

**Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу**

**Розв'язання задач очного туру  
Всеукраїнської олімпіади з математики  
для професійної орієнтації вступників  
на базі повної загальної середньої освіти**

1. Доведіть, що число  $2014 \cdot 2015 \cdot 2016 \cdot 2017 + 1$  є квадратом натурального числа.

**Розв'язання:** Нехай  $2014 = x$ , тоді

$$\begin{aligned}x(x+1)(x+2)(x+3)+1 &= (x^2+3x)(x^2+3x+2)+1 = \\ &= (x^2+3x)^2 + 2(x^2+3x)+1 = (x^2+3x+1)^2\end{aligned}$$

Отже,  $2014 \cdot 2015 \cdot 2016 \cdot 2017 + 1 = (2014^2 + 3 \cdot 2014 + 1)^2$  – квадрат натурального числа.

2. Половину поля два комбайни косили разом 6 днів, а другу половину один перший комбайн - 15 днів. За скільки днів другий комбайн скосить все поле?

**Розв'язання:** Прийmemo всю роботу, виконану комбайнами рівною 1, тобто  $A=1$ .

Нехай  $x$  – час, потрібний 2-му комбайну, щоб скошити все поле. За умовою задачі час 1-го комбайна 30 днів.

$\frac{1}{30}, \frac{1}{x}$  – відповідно продуктивності комбайнів. Виходячи з умови задачі складаємо рівняння:

$$\left(\frac{1}{30} + \frac{1}{x}\right) \cdot 12 = 1;$$

звідси одержимо:  $\left(\frac{1}{30} + \frac{1}{x}\right) \cdot 12 = 1; \frac{1}{x} = \frac{1}{12} - \frac{1}{30} = \frac{5-2}{60} = \frac{1}{20}$ .

Отже  $x = 20$ .

**Відповідь: 20 днів.**

3. Одне з чисел в три рази більше другого. Якщо друге збільшити в 5 разів, то воно стане більше першого на 7. Знайти суму цих чисел.

**Розв'язання:** Нехай  $x$  – 2-ге число, тоді 1-е число буде рівне  $3x$ .

За умовою маємо:  $5x - 3x = 7; \Rightarrow 2x = 7; \Rightarrow x = 3,5$ .

Тоді друге число буде рівне:  $3x = 3 \cdot 3,5 = 10,5$ .

Їх сума відповідно:  $x + 3x = 3,5 + 10,5 = 14$ .

**Відповідь: 14.**

4. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності  
 $(4x - 5)(4x + 5) - (4x + 1)(3x - 8) \leq 15x - 27$ .

**Розв'язання:** Відкриємо дужки та зведемо подібні доданки:

$$16x^2 - 25 - 12x^2 + 32x - 3x + 8 - 15x + 27 \leq 0;$$

$$4x^2 + 14x + 10 \leq 0; \cdot 2;$$

$$2x^2 + 7x + 5 \leq 0;$$

$$D = 49 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 9 = 3^2;$$

$$x_1 = \frac{-7 - 3}{2 \cdot 2} = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2};$$

$$x_2 = \frac{-7 + 3}{2 \cdot 2} = -\frac{4}{4} = -1.$$

Нерівність запишеться:  $\left(x + \frac{5}{2}\right)(x + 1) \leq 0; \Rightarrow x \in [-2,5; -1]$ .

Найбільший цілий розв'язок :  $x = -1$ .

**Відповідь: -1.**

5. На дорозі між Яремче і Буковелем горизонтальних ділянок немає. Автобус вгору їде зі швидкістю 15 км/год, а вниз – 30 км/год. Яка відстань між цими пунктами, якщо відомо, що шлях туди і назад автобус проїздить за 4 години?

**Розв'язання:** Зрозуміло, що загальна довжина як підйомів, так і спусків на маршруті туди і назад дорівнює відстані між селами, яку позначимо через  $x$  (км), тоді

$$\frac{x}{30} + \frac{x}{15} = 4; \Rightarrow \frac{x + 2x}{30} = 4; \Rightarrow 3x = 120; \Rightarrow x = 40.$$

**Відповідь: 40 км.**

6. Знайдіть сторони прямокутника, якщо його площа дорівнює 48, а площа описаного навколо прямокутника круга рівна  $25\pi$ .

**Розв'язання:** Нехай  $x, y$  – сторони прямокутника, причому  $x > 0, y > 0$ . За умовою радіус описаного кола дорівнює 5, а діаметр, тобто діагональ прямокутника — 10. Тоді маємо систему:

$$\begin{cases} xy = 48; \\ x^2 + y^2 = 100; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy = 96; \\ x^2 + y^2 = 100; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy = 196; \\ x^2 + y^2 - 2xy = 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 = 196; \\ (x - y)^2 = 4. \end{cases}$$

Враховуючи, що  $x, y$  невід'ємні одержимо:

$$\begin{cases} x + y = 14; \\ x - y = 2. \end{cases} \Rightarrow x = 6; y = 8, \text{ або } x = 8, y = 6. \quad \text{Відповідь: } 6, 8 \text{ см.}$$