\pi}{2},\ y=\frac{\pi}{2};\quad x=\frac{\pi}{2},\ y=t+\frac{\pi}{2}\,.$$

Тоді дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} f(t)+f(-t)=2a\cos t, \\ f(\pi+t)+f(t)=0, \\ f(\pi+t)+f(-t)=-2b\sin t, \end{cases} \quad \text{де } a=f(0),\ b=f\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Звідси $f(t)=a\cos t+b\sin t$, або $f(x)=a\cos x+b\sin x$, де $a,\ b\in R$.

Перевірка показує, що знайдена функція є розв´язком даної задачі при будь-яких дійсних a і b.

13.37 Підставляючи $x=y=1$ в дане функційне рівняння, дістаємо $(f(1))^2-f(1)=2$. Це рівняння має два дійсних корені $f(1)=2$, або $f(1)=-1$. Покладаючи $y=1$ у функційному рівнянні, маємо $f(x)\cdot f(1)-f(x)=x+x+1-1$, або $f(x)\cdot(f(1)-1)=2x$.

Якщо $f(1)=2$, то $f(x)=2x$, а якщо $f(1)=-1$, то $f(x)=-x$. Перевірка показує, що жодна знайдена функція не задовольняє вихідне функційне рівняння, отже це рівняння не має розв’язків.

13.38 Покладемо $k=1$. Тоді

$$f(m+1)=f(m-n), \quad \forall m>n.$$

Це означає, що $T=n+1$ є «періодом» функції f:

$$f(m+(n+1))=f(m), \quad \forall m\in N.$$

Покладемо $k=(n+1)\cdot l,\ l\in N$. Тоді $f(m+(n+1)\cdot l)=$ $=f(ml(n+1)-n)$, або $f(m)=f((ml-1)(n+1)+1)$. Звідси: $f(m)=f(1),\ \forall m\in N$.

Таким чином, $f(m)\equiv const$.

13.39 Припустимо, що функцію $f:S\to S$ знайдено. Оскільки $\frac{1}{x}f(x)$ строго зростає на $(-1,\ 0)$ та $(0,\ +\infty)$, то рівняння $f(x)=x$ може мати не більше трьох розв’язків: один на $(-1,\ 0)$, один на $(0,\ +\infty)$ і, можливо, $x=0$. Якщо $f(u)=u$ для деякого $u\in(-1,0)$, то підставивши $y=x$ в а), матимемо

$$f(x+(1+x)f(x))=x+(1+x)f(x),\quad \forall x\in S.$$

Тому $x+(1+x)f(x)=0$, звідки $f(x)=-\frac{x}{1+x}$. Прямою перевіркою встановлюємо, що дана функція справді задовольняє умову задачі.

13.40 Підставивши в умову а) $x=y=0$, отримаємо $f(0)=0$. Застосувавши f до обидвох частин рівності а), матимемо $f(f(x\,f(y)))=f(y\,f(x))=x\,f(y)$. Оскільки вираз $x\,f(y)$ може набувати довільних значень із множини R_+, то

$$f(f(x))=x,\qquad \forall x\in R_+. \tag{13.17}$$

Тоді, використовуючи також умову а) з $y=f(x)$, маємо

$$f(x^2)=f(x\,f(f(x)))=f^2(x),\qquad \forall x\in R_+. \tag{13.18}$$

Також з умови а) та (13.17) маємо, що $y=f(f(y))=f(1\cdot f(y))= =y\,f(1)$ для всіх $y\in R_+$, звідки $f(1)=1$.

Тепер розглянемо такі випадки:

1) Існує таке $y\in R_+$, для якого $y\,f(y)=a\neq 0$ і $a\neq 1$. Тоді

$$a\,f(y)=f(f(a\,f(y)))=f(y\,f(a))=f(ya),$$

звідки $a\,f\left(\frac{1}{a}\right)=f\left(\frac{1}{a}a\right)=f(1)=1$. Тому $f\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a}$. Оскільки одне з чисел a та $b=\frac{1}{a}$ є більшим за одиницю (нехай $a>1$), то, використовуючи послідовно (13.18), матимемо $f\left(a^{2^n}\right)=a^{2^n}>1$ і $f\left(a^{2^n}\right)\to +\infty$ при $n\to\infty$, що суперечить умові б) даної задачі. Отже, у цьому випадку розв'язків немає. Залишилось розглянути ще два можливі випадки:

2) $y\,f(y)\equiv 0$ для всіх $y\in R_+$, тобто $f(y)\equiv 0$.

3) $y\,f(y)\equiv 1$ для всіх $y>0$, тобто $f(y)=\frac{1}{y}$.

Перевіркою переконуємось, що розв'язками задачі є обидві функції

$$f(x) \equiv 0 \quad \text{та} \quad f(x) = \begin{cases} 1/x, & якщо\ x > 0, \\ 0, & якщо\ x = 0. \end{cases}$$

13.41 Підставивши в дану рівність $y = \dfrac{\pi}{2} - x$, маємо

$$2f(\cos y) + 3f(\sin y) = \cos y, \qquad \forall y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Розв'язавши стосовно невідомих $f(\sin x)$ та $f(\cos x)$ систему функційних рівнянь

$$\begin{cases} 2f(\sin x) + 3f(\cos x) = \sin x, \\ 2f(\cos x) + 3f(\sin x) = \cos x, \end{cases}$$

матимемо

$$f(\sin x) = \frac{3}{5}\cos x - \frac{2}{5}\sin x. \tag{13.19}$$

Зробимо заміну $\sin x = t$. Тоді $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - t^2}$, оскільки $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Матимемо $f(t) = \dfrac{3}{5}\sqrt{1 - t^2} - \dfrac{2}{5}t$ для всіх $t \in [0, 1]$. Пряма перевірка показує, що так визначена функція f справді є розв'язком даного функційного рівняння.

13.42 Покладемо в даному співвідношенні $y = 0,\ x = z - d \cdot f(0)$. Тоді $f(z) = a(z - d \cdot f(0)) + c = = az + (c - d \cdot f(0))$. Оскільки $x \in R$, то й z може набувати довільного дійсного значення. Тому розв'язок нашого функційного рівняння шукатимемо серед лінійних функцій вигляду $f(x) = ax + c_1$. Підставивши цей вираз в дане функційне рівняння, матимемо:

$$a(x+d(ay+c_1))+c_1=ax+by+c;$$
$$(a^2d-b)y+(ad+1)c_1-c=0,\qquad \forall y\in R.$$

Тоді $c_1=\dfrac{c}{ad+1}$ при $ad\neq-1$ і $b=a^2d$. Отже, отримаємо

$$f(x)=\begin{cases} ax+\dfrac{c}{ad+1}, & \text{якщо } a^2d=b \text{ і } ad\neq-1, \\ ax, & \text{якщо } b=-a,\ ad=-1,\ c=0. \end{cases}$$

В інших випадках розв'язків немає.

13.43 Покажемо, що різним значенням аргументу відповідають різні значення функції, яка задовольняє даному співвідношенню. Така функція називається ін'єктивною. Справді, припустивши, що $f(x_1)=f(x_2)$, матимемо

$$f(f(x_1))=f(f(x_2))\Leftrightarrow 1-2x_1=1-2x_2\Leftrightarrow x_1=x_2.$$

Виходячи з теореми про проміжне значення для неперервної функції, можна показати, що кожна неперервна ін'єктивна функція є монотонною. Оскільки композиція двох монотонно зростаючих чи монотонно спадних функцій є монотонно зростаючою, а функція $1-2x$ монотонно спадна, то шуканої функції не існує.

13.44 Нехай $x=a$ – корінь рівняння $f(x)=0$. Тоді його коренями також є числа $a^2,a^4,a^8,\ldots$. А тому $|a|=1$, бо многочлен має скінченну кількість коренів. З даного співвідношення видно, що $(1+a)^2$ також є коренем шуканого многочлена, отже, $|1+a|=1$. Нехай $a=\cos\alpha+i\sin\alpha$. Тоді

$$|1+a|=|1+\cos\alpha+i\sin\alpha|=\sqrt{2+2\cos\alpha}=1,$$

Звідки $\cos\alpha=-\dfrac{1}{2}$. Це означає, що a є кубічним коренем із одиниці, тобто многочлен $f(x)$ повинен ділитися на x^2+x+1. Якщо ж степінь $f(x)$ нульовий, то $f(x)\equiv0$, або $f(x)\equiv1$. Прямою перевіркою встановлюємо, що ці функції, а також всі многочлени вигляду $f(x)=(x^2+x+1)^n$ за фіксованого $n\in N$, є розв'язками даного функційного рівняння.

13.45 Очевидно, що $f(x)=x$ задовольняє умову задачі. Нехай $g(x)=f(x)-x$. Дане рівняння можемо переписати у вигляді $2(f(f(x))-f(x))=f(x)-x$, або $2g(f(x))=g(x)$. Тоді

$$g(x)=2g(f(x))=2^2g(f(f(x)))=2^3g(f(f(f(x))))=\dots .$$

Оскільки числа $g(f\dots(f(f(x)))\dots)$ – цілі, то $g(x)$ повинна ділитися на 2^n для всіх $x\in Z$ та $n\in N$. Це означає, що $g(x)\equiv 0$. Тому $f(x)=x$ – єдиний розв'язок даного функційного рівняння.

13.46 Нехай $n=0$. Тоді $f(f(0))+f(0)=3$, звідки $f(0)\le 3$. Розглянемо випадки:
1) $f(0)=0$, тоді $f(f(0))+f(0)\ne 3$;
2) $f(0)=1$, тоді $f(1)=2$, і, припускаючи, що $f(k-1)=k$, отримаємо $f(f(k-1))+f(k-1)=2k+1$, тобто $f(k)=k+1$;
3) $f(0)=2$, тоді $f(f(0))+f(0)=f(2)+2=3$, звідки $f(2)=1$; Підставивши $n=2$ в дане співвідношення, маємо $f(f(2))+f(2)=f(1)+1=7$, звідки $f(1)=6$; тоді $f(f(1))+$ $+f(1)=f(6)+6=5$, тобто $f(6)=-1\notin Z_+$;
4) $f(0)=3$, тоді $f(f(0))+f(0)=f(3)+3$, звідки $f(3)=0$ і $f(f(3))+f(3)=6\ne 8$.
Отже, можливим є лише другий випадок, тобто $f(n)=n+1$ для всіх $n\in Z_+$. Тоді $f(2014)=2015$.

13.47 Нехай $d(x)=f(x+1)-f(x)$. З даної нерівності випливає, що функція $d(x)$ незростаюча і невід'ємна, бо якщо $d(k)\le -1$ для деякого $k\in N$, то f повинна бути строго спадною для $x\ge k$, і

$$f(k+f(k)+1)=f(k)+\sum_{i=0}^{f(k)}d(k+i)\le$$
$$\le f(k)+d(k)(f(k)+1)\le f(k)-(f(k)+1)=-1<0,$$

що суперечить умові. Отже, $d(1) \ge d(2) \ge \ldots \ge 0$, і тому існують такі $c \in Z_+$ і $n_0 \in N$, що $d(x) = c$ для всіх $x \ge n_0$. Це означає, що при $x \ge n_0$ усі точки $(x, f(x))$ лежать на одній прямій.

13.48 Не випливає. Наприклад, $f(2k) = 1$, $f(2k-1) = 2$, де $k \in N$.

14.1 а) Неважко підрахувати, що загальна кількість таких чисел дорівнює $A_5^4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$. Очевидно, в одному розряді кожна з п'яти цифр зустрічається 24 рази. Отже, сума цифр, які стоять в кожному із чотирьох розрядів, взята по всіх числах, які задовольняють умову задачі а), дорівнює

$$24 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 24 \cdot 15 = 360.$$

Тоді сума чотиризначних чисел, в запису яких всі цифри різні, є

$$360 \cdot (10^3 + 10^2 + 10 + 1) = 360 \cdot 1111 = 399960.$$

б) Загальна кількість чотирицифрових чисел, в запису яких цифри можуть повторюватись дорівнює $5^4 = 625$. Кожна з п'яти цифр в одному розряді зустрічається 125 раз. Тому сума цифр, які стоять в одному розряді, взята по всіх числах дорівнює

$$125 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 125 \cdot 15 = 1875.$$

Таким чином, сума таких чисел є

$$1875 \cdot (10^3 + 10^2 + 10 + 1) = 1875 \cdot 1111 = 2083125.$$

14.2 а) Кількість чисел, очевидно, дорівнює $5! = 120$. В одному розряді кожна з п'яти цифр повторюється 24 рази. Тоді сума цифр, які стоять в одному розряді, взята по всіх числах, є

$$24 \cdot (2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 24 \cdot 20 = 480.$$

А сума всіх чисел, які задовольняють умову задачі, дорівнює

$$480 \cdot (10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1) = 480 \cdot 11111 = 5333280.$$

б) Загальна кількість чисел, які задовольняють умову задачі, дорівнює $5^5 = 3125$. Оскільки кожна з п'яти цифр в кожному розряді зустрічається 625 раз, то сума цифр одного розряду, взята по всіх числах, дорівнює

$$625\cdot(2+3+4+5+6)=625\cdot 20=12500.$$

Тоді сума всіх чисел дорівнюватиме

$$12500\cdot\left(10^4+10^3+10^2+10+1\right)=12500\cdot 11111=138887500.$$

14.3 Натуральні числа, які закінчуються на 2013, можна записати у виді $m\cdot 10^4+2013$, де m – натуральне. Після закреслення останніх чотирьох цифр одержиться число m. За умовою число $m\cdot 10^4+2013$ повинно ділитись на m, що можливо лише тоді, коли m є дільником числа 2013. А дільниками числа 2013 є числа 1, 3, 11, 33, 61, 183, 671, 2013. Отже, маємо 8 чисел: 12013, 32013, 112013, 332013, 612013, 1832013, 6712013, 20132013.

14.4 Твердження очевидним чином випливає із нерівностей:

$$\left(n^2+n\right)^2=n^4+2n^3+n^2<n^4+2n^3+2n^2+2n+1<$$

$$<n^4+2n^3+3n^2++2n+1=\left(n^2+n+1\right)^2.$$

14.5 Нехай п’ять послідовних цілих чисел є $n-2$, $n-1$, n, $n+1$, $n+2$. Тоді $(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+$ $+(n+1)^2+(n+2)^2=5\left(n^2+2\right)$. Якщо б число $5\left(n^2+2\right)$ було точним квадратом, то воно ділилось би на 25, отже, n^2+2 ділилось би на 5. Але це можливо лише в тому випадку, коли остання цифра числа n^2 є або 8, або 3, а квадрат жодного цілого числа на ці цифри не закінчується.

14.6 Добуток чотирьох послідовних натуральних чисел n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ можна представити наступним чином:

$$n(n+1)(n+2)(n+3)=\left(n^2+3n\right)\left(n^2+3n+2\right)=$$

$$=\left(n^2+3n\right)^2+2\left(n^2+3n\right)=\left(n^2+3n+1\right)^2-1.$$

Таким чином, розглядуваний добуток міститься між квадратами двох послідовних цілих чисел n^2+3n і

n^2+3n+1, і тому не може бути точним квадратом цілого числа.

14.7 Очевидно

$$\sqrt{\underbrace{11\ldots1}_{2n}-\underbrace{22\ldots2}_{n}}=\sqrt{\frac{1}{9}\cdot\underbrace{99\ldots9}_{2n}-\frac{2}{9}\cdot\underbrace{99\ldots9}_{n}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{9}\left(10^{2n}-1\right)-\frac{2}{9}\left(10^{n}-1\right)}=\frac{1}{3}\sqrt{10^{2n}-1-2\cdot10^{n}+2}=$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{10^{2n}-2\cdot10^{n}+1}=\frac{1}{3}\sqrt{\left(10^{n}-1\right)^2}=\frac{10^n-1}{3}=\frac{\overbrace{99\ldots9}^{n}}{3}=\underbrace{33\ldots3}_{n}$$

.

14.8 Маємо

$$\sqrt{\underbrace{44\ldots4}_{2n}-11\cdot\underbrace{44\ldots4}_{n}+9}=\sqrt{\frac{4}{9}\cdot\underbrace{99\ldots9}_{2n}-11\cdot\frac{4}{9}\cdot\underbrace{99\ldots9}_{n}+9}=$$

$$=\sqrt{\frac{4}{9}\cdot\left(10^{2n}-1\right)-\frac{44}{9}\cdot\left(10^{n}-1\right)+9}=\frac{1}{3}\sqrt{4\cdot10^{2n}-4-44\cdot10^{n}+44+81}=$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{4\cdot10^{2n}-44\cdot10^{n}+121}=\frac{1}{3}\sqrt{\left(2\cdot10^{n}-11\right)^2}=\frac{2\cdot10^n-11}{3}.$$

14.9

$$\underbrace{33\ldots3}_{n}\cdot66\ldots6=\underbrace{33\ldots3}_{n}\cdot\frac{2}{3}\cdot\underbrace{99\ldots9}_{n}=\frac{2}{3}\cdot\underbrace{33\ldots3}_{n}\cdot\left(10^n-1\right)=$$

$$=\underbrace{22\ldots2}_{n}\cdot\left(10^n-1\right)=\underbrace{22\ldots2}_{n}\cdot10^n-\underbrace{22\ldots2}_{n}=$$

$$=\underbrace{22\ldots2}_{n}\underbrace{00\ldots0}_{n}-\underbrace{22\ldots2}_{n}=\underbrace{22\ldots2}_{n-1}1\underbrace{77\ldots7}_{n-1}8.$$

14.10 Позначимо $a_n=\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n+\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n$. Тоді

$$a_{n+2}=\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^{n+2}+\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^{n+2}=\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^{n}\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^{2}+$$

$$+\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^{n}\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^{2}=\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^{n}\left(\frac{9+6\sqrt{17}+17}{4}\right)+$$

$$+\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^{n}\left(\frac{9-6\sqrt{17}+17}{4}\right)=\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^{n}\left(3\frac{3+\sqrt{17}}{2}+2\right)+$$

$$+\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^{n}\left(3\frac{3-\sqrt{17}}{2}+2\right)=3\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^{n+1}+2\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^{n}+$$

$$+3\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^{n+1}+2\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^{n}=3\left[\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^{n+1}+\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^{n+1}\right]+$$

$$+2\left[\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^{n}+\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^{n}\right]=3a_{n+1}+2a_{n}.$$

Оскільки $a_1=3$, $a_2=\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^{2}+\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^{2}=$

$=\frac{9+6\sqrt{17}+17}{4}+\frac{9-6\sqrt{17}+17}{4}=13$, то за допомогою встановленої вище рекурентної формули $a_{n+2}=3a_{n+1}+2a_n$ індукцією по n легко довести, що при будь-якому натуральному n число a_n буде цілим і непарним.

14.11 Доведення проведемо методом математичної індукції. При $n=1$ маємо: $\frac{1+1}{2\cdot 1-1}=2=2^1$. Формула вірна. Нехай формула вірна при $n=k$, тобто $\frac{(k+1)(k+2)\ldots(2k-1)\cdot 2k}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-1)}=2^k$. Тоді при $n=k+1$ матимемо

$$\frac{(k+2)(k+3)\ldots(2k-1)\cdot 2k\cdot(2k+1)\cdot(2k+1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots(2k-1)(2k+1)}=$$

$$=\frac{(k+2)(k+3)\ldots(2k-1)\cdot 2k\cdot(2k+1)\cdot 2(k+1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots(2k-1)(2k+1)}=$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)\ldots(2k-1)\cdot 2k}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots(2k-1)}\cdot\frac{(2k+1)\cdot 2}{2k+1}=2^k\cdot 2=2^{k+1}.$$

14.12 Нехай $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}=a$, $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=b$, $a+b=x$. Тоді

$$x^3=(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)=4+3\cdot\sqrt[3]{-1}\cdot x=4-3x.$$

Отже, $x^3+3x-4=0$, а єдиний дійсний корінь даного рівняння дорівнює 1. Таким чином, $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=1$.

14.13 Домножимо чисельник і знаменник дробу на $2^{3/2}$:

$$\frac{\left(4+\sqrt{15}\right)^{3/2}+\left(4-\sqrt{15}\right)^{3/2}}{\left(6+\sqrt{35}\right)^{3/2}-\left(6-\sqrt{35}\right)^{3/2}}=\frac{\left(8+2\sqrt{15}\right)^{3/2}+\left(8-2\sqrt{15}\right)^{3/2}}{\left(12+2\sqrt{35}\right)^{3/2}-\left(12-2\sqrt{35}\right)^{3/2}}=$$

$$=\frac{\left(5+2\sqrt{15}+3\right)^{3/2}+\left(5-2\sqrt{15}+3\right)^{3/2}}{\left(7+2\sqrt{35}+5\right)^{3/2}-\left(7-2\sqrt{35}+5\right)^{3/2}}=$$

$$=\frac{\left[\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2\right]^{3/2}+\left[\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2\right]^{3/2}}{\left[\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)^2\right]^{3/2}-\left[\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)^2\right]^{3/2}}=\frac{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^3+\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^3}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)^3-\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)^3}=$$

$$=\frac{5\sqrt{5}+15\sqrt{3}+9\sqrt{5}+3\sqrt{3}+5\sqrt{5}-15\sqrt{3}+9\sqrt{5}-3\sqrt{13}}{7\sqrt{7}+21\sqrt{5}+15\sqrt{7}+5\sqrt{5}-7\sqrt{7}+21\sqrt{5}-15\sqrt{7}+5\sqrt{5}}=\frac{28\sqrt{5}}{52\sqrt{5}}=\frac{7}{13}$$

.

14.14 Зауважимо, що $\sqrt{26}<5{,}1$. Звідси $0<\sqrt{26}-5<0{,}1$, тобто $\left|5-\sqrt{26}\right|<0{,}1$, або $\left|5-\sqrt{26}\right|^n<10^{-n}$.

Розглянемо число $x=\left(5+\sqrt{26}\right)^n+\left(5-\sqrt{26}\right)^n$. Якщо до даного виразу застосувати формулу бінома Ньютона, то члени з непарними степенями $\sqrt{26}$ взаємно знищуються, а тому x – ціле число. Враховуючи, що $x-\left(5+\sqrt{26}\right)^n=\left(5-\sqrt{26}\right)^n$, а також те, що $5-\sqrt{26}<0$, одержуємо, що $\left|x-\left(5+\sqrt{26}\right)^n\right|<10^{-n}$, причому різниця $x-\left(5+\sqrt{26}\right)^n$ додатна, якщо n парне і від'ємна, якщо n непарне. Звідси випливає, що перші n знаків після коми числа $\left(5+\sqrt{26}\right)^n$ будуть дев'ятками, якщо n парне і нулями, якщо n непарне.

14.15 Нехай $a^2+b^2=c^2+d^2=|ac+bd|=A^2$. Таким чином, $\frac{a^2}{A^2}+\frac{b^2}{A^2}=\frac{c^2}{A^2}+\frac{d^2}{A^2}=1$.

Позначимо $\frac{a}{A}=\cos\alpha$, $\frac{b}{A}=\sin\alpha$, $\frac{c}{A}=\cos\beta$, $\frac{d}{A}=\sin\beta$, тоді

$$|ac+bd| = A^2\left|\frac{a}{A}\cdot\frac{c}{A}+\frac{b}{A}\cdot\frac{d}{A}\right| = A^2|\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta| =$$

$$= A^2|\cos(\alpha-\beta)| = A^2, \text{ тобто } |\cos(\alpha-\beta)| = 1.$$

Тоді

$$|ad-bc| = A^2\left|\frac{a}{A}\cdot\frac{d}{A}-\frac{b}{A}\cdot\frac{c}{A}\right| = A^2|\cos\alpha\cdot\sin\beta-\sin\alpha\cdot\cos\beta| =$$

$$= A^2|\sin(\alpha-\beta)| = 0.$$

14.16 *1-й спосіб.* Рівність $ac+bd=0$ домножимо на $ad+bc$:

$$0 = (ac+bd)(ad+bc) = a^2cd + d^2ab + c^2ab + b^2cd =$$

$$= ab\left(c^2+d^2\right) + cd\left(a^2+b^2\right) = ab+cd.$$

Отже, $ab+cd=0$.

2-й спосіб. Позначимо $a=\cos\alpha$, $b=\sin\alpha$, $c=\cos\beta$, $d=\sin\beta$. Таким чином, $0 = ac+bd = \cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta = \cos(\alpha-\beta)$, тобто $\cos(\alpha-\beta)=0$.

Тоді $ab+cd = \cos\alpha\cdot\sin\alpha+\cos\beta\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}(\sin 2\alpha+\sin 2\beta) = \sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = 0$.

14.17 $\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\alpha} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4\alpha}} = \ldots =$

$$= \underbrace{\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\left(2^n\alpha\right)}}}}}_{n\ \text{радиккалів}}.$$

Нехай $\frac{1}{2}\cos\left(2^n\alpha\right) = \frac{1}{4}$, тобто $\alpha = \frac{\pi}{3\cdot 2^n}$. Тоді

$$\underbrace{\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}}}}_{n\ \text{радикалів}} = \cos\frac{\pi}{3\cdot 2^n}.$$

14.18 Очевидно $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a < b+c < \left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2$, тобто $\sqrt{a} < \sqrt{b}+\sqrt{c}$. З другого боку, $\left|\sqrt{b}-\sqrt{c}\right|\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right) = |b-c| < a = \left(\sqrt{a}\right)^2$, отже, $\left|\sqrt{b}-\sqrt{c}\right|\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right) < \left(\sqrt{a}\right)^2$. Якщо ліву частину останньої нерівності поділити на $\sqrt{b}+\sqrt{c}$, а праву на $\sqrt{a}$, то одержимо $|\sqrt{b} - \sqrt{c}| < \sqrt{a}$. Таким чином, $|\sqrt{b} - \sqrt{c}| < \sqrt{a} < \sqrt{b} + \sqrt{c}$, що означає, що відрізки $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ утворюють трикутник.

14.19 Розглянемо будь-яку множину A із даних 2013 множин. Вона перетинається з кожною із решти 2012 множин, тому існує елемент $a \in A$, який належить не менш ніж 45 із цих множин. (Дійсно, якщо кожний із 45 елементів множини A належить не більш ніж 44 множинам, то всього є не більше $44 \cdot 45 = 1980$ множин, відмінних від A, що суперечить умові.) Отже, нехай елемент a належить множинам $A, A_1, A_2, \ldots, A_{45}$. Доведемо, що він належить і всім решта множинам. Дійсно, ніякі дві множини із $A, A_1, A_2, \ldots, A_{45}$ не мають спільних елементів, відмінних від a (оскільки спільний – один). Нехай B якась із тих множин, що залишилась і припустимо, що $a \notin B$. Тоді множина B має з кожною з множин $A, A_1, A_2, \ldots, A_{45}$ спільні елементи, відмінні від a, а значить, різні (якщо деякий елемент $b \in B \cap A_i$ і $b \in B \cap A_j$, $b \neq a$, $i \neq j$, то $b \in A_i \cap A_j$, а це суперечить тому, що множини A_i і A_j мають рівно один спільний елемент). Тоді множина B повинна мати не менше 46 елементів, що неможливо. Таким чином, елемент a належить всім множинам.

14.20 Нехай x і y – розміри основ бака, тоді його висота буде дорівнювати $\frac{0,25}{xy}$. Якщо вартість бака позначити через $S(x, y)$ гр., то

$$S(x, y) = 26\left(2xy + \frac{2 \cdot 0,25}{y} + \frac{2 \cdot 0,25}{x}\right) + 13\left(4x + 4y + \frac{0,25}{xy}\right)$$

або

$$S(x, y) = 13\left(4xy + \frac{1}{y} + \frac{1}{x} + 4x + 4y + \frac{0,25}{xy}\right), \quad x > 0, \quad y > 0.$$

Знайдемо частинні похідні цієї функції:

$$S'_x = 13\left(4y - \frac{1}{x^2} + 4 - \frac{0{,}25}{x^2 y}\right); \quad S'_y = 13\left(4xy - \frac{1}{y^2} + 4 - \frac{0{,}25}{y^2 x}\right).$$

Необхідна умова екстремуму:

$$\begin{cases} S'_x = 0, \\ S'_y = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2y^2 - y - 4x^2y - \frac{1}{4} = 0, \\ 4x^2y^2 - x + 4xy^2 - \frac{1}{4} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} (x - y)(1 + 4xy) = 0, \\ 4x^2y^2 - x + 4xy^2 - \frac{1}{4} = 0, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x, \\ 4x^4 - x + 4x^3 - \frac{1}{4} = 0. \end{cases}$$

Друге рівняння системи перетворимо до вигляду:

$$x^4 - \frac{1}{16} + x^3 - \frac{x}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)\left(x^2 + \frac{1}{4}\right) + x\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x^2 + \frac{1}{4} + x\right) = 0.$$

Оскільки $x > 0$, то $x = 0{,}5$ отже, система має розв'язок

$$\begin{cases} x = 0{,}5 \\ y = 0{,}5 \end{cases}.$$

Легко перевірити, що при цих значеннях виконується достатня умова мінімуму і оскільки точка мінімуму одна, то в цій точці функція $S(x, y)$ приймає найменше значення в області $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases}$. Відповідне значення висоти дорівнює 1. Отже, розміри бака: 0,5 м, 0,5 м, 1 м.

14.21 З'ясуємо, як можна завантажити вагон. Вже три великих контейнери не ввійдуть у вагон, оскільки разом важать 90 тонн. Звідси випливає, що є три способи завантаження вагона: нуль великих і не більше як 30 малих, один великий і не більше як 21 малих (в вагоні всього 30 місць і 9 з них уже зайнято великим контейнером), два великих контейнери і не більше як 10 малих.

Нехай завантажено x вагонів у перший спосіб, y вагонів – у другий і z вагонів – у третій. Той факт, що перевезено 20 великих і 250 малих контейнерів, означає, що

$$\begin{cases} y+2z \geq 20, \\ 30x+21y+10z \geq 250. \end{cases}$$

Помноживши першу нерівність на 9 і додавши до другої, дістаємо $30x+30y+28z \geq 430 \Leftrightarrow 30(x+y+z) \geq 430+2z \Rightarrow$

$$\Rightarrow x+y+z \geq \frac{430}{30} = 14\frac{1}{3}.$$

Оскільки $x+y+z$ – ціле число, то $x+y+z \geq 15$. Легко перевірити, що $x=2$, $y=6$, $z=7$ задовольняють систему нерівностей, а сума цих значень дорівнює 15. Це й означає, що мінімальне число вагонів, потрібне для перевезення всіх контейнерів, дорівнює 15.

14.22 Нехай x і y – кількість деталей, виготовлених першим і другим робітниками відповідно. Тоді цілі невід'ємні невідомі x і y задовольняють систему нерівностей:

$$\begin{cases} x + y > 29, \\ x - 2 > 3y, \\ 3x > 2y, \\ 3x - 2y < 60. \end{cases}$$

З цієї системи послідовно маємо:

$$\begin{cases} x > 29 - y, \\ x > 3y + 2, \\ x > \dfrac{2}{3} y, \\ x < 20 + \dfrac{2}{3} y, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 29 - y < 20 + \dfrac{2}{3} y, \\ 3y + 2 < 20 + \dfrac{2}{3} y, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{5}{3} y > 9, \\ \dfrac{7}{3} y < 18, \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 6, \\ y = 7, \end{array} \right.$$

оскільки y – ціле. Якщо $y = 6$, то вихідна система нерівностей не має цілих розв'язків. Якщо $y = 7$, то вихідна система нерівностей має єдиний цілий розв'язок: $x = 24$. Отже, $x = 24$, $y = 7$.

14.23 Нехай вантажу було x тонн, а вагонів вантажопідйомністю 80 тонн було m. Тоді з умови задачі випливає, що дійсне число x $(x > 0)$ та натуральне число m задовольняють наступну систему співвідношень:

$$\begin{cases} 80(m - 1) < x < 80m, \\ 60(m + 8 - 1) < x < 60(m + 8), \\ x = 50(m + 13). \end{cases}$$

Звідси:

$$\begin{cases} 80m - 80 < 50m + 650 < 80m, \\ 60m + 420 < 50m + 650 < 60m + 480, \\ x = 50m + 650, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 21\frac{2}{3} < m < 24\frac{1}{3}, \\ 17 < m < 23, \\ x = 50m + 650, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 22 \\ x = 1750. \end{cases}$$

Отже, вантажу було 1750 тонн.

14.24 Нехай для перевезення блоків буде зроблено x рейсів на машинах вантажопідйомністю 1,5 т, y рейсів на машинах вантажопідйомністю 3 т і z рейсів на машинах вантажопідйомністю 5 т. Тоді загальна вартість F перевезення усіх блоків дорівнює

$$F = 90x + 150y + 240z.$$

При цьому буде перевезено $26x + 45y + 75z$ блоків.
Отже, потрібно знайти цілі невід'ємні числа x, y, z, які задовольняють умову

$$26x + 45y + 75z = 1590,$$

і при яких функція F набуває найменшого значення. Використовуючи останню рівність, F можна перетворити до вигляду

$$F = 5300 + \frac{10}{3}x - 10z.$$

Розв'язок рівняння $26x + 45y + 75z = 1590$, для якого змінна z набуває найбільшого можливого значення, а змінна x – найменшого можливого значення, має вигляд $x = 0$, $y = 2$, $z = 20$. Цей розв'язок, очевидно, є оптимальним (вартість перевезення при цьому буде найменшою).

14.25 Введемо в розгляд вектори $a = \{x,\ y\sqrt{3},\ z\}$ та $b = \{2,\ 1/\sqrt{3},\ -1\}$. Тоді, враховуючи, що $|ab| \le |a||b|$, маємо

$$|2x + y - z| \le \sqrt{x^2 + 3y^2 + z^2} \cdot \sqrt{2^2 + (1/\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 4 \cdot \sqrt{2/3}$$

Отже, $-4 \cdot \sqrt{2/3} \le 2x + y - z \le 4 \cdot \sqrt{2/3}$.

Ті значення змінних, при яких досягаються найбільше та найменше значення, можна знайти, використовуючи умову колінеарності векторів a та b і рівність $x^2 + 3y^2 + z^2 = 2$, тобто розв'язавши систему $\begin{cases} x^2 + 3y^2 + z^2 = 2, \\ \dfrac{x}{2} = 3y = -z \end{cases}$. Отримуємо два розв'язки $\left(\dfrac{\pm 6}{\sqrt{24}}, \dfrac{\pm 1}{\sqrt{24}}, \dfrac{\mp 3}{\sqrt{24}}\right)$, на яких заданий вираз досягає екстремальних значень.

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Садовничий В.А. Задачи студенческих олимпиад по математике / В.А. Садовничий, А.С. Подколзин. – М.: Наука, 1978. – 208 с.
2. Садовничий В.А. Задачи студенческих математических олимпиад / В.А. Садовничий, А.А. Григорян, С.В. Конягин. – М.: Изд-во Московского университета, 1987. – 312 с.
3. Рожков В.И. Сборник задач математических олимпиад / В.И. Рожков, Г.Д. Курдеванидзе, Н.Г. Панфилов. – М.: Изд-во Университета дружбы народов, 1987. – 32 с.
4. Булдигін В.В. Студентські математичні олімпіади. Збірник задач / В.В. Булдигін, В.А. Кушніревич, О.С. Шкабара, В.В. Ясінський. – К.: Вид-во НТУУ "КПІ", 2002. – 176 с.
5. Деркач М.І. Всеукраїнські олімпіади з математики серед студентів технічних, економічних та аграрних ВНЗ: 2005-2009 р.р. / М.І. Деркач, О.І Песчанський, Ю.Є. Обжерін, О.Ф. Хрустальов. – Севастополь: Вид-во СевНТУ, 2010. – 104 с.
6. Деркач М.І. Всеукраїнські олімпіади з математики серед студентів технічних, економічних та аграрних ВНЗ: 2007-2010 р.р. / М.І. Деркач, Ю.Є. Обжерін, О.І Песчанський, О.Ф. Хрустальов. – Севастополь: Вид-во СевНТУ, 2011. – 84 с.

ДЛЯ НОТАТОК